

ГЕОМЕТРИЯ

7

Жалпы орта білім беретін мектептердің
7-сыныбына арналған оқулық

Өзбекстан Республикасы Халыққа білім
беру министрлігі баспаға ұсынған

Жаңа басылым



Ташкент – 2022

УУК 514(075.3)
КБК 22.151я72
Г 35

Түзушілер:

*Боходир Хайдаров
Наргиза Таштемирова
Исак Асраров*

Пікір жазғандар:

З. Р. Бабаева – Сырдария облысы Гүлістан қаласындағы 11-санды жалпы орта білім беретін мектебінің математика пәні оқытушысы.

М. Х. Усманов – Наманган облысы халыққа білім беру басқармасы қарамағындағы 3-санды жалпы орта білім беретін мектебінің математика пәні оқытушысы.

А. К. Алибекова – Ташкент қаласы Шайхантахир ауданындағы 180-санды жалпы орта білім беретін мектебінің математика пәні оқытушысы.

Геометрия 7-сынып (Мәтін): оқулық / Б. Хайдаров, Н. Таштемирова, И. Асраров – Ташкент: Республикалық білім орталығы, 2022. – 192 б.

ЮНИСЕФ-тің Өзбекстандағы өкілдігімен ынтымақтастықта дайындалды.

Өзбекстан Республикасы Пәндер академиясы В. И. Романовский атындағы математика институты қорытындысы негізінде жетілдірілді.

*Оригинал макет және дизайн концепциясын
Республикалық білім орталығы жасады.*

Республика мақсатты кітап қоры қаржысы есебінен басылды.

Шартты белгілер:



– геометриялық ұғымның анықтамасы



– теоремалық сипаттау



– аксиомалық сипаттау



– тақырып бойынша сұрақтар



– белсендіру жаттығулар



– мысал шешу үлгісі



– практикалық жаттығулар және орындау



– геометриялық зерттеу



– тарихи үзінді



– геометриялық басқатырма



– мультимедиялық қолданба



– электронды ресурстар

ISBN 978-9943-8372-9-4

Республикалық білім орталығы, 2022



СӨЗ БАСЫ

Құрметті оқушылар! Сен математиканың ең көрікті бөлімі – геометрияны үйренуді бастап отырсың. Төменгі сыныптарда кейбір геометриялық денелер мен олардың қасиеттерімен танысқан едің. 7-сыныпта геометриялық пішіндердің керемет дүниесіне саяхат етіп, оны жан-жақты және тізімді түрде үйренуге кірісесің.

Бізді геометриялық пішіндер дүниесі орап тұрады. Геометриялық пішіндерге күнделікті тұрмыста, әр қадамда кез келеміз. Шындығында, төртбұрыш пішініндегі терезе рамы, қар ұлпаларының таң қаларлық ою-өрнектері, түрлі пішіндегі үйлер, сіріңке құтысы, велосипед дөңгелегі, сабын шарлары, гүлдер, ағаш жапырақтары және тағы басқалар бір пішінге ие.

Демек, олар геометрияға байланысты. Сондықтан геометрияны білу, оның сырларынан хабардар болу әрбір кісі үшін қажет.

Геометриямен танысу ең қарапайым геометриялық пішіндер мен олардың қасиеттерін зерттеуден басталады. Олар негізінде өзің үшін жаңадан-жаңа геометриялық пішіндер және олардың қасиеттерін ашасың.

Сонымен бірге, **геометрия сені дұрыс ойлауға үйретеді, логикалық қорытынды жасауға және олар негізінде ұтымды шешімдер қабылдауға үйретеді, дұрыс қорытынды жасау дағдыларын меңгеруге көмектеседі.**

Бұл кемелдікке ұмтылу әрбір жігіт-қыз үшін өте маңызды қасиет.

Геометрияны тек қана оқу емес, оны игеруге ұмтылуың керек болады. Әрбір сөздің «өзегін шағуға» ұмтыл. Түсінбесең, қайта оқы, сызбаларға жүгін, мүмкіндігі барынша көбірек есептер шығар. Әрбір шешілген есеп геометрияны үйренудің кейінгі кезеңіне негіз дайындайды. Сонда ғана геометрия өз сырларын саған ашып барады.

Сен геометриямен тез арада дос боласың және ол сен үшін сүйікті тағы қызықты болған пәндеріңнің біріне айналатынына сенімдіміз.

Авторлар

МАЗМҰНЫ



I ТАРАУ. АЛҒАШҚЫ ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ МАҒЛҰМАТТАР. ПЛАНИМЕТРИЯ

1. Қарапайым геометриялық пішіндер	8
2. Кесінді. Кесінділерді салыстыру және өлшеу	17
3. Бұрыш. Бұрыштарды салыстыру және өлшеу	29
4. Практикалық жаттығу және қолдану.	38
5. Бұрыштардың түрлері	45
6. Перпендикуляр түзу сызықтар	53
7. Практикалық жаттығу және қолдану. Білімінді сынап көр	61



II ТАРАУ. ҮШБҰРЫШТАР

8. Үшбұрыш, оның түрлері және элементтері	72
9. Үшбұрыштар теңдігінің бірінші белгісі	79
10. Тең бүйірлі үшбұрыштардың қасиеттері	82

11. Үшбұрыштар теңдігінің екінші белгісі	85
12. Үшбұрыштар теңдігінің үшінші белгісі	87
13. Практикалық жаттығу және қолдану. Білімінді сынап көр	91



III ТАРАУ. ПАРАЛЛЕЛЬ ТҮЗУ СЫЗЫҚТАР

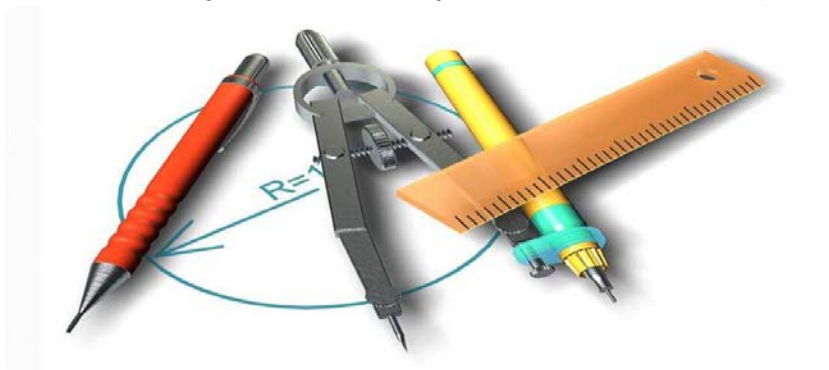
14. Параллель түзу сызықтар.....	100
15. Екі түзу сызықтың параллель қасиеттері.....	105
16. Екі параллель түзу сызық және кесіндісін пайда еткен бұрыштар	109
17. Практикалық жаттығу және қолдану. Білімінді сынап көр	114



IV ТАРАУ. ҮШБҰРЫШ ҚАБЫРҒАЛАРЫ МЕН БҰРЫШТАРЫ АРАСЫНДАҒЫ ҚАТЫНАСТАР

18. Үшбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы	124
19. Тік бұрышты үшбұрыш	131
20. Бұрыш биссектрисасының қасиеттері	135

21. Үшбұрыштың қабырғалары және бұрыштар арасындағы қатынас	138
22. Практикалық жаттығу және қолдану. Білімiңдi сынап көр	142



V ТАРАУ. ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ СЫЗУҒА ҚАТЫСТЫ ЕСЕПТЕР

23. Циркуль мен сызғыш көмегiнде геометриялық жасауға қатысты есептер	152
24. Практикалық жаттығу мен қолдану. Білімiңдi сынап көр	162



VI ТАРАУ. ҚАЙТАЛАУ

25. Қайталауға байланысты есептер	168
26. Практикалық жаттығу және қолдану. Білімiңдi сынап көр. Қорытынды бақылау	174
7-сынып үшiн геометрияға байланысты негiзгi мәлiметтер	180
Жауаптар және нұсқаулар	185



**7-СЫНЫП «ГЕОМЕТРИЯ»
ОҚУЛЫҒЫ ҮШІН
ТАНЫМДЫҚ ОЙЫНДАР**



**7-СЫНЫП
«ГЕОМЕТРИЯ»
ОҚУЛЫҒЫ ҮШІН
ВИДЕОСАБАҚТАР**



I ТАРАУ

АЛҒАШҚЫ ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ МАҒЛҰМАТТАР. ПЛАНИМЕТРИЯ

Бұл тарауды меңгерген соң, төмендегі білім және практикалық дағдыларға ие боласыз:

Білім:

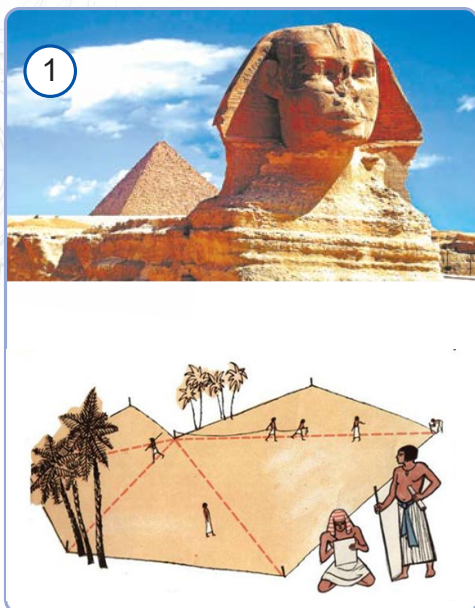
- геометрия тарихына байланысты негізгі мәліметтер;
- нүкте, түзу сызық, жазықтық, кесім, сәуле, бұрыш сияқты бастапқы геометриялық түсініктер;
- ең оңай геометриялық пішіндердің қасиеттері;
- геометрия және планиметрияның анықтамасы;
- айнала, шеңбер және олардың элементтерінің анықтамасы;
- түзу, өткір және өтпес бұрыштар;
- іргелес және вертикаль бұрыштар және олардың қасиеттері;
- анықтама, аксиома, теорема және дәлелдеу ұғымдарының мәні;
- терістігін пікірлеу арқылы дәлелдеу әдісі.

Практикалық дағдылар:

- қарапайым геометриялық пішіндерді жазықтықта бейнелеу, белгілеу, тани алу және белгілеріне қарай оқу;
- кесімдерді сәулеге қою, өзара салыстыру және олардың ұзындықтарын өлшеу;
- бұрыштарды жарты жазықтықтарға қою, салыстыру және олардың градус өлшемдерін табу;
- геометриялық пішіндерді жасау және өлшем жұмыстарында сызғыш, циркуль, транспортир сияқты оқу құралдарынан пайдалана алу.

1

ҚАРАПАЙЫМ ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ ПІШІНДЕР



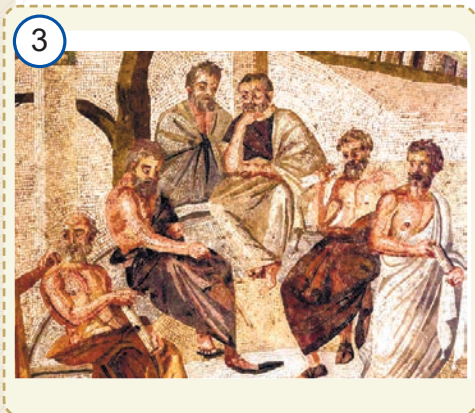
1.1. Геометрияның пайда болуы

Геометрияға байланысты алғашқы түсініктер бұдан 4–5 мың жыл бұрын ежелгі Египетте пайда болған. Сол кезде өзеннің суы жыл сайын тасып, егін алаңдарын жуып кеткен. Сол үшін егіндерді қайта бөлу мен салық мөлшерін анықтау үшін бұл алаңдарды белгілеу және өлшеу жұмыстарын жүзеге асыруға тура келген (1-сурет). Ежелгі грек ғалымдары жер өлшеу әдістерін египеттерден үйреніп, оны **геометрия** деп атаған. «**Геометрия**» грек сөзі, «**гео**» – жер, «**метриа**» – өлшеу деген мағынаны білдіреді.

Геометрияға қатысты алғашқы мағлұматтар ежелгі Вавилонда пайда болған. Негізінен, тарихшылар Пифагор теоремасы Вавилонда табылған деп есептейді. Эрамыздан бұрынғы VII – VI ғасырларда Ежелгі Хорезмде де Египетте сияқты Әмударияның төменгі жағында жер өлшеу жұмыстары атқарылған.

Ежелгі Египетте геометрия алып пирамидалар, сарайлар мен тұрар үйлерді құруда да керек болған. Гректер геометрияны құрылыстан тыс, теңізде сүзуде де пайдаланған (2-сурет). Міне осындай практикалық қажеттіліктер адамды әр түрлі пішіндегі және олардың қасиеттерін зерттеуге шақырады. Ежелгі Грекияның жеті данышпандарының бірі Милеттен шыққан Фалес геометрияның алғашқы теоремаларын дәлелдеді.

Эрамыздан бұрынғы IV ғасырға келіп, геометрияға байланысты үйренілген көптеп түсініктер және олардың қасиеттері жиналып қалған. Грек ғалымы Платон геометрияда ерекше бір заңдылықты байқаған: алдымен үйренілген, туралығы дәлелденген қасиеттерден логикалық ойлау, пікір жүргізу арқылы жаңа қасиеттерді шығарса болар екен. Мұндай жаттығулар оқушылардың пікірлеу қабілетін өсіргені үшін геометрия мектептерінде негізгі пәніне айналған. Платонның өзі де академиясының кіреберіс төбесіне «Геометрияны білмейтіндер үшін бұл мектепке жол жоқ!» деген ұран асып қойған (3-сурет).



Ежелгі грек ғалымы Евклид сол кездегі белгілі болған барлық геометриялық түсінік және қасиеттерді реттеп, «Негіздер» деген кітабында баяндаған. Бұл кітап екі мың жыл бойы мектептер үшін өте маңызды оқулық міндетін өтеді және ғылымның дамуында үлкен маңызға ие болды.

Бұрын жасаған дерлік барлық ғалымдар геометриямен айналысқан. Ұлы отандастарымыз – Мұхаммед ибн әл-Хрезми, Ахмад әл-Ферғани, Әбу Райхан Беруни, Әбу Әли ибн Сина, Омар һайям да Евклидтің «Негіздерін» терең үйреніп, бұл пәннің дамуына өз үлестерін қосқан. Шығыс мемлекеттерінде геометрия хандаса деп аталған және оған үлкен мән берілген. Бұл пікірді сәулетші (инженер) сөзінің түбірі «хандаса» екендігі де дәлелдеп тұр.

1.2. Геометрияға кіру

Бізді қоршаған әрбір предметтің қандай да бір пішіні бар. Мысалы, кірпішті алайық. Ол 6-сыныптан саған таныс тік бұрышты параллелепипед пішінді (4-сурет). Оның 8 төбесі бар – олар нүктелер, 12 қыры бар – олар кесінділер, 6 жағы бар – олар тік бұрыштар.

Нүкте, түзу сызық, кесінді, бұрыш, квадрат, дөңгелек, куб, шар сияқты қатар геометриялық пішіндермен сен төменгі сыныптарда танысқансың (5–6-суреттер).

6-суретте берілген пішіндер табиғаттағы түрлі денелердің геометриялық үлгісі. Денелерді геометриялық тұрғыдан зерттегенімізде олардың тек пішінін есепке аламыз.

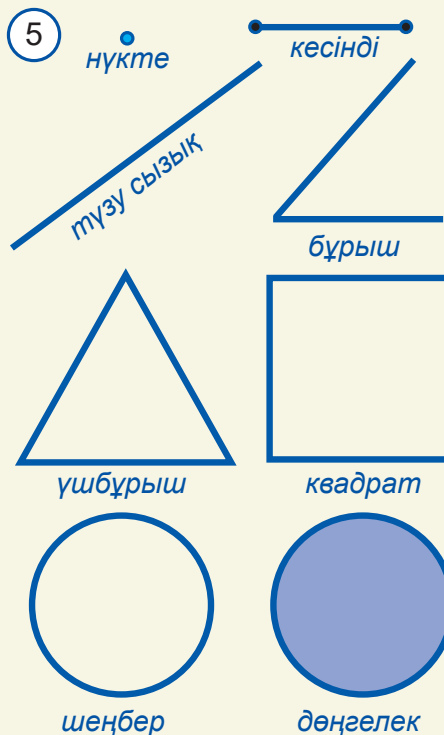
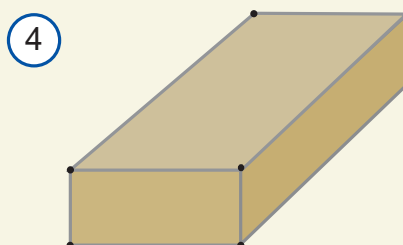
Біз нүкте, кесінді, бұрыш, үшбұрыш секілді жазық пішіндерін дәптер парағына сыза аламыз. Куб, пирамида, шар сияқты кеңістікті пішіндерді болса сыза алмаймыз. Дегенмен олардың көрінісін дәптерге бейнелеуіміз мүмкін.

Геометрия – геометриялық пішіндер және олардың қасиеттері туралы пән.

Планиметрия геометрияның бөлімі болып, ол жазықтықтағы геометриялық пішіннің қасиеттерін үйренеді. Бұл пішіндерді **жазық** (яғни екі өлшемді) **пішіндер** деп те атаймыз.



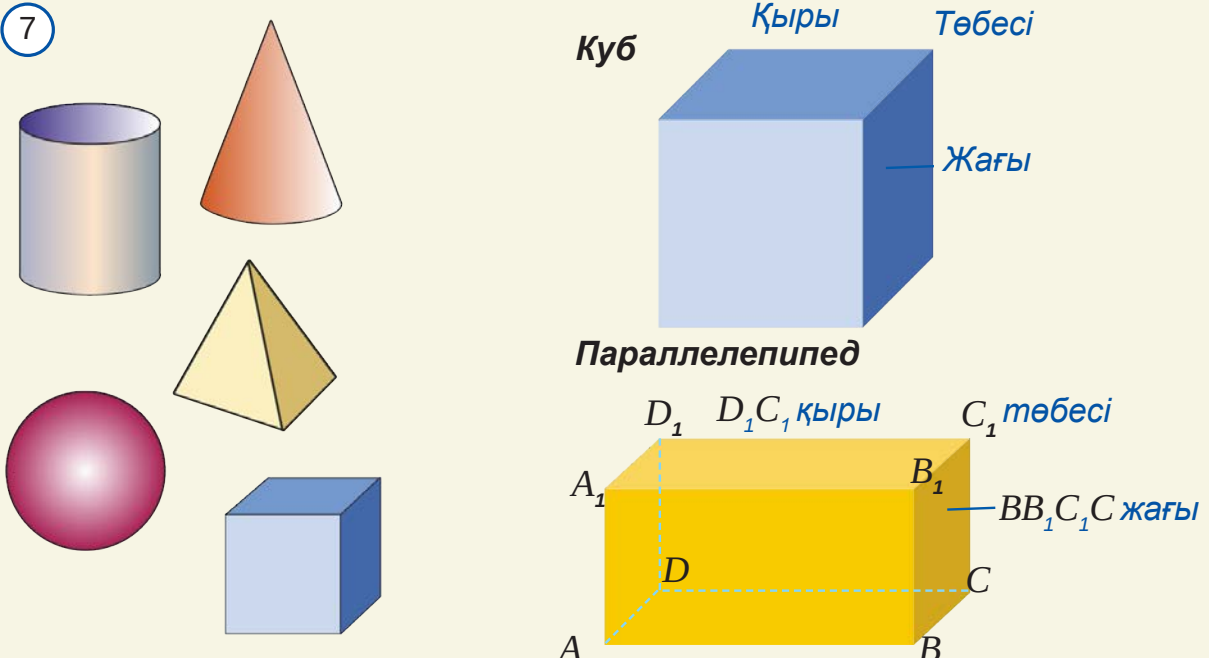
Евклид (эрамаздан бұрынғы III ғасыр) – ежелгі грек ғалымы, геометрия пәнінің дамуында үлкен орын иелеген – «Негіздер» кітабымен белгілі.



6



7



Кеңістіктегі пішіндердің қасиеттерін **стереометрия** деп аталатын бөлімі зерттейді. Төңірегіміздегі барлық предметтер үш өлшемді болып, олардың пішіні қайсы бір кеңістіктегі геометриялық денеге ұқсап кетеді (6-сурет).

Төменгі сыныптарда кеңістік (үш өлшемді) денелер мен танысқансың. Сондай болса да, геометриялық пішіндердің кейбір планиметрияға байланысты қасиеттері бар, біз оларды да кезі келгенде үйреніп барамыз.

Сондықтан, кейбір кеңістіктегі дене элементтері туралы мәліметтерді қысқаша ескертіп өту керек деп таптық (7-сурет).

1.3. Геометрияның алғашқы түсініктері

Нүкте, түзу сызық және жазықтық – геометрияның негізгі түсінігі. Оларға сипаттама бермей қабылдаймыз.

Қаламды қағазға, борды тақтаға тигізгенде қалған із немесе аспандағы жұлдыздарды (8-сурет) алып қарайтын болсақ, олар көзімізге соншама кішкентай болып көрінеді,

олардың өлшемдерін есептемесе де болады. **Нүкте** – міне сондай өлшемдерін есепке алмаса да болатын нәрселердің геометриялық рәмізі. Евклид «Негіздер» деп аталған еңбегінде нүктені ешбір бөлігі жоқ пішін деп есептеген. Өрқандай нүктелер топтамы геометриялық пішін ретінде қаралады.

Тегіс жатқызылған темір жол рельстері (9-сурет), сымағаштарға кере тартылған электр сымдары, кере тартылғандар сымы сияқты денелерді геометриялық рәмізі **түзу сызық** болады. Жарық сәулесі түзу сызық бойлап тарқалады. Негізінде түзу сызық шексіз пішін. Біз тек қана оны қағаз, сынып тақтасына бейнелегенде оның шағын ғана бөлігін сызамыз. Бірақ түзу әрқашан екі жаққа шексіз жалғасады деп ойлау керек.

Еден, үстелдің үсті, қабырға, дәптердің парағы, тыныш көлдегі судың деңгейі (11-сурет) сияқтылардың геометриялық бейнесі **жазықтық** болады.

Нүктелер латынның бас әріптерімен A, B, C, D , ... түзулер латынның кіші әріптерімен a, b, c, d , ... белгіленеді және « A нүкте», « a түзу» сияқты оқылады (11-сурет).



Жазықтықта қандай түзу сызықты алсақта, ол түзу сызыққа тиісті нүктелер де, оған тиісті болмаған нүктелер де бар.

Мысалы, 11-суретте A нүкте a түзу сызыққа тиісті, B және C нүктелер a түзу сызыққа тиісті емес. Оны қысқаша $A \in a$ және $B \notin a, C \notin a$ түрінде белгілейміз және « A тиісті a » және « B тиісті емес a » деп қоямыз.

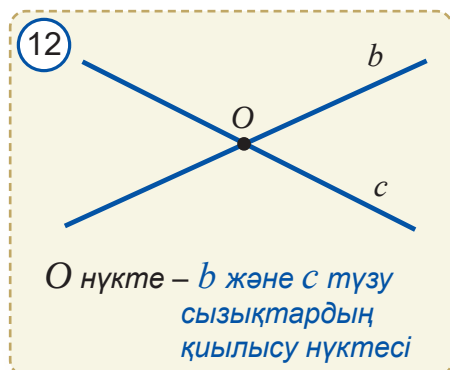
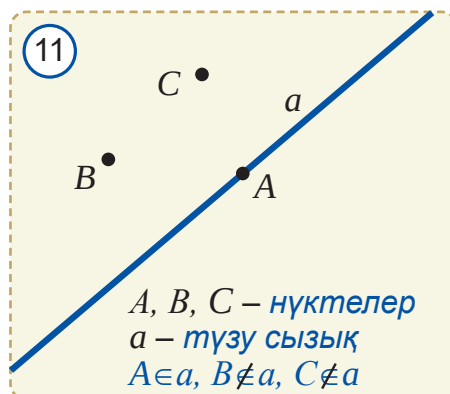
Егер O нүкте b түзу сызыққа да, одан ерекше c түзу сызыққа да тиісті болса b және c түзу сызықтар O нүктеде **қиылысады** дейміз (12-сурет). O нүкте b және c **түзу сызықтың қиылысу нүктесі** деп аталады.

13-суретте бейнеленген түзу сызық A және B нүктелерінен өтеді.

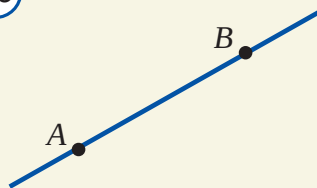


Кез келген екі нүкте арқылы тек бір түзу сызық жүргізуге болады және ол тек біреу ғана болады.

Бұл сипаттамаға орай түзу сызықтың екі нүктесі көрсетілсе, бұл түзу анықталған болады. Сондықтан анықталған түзуді онда жатқан екі нүктенің көмегімен де белгілеуге болады. 13-суретте AB **түзу сызық** бейнеленген. Дәл осы түзу сызық кейде BA түзу сызық көрінісінде де белгіленеді.



13



AB – түзу сызық

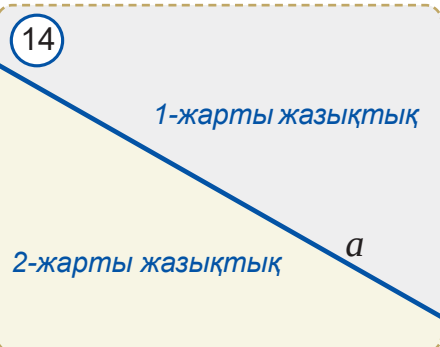


Кез келген түзу жазықтықты екі бөлікке екі жарты жазықтыққа бөледі.

Қарастырылып жатқан түзу жарты жазықтықтың екеуіне де тиісті деп қарастырылады және олардың жалпы шегарасы болады (14-сурет).

Ескерту. Кейінгіде екі түзу сызық (екі нүкте, екі жарты жазықтық, ...) дейілгенде әр түлі екі түзу сызық (екі нүкте, екі жарты жазықтық, ...) түсініледі.

14



Жаттығу. Екі A және b түзу сызық A нүктеде қиылысады. A түзу сызық та B нүктеден өтеді. b түзу сызық та B нүктеден өтеді ме?

Шешілуі. Жоқ, b түзу сызық B өте алмайды. Егер b түзу сызық та B нүктеден өтетін болса, онда A және b түзу сызықтарының екеуі де A және B нүктеден өтіп қалады. Бұл екі нүктеден тек бір

түзу сызық өткізу мүмкін, деген қағидаға тура келмейді. Сондықтан b түзу сызық B нүктеден өтуі мүмкін емес.

Сөйтіп, түзу сызықтардың төмендегі тағы бір маңызды қағидасын біліп алдық.

Қағида. Егер екі түзу сызық қиылысса, олар тек бір нүктеде қиылысады.



Тақырып бойынша сұрақтар

1. Геометрияға байланысты алғашқы мәліметтер қайда және қалай пайда болған?
2. Геометрия сөзінің мәні не?
3. Геометрия пәніне негіз салған және оның дамуына үлес қосқан қайсы ғалымдарды білесің?

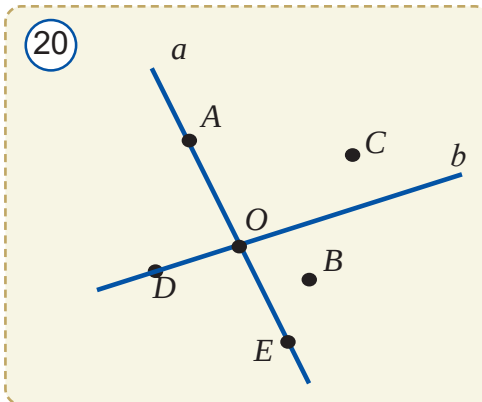
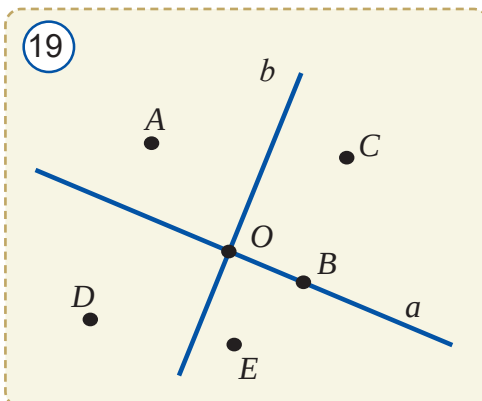
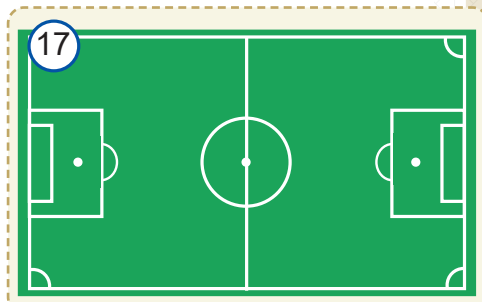


4. Геометрия пәні нені үйренеді?
5. Планиметрия геометрияның қандай бөлімі? Стереометрия ше?
6. Жазықтықтағы қандай қағидаларды білесің?
7. 15–16-суреттерде келтірілген заманауи үйлер суретте қандай геометриялық пішіндерді көріп тұрсың?
8. 17-суретте футбол алаңы бейнеленген. Мұнда қандай геометриялық пішінді көріп тұрсың?
9. 18-суретте еліміздің символы бейнеленген. Ол қандай пішіндерден түзілген?

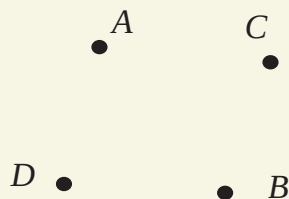


Практикалық жаттығу және қолдану

- Төмендегі өрнектерді оқы және түсіндір:
 - $A \in d$; б) $C \notin d$; в) $C \in AB$. Бұл өрнектерге сәйкес сызбаларды сыз.
- Екі қиылысушы түзу сызық сыз: а) олардың екеуіне де тиісті; б) тек біреуіне тиісті; в) екеуіне де тиісті болмаған нүктелерді белгіле. Енгізілген белгілер көмегінде бұл қатынастарды жаз.
- 19-суретте мүмкіндік барынша көбірек нүкте, түзу сызық, жазықтық және жарты жазықтық арасындағы қатынастарды анықта және оларды енгізілген белгілер көмегінде жаз.
- 20-суреттен:
 - A түзу сызыққа тиісті;
 - b түзу сызыққа тиісті;
 - әр екі түзу сызыққа тиісті;
 - A түзу сызыққа тиісті, бірақ b түзу сызыққа тиісті болмаған;
 - b түзу сызыққа тиісті, бірақ A түзу сызыққа тиісті болмаған;
 - A түзу сызыққа да, b түзу сызыққа тиісті болмаған нүктелерді анықта.
- A және B нүктелер c түзу сызыққа тиісті, C нүкте болса c түзу сызыққа тиісті емес. AB және AC түзу сызықтар туралы не деуге болады?
- AB және AK түзу сызықтар неше ортақ нүктеге ие болуы мүмкін?
- Жазықтықта b түзу сызық сыз және онда A нүктені белгіле. b түзу сызықтан өзгеше AB түзу сызықты жүргіз. B нүкте b түзу сызықта жата ма?
- Жазықтықта жатқан ерікті: а) бір; б) екі; в) үш нүктеден өткен неше түзу сызық жүргізу мүмкін? Жауабыңды айт.
- Жазықтықты: а) бір түзу сызық неше жарты жазықтыққа; б) екі түзу сызық неше бөлікке бөледі?
- AB , BC , AC түзу сызықтарын сыз. Олар жазықтықты неше бөлікке бөледі?



21



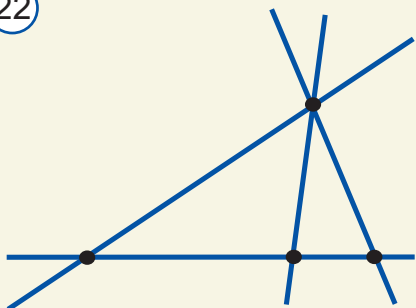
11. Дәптеріңе A, B, C және D нүктелерін белгіле (21-сурет). Олардың әр екеуінен өтетін барлық түзу сызықты сыз. Барлығы неше түзу сызық пайда болды? Бұл түзу сызықтар жазықтықты неше бөлікке бөледі?

12*. Кез келген үшеуі бір түзде жатпайтын а) үш; б) төрт нүкте арқылы осы нүктелерді жұп-жұбымен тұтастырушы неше түзу сызық өткізуге болады?

13*. Төрт түзудің әр екеуі қиылысқан нүктелер белгіленді. Нүктелер саны көбімен нешеу болады? Түзулер бесеу болса ше?

14*. 22-суретте төрт түзу сызық төрт нүктеде қиылысты. Сондай сызба сыз, олар а) 5; б) 6; нүктеде қиылыссын. Төрт түзу сызық үш нүктеден өтуі мүмкін бе?

22

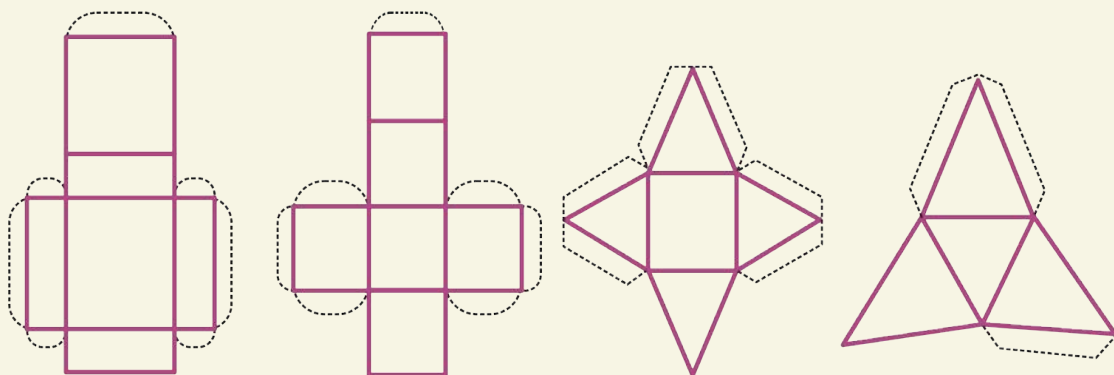


Практикалық жаттығу және қолдану

Жазықтықта бес нүктені солай орналастыр, олардың әр екеуі арқылы түзу өткізгенде, түзу сызықтар бесеу болсын.

Кеңістіктегі денелерді жақсы білу үшін олардың моделінен пайдаланған жөн. Кеңістіктегі денелердің моделін олардың жайылмасынан пайдаланып жасау мүмкін (23-сурет). Көріп тұрғанындай, кеңістіктегі денелердің жайылмасы жазық геометриялық пішіндерден тұрады. Төмендегі жайылмалардан пайдаланып, түзу бұрышты параллелепипед, куб, және пирамидалар моделін жаса.

23



Геометриялық көркемдік

Ежелгі архитектура ескерткіштерін құрған ата-бабаларымыз үлкен геометриялық білім және құзыреттілікке ие болған. Мұны бірғана Самарқанд қаласындағы Регистан алаңында құрылған тарихи ескерткіштерден де біліп алуға болады (23-сурет). Бұл ғажайыптарды құруда олар қандай геометрикалық білім және дағдылардан пайдаланған деп ойлайсың?



Хиуа қаласындағы Ишанқала суретінде (24-сурет) қандай геометриялық пішіндерді көріп тұрсың?

Тәж-Махал – Үндістанның Агра қаласында бабури билеуші Шах-Жахан құрғызған ежелгі ескерткіш (25-сурет). Оны құрған қол өнершілер геометриядан толық білімге ие болғандықтары сөзсіз.

Сидней қаласы опера театры (26-сурет) – Аустралияда құрылған заманауи ғимараттық үлгісі. Өзінің тамаша геометриялық көрінісі мен таң қалдырады.

Сұлу геометриялық ой иесі, Ирактық атақты архитектор әйел Заһа Хадидтің жобасы негізінде Қытай астанасы Пекин қаласында құрылған «Galaxy Soho» дем алу комплексінің таңғажайып көрінісін тамашалау мүмкін емес (27-сурет).



Ахмад әл-Ферғани

Шамамен 797–875 жылдарда өмір сүріп еңбек еткен ұлы астроном, географ және математик ғалым.



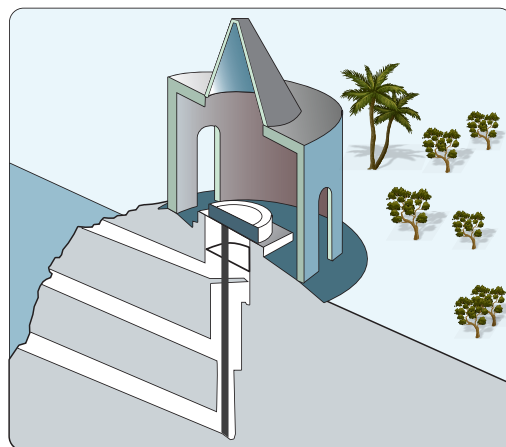
Тарихи үзінді

Нілді бағындырған ферғаналық ғұлама

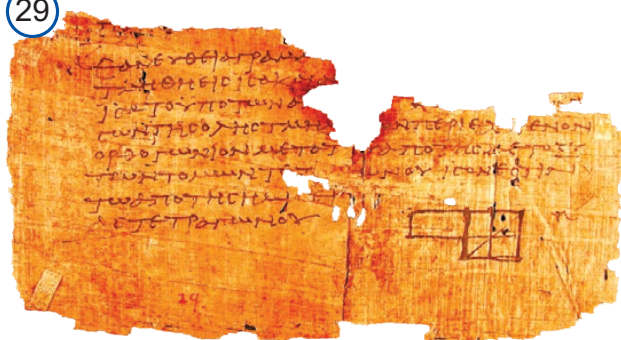
Тарихи мәліметтер бойынша, елімізден шыққан Ахмад әл-Фергани 861 жылы Каир қаласына жақын жерде Ніл өзеніндегі су деңгейін өлшейтін «Нилометр» (яғни «Ніл өлшегіш») деп аталған ғимаратты салған (28-сурет). Ғылым-техника және сәулеткерлік тұрғыдан аса күрделі саналған, сондай-ақ өте сирек кездесетін геометриялық шешімдерді үйлестірген құрылмада жүргізілген өлшеу жұмыстары ұзақ уақыт кезеңінде диқанишылық үшін аса қажет болған және ол қазіргі күнге дейін сақталып қалған.

Ахмад әл-Фергани өзінің «Устурлаб жасау туралы трактат» еңбегінде астрономия үшін маңызды қасиет – Птоломей теоремасының талғампаз дәлелін берген. Орта ғасыр Еуропа ғылыми әдебиеттерінде оны Альфраганус деп атаған. Ахмад әл-Фергани құрметіне Айда табылған кратерден аталған және Каир қаласында ескерткіш орнатылған.

28



29



Ең ежелгі трактат

29-суретте эрамыздан бұрынғы III ғасырда өмір сүрген грек хұсни-хатшысы Ахмет тарапынан папирус жапырағына жазылған және бізге дейін жетіп келген алғашқы геометриялық трактат келтірілген.

2

КЕСІНДІ. КЕСІНДІЛЕРДІ САЛЫСТЫРУ ЖӘНЕ ӨЛШЕУ

2.1. Кесінді және сәуле

Егер A түзу сызыққа үш – A, B, C нүктелері алынса (1-сурет), олардың тек біреуі – B нүкте қалған екеуі, яғни A және C нүктелерінің арасында жатады. A және B нүктелер C нүктеден бір жақта, B және C нүктелері болса бір жақта жатады.



Бір түзу сызықта алынған, қалаған үш нүктенің тек біреуі қалған екеуінің арасында жатады.

Кесінді деп түзу сызықтың екі нүктесі және олар арасында жатқан нүктелерден тұратын бөлігіне айтылады. 2-суретте кесінді бейнеленген. A және B нүктелер **кесіндінің ұштары** немесе **шеткі нүктесі** дейіледі. Олар арасындағы нүктелер болса кесіндінің **ішкі нүктелері** деп аталады.

Кесінді өзінің шеткі нүктелері көмегінде AB кесінді түрінде белгіленген. Дәл осы кесіндіні BA кесінді тәрізінде жазуға да болады.

Сәуле деп сызықтың бір O нүктесі және оның бір жағында жатқан барлық нүктелерден тұратын бөлігіне айтылады. O нүктесі болса **сәуленің ұшы** немесе **бастапқы нүктесі** деп аталады. 3-суретте сәуле бейнеленген.

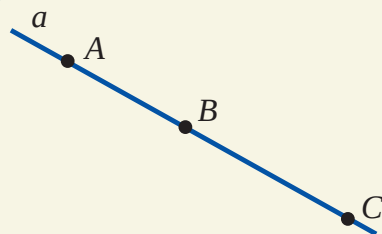
Сәуле O ұшы және бір A нүктесі арқылы « OA сәуле» түрінде белгіленеді (3-сурет). Мұндай жазуда сәуле бірінші орында жазылады.

Кейбір жағдайларда OA сәуле O нүктеден шығушы сәуле деп те айтылады.

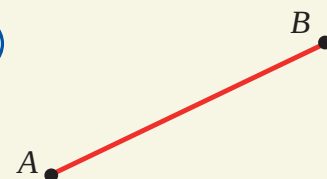
a түзу сызықта жатқан O нүкте бұл түзу сызықты екі **бір-бірін толтырушы сәулелерге** ажыратады. 4-суретте бір-бірін толтырушы OA және OB сәулелер бейнеленген.

Сәулені жарықтық нұрының геометриялық рәмзі ретінде қарау мүмкін. Түнде аспанға қаратылған лазер немесе күшті прожектор нұры мысал бола алады (5-сурет). «Сәуле» термині осыдан келіп шығады.

1



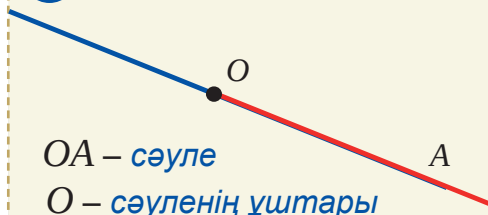
2



AB – **кесінді**

A, B – **кесіндінің ұштары**

3



OA – **сәуле**

O – **сәуленің ұштары**

4



OA және OB – **бірі-бірін толтырушы сәулелер**

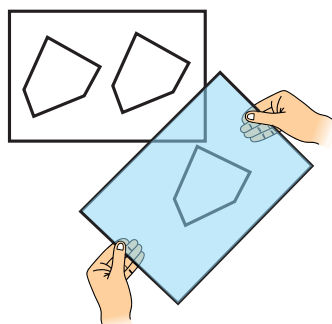
5



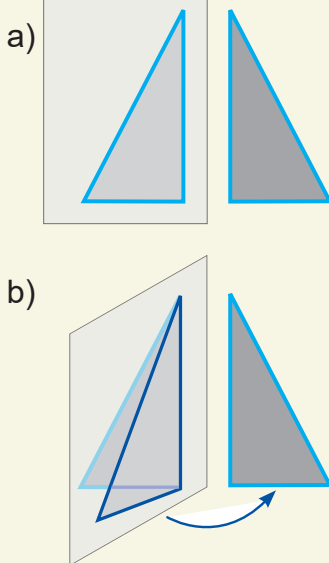
6



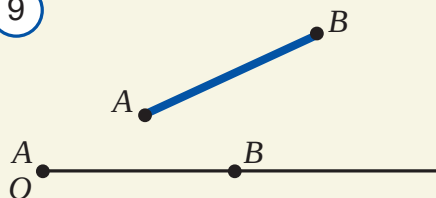
7



8



9



2.2. Кесінділерді салыстыру



Белсендіруші жаттығу

1. Төңірегіндегі пішіндері де, өлшемдері де бірдей болған заттарға мысалдар келтір.

2. Екі дәптер парағының өлшемдері бірдей екендігін қандай тәсілмен анықтау мүмкін?

3. 6-суретте сол және оң қол бейнесі берілген. Бұл пішіндерді екіншісінің үстіне дәл түсетіндей етіп қою мүмкін бе?

Тең пішіндер деп бірі екіншісінің үстіне бетпе-бет түсетіндей қоюға болатын пішіндерді айтады.

Бір геометриялық пішінді екіншісінің үстіне қою түсінігімен белсендіруші жаттығуларында таныстық. Бұл түсінікті іс жүзінде төмендегіше елестетуге болады. Бір пішінді екіншісінің үстіне қою үшін, мөлдір пленкаға бірінші пішін нұсқасын көшіріп үлгі аламыз. Содан соң мөлдір пленканы жазықтық бойлап жылжытып, бірінші пішін үлгісін екінші пішін үстіне түсетіндей етіп қоюға әрекет жасаймыз (7-сурет). Егер пішіндер дәл бетпе-бет түссе, бұл пішіндер тең болады.

Кейде бір пішінді екіншісіне бетпе-бет қою үшін алдымен пішін үлгісі бейнеленген мөлдір пленканы аударып алуға тура келеді. 8-суретте осындай жағдай бейнеленген.

Ұшы O нүктеде болған сәуле және таңдалған AB кесінді берілген болсын. Бір ұшы осы сәуле ұшы бетпе-бет түсетін, екінші ұшы болса сәуледе жататын және AB кесіндіге тең болған кесіндіні сәуленің үстіне қою мүмкін (9-сурет). Мұндай кесінді жлғыз болады және бұл **AB кесіндіні O сәулеге қою** дейіледі. Мұны келесіде қысқаша **кесіндіні сәулеге қою** деп те айтамыз.

Бірдей ұзындықтағы тақталарды аралап, кесіп алынып жатқанда да осылай істелінеді (10-сурет).



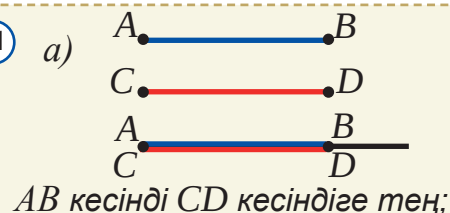
Кез келген кесіндінің үстіне оның ұшынан бастап, берілген кесіндіге тең бір ғана кесінді қоюға болады.

Екі кесіндіні өзара салыстыру үшін олар бір сәулеге қойылады. Кейін төмендегі жағдайлардан қайсы бірі бөлінуіне қарап, кесінділердің өзара теңдігі немесе ұзын-қысқалығы (яғни үлкен-кішілігі) туралы қорытынды шығарылады (11-сурет):

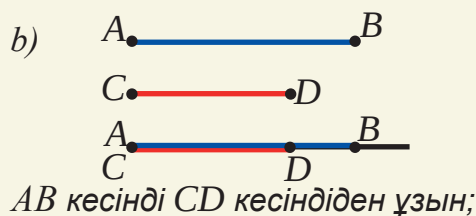
10



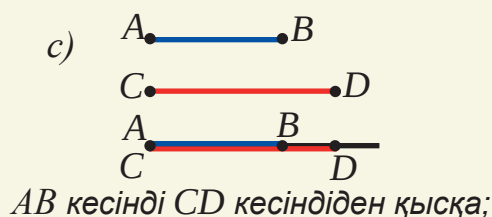
11



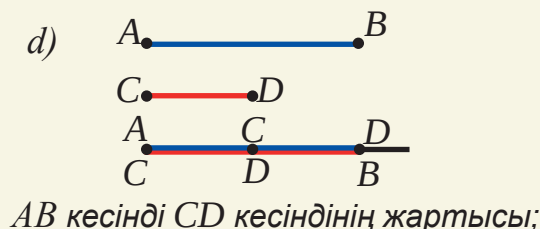
b)



c)



d)



Кесіндінің ортасы деп оны өзара тең екі кесіндіге ажыратушы нүктеге айтылады.

12-суретте AB кесіндінің ортасы болған C нүкте бейнеленген. Пішінде тең кесінділер бірдей сандағы сызықтар мен белгіленеді.

12



2.3. Кесіндінің ұзындығы және оның қасиеттері. Кесінділерді өлшеу.

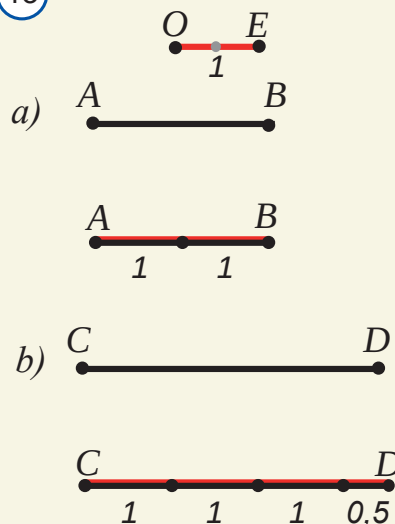
Кесінділерді сәулеге қою арқылы салыстыру оншалықты қолай емес. Кесінділердің қайсы бірі ұзын немесе қысқалығын (яғни үлкен немесе кішілігі) олардың ұзындықтарын салыстыру негізінде анықтауға да болады.

Бір кесіндіні бірлік кесінді деп алып, оның ұзындығын 1-ге тең деп қабылдаймыз. Қойылған кесінділер ұзындықтарын осы бірлік кесінді ұзындыққа салыстыра анықтаймыз.

Кесіндінің ұзындығы оң сан болып, ол кесіндіге бірлік кесінді және оның бөліктерін неше рет орналастыру мүмкіндігін көрсетеді.

12-суретте OE кесіндіні бірлік кесінді деп алып,

13



яғни 1-ге тең десек, онда AB кесінді ұзындығы 2-ге тең болады. Өйткені AB кесіндіде OE кесінді екі рет орналасып жатыр. CD кесінді ұзындығы 3,5-ке тең болады. Өйткені, бұл кесіндіге OE кесінді бүтін күйінше үш рет және оның жартысы орналасып жатыр.



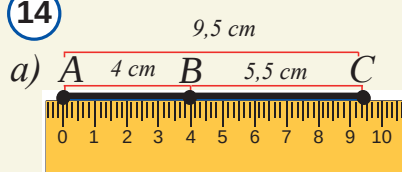
Әрқандай кесінді нөлден айрықша анық ұзындыққа ие болып, ол оң санмен өрнектеледі.



Белсендіруші жаттығу

14а-суретте берілген кесінділердің ұзындығы сызғыш көмегінде өлшенген. Бұл шамалар өзара төмендегі формула көмегінде байланыстылығын тексер.

14



$$AC = AB + BC;$$



$$AC = AB + BC;$$



$$AC < AB + BC.$$



Егер түзуде B нүкте A және C нүктелер арасында орналасқан болса, AC кесіндінің ұзындығы AB және BC кесінділер ұзындығының қосындысына тең болады (14б-сурет):

$$AC = AB + BC.$$

Егер B нүкте AC кесіндіде жатпаса, AC кесінді ұзындығы AB және BC кесінділер ұзындықтары жиындысынан кіші болады (14с-сурет): $AC < AB + BC$.

Бұл теңсіздікке кейінгі тарауларда тағы тоқталамыз.

Жоғарыда келтірілген қасиет кесінділер үстінде қосу және айыру амалдарын анықтау мүмкіндігін береді. OU сәуле, AB кесіндіні қоямыз. Соң BE сәулеге CD кесіндіні қоямыз (15-сурет).

Нәтижеде пайда болған AD кесінді AB және CD **кесінділердің жиындысы** деп аталады және $AD = AB + CD$ теңдік орынды болады.

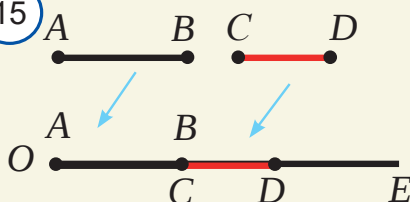
Дәл сондай, кесінділерді бір-бірінен айыру амалын да кіргізу мүмкін.

Айтайық, OE сәуле, AB және CD кесінділер берілген тағы $CD > AB$ болсын (16-сурет). OE сәулеге алдымен ұзын CD кесіндіні қоямыз. Пайда болған DB кесім CD және AB **кесінділер айырмасы** деп аталады және $BD = CD - AB$ теңдік орынды болады.

AB кесіндінің ұзындығы A және B нүктелер арасындағы **қашықтық** деп те жүргізіледі.

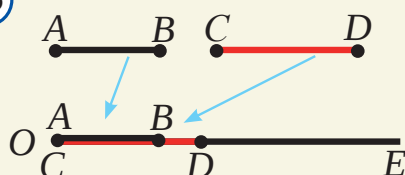
Бірдей ұзындыққа ие кесімдер өзара тең болуы айқын көрініп тұр.

15



$$AD = AB + CD$$

16



$$BD = AB - CD$$

2.4. Шеңбер және дөңгелек

Бір немесе бірнеше берілген қасиеттерді қанағаттандыратын барлық нүктелерден тұратын пішінге **нүктелердің геометриялық орны** деп аталады.

Нүктелердің геометриялық орнына шеңбер және дөңгелек мысал бола алады.

Берілген нүктеден тең алыста жатқан нүктелердің жинағы **шеңбер** деп аталады. Бұл нүкте шеңбердің **орталығы** дейіледі.

17-суретте шеңбер пішініндегі «Диірмен» көңіл-ашар құрылмасы келтірілген.

Шеңбердің кез келген нүктесінен оның орталығына дейінгі болған қашықтық **радиусы** деп аталады (18-сурет). Сондай ақ, шеңбердің орталығын оның кез келген нүктесі мен тұтастырушы кесіндіні де радиус деп атаймыз.

Шеңбердің кез келген екі нүктесін тұтастыратын кесінді шеңбердің **ватары** деп аталады. Орталықтан өтуші ватар болса **диаметрі** деп аталады.

Дөңгелек деп жазықтықта берілген нүктеден берілген саннан үлкен болмаған қашықтықта жатқан нүктелердің геометриялық орнына айтылады (19-сурет). Берілген нүкте дөңгелектің **орталығы**, берілген сан болса оның **радиусы** деп аталады.

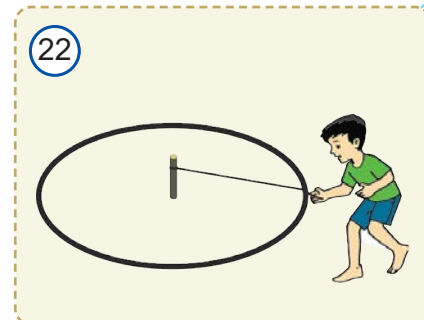
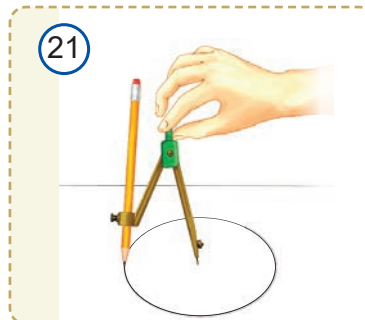
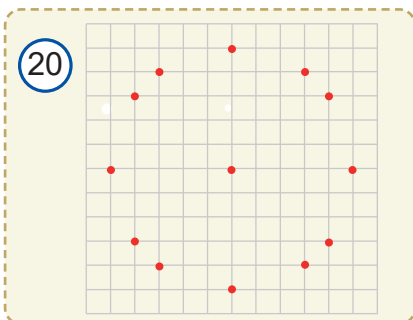
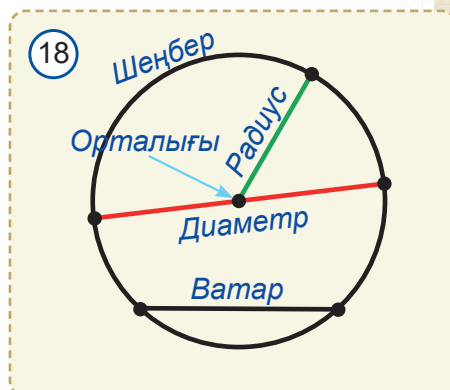
Шеңбер (дөңгелек) диаметрі орталықтан өткені үшін ол екі радиустан тұрады (19-сурет). Демек, диаметр ұзындығы екі радиус ұзындығына тең.

Шеңберді тор дәптерге циркульсіз сызу жол-жорығы

- Тор дәптерге 20-суретте көрсетілгендей етіп нүктелерді белгіле.
- Пайда болған 12 нүктені тізбекті доғал сызықпен тұтастырып шық.

Нәтижеде орталығы O нүктеде болған дөңгелектің шамалас бейнесі пайда болады (тексеріп көр).

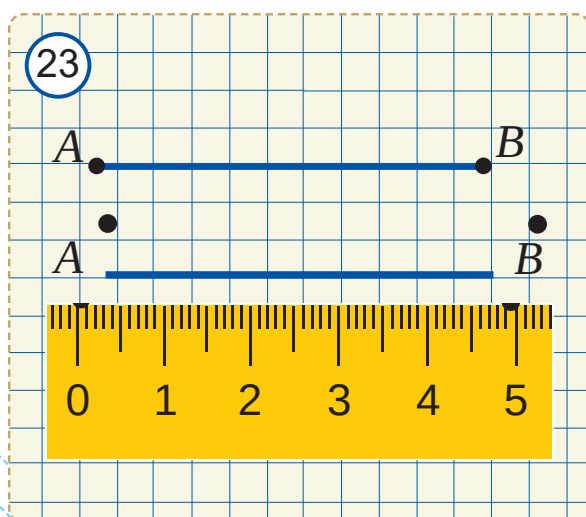
Шеңбер циркуль көмегінде сызылады. Орталығы O нүктеде берілген, радиусы AB кесіндіден болған дөңгелекті циркуль және арқан көмегінде сызу 21-және 22-суреттерде көрсетілген.



2.5. Ұзындық өлшем бірліктері

Ежелден адамдар ұзындықты өлшеуде әр түрлі ұзындық бірліктерінен пайдаланып келген. Мысалы, Орта Азияда буын, қарыс, құлаш, шақырым сияқты ұзындық бірліктері қолданылған. Түрлі өлшем бірліктерінен пайдалану қолайсыздықтар туғызған. Сондықтан XVIII ғасырдан бастап дүние бойынша халықаралық ұзындық өлшем бірлігі ретінде *метр* (*m*) қабылданған.

Сен ұзындық үлгісі болған метр эталоны мен 7-сынып «Физика» оқулығында танысқансың. Ол жерде метрге салыстырмалы үлкен немесе кіші ұзындықтарды өлшеу үшін пайдаланылған бірліктер де келтірілген еді. Соның ішінде: $1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$; $1 \text{ cm} = 0.01 \text{ m}$; $1 \text{ mm} = 0.001 \text{ m}$. Кесінділердің ұзындығы әр түрлі құралдар көмегінде өлшенеді. Олардың ең қарапайымы шкалалы, яғни бөліну нүктесіне ие болған сызғыш. Кесім қимасының қосындысы таңдалған ұзындық өлшеу бірлігіне байланысты болады. Егер ұзындық бірлігі ретінде ұзындығы 1 cm -ге тең кесіндіні алатын болсақ, 23-суретте көрсетілген кесіндінің ұзындығы 5 cm ге тең болады және $AB = 5 \text{ cm}$ деп жазылады. Егер ұзындық – өлшем бірлігі ретінде 1 миллиметрге тең кесіндіні алатын болсақ, $AB = 50 \text{ mm}$ болады.



Кейбір кездерде кесінді ұзындығы өлшем бірлігі көрсетілмей жазылады. Мысалы, $AB = 5$. Мұнда AB кесінді ұзындығы 5 өлшем бірлігіне тең деп түсініледі.

Дәптерге түрлі кесінді ұзындықтарын өлшеу үшін миллиметр торларына ие болған оқу сызғышынан (24-сурет) пайдаланып келдің. Тақтада сызу үшін сантиметр торларына ие мектеп сызғышынан пайдаланылады. Жер үстінде түрлі өлшем жұмыстарын амалға асыруда таспалы (лента) өлшем құралы – рулеткадан, далада болса һакка – дала циркулінен пайдаланылады.



Қазірде инженер – ұсталар ұзындықты өте қолай және анық өлшейтін электрон рулеткалардан пайдалануда (25а-сурет).

25b-суретте қабырғаға шейін, 25с-суретте болса негізі және ұшына шейін болған қашықтықты өлшеу кезеңі бейнеленген. Бұл суреттерден пайдаланып электрон рулетканың қандай жұмыс істеуін түсіндіріп көр.



Мәселе. Бір түзу сызыққа жатушы A , B және C нүктелер үшін $AB = 8$ және $BC = 11$ болса, AC кесіндінің ұзындығын тап.

Шешуі. Төмендегі жағдайларды көріп шығамыз:

1. A , B және C нүктелер A түзу сызықта 26а-суретте көрсетілген тәртіпте орналасқан болсын.

Кесінділер ұзындықтардың қасиеттеріне қарай $AC = AB + BC = 8 + 11 = 19$ болады.

2. A , B және C нүктелер A түзу сызықта 26b-суретте көрсетілген тәртіпте орналасқан болсын.

Онда кесінділер ұзындықтарының қасиетіне орай $BA + AC = AC = BC$ немесе $AC = BC - BA = 11 - 8 = 3$ болады.

3. C нүкте 26с-суреттегідей B және A нүктелер арасында орналаса алмайды. Өйткені $AB < BC$. Демек, AC кесіндінің ұзындығы нүктелердің өзара орналасуына қарап 19 немесе 3-ке тең болады.

Жауабы: 19 немесе 3.

26



25

a)



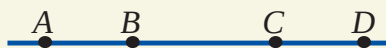
b)



c)



27



28

a)



b)



c)



d)





Тақырып бойынша сұрақтар

1. 27-суретте B нүкте қайсы нүктелер арасында? Қайсы нүктелер C нүктеден бір жақта жатыр?
2. Кесінді және сәулеге түсінік бер. Олар қалай белгіленеді?
3. Түзу сызықта C және D нүктелер берілген. CD және DC кесінділер бетпелі ме? CD және DC сәулелері ше?
4. Кесінді, сәуле және түзу сызық бір-бірінен несімен ажыралып тұрады?
5. Қандай пішінді өзара тең дейміз?
6. 28-суретте қайсы пішіндер өзара тең?
7. Кесіндіні сәулеге қою дегенде нені түсінесің?
8. Кез келген сәулеге оның ұшынан бастап берілген кесіндіге тең неше кесіндіні қоюға болады?
9. Кесінділер қалай салыстырылады және өлшенеді?
10. Кесіндінің ортасы не?
11. Кесіндінің ұзындығының негізгі қасиеттерін айт.
12. Кесіндінің жиындысы және айырмасын көрсет.
13. Нүктелердің геометриялық орны не?
14. Шеңбер мен дөңгелекке түсінік бер және олардың элементтерін айт.



Практикалық жаттығу және қолдану

1. 27-суретте неше кесінді бар?
2. Ұштары түзу сызықтағы A, B, C, D нүктелерде болған барлығы неше кесінді бар? Оларды жаз.
3. 29-суретте барлық сәулелерді жаз. Олардың қайсы біреуі бір-бірін толтырушы?
4. 30-суретте AB түзу сызық MN және PQ түзу сызықтарды сәйкес түрде C және D .
а) C нүктеден шығушы; б) D нүктеден шығушы және бір-бірін толтырушы нүктелерді жаз.
5. Бір түзу сызықта жатқан 2 нүкте осы түзу сызықта жатқан неше сәулені анықтайды? 3 нүктеде ше?
6. 31а-суретте пішінін қағазға өлшемдерін өзгертпей сыз және қырқып ал. Оны 32 б-суреттегі пішіннің үстіне қою арқылы оларды салыстыр.
7. Төмендегі а) әріп; б) сан белгілерінің қайсылары геометриялық пішін ретінде өзара тең?
а) а, б, в, г, д, е, ж, з, и, к, л;

b) 1234567890

8. 32-суреттегі тең пішіндерді тап.

9*. Түзу сызықта жатқан; а) 1; б) 2; с) 3; д) 10; д) n нүкте оны неше бөлікке бөледі?

10*. Жазықтықта жатқан; а) бір; б) екі; с) үш; д) төрт түзу сызық оны көбі мен неше бөлікке бөледі.

11*. Түзу сызық және онда жатпайтын A, B, C нүктелер берілген. AB кесім берілген түзу сызықты кесіп өтеді, AC кесінді болса кесіп өтпейді. BC кесінді осы түзу сызықты кесіп өтеді ме?

12. 33-суреттегі AB кесіндіні бірлік кесінді деп алып, қалған кесімдердің ұзындығын тап.

13. 34-суретте AB, AC, AD, BC, BD, CD кесінділердің ұзындығын анықта.

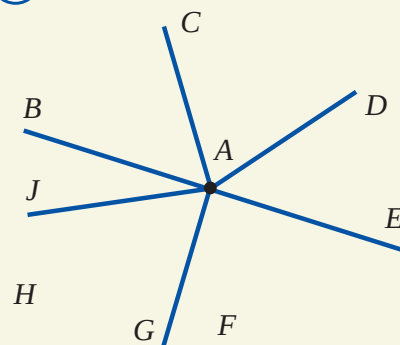
14. 35-суреттегі мәліметтерден пайдаланып белгісіздерді тап.

15. Егер $B \in AC, AB = 7,2 \text{ cm}, AC = 2 \text{ dm}$ болса, BC -ны тап.

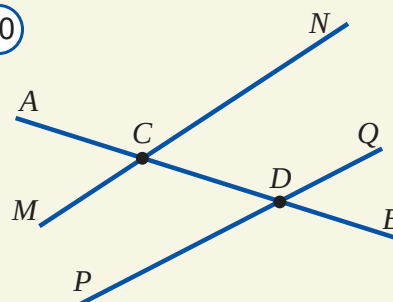
16. Егер $C \in AB, D \in AB = 5, AC = 2,2 BD = 3,6$ болса, CD -ны тап.

17. Түзу сызыққа көзбен қарап шамалап: а) 3 cm ; б) 7 cm ; с) 10 cm болған кесімге бөл. Кейін жұмысты қаншалықты дұрыс орындағаныңды сызғышпен тексер.

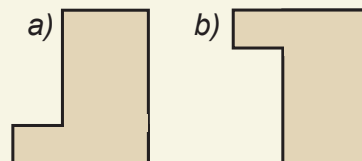
29



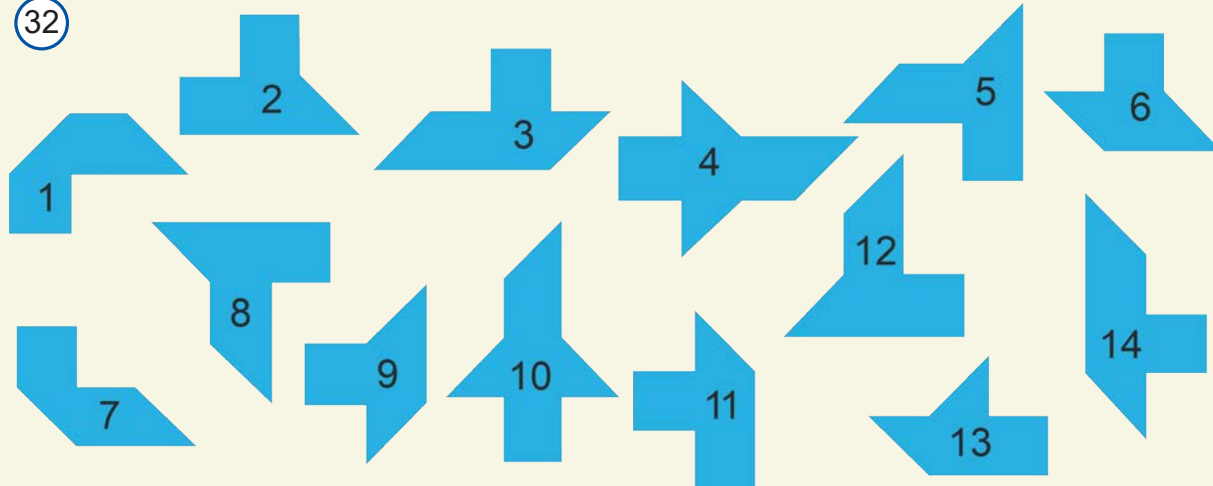
30



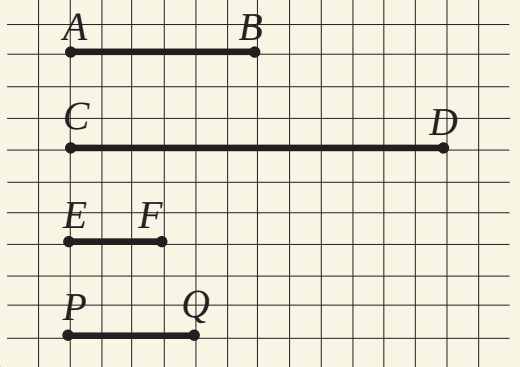
31



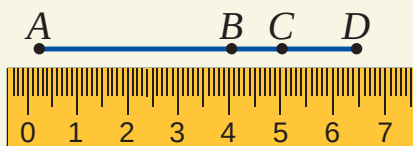
32



33

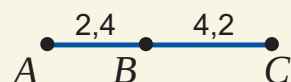


34



35

a) $AC = ?$



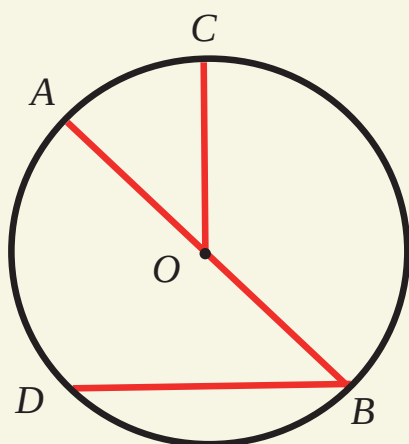
b) $AB = 3, AC = 2BC, BC = ?$



c) $AB = 24, BC = AC + 6, AC = ?$



36



18. Тўзу сызықтағы A, B, C нүктелер үшүн $AB = 600 \text{ m}, BC = 200 \text{ m}$ болса, AC -ны тап.

19. 36-суретте бейнеленген шеңбердің орталығы, барлық радиустары, диаметрі және ватарларын анықта және жаз.

20. Шеңбердің радиусы 23 cm болса, радиусын тап.

21. Шеңбердің: а) радиусы 12 cm болса, диаметрі 28 dm болса, радиусты тап.

22. Тўзу сызықтағы A, B, C және D нүктелер үшүн $AB = 2; AC = CB; 2 AD = 3 BD$ болса, CD -ны тап.

23. Орталығы O нүктеде болған шеңбер а) OA тўзу сызық; б) OA сәулемен неше нүктеде қиылысуы мүмкін.

24*. Сәуле мен ұзындықтары $AB = 1,2 \text{ cm}, CD = 2,8 \text{ cm}$ болған кесімдер берілген. Осы кесінділерден пайдаланып осы сәулеге ұзындығы: а) 4 cm ; б) $1,6 \text{ cm}$; д) $0,4 \text{ cm}$; д) $2,6 \text{ cm}$ болған кесінділерді қой.

25. C нүкте AB кесіндінің ортасы және $CB = 13$ болса, AB кесінді ұзындығын тап.

26. Өзінің жартысынан 46 cm ұзын болған кесіндінің ұзындығын тап.

27. Оқулықтың бойы мен енін сызғыш көмегінде өлше және оларды: а) mm ; б) dm ; с) m ; д) km -мен өрнекте.

28. C нүкте AB кесіндіні $1:3$ қатынасында бөледі. Егер AC кесінді ұзындығы: а) 2.5 cm ; б) 3.9 m ; с) 1.4 km болса, CB кесіндінің ұзындығын тап.

29. D нүкте EF кесіндіні $1:2$ қатынасында бөледі. Егер DE кесінді ұзындығы: а) 35 cm ; б) 93 dm ; с) 41 m болса, EF кесіндінің ұзындығын тап.

30*. Ұзындығы 9 cm болған AB кесінді сыз. AB сәуледе сондай C нүктені белгіле, а) $AC - DC = 1 \text{ cm}$; б) $AC + BC = 11 \text{ cm}$; с) $AC + BC = 10 \text{ cm}$ болсын.

31*. AB кесінді берілген. Ұзындығы: а) $2 AB$; б) $AB: 2$; с) $AB: 4$; д) $0.75 AB$ болған кесінділерді сыз.

32*. Түзу сызықтағы A, B, C нүктелер үшін $AB = 5.6$ см, $AC = 8.9$ см және $BC = 3.3$ см екені белгілі. A, B, C нүктелерінің қайсы бірі қалған екеуінің ортасында жатады?

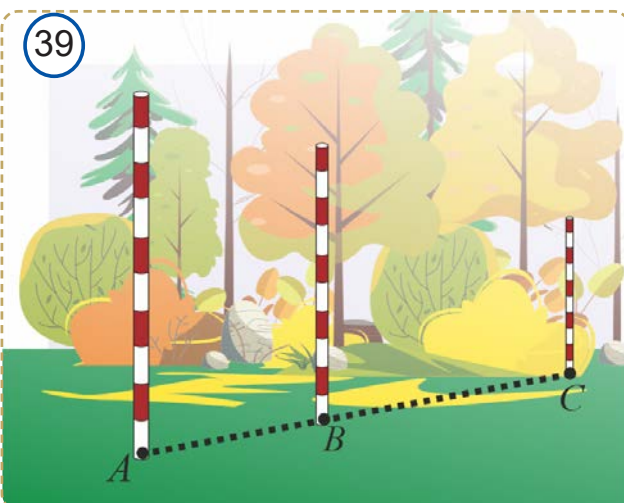
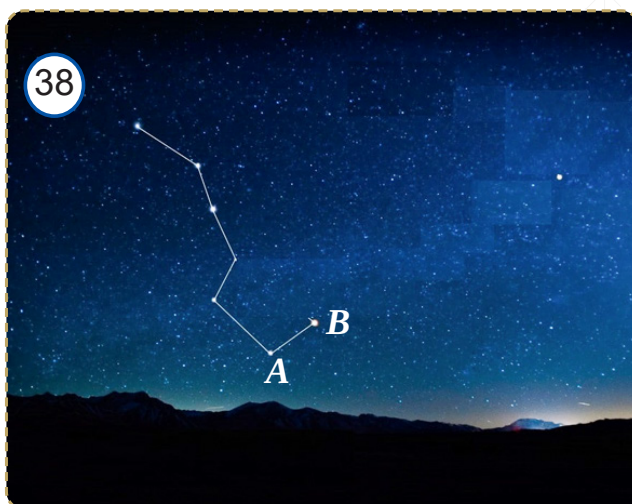
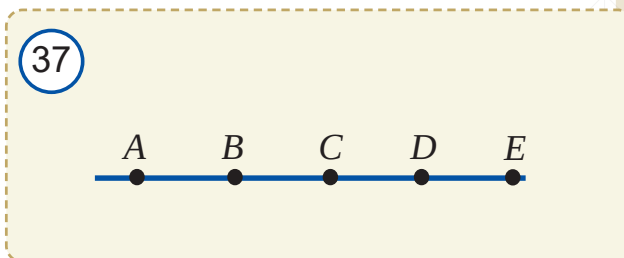
33. C нүкте A және B нүктелер арасында жатады. Егер: а) $AC = 2.5$ см, $CB = 3.4$ см; б) $AC = 5.3$ дм, $CB = 4.2$ дм болса, AD кесіндінің ұзындығын тап.

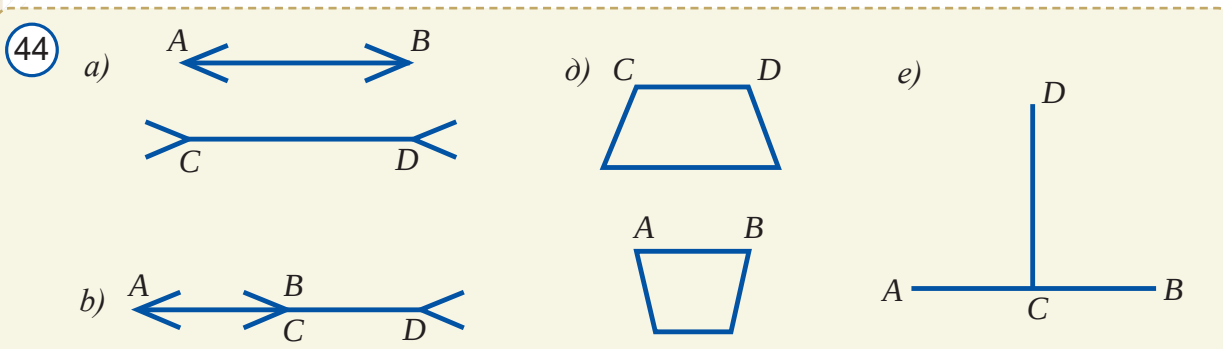
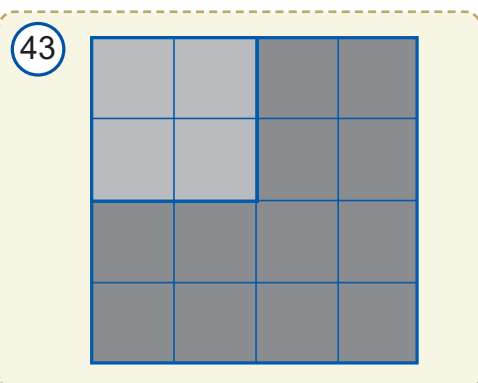
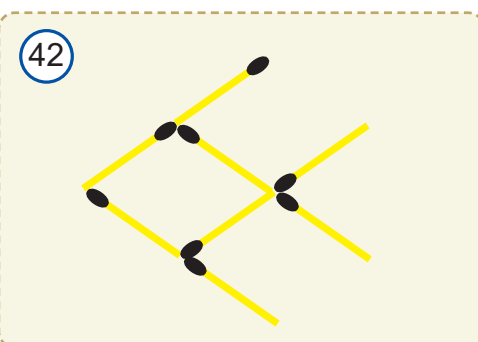
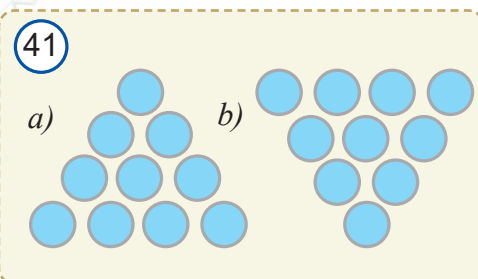
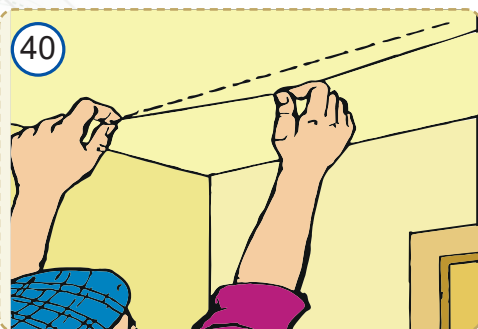
34*. 37-суретте AB, BC, CD және DE кесінділері өзара тең. Егер бірлік кесінді ретінде: а) AB ; б) AC ; с) AE кесінді алынған болса, AD кесіндінің ұзындығын тап.

35. 38-суретте Үлкен аю шоқжұлдызы бейнеленген. Егер бұл жұлдыздарды кесінділер мен тұтастырсақ, шөміш тәрізді пішін пайда болады. «Шөміштің» соңғы екі жұлдызы пайда болған AB кесіндіні B нүктеден бастап AB сәуле бойынша 5 рет қойып шықса, Полюс жұлдызының жанына барады. Суреттен Полюс жұлдызы қай жерде орналасқанын анықта.

36. 39-суретте дала жағдайында түзу сызық тарту кезеңі бейнеленген. Бұл практикалық жұмыс түзу сызықтың қайсы геометриялық қасиетіне негізделгенін түсіндір.

37. 40-суретте бояушының төбеге түзу сызық сызу кезеңі бейнеленген. Бұл үшін жіп бормен ақ реңге боялады. Жіптің бір ұшы шегеге байланады, екінші ұшы болса тиісті нүктеге қойылады. Кейін оның ортасынан ұстап, керіп тартылып қойып жіберіледі. Сонда жіпке ілескен бор бөлшектері төбеге жабысып, түзу сызық пайда болады. Дәл осындай тәсілде қабырғаға да түзу сызық сызу мүмкін. Бұл практикалық жұмыс түзу сызықтың қайсы геометриялық қасиетіне негізделген екендігін түсіндір.





Геометриялық басқатырма

1. 10 біртүрлі теңге 41a-суреттегідей етіп қойып шық. Тек 3 теңгенің орнын ауыстырып, 42b-суреттегі көрініске келтір.
2. 42-суреттегі 3 таяқшаны орнын ауыстырып, «балықты» артқа қайтар.
3. Диқан бабаның квадрат пішінінде бақшасы бар еді. Ол бақшасының ширек бөлігін 43-суретте көрсетілгендей етіп өзі үшін қалдырды. Қалған бөліктерін бірдей пішіндегі тең бөліктерге бөліп, төрт ұлына берді. Шал бұл жұмыстарды қалай амалға асырды?
4. 44-суретте бейнеленен AB және CD кесінділерді көзбен шамалап өзара салыстыр. Соң бұл жұмысты сызғыш немесе мөлдір пленка көмегінде орында.

Қорытынды. Геометрияда өлшеу және салыстыру жұмыстарын анық орындау керек. Көз алдауы мүмкін.

3

БҰРЫШ. БҰРЫШТАРДЫ САЛЫСТЫРУ ЖӘНЕ ӨЛШЕУ

3.1. Бұрыш. Бұрыштарды салыстыру

Бір нүктеден шығушы екі сәуледен тұратын пішін **бұрыш** деп аталады.

Бұрыштарды ұйымдастырған сәулелер **бұрыштардың қабырғалары**, олардың ортақ ұшы болса **бұрыштардың ұшы** деп аталады (1-сурет). Бұл бұрыш $\angle AOB$ немесе $\angle BOA$ түрінде белгіленеді және AOB бұрыш немесе BOA бұрыш деп аталады. Мұндай жазуда бұрыштың төбесі әрқашан ортада жазылады. Сондай-ақ, бұл бұрыш қысқаша $\angle O$ түрінде де жазылып, O бұрыш деп оқылуы мүмкін. Сызбада бұрышты бөліп көрсету үшін кейде оның екі жағы 1-суретте көрсетілгендей доға сияқты сызықпен тұтастырып қояды.

Жазыңқы бұрыш деп қабырғалары бірі-бірін толықтыратын сәуледен құралған бұрышты айтады.

2-суретте жазыңқы бұрыштар бейнеленген.

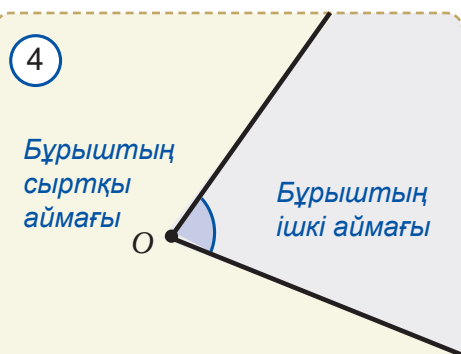
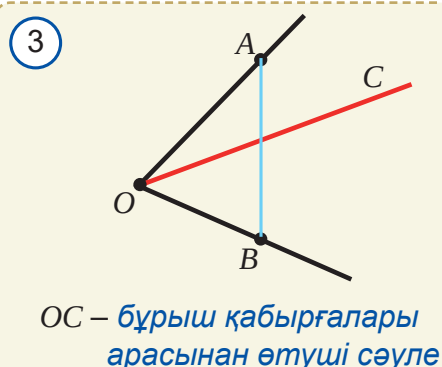
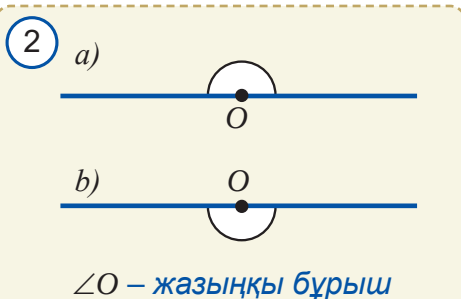
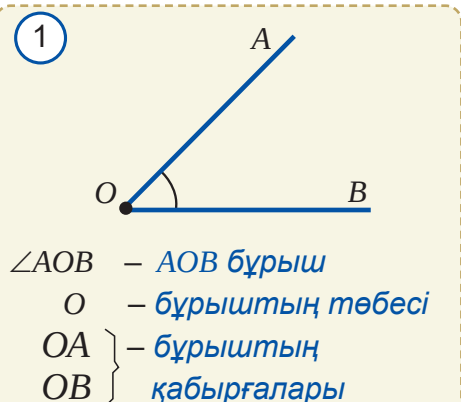
Жазыңқы болмаған O бұрыш берілген болсын. Төбелері осы бұрыштың қабырғаларында болған бір AB кесіндіні қарастырамыз (3-сурет).

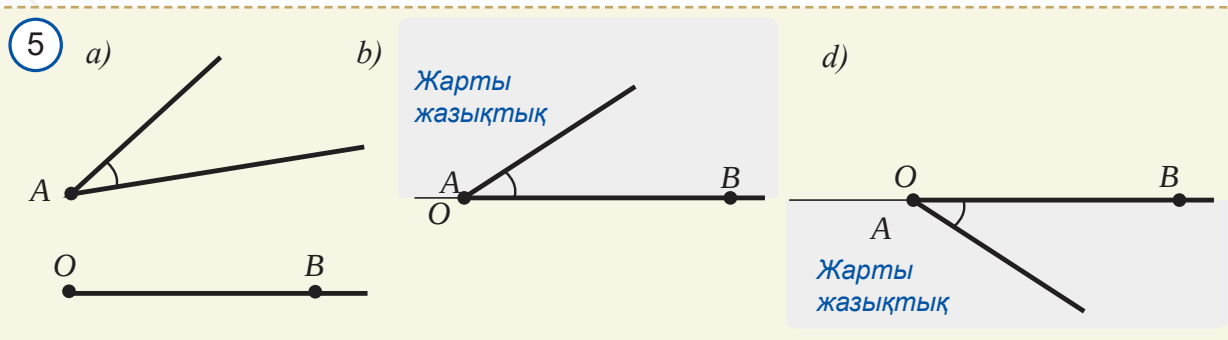
Егер төбесіне шығушы OC сәуле (3-сурет) AB кесіндіні кесіп өтсе, бұл сәуле **бұрыш қабырғаларының арасынан өтеді**. Бұрыш қабырғаларының арасынан өтуші сәуле оны екі бұрышқа ажыратады.

Әрқандай бұрыш жазықтықты екі бөлікке ажыратады (4-сурет). Жазықтықтың бұрыш жақтары арасынан өтуші бір сәуледе жатқан бөлігі **бұрыштың ішкі жағы**, екінші бөлігі болса **сыртқы жағы** деп аталады.

Кез келген OB сәуле және жазыңқы емес A бұрыш берілген болсын (5a-сурет). OB түзу сызық жазықтықты екі жарты жазықтыққа ажыратады. A бұрышты бір жағы OB сәулемен бетпестік түсетіндей етіп қою мүмкін. Бұл амал бұрыш қайсы жарты жазықтықта жатуына қарап екі тәсілде орындалады (5b, 5d – суреттер) және **бұрышты сәуледен жарты жазықтыққа қою** деп аталады.

Қалаған сәуле және одан өтуші түзу сызық пайда болған жарты жазықтықтардан бірі берілген болсын.

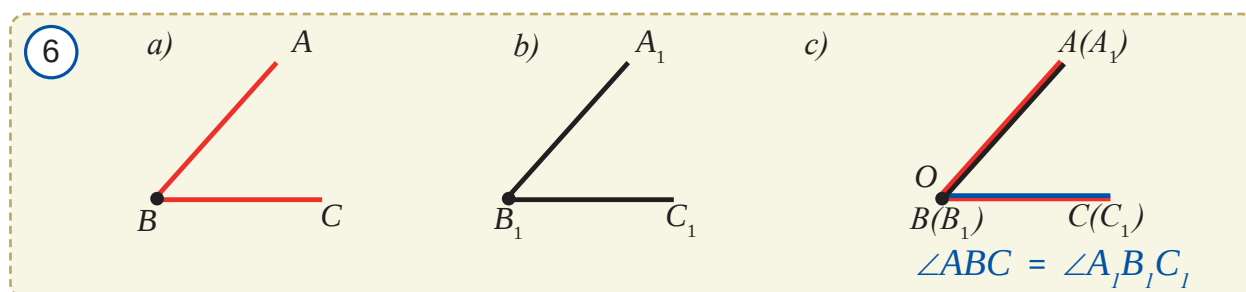




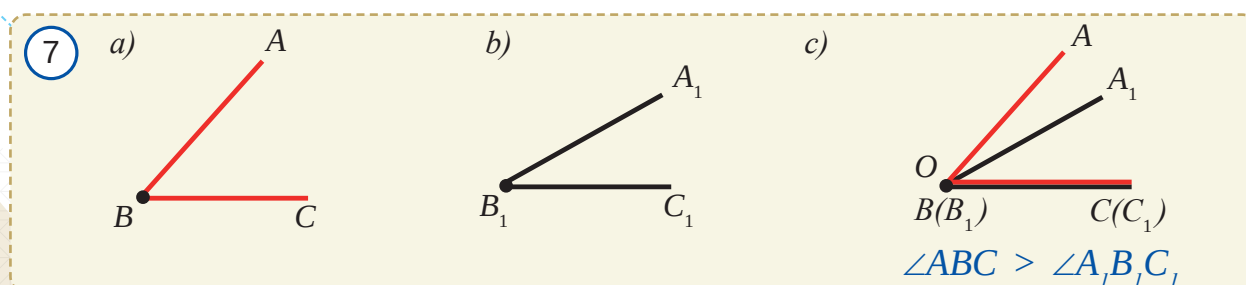
Кез келген сәуледен бастап белгілі жарты жазықтыққа берілген жазыңқы емес бұрышқа тең бір ғана бұрышты қою мүмкін.

Екі бұрышты бір сәуледен дайын жарты жазықтыққа қою арқылы өзара салыстыру мүмкін. Берілген ABC және $A_1B_1C_1$ бұрыштарды O сәуледен дайын жарты жазықтыққа қойғанымызда:

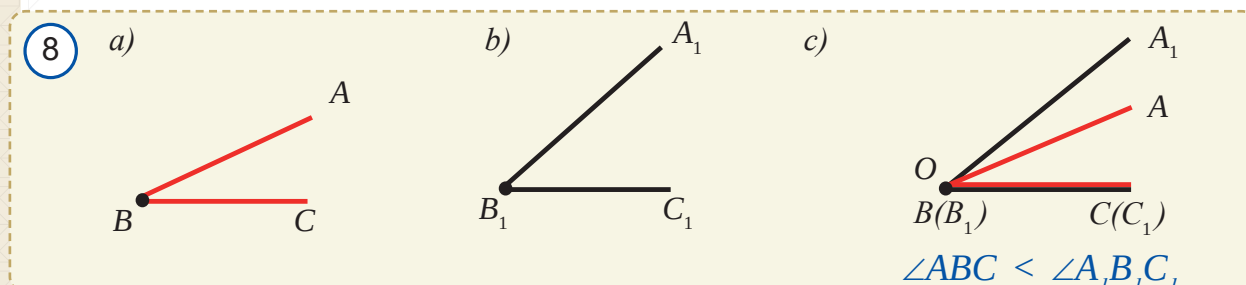
1-жағдай (6-сурет). BA қабырғасы B_1A_1 қабырға мен, BC қабырға болса B_1C_1 қабырға мен бетпе-бет түссе, ABC және $A_1B_1C_1$ бұрыштар **тең** деп аталады және бұл $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$ түрінде жазылады (пішінде бұрыштардың теңдігі бірдей сандағы доғалармен белгіленеді).



2-жағдай (7-сурет). A_1B_1 қабырғалары ABC бұрыш ішкі жағында жатса, ABC бұрыш $A_1B_1C_1$ бұрыштан **үлкен** дейіледі және бұл $\angle ABC > \angle A_1B_1C_1$ түрінде өрнектеледі.



3-жағдай (8-сурет). AB қабырғалары $A_1B_1C_1$ бұрыш ішкі жағында жатса, ABC бұрыш $A_1B_1C_1$ бұрыштан **кіші** дейіледі және бұл $\angle ABC < \angle A_1B_1C_1$ түрінде жазылады.



Бұрыш төбесінен шығып, оны тең екі бұрышқа ажыратушы сәулеге **бұрыш биссектрисасы** деп аталады.

9-суретте AOB бұрыштың OC биссектрисасы бейнеленген.

3.2. Бұрыштарды өлшеу

Жазыңқы бұрыш өзінің қабырғалары арасынан өтуші және төбесінен шығушы сәулелер мен 180 -ге тең бұрышқа бөлінген болсын (10-сурет) бұл бұрыштардан бірін өлшем бірлігі – **бірлік бұрышы** ретінде алу қабылданған. Оның бұрыш шамасы бір **градус** деп аталады және 1° деп белгіленеді. Кез келген бұрыштың градус өлшемін осы бірлік негізінде анықтау мүмкін. **Бұрыштың градус өлшемі** бұрыштың ішкі жағында неше бірлік бұрыш және оның бөліктері орналасқанын көрсетеді.

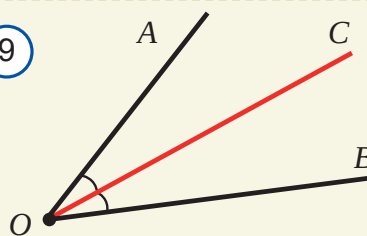
11-суретте бейнеленген ABC бұрыш 15° -қа тең. Оның ішкі жағында 15 бірлік бұрыш орналасқан.



Әрқандай бұрыш белгілі бір градус өлшеміне ие болып, оның мәні оң сан мен өрнектеледі. Жазыңқы бұрыштың градус өлшемі 180° -қа тең.

Бұрыштардың градус өлшемі **транспортир** деп аталатын құрал көмегінде өлшенеді. Транспортирмен төменгі сыныпта танысқансын. Оның пішіні доға бөлігі шкалалармен 180 -ге тең бөлікке бөлінген болып, әрбір бөлік бір градусты білдіреді. 12-суретте транспортир көмегімен бұрышты өлшеу кезеңі бейнеленген. Суретте көріп тұрғанындай, AOB бұрыштың үлкендігі 60 градусқа тең және бұл $\angle AOB = 60^\circ$ түрінде жазылады. Бірдей градус өлшеміне ие бұрыштар өзара тең болады және керісінше, өзара тең бұрыштардың градус өлшемдері де тең болады. Үлкен бұрыштардың градус өлшемі де үлкен болады және керісінше.

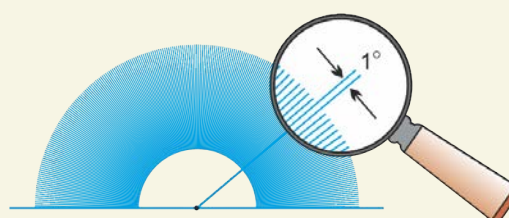
9



$$\angle AOC = \angle COB$$

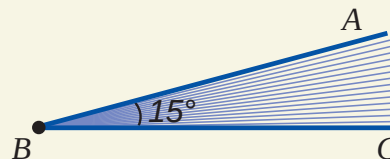
OC – AOB бұрыш
биссектрисасы

10

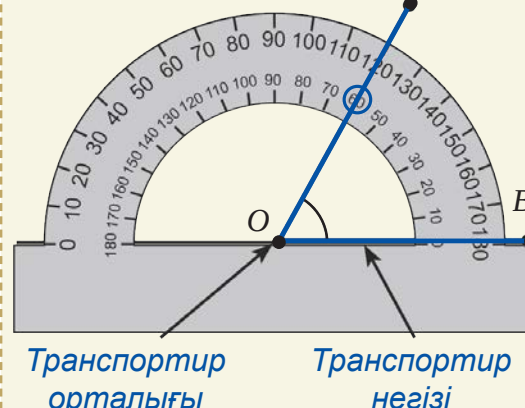


1 градуссты бұрыш

11

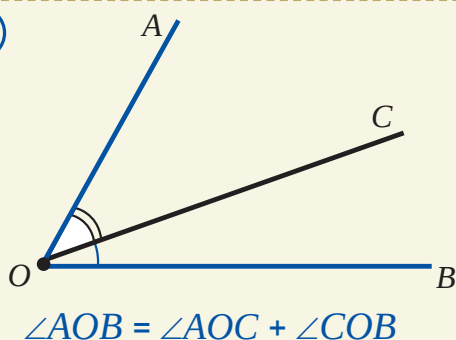


12



Бұрыштарды өлшеуде градустың үлестері де қолданылады. 1° тың $\frac{1}{60}$ бөлігі *минут*, $\frac{1}{3600}$ бөлігі *секунд* деп аталады және сәйкесінше «'» және «''» сияқты белгіленеді. Мысалы, үлкендігі 45 градус 38 минут 59 секундқа тең бұрыш градус өлшемі $45^\circ 38' 59''$ секілді жазылады. $1^\circ = 60'$, $1' = 60''$.

13

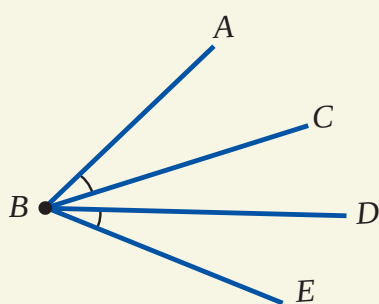


Айтайық, $\angle AOB$ бұрыш берілген болып, оның қабырғалары арасынан өтуші кез келген OC сәуле оны $\angle AOC$ және $\angle COB$ бұрыштарға ажыратса (13-сурет). Онда:

$$\angle AOB = \angle AOC + \angle COB.$$

Бұл қасиетті төмендегіше өрнектеуге болады:

14



Бұрыштың градустық өлшемі оның қабырғаларының арасымен өтетін кез келген сәулемен бөлінетін бөліктерінің градустық өлшемдерінің қосындысына тең болады.



1-есеп. Егер $\angle ABC = \angle DBE$ болса, бұл $\angle ABD = \angle DBE$ екендігін көрсет (14-сурет).

Шешімі. Берілген $\angle ABC = \angle DBE$ теңдеудің әр екі қабырғасына $\angle ABC = \angle CBD$ -ны қосамыз:

$$\angle ABC + \angle CBD = \angle CBD + \angle DBE.$$

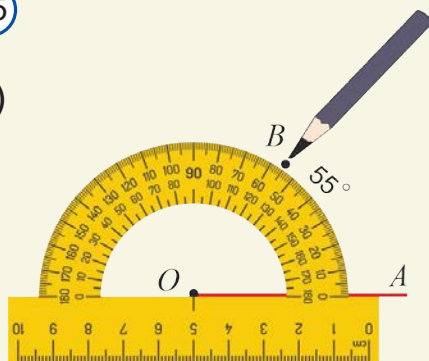
$$\text{Бірақ } \angle ABC + \angle CBD = \angle ABD \text{ және } \angle CBD + \angle DBE = \angle CBE.$$

$$\text{Демек, } \angle ABD = \angle CBE.$$

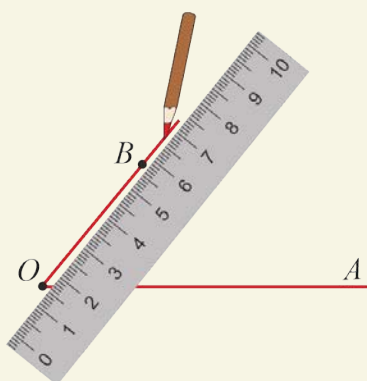
Сәулеге берілген градус өлшемді бұрышты қоюдың практикалық жорығы:

15

a)



b)



1. Кез келген OA сәуле сызып алынады.
2. Транспортирдің негізін берілген OA сәуле үстіне, орталығын O нүктеге 15a-суретте көрсетілгенді етіп қойылады.
3. Транспортир шкаласынан бұрыштың берілген градус өлшемін көрсетуші бөлінбесі табылады және оның турасына B нүкте қойылады.
4. O және B нүктелер арқылы сәуле өткізіледі (15b-сурет). Нәтижеде берілген градус өлшемі $\angle AOB$ бұрыш пайда болады.

Бұл жұмысты тағы қандай жолмен орындау мүмкіндігі туралы ойлап көр.



2 – есеп. Берілген OB сәулеге 50° -ты бұрышты қой.

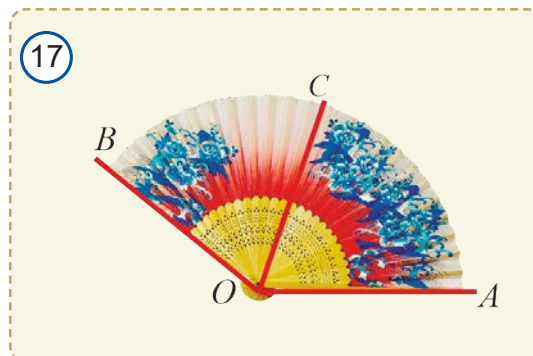
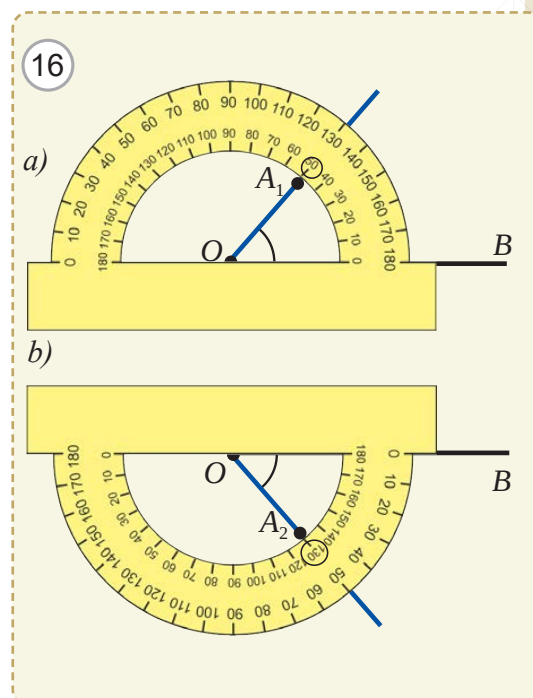
Шешімі. OB түзу сызық жазықтықты екі жарты жазықтыққа ажырату белгілі. Транспортирдің негізін OB сәуле үстіне, орталығын болса O нүктеге 2 түрлі тәсілде қойып, оның шкаласында 50° -қа тура келуші бөлінбе табылады және бұрыштар жасалады (16-сурет).

Демек, берілген сәуледен бір жарты жазықтыққа біреуден 50° -ты бұрыш қою мүмкін екен: $\angle A_1OB = \angle A_2OB = 50^\circ$.



Тақырып бойынша сұрақтар

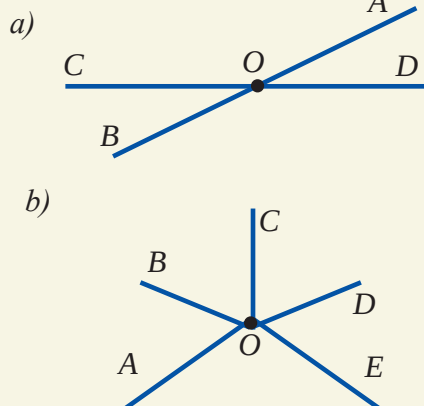
1. Бұрыш не және ол қалай белгіленеді?
2. Жазыңқы бұрыш дегеніміз не?
3. Бұрышты жазықтықты қандай бөліктерге ажыратады?
4. Бұрышты сәуледен белгілі жарты жазықтыққа қою дегенде нені түсінесің?
5. Қашан бұрыштар өзара тең болады?
6. Қашан бір бұрыш екіншісінен үлкен не кіші болады?
7. Бұрыш биссектрисасына түсінік бер.
8. Бұрыштың градус өлшемі деп неге айтылады?
9. Жазыңқы бұрыш неше градус?
10. 1° -қа тең бұрыш дегенде қандай бұрышты түсінесің?
11. Екі бұрыштың градус өлшемдері тең болса, олар тең болады ма?
12. 17-суретте бұрыш градус өлшемінің қайсы қасиеті келтірілген?





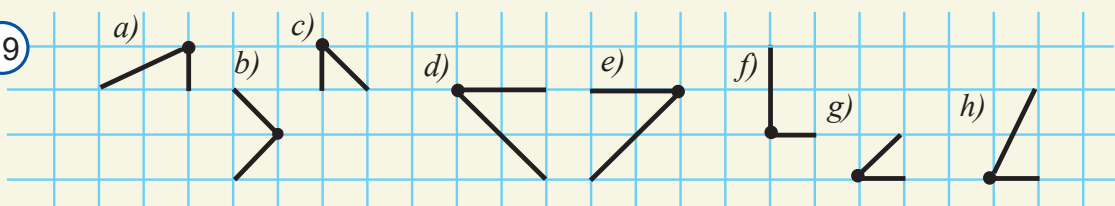
Практикалық жаттығу және қолдану

18



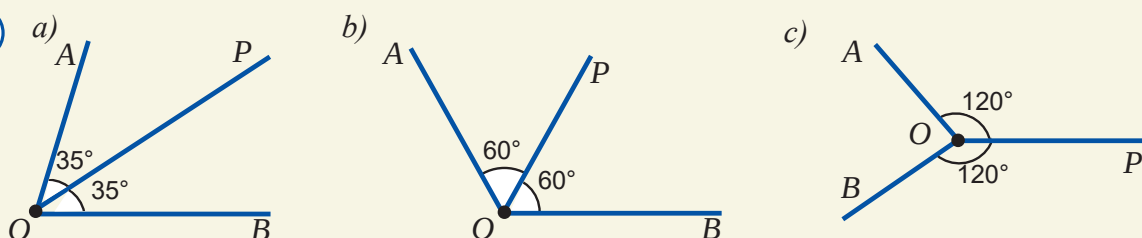
1. а) $\angle MNL$; б) $\angle ABO$ бұрышты сыз. Оның төбесі мен қабырғаларын жаз.
2. Кез келген A, B, C және D нүктелерін белгілеп, AB, AC және DA түзу сызықтарын сыз. Пайда болған бұрыштарды, олардың төбелері мен қабырғаларын жаз.
3. 18-суретте бейнеленген барлық бұрыштарды анықта және оларды жаз.
4. 19-суретте бейнеленген бұрыштар арасында тең бұрыштарды анықта.

19



5. 20-суретте бейнеленген OP сәуле AOB бұрыш биссектрисасы болады ма?

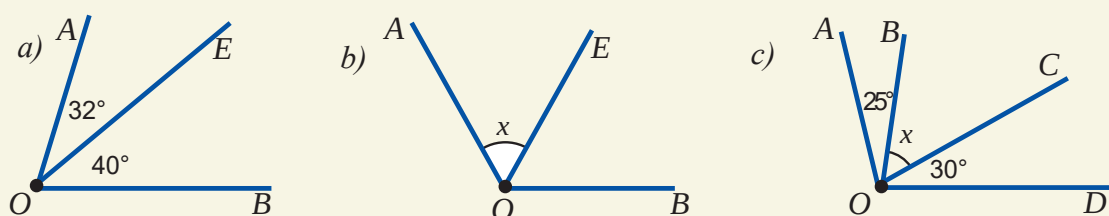
20



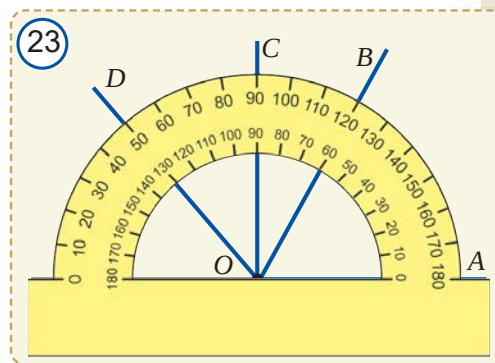
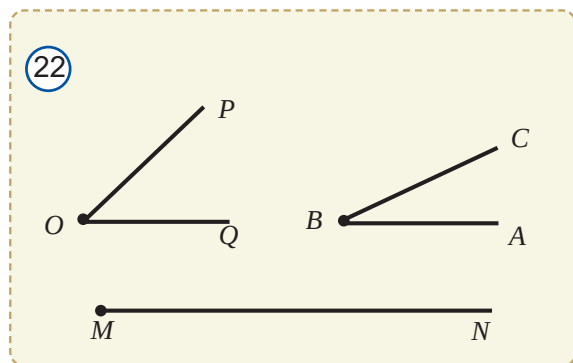
6. 21-суретті пайдаланып төмендегілерді анықта:

а) $\angle AOB = ?$; б) $\angle AOB = 120^\circ 38'$, $x = ?$; в) $\angle AOD = 105^\circ 45'$, $x = ?$

21



7. 22-суреттегі POQ және ABC бұрыштарды MN сәулеге қою арқылы салыстыр.

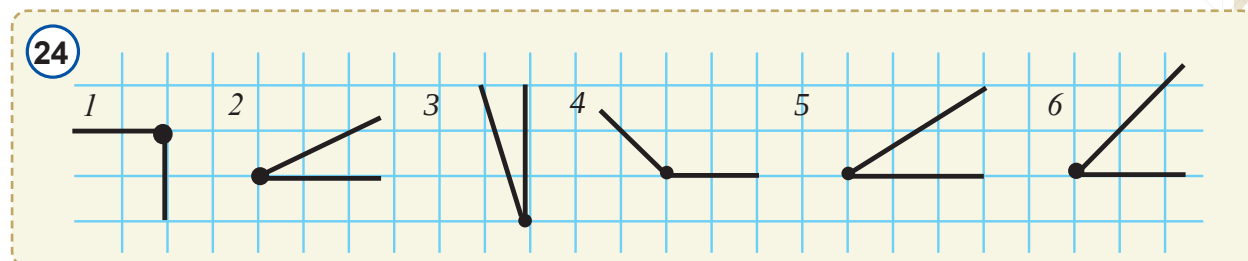


8. 23-суреттен пайдаланып: AOB , AOC , AOD , BOC , BOD және COD бұрыштарының градус өлшемін анықта және транспортир көмегінде биссектрисасын жаса.

9. Төмендегі теңдіктер мағынаға ие ме? а) $\angle AOB = \angle BOA$; б) $\angle AOB = \angle ABO$.

10. Транспортир мен 60° және 176° бұрыштар және олардың биссектрисаларын жаса.

11. Транспортир көмегінде 49° , 79° және 142° бұрыштар және олардың биссектрисаларын жаса.



12*. 24-суретте бейнеленген бұрыштар цифрларын олардың градус өлшемдері өсу тәртібінде жаз.

13. Есепте:

а) $34^\circ 18' + 53^\circ 38'$; б) $15^\circ 8' 38'' + 113^\circ 21' 9''$; с) $115^\circ 8' 38'' - 113^\circ 21' 9''$.

14. Транспортир көмегінде 10° , 30° , $74^\circ 45'$, $113^\circ 30'$ және 165° бұрыштар жаса.

15. $\angle A$ және $\angle B$ берілген $\angle A > \angle B$ болса, $\angle A + \angle B$ және $\angle A - \angle B$ бұрыштарды жаса.

16. Берілген AB сәулеге 150° OAB бұрышты қой.

17*. Егер; а) $\angle AOE = 20^\circ$, $\angle EOB = 40^\circ$, $\angle AOB = 60^\circ$; б) $\angle AOE = 80^\circ$, $\angle EOB = 120^\circ$;

д) $\angle AOE > \angle AOB$ болса, OE сәуле $\angle AOB$ қабырғаларының арасынан өтеді ме?

18*. OC сәуле AOB бұрыш қабырғалары арасынан өтеді. Егер $\angle AOB = 180^\circ$, $\angle BOC = 68^\circ$ болса, $\angle AOC$ -ты тап және бұл бұрыштарды транспортир көмегінде жаса.

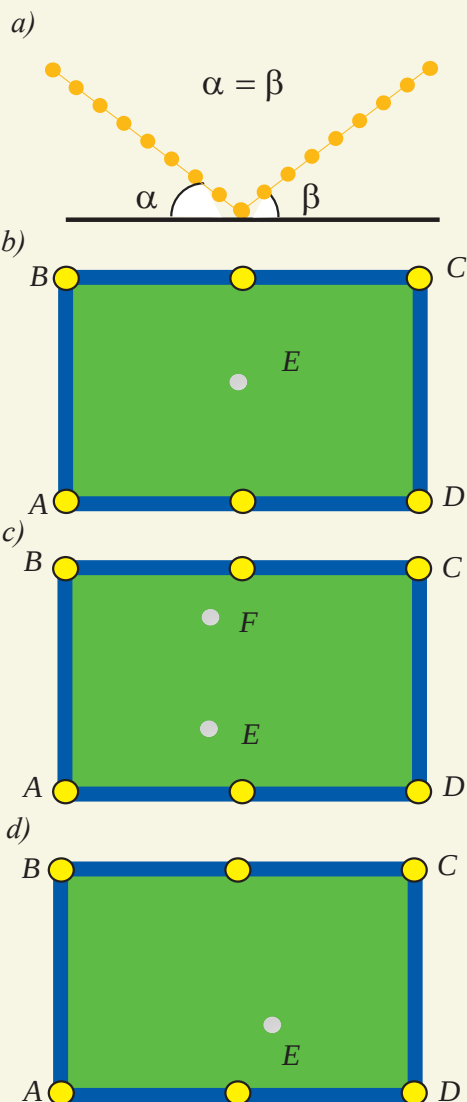
19*. OE сәуле ROS бұрыш қабырғалары арасынан өтеді. Егер $\angle ROT = 37^\circ$, $\angle ROS = 98^\circ$ болса, $\angle TOS$ -ты тап және бұл бұрыштарды транспортир көмегінде жаса.

20*. Стрелкалы сағатта а) 3:00; б) 6:00 болғанда, сағат және минут стрелкалары пайда болған бұрыш неше градусқа тең болуын анықта.

21. Дәптеріңе сәуле сыз және оған көзіңмен шамалап қарапайым сызғыш көмегінде 15° , 30° , 45° , 60° , 75° , 90° , 120° және 150° -ты бұрыштарды қой. Кейін оларды транспортир көмегінде өлшеп, қаншалық дұрыс сызғаныңды тексер. Жаттығуды қайтала.

25

7



Практикалық жаттығу және қолдану

1. Қағаз парағына бұрыш сыз. Парақты бүктеу көмегінде сызылған бұрыштан: а) 2 есе үлкен; б) 2 есе кіші; с) оны түзу бұрышқа толтырушы бұрышты пайда ет.
2. Сынып тақтасында екі бұрыш бейнеленген. Қолында бор және жіп бар. Олар көмегінде бұрыштарды қалай салыстыруға болады?
3. Жерге түзу бұрыш сызылған. Оның түзу бұрыш екендігін жіппен қандай тексеру мүмкін?
4. Жерде берілген бұрышқа тең бұрышты жіп көмегінде қалай жасау мүмкін?
5. Теңге көмегінде шеңбер сыз. Бұл шеңбердің орталығын қалай анықтауға болады?
6. Бильярд столы үстіндегі шардың әрекетін бақылағансың ба? Ол әрқашан стол қабырғасына соғылғанда, қандай бұрышта келіп соғылған болса, сол бұрыш астында қабырғаға қайтады (25a-сурет):
 - a) стол орталығында тұрған шарды бір бағытта әрекеттендір және оның әрекет траекториясын сыз (25b-сурет);
 - б) Е нүктеде тұрған шардың AD және AB қабырғаларға соғылып, F нүктеде тұрған шарға тиетін траекториясын сызып көрсет (25c-сурет);
 - д) E нүктеде тұрған шардың AD , AB және BC қабырғаларға соғылып, D тесікке түсетін траекториясын сызып көрсет (25d-сурет).

26



Тарихи үзінді

Астролобия (astrolyabiya) – бұрыш өлшейтін құрал болып, ол ежелгі грек астрономы Гиппарх эрамыздан бұрынғы II ғасырда ойлап тапқан (26-сурет). Көрінісі өте қарапайым болған бұл құрал ондаған өлшеу жұмыстарын орындауы мүмкін.

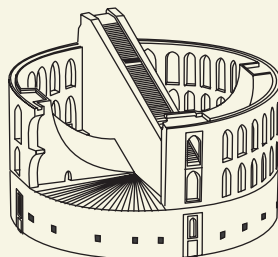
Самарқанттағы Ұлықбек астрономик обсерваториясында да бұрыш өлшеу жұмыстары алып барылған. Радиусы 42 м болған үлкен цилиндр пішініндегі үш қабатты етіп құрылған обсерваторияда (27а-сурет) көптеген құрылма және аспаптар болған (27б-сурет). 27д-суретте оның жер астында сақталып, осы күнге дейін жетіп келген бөлігі бейнеленген. Ұлықбек бұл құрылма көмегінде 1018 жұлдыздың ғарыштағы орнын анық дәлдікпен өлшеп, өзінің «Зижи жадиди Корагани» еңбегінде келтірген.

27

а)



б)

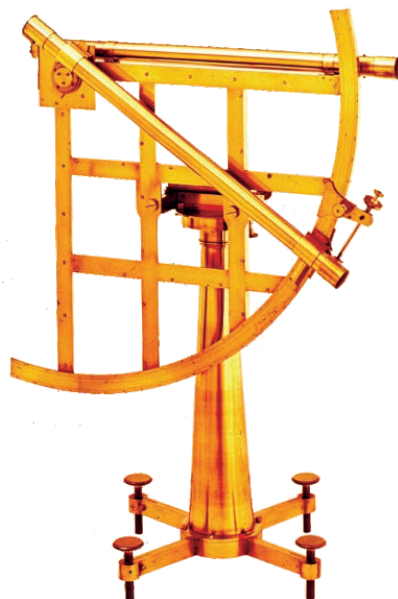


с)



28-суретте Еуропалық ғалымдар телескоп ойлап табылғанша пайдаланған квадрат бейнеленген. Ол Ұлықбек квадратынан едәуір кіші.

28



Қазірде жер өлшеу жұмыстарында жоғары анықтыққа ие болған **электрон теодолит** (29а-сурет) деген аспап қолданылады. Оның көмегінде Жердің қалаған нүктесінде спутник арқылы байланысып, өлшеу, нәтижелерді салыстыру және ұзатуы мүмкін (29б-сурет).

29

а)



б)



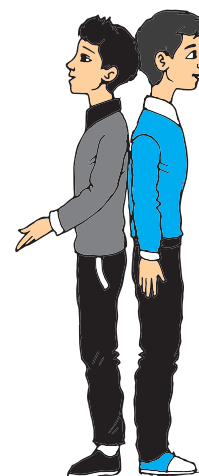
1. Қолыңдағы оқулықтың биіктігі, ені және қалыңдығын сызғыш көмегінде өлше.
2. Қолыңдағы оқулықтың бір парағын қалай өлшеуге болады? Сызғыш көмегінде кірпіштің диагоналын өлшей аласың ба?
3. Ағаш ұстасы екі тақта бөлігі ұзындығын қай тәрізде салыстырады? (30-сурет)
4. Сыныптастарыңның бойын шамалап өлше және салыстыр. Бойы ең ұзын сыныптасыңды анықта.
5. Қарысыңды сызғыш көмегінде сантиметрде өлше. Кейін бірнеше предметтердің өлшемдерін (партаның ені, ұзындығы және биіктігін, терезенің және тақтаның бойы мен енін) қарыстап өлше және нәтижелерін сантиметрлерде өрнекте.

30



Қарысың және қадамыңның ұзындығын өлшеп, естеп қал. Оларды біліп алу күнделікті өмірде қажет болады!

31



6. 30 сантиметрлік сызғыш көмегінде 1 метрлік кесіндіні қалай жасауға болады?
7. Қадамыңның ұзындығын өлше. Мектеп ғимаратының бойы мен енін, спорт алаңының ұзындығы мен енін қадамдап өлше және метрлерде өрнекте.
8. Жер шары оғы Күннен түсіп тұрған нұрға қарағанда $23,5^\circ$ -қа ауған жағдайда айналады (32-сурет). Жер 8 сағатта өз оғы төңірегінде неше градуста айналады? Жер неше сағатта өз оғы төңірегінде 90° -қа бұрылады?
9. Егер бір шақырым 900 м екені белгілі болса, Бұхара мен Самарқант қалалары арасындағы қашықтықтарды шақырымдарда өрнекте.
10. Өзбекстан картасынан берілген масштабқа орай түрлі қалалар арасындағы қашықтықты тап (33-сурет).

32



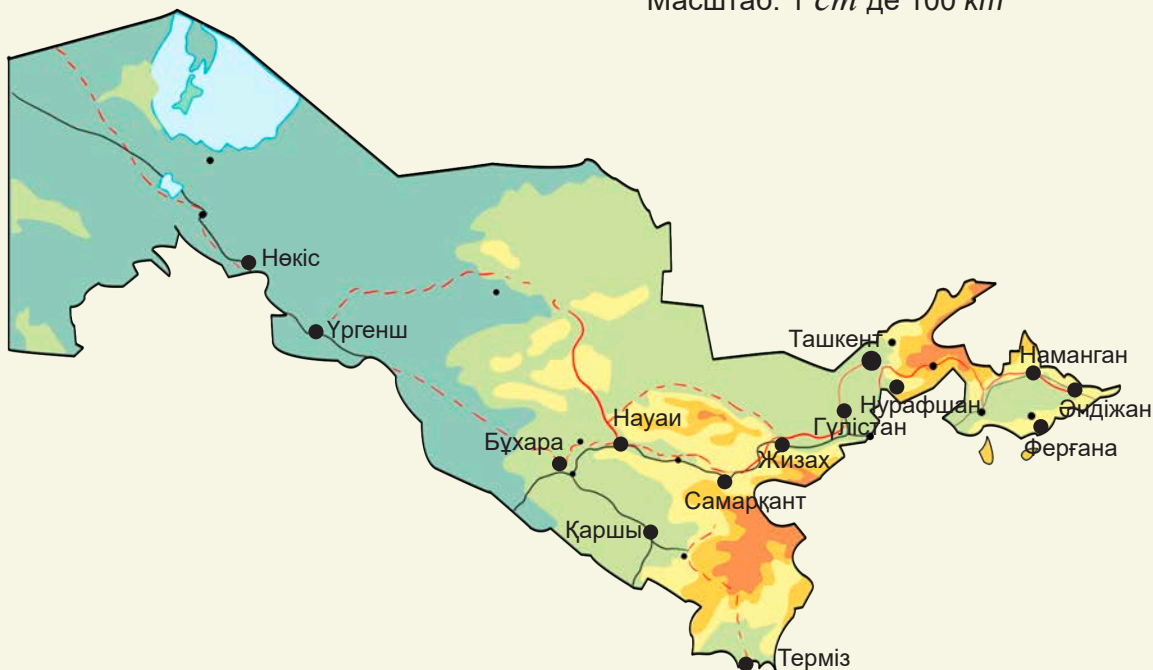
22-маусым ең ұзын күн

Экватор

Жер оғының Күн сәулесіне қарағанда ауу бұрышы – $23,5^\circ$

33

Масштаб: 1 см де 100 км



Үлгі: Ташкент және Бұхара қалалары арасындағы қашықтықты табу. Картада қалалар арасындағы қашықтықты сызғыш көмегінде өлшеп, 4,38 см-ге тең екендігін табамыз. Масштабқа орай, $4,38 \cdot 100 \text{ km} = 438 \text{ km}$ екендігін анықтаймыз.

Жауап: 438 km.

Көп мемлекеттерде халықаралық өлшем бірліктерінен тыс, төмендегі ұзындық өлшемі бірліктері де қолданылады: 1 дюйм = 2,54 см, 1 мил = 1,609 км.

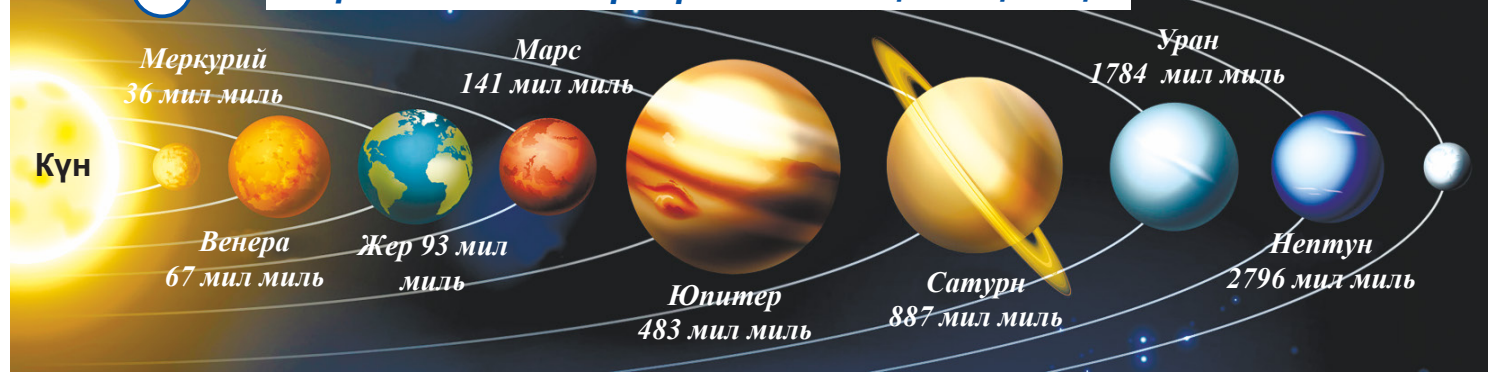
10. Теледидар және компьютер мониторының диагоналы (34-сурет) диаметрлерде өлшенеді. 15, 17 және 19 дюмді монитор диагоналын сантиметрлерде өрнекте.
11. 35-суретте берілген мәліметтерден пайдаланып, Жерден Күнге дейінгі және басқа ғаламшарларға дейінгі болған қашықтықты тап және километрлерде өрнекте.

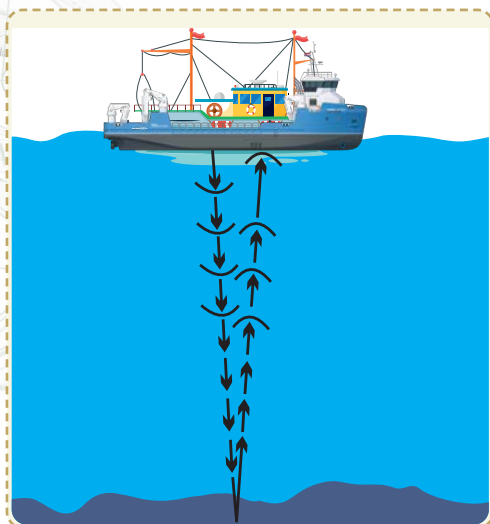
34



35

Күннен ғаламшарларға дейінгі қашықтық





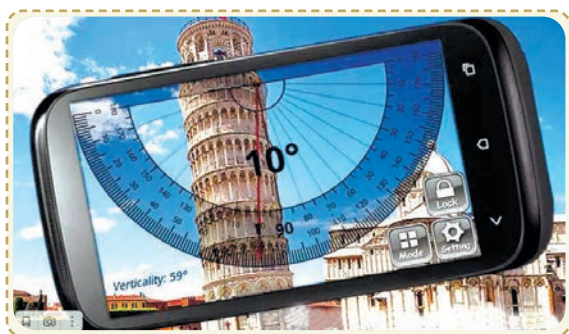
12. Қашықтықты дабыспен өлшеу. Теңізде сүзген кемені басқару үшін теңіз тереңдігі білу өте қажет. Бұл үшін теңіз түбіне ультрадыбыс сигналы жіберіледі және оның теңіз түбіне соғылып қанша уақытта қайтып келгені өлшенеді.

Бұл уақыттың жартысын дауыстың судағы жылдамдығы – 1490 м/с -қа көбейтіп теңіз түбінің тереңдігі анықталады.

Егер бұл уақыт: а) 3; б) 10,5; с) 14,6 секунд екендігі белгілі болса, теңіз тереңдігін тап.



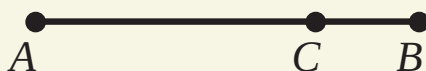
Геометрияда АКТ



Мобиль телефондар үшін қиялықты өлшейтін бағдарламалар істеп шығарылған болып, олар көмегінде қиялық бұрышын автоматты түрде өлшеу мүмкін. Суретте Италиядағы атақты Пиза мұнарасының қиялығын телефондағы осы бағдарлама көмегінде өлшеу бейнеленген.

1-бақылау жұмыс үлгісі

1



Үлгілі бақылау жұмысы екі бөлімнен тұрады:

I. Осы уақытқа дейін үйренілген геометриялық пішіндерді сана. Оларға түсінік бер және олардың қасиетін жаз.

II. Практикалық бөлім. Төмендегі есептерді шеш (4-есеп «үлгілі» баға алмақшы болған оқушыларға арналған):

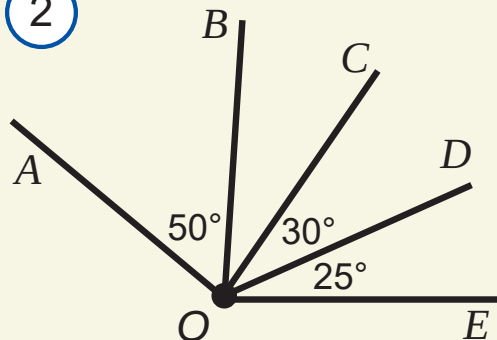
1. Бір түзу сызыққа жататын A , B және C нүктелер үшін $AB = 9 \text{ см}$, $AC = 12 \text{ см}$ болса, BC кесіндінің ұзындығы неге тең?

2. $AB = 48$, $AC = 3 DC$, $DC = ?$ (1-сурет)

3. Егер 2-суретте $\angle AOE = 140^\circ$ болса, $\angle BOC$ бұрышының градус өлшемін тап.

4*. Сағат 5:00 болғанда сағат және минут стрелкалары пайда еткен бұрыш неше градус болады?

2



Математикалық есептер қазынасы

Кейінгі кезде ақпараттық байланыс технологиялары өте тез дамуда және жедел қарқындармен білім беру жүйесіне де кіріп келуде. Бүгінгі күнге келіп, ғаламтор желісінде көптеген ақпарат көздері орналасқан, бұл қазынадан пайдалану әрбір жас ұрпақ үшін өте қажет және пайдалы. Веб-беттерден қазақ, орыс, ағылшын және басқа тілдерде математика әлеміндегі ең соңғы жаңалықтар, электрон кітапханалар қорында сақталып тұрған көптеп электрон оқулықтарды, цифрлы ресурстарды табуың мүмкін. Сондай-ақ, олар арқылы түрлі-түсті теориялық материалдар, әдістемелік ұсыныстар, сан-санақсыз есептер, мәселелер және олардың шешімдері, түрлі мемлекетте болып жатқан математикалық байқаулар және олимпиадалар туралы мәліметтер және оларда ұсынылған қызықты математикалық есептер және олардың шешімдерімен танысуың мүмкін.

Төменде бір қатар ақпараттық-ресурс көздерінің ғаламтор мекен-жайы берілуде. Олардан геометрияға қатысты өзінді қызықтырған түрлі мәліметтерді алып көру, математиканы дербес үйрену мүмкіндігінен пайдалануды ұсынамыз.

uzedu.uz – халыққа білім беру министрлігінің ресми сайты, хабарландыру білім беру порталы;

ziyonet.uz – «Зиёнет» әлеуметтік тәлім порталы;

dr.rtm.uz – жаңа оқулықтар, мұғалімдер үшін әдістемелік қолданбалар электрон пішіндері, презентациялар, мультимедия қолданбалары, видеосабақтар және цифрлы ресурстар платформасы;

maktab.uz – 1–11-сыныптар үшін онлайн мектебі тағы да мектеп оқу бағдарламасы бойынша видеосабақтар және басқа материалдар платформасы;

stesting.uz – оқушылар үшін «Халықаралық бағалау зерттеулеріне дайындау» платформасы (өзбек тілінде);

masofa.uz – А. Авлоний атындағы ғылыми-зерттеу институты қашықтықтан оқыту порталы;

onlinedu.uz – А. Авлоний атындағы ғылыми-зерттеу институты «үздіксіз кәсіптік білім беру» электрон платформасы;

skillsgrover.uz – Финляндияның математиканы үйрену және оқушылар білімдерін бағалау платформасы (өзбек тілінде);

khanakademy.org – «Хан академиясы» қашықтықтан білім беру сайты (ағылшын тілінде);

xanakademiya.uz – математика, информатика, химия, физика, экономика, биология және астрономия сияқты пәндер бойынша видеосабақтар платформасы (өзбек тілінде);

school.edu.ru – жалпы білім беру порталы (орыс тілінде);

problems.ru – математикадан есептер іздеу тізімі (орыс тілінде);

geometry.net – алгебра және геометриядан оқу материалдары (ағылшын тілінде);

mathproblem.narod.ru – математикалық үйірмелер мен олимпиадалар (орыс тілінде);

ixl.com – қашықтықтан тұрып оқыту математикалық білім беру платформасы (ағылшын тілінде);

mathkang.ru – «Кенгуру» халықаралық математикалық таңдау сайты (орыс тілінде);

olimpia.uz – «Кенгуру» халықаралық математикалық таңдау сайты (өзбек тілінде);

brilliant.org – математикадан қашықтық білім беру сайты (ағылшын тілі);



geogebra.com – Геометрия және алгебра пәндері бойынша динамик («жанды») сызбалар жарату мүмкіндігін беретін тегін бағдарлама;

yaklass.ru – мектеп оқушылары және оқытушылары үшін онлайн білім платформасы;

schulen-ans-netz.de – Германия «Интернет-Мектеп» сайты (неміс тілінде);

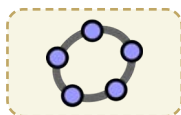
studienkreis.de – Германия оқу үйірмелер сайты (неміс тілінде);

educasource.education.fr – Франция білім сайты (француз тілінде);

educmath.inrp.fr – Франция математика білімі цифрлы ресурстары (француз тілінде);

mat-game.narod.ru – математикалық, гимнастика. Математикалық есептер және басқатырмалар (орыс тілінде);

mathproblem.narod.ru – математикалық үйірмелер, мектептер және олимпиадалар (орыс тілінде).



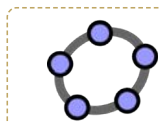
GeoGebra – математикадан «жанды» сызбалар бағдарламасы

GeoGebra – бұл геометрия, алгебра және басқа бағыттағы білімнің түрлі дәрежелерінде пайдалану үшін динамик («жанды») сызбалар жарату мүмкіншілігін беретін тегін бағдарлама есептеледі. Ол геометриялық пішіндер, алгебралық өрнектер, кестелер, графиктер және статистика мен істеу үшін кең мүмкіншіліктер жаратады және қолайлылық үшін барлық функциялар бір пакетке енгізілген. Осы бір ашық кодты бағдарлама 2002 – жылда Аустралиялық математик **Маркус Хенвартер** жағынан Жава бағдарлама тілінде жаратылған болып, бір қанша тілдерде істеу мүмкіншілігін береді. Қазіргі күнде одан дүние бойлап миллиондап қолданушылар пайдаланып келуде.

«GeoGebra» бағдарламасының қолайлылығы.

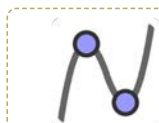
- тегін тарқатылады;
- көп тілді интерфейс;
- графикалық интерфейстің қарапайымдылығы және қолайлылығы;
- әр түрлі операциялық тізімдерге (планшет және смартфондарға) орнату мүмкіншілігі және онлайн версияның барлығы;
- Қолданушылар жағынан материалдар қосу үшін ашық болған мысалдар базасының барлығы.

«GeoGebra» бағдарламасының бөлімдері



Калькулятор топтамы

Функцияларды тексеру, теңдеулерді шешу, геометриялық пішіндер және 3D объекттерін құруға негізделген.



Графикалық калькулятор

Түрлі функциялар графиктерін құру, теңдеулерді салыстыру және мәліметтерді бейнелеуге арналған.



3D калькулятор

Түрлі сызбалар, 3D (үш өлшемді) геометриялық пішіндер және объекттерді сызуға арналған.



Геометрия

Түрлі геометриялық пішіндерді сызу және олардың пішіндерін ауыстыруға арналған.



CAS калькулятор

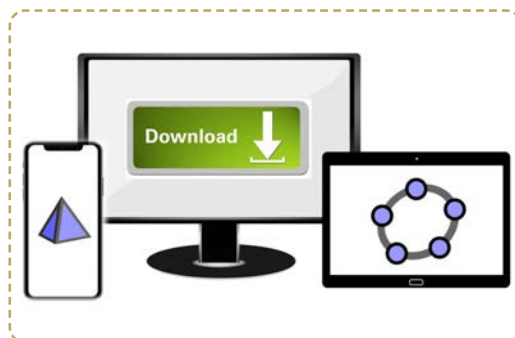
Әр түрлі теңдеулерді шешу, алгебралық өрнектер пішінін ауыстыру, туынды және интегралды есептеуге арналған.

«GeoGebra» – геометрия бағдарламасында

GeoGebra бағдарламасы геометрияға байланысты есептерді шешу үшін арналған: онда сен нүкте, кесім, вектор, сегмент, түзу сызықтарды қолданып, барша түрдегі геометриялық пішіндерді жаратасын, оларды динамикалық тәрізде өзгеруін көруің, сондай-ақ, белгілі бір түзу сызыққа перпендикуляр немесе параллель сызықтар сызуың, орта перпендикуляр, бұрыштардың биссектрисалары, кесімдер ұзындығы және көпбұрыштар жасауың анықтауың мүмкін.

«GeoGebra» – бағдарламасына байланысты онлайн ресурстар

- **GeoGebra** – ресми веб-сайты (GeoGebra.org) дан **GeoGebra** туралы толық анықтама ал және осы веб-сайттан жүктеп ал (тегін бағдарлама).
- Youtube каналында **GeoGebra** ([youtube.com/GeoGebra Channel](http://youtube.com/GeoGebraChannel))ді үйрену үшін видеосабақтар және оны қолдануға байланысты мысалдар келтірілген.
- **GeoGebra**ны сақтау үшін сайт (tube.geogebra.org) – қолданушылар өздері жаратқан пункт және сабақ жоспарларымен бөліседі.



«GeoGebra» бағдарламасын орнату

GeoGebraны компьютерге орнату үшін нұсқаулар:

1. Google Chrome браузерін жұмысқа түсір және **GeoGebra**ның ресми сайтына өт www.geogebra.org. Жүктеп алу бөлімі - «App Downloads»қа өт.
2. Компьютеріңе дұрыс келетін қолданбаның бірін таңда:
 - a) **GeoGebra** веб-қолданбасы - Chrome браузері осы қолданбадан қолдану үшін компьютерден администраторлықты талап етпейді, тек қолданбадан қолдану кезінде компьютер ғаламторға қосылған болуы керек;
 - b) **GeoGebra** қолданбасы - Windows, Mac OS X, Linux және басқа операциялық тізімдер үшін интернетке ұланбастан қолдану мүмкін болған қолданба.

GeoGebraны планшетке орнату бойынша нұсқаулар:

1. Андроид тізіміндегі құрылмаларда Google Play Market немесе IOS тізіміндегі құрылмаларға Apple Store қолданбасына кір.
2. **GeoGebra** қолданбасын қыдыруға бер.
3. Қолданбаны құрылмаңа жүктеп ал.
4. Анық варианты ретінде **GeoGebra**ның ресми сайтына өт және жүктеп алу бөлімі – «**App Downloads**» тан планшет үшін қолданбаны жүктеп ал.

«GeoGebra»да практикалық тапсырмалар орында

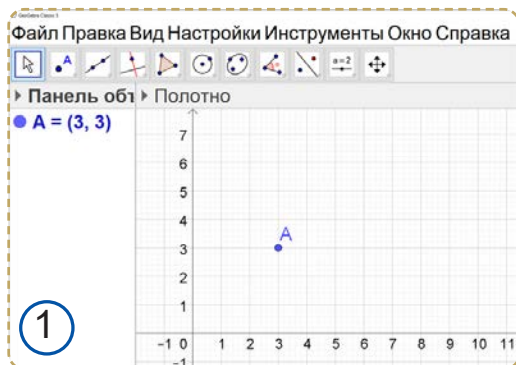
1. Нүкте жасау

Нүкте ең қарапайым және ең кіші геометриялық пішін. Оның бейнесін пайда ету үшін:

- 1) «Точка» (Нүкте) құралының үстіне курсорды алып барып, тінтуірдің сол түймесін бас;
- 2) жұмыс алаңының қай жеріне нүктені қоймақшы болсақ, сол жерге тінтуірдің сол түймесін басамыз;
- 3) экранда нүкте пайда болады (1-сурет).

Нүкте бейнесі үстіне тінтуірдің сол түймесін басып, оның орнын ауыстыру, яғни оны жылжытуға да болады.

Нүктенің түсі және стилін анықтау және әріппен белгілеуге де болады. Бұл үшін экранның сол бөлігінде орналасқан объекттер панелінен қолдану керек. Тінтуірдің оң түймесін «Точка» (Нүкте) құралы үстіне басып, қосымша айна ашылады. Ондағы «Свойство» (Меншік) қатарына тінтуірдің сол түймесі басылады және тиісті түс стиль таңдалады.



5

БҰРЫШТАРДЫҢ ТҮРЛЕРІ

5.1. Тік, сүйір және доғал бұрыштар

Бұрыштар үлкендігіне қарай түрлерге бөлінеді. Егер бұрыштың градусық өлшемі:

90° -тан кіші болса (1а-сурет), *сүйір бұрыш*;

90° -қа тең болса (1б-сурет), *тік бұрыш*;

90° -тан үлкен және 180° -тан кіші болса (1с-сурет) *доғал бұрыш* деп аталады.

Сызбада бұрыштың тік бұрыш екенін көрсету үшін, 1б-суреттегідей белгіленеді.



Есеп. Егер $\angle AOD = 135^\circ$,

$\angle AOB = \angle BOC = \angle COD$ болса (2а-сурет);

а) сызбада неше сүйір, доғал және тік бұрыш барлығын анықта;

б) AOB және COD биссектрисалары арасындағы бұрышты тап.

Шешуі. а) $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \alpha$ болсын. Онда, бұрыштарды өлшеу негізгі қасиетіне қарай, $\angle AOD = \alpha + \alpha + \alpha = 135^\circ$. Бұдан $\alpha = 45^\circ$. Демек, $\angle AOC = 2\alpha = 90^\circ$, $\angle BOD = 2\alpha = 90^\circ$. Сызбада 3 сүйір, 2 тік және 1 доғал бұрыш бар.

б) OO_1 және OO_2 OO_1 және OO_2 сәйкес биссектрисалар болсын (2б-сурет). $\angle AOB = \angle COD = 45^\circ$ болғаны үшін, бұрыш түсінігіне қарай:

$$\angle O_1OB = \angle O_2OC = \frac{\alpha}{2} = 22,5^\circ.$$

Бұрышты табамыз:

$$\begin{aligned} \angle O_1OO_2 &= \angle O_1OB + \angle BOC + \angle COO_2 = \\ &= \frac{\alpha}{2} + \alpha + \frac{\alpha}{2} = 2\alpha = 90^\circ, \end{aligned}$$

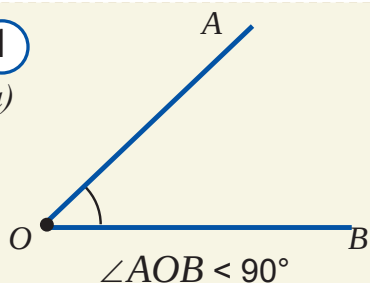
яғни O_1OO_2 – тік бұрыш.

Жауабы: AOB және COD бұрыштарының биссектрисалары арасындағы бұрыш 90° -қа тең.

Ескерту. Өдетте бұрыш өлшемі грек алфавитінің кіші α (альфа), β (бета), γ (гамма) ... сияқты әріптерімен белгіленеді.

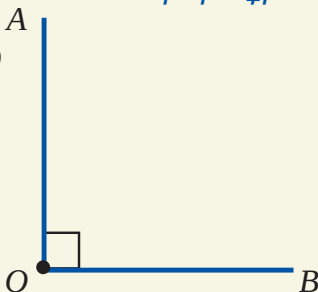
1

а)



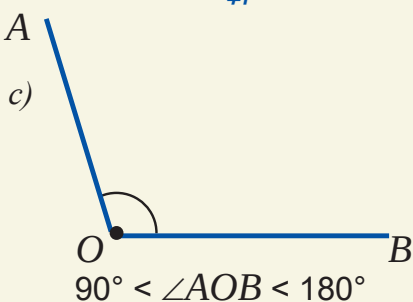
AOB *сүйір бұрыш*

б)



AOB *тік бұрыш*

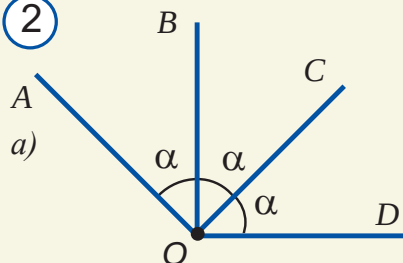
в)



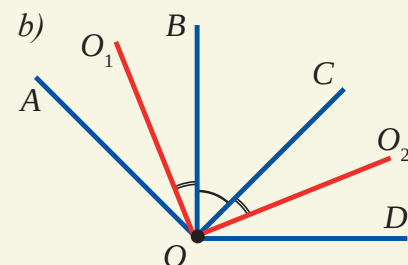
AOB *доғал бұрыш*

2

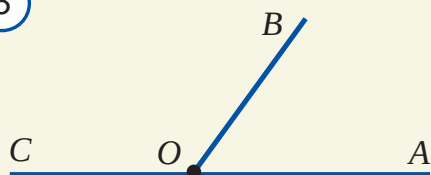
а)



б)

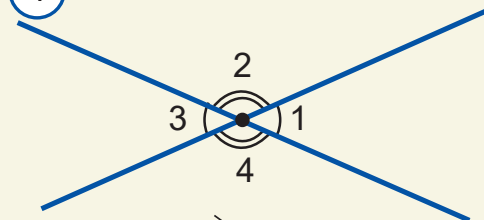


3



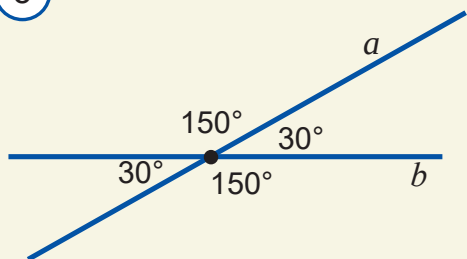
$\angle AOB$ } *сыбайлас*
 $\angle BOC$ } *бұрыштар*

4



$\angle 1$ және $\angle 3$ } *вертикаль*
 $\angle 2$ және $\angle 4$ } *бұрыштар*

5



5.2. Сыбайлас және вертикаль бұрыштар

Бір қабырғасы ортақ, ал қалған қабырғалары толықтырушы сәулелерден тұратын екі бұрыш **сыбайлас бұрыштар** деп аталады.

3-суретте AOB және BOC сыбайлас бұрыштар бейнеленген. Онда OB қабырғасы жалпы OC және OA сәулелері болса бір түзу сызықта жатады және бірін-бірі толтырады.

Бұл AOC бұрыштың жазыңқы бұрыш екендігіне дәлел. Екінші жағынан, түсінікке қарай, AOC бұрыш AOB және BOC сыбайлас бұрыштар жиындысынан тұрады. Пікірлеріміз төмендегі қасиеттің орынды екендігін көрсетеді:

Қасиет: сыбайлас бұрыштардың қосындысы 180° -қа тең.

Бұл қасиеттен төмендегі нәтижелер келіп шығады:

1-нәтиже. Егер сыбайлас бұрыштар тең болса, олар тік бұрыш болады.

2-нәтиже. Тік бұрышқа сыбайлас бұрыш та тік бұрыш болады.

3-нәтиже. Сыбайлас бұрыштың бірі сүйір (доғал) болса, екіншісі доғал (сүйір) болады.

Вертикаль бұрыштар деп бірінің қабырғалары екіншісінің қабырғалары жалғасынан тұратын сәулелерден құралған бұрыштарға айтылады. 4-суретте $\angle 1$ және $\angle 3$ вертикаль бұрыш. Сондай-ақ, $\angle 2$ және $\angle 4$ -те вертикаль бұрыштар жұптығын құрастырады. Енді вертикаль бұрыштардың төмендегі

қасиеттерін дәлелдейміз.

Қасиет: вертикаль бұрыштар өзара тең.

Айтайық, $\angle 1$ және $\angle 3$ вертикаль бұрыштар берілген болсын (4-сурет). $\angle 1$ және $\angle 3$ болуын дәлелдейміз. Дәлел: $\angle 1$ және $\angle 2 = 180^\circ$, өйткені $\angle 1$ және $\angle 2$ сыбайлас бұрыштар.

$\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$, өйткені $\angle 2$ және $\angle 3$ сыбайлас бұрыштар.

Бұл екі теңдеуден $\angle 1 + \cancel{\angle 2} = \cancel{\angle 2} + \angle 3$, яғни $\angle 1 = \angle 3$ екенін пайда етеміз.

Қасиет дәлелденді.

Сонымен екі түзу қиылысқанда вертикаль және сыбайлас бұрыштар пайда болады. Сыбайлас бұрыштар жұбы өзара жазыңқы бұрыштарды құрайтыны белгілі. Олардың бірі 90° -тан үлкен болса, екіншісі 90° кіші болады. Сыбайлас бұрыштардан кішісінің градус өлшемін **түзу сызықтар арасындағы бұрыш** деген атау қабылданған. 5-суреттегі сызықтар арасындағы бұрыш 30° -ты құрайды. Мұны **«түзу сызықтар 30° -ты бұрыш астында қиылысады»**, деп те атаймыз.

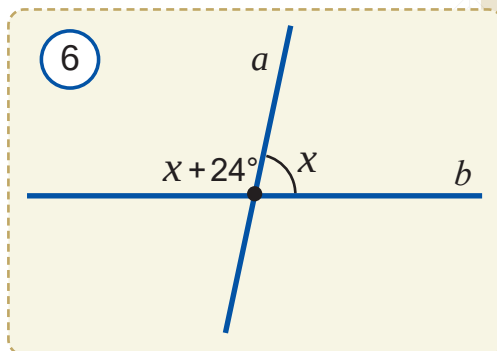


Есеп. Екі түзу сызықтың қиылысуынан пайда болатын бұрыштардың бірі екіншісінен 24° үлкен болса сол бұрыштарды тап.

Шешуі. Екі a және b түзу сызық қиылысқанда пайда болған бұрыштар сыбайлас немесе вертикаль болатындығы белгілі (6-сурет). Бірақ вертикаль бұрыштар өзара тең болады.

Демек, есеп шартында берілген бұрыштар сыбайлас бұрыштар екен. Олардың бірін (кішісін) x пен белгілесек, екіншісі $x+24^\circ$ -қа тең болады. Сыбайлас бұрыштар қасиетіне қарай, $x + x + 24^\circ = 180^\circ$. Бұдан $x = 78^\circ$ және $x+24^\circ = 102^\circ$ екендігін анықтаймыз.

Жауабы: a және b түзу сызықтар қиылысқанда 78° , 102° , 78° және 102° -ті бұрыштар пайда болады.



5.3. Геометрияны үйренуде пікірлердің жүйелілігі және байланыстылығы.

Осы күнге дейін бірнеше геометриялық пішіндер және олардың қасиеттерімен танысып келдік. Мысалы, сабақта вертикаль бұрыштармен таныстық және олардың өзара тең болатынын көрдік. Есінде болса бұл қорытындымен жай ғана таныспай, оны дәлелдедік. «Вертикаль бұрыштар тең» деген растаудың дұрыстығын пікірлеу арқылы негіздедік. Бұл «дәлел» түсінігі мен алғаш рет танысуымыз болды. Геометрияға бірінші болып «дәлел» түсінігін алып кірген математик эрамыздан бұрынғы 6+25-527 жылдарда жасаған Милеттік грек ғалымы Фалес саналады.

Біре пікірдің дұрыстығын логикалық ойлау мен келтіріп шығару дәлел деп аталады. Дұрыстығын дәлелдеу жолымен негізделген дәлел теорема деп аталады. Теорема әдетте шарт пен қорытынды бөлімдерден құралады. Теореманың бірінші – шарт бөлігінде нелер берілгені баяндалады. Екінші қорытынды бөлігінде нені дәлелдеу қажет екені айтылады. Мысалы, төмендегі теореманы қарастырайық:



Теорема. Егер сыбайлас бұрыштар өзара тең болса, олардың екеуі де тік бұрыш болады.

Бұл теореманың *шарт бөлігі*, «өзара сыбайлас бұрыштардың теңдігі» болса, қорытынды бөлігі «олардың әр екеуі де тік бұрышты» болады дегенінен құралады.

Теореманы дәлелдеу – оның шартынан пайдаланып, осы күнге дейін белгілі мәліметтерге сүйеніп, пікір жүргізіп, қорытынды бөлігінде айтылған пікірдің дұрыстығын келтіріп шығару. Теореманың шарт және қорытынды бөлімдерін анықтап алу теореманы дәлелдеуден бұрын оны шарт және қорытынды бөліктерге бөліп, қайта жазып алған мақсатқа сай болады. Мысалы, жоғарыда келтірілген теореманы төмендегі көріністе қайта жазып алу мүмкін:

Берілгені: $\angle A$ және $\angle B$ сыбайлас бұрыштар,
 $\angle A = \angle B$

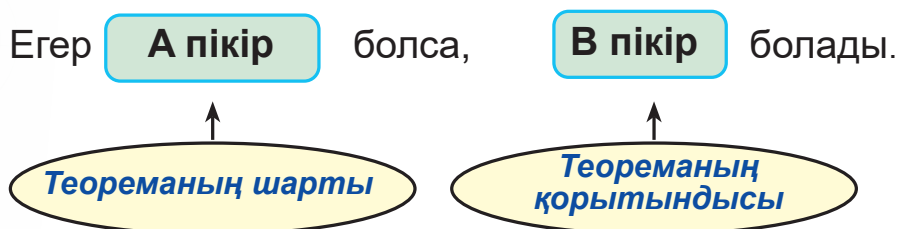
**Теореманың
шарты**



Дәлелдеу керек:
 $\angle A = \angle B = 90^\circ$

**Теореманың
қорытындысы**

Жалпы алғанда, теореманы шарт және қорытынды бөлімдерге бөліп, төмендегі кесте көрінісінде өрнектеуге болады:



Алғашқы түсініктер және аксиомалар. Геометрияда ұғымдар белгілі бір ажыралмас ізшілдікпен және логикалық жүйеден енгізіледі. Нүкте, түзу жазықтық секілді түсініктер геометрияның алғашқы түсініктері саналады. Оларға сипаттама бермедік. **Геометрияның алғашқы түсініктері** сипаттамасыз тікелей енгізілетін түсініктер. Геометрияны бір ғимарат деп алсақ, бұл түсініктер оның іргетасы. Алғашқы түсініктерден пайдаланып, басқа жаңа түсініктер анықталады, яғни оларға сипаттама беріледі.

Сондай-ақ, осы күнге шейін нүкте, түзу сызық және жазықтықтардың кейбір қасиеттерін турадан-тура қабыл қылдық. Мұндай қасиеттер **аксиома** деп аталады. Егер назар аударған болсаңыз, оқулықта барлық аксиомаларды негізгі мәтінде жеке ажыратып, таңба астында берілген. Осы уақытқа дейін танысып шыққан аксиомаларға мысалдар келтіреміз (қалғандарын оқулық беттерінен тауып, жазып шық).



1. Жазықтықта қандай түзуді алсақ та, ол түзуге тиісті нүктелер де, оған тиісті емес нүктелер де бар болады.
2. Кез келген екі нүкте арқылы түзу жүргізуге болады және ол тек біреу ғана болады.
3. Түздегі үш нүктенің біреуі және тек қана біреуі қалған екеуінің арасында

Грек ғалымы Платон геометрияда керемет бір заңдылықты байқаған: алдымен үйренілген, дәлелденген қасиеттерді пікірлеу, пікірлеу арқылы жаңа қасиеттерді келтіріп шығаруға болады екен.



Мұндай керемет мүмкіншіліктен пайдаланып, қалған қасиеттер теоремалар көрінісінде өрнектеледі және аксиомалар тағы да осы уақытқа дейін дұрыстығы дәлелденген қасиеттерге негізделіп, логикалық пікірлеу арқылы дәлелденеді.

Ойлау барысы кезеңінде дәлелденбеген қасиеттерден (олардың дұрыстығы ашықтан-ашық көрініп тұрған болса да) пайдалануға тиым салынады.

Мұндай жаттығу оқушылардың пікірлеу қабілетін асырғаны үшін геометрия мектептерде негізгі пәнге айналған.

Геометрияны бір ғимарат деп қарайтын болсақ (7-сурет), бастапқы түсініктер және аксиомалар оның іргетасын қалайды. Бұл іргетастың үстіне терілген кірпіштер түсіндірілген және теоремалар көрінісінде дәлелденген қасиеттерден құралады.

Геометрияда аналогиялар. Кейде кесім және бұрыштар қасиеттері туралы есептерді шешуде бір түрлі әдіс немесе жанасулардан қолданылады. Бұған себеп бұл геометриялық пішіндер кейбір қасиеттердің бір-біріне ұқсастығы. Мұндай ұқсастық пәнде **аналогия** деп аталады. Аналогия түсінігін төмендегі мысалда түсінтіруге әрекет етеміз.

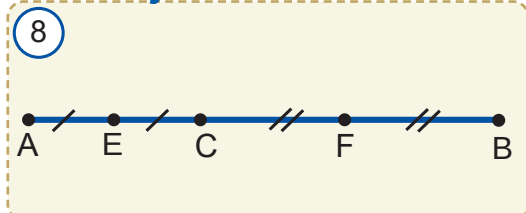
1-есеп. Ұзындығы 32 см болған AB кесімде C нүкте алынған. AC және CB кесімдер орталығы арасындағы қашықтықты тап (8-сурет).

2-есеп. 120° -ты AOB бұрышты OC сәуле екі бұрышқа ажыратылады. AOC және COB бұрыштар биссек трисалары арасындағы бұрышты тап (9-сурет).

Бір қарағанда бұл есептер бір-біріне ұсамайды. Өйткені олардың бірінде кесім туралы, екіншісінде болса бұрыштар туралы сөз барады.

Сондай болса да, олардың ортақ жақтары да бар. Әр екі есепте бір бүтін сызық екіге бөлінген. Екінші жағынан, кесімнің ортасы кесімді, бұрыштың биссектрисасы болса бұрышты тең екіге бөледі.

Шешуі.



E және F нүктелері сәйкесінше AC және CB кесімдер ортасы болсын. Онда,

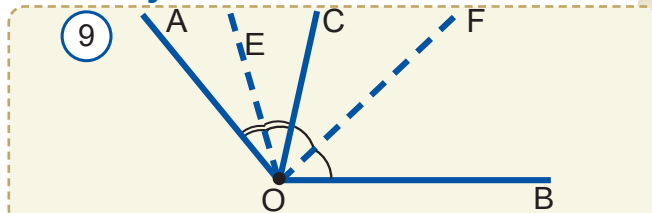
$$EC = \frac{AC}{2} \quad \text{және} \quad CF = \frac{CB}{2}.$$

Бұдан:

$$EF = EC + CF = \frac{AC}{2} + \frac{CB}{2} = \frac{AB}{2}$$

$$EF = 32 : 2 = 16 \text{ (cm)}.$$

Шешуі.



OB және OF сәулелер сәйкесінше $\angle AOC$ және $\angle COB$ бұрыштар биссектрисасы болсын. Онда,

$$\angle EOC = \frac{\angle AOC}{2} \quad \text{және} \quad \angle COF = \frac{\angle COB}{2}.$$

Бұдан:

$$\angle EOF = \angle EOC + \angle COF = \frac{\angle AOC}{2} + \frac{\angle COB}{2} = \frac{\angle AOB}{2}$$

$$\angle EOF = 120^\circ : 2 = 60^\circ.$$

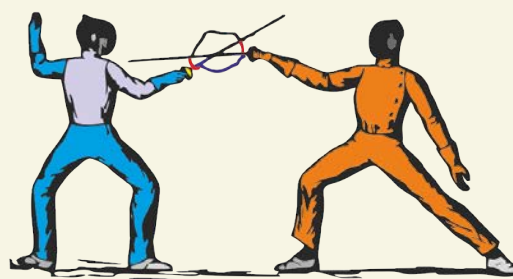
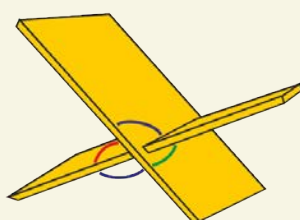
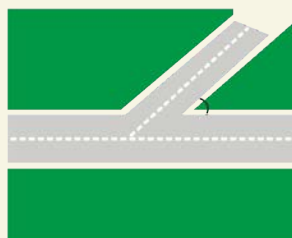
Көріп тұрғаныңдай, әр екі есепті шешу жолы да бір-біріне ұқсас. Сол үшін бірінші есепті шешуде қолданған ойларымызды екінші есепті шешуде де кезеңімен қолдануымыз мүмкін. Бұл жағдайда «екінші есеп шешімі бірінші есеп шешіміне ұқсас» деп айтылады.



Тақырып бойынша сұрақтар

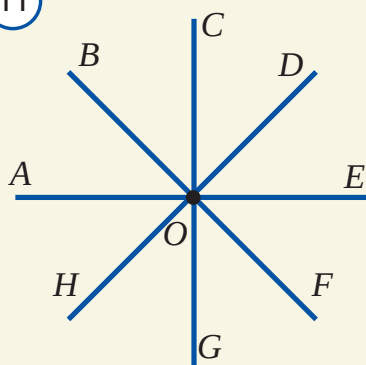
1. Бұрыш өлшеміне қарап қандай түрлерге бөлінеді?
2. Төңіректен сүйір, доғал және тік бұрыштарға мысалдар келтір.
3. Қандай бұрыштар сыбайлас бұрыштар деп аталады?
4. Сыбайлас бұрыштардың жиындысы неге тең? Жауабыңды негізде.
5. Сыбайлас бұрыштар өзара тең болуы мүмкін бе? Қашан?

10

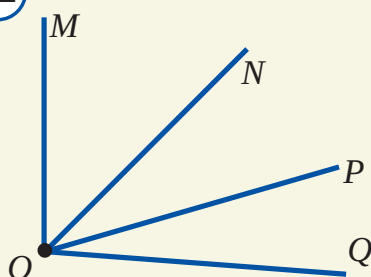


6. Қандай бұрыштар вертикаль деп аталады?
7. Вертикаль бұрыштардың негізгі қасиеттерін түсіндір.
8. 10-суретте қандай бұрыштарды көріп тұрсың.
9. Сыбайлас бұрыштардың екеуі де: а) сүйір; б) тік; с) доғал бұрыштар бола алады ма?
10. Егер екі бұрыш тең болса, оларға сыбайлас болған бұрыштары да тең болады ма?
11. Сипаттама не? Қайсы түсініктер сипаттамасыз қабыл данады?
12. Теорема деген не? Ол қандай бөлімдерден тұрады?
13. Теоремалар қалай дәлелденеді? Дәлел дегенде нені түсінесің?
14. Аксиома не?

11



12



Практикалық жаттығу және қолдану

1. Үш бұрыш сыз. Оларды сәйкес қалыпта $\angle AOB$, $\angle MNL$, $\angle PQR$ түрінде белгіле. Транспортирмен өлшеп түрін анықта.
2. ОА сәуле сыз. Транспортир көмегінде градус өлшемі сәйкес түрінде 25° , 72° және 146° болған AOB , AOC және AOD бұрыштарын сал.
3. Тік бұрыштың биссектрисасының бір қабырғасы мен қандай бұрыш пайда етеді?
4. OC сәуле AOB бұрыштың биссектрисасы. OD болса AOC бұрыштың биссектрисасы. AOB бұрыш DOC бұрыштан неше есе үлкен?
4. 11-суретте неше: а) сүйір; б) доғал; с) тік; д) жазыңқы бұрыш бар?
5. 12-суретте неше сүйір және неше доғал бұрыш бар?
6. Қағаз парағын бүктеп тік бұрыш пайда ете аласың ба?
7. Сағаттың сағат және минут стрелкалары тік бұрыш пайда ететін уақыттардан бір нешеуін айт.

8. Сағаттың минут және сағат стрелкалары пайда етіп бұрыштарды тап (13-сурет).

9*. Сағаттың сағат стрелкалары: а) 1 сағатта; б) 6 сағатта; с) 2 минутта неше градусқа бұрылады?

10. а) 20° ; б) 90° ; с) 145° d) 9° -ты бұрышқа сыбайлас болған бұрыш неше градусқа бұрылады?

11. а) 34° ; б) 109° ; с) 5° ; d) 167° градусты бұрышқа сыбайлас болған бұрыш неше градус болады?

12. Егер сыбайлас бұрыштардың бірі екiшiсiнен үш есе үлкен болса, оны тап.

13. Егер сыбайлас бұрыштардың бірі екiншiсiнен төрт есе кiшi болса, оны тап.

14. 14-суреттегі белгiсiз x бұрышты тап.

15. Егер сыбайлас бұрыштар градус өлшемдер қатынасы: а) $2 : 7$; б) $11 : 25$; с) $1 : 9$ болса, оларды тап.

16. Егер екi түзу сызықтың кесiмiнен пайда болған бұрыштардан бірі 40° болса, қалған бұрышты тап.

17. $\angle 1$ және $\angle 2$ сыбайлас бұрыштар. Төмендегі кестені толтыр.

$\angle 1$	34°			19°	175°
$\angle 2$		118°	132°		

18. $\angle 1$ және $\angle 2$ сыбайлас бұрыштар. Төмендегі кестені толтыр.

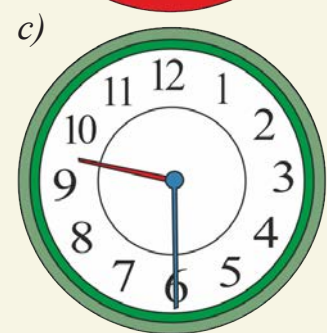
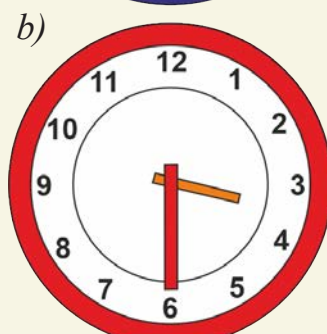
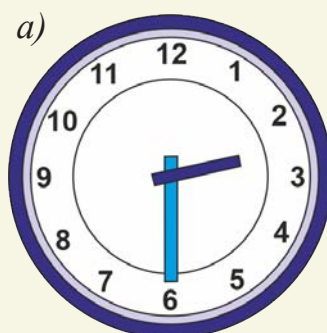
$\angle 1$	12°		120°		45°
$\angle 2$		18°		165°	

19*. $\angle ABC = 30^\circ$, $\angle CBD = 80^\circ$. $\angle ABD$ -ны тап. Барлық жағдайларды көр.

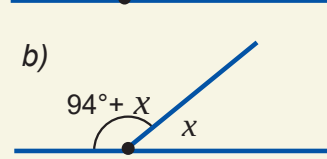
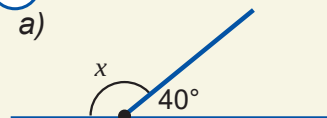
20*. $\angle MON = 45^\circ$, $\angle NOL = 104^\circ$ $\angle MOL$ -ды тап. Барлық жағдайларды көр.

21*. 15-суреттегі белгiіз x бұрышты тап.

13

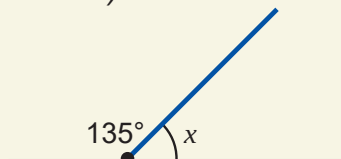


14

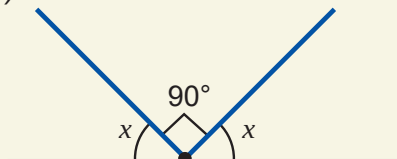


15

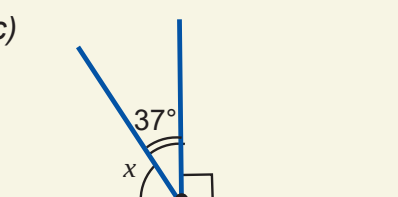
a)



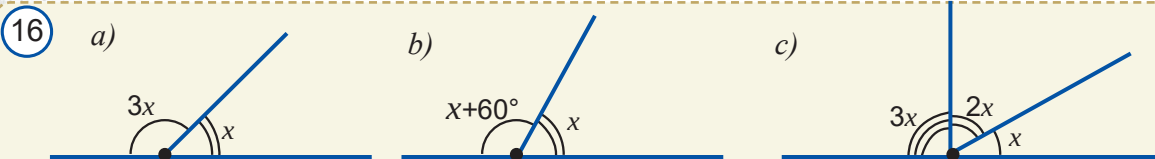
b)



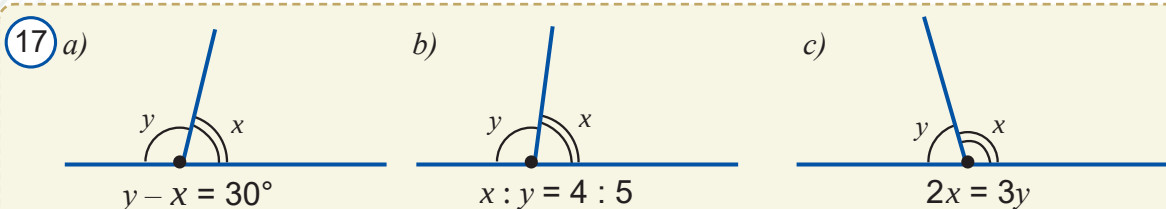
c)



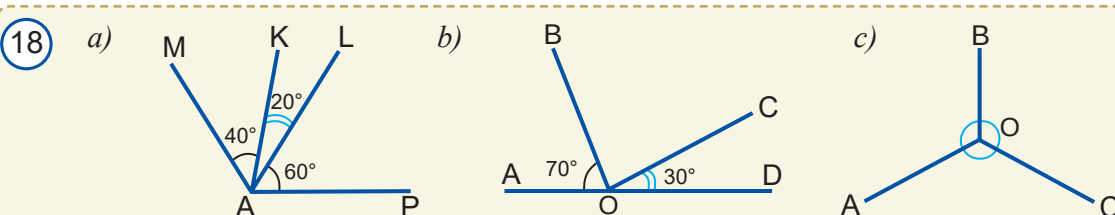
22*. 16-суретке қарап есеп құрастыр және оны шеш.



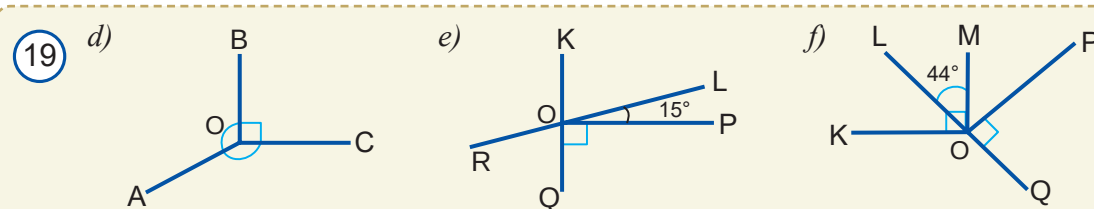
23*. 17-суретте бұрыштардың өлшемдерін тап.



24. 18-суретте бұрыштардың өлшемдерін тап.



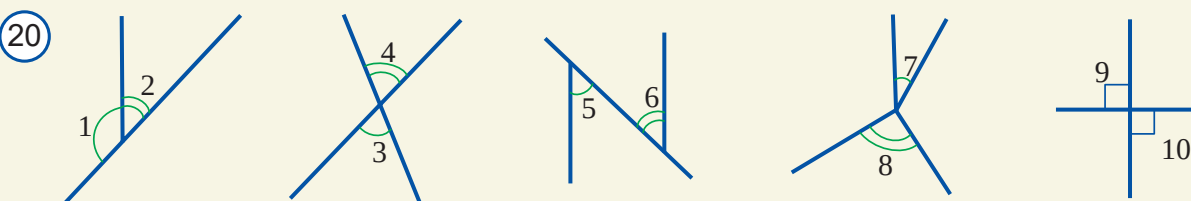
25. 19-суретте бұрыштардың өлшемдерін тап.



26*. Транспортир көмегінде $\angle PQR = 45^\circ$ бұрышты сыз. Бұл бұрышқа сыбайлас және QR қабырғасы ортақ болған сыбайлас бұрышты сыз және оның өлшемін тап.

27*. Транспортир көмегінде $\angle MNL = 120^\circ$ бұрышты сыз. Бұл бұрышқа сыбайлас және MN қабырғасы ортақ болған сыбайлас бұрышты сыз және оның өлшемін тап.

28. 20-суретте а) вертикаль; б) сыбайлас бұрыштар жұбын тап.



29. AOB бұрыш OC , OD және OE сәулелер мен төрт тең бұрыштарға бөлінген. Бұл сәулелер қайсы бұрыштардың биссектрисасы болады.

30*. Түзу сызықта A , B және C сәулелер берілген. Егер $AB = 42 \text{ cm}$, $AC = 3 \text{ dm } 2 \text{ cm}$ және $BC = 74 \text{ cm}$ болса, бұл нүктелердің қайсы бірі қалғандарының арасында жатады? Жауабыңды негізде.

6

ПЕРПЕНДИКУЛЯР ТҮЗУ СЫЗЫҚТАР

6.1. Перпендикуляр түзу сызықтар



Белсендіруші жаттығулар

Екі түзу сызық қиылысқанда пайда болған бұрыштардың бірі тік бұрыш болса (1-сурет), қалған бұрыштар туралы не деуге болады?

Тік (90° -ты) бұрыш жасап қиылысатын түзу сызықтар **перпендикуляр түзу сызықтар** деп аталады.

Қыстың күні тарнаудан жерге тін (перпендикуляр) өсіп шыққан мұздарға (2-сурет) көзің түскен болса керек. 1-суретте бір-біріне перпендикуляр a және b түзу сызықтар бейнеленген. Бұл түзу сызықтардың перпендикулярлығы арнайы белгі көмегінде $a \perp b$ түрінде жазылады және « a түзу сызық b түзу сызыққа перпендикуляр» деп оқылады.

Перпендикуляр түзу сызықтар қиылысуынан төрт тік бұрыш пайда болады.



Теорема. Түзу сызықтың кез-келген нүктесінен осы түзу сызыққа жалғыз ғана перпендикуляр түзу өткізу мүмкін.

Дәлел. Айтайық, AB түзу сызық және ондағы O нүкте берілген болсын (3-сурет). OB сәулеге ұшы O нүктеде болған 90° -ты COB бұрыш қою мүмкін. Онда CO түзу сызық AB түзу сызыққа перпендикуляр түзу сызық болатындығы белгілі.

Енді бұл түзу сызықтың жалғыз екендігін дәлелдейік. Керісін ойлаймыз: O нүктеден өтетін, берілген AB түзу сызыққа перпендикуляр жалғыз болмасын, яғни тағы бір перпендикуляр DO түзу сызық бар болсын. Онда DOD және COB бұрыштарының әр бірі 90° -ты болып, OB сәулеге қойылған бұрыштар болып қалады. Бірақ бұл OB сәулеге белгілі градус өлшеміне ие жалғыз бұрыш қою мүмкіндігі туралы аксиомаға кері, яғни мұндай болуы мүмкін емес.

Демек, AB түзу сызыққа оның O нүктеден бір перпендикуляр түзу сызық жүргізу мүмкін екен. Теорема дәлелденді.



Есеп. Егер 4-суретте $\angle 1 = \angle 4$, $\angle 2 = \angle 3$ болса, $CO \perp AE$ болуын көрсет.

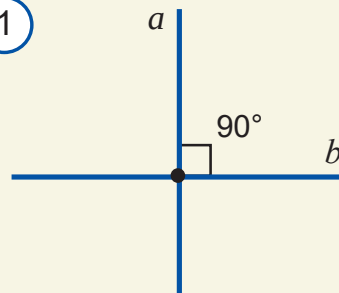
Шешуі. Айталық, $\angle 1 = \angle 4 = \alpha$, $\angle 2 = \angle 3 = \beta$ болсын. Бұрыштарды өлшеудің қасиетіне қарай:

$$\angle AOE = \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = \alpha + \beta + \alpha + \beta = 2\alpha + 2\beta = 180^\circ, 2(\alpha + \beta) = 180^\circ, \text{ яғни } \alpha + \beta = 90^\circ \text{ болады.}$$

Онда:

$$\angle AOC = \angle 1 + \angle 2 = \alpha + \beta = 90^\circ, \text{ яғни } CO \perp AE \text{ болады.}$$

1

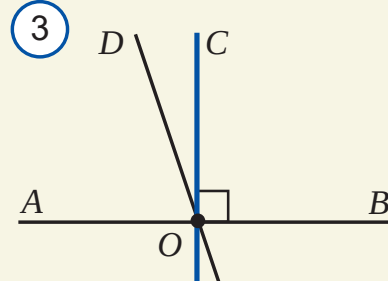


$a \perp b$ – a түзу сызық
 b түзу сызыққа
перпендикуляр

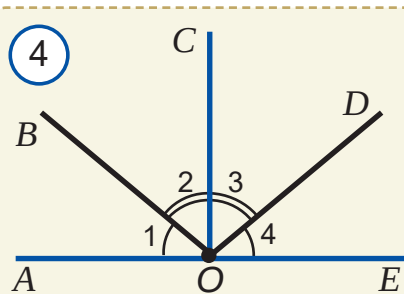
2



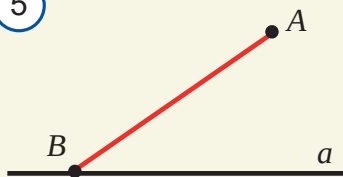
3



4



5



a түзу сызық және онда жатпайтын A нүкте берілген болсын. A нүктені a түзу сызықтың бір B нүктесі мен тұтастырамыз (5-сурет). Егер AB кесім a түзу сызыққа перпендикуляр болмаса, AB кесім **аума** деп аталды.

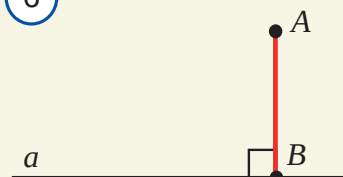
6-суретте A нүктеден a түзу сызыққа сызылған перпендикуляр бейнеленген. B нүкте перпендикулярдың **негізі** деп аталады.

Түзу сызықтың O нүктесіне перпендикуляр сызудың практикалық нұсқаулары:

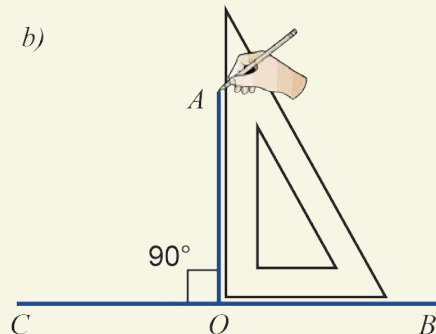
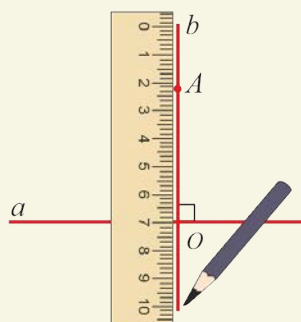
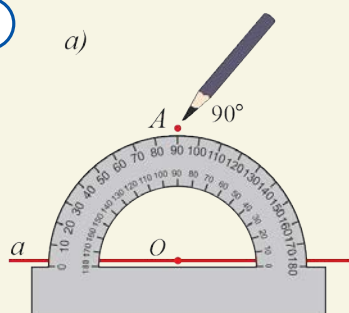
1-тәсіл. Транспортир көмегінде (7a-сурет).

2-тәсіл. Тік бұрышты сызғыш(гония) көмегінде (7b-сурет).

6



7



Біреп түзу сызық сыз. Онда жатпайтын бір нүктеден түзу сызыққа перпендикуляр және бірнеше аумалар өткіз. Перпендикуляр және аума ұзындықтарын өлше және өзара салыстыр. Қайсы кесімнің ұзындығы ең кіші болады? Жауабыңды ойша (гипотеза) көрінісінде өрнекте. Бұл ойдың дұрыстығын дәлелсіз қабыл етсе болады ма немесе, оны дәлелдеу керек пе?

8



Геометриялық зерттеу

Жаттығу. Диқан-фермерлік шаруашылығының картасы 8-суретте берілген.

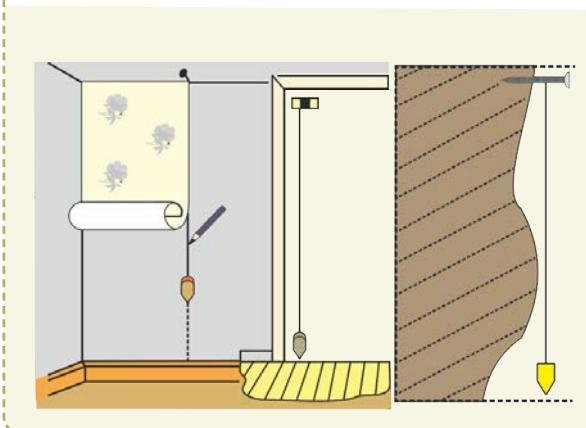
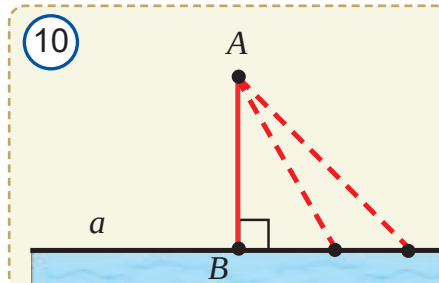
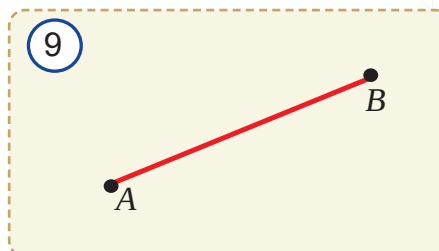
1. Фермер үйінен фермаға алып баратын жол құрмақшы. Оған жолды қайсы сызық бойынша құруды кеңес бересің? Неге? Сызбада бұл жолды сызып көрсет.

2. Фермер фермасынан каналға алып баратын жол құрмақшы. Оған жолды қайсы сызық бойынша құруды кеңес бересің? Неге? Сызбада бұл жолды сызып көрсет.

9-суретте бейнеленген A және B нүктелерді тұтастырушы ең қысқа «жол» – бұл AB кесімі екендігі белгілі. Сондықтан төменгі сыныптарда AB кесім ұзындығы **A және B нүктелер арасындағы қашықтық деп қабылдаған** едік. Осыған ұқсас, **A нүктеден a түзу сызыққа дейін болған қашықтық** деп A нүктеден a түзу сызыққа түсірілген AB перпендикуляр ұзындықты қабылдаймыз. Бұл қашықтық A нүктеден a түзу сызыққа түсірілген барлық аумалар ұзындықтан кіші болады (10-сурет). Тұжырымның дәлеліне кейін тоқталамыз.

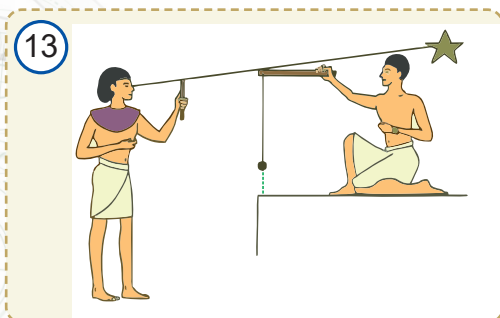
Нүктеден түзу сызыққа дейінгі болған қашықтық спортта да қолданылады. Мысалы, футболда 11 метрлік айып добын қақпа сызығынан 11 метр қашықтықтағы нүктеден соғады (11-сурет).

Құрылыста қабырғалар және бағандар тіктігі (еденге қарағанда перпендикулярлығы) шоқұл деген құрал көмегінде тексеріледі. Қазірде құрушыларымыз лазерлі және электрон шоқұлдардан да пайдалануда (12-сурет).



13-суретте Ежелгі Мысырда бұрыштарды өлшеу кезеңі келтірілген. Оған қарап бұл жұмыстар қалай орындалғанын айт.

Далада түзу сызықтарды жүргізу үшін екер аспабынан пайдаланылады. 14-суретке қарап одан қандай пайдалану мүмкіндігін түсініп алуға болады.



6.2. Кері жору арқылы дәлелдеу тәсілі.

Бұл тәсілге орай, теореманың шарты орындалған болса да, оның қорытындысы орынды болмасын, деп теоремада берілген тұжырымды керісінше болжау жасалады: AB түзу сызықтың O нүктесіне түсірілген перпендикуляр жалғыз болмасын, яғни тағы бір перпендикуляр DO түзу сызық бар болсын деп алынады (2-сурет).

Онда, DOB және COB бұрыштарының әрбірі 90° -ты болып, OB сәулеге қойылған тік бұрыштар болып қалады. Бірақ бұл OB сәулеге қатысты градус өлшемге ие жалғыз бұрыш қою мүмкіндігі туралы аксиомаға қарсы. Бұл болжамымыздың дұрыс еместігін көрсетеді.

Демек, AB түзу сызыққа оның O нүктесінен перпендикуляр түзу сызық жүргізу мүмкін.

Кері жору арқылы дәлелдеу тәсілін қолдау кестесі

Теорема (дұрыс тұжырым)	Егер A орынды болса, B орынды болады
Дәлел:	
Кері елестейміз	Теоремада келтірілген тұжырымның керісін елестейміз, яғни теореманың шарты орындалсын, бірақ қорытынды орынды болмасын: егер A орынды болса, B орынды болмайды
Пікір жүргіземіз	Дұрыстығы алдын дәлелденген теорема немесе қабылданған аксиомаларға таянып логикалық пікір жүргіземіз.
Қарсылыққа келеміз	Дұрыстығы алдын дәлелденген теорема немесе қабылданған аксиомалардың біріне кері болғанын тұжырымға кездей-соқ келіп қаламыз.
Қорытынды шығарамыз	Демек, болжамымыз дұрыс емес, яғни берілген теорема дұрыс екен.
Теорема дәлелденді.	

Кері елестеу арқылы дәлелдеу тәсілінен өмірдегі жағдайларда да көп пайдаланамыз. Мысалы, дәрігер науқастың тұмаумен ауырмағандығын төмендегіше бақылау жүргізіп анықтауы мүмкін. Болжайық, науқас тұмаумен ауырған болсын. Онда оның басы ауруы және ыстығы жоғары болуы керек. Бірақ науқаста бұндай белгілер жоқ. Демек, ол тұмаумен ауырмаған.



Белсендіруші жаттығулар

Төменде берілген тұжырымға кері болған тұжырымды түз:

- CD кесім A түзу сызықты кесіп өтеді;
- A және B нүктелер A түзу сызықтың бір қабырғасында жатады;
- CD кесімнің ұзындығы 15-ке тең;
- AOB бұрыш тік бұрыш емес;
- $\angle AOB > \angle MNL$;
- AB аума AC перпендикулярдан ұзын.



Теорема. Бір түзу сызыққа перпендикуляр болған екі түзу сызық өзара қиылыспайды.



AA_1 , BB_1 және CD түзу сызықтар,
 $AA_1 \perp CD$ және $BB_1 \perp CD$ (15-сурет)



AA_1 және BB_1 түзу сызықтар,
өзара қиылыспайды

Дәлелдеу. Бұл теореманы дәлелдеу үшін кері жору арқылы болжам етіп дәлелдеу тәсілін қолдаймыз. Ойлап көрейік: теореманың шарты орындалған болса да, оның қорытындысы орынды болмасын, яғни AA_1 және BB_1 түзу сызықтар бір M нүктеде қиылыссын.

Ойша 15-суретті CD түзу сызық бойлап бүктейміз, яғни жоғары жарты жазықтықты «аударып» – төменгі жарты жазықтыққа беттесіп қоямыз. Мұнда 1 – және 2 – тік бұрышқа тең болғаны үшін CA және CA_1 сәулелер беттесіп түседі. Дәл осындай ұқсас, DB және DB_1 сәулелер де беттесіп түседі.

Онда AA_1 және BB_1 түзу сызықтардың қиылысу нүктесі болған M нүкте төменгі жарты жазықтықтағы бір M_1 нүкте де AA_1 және BB_1 түзу сызықтардың қиылысу нүктесі екендігін білдіреді.

Нәтижеде M және M_1 нүктелерден екі - AA_1 және BB_1 түзу сызық өтіп қалады. Бірақ бұл «әр қандай екі нүктеден тек бір түзу сызық өтеді», деген аксиомаға кері. Демек, болжамымыз дұрыс емес: бір түзу сызыққа перпендикуляр AA_1 және BB_1 түзу сызықтар өзара қиылыспайды.

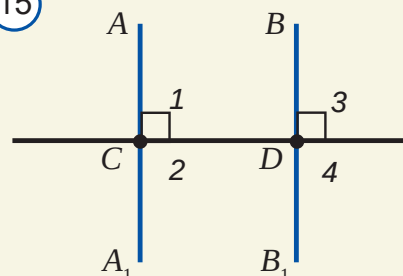
Теорема дәлелденді.



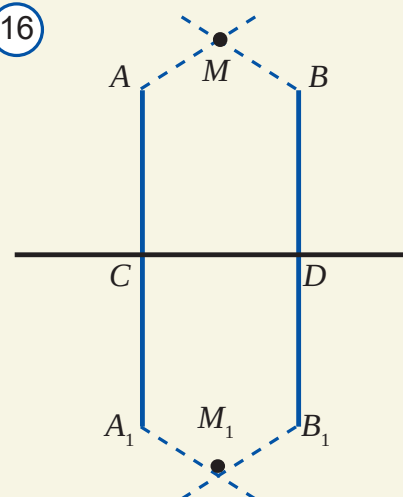
Теорема. Түзу сызыққа жатпаған нүктеден осы түзу сызыққа біреуден артық перпендикуляр түзу сызық түсіру мүмкін емес.

Бұл қасиетті кері ойлауды болжам етіп дәлелдеу әдісі көмегінде өздігіңше дәлелде.

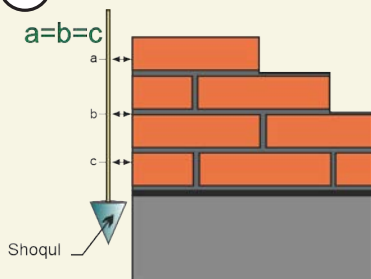
15



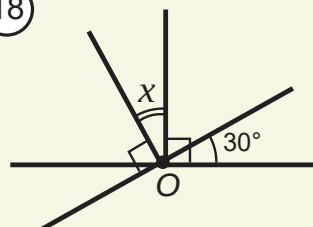
16



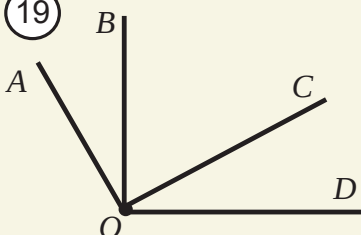
17



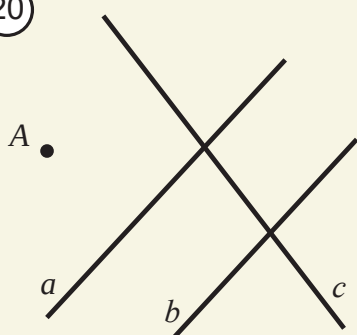
18



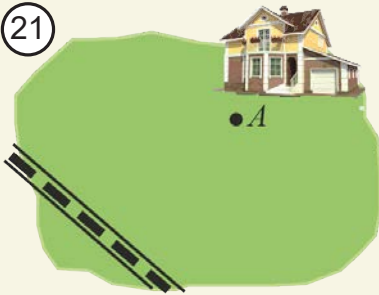
19



20



21



Тақырып бойынша сұрақтар

1. Қашан түзу сызықтар перпендикуляр делінеді? Жауабыңды сызбада түсіндір.
2. Берілген түзу сызыққа жатушы нүктеден онда неше перпендикуляр түзу сызық жүргізу мүмкін? Жауабыңды түсіндір.
3. Берілген нүктеден түзу сызыққа жүргізілген: а) перпендикуляр; б) аума деп неге айтылады?
4. 17-суретке қарап түзу сызыққа шоқұл құралының естуін түсіндір.
5. Берілген A нүктеден түзу сызыққа неше аума түсіруге болады?
6. Кері ойлауды болжам етіп дәлелдеу тәсілі қандай ережеге негізделген?
7. Тік бұрышқа вертикаль болған бұрыш неше градус?
8. A түзу сызық a бұрыштың қабырғалары B және C нүктелерде кесіп өтеді. AB және AC түзу сызықтар A түзу сызыққа перпендикуляр бола алады ма?
9. Екі түзу сызықтың қиылысуы нәтижесінде 4 тең бұрыш пайда болады. Бұл түзу сызықтар перпендикуляр болады ма?
10. Нүктеден түзу сызыққа дейінгі болған қашықтық не деп аталады?



Практикалық жаттығу және қолдану

1. Сызғыш және гония көмегінде берілген түзу сызыққа онда жататын нүктеден өтетін перпендикуляр түзу сызық сал.
2. A түзу сызыққа A , B , C нүктелерін белгіле және транспортер көмегінде бұл нүктелердің әрбірі арқылы A түзу сызыққа перпендикуляр болған түзу сызықтарын өткіз.
3. 18-суреттегі белгісіз бұрыш – x ті тап.
4. 19-суретте егер $OB \perp OD$ және $OA \perp OC$ болса, $\angle AOB = \angle COD$ болуын көрсет.
5. Гония көмегінде A нүктеден a , b және c түзу сызықтарына дейін болған қашықтықты тап (20-сурет).
6. Транспортер және жай сызғыш көмегінде 21-суретте бейнеленген демалу саябағынан темір жолға дейінгі болған ең қысқа қашықтықты анықта. Масштаб: 1 : 10 000.

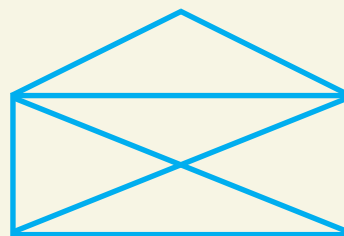
7. A, B, C нүктелер түзу сызықта жатса және: а) $AB = 3,6; BC = 5,4; AC = 9$; б) $AB = 2,4; BC = 4,2; AC = 1,8$ болса, нүктенің A және B нүктелер арасында жатпауын дәлелде. Бұл нүктелерден қайсы бірі қалған екеуінің арасында жатады?
- 8*. Сыбайлас бұрыштар биссектрисалары арасындағы бұрышты тап.
- 9*. Вертикаль бұрыштар теңдігін кері жоруды болжам етіп дәлелдеу тәсілі мен дәлелде.
- 10*. Егер $\angle AOB = 58^\circ, \angle BOC = 17^\circ$ және $\angle AOC = 41^\circ$ болса, OA, OB және OC сәулелерден қайсы бірі қалған екеуінің арасында жатады?
11. Екі түзу сызықтың қиылысуынан пайда болған бұрыштардан екеуінің айырмасы 120° . Бұл бұрыштарды тап.
12. Екі түзу сызықтың қиылысуынан пайда болған биссектрисалардан екеуінің айырмасы 20° . Бұл бұрыштарды тап.
- 13*. Вертикаль бұрыштардың биссектрисасы бір түзу сызықта жатуын дәлелде.
- 14*. Жазықтықта үш - A, B, C нүкте берілген: $AB = 2,6, AC = 8,3, BC = 6,7$. Бұл нүктелердің бір түзу сызықта жатпайтындығын дәлелде.
- 15*. Екі түзу сызықтың қиылысуынан пайда болған бұрыштардан екеуінің қосындысы 180° -қа тең емес. Бұл бұрыштардың вертикаль бұрыштар екендігін дәлелде.



Геометриялық басқатырма

1. а) 10; б) 11 бір түрлі таяқшадан 3 квадрат түз.
2. 12 бір түрлі таяқшадан, оларды сындырмасаң: а) 4; б) 6 тең квадрат жасай аласың ба?
3. 22-суретте көрсетілген пішінді қаламды қағаздан үзбестен және бір кеспе үстінен екі рет жүргізбестен сызып көр.
4. Өзен бойында бес ауыл болып, олардан үшеуі өзеннің бір жағында, қалған екеуі болса өзеннің бір жағында орналасқан (23-сурет). Егер әр екінші ауыл қалған ауылдар мен тік жолдармен байланысқан болса, бұл жолдардың нешеуі өзенді кесіп өтеді?

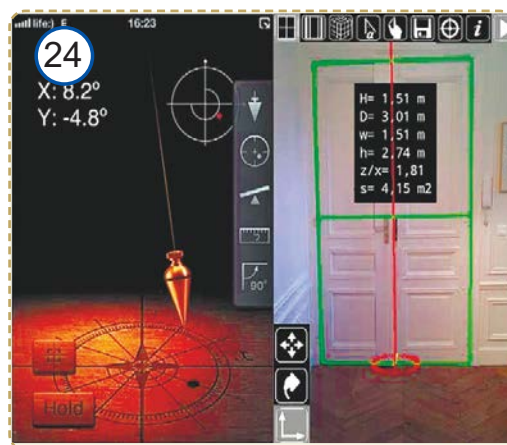
22



23



24



Геометрияда АКТ

Құрушы ұсталар үшін істеп шығарылған, «iHandy Carpenter» деп аталған мобиль телефон бағдарламалық жасақтамасы кез-келген ғимарат немесе құрылманың көкжиекке (горизонтқа) қатысты қаншалықты тік екендігін анықтап береді. Бұл үшін телефонда керекті бағдарламаны іске түсіріп, ғимарат немесе құрылмаға қарату жеткілікті (24-сурет).

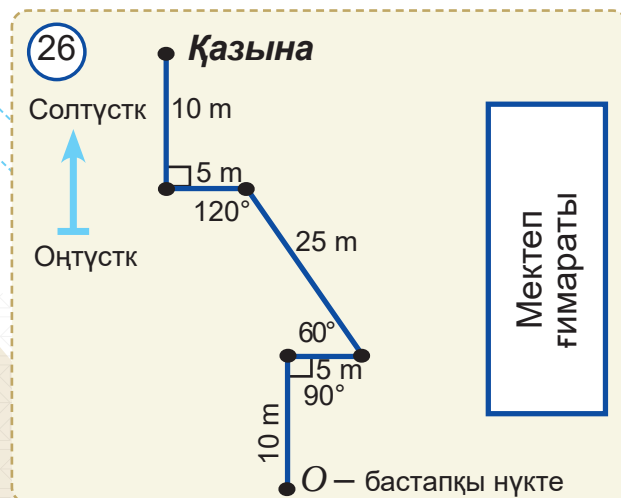
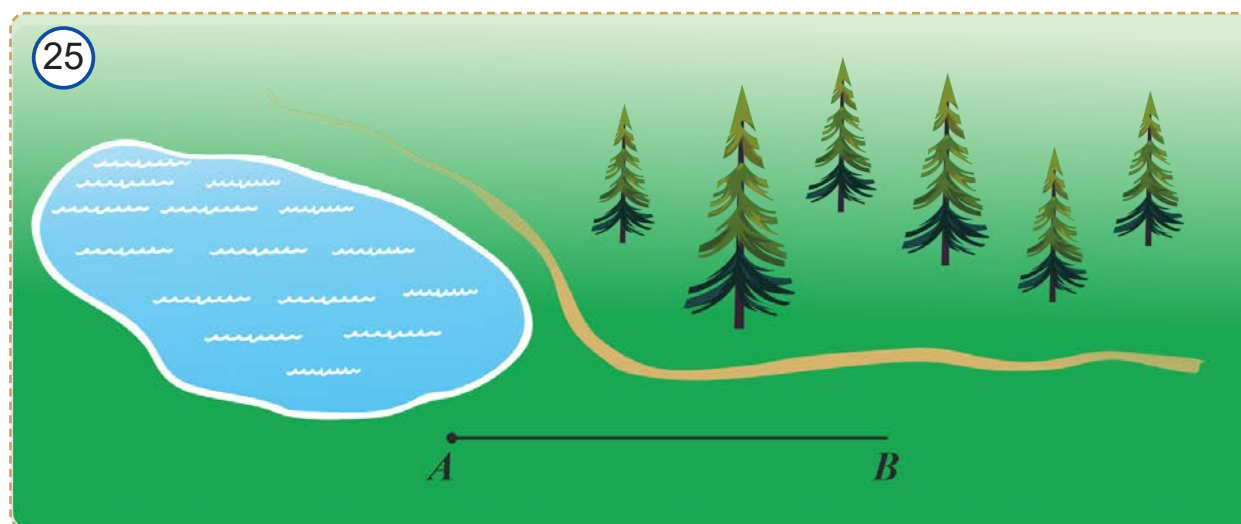


Практикалық жаттығу және қолдану

1. Қазынаны тап.

25-суретте карта және AB сәуле бейнеленген. Бұл сәуледе көл орналасқан жарты жазықтықта жатушы 60° -ты бұрыш қой. Салынған бұрыштың AB -дан ерекше жағы бойлап 60 м жүр. C нүктеге келесін. CA сәулеге тағы сол көл орналасқан жарты жазықтықта жататын 120° -ты бұрыш қой. Бұл бұрыштың CA сәулеге ерекше жағымен 120 м жүр. Осы жерде – биік қарағай астына қазына көмілген.

Карта масштабы: $1 : 2000$. Картаның өлшемдерін өзгертпеген жағдайда оны дәптеріңе сызып ал. Қазына жасырынған нүктені тап.



2. Ашық ауадағы геометриялық жарыс

Жарысқа екі немесе одан көп топ қатысса болады. Өр топқа рулетка мен үлкен транспортирді пайдалануға рұқсат беріледі.

Сынып топтарға бөлініп, мектеп алаңының түрлі бұрыштарында жұмыс істейді. «Қазына» (мысалы, түтікше, конверттегі хат, ...) алдын ала алаңның бір жеріне жасырып қойылады. Қазынаға алып баратын карталарды да оқытушы алдын ала түзеді. Және топтарға тарата-

ды. (Карта үлгісі 26-суретте көрсетілген). Топтар өз картасына қарап қазынаны табуға кіріседі. Қайсы топ бірінші болып картада көрсетілген сынық сызық бойлап барлық нүктелерді анықтап, қазынаны тапса, сол топ жеңімпаз деп табылады.

Үйге тапсырма. Үйіңнен мектепке келетін жолдың 25-суреттегі сияқты картасын түз. Шамалап бұл жолдың ұзындығын анықта.

ПРАКТИКАЛЫҚ ЖАТТЫҒУ ЖӘНЕ ҚОЛДАНУ. БІЛІМДІ СЫНАП КӨР

1. Төмендегі сөйлемдер дұрыс па? «ия» немесе «жоқ» деп жауап бер.

1. Әрқандай бұрыш үшін тек бір вертикаль бұрыш жасау мүмкін.
2. Әрқандай бұрыш үшін тек бір сыбайлас бұрыш жасау мүмкін.
3. Егер бұрыштар вертикаль болса, олар тең болады ма?
4. Егер бұрыштар тең болмаса, олар вертикаль бұрыш болмайды.
5. Егер бұрыштар вертикаль болмаса олар тең болмайды.
6. Егер екі бұрыш сыбайлас болса, онда олардың доғал, екіншісі сүйір бұрыш болады.
7. Егер екі бұрыш сыбайлас болса, онда олардың бірі екіншісінен үлкен болады.
8. Егер екі бұрыш қосындысы 180° -қа тең болса, олар сыбайлас бұрыштар болады.
9. Егер екі бұрыш қосындысы 180° -қа тең болмаса, олар сыбайлас бұрыш болмайды.
10. Егер екі бұрыш тең болса, оларға сыбайлас болған бұрыштар да тең болады.
11. Егер сыбайлас бұрыштар тең болса, олар тік бұрыштар болады.
12. Егер екі бұрыш ортақ төбеге ие болса, олар сыбайлас бұрыштар болады.
13. Егер екі бұрыш ортақ қабырғаға ие болса, олар сыбайлас бұрыштар болады.

2. Сөйлемдерді мағынасына қарай толтыр.

1. Нүкте және төбелері осы нүктеде болған тұратын пішін бұрыш деп аталады.
2. Жазықтықта екі нүкте арқылы түзу сызық өткізуге болады.
3. Жазыңқы бұрыштың градус өлшемі тең.
4. Екі түзу сызық текқиылысады.
5. Бұрыштың төбесінен шығып, оны бұрыш биссектрисасы деп аталады.
6. Түзу сызықтың бір нүктесі және одан бір қабырғада жатқан нүктелерден құралған бөлігі деп аталады.
7. Ортақ қабырғаға ие болып, қалған екі қабырғасы түзу сызық пайда етуші бұрыштар деп аталады.
8. Түзу сызық жазықтықты ажыратады.
9. Вертикаль бұрыштардың биссектрисалары пайда болады.
10. Кесіндіні тең осы қиманың ортасы деп аталады.
11. Егер сыбайлас бұрыштар , олар тік бұрыштар болады.
12. Тең кесімдердің да тең болады.

3. Төменде келтірілген сөйлемдерде қате болса, оны тап және дұрыста.

1. Қосындысы 180° -қа тең болған бұрыштар сыбайлас бұрыштар болады.
2. Жазықтықтағы кез-келген екі түзу сызық тек бір ортақ нүктеге ие болады.
3. Бұрыштың төбесінен өтіп, оны тең екіге бөлуші түзу сызық бұрыштың биссектрисасы деп аталады.
4. Кез келген нүкте арқылы тек екі түзу сызық өткізу мүмкін.
5. Екі қабырғасы да сәулелерде жататын бұрыш жазыңқы бұрыш деп аталады.
6. Жазықтықтағы екі түзу сызық оны екі жарты жазықтыққа ажыратады.

7. Екі түзу сызықтың қиылысуынан пайда болған бұрыштарға вертикаль бұрыштар деп атайды.
8. Кесімді екіге бөлуші нүкте кесімнің ортасы деп аталады.
9. Берілген сәуледен жарты жазықтыққа тек бір тік бұрыш қою мүмкін.
10. Жазықтықтаға кез келген A, B, C нүктелер үшін $AB + BC = AC$ теңдік орынды.
11. Вертикаль бұрыштардың қосындысы 180° -қа тең.

4. Берілген қасиетке ие болған геометриялық пішінді дұрыс келетін оң бағандағы қатарға жаз.

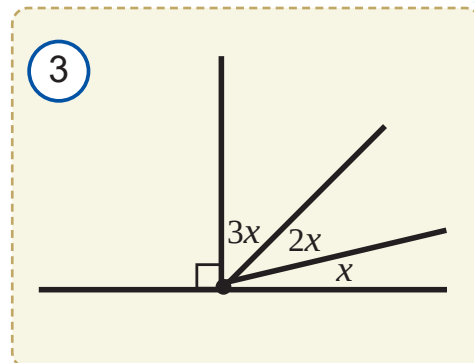
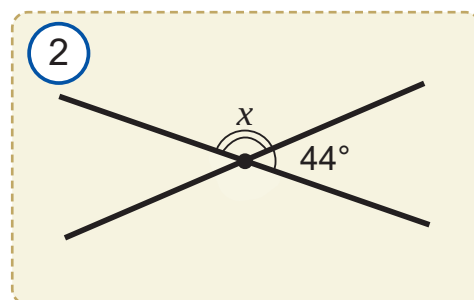
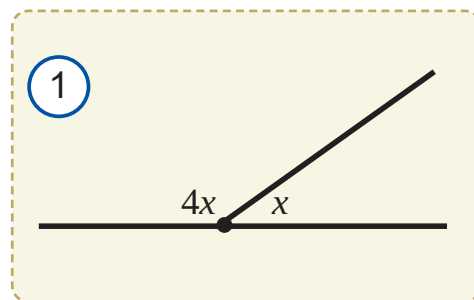
1	Қосындысы 180° -қа тең	
2	Қабырғалары сәулелерден тұрады	
3	Үлкендігі 180° -қа тең	
4	Дайын ұзындыққа ие	
5	Кесімді тең екіге бөледі	
6	Дәлелсіз дұрыс деп қабылданған қасиет	
7	Бұрышты тең екіге бөледі	
8	Түзу сызықтар қиылысқанда пайда болады	
9	Дұрыстығын дәлелдеу керек	
10	Өлшемге ие емес	

5. Бірінші бағанда берілген геометриялық түсініктерге екінші бағаннан тиісті қасиет немесе түсініктерді тауып, ынғайлысын орналастыр тап:

Геометриялық түсініктер	Қасиеті немесе түсініктері
1. Нүкте	(A) «Геометрия» сөзінің мәні.
2. Түзу сызық	(B) Қосындысы 180° -қа тең.
3. Жерді өлшеу	(C) Өзара тең бұрыштар.
4. Кесім	(D) Түзу сызықтағы нүкте және одан бір қабырғада жатқан нүктелер.
5. Сәуле	(E) 180° .
6. Кесім ұзындығы	(F) Ортақ төбеге ие болған екі сәуле.
7. Тең пішіндер	(G) Ұзындығын өлшеп болмайды.
8. Жарты жазықтық	(H) Тік бұрыштың $1/90$ бөлігі.
9. Планиметрия	(I) Дәлелсіз қабылданған тұжырым.
10. Бұрыш	(J) Дәлелденуі керек болған тұжырым.
11. 1 градус	(K) Түзу сызықтың екі нүктесі және олар арасындағы нүктелер.
12. Жазыңқы бұрыштың градус өлшемі	(L) Жазықтықтағы геометриялық пішіндердің қасиеттерін үйренеді.
13. Вертикаль бұрыш	(M) Бұрышты тең екіге бөледі.
14. Сыбайлас бұрыш	(N) Жазықтықтың түзу сызық ажыратқан бөлімдерінің бірі.
15. Теорема	(O) Бөлімдерге ие емес.
16. Аксиома	(P) Оң сан.
17. Биссектриса	(Q) Тек беттесіп түсетіндей етіп қою мүмкін.

6. Тесттер.

- Түсіндірусіз қабылданған негізгі геометриялық түсініктерді көрсет: а) кесінді; б) сәуле; с) түзу сызық; г) жарты жазықтық.
А) а; б; в; Б) б; в; г; В) а; б; в; г; Г) а; б; г.
- Екі сыбайлас бұрыштың айырмасы 24° -қа тең болса, олардан кішісін тап:
А) 72° Б) 76° В) 78° Г) 82°
- Геометрия пән ретінде алғаш рет қайсы елде қалыптасқан.
А) Ежелгі Мысыр; Б) Вавилон; В) Греция; Г) Қытай.
- Екі түзу сызықтың қиылысуынан пайда болған бұрыштардан үшеуінің қосындысы 200° қа тең. Бұрыштардан кішісін тап:
А) 20° ; Б) 40° ; В) 60° ; Г) 80° .
- Үшеуі бір түзу сызықта жатпайтын 4 нүкте берілген. Осы нүктелердің әрбір жұбы арқылы түзу сызықтар өткізілді. Олардың санын тап.
А) 1; Б) 4; В) 5; Г) 6.
- Бұрыш биссектрисасы оның қабырғасымен 60° -ты бұрыш пайда етеді. Берілген бұрышқа сыбайлас болған бұрышты тап.
А) 30° ; Б) 60° ; В) 90° Г) 120°
- AB кесімді 2 түзу сызық кесіп өтсе, көбі мен неше AB кесімде жатқан кесім пайда болады?
А) 3; Б) 4; В) 5; Г) 6.
- Сағат 4 болғанда, сағат және минут стрелкалары арасындағы бұрыш неше градус болады?
А) 60° Б) 75° В) 105° Г) 120°
- $AB = 6$, $C \in AB$, $AC = 3BC$, $BC = ?$
- Сағаттың сағат стрелкасы 30 минутта неше градусқа бұрылады?
А) 180° Б) 15° В) 60° Г) 30°
- $AB = 18$, $C \in AB$, $AC - BC = 4$, $BC = ?$
- Вертикаль бұрыштардың қосындысы 180° -қа тең. Осы бұрышты тап.
А) 60° және 120° Б) 45° және 135°
В) 90° және 90° Г) 45° және 45°
- Үш түзу сызық жазықтықты ең көбімен неше бөлімге ажыратуы мүмкін?
А) 4 Б) 5 В) 6 Г) 7
- 1-суреттегі x -ты тап.
А) 30° Б) 36° В) 45° Г) 60°
- 2-суреттегі x -ты тап.
А) 136° Б) 72° В) 56° Г) 96°



16. 3-сурттегі x -ты тап.

- A) 15° B) 30° D) 45° E) 60°

17. Төмендегі сөйлемдерден дұрысын тап.

- A) Жазықтықта берілген нүктеден тек бір түзу сызық өткізу мүмкін.
 B) Түзу сызықтың бір нүктесі және одан бір жақта жатқан нүктелерден құралған бөлігі сәуле дейіледі;
 B) Түзу сызықтың екі нүктесі арасында жатқан нүктелерден құралған бөлігі кесінді деп аталады;
 Г) Кез келген сәулеге тек бір бұрыш қоюға болады.

18. Төмендегі сөйлемдерден дұрысын тап.

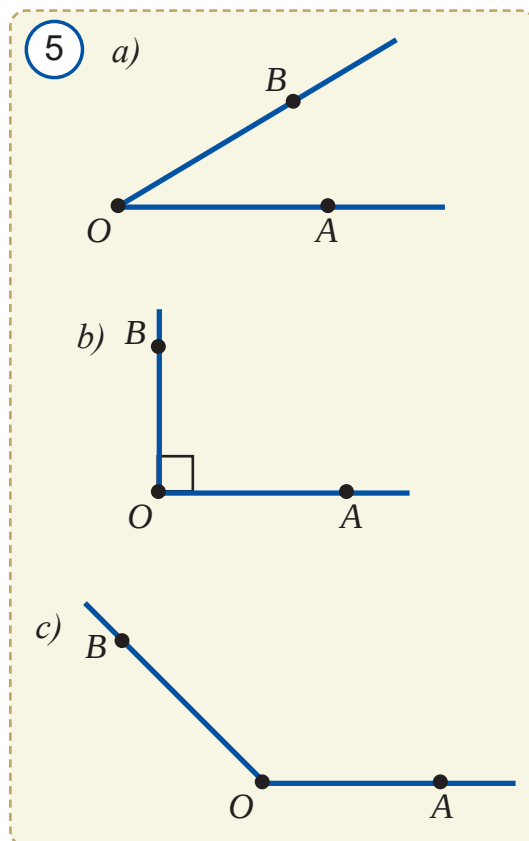
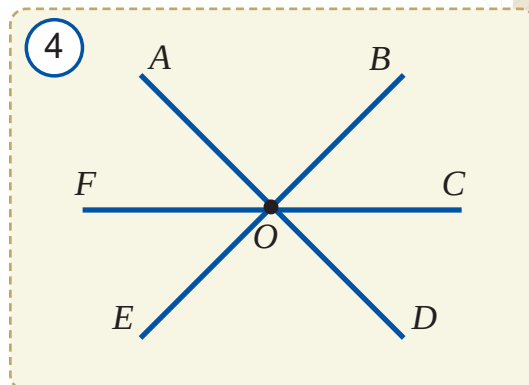
- A) Сыбайлас бұрыштар жазыңқы бұрыш болады;
 Б) Егер $AB = 5 \text{ см}$, $BC = 6 \text{ см}$ болса, $AC = 11 \text{ см}$ болады;
 B) Егер бұрыштар тең болса, олар вертикаль бұрыш болады;
 Г) Егер екі бұрыш тең болса, оларға сыбайлас болған бұрыштар да тең болады.

7. Есептер.

1. Транспортир көмегінде бір жағы ортақ болған 10° , 20° , 40° , 60° , 90° , 130° , 170° -ты бұрышты сал.
2. Жазық бұрыштың биссектрисасы оның қабырғалары мен қандай бұрыш пайда етеді?
3. Бұрыштың биссектрисасы оның қабырғасымен 30° -ты бұрыш пайда еткен болса, бұрыштың өзі неше градус?
4. Бұрыштың биссектрисасы оның қабырғаларымен сүйір бұрыш құруы мүмкін бе?
5. $\angle AOB = 50^\circ$, $\angle BOC = 80^\circ$ болса, AOB және BOC бұрыштардың биссектрисалары арасындағы бұрышты тап. Есеп неше шешімге ие?
6. 15° -ты бұрышқа 10 есе үлкейтуші лупа арқылы қаралғанда, ол неше градусты бұрыш болып көрінеді?
7. а) 90° ; б) 60° ; с) 50° ; d) 20° -ты бұрыштың биссектрисасын транспортир көмегінде сал.
- 8*. $\angle AOB = 120^\circ$ болған бұрыштың OK биссектрисасын транспортир көмегінде сал. Кейін пайда болған AOK және KOB бұрыштардың биссектрисаларын сал және бұл биссектрисалар арасындағы бұрышты тап.
- 9*. Егер $AS = 1,8 \text{ м}$, $AC = 1,3 \text{ м}$ және $BC = 3 \text{ м}$ болса, A , B және C нүктелер бір түзу сызыққа жатады ма?
10. A , B , және C нүктелер бір түзу сызықта жатады. Егер $AS = 2,7 \text{ м}$, $AC = 3,2 \text{ м}$ болса, BC кесіндінің ұзындығын тап. Есеп неше шешімге ие?
11. Ұзындығы 15 м болған AB кесіндіде C нүкте белгіленген. Егер:
 - а) AC кесінді BC кесіндіден 3 м ұзын;
 - б) C нүкте AB кесіндінің ортасы болса;
 - д) AC және BC кесінділердің ұзындықтары $2 : 3$ қатынаста болса, AC және BC кесінділердің ұзындығын тап.
12. A , B , C , D нүктелер бір түзу сызықта жатады. Егер 5 нүкте AC кесіндінің, C нүкте

болса BD кесіндінің ортасы болса, $AB = BC = CD$ екендігін көрсет.

13. Үшеуі бір нүктеде жатпайтын: а) 6; б) 7; с) 10 нүктенің әр екеуі арқылы түзу сызық өткен. Барлығы болып неше түзу сызық өткен?
14. OA және OB сәулелер қашан беттесіп түседі?
15. AB сәуледе C нүкте, BA сәуледе D нүкте сондай алынған, $AC = 0,7$ және $BD = 2,1$. Егер $AS = 1,5$ болса, CD -ні тап.
16. 4-суретте неше вертикаль бұрыштар жұбы бейнеленген?
- 17*. Егер сағаттың сағат және минут стрелкалары арасындағы бұрыш 45° болып, минут стрелкасы 6-да тұрған болса, сағат қайсы уақытты көрсетіп тұр?
18. Түзу сызыққа онда жатпайтын O нүктеден OA аума және OB перпендикуляр өткізілген. Олардың ұзындықтары қосындысы 13, айырмасы болса 1-ге тең болса, O нүктеден түзу сызыққа дейін болған қашықтықты тап.
19. AOB және BOC сыбайлас бұрыш екендігі белгілі. Егер:
- AOB бұрыш BOC бұрыштан 40° үлкен;
 - AOB бұрыш BOC бұрыштан 4 есе кіші;
 - $\angle AOB = \angle BOC + 44^\circ$;
 - $\angle AOB = 5 - \angle BOC$ болса, осы бұрыштарды тап.
20. Екі түзу сызық кесіндісінен төртбұрыш пайда болады. Олардың екеуінің градус өлшемдері қосындысы 100° -қа тең болса, бұл төртбұрыштың градус өлшемдерін тап.
- 21*. A , B және C нүктелер жазықтықта былай жазылған, а) $AC + CB = AB$; б) $AB + AC = BC$. Қайсы нүкте қалған екеуінің ортасында жатады?
22. 5-суретте бұрыштардың қабырғаларына олардың A және B нүктелері арқылы перпендикуляр түзу сызықтар өткіз. Бұл түзу сызықтар кесінді нүктесінде қандай бұрыштар пайда болады?
- 23*. Бұрыштың төбесінен шығып, ішкі жағынан өтуші: а) 2; б) 3; с) n сәуле өткен мұнда жалпы берілген бұрыш пен бірге жалпы неше бұрыш пайда болады?
- 24*. Газет бетінің қалыңдығы $0,1 \text{ mm}$. Ол тең етіп екіге бүктеледі. Пайда болған екі қабат газет бөлігі тағы бүктелді және тағы басқа. Бұл жұмыс осылай 50 рет қайталанды. Нәтижеде қандай қалыңдықтағы газет қатпары пайда болады?





Практикалық жаттығу және қолдану

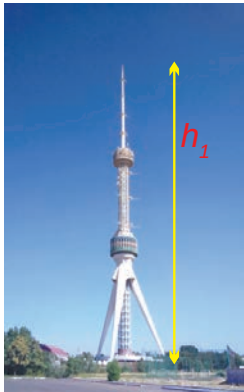
1. «Геометрия 7-сынып» оқулығының бір парағының қалыңдығын анықтау жолын ойлап тап және өлше.

2. Бірер дененің биіктігі оның ең биік нүктесінен жатқан жазықтыққа түскен перпендикуляр ұзындығымен анықталады. Егер мұндай перпендикулярды түсіру мүмкіндігі болмаса, оған тең болған кесінді биіктік ретінде қаралады (6-сурет). Мысалы, ғимарат, пирамида, мұнара биіктігі, немесе құдық тереңдігі және басқалар. Кейде жазықтықтағы жалпақ пішіндер биіктігі де осылай анықталады.

а) Шәйнек, пиала, кесе, түбек, қазан сияқты түрлі үй жиһаздарының биіктіктерін өлшеу жолын ойлап тап және олардың биіктіктерін өлше.

б) Тік бұрышты параллельпипед, үшбұрышты пирамида, конус және шар сияқты геометриялық пішін (дене) моделдерінің биіктіктерін өлше.

6



$h_1 = 375 \text{ m}$

$h_2 = 146,6 \text{ m}$



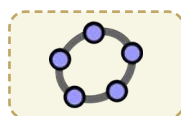
$h_3 = 300 \text{ m}$



2-бақылау жұмысы үлгісі

Үлгілі бақылау жұмысы екі бөлімнен құралған, бірінші бөлімде жоғарыда келтірілген тесттерге ұқсас бес тест енгізіледі. Екінші бөлімінде төменде келтірілген есептерге ұқсас 4 есеп беріледі (4-есеп «үздік» баға алмақшы болған оқушылар үшін қосымша):

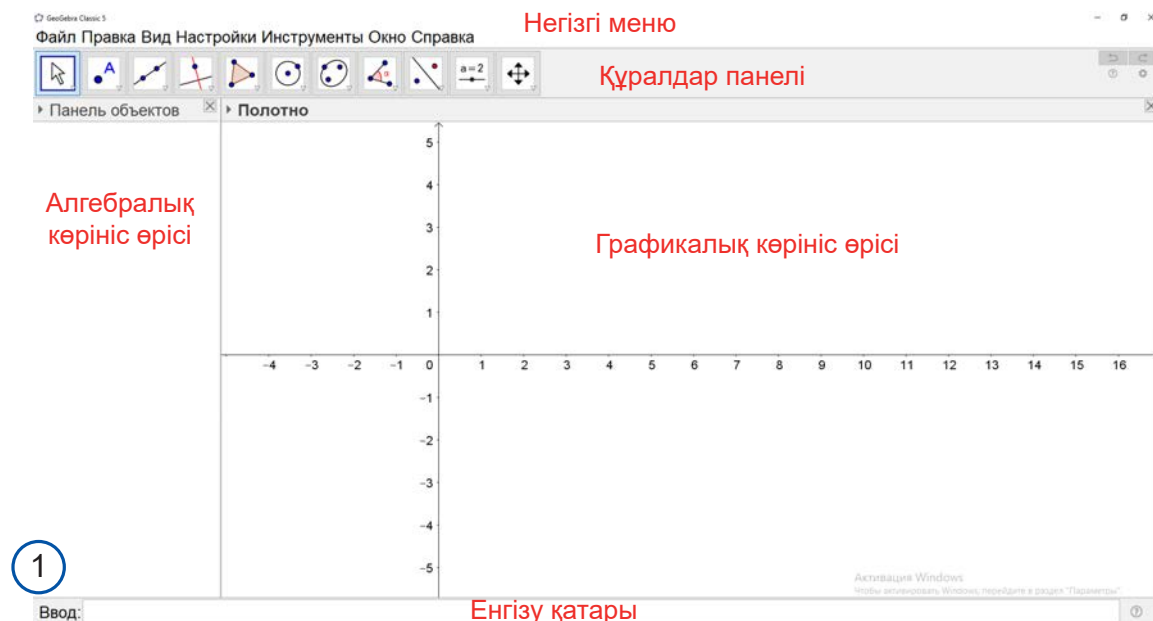
1. MN және KL түзулердің қиылысуынан пайда болған MOL және KON вертикаль бұрыштардың қосындысы 148° -қа тең. MOK бұрышты тап.
2. Сыбайлас бұрыштардың айырмасы 60° -қа тең. Бұл бұрыштардың кішісін тап.
3. Бұрыш биссектрисасы осы бұрыштың қабырғаларымен 66° -тық бұрыш жасайды. Осы бұрышқа сыбайлас болған бұрышты тап.
- 4*. Сыбайлас бұрыштардың биссектрисасы тік бұрыш жасап қиылысатынын дәлелде.



«GeoGebra»дан қолдану негіздері

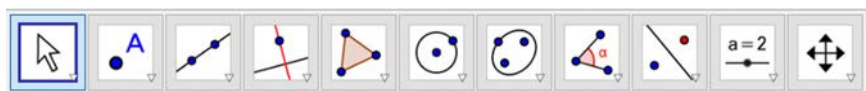
«GeoGebra» интерфейсі

GeoGebra іске түсірілген соң төмендегі айна пайда болады: (1-сурет)



Главное меню (негізгі меню) – **GeoGebra** бағдарламасы жағынан берілген функцияларға кіру менюсі.

Панель инструментов (құралдар панелі) – бағдарлама жағынан берілген құралдар топтамы арқылы түрлі сызбаларды жарату мүмкін.



Графическое окно (графиктік көрініс айнасы) – геометриялық сызбаларды сызу және бейнелеу өрісі.

Панель объектов (алгебралық көрініс айнасы) – геометриялық сызбаларға тиісті координата және теңдеулерді бейнелеу айнасы.

Строка ввода (еңгізу қатары) – нүкте орнын, алгебралық теңдеу немесе бұйрықтарды еңгізу айнасы.

Құралдар панелінде берілген геометриялық құрылмаларынан пайдаланып, тінтуірдің көмегінде әр түрлі геометриялық пішіндерді жарату мүмкін. Сонымен бір уақытта алгебралық көрініс айнасында сызбаға тиісті координата және теңдеулер бейнеленеді. Басқа жақтан, сен турадан-тура клавиатура көмегінде **Ввод** ... өрісіне алгебралық мәліметтер, бұйрықтар және функцияларды еңгізуің мүмкін. Барлық сызбалардың **графикалық көрінісі алаңы** көрсетілсе, олардың **алгебралық көрініс айнасында** көрінеді. **GeoGebra**да геометрия және алгебра бір-бірімен байланысты жағдайда істейді.

«GeoGebra» интерфейсі ыңғайлы болып, оны өзіңе ыңғайлап алуың мүмкін. Графикалық және алгебралық көріністерден басқа **GeoGebra**, сондай-ақ, компьютер алгебралық көрініс және графикалық көрініс айналары да бар.

Осы әр түрлі көріністер «Вид» менюі көмегінде көрсетілуі немесе жасырын жағдайда өткізілуі мүмкін.

- Тиісті түймені басу арқылы оған дұрыс функцияны белсендір.
- Түйменің төменгі бөліміне басу арқылы қосымша менюді аш және одан керекті функцияны таңда.
- Құралдар панелінің оң жағындағы белгіні басып, осы уақытта белсенді болған құрал туралы мәлімет ал.

«GeoGebra»да файлдарды сақтау

- «Файл» менюін аш және **Сохранить** бұйрығын таңда.
- Ашылған байланыс айнасынан керекті папканы таңда.
- Файлдың атын енгіз.
- «Сохранить» түймесін бас және жұмысты аяқта.

Ескерту. «.ggb» кеңейтпелі файл жаратылады және оны тек GeoGebra бағдарламасы арқылы ашу мүмкін.

«GeoGebra» да файлдарды ашу

GeoGebra бағдарламасында жаңа айна («Файл» – «Новый окно») аш.

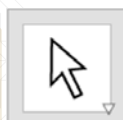
Ашылған жаңа айнада компьютер картасындағы файлды аш. Файлды ашу үшін «Файл» – «Открыть» бұйрығын таңда.

Файл сақталған папканы аш және .ggb кеңейтпелі файлды таңда, «Открыть» түймесін бас.

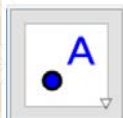
«GeoGebra»ның құралдар панелінен пайдалану бойынша нұсқаулар

GeoGebra құрылмаларының кейбіреулері туралы практикалық мәліметтерге ие болмасаң да, олардың сыртқы көрінісі арқылы оңай түсініп алу мүмкін. Осы құрылмалардан пайдалану бойынша үйретуші оқу файлдары болып, әрбір құрылма үшін жеке GeoGebra (.ggb) файлы еңгізілген.

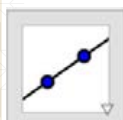
«GeoGebra» құралдары панеліндегі негізгі құралдардың міндеті



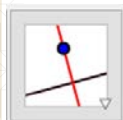
Перемещать (Жылжыту) – түрлі объекттер (нүкте, түзу сызық, көпбұрыш және басқалар)ды жылжыту



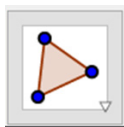
Точка (Нүкте) – жазықтықта нүкте салу.



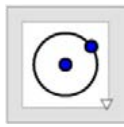
Прямая (Түзу сызық) – жазықтықта берілген екі нүкте арқылы түзу сызық салу.



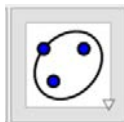
Перпендикулярная прямая (перпендикуляр түзу сызық) – берілген нүкте арқылы түзу сызыққа перпендикуляр өткізу.



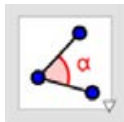
Многоугольник (көпбұрыш) – кез келген түрдегі көпбұрыш салу.



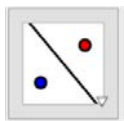
Окружность по центру и точке (шеңбер орталығы және нүктесіне қарай) – шеңбер орталығын белгілеу арқылы шеңбер салу.



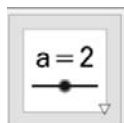
Эллипс – эллипс фокустарын және ондағы нүктені беру арқылы эллипс салу.



Угол (бұрыш) – үш нүкте немесе екі түзу сызық арқылы бұрыш салу.



Отражение относительно прямой (түзу сызыққа қатысты шағылысу) – керекті объекті және түзу сызықты белгілеу арқылы объекті түзу сызыққа байланысты көрсету.



Ползунок (сүргіш) – ұзындық және бұрыштар өлшемін өзгертуші ретінде бір аралықтағы үздіксіз өзгертіру мүмкіндігін беруші анимация құрылмасы.

1. Түзу сызық салу

Түзу сызық ең қарапайым және шексіз геометриялық пішін. Оның бейнесін пайда ету үшін:

1. Құралдар панелінен «Прямые линии» («түзу сызықтар») тобын аламыз (бұл үшін құралдар панелінен топты тауып, оның үстіне курсорды алып барып, тышқанның сол түймесін басамыз);

2) «Прямая» («Түзу сызық») құрылмасы үстіне тышқанның сол түймесін басамыз;

3) Тышқанымыздың сол түймесін басып, екі A және B нүктелерін белгілейміз;

4) Экранда осы екі нүктеден өтуші түзу сызық пайда болады (2-сурет).

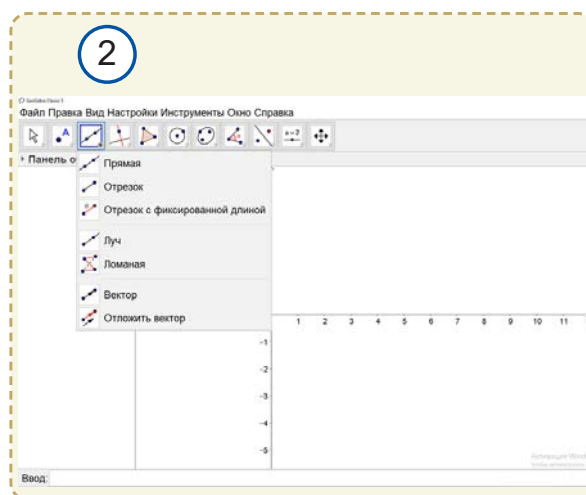
Түзу сызық бейнесінің үстіне тышқанның сол түймесін басып оның орнын ауыстыру, яғни оны жылжыту мүмкін. Сондай-ақ, оның түсі мен стилін анықтау тағы да оны әріппен белгілеуге де болады.

2. Сәуле салу алгоритмін түзу және сәуле сызу

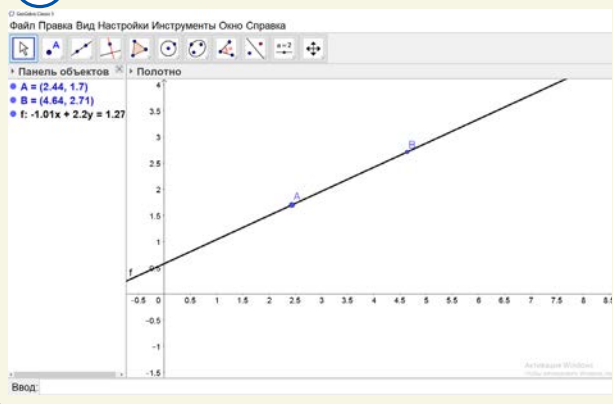
Жоғарыдағы алгоритмге ұқсас сәуле салу алгоритмін түз және сәуле сал.

3. Кесінді салу алгоритмін түзу және сәуле сызу

Жоғарыдағы алгоритмге ұқсас кесінді салу алгоритмін түз және кесінді сал.



3



4. Сынық сызық сызу

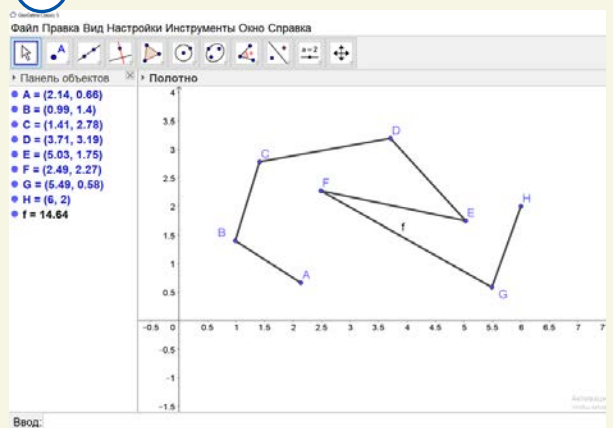
Сынық сызық – сәулелер және оларды біріктіріп тұрушы қималардан тұратын пішін. Оның бейнесін пайда ету үшін:

1) Құралдар панелінде «Прямые линии» («түзу сызықтар») тобын аламыз;
 2) Менюден «Ломанная» («Сынық сызық») үстіне тышқанның сол түймесін басып;

3) Тышқанның сол түймесін басып, сынық сызықтың тізбекті ұштарын белгілейміз;

4) Экранда төбелері осы нүктелерден тұратын сынық сызық пайда болады (3-сурет). Түзу сызық бейнесінің үстіне тышқанның сол түймесін басып, оның орнын ауыстыру яғни оны жылжыту мүмкін. Сондай-ақ, оның түсі мен стилін анықтау және оны әріппен белгілеуге де болады.

4



5. Перпендикуляр түзу сызықтарды сызу

Екі түзу сызық тік бұрыш астында қиылысса, олар перпендикуляр түзу сызықтар деп аталады. Олардың бейнесін пайда ету үшін:

- 1) Құралдар панелінде «Специальные прямые» («Арнайы түзу сызықтар») тобын аламыз;
- 2) Менюден «Перпендикуляр» үстіне тышқанның сол түймесін басып таңдаймыз;
- 3) Кесінді (түзу сызық) саламыз;
- 4) Нүктені белгілейміз (нүкте кесінді немесе түзу сызықта да жатуы мүмкін);
- 5) Тышқанның сол түймесін басып, жұмысшы салада перпендикуляр түзу сызықтарды пайда етеміз (3-сурет).

6. Параллель түзу сызықтарды сызу үшін алгоритмін түзу және оны салу

Жоғарыдағы алгоритмге ұқсас параллель түзу сызықтарды салу алгоритмін түз және оны сал.



II ТАРАУ

ҮШБҰРЫШТАР

Бұл тарауды үйреніп шыққан соң, төмендегі білім және практикалық дағдыларға ие боласыз:

Білім:

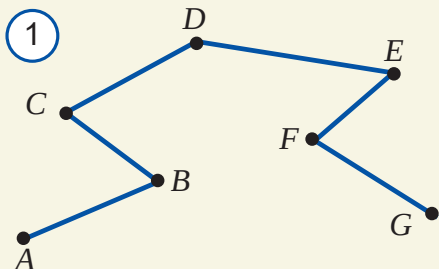
- көпбұрыштар туралы түсінікке ие болу;
- үшбұрыш және оның негізгі элементтерін білу және олар бойынша үшбұрыштарды түрлерге ажырату;
- үшбұрыш медианасы, биссектрисасы және биіктіктерін білу және ажыратып алу;
- үшбұрыш теңдігінің сәйкестік белгілері;
- тең бүйірлі үшбұрыш және оның қасиеттері;
- тең жақты үшбұрыш және оның қасиеті;
- кесім орта перпендикулярларының қасиеті.

Практикалық дағдылар:

- үшбұрыштар теңдігі туралы түсінігіне қарай тең үшбұрыштарды анықтай алу;
- үшбұрыштар теңдігі туралы түсінігін есептер шешуде және практикалық жұмыстарды орындағанда қолдай алу.

8

ҮШБҰРЫШ, ОНЫҢ ТҮРЛЕРІ ЖӘНЕ ЭЛЕМЕНТТЕРІ



$ABCDEFG$ – **сынық сызық**
 A, B, C, D, E, F, G – **төбелері**
 $AB, BC, CD, \dots$ – **буындары**
 DE, EF, FG } (**қабырғалары**)

8.1. Сынық сызық. Көпбұрыш

Жүйелі түрде келген екі бір түзуде жатпайтын $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ кесінділерден тұратын пішінге **сынық сызық** дейді. $A_1A_2, \dots, A_n$ нүктелер **сынық сызықтың төбесі**, $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ кесінділер болса **сынық сызықтың буындары** немесе **қабырғалары** деп аталады. 1-суретте $ABCDEFG$ сынық сызық бейнеленген.

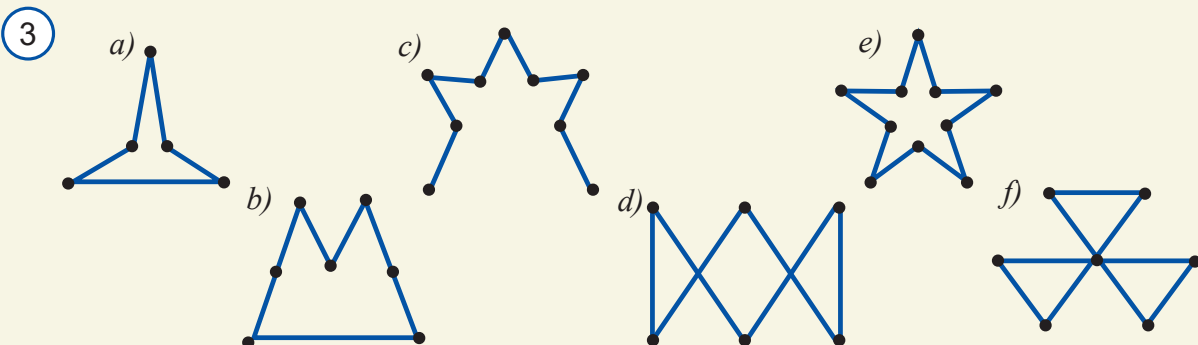
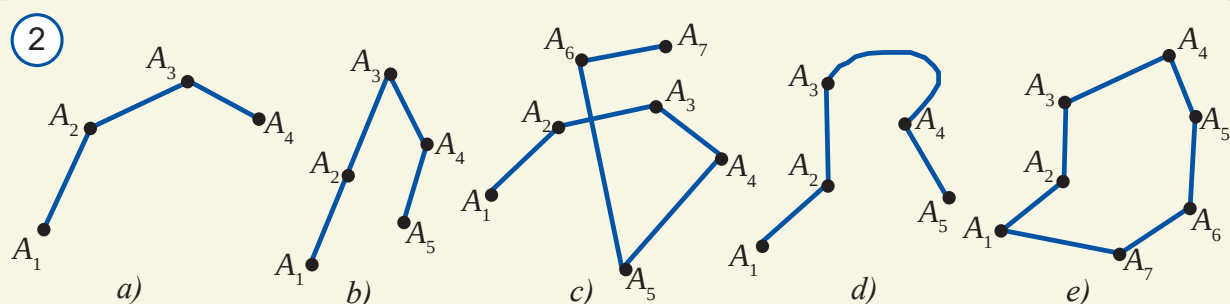
Бастапқы және соңғы ұштары бір-бірінің үстіне түсетін сынық сызықты – **тұйық сынық сызық** деп айтамыз. Өзін-өзі қиып өтпейтін тұйық сынық сызық **көпбұрыш** деп аталады.



Белсендіруші жаттығу.

1. 2-суретте бейнеленген сызықтардың сынық сызық болатынын немесе болмайтынын анықта және түсіндір.

2. Көпбұрыштардың сипаттамасынан шығатын қасиеттерді сана және 3-суреттегі пішіндердің көпбұрыш болатынын немесе болмайтынын анықта және түсіндір.



Қабырғалардың санына қарап, көпбұрыштар үшбұрыш, төртбұрыш, бесбұрыш, алтыбұрыш, жалпы n – **бұрыш** деп аталады. Сен кейбір көпбұрыштармен төменгі сыныптарда танысқансың.

Кез келген көпбұрыш жазықтықты екі аймаққа бөледі. Көпбұрышпен шекараланған шеткі аймақ – көпбұрыштың ішкі аймағы деп, екінші – шексіз аймақ көпбұрыштың сыртқы аймағы деп аталады. 4-суретте $ABCDEF$ алтыбұрыштың ішкі және сыртқы аймағы көрсетілген.

8.2. Үшбұрыш және оның түрлері

Бір түзу сызықта жатпайтын үш нүкте және оларды тұтастырушы кесінділермен тұратын пішіндер **үшбұрыш** деп атаймыз.

Бір түзу сызықта жатпаған үш – A , B және C нүктелерді белгілейміз (5-сурет). Оларды өзара кесінділермен тұтастырып шықсақ, үшбұрыш пайда болады. Белгіленген үш нүкте үшбұрыштың **үштары**, оларды тұтастырушы кесінділер болса үшбұрыштың **қабырғалары** деп айтылады. Әдетте «үшбұрыш» сөзі орнына Δ таңбасы қолданылады. ΔABC жазуы ABC үшбұрыш деп оқылады. $\angle BAC$, $\angle ABC$, $\angle ACB$ үшбұрыштың бұрыштары деп жүргізіледі (5-сурет). Оларды кейде анықтық үшін **ішкі бұрыштар** деп те атайды.

Үшбұрыш бұрыштарын $\angle A$, $\angle B$, және $\angle C$ түрінде де белгілеу мүмкін.

Үшбұрыштың қабырғалары және бұрыштары оның **негізгі элементтері** деп аталады. Үшбұрыштың үш қабырғасы ұзындықтары қосындысы оның **периметрі** (P) дейіледі.

Сондай-ақ:

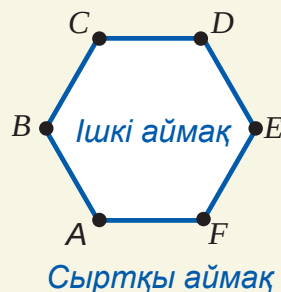
BAC бұрыш үшбұрыштың AB және AC қабырғалары арасында жататын бұрышы;

AB және AC қабырғалары BAC бұрышқа жабысқан;

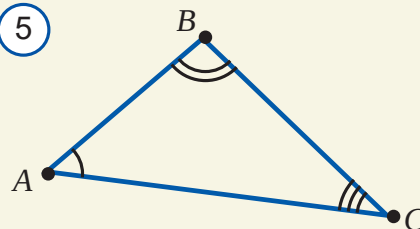
BC қабырға BAC бұрыш қарсысында жатыр сияқты түсініктер қолданылады.

Үшбұрыштар қабырғалары ұзындықтарына қарап **тең қабырғалы, тең бүйірлі және әр түрлі қабырғалы** түрлеріне бөлінеді. Тең қабырғалы үшбұрыштың үш қабырғасымен ұзындықтары да тең, тең бүйірлі үшбұрыштың болса екі қабырғасымен ұзындықтары тең және әр түрлі қабырғалары үшбұрыштың барлық қабырғалары ұзындықтары әр түрлі болады.

4



5



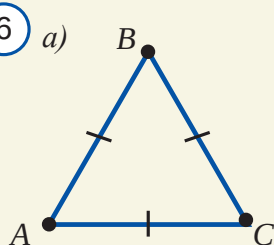
ΔABC – ABC үшбұрыш

A , B , C нүктелер – **төбелері**
 AB , BC , AC

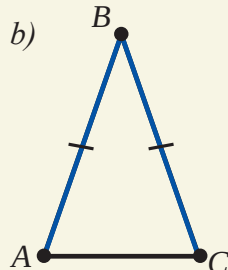
кесінділер – **қабырғалары**
 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ – **бұрыштары**

$P = AB + BC + AC$ – **периметрі**

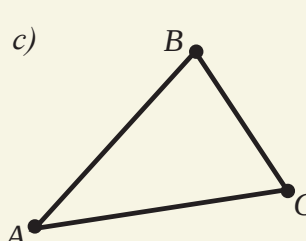
6



Тең қабырғалы үшбұрыш



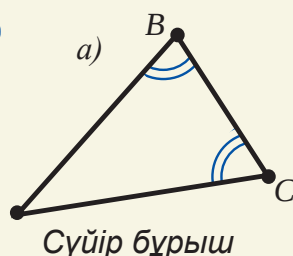
Тең бүйірлі үшбұрыш



Түрлі қабырғалы
үшбұрыш

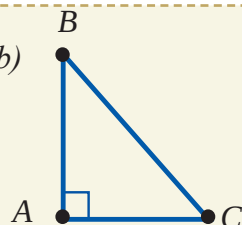
Үшбұрыштар бұрыштарына қарай **сүйір бұрышты, тік бұрышты және доғал бұрышты** түрлерге бөлінеді. Сүйір бұрышты үшбұрыштың үш бұрыштары да сүйір, тік бұрышты үшбұрыштың болса бір бұрышы тік және доғал бұрышты үшбұрыштың бір бұрышы доғал болады.

7



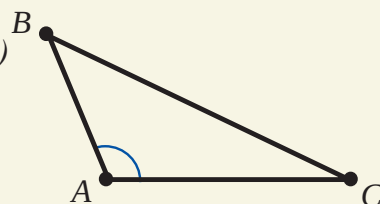
Сүйір бұрыш

b)



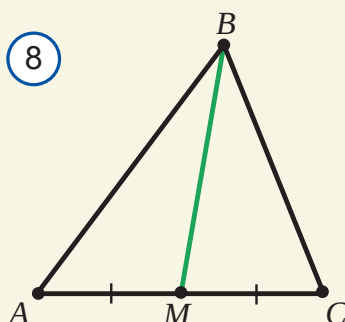
Тік бұрыш

c)



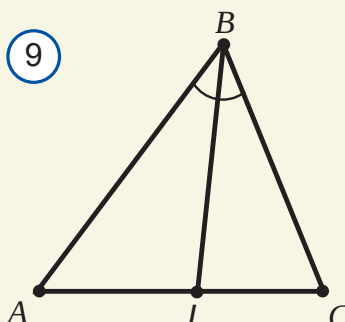
Доғал бұрыш

8



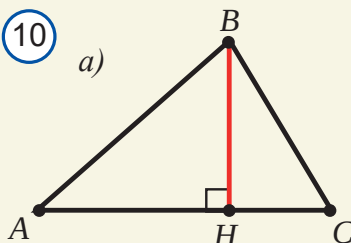
BM – медиана

9

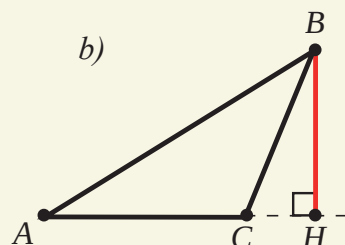


BL – биссектриса

10



b)



BH – төбелер

8.3. Үшбұрыштың медиана, биіктік және биссектрисасы

Үшбұрыштың төбесіне қарсы жатқан қабырғаның ортасымен қосатын кесінді үшбұрыштың медианасы деп аталады.

ABC үшбұрыштың B төбесін қарсысында жатқан AC қабырғаның ортасы M нүктемен тұтастырамыз (8-сурет). Пайда болған BM кесінді ABC үшбұрыштың медианасы болады. Бұл медиана туралы « B төбесінен шыққан» немесе « AC қабырғаға түскен» деп те айтылады. Үшбұрыш бұрышы биссектрисасының үшбұрыш ішкі аймағы жатқан бөлігі (кесімі) үшбұрыштың биссектрисасы деп аталады.

ABC үшбұрыш B бұрышының биссектрисасын өткіземіз (9-сурет). Оның AC қабырғасымен қиылысқан нүктесін L мен белгілейміз. Пайда болған BL кесінді ABC үшбұрыш биссектрисасы болады. Үшбұрыш төбесінен осы үш қарсысындағы қабырға жақтан түзу сызыққа түскен перпендикуляр **үшбұрыштың биіктігі** деп аталады.

ABC үшбұрыштың B төбесінен AC қабырғада жатқан түзу сызыққа перпендикуляр түсір (10-сурет). Суретте болуы мүмкін болған екі жағдай келтірілген. Перпендикуляр негізін H пен белгілейміз. Пайда болған BH кесінді ABC үшбұрыштың биіктігі болады.

Үшбұрыштың үш төбесі болғандығы себепті, ол үшеуден медиана, биіктік және биссектрисаға ие. 11-13 суреттерде ABC үшбұрыштың AM_1 , BM_2 мен CM_3 медианалары, AL_1 , BL_2 мен CL_3 биссектрисалары және AH_1 , BH_2 мен CH_3 биіктіктері сызып көрсетілген. Үшбұрыштың бұл қажетті элементтерінің қасиеттері мен кейінгі сабақтарда танысамыз.



Геометриялық зерттеулер

1. Кез келген үшбұрыш сыз. Оның барлық медианаларын өткіз (11-сурет). Нені байқадың? Тәжірибені тағы екі үшбұрыш үшін орындап көр және анықталған қасиетті ойлау арқылы өрнекте.

2. Кез келген үшбұрыш сыз. Оның барлық биіктіктерін өткіз (12-сурет). Нені байқадың? Тәжірибені тағы екі үшбұрыш үшін орындап көр және анықталған қасиетті ойлау арқылы өрнекте. Өткізілген зерттеулер негізінде

3. Кез келген үшбұрыш сыз. Оның барлық биссектрисаларын өткіз (13-сурет). Нені байқадың? Тәжірибені тағы екі үшбұрыш үшін орындап көр және анықталған қасиетті ойлау арқылы өрнекте. Өткізілген зерттеулер негізінде анықталған қасиеттерді теорема деп есептесек болады ма? Неге?

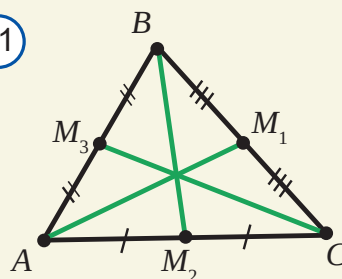
Жаттығу. Доғал бұрышты үшбұрыштың биіктіктерін өткіз.

Орындау. Үшбұрыштың, негізінен, сүйір бұрышты үшбұрыштың да үш биіктігі бар. Доғал бұрышты ABC үшбұрышты қараймыз (13 b-сурет). Доғал бұрышы төбесінен түсірілген BH_2 биіктік үшбұрыштың ішкі аймағында жатады. Сүйір бұрышы A төбесінен түсіру үшін, осы бұрыш қарсысындағы BC қабырғасын жалғастырамыз және BC жаққа жалғастырамыз және BC қабырға жалғасына A нүктеден AH_1 перпендикуляр түсіреміз. Пайда болған AH_1 кесім ABC үшбұрыштың A төбесінен түсірілген биіктігі болады. Дәл осындай, AB қабырға жалғасына CH_3 биіктікті түсіру мүмкін.

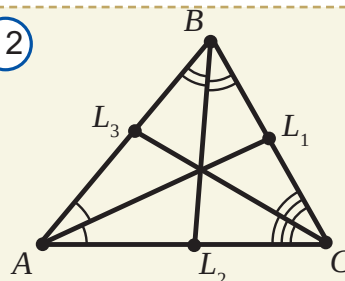
Бермуда үшбұрышы

Атлантика мұхитында төбелері Флорида, Бермуда аралдары және Пуэрто-Рикода болған үшбұрыш пішініндегі «Бермуда үшбұрышы» деп аталатын аумақ бар (14-сурет). Бұл жер өзінің сырлылығы және тез-тез апаттар болып тұруымен танылған. Бұл нүктеден өткен көптеп теңіз бен ауа кемелері сырлы түрде апатқа кезігіп, із-түзсіз жоғалып кетіп тұрады.

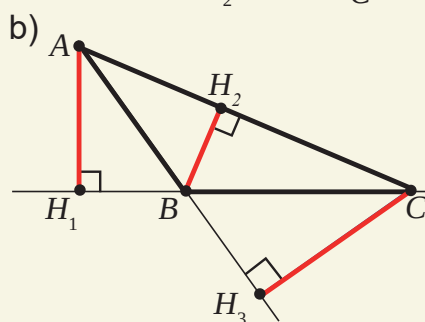
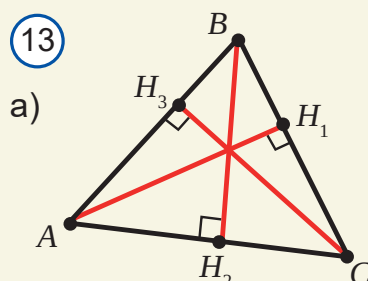
11



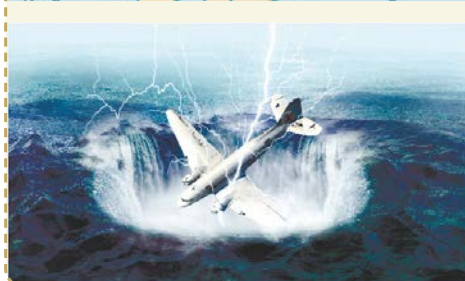
12



13



14



Тақырыпқа байланысты сұрақтар

1. Сынық сызық сыз, оның төбелерін белгіле және буындарын сызбада көрсет.
2. Көпбұрыш не? Мысалдар келтір.
3. Қандай пішін үшбұрыш деп аталады?
4. Үшбұрыштың төбесі, қабырғасы және бұрышы деб неге айтылады?
5. Үшбұрыштың периметрі не?
6. PQR үшбұрышта; а) $\angle P$ қарсысында қайсы қабырға жатады? б) PQ қабырғаға қайсы бұрыштар жабысқан? с) PQ және QR қабырғалар арасында қайсы бұрыш орналасқан? d) PR қабырға қайсы бұрыш қарсысында жатады? Бұл сұрақтарға пішінге қарамай жауап беруге әрекет ет.
7. Үшбұрыштың: а) медианасы; б) биіктігі; с) биссектрисасына түсінік бер.
8. Бұрыш биссектрисасы мен үшбұрыштың биссектрисасы ортасында жалпылық және айырмашалықты айт.

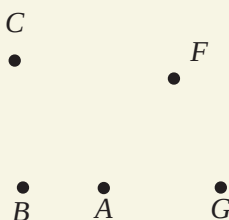


Практикалық тапсырма және қолдану

1. Жеті буынды сынық сызық сыз. Оның төбесі және буындарын жаз.
2. Әр екі сыбайлас буыны бір-біріне перпендикуляр болған бес буынды сынық сызық сыз. Мұндай сынық сызық жабық болуы мүмкін бе?
3. Үшбұрыштардың төбелері M , N және L әріптері мен белгіленді. Оның қабырғалары және бұрыштарын жаз.
4. CDE үшбұрыштың төбелері, бұрыштары және қабырғаларын жаз.
5. 15-суреттегі: а) C , F және A ; б) A , B және G ; с) F , B және G нүктелер үшбұрыштың төбесі бола алады ма? Неге?
6. 16-суретте бейнеленген сандық белгілері сынық сызық болады ма?

7*. 17-суретте бейнеленген пішіндердің қайсылары:
а) сынық сызық; б) жабық сынық сызық; с) көпбұрыш болуын анықта.

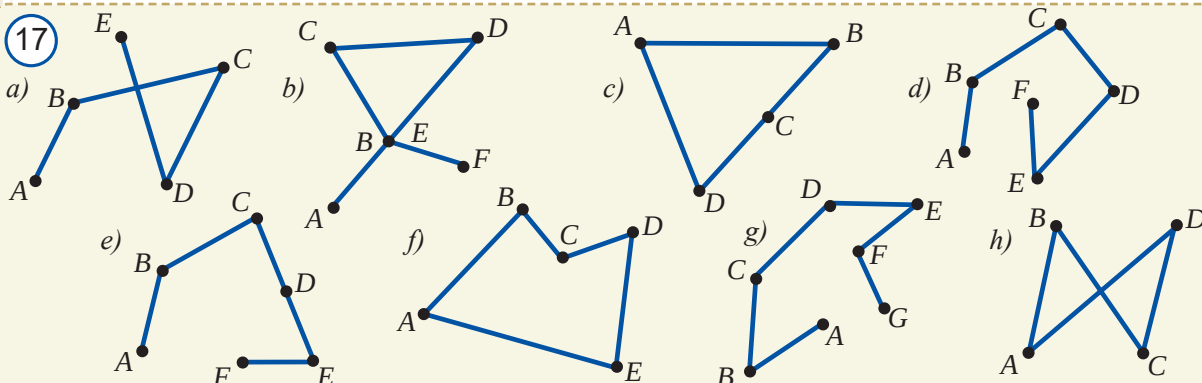
15

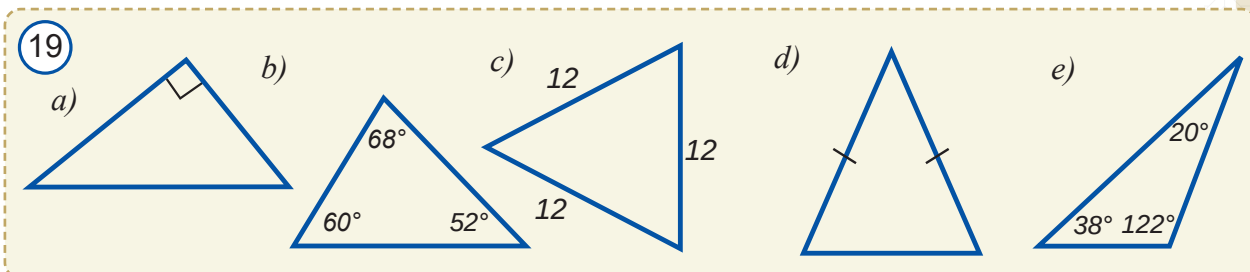
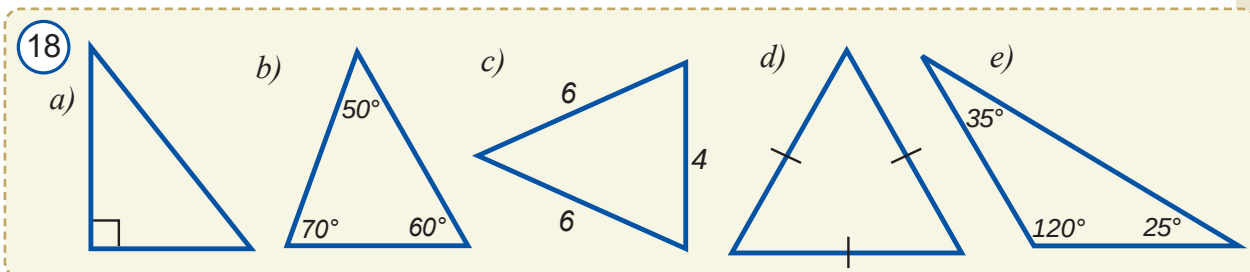


16



17





8. Үшбұрыштың қандай түрлері бар? Әрбір бұрыш түрінен бір үшбұрыш сыз. Оларды белгіле. Үшбұрыш түлерінің анықтамасына сүйене отырып, олардың өзіне тән қасиеттері неден құралғандығын айт.

9. 18-суреттегі үшбұрыштардың түрлерін анықта.

10. 19-суреттегі үшбұрыштардың түрлерін анықта.

11. Қабырғалары: а) $2,3 \text{ dm}$; $4,6 \text{ dm}$ және $5,3 \text{ dm}$; б) $32,3 \text{ m}$; $54,8 \text{ m}$ және $25,3 \text{ m}$ болған үшбұрыштың периметрін есепте.

12. Қабырғалары: а) 25 mm ; $64,6 \text{ mm}$ және 5 cm ; б) $7,3 \text{ dm}$; 3 m $25,5$ болған үшбұрыштың периметрін есепте.

13. Көз бен шамалап, тең қабырғалы үшбұрыш сал. Кейін қабырғаларын сызғышпен өлшеп, нәтижелерін салыстыр.

14. Тең қабырғалы үшбұрыш сызып, бұрыштарын өлше және қорытынды шығар.

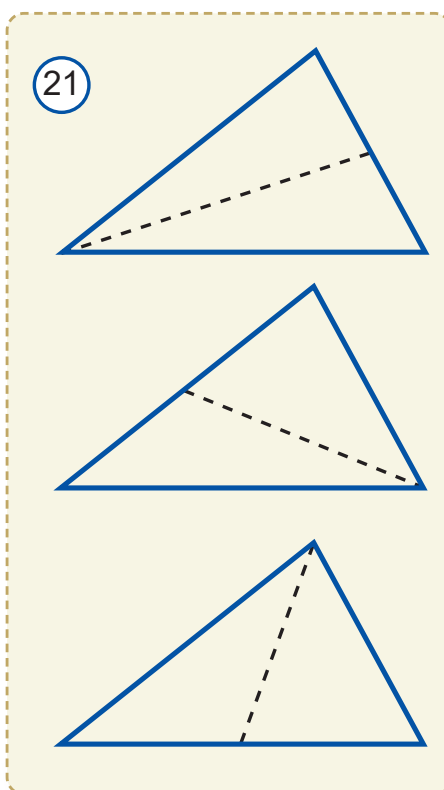
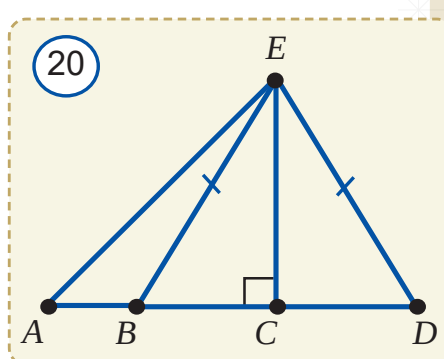
15. 20-суретте бір төбесі: а) A нүктеде; б) B нүктеде; с) C нүктеде болған неше үшбұрыш бар?

16. 20-суретте үшбұрыштың қандай түрлерін көріп тұрсын? Олардың түрлері бойынша жазып шық.

17. Сүйір бұрышты үшбұрыш сыз. Сызғыш көмегіңде оның қабырғаларын өлше және периметрін тап.

18. Доғал бұрышты үшбұрыш сыз. Сызғыш көмегіңде оның қабырғаларын өлше және периметрін тап.

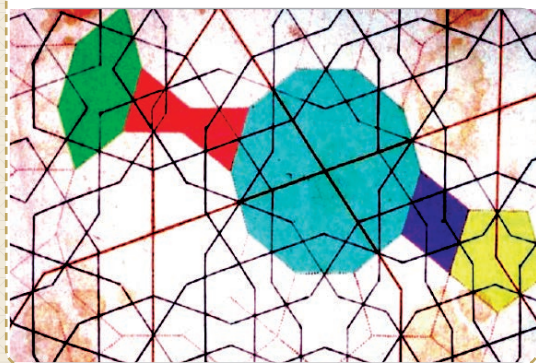
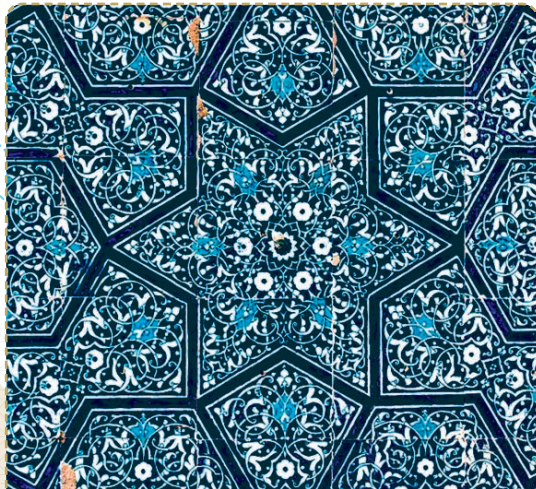
19. (Практикалық жаттығу). Үш бірдей үшбұрышты әр түрлі медианалары бойлап кесіп ал (21-сурет). Пайда болған 6 үшбұрыштан бір үшбұрыш жаса.



20. Үшбұрыштың қайсы элементтері әр қашан үшбұрыштың ішкі аймағында жатады?
- 21*. Қандай үшбұрыштың үш биіктігі және үшбұрыштың бір төбесінде қиылысады?
- 22*. Үшбұрыштың биіктігі оның үш қабырғаларынан да кіші болуы мүмкін бе?
23. Периметрі 36-ға тең болған үшбұрыштың биіктігі оның периметрлері 18 және 24-ке тең болған үшбұрыштарға бөледі. Берілген үшбұрыштың биіктігін тап.
24. Периметрі 36-ға тең болған үшбұрыштың биссектрисасы оны периметрлері 24 және 30-ға тең болған үшбұрыштарға бөледі. Берілген үшбұрыштардың биссектрисасын тап.
25. ABC үшбұрышта $AS = BC$ және BD медиана 4 см . Егер ABD үшбұрыш периметрі 12 см болса, ABC үшбұрыш периметрін тап.
26. Сызғыш және транспортир көмегінде ABC үшбұрыш жаса, онда $AS = 8\text{ см}$, $AC = 5\text{ см}$ және $\angle A = 60^\circ$ болсын.
27. Сызғыш және транспортир көмегінде KLM үшбұрыш жаса, онда $KL = 4\text{ см}$, $KM = 3\text{ см}$ және $\angle K = 90^\circ$ болсын. Бұл қандай үшбұрыш? Оның үшінші қабырғасын өлше және жаз.
- 28*. Үшбұрыш периметрі 72 см . Егер оның қабырғалар ұзындықтары қатынасы: $3 : 4 : 5$ сияқты болса, жақтарын тап. Бұл қандай үшбұрыш?
- 29*. Үшбұрыш периметрі 124 мм . Егер оның қабырғалар ұзындықтары қатынасы $3 : 4 : 5$ сияқты болса, жақтарын тап.



Тарихи үзінді



Handasa (геометрия) ілімінде өз дәуірінен бес ғасыр озып кеткен сәулетші ұсталарымыз.

2007-жыл февраль айында Америкада басылған орта ғасыр сәулетшілік туралы ғылыми мақала дүрбелеңге себеп болды. 2005-жылда Самарқанттағы Абдуллахон медресесі күмбезіндегі кошин-нақштарды (плитка-ою) көзден өткізген Гарвард университетінің аспиранты Питер Ли әсерленгеннен жағасын ұстады. Оның көз алдымда 1970-жылдарда табылған деп есептелінген, Пенроуз оюпары деп аталған қиын геомерикалық пішіндер тұрған еді. Мұнан шықты, біздің сәулетші ата-бабаларымыз ақыл мен интелекте өз заманынан бес ғасыр ілгері кетіп, пәнге жақында ғана енгізілген қиын геоме трикалық пішіндерді біліп қана қоймай, олардан өз жұмыстарында шығармашылықтан пайдаланған екен. Ия, ақиқатында сондай болып шықты. 11-суретте сәулетшілік ескерткішіндегі ою бейнеленген. 12-сурет орта ғасыр қол жазбаларынан алынған болып, онда осы ою негізін ұйымдастырушы көпбұрыштар бейнеленген.

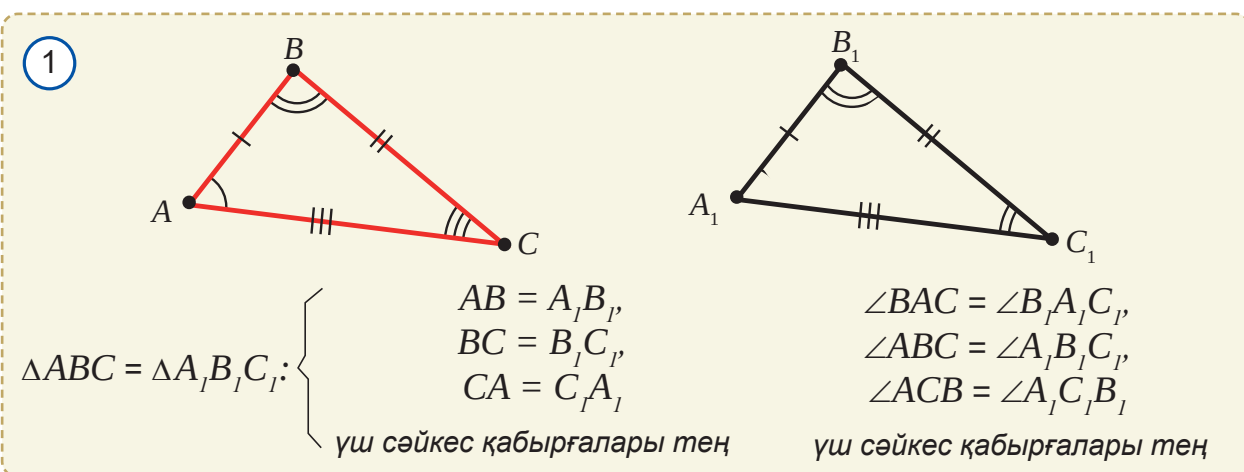
9

ҮШБҰРЫШТАР ТЕҢДІГІНІҢ БІРІНШІ БЕЛГІСІ

Геометриялық пішіндердің теңдігі түсінігіне қарай, екі үшбұрыштан бірін екіншісіне беттесіп түсетіндей етіп қою мүмкін болса, олар тең болады.

1-суретте ABC және $A_1B_1C_1$ тең үшбұрыштар бейнеленген. Олардан кез-келген біреуін екіншісінің үстіне беттесіп қою мүмкін. Мұнда бір үшбұрыштың үш төбесі – A, B, C және үш қабырғасы AB, BC, CA тиісінше екінші үшбұрыштың үш төбесі – A_1, B_1, C_1 және үш қабырғасы A_1B_1, C_1B_1, C_1A_1 мен беттесіп түседі. Мұнда үшбұрыштардың тиісті бұрыштары да тиісті түрде беттесіп түсетіні анық.

A, B, C және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштарының теңдігі $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ түрінде өрнектеледі. Сызбада тең бұрыштар бір түрлі доғалармен, тең қабырғалары болса бір түрлі сызықтармен 1-суретте бейнеленгендей бөлек көрсетіледі.



Белсендіруші жаттығуар

Үшбұрыш пішініндегі екі жер өрісінің өзара теңдігін амалда қалай тексеру мүмкін? Өйткені олардан бірін екіншісінің үстіне қойып болмайды ғой? Екі үшбұрыштың өзара тең немесе тең еместігін анықтау үшін әр қашан оларды беттестіріп қою шарт па?

Бұған қажет жоқ екен. Бұл есепті үшбұрыштардың кейбір элементтерін салыстыру арқылы көріп шығуға болады екен. «Үшбұрыштардың теңдік белгісі» деп айтылуына себеп, олардан пайдаланып үшбұрыштардың тең немесе тең еместігі туралы қорытынды шығару мүмкін.

Жалпы алғанда, геометрияда «белгі» – пішіннің бірер қасиетін анықтауда көмек беруші шарттар туралы теоремадан тұратын болады.

Төмендегі теорема «Үшбұрыштардың екі қабырғасы және олар арасында бұрышы бойынша теңдігі туралы теорема» деп аталады. Біз оны қысқаша «үшбұрыштар теңдігінің БҚБ белгісі» деп дейміз.

(БҚБ жазуы – «қабырға», «бұрыш», «қабырға» сөздерінің бас әріптерінен түзілген болып, бұрыштардың екі қабырғасы арасында жатқандығы да көрсетіп тұр.



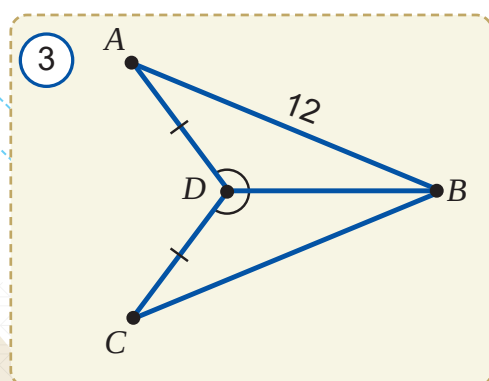
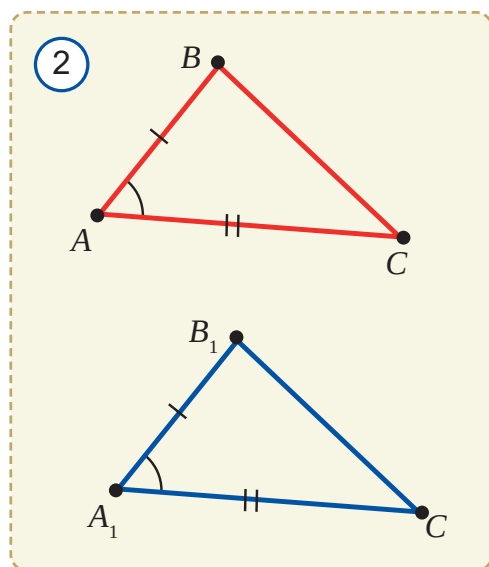
Теорема. (Үшбұрыштар теңдігін БҚБ белгісі) Егер бір үшбұрыштың екі қабырғасы және олар арасындағы бұрышы екінші үшбұрыштың екі қабырғасы және олар арасындағы бұрышына сәйкес болса, мұндай үшбұрыштар өзара тең болады (2-сурет).



$\triangle ABC$ және $\triangle A_1B_1C_1$
 $AB = A_1B_1, AC = A_1C_1, \angle BAC = \angle B_1A_1C_1$



$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$



Дәлелдеу. $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$ болғаны үшін, $A_1B_1C_1$ үшбұрышқа сондай қою мүмкін, онда A үш A_1 төбеге, AB және AC сәулелер болса сәйкес A_1B_1 және A_1C_1 сәулелер үстіне түседі. $AB = A_1B_1$ және $AC = A_1C_1$ болғаны үшін, AB қабырғасы мен, AC қабырғасы A_1C_1 қабырғасымен беттесіп түседі. Атап айтқанда, B нүкте B_1 нүкте мен, C нүкте C_1 нүкте мен беттесіп түседі. Онда B_1C_1 және BC қабырғалары да беттесіп түседі. Нәтижеде ABC үшбұрыштың үш төбесі (қабырғасы) $A_1B_1C_1$ үшбұрыштың үш төбесі (қабырғасы) мен сәйкес беттесіп түседі. Демек, ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштар өзара тең.

Теорема дәлелденді.

Есеп. 3-суретте берілгендерден пайдаланып BC кесіндіні тап.

Шешуі. ADB және CDB үшбұрыштарды қараймыз. Шартқа орай, бұл үшбұрыштар үшін $AD = DC$, $\angle ADB = \angle CDB$. BD болса жалпы қабырға.

Демек, ADB үшбұрыштың екі қабырғасы және олар арасындағы бұрышы CDB үшбұрыштың екі қабырғасы және олар арасындағы бұрышына сәйкес тең екен. Онда үшбұрыштар теңдігінің ҚБҚ белгісіне орай, $\angle ADB = \angle CDB$.

Негізінен, $CB = AB = 12$ болады.

Жауабы: 12.



Тақырыпқа байланысты сұрақтар

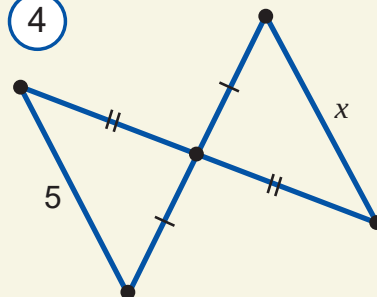
1. Қандай үшбұрыштар тең дейіледі?
2. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ теңдік үшбұрыштар қайсы элементтердің теңдігін білдіреді?
3. ҚБҚ белгісіне орай, үшбұрыштар теңдігі қандай элементтерді салыстыру арқылы анықталады?
4. Үшбұрыштар теңдігінің ҚБҚ белгісін түсіндір.



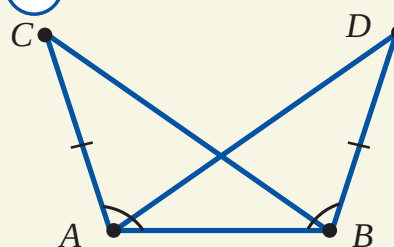
Практикалық тапсырмалар және қолдану

1. $\triangle ABC = \triangle DEF$. Бұл үшбұрыштардың тиісті төбелері, қабырғалары және бұрыштарын анықтап жаз.
2. MNL және RST үшбұрыштар тең. Бұл үшбұрыштардың тиісті төбелері, қабырғалары бұрыштарын анықтап жаз.
3. Егер $\triangle ABC = \triangle BAC$ екендігі белгілі болса, ABC үшбұрыштың қайсы қабырғалары тең болады.
4. $\triangle MNL = \triangle LMN$. MNL үшбұрыштың қайсы бұрыштары тең болады.
5. $\triangle ABC = \triangle DEF$. Егер $\angle AB = 52^\circ$, $\angle E = 80^\circ$ және $\angle C = 48^\circ$ болса, бұл үшбұрыштардың қалған бұрыштарын тап.
6. $\triangle ABC = \triangle LMN$. Егер $AB = 5$, $MN = 8$ және $AC = 9$ болса, бұл үшбұрыштың қалған қабырғаларын тап.
7. 9-суретте белгісіз кесінді – x -ты тап.
8. Егер 10-суретте $\angle CAB = \angle ABD$ болса, $AD = BC$ екендігін дәлелде.
9. 11-суретте $\angle BAE = \angle BCD$ екендігін дәлелде.
10. 12-суретте $\triangle ABC = \triangle CDA$ екендігін дәлелде.
11. 13-суретте $\triangle ABC = \triangle ABD$ болуын дәлелде.
12. AD және BC кеспелер O нүктеде қиылысады және бұл нүктеде тең екіге бөлінеді (9-сурет).
а) $\triangle AOB = \triangle DOC$; б) $BD = AC$; в) $\triangle ABD = \triangle DCA$;
г) $\angle OAB = 35^\circ$, $\angle OBA = 62^\circ$ болса, $\angle ODC$ және $\angle DCO$ -ны тап.
13. 15-суретте белгісіз бұрыш – x -ты тап.
14. Бір үшбұрыш периметрі екінші үшбұрыш периметріне тең. Бұл үшбұрыштар тең болады ма?
15. Бір үшбұрыш периметрі екінші үшбұрыш периметрінен үлкен. Бұл үшбұрыштар тең болады ма?
16. ABC үшбұрыштарының AB қабырғалары D нүкте, $A_1B_1C_1$ үшбұрыштарының A_1B_1 қабырғасында D_1 нүкте алынған. $\triangle ADC = \triangle A_1D_1C_1$; және $BD = B_1D_1$ теңдіктері белгілі. ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштар теңдігін дәлелде.

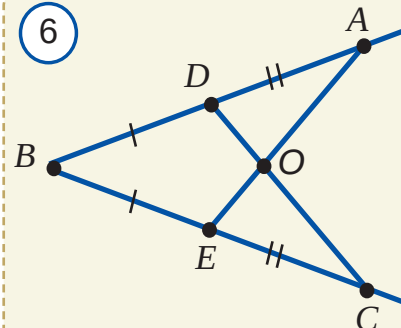
4



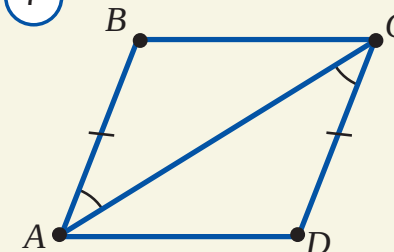
5



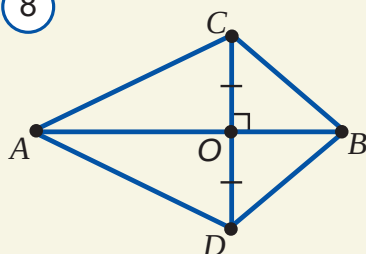
6



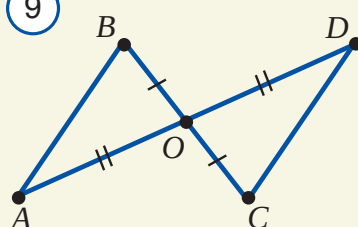
7



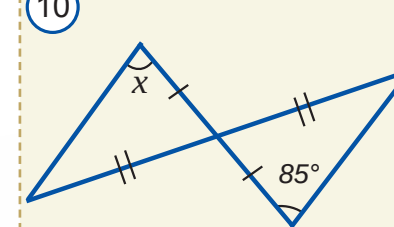
8



9



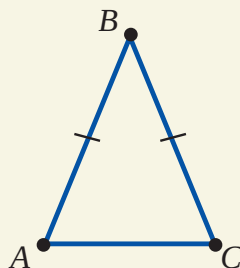
10



10

ТЕҢ БҮЙІРЛІ ҮШБҰРЫШТАРДЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ

1



ABC – тең бүйірлі үшбұрыш
 AB , BC – бүйір қабырғалары
 AC – негізі
 B – төбесі

Екі қабырғасы тең болған үшбұрышты **тең қабырғалы үшбұрыш** деп атаған едік (1-сурет). Тең бүйірлі үшбұрыштың тең қабырғалары оның **бүйір қабырғалары**, үшінші қабырғасы болса негізі, негізінің қарсысында жатқан төбесі болса тең бүйірлі үшбұрыштың төбесі деп аталады.



Белсендіруші жаттығу

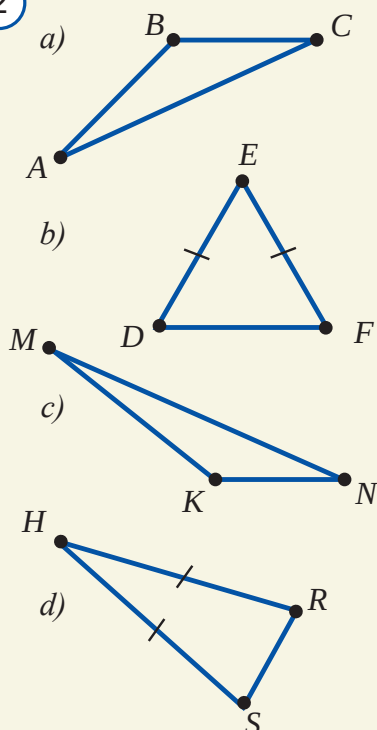
2-суретте үшбұрыштардың қайсылары тең бүйірлі? Олардың төбесі, негізі және бүйір қабырғаларын айт.



Геометриялық зерттеу

Сызғыш көмегінде кез келген тең бүйірлі үшбұрыш сыз. Оның негізіне іргелес бұрыштарды өлше және салыстыр. Бұл жұмысты тағы 2-3 басқа тең бүйірлі үшбұрыштар үшін қайтар және өз болжамыңды тұжырым көрінісінде өрнекте. Тәжірибе нәтижесінде бұл қасиет барлық тең бүйірлі үшбұрыштар үшін де орынды болады, деп айту мүмкін бе?

2



Теорема. Тең бүйірлі үшбұрыштың негізіндегі бұрыштары тең.



$\triangle ABC$, $AB=AC$
 (3-сурет)



$\angle B = \angle C$

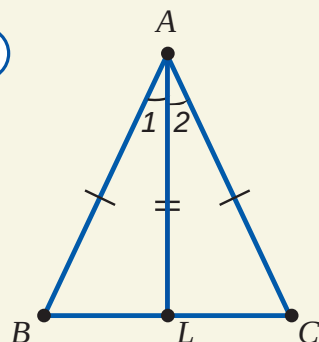
Дәлелдеу. ABC үшбұрыштың A төбесінен AL биссектрисасын түсіреміз (3-сурет).

ABL және ACL үшбұрыштарын қараймыз. Оларда AL қабырға жалпы. Екінші, теорема шартына орай, $AB=AC$ ($\triangle ABC$ – тең бүйірлі). Үшіншіден болса, $\angle 1 = \angle 2$, өйткені салуға орай AL – биссектриса. Демек, ABL үшбұрыштың екі қабырғасы және олар арасындағы бұрышына сәйкес тең екен. Онда үшбұрыштар теңдігінің ҚБҚ белгісіне орай, $\triangle ABL = \triangle ACL$ болады.

Бұл үшбұрыштардың тиісті бұрыштары ретінде $\angle B = \angle C$ болады.

Теорема дәлелденді.

3





Геометриялық зерттеу

Тең бүйірлі үшбұрыш сыз. Оның төбесінен шыққан биссектрисаны өткіз. Бұл биссектриса үшбұрыш негізін екі бөлікке бөледі. Осы бөліктер ұзындығын өлшеп салыстыр. Бұдан қандай қорытынды шығады? Кейін биссектриса мен негіз пайда еткен бұрыштарды транспортирде өлше және салыстыр. Бұдан қандай қорытынды шығады? Бұл қорытындыларды тұжырым көрінісінде өрнекте. Бұл қорытындылар барлық тең бүйірлі үшбұрыштар үшін де орынды, деп айту мүмкін.



Теорема. Тең бүйірлі үшбұрыш негізіне түсірілген биссектриса оның да медианасы, тағы биіктігі болады (4-сурет).



$\triangle ABC$, $AB=AC$, AL – биссектриса



AL – медиана және биіктік

Дәлелдеу. 1. AL кесім ABC үшбұрыштың биссектрисасы болса (4-сурет), жоғарыда дәлелденген теоремаға орай, $\angle ABL = \angle ACL$ болады. Бұл үшбұрыштар теңдігінен $BL = LC$ және $\angle 3 = \angle 4$ екендігін табамыз.

Демек, L нүкте – BC қабырғасының ортасы, AL болса ABC үшбұрыштың медианасы екен.

2. $\angle 3$ және $\angle 4$ өзара тең және сыбайлас бұрыштар болғаны үшін, олар тік бұрыш.

Демек, AL кеспе ABC үшбұрыштың биіктігі де болар екен. **Теорема дәлелденді.**

Нәтиже. Тең бүйірлі үшбұрыштың төбесінен шығатын биссектрисасы, медианасы және биіктігі қабаттасып түседі.

Есеп. Тең бүйірлі ABC үшбұрыштың бүйір қабырғаларына AD және CF медианалар түсірілген. $\triangle ADC$ $\triangle CFA$ және $\triangle ADB$ $\triangle CFB$ екендігін дәлелде.



$\triangle ABC$, $AB = BC$, AD және CF – медианалар (5-сурет)



$\triangle ADC = \triangle CFA$, $\triangle ADB = \triangle CFB$

Дәлелдеу. $AB = BC$ болғаны үшін, бұл қабырғалардан AD және CF медианалар бөлінген кесімдер тең болады:

$$AF = FB = BD = CD. \quad (1)$$

1) $\triangle ACD = \triangle CFA$, үшбұрыштарды қараймыз. Оларда:

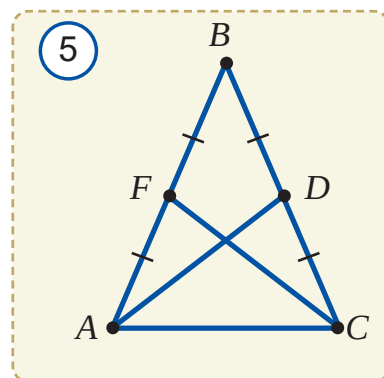
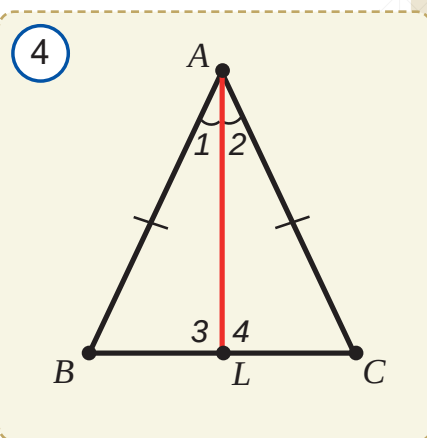
1. $\angle ACD = \angle FAC$, өйткені $\angle ABC$ тең бүйірлі;

2. AC қабырға жалпы;

3. $AF = CD$ – (1) теңдікке орай.

Демек, үшбұрыштар теңдігінің ҚБҚ белгісіне орай $\triangle ADC = \triangle CFA$.

2) $\triangle ADF = \triangle CFB$ екендігін өз бетіңше дәлелде.



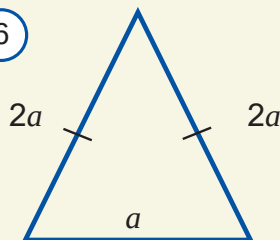
Тақырыпқа байланысты сұрақтар

1. Тең бүйірлі үшбұрыш түсінігі және қасиеттерін айт
2. Тең бүйірлі үшбұрыш негізінде түсірілген медиана оның биссектрисасы болады ма?

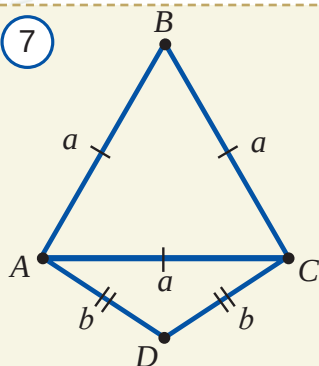


Практикалық жаттығу және қолдану

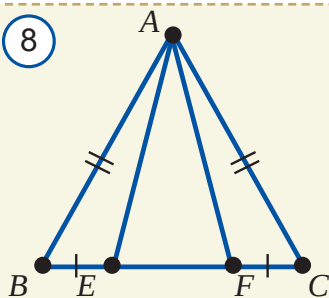
6



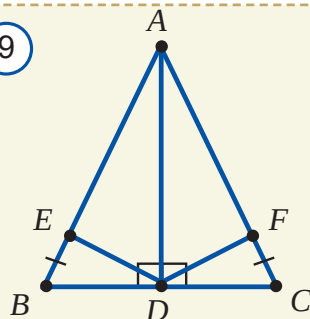
7



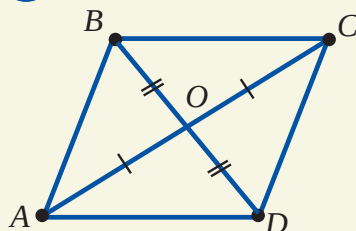
8



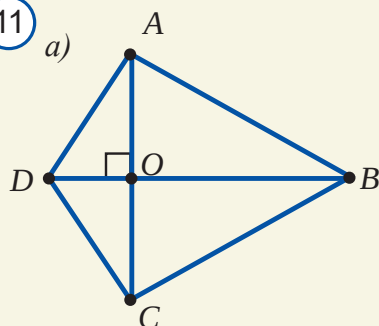
9



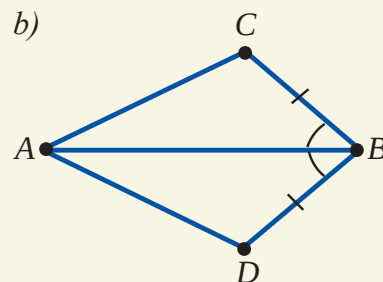
10



11



b)



- 6-суретте $P = 50 \text{ см}$ болса $a = ?$
- 7-суретте $P_{ABC} = 36$ және $P_{ADC} = 28$ болса $a = ?$, $b = ?$
- Тең бүйірлі үшбұрыштың бүйір қабырғаларына түсірілген медианалар тең болуын дәлелде.
- 8-суретте $AB=AC$, $BE=FC$. а) $\triangle ABE=\triangle ACF$; б) $AE=AF$ д) $\triangle ABF=\triangle ACE$ екендігін дәлелде.
- 9-суретте $AB=AC$, $BE=FC$. а) $\triangle AED=\triangle AFD$; б) $\triangle BED=\triangle CFD$ теңдіктерді дәлелде.
- Тең қабырғалы үшбұрыштың барлық бұрыштары тең екендігін дәлелде.
- *. Екі тең бүйірлі үшбұрыштардың негіздері және осы негізге түсірілген биіктіктер теңдігіне орай, олардың теңдігін тап.
- Тең бүйірлі үшбұрыштың негізі бүйір қабырғадан 3 см үлкен, бірақ бүйір қабырғаларының қосындысынан 5 см кіші. Үшбұрыштың қабырғаларын тап.
- *. Тең бүйірлі үшбұрыш қабырғаларының орталары тұтастырылса, тең бүйірлі үшбұрыш пайда болуын дәлелде.
- *. Бір үшбұрыштың екі қабырғасы және бір бұрышы екінші үшбұрыштың екі қабырғасы және бір бұрышына тең. Бұл үшбұрыштар тең болады ма?
- *. Сондай екі үшбұрыш сыз, олардың біреуінің екі қабырғасы және бір бұрышы екіншісінің екі қабырғасы және бір бұрышына тең болсын, бірақ олар тең болмасын.
- 10-суретте: $AO=OC$ және $BO=OD$. $AB=CD$ және $BC=AD$ екендігін тап.
- *. 11-суретте а) $\triangle AOD=\triangle COD$, $\triangle ABD=\triangle CBD$; б) $\triangle ABD=\triangle ABD$ екендігін дәлелде.

11 ҮШБҰРЫШТАР ТЕҢДІГІНІҢ ЕКІНШІ БЕЛГІСІ

Енді үшбұрыштардың бір қабырғасы және оған іргелес бұрыштар бойынша теңдік белгісін қарастырамыз. Келесіде оны «үшбырыштар теңдігінің БҚБ белгісі» дейміз.



Теорема. (Үшбұрыштар теңдігінің БҚБ белгісі). Егер бір үшбұрыштың бір қабырғасы мен оған іргелес бұрыштары сәйкесінше екінші үшбұрыштың бір қабырғасымен оған іргелес бұрыштарына тең болса, онда мұндай үшбұрыштар тең болады.



$\triangle ABC$ және $\triangle A_1B_1C_1$ (1-сурет),
 $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$



$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

Дәлелдеу. ABC үшбұрышты $A_1B_1C_1$ үшбұрыш үстіне солай қояйық, A төбесі A_1 төбесімен AB қабырғасы A_1B_1 беттесін, C мен C_1 төбелері A_1B_1 түзудің бір жағында жатсын. Олай болса, $\angle A = \angle A_1$ болғандықтан, AC қабырға A_1B_1 сәуледе жатады, $\angle B = \angle B_1$ болғандықтан, BC қабырға B_1C_1 сәуледе жатады.

Сондықтан C нүкте AC және BC сәулелердің ортақ нүктесі ретінде A_1C_1 және B_1C_1 сәулелердің екеуінен де өтеді.

Онда, C нүкте A_1C_1 және B_1C_1 сәулелердің ортақ нүктесі - C_1 мен беттеседі.

Нәтижеде AC және $A_1B_1C_1$, BC және B_1C_1 қабырғалары да өзара беттеседі.

Демек, ABC және $A_1B_1C_1$ бұрыштар беттеседі, және олар тең дегені.

Теорема дәлелденді.

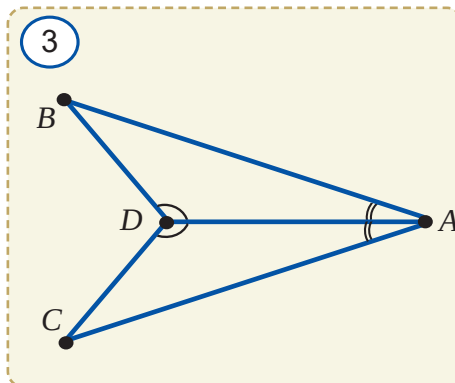
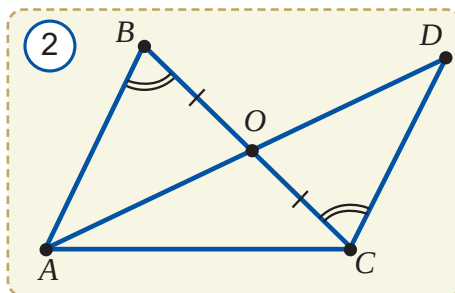
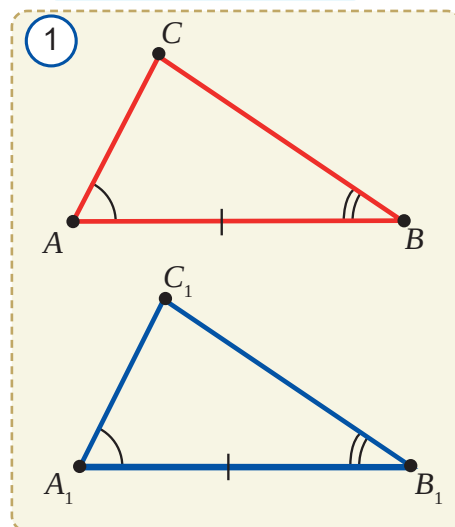
Есеп. 2-суретте берілгендерді пайдаланып, $\triangle AOB = \triangle DOC$ екендігін дәлелде.

Дәлелдеу. $\angle AOB$ және $\angle DOC$ вертикаль бұрыштар болғаны үшін олар тең болады.

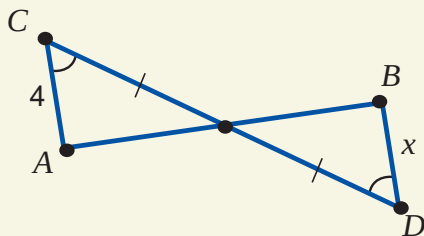
Нәтижеде $BO = OC$, $\angle ABO = \angle DCO$ $\angle AOB = \angle DOC$ теңдіктерге иеміз.

Демек, AOB үшбұрыштың бір қабырғасы және оған жабысқан екі бұрышы DOC үшбұрыштың бір қабырғасы және оған жабысқан екі бұрышы сәйкес тең екен.

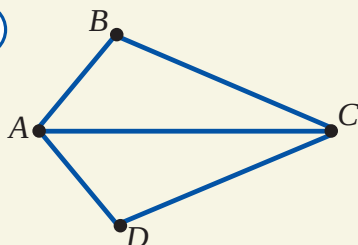
Онда үшбұрыштар теңдігінің БҚБ белгісіне орай, AOB және DOC үшбұрыштар тең болады.



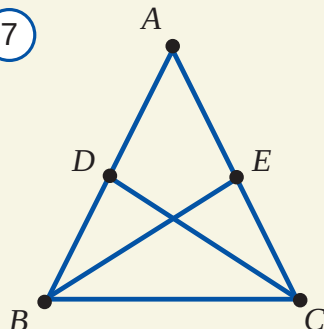
4



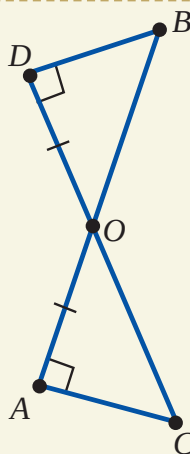
6



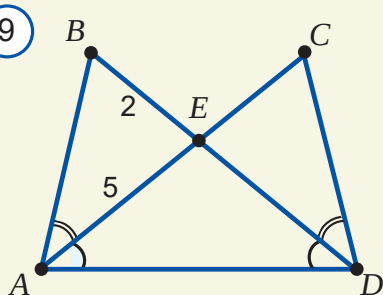
7



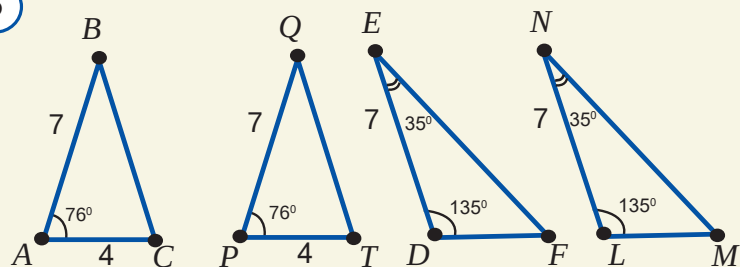
8



9



5



Тақырыпқа байланысты сұрақтар

1. БҚБ белгісіне орай, үшбұрыштар теңдігі қандай элементтері бойынша анықталады?
2. Үшбұрыштар теңдігінің БҚБ белгісін түсінтір.
3. Үшбұрыштар теңдігінің БҚБ белгісі неге осылай аталған?



Практикалық жұмыс және қолдану

1. 3-суреттегі ABD және ACD үшбұрыштардың теңдігін дәлелде.
2. 4-суреттегі белгісіз – x -ты тап.
3. 5-суреттегі үшбұрыштардың қайсылары бір-біріне тең? Неге?
4. 6-суретте AC кесім BAD және BCD бұрыштарының биссектрисасы болса, $\triangle ABC = \triangle ADC$ екендігін дәлелде.
5. ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштарда $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$ және $\angle B = \angle B_1$ екендігі белгілі. AB және A_1B_1 қабырғалар да сәйкес D және D_1 нүктелер $\angle ACD = \angle A_1C_1D_1$ болатындай етіп алынған. Онда $\angle BCD = \angle B_1C_1D_1$ екендігін дәлелде.
6. AB және CD кесімдер O нүктеде қиылысады. Егер $BO = CO$ және $\angle ACO = \angle DBO$ болса, ACO және DBO үшбұрыштар тең екендігін дәлелде.
7. 7-суретте ABC үшбұрышта $AB = AC$. BE және CD биссектрисаларының тең екендігін дәлелде.
8. $\triangle OAC = \triangle ODB$ болуын дәлелде (8-сурет).
9. ABC және ADC үшбұрыштар тең. B және D нүктелер AC түзу сызықтың тең бүйірлі екендігін дәлелде.
- 10*. 9-суреттегі мәліметтер негізінде AC және BD кесінділерін тап.

Енді үшбұрыштардың үш қабырғасы бойынша теңдік белгісімен танысамыз. Келесіде оны «үшбұрыштар теңдігінің ҚҚҚ белгісі» деп айтамыз.



Теорема. (Үшбұрыштар теңдігінің ҚҚҚ белгісі). Егер бір үшбұрыштың үш қабырғасы екінші үшбұрыштың сәйкес үш қабырғасына тең болса, онда мұндай үшбұрыштар тең болады.

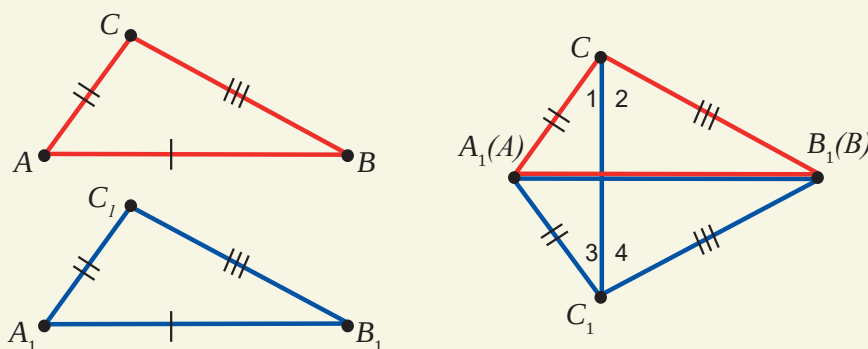


Берілген: $\triangle ABC$ және $\triangle A_1B_1C_1$;
 $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$.



$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

1



Дәлелдеу. Айталық, ABC үшбұрыштың ең үлкен қабырғасы AB болсын. ABC үшбұрышты $A_1B_1C_1$ үшбұрыш үстіне сондай қою керек, AB қабырға A_1B_1 қабырға мен беттесіп түссін тағы C және C_1 төбелері A_1B_1 сызықтың әр түрлі қабырғаларында жатсын (1-сурет).

Олай болса $AC = A_1C_1$ және $BC = B_1C_1$ болғандықтан, A_1B_1C және B_1C_1C үшбұрыштар тең бүйірлі болады.

Онда тең бүйірлі үшбұрыш қасиетіне орай, $\angle 1 = \angle 3$ және $\angle 2 = \angle 4$ болады.

Демек, ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштарда $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$ және $\angle ACB = \angle A_1B_1C_1$. Үшбұрыштар теңдігінің ҚБҚ белгісіне орай, $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Теорема дәлелденді.

Қорытынды. Егер екі үшбұрыштың әр үш қабырғасы сәйкес түрде тең болса, олардың сәйкес бұрыштары да өзара тең болады.

Есеп. 2-суретте берілгендерден пайдаланып: а) $\triangle AFD = \triangle CEB$;

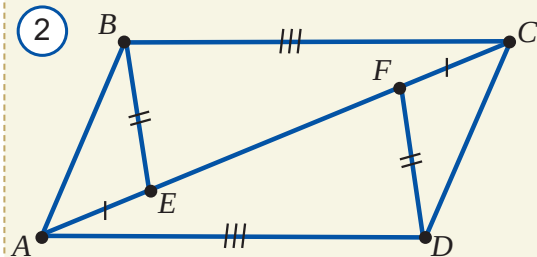
б) $\triangle AEB = \triangle CFD$ екендігін дәлелде.

Дәлелдеу. 2-суретте берілгендерге орай $AE = FC$, $BE = FD$ және $AD = BC$.

1) $AF = AE + EF$ болғаны үшін

$EC = EF + FC = EF + AE = AF$.

2



Демек, $\triangle AFD$ және $\triangle CEB$ сәйкес қабырғалары өзара тең және үшбұрыштар теңдігінің ҚҚҚ белгісіне орай, $\triangle AFD = \triangle CEB$.

2) $\triangle AFD = \triangle CEB$ болғаны үшін $\angle BEF = \angle EFD$. Онда, BEF және AEB , EFD және CFD бұрыштар сыбайлас бұрыштар болғаны үшін $\angle AEB = \angle CFD$ болады.

AEB және CFD үшбұрыштарда: 1. $AE = FC$; 2. $BE = FD$; 3. $\angle AEB = \angle CFD$.

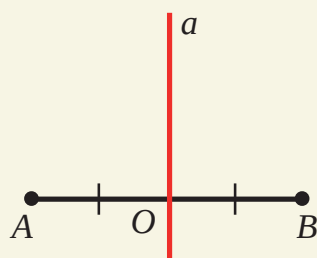
Демек, үшбұрыштар теңдігінің ҚБҚ белгісіне орай, $\triangle AEB = \triangle CFD$ болады.

Кесінді орта перпендикулярдың қасиеті

Енді үшбұрыштар теңдік белгілерінің теоремаларын дәлелдеуде қолдануын көреміз.

AB кесім берілген болсын. Оның ортасы болған O нүктеден AB кесіндіге перпендикуляр A түзу сызығын өткіземіз (3-сурет). Бұл түзу сызық AB кесіндінің орта перпендикуляры деп аталады.

3



Теорема. Кеспе орта перпендикуляр-дың кезкелген нүктесі кесінді төбелерінен тең алыстықта орналасқан болады.

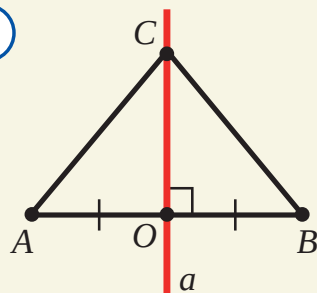


AB кеспе, C – AB кесінді орта перпендикулярының кез-келген нүктесі (4-сурет)



$$AC = BC$$

4



Дәлелдеу. $\triangle ACO$ және $\triangle BCO$ үшбұрыштарда (4-сурет):

- 1) OC – жалпы қабырға;
- 2) $AO = BO$ – шартқа орай;
- 3) $\angle AOC = \angle BOC = 90^\circ$ – шартқа орай.

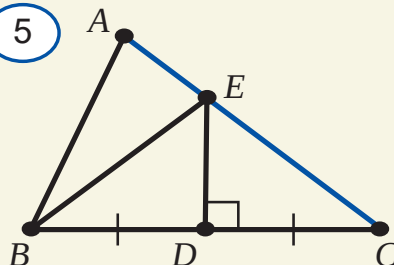
Демек, үшбұрыштар теңдігінің ҚБҚ белгісіне орай, $\triangle AOC = \triangle BOC$.

Сөйтіп, $AC = BC$.

Теорема дәлелденді.

Есеп. ABC үшбұрыштың BC қабырғасына өткізілген орта перпендикуляр AC қабырғасы E нүктеде кесіп өтеді. Егер $BE = 6$ см, $AC = 8,4$ см болса, AE және CE кесіндіні тап.

5



Шешуі. ABC үшбұрыш BC қабырғаның орта перпендикуляры DE болсын (5-сурет).

Кесінді орта перпендикулярдың қасиетіне орай, $CE = BE = 6$ см.

$AE + EC = AC$ болғаны үшін,

$$AE = AC - EC = 8,4 - 6 = 2,4 \text{ (см)}.$$

Жауабы: $AE = 2,4$ см, $CE = 6$ см.

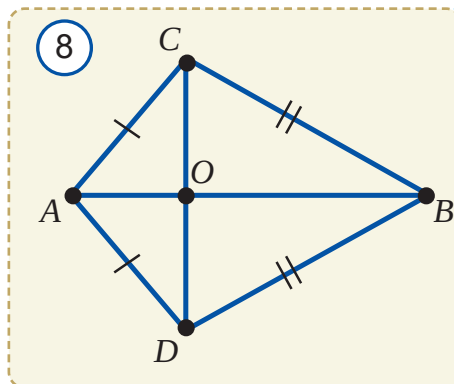
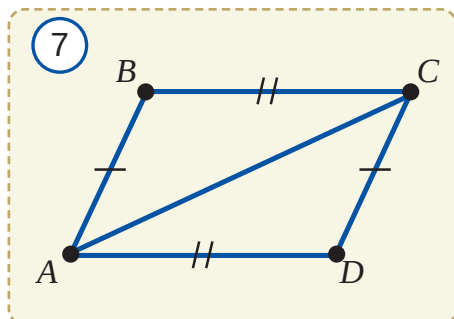
Тақырыпқа байланысты сұрақтар

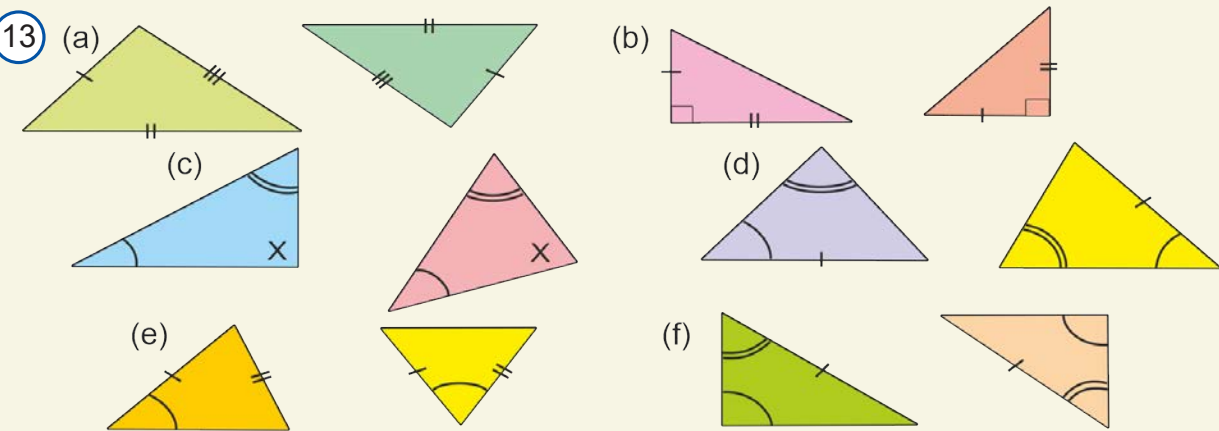
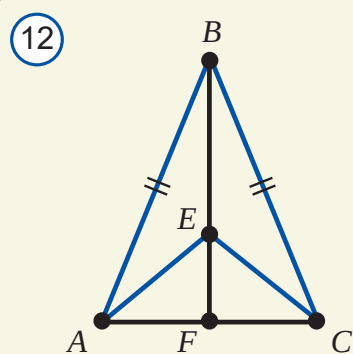
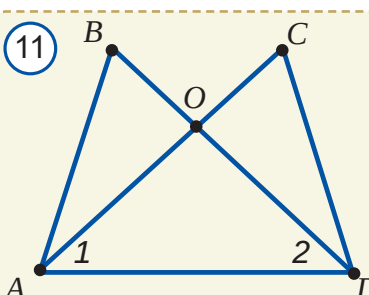
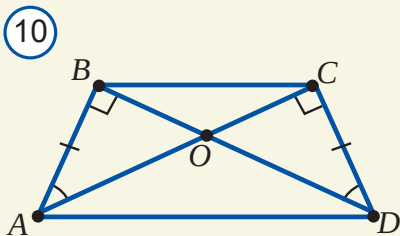
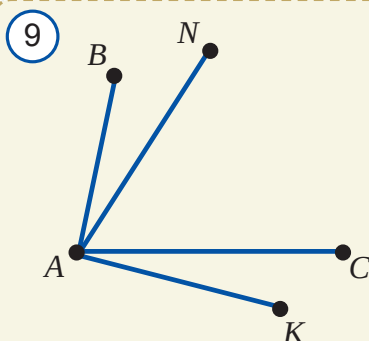
1. 6-суретте үшбұрыш пішініндегі құрылмаларды тап. Олар не себепті үшбұрыш пішінінде?
2. Үшбұрыштар теңдігінің ҚҚҚ белгісінде үшбұрыштар теңдігі қандай элементтер бойынша салыстырып анықталады?
3. Үшбұрыштар теңдігінің ҚҚҚ белгісін түсіндір.
4. Кесідінің орта перпендикуляры не?
5. Кесіндінің орта перпендикулярының қасиеттерін түсіндір.
6. Бір үшбұрыш сыз және оның әрбір қабырғасына орта перпендикуляр өткіз. Нені байқадың? Сызбаңды сыныптасыңның сызбасымен салыстыр және анықталған қасиетті ойлау ретінде өрнекте.
7. Қандай үшбұрыштар үшбұрыш қабырғасына түсірілген орта перпендикуляр осы қабырғаға түсірілген биіктік беттесіп түседі?



Практикалық жаттығу және қолдану

1. 7-суретте берілгеніне орай, $\triangle ABC = \triangle CDA$ екендігін дәлелде.
2. 8-суретте а) $\triangle ABC = \triangle ABD$; б) $\triangle BOC = \triangle BOD$ екендігін дәлелде.
3. 8-суретте а) $\triangle AOC = \triangle AOD$; б) $AB \perp CD$ екендігін дәлелде.
4. ABC және ABD негіздері AB болған тең бүйірлі үшбұрыштар болса, $\triangle ACD = \triangle BCD$ екендігін дәлелде.
5. Егер 9-суретте $BA = AK$, $AC = AN$, $\angle BAC = \angle NAK$ болса, төбелері A , B , C , K және N нүктелерде болған барлық тең үшбұрыштар жұбын анықта.
6. ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштарда $AB = A_1B_1$ және $BC = B_1C_1$ болып, олардың периметрлері тең болса, $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ екендігін көрсет.
- 7*. AB және CD кесінділер қиылысу нүктесінде теңдік екіге бөлінеді. $\triangle ACD = \triangle BDC$ екендігін дәлелде.
8. 10-суретте неше өзара тең үшбұрыштар жұбы бар екендігін анықта.





- 9*. Егер 11-суретте а) $\angle 1 = \angle 2$, $AC = BD$; б) $\angle 1 = \angle 2$, $BO = OC$, $AB = CD$ болса, $\triangle ABD = \triangle DCA$ экендігін көрсет.
10. ABC үшбұрыштың BC қабырғасына өткізілген орта перпендикуляр AC қабырғасы D нүктеде қиып өтеді. Егер $BD = 7,2 \text{ cm}$, $AD = 3,2 \text{ cm}$ болса, AC неге тең.
11. ABC және ABD тең бүйірлі үшбұрыштар жалпы AB негізге ие. CD түзу сызық AB кесіндінің орта перпендикуляры болуын дәлелде.
- 12*. ABC тең бүйірлі үшбұрыштың AB қабырғалары өткізілген орта перпендикуляр BC қабырғаны D нүктеде қиып өтеді. Егер ADC үшбұрыштың периметрі 24 cm -ге тең және $AB = 16 \text{ cm}$ болса, AC негізін тап.
- 13*. Үшбұрыштың қабырғаларына түсірілген орта перпендикуляр бір нүктеде қиылысуын дәлелде.
14. Тең бүйірлі ABC үшбұрыштың негізіне түсірілген BF биссектрисасында E нүкте алынған (12-сурет). $\triangle ABE = \triangle CBE$ теңдікті ҚҚҚ белгісінен: а) пайдаланып; б) пайдаланбастан дәлелде.
15. ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштарда $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CA = C_1A_1$, $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 60^\circ$ және $\angle C_1 = 90^\circ$ экендігі белгілі. Бұл үшбұрыштардың қалған бұрыштарын тап.
16. ABC және DEF тең бүйірлі үшбұрыштар өзара тең. ABC үшбұрышта $AC=BC$ және $AB = 2 \text{ cm}$. Егер $DE = A \text{ cm}$ болса, әрбір үшбұрыш периметрін тап.
17. 13-суреттегі үшбұрыштар жұбынан қайсы бірі тең болады? Неге?

Көлдің кеңдігін өлшеу

Айтайық A және B нүктелер көлдің шеткі нүктелері болсын (1-сурет). Әрине, AB кесіндісін тікелей өлшеу мүмкін емес. Жағалауда қандай құрылыс жұмыстарын жүргізу арқылы бұл қашықтықты өлшеуге болады?

Шешімі. Жағада сондай O нүктені таңдаймыз, OA және OB кесінділер бойлап жағалаудан A және B нүктелерге баруға болсын. ABC үшбұрыш жасаймыз. AO және BO қабырғаларын жалғастырып, $OC = AO$ және $OD = BO$ кесінділерін қоямыз. C және D нүктелерін тұтастырамыз. Нәтижеде үшбұрыштар теңдігінің ҚБҚ белгісіне орай, $\triangle AOB = \triangle COD$ болады. Негізінен, $AB = DC$ екендігі келіп шығады.

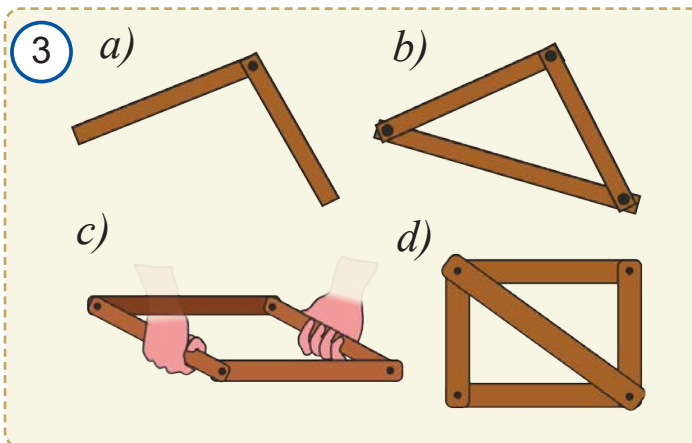
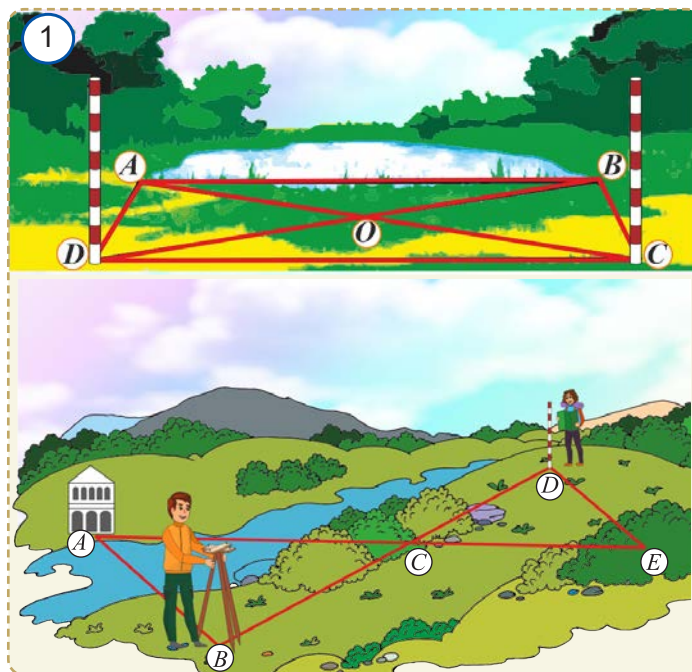
Демек, жасалған DC кесіндінің ұзындығын өлшеп, AB кесіндінің де ұзындығын тапқан боламыз. 2-суретте бейнеленген жағдайды өздігіңше түсіндір.

Үшбұрыштың «берік» пішін екендігін негіздеу

Екі ағаш тақтайшаның (рейканың) ұшын бір-біріне 3а-суретте көрсетілгендей етіп, шегемен біріктіреміз. Пайда болған пішін «берік» болмайды, өйткені оның еркін ұштарын түрлі жаққа бұрып, қабырғалары арасындағы бұрышты қалағанша өзгертуге болады.

Енді бұл тақтайшалардың еркін ұшына үшінші тақтайшаны 3б-суретте көрсетілгендей етіп, шегемен қағып, біріктіреміз. Пайда болған үшбұрыш берік болады. Өйткені қанша ұрынсақ та оның қабырғаларын бұрып, бұрыштарын өзгерте алмаймыз.

1. Үшбұрыштардың «берік» пішін екендігін үшбұрыштар теңдігінің ҚБҚ белгісі көмегінде түсіндір.
2. 3с, д-суреттегі төртбұрыштар ненің есебінен берік болады?
3. Үшбұрыштың берік қасиетінен құрылыста кең қолданады. 89-беттегі 6-суретте бейнеленген ғимарат және құрылыстарда не себептен үшбұрыш пішініндегі құрылымдардан пайдаланып жатқанын түсіндір.



13.2. Біліміңді сынап көр

1. Бос жерлерді мағынасына қарай дұрыс сөздермен толтыр.

1. Егер үшбұрыштың екі қабырғасы тең болса, ол ... болады.
2. Тең бүйірлі үшбұрыштың оның әрі медианасы, әрі биіктігі болады.
3. Өзін-өзі қимайтын жабық сынық сызықтан пішін ... дейіледі.
4. Барлық қабырғалары өзара тең болған үшбұрыштардың ... тең болады.
5. ... үшбұрыштың медианалары, биссектрисалары және биіктіктері өзара тең.
6. ... негізіне жабысқан бұрыштар тең.
7. Тең қабырғалар үшбұрыш ... үшбұрышта болады.

2. Төмендегі сөйлемдердегі қатені тап және түзет.

1. Тең бүйірлі үшбұрыштың бұрыштары тең.
2. Егер екі үшбұрыштың бұрыштары сәйкесінше тең болса, бұл бұрыштар тең болады.
3. Тең бүйірлі үшбұрыштың медианасы оның әрі биссектрисасы, әрі биіктігі болады.
4. Үшбұрыштың бұрышынан шығып, осы бұрышты тең екіге бөлуші сәулеге үшбұрыш биссектрисасы дейді.
5. Медиана – үшбұрыш қабырғасын тең екіге бөлетін сызық.
6. Егер екі үшбұрыштың бір қабырғасы және екі бұрышы сәйкесінше тең болса, бұл үшбұрыштар тең болады.
7. Бір үшбұрыштың екі қабырғасы мен бір бұрышы екінші үшбұрыштың екі қабырғасы мен бір бұрышына сәйкесінше тең болса, бұл бұрыштар тең болады.
8. Периметрі тең болған үшбұрыштар өзара тең болады.
9. Үшбұрыштардың биіктігі оның қабырғасы ортасына түсірілген перпендикуляр.
10. Егер бір үшбұрыштың үш бұрышы екінші үшбұрыштың үш бұрышына сәйкесінше тең болса, мұндай үшбұрыштар өзара тең болады.

3. Берілген қасиетке ие болған геометриялық пішін атауын оң бағандағы сәйкес қатарға жаз.

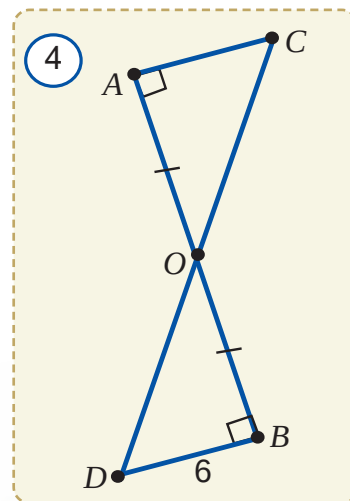
1	Барлық медианалары тең	
2	Үшбұрыштардың бір төбесі мен осы төбенің қарсысындағы қабырғаның ортасына қосатын кесінді	
3	Үшбұрыштың бір төбесінен осы төбенің қарсысындағы қабырғаға жүргізілген перпендикуляр	
4	Үшбұрыш қабырғаларының қосындысы	
5	Тұйық сынық сызық	

4. Бірінші бағанда берілген геометриялық түсінікке екінші бағаннан тиісті қасиетті тауып жаз.

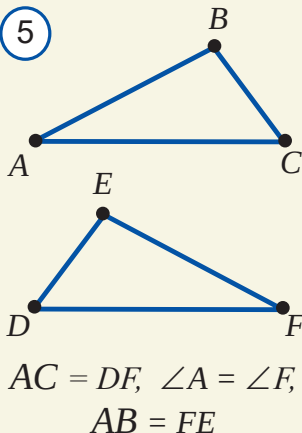
Геометриялық түсініктер	Қасиеті немесе баяндалуы
1. Сынық сызық	(А) бір бұрышы тік бұрыш.
2. Көпбұрыш	(Б) үшбұрыш төбесін осы төбе қарсысындағы қабырға ортасымен тұтастырылады.
3. Үшбұрыш периметрі	(В) екі қабырғасы тең.
4. Сүйір бұрышты үшбұрыш	(Г) тұйық сынық сызық.
5. Тең бүйірлі үшбұрыш	(Д) ретімен келген екі бір түзуде жатпаған $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}, A_n$ кесінділерден құралған.
6. Тік бұрышты үшбұрыш	(Е) үш қабырға қосындысы.
7. Үшбұрыш медианасы	(Ж) барлық бұрыштары сүйір.
8. Үшбұрыш биссектрисасы	(З) үшбұрыш бұрышы биссектрисасының үшбұрыш ішкі аймағында жатқан бөлігі.
9. Үшбұрыштың биіктігі	(И) үшбұрыш төбесінен осы төбе қарсысындағы қабырға жатқан сызыққа жүргізілген перпендикуляр.
10. Кесіндінің орта перпендикулярлары	(Й) кесінді ортасына жүргізілген перпендикуляр.

5. Тесттер.

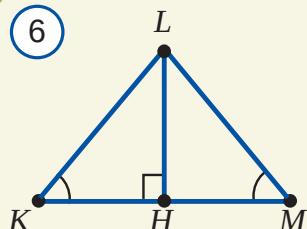
- Тең бүйірлі үшбұрыштың екі қабырғасы 8 және 3-ке тең. Оның үшінші қабырғасын тап.
А) 5 Б) 8 В) 11 Г) 9
- Тең бүйірлі үшбұрыштың бір қабырғасы екіншісінен 3 *см* қысқа және периметрі 36 *см* болса, оның бүйір қабырғасын тап.
- Тең бүйірлі үшбұрыштың периметрі 48, бүйір қабырғасы 18-ге тең. Оның негізін тап.
А)18 Б)12 В)16 Г)14
- Тең бүйірлі үшбұрыштың периметрі 48-ге тең. Оның қабырғаларынан бірі 12-ге тең болса, қалған қабырғаларын тап.
А) 12; 12 Б) 16; 16 В) 18; 24 Г) 18; 185.
- Тең бүйірлі үшбұрыштың периметрі 36-ға, қабырғаларынан бірі болса 16-ға тең. Үшбұрыштың қалған екі қабырғасының ұзындықтарын тап.
А)16 және 4
Б)10 және 10
В) 10 және 10 немесе 16 және 4
Г) Мұндай үшбұрыш жоқ.
- AC кесіндінің ұзындығын тап (4-сурет).
А) 6 Б) 8 В) 12 Г) 10,5



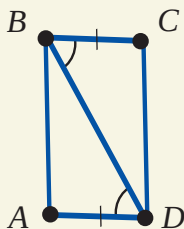
5



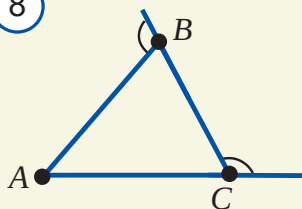
6



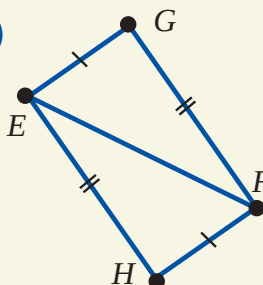
7



8



9



7. Үшбұрыштың неше медианасы бар?

- А) бір Б) екі В) үш Г) алты

8. Үшбұрыш биссектрисасы қандай пішін?

- А) кесінді Б) сәуле В) түзу сызық Г) нүкте

9. Үшбұрыштың қайсы элементі оның сыртқы аймағында жатуы мүмкін?

- А) медианасы Б) биіктігі В) биссектрисасы
Г) диагоналы

10. «Егер үшбұрыштың екі бұрышы тең болса, бұл үшбұрыш тең бүйірлі болады», деген тұжырымды қалай атау мүмкін?

- А) түсінік Б) қасиет В) белгі Г) аксиома

11. 5-суреттегі ABC мен FED үшбұрыштары тең бе?

- А) иә Б) жоқ

12. 6-суреттегі қайсы үшбұрыш тар өзара тең?

- А) $\triangle KLM = \triangle LMH$ Б) $\triangle KLM = \triangle LHM$
В) $\triangle KLM = \triangle KLH$ Г) еш қайсысы

13. 7-суреттегі ABD мен CDB үшбұрыштар қайсы белгіге негізделіп тең болады?

- А) Үшбұрыштар теңдігінің ҚБҚ белгісіне орай
Б) Үшбұрыштар теңдігінің БҚБ белгісіне орай
В) Үшбұрыштар теңдігінің ҚҚҚ белгісіне орай
Г) Бұл үшбұрыштар тең емес

14. 8-суретке қарап үшбұрыш түрін анықта.

- А) тең қабырғалы Б) тең бүйірлі
В) доғал бұрышты Г) ештеңе айтып болмайды

15. 9-суреттегі мәліметтерге орай төмендегі теңдіктерден дұрыс емесін тап.

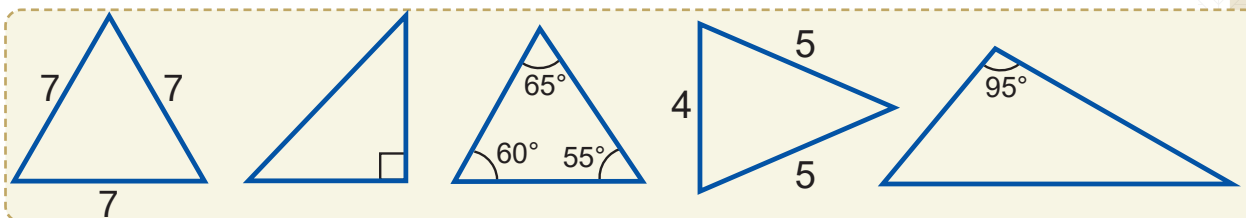
- А) $\angle GEF = \angle HFE$ Б) $\angle EGF = \angle FHE$
Д) $\angle ENF = \angle FEG$ Е) $\angle EFH = \angle GEF$

16. Периметрі 12 cm болған үшбұрыштардың биіктігі оны периметрі 7 cm және 9 cm болған үшбұрыштарға бөледі. Биіктік ұзындығын тап.

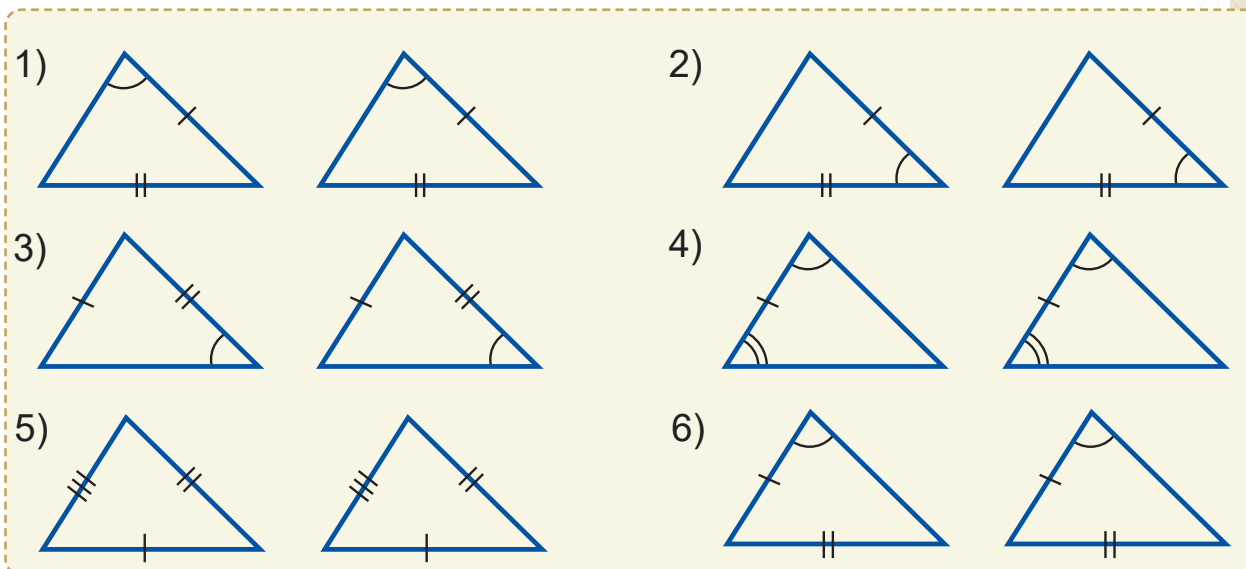
- А) 2 cm Б) 3 cm В) 1 cm Г) 4 cm .

6. Есептер.

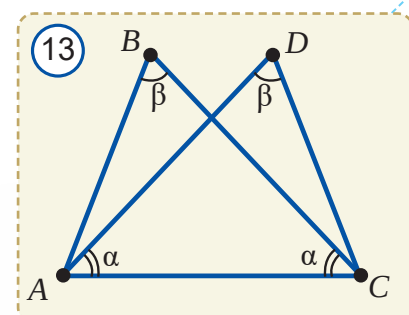
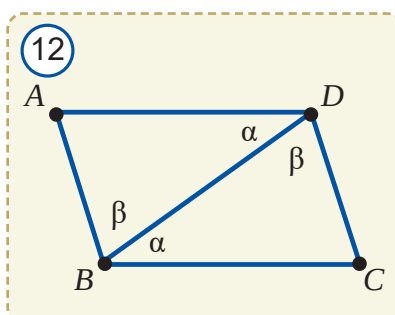
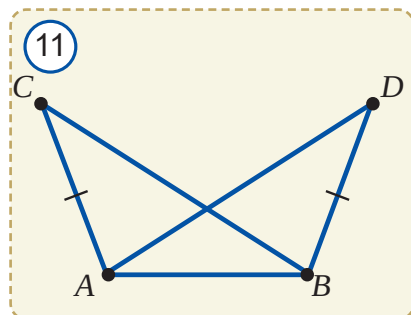
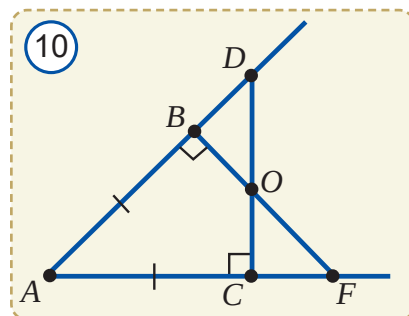
1. Суретте берілген мәліметтер негізінде үшбұрыштардың түрлерін анықта.



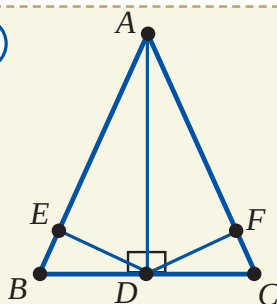
2. Төменде келтірілген үшбұрыштар жұптарынан қайсылары өзара тең болады? Қайсы белгісіне орай?



3. 10-суретте $\triangle ACD = \triangle ABF$ екендігін дәлелде.
4. Егер 11-суретте $\angle CAB = \angle ABD$ болса, $AD = BC$ екендігін көрсет.
5. 12-суретте $\triangle ABD = \triangle BCD$ болуын дәлелде.
6. 13-суретте $\triangle ABC = \triangle ADC$ болуын дәлелде.
7. Егер $\triangle ABC$ мен $\triangle POR$ де $AB = PO$, $AC = PR$ мен $BC = OR$ болса, $\triangle ABC$ мен $\triangle POR$ тең болады ма?



14



8. Егер 14-суретте $BD=DC$, $AE=AF$ болса, барша тең үшбұрыштар жұптарын анықта және негізделген.

9. 16-суретте $\triangle ABC = \triangle EFD$ болуын дәлелде.

10. 17-суретте $AD = CE$ екендігін дәлелде.

11. 18-суретте мәліметтерге орай x -ті тап.

12. AE және BD кесінділер C нүктеде қиылысады. Егер $DC = DE$, $AB = BC$ және $\angle BAC = 48^\circ$ болса, $\angle CED$ -ті тап.

13. ABC үшбұрыш ішінде D нүкте алынған. Егер $AC = AB$, $CD = BD$ және $\angle BDA = 120^\circ$ болса, $\angle ADC$ -ті тап.

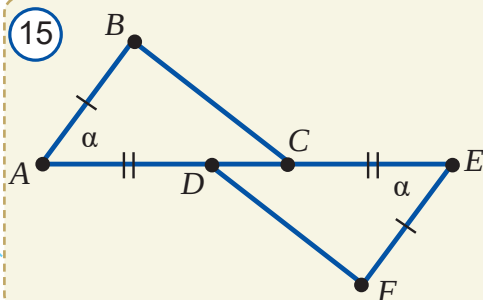
14. Егер үшбұрыштардың біреу биссектрисасы оның биіктігі де болса, бұл үшбұрыш тең бүйірлі үшбұрыш болуын дәлелде.

15. Егер үшбұрыштардың біреу биіктігі оның биссектрисасы да болса, бұл үшбұрыш тең бүйірлі үшбұрыш болуын дәлелде.

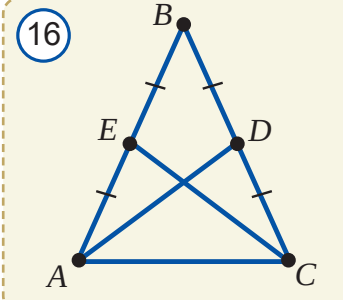
16. Егер үшбұрыштардың біреу медианасы оның биіктігі де болса, бұл үшбұрыш тең бүйірлі үшбұрыш болуын дәлелде.

17. Екі үшбұрыштың әр үш бұрыштары сәйкесінше тең болса, олардың сәйкес қабырғалары да өзара тең болады ма?

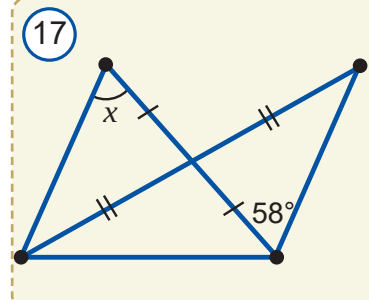
15



16

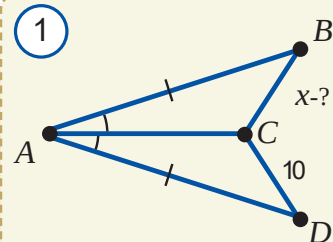


17



3 – бақылау жұмысы үлгісі

1



Бақылау жұмысы екі бөліктен тұрады:

1) 93-94 беттердегі тест сұрақтарына ұқсас 5 тест;

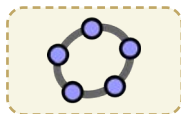
2) Төмендегі есептерге ұқсас 3 есеп (4-есеп «үздік» баға алмақшы болған оқушылар үшін қосымша).

1. 1-суреттегі берілген мәліметтер бойынша белгісіз кесіндіні тап.

2. AB мен CD кесінділер O нүктеде қиылысады. Егер $\angle CAB = \angle ABD$ және $AO = BO$ болса, $\angle ACO = \angle BDO$ екендігін дәлелде.

3. Тең бүйірлі үшбұрыштардың периметрі $18,4 \text{ м}$ -ге тең, негізі болса бүйір қабырғасынан $3,6 \text{ м}$ -ге қысқа. Бұл үшбұрыштардың қабырғаларын тап.

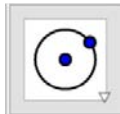
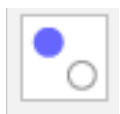
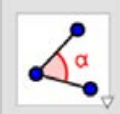
4*. Үшбұрыштар теңдігін екі қабырғасы және осы қабырғалардың біріне түсірілген медианалары теңдігіне орай дәлелде.



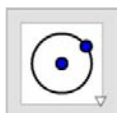
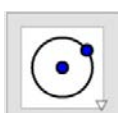
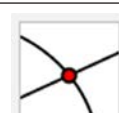
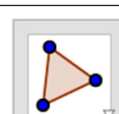
«GeoGebra» практикалық тапсырмаларды орындау.

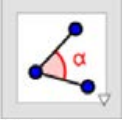
Керекті компоненттер

- Жасауды бастаудан алдын тең қабырғалы қасиеттерді еске түсір.
- GeoGebraда жаңа айна аш.
- GeoGebra интерфейсін **Настройки** –  **Геометрия** көрінісіне өткіз.
- GeoGebra құралдар панеліндегі керекті құралдар.

	Окружность C центром через точку Ескерту. Тінтуірді бір рет басу арқылы шеңбер орталығын, екінші рет басу арқылы шеңбер радиусын белгіле.
	Показывать объект Ескерту. Жасырын жағдайда өткізу керек болған объекті таңда
	Угол Ескерту. Үш нүктені сағат стрелкасына қарсы бағытта белгіле және керекті бұрышты жаса.

Тең қабырғалы үшбұрыш жасау алгоритмі

1		AB кесінді жаса.
2		Орталығы B нүктеде болған шеңбер сыз.
3		Орталығы A нүктеде болған B нүктеден өтетін шеңбер сыз.
4		Екі шеңбер кесіндісі нүктелерін белгіле.
5		ABC көпбұрышты сағат стрелкасына қарсы бағыт бойлап жаса.
6		Екі шеңбер жасырын жағдайға өткіз.

7		Үшбұрыштардың ішкі бұрыштарын оның қабырғаларына басу арқылы көрсет. Ескерту. Тінтуірді сағат стрелкасы бойлап әрекеттендіру арқылы үшбұрыштың ішкі бұрыштарын тап.
8	 Сохранить	Өзгертіруді сақтау.
9	 Перемещать	Перемещать – құралынан пайдаланып түзу тік бұрыш дұрыс орындалғанын тексер.

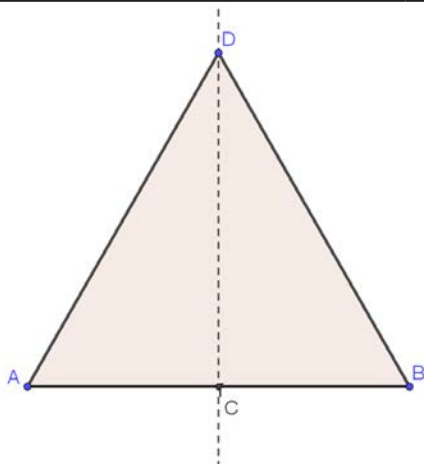
Өздігінше орындау үшін тапсырма

Тең бүйірлі үшбұрыш жасау

Негізі мен биіктік ұзындығын тінтуірмен жылжытып өзгертіру мүмкін болған тең бүйірлі үшбұрыш жаса.

Осы тапсырманы орындау үшін саған төмендегі құралдар керек болады:

 Отрезок	Кесінді жасау
 Середина или центр	Кесінді немесе екі нүкте ортасын табу
 Перпендикулярная прямая	Берілген нүкте арқылы түзу сызық немесе кесіндіге перпендикуляр өткізу
 Точка	Жазықтықта нүкте жасау
 Многоугольник	Көпбұрыш жасау
 Перемещать	Графикалық объекті тінтуірмен жылжытып динамикалық түрде өзгерту





III ТАРАУ

ПАРАЛЛЕЛЬ ТҮЗУ СЫЗЫҚТАР

Бұл тарауды меңгерген соң, төмендегі білім мен практикалық дағдыларға ие боласыз:

Білім:

- параллель түзу сызықтардың түсінігі мен қасиеттері;
- екі түзі сызықты кесуші мен кесіндіде пайда болатын бұрыштардың түрлері және оларды сызбада ажырата білу;
- екі түзу сызықтың параллельдік белгісі;
- берілген теоремаға кері болған теореманы өрнектей білу.

Практикалық дағдылар:

- үшбұрышты және жай сызғыш көмегінде параллель түзу сызықтарды жасай білу;
- екі түзу сызықты кесуші мен кесіндіде пайда болатын бұрыштарды сызбада көрсетіп бере алу;
- параллель түзу сызықтардың және екі түзу сызықтың параллельдік белгілерін есептер шешуде пайдалану.

14 ПАРАЛЛЕЛЬ ТҮЗУ СЫЗЫҚТАР

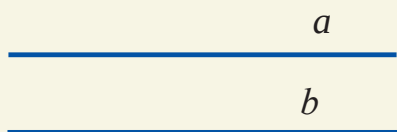
14.1. Түзу сызықтардың параллельдігі



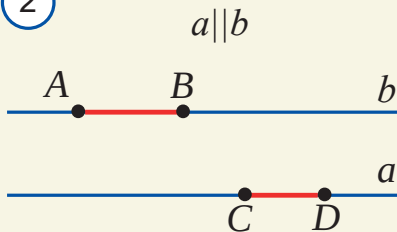
Белсендіруші жаттығу

Егер екі түзу сызық бір түзу сызыққа перпендикуляр болса, олар өзара қиылысуы мүмкін бе? Жауабыңды негізде.

1



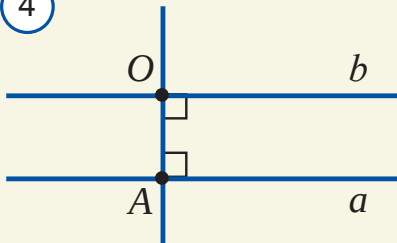
2



3



4



Бір жазықтықта жатқан және өзара қиылыспайтын түзу сызықтар **параллель түзу сызықтар** деп аталады. 1-суретте параллель түзу сызықтар бейнеленген. a мен b түзу сызықтардың параллельдігі $a \parallel b$ түрінде жазылады және қысқаша « **a түзу сызық b түзу сызыққа параллель**» деп оқылады.

Параллель түзу сызықтарда жатқан кесінділер (сәулелер) **параллель кесінділер** (сәулелер) деп жүргізіледі. 2-суретте параллель кесінділер бейнеленген.

Параллель сызықтарды өмірде көп кездестіргенсін. Мысал үшін, темір жол рельстері (3-сурет), тік төртбұрыш пішініндегі столдың қарама-қарсы қырлары, тор дәптер парағындағы горизонталь немесе вертикаль сызықтар және т.б.

Сонымен, анықтама бойынша түзулер параллель болуы үшін олар бір жазықтықта жатуы және ортақ нүктеге ие болмауы, яғни қиылыспауы керек.

49-бетте алдын дәлелденген теореманы енді төмендегіше өрнектеуге болады:



Теорема. Бір түзуге перпендикуляр болған екі түзу өзара параллель.

Есеп. a түзу сызыққа тиісті болмаған O нүктеден оған параллель түзу сызық өткізу мүмкіндігін көрсет.

Шешуі. 57-бетте дәлелденген теоремаға орай, O нүктеден a түзу сызыққа перпендикуляр OA түзу сызық өткіземіз (4-сурет). Кейін O нүктеден OA түзу сызыққа, тағы сол теоремаға орай, перпендикуляр b түзу сызықты өткіземіз. Нәтижеде $a \perp OA$ және $OA \perp b$, яғни OA түзу сызыққа ие боламыз. Онда жоғарыдағы теоремаға орай, a мен b түзу сызықтар өзара параллель болады, яғни b ізделінген түзу сызық.



Геометриялық зерттеу

A сәуле алып, оған AB кесінді қой (5-сурет). A мен B тік бұрыштарын A сәуледен бастап дайын жарты жазықтыққа қой. Бұл бұрыштар қабырғаларына бір-біріне тең болған AD мен BC кесінділерін қой. Кейін DC кесіндіні өткіз. Нәтижеде «Саккери төртбұрышы» деп аталған төртбұрышқа ие боласың. Бұл төртбұрыш қандай қасиеттерге ие? Оның дұрыс төртбұрыш екендігін дәлелдеуге ұрынып көр және қорытынды шығар.

Белгілі болуынша, Саккери төртбұрышында: а) диагональдары өзара тең; $AC = BD$; б) $\angle ADC$ мен $\angle DCB$ да өзара тең. Бұл қасиеттерді өздігіңше дәлелде.

Бірақ $\angle ADC$ мен $\angle DCB$ -тардың 90° -қа теңдігін дәлелдеудің еш мүмкіндігі жоқ екен. Мұны дәлелдеу үшін параллельдік аксиомасы деп аталған қасиет керек болады. Түзу сызыққа онда жатпаған нүктеден неше параллель түзу сызық жүргізу мүмкін? Бұл сұрақтарға да параллельдік аксиома жауап береді. Төменде осы аксиомаға тоқталамыз.



Жазықтықта жатқан түзу сызыққа онда жатпаған нүктеден тек бір параллель түзу сызық жүргізу мүмкін.

Бұл тұжырымды аксиома ретінде дәлелсіз қабылдаймыз және оған кейінгі тармақтарда тағы тоқталып өтеміз. Параллель түзу сызықтарды практикада қарапайым және үшбұрышты сызғыштар көмегінде 6-суретте бейнеленген тәртіпте сызу мүмкін.



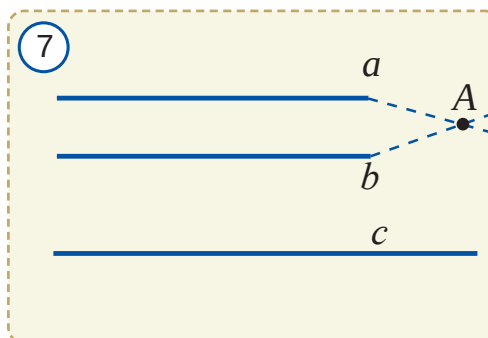
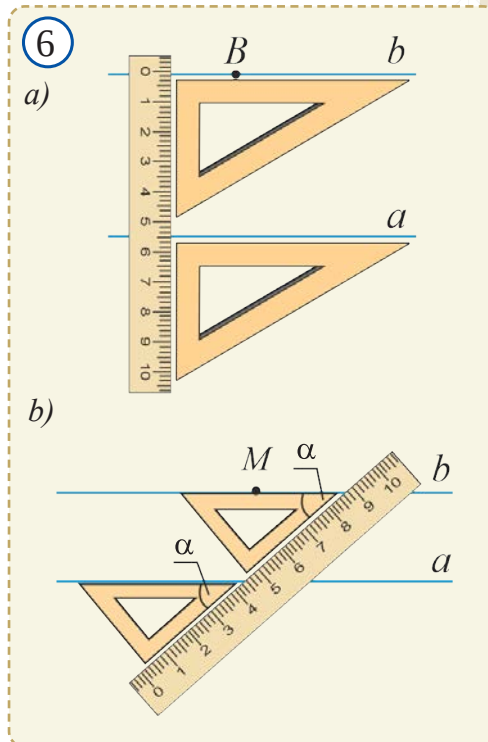
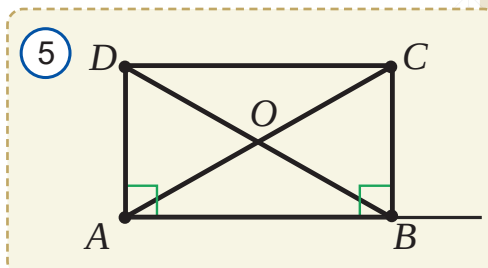
Теорема. Бір түзу сызыққа параллель болған екі түзу сызық өзара параллель.



a, b және c түзу сызықтар $a \parallel c, b \parallel c$.

Дәлелдеу. Ойлап көрейік, $a \parallel c$ мен $b \parallel c$ болса, a және b түзу сызықтар параллель болмасын. Онда олар бір A нүктеде қиылысады (7-сурет) және A нүктеден c түзу сызыққа екі a және b параллель түзу сызық өткізілген болып қалады. Бұл болса параллельдік аксиомасына қарсы. Демек, тұжырымымыз дұрыс емес: a мен b түзу сызықтар өзара параллель екен.

Теорема дәлелденді.



14.2. Екі түзу сызық пен кесінді пайда еткен бұрыштар

Жазықтықта берілген екі – a мен b түзу сызық үшінші – c түзу сызық пен қиылысқанда, 8 бұрыш пайда болады. 8-суретте көрсетілгендей сандармен белгілейік. Бұл бұрыштардың төмендегі жұптарын жеке аттармен айтамыз:

8

$\angle 3$ және $\angle 5$	] айнымалы бұрыштар
$\angle 4$ және $\angle 6$	
$\angle 4$ және $\angle 5$	] бір қабырғалы бұрыштар
$\angle 3$ және $\angle 6$	
$\angle 1$ және $\angle 5$	] сәйкес бұрыштар
$\angle 2$ және $\angle 6$	
$\angle 3$ және $\angle 7$	
$\angle 4$ және $\angle 8$	

Бұл бұрыштардың төмендегі қасиеттерін келтіреміз:

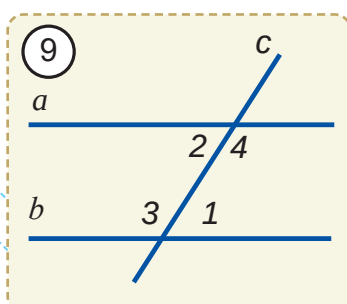
1-қасиет. Егер екі түзу сызық пен пайда еткен бір жұп айқыш бұрыштар өзара тең болса, екінші жұп айқыш бұрыштар да өзара тең болады.



a, b түзу сызықтар мен c қиюшы:
 $\angle 1 = \angle 2$ (9-сурет)



$$\angle 3 = \angle 4$$



Дәлелдеу. $\angle 2$ мен $\angle 4$ сыбайлас бұрыштар болғаны үшін:
 $\angle 2 + \angle 4 = 180$. Бұдан $\angle 4 = 180 - \angle 2$.

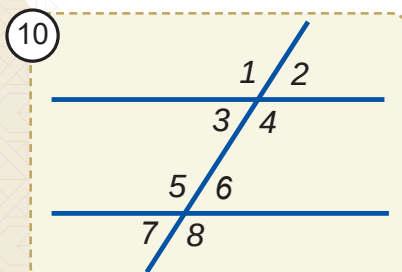
$\angle 1$ мен $\angle 3$ те сыбайлас бұрыш болғаны үшін:
 $\angle 1 + \angle 3 = 180$. Бұдан $\angle 3 = 180 - \angle 1$.

Шартқа орай, $\angle 1 = \angle 2$ екендігін есепке алсақ:
 $\angle 3 = 180 - \angle 1 = 180 - \angle 2 = \angle 4$.

Демек, $\angle 3 = \angle 4$. **Қасиет дәлелденді.**



2-қасиет. Егер сәйкес бұрыштар тең болса, бір қабырғалы бұрыштар қосындысы 180° -қа тең болады.



Дәлелдеу. Сәйкес бұрыштардан бір жұбы, мысалы $\angle 2 = \angle 6$ болсын (10-сурет). $\angle 6 + \angle 4 = 180^\circ$ екендігін дәлелдейміз. $\angle 2$ мен $\angle 4$ сыбайлас бұрыштар болғаны үшін $\angle 2 + \angle 4 = 180^\circ$ болады. Онда $\angle 2 = \angle 6$ болғаны үшін $\angle 6 + \angle 4 = 180^\circ$ екені келіп шығады.

Басқа бір қабырғалы бұрыштар қосындысы да 180° қа теңдігі осылайша дәлелденеді.

Қасиет дәлелденді.



3-қасиет. Егер алмасушы бұрыштар өзара тең болса, онда сәйкес бұрыштар да өзара тең болады.

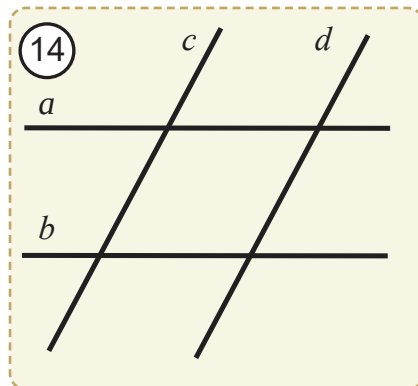
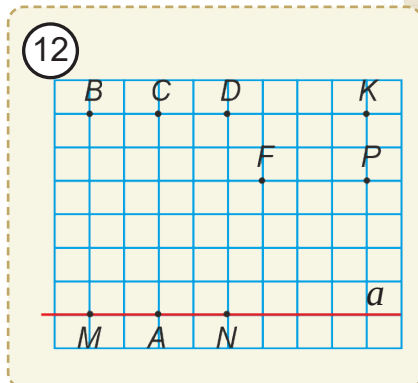
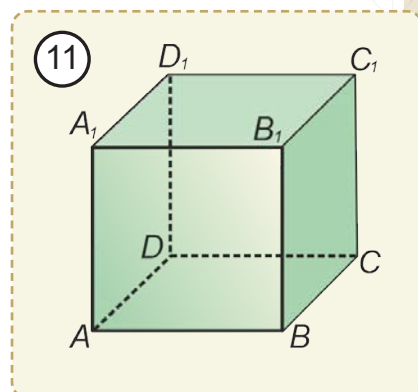
Дәлелдеу. $\angle 3$ пен $\angle 6$ айқыш бұрыштар болып, $\angle 3 = \angle 6$ болсын (10-сурет). Онда $\angle 3$ пен $\angle 2$ вертикаль бұрыштар болғаны үшін $\angle 3 = \angle 2$ болады.

Демек, сәйкес бұрыштар $\angle 6$ мен $\angle 2$ тең екен. Басқа сәйкес бұрыштар жұптарының теңдігі де осыған ұқсас дәлелденеді.

Қасиет дәлелденді.

Тақырыпқа байланысты сұрақтар

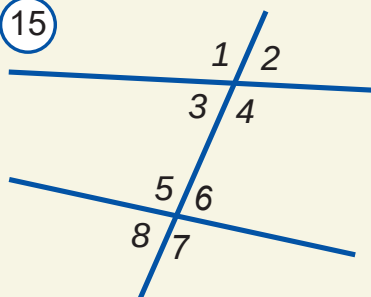
1. Қандай түзу сызықтар параллель болады?
2. Берілген түзу сызыққа жатпайтын нүкте арқылы осы түзу сызыққа параллель болған неше түзу сызық өткізу мүмкін?
3. Сынып бөлмесіне назар аудар және параллель кесінділерді анықта.
4. a мен b түзу сызық үшінші – c түзу сызық пен қиылысқанда қандай бұрыштардың жұптары пайда болады?
5. Қиылыспайтын екі кесіндіні параллель кесінділер десе болады ма? Қиылыспайтын екі сәулені ше?
6. Екі түзу сызық және кесінді пайда еткен бұрыштардың қандай қасиеттерін білесің?
7. 11-суретте кубтың өзара параллель қырларын анықта.
8. 12-суретте дәптер торынан пайдаланып, төмендегілерді анықта:
 - a түзу сызыққа перпендикуляр және A нүктеден өтуші түзу сызық тағы қайсы нүктеден өтеді?
 - a түзу сызыққа параллель және F нүктеден өтуші түзу сызық тағы қайсы нүктеден өтеді?
 - a түзу сызыққа параллель және K нүктеден өтуші түзу сызық тағы қайсы нүктеден өтеді?
9. 12-суретте дәптер торынан пайдаланып, төмендегі тұжырымдардың дұрыстығын тексер: а) $AB \perp a$; б) $BM \perp a$; в) $KP \perp a$; г) $FK \parallel a$; д) $BC \parallel a$; е) $KP \parallel a$.
10. Ағаш ұсталары 13-суретте бейнеленген «шайтан» деп аталушы құралдан қалай пайдаланады?



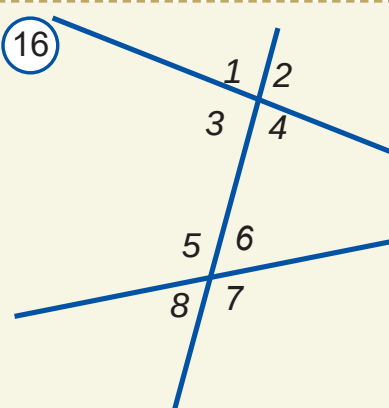
Практикалық жаттығу және қолдану.

1. Түзу сызық сызып, онда A , B және C нүктелерді белгіле. Сызғыш және үшбұрышты сызғыш көмегінде A нүктеден, B нүктеден және C нүктеден өтуші және бір-біріне параллель болған түзу сызықтарды өткіз.
2. 14-суреттегі параллель түзу сызықтардың жұптарын жаз.
3. Үшінші түзу сызыққа параллель түзу сызықтардың біреуін кесіп өтсе, екіншісін де кесіп өтеді ме? Жауабыңды негізде.
4. Егер түзу сызыққа параллель түзу сызықтарының біреуін кесіп өтсе, екіншісін де кесіп өтеді ме? Жауабыңды негізде.

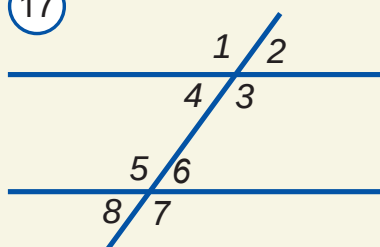
15



16



17

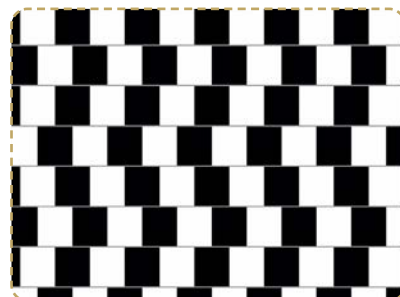
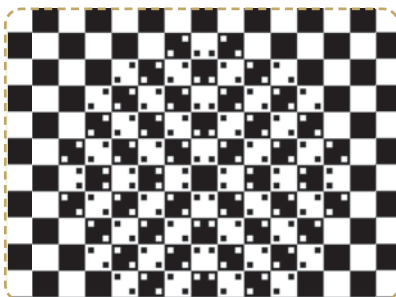
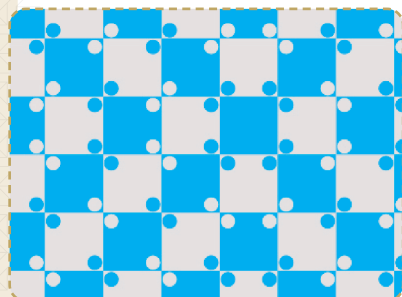


5. Тік төртбұрыштың қарама-қарсы қабырғалары өзара параллель екендігін көрсет.
6. Параққа екі түзу сызық сызылды. Егер парақ бұл сызықтар бойлап қырқылса, неше бөлек пайда болады.
7. Параққа екі түзу сызықты сондай сыз, парақ бұл сызықтар бойлап қырқылса, үш бөлек пайда болсын.
8. 15-суретте бұрыштардан қайсылары вертикаль және қайсылары сыбайлас бұрыш болады?
9. Егер 16-суретте: а) $\angle 4 = \angle 8 = 63^\circ$; б) $\angle 1 = \angle 6 = 63^\circ$ болса, қалған бұрыштарды тап.
10. Егер 17-суретте: $\angle 2 = \angle 6 = 63^\circ$ қалған бұрыштарды тап.
11. Егер 17-суретте: $\angle 1 = \angle 7 = 122^\circ$ қалған бұрыштарды тап.
12. Егер екі түзу сызықты үшінші түзу сызықпен қиғанда пайда болған бұрыштардан бірі 82° және тағы біреуі 110° болса, қалған бұрыштарды тап.
- 13*. Егер екі түзу сызықты үшінші түзу сызықпен қиғанда пайда болған бұрыштардан бірі 32° және тағы біреуі 134° болса, қалған бұрыштарды тап.
- 14*. Егер 17-суретте: $\angle 3 = \angle 5$ болса, $\angle 2 = \angle 8$ және $\angle 4 = \angle 6$ болады ма? Жауабыңды негізде.
15. Егер 17-суретте: $\angle 1 = \angle 7$ болса, $\angle 3 = \angle 5$ және $\angle 4 = \angle 6$ теңдіктер орындалады ма? Жауабыңды негізде.
- 16*. Бір қабырғалы бұрыштар өзара тең болуы мүмкін бе?
- 17*. Айнымалы бұрыштар тең болса, бір қабырғалы бұрыштар қосындысы 180° -қа теңдігін көрсет.

18*. Бір қабырғалы бұрыштар қосындысы 180° -қа тең болса, айқын бұрыштар тең болады ма?

19. Егер екі түзу сызық және кесінді пайда еткен бір жұп сәйкес бұрыштар өзара тең болса, екінші жұп сәйкес бұрыштар да тең болуын дәлелде.

Геометриялық иллюзия. Төмендегі суреттерде горизонталь және вертикаль сызылған сызықтар параллель ме? Мұны сызғыш көмегінде тексерсең, өз көздеріңе сенбестен таң қаласың.



15

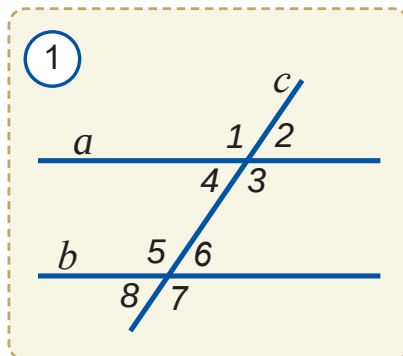
ЕКІ ТҮЗУ СЫЗЫҚТЫҢ ПАРАЛЛЕЛЬ ҚАСИЕТТЕРІ



Белсендіруге жаттығу

1-суретте a мен b параллель түзу сызықтар және c кесінді бейнеленген. Төмендегі тапсырмаларды орында және сұрақтарға жауап бер.

1. Барлық айнымалы бұрыштар жұптарын жаз және оларды транспортирде өлше. Әрбір жұп айнымалы бұрыштардың градус өлшемдері туралы не дейсің?
2. Барлық бір қабырғалы бұрыштардың жұптарын жаз және оларды транспортирде өлше. Әрбір жұп алмасушы бұрыштардың градус өлшемдері туралы не дейсің?
3. Барлық сәйкесінше барлық бұрыштар жұптарын жаз және оларды транспортирде өлше. Әрбір жұп бір сәйкесінше бұрыштардың градус өлшемдері туралы не дейсің?
4. Жоғарыда анықталған мүмкіндіктер әрқашан орынды болады ма?



Екі түзу сызықтың параллельдігін қандай анықтау мүмкін? Төмендегі, екі түзу сызықтың параллельдік белгілері, деп аталған теоремалар бұл сұраққа жауап береді.



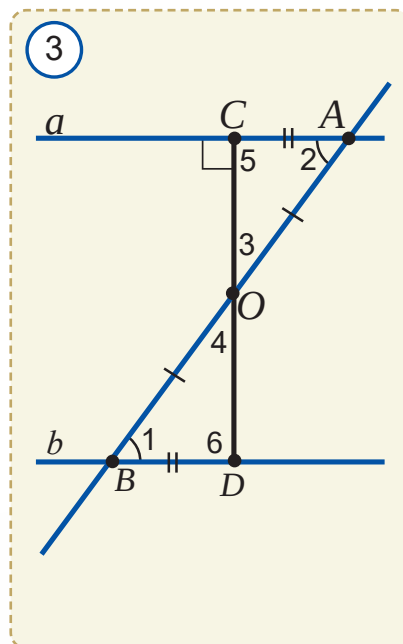
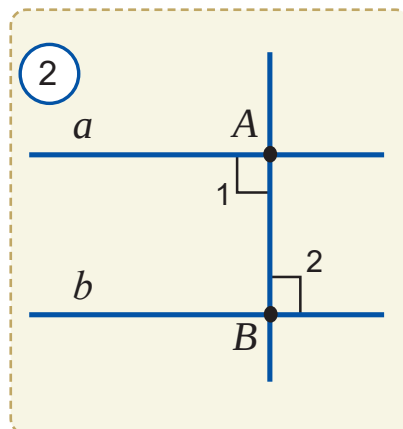
Теорема. Егер екі түзу сызық және кесінді пайда еткен айнымалы бұрыштар тең болса, онда бұл екі түзу сызық параллель болады.

Дәлелдеу. 1. Алдын $\angle 1$ мен $\angle 2$ тік бұрыш болған жағдайды қараймыз (2-сурет). Бұл жағдайда AB түзу сызық a мен b түзу сызықтар бір түзу сызыққа перпендикуляр болған екі түзу сызық туралы теорема негізінде өзара параллель болады (100-беттегі теоремаға қара).

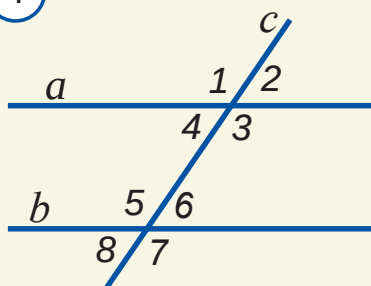
2. Енді $\angle 1$ мен $\angle 2$ тік бұрыш болмаған жағдайды көреміз: AB кесіндінің ортасы ($AO = BO$) O нүктеден A түзу сызыққа OC перпендикуляр түсіреміз (3-сурет). b түзу сызыққа B нүктеден ұзындығы AC қа тең BD кесінді қоямыз. AOC мен BOD үшбұрыштарды қараймыз.

Оларда шартқа орай $\angle 1 = \angle 2$, жасауына қарай, $AC = BD$ мен $AO = BO$.

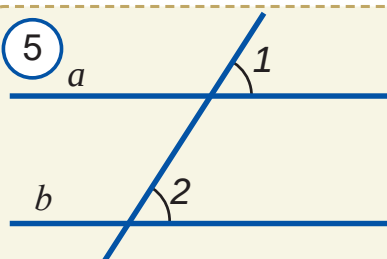
Онда үшбұрыштар теңдігінің ҚБҚ белгісіне қарай $\angle AOC = \angle BOD$ болады. Негізінен, $\angle 3 = \angle 4$, және $\angle 5 = \angle 6$ болады.



4

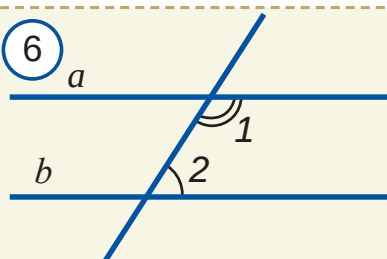


5



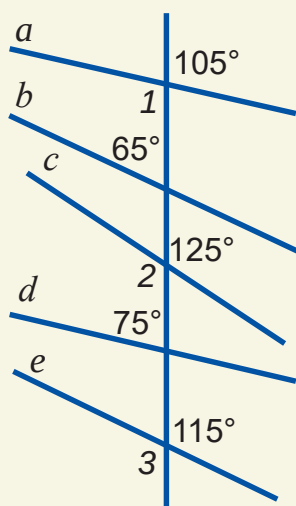
$$\angle 1 = \angle 2 \Rightarrow a \parallel b$$

6



$$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ \Rightarrow a \parallel b$$

7



$\angle 3 = \angle 4$ екендігінен D нүкте CO сәуленің жалғасында жатуы, яғни C, O мен D нүктелер бір түзу сызықта жатуы келіп шығады.

$\angle 5 = \angle 6$ екендігінен, $\angle 6$ да $\angle 5$ сияқты тік бұрыш екендігі келіп шығады. Сөйтіп, a мен b түзу сызықтар бір CD түзу сызыққа перпендикуляр екен.

Демек, олар өзара параллель болады.

Теорема дәлелденді.

Есеп. Егер 4-суретте $\angle 2 = 55^\circ$ және $\angle 5 = 125^\circ$ болса, a мен b түзу сызықтар өзара параллель болады ма?

Шешуі. $\angle 2$ мен $\angle 4$ вертикаль бұрыштар болғаны үшін $\angle 4 = \angle 2 = 55^\circ$. $\angle 5$ және $\angle 6$ сыбайлас болғаны үшін $\angle 6 = 180^\circ - \angle 5 = 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ$. Нәтижеде, айнымалы бұрыштар өзара тең екендігін анықтаймыз: $\angle 4 = \angle 6$.

Демек, жоғарыда дәлелденген екі түзу сызықтың параллельдік белгісіне орай, a мен b түзу сызықтар параллель болады.

Жауабы. Иә.

Теоремадан турадан-тура келіп шығатын қасиетке **нәтиже** деп айтылады. Алдыңғы тақырыпта (**102-бетте**) келтірілген 1-, 2-, және 3-қасиеттерден төмендегі нәтижелер келіп шығады.

1-нәтиже. Егер екі түзу сызық және кесінді пайда еткен сәйкес бұрыштар тең болса, ол жағдайда бұл екі түзу сызық параллель болады (5-сурет).

2-нәтиже. Егер екі түзу сызық және кесінді пайда бір қабырғалы бұрыштар қосындысы 180° -қа тең болса, ол жағдайда бұл екі түзу сызық параллель болады (6-сурет).

Есеп. 7-суретте түзу сызықтардың қайсылары параллель?

Шешілуі. Вертикаль бұрыштар теңдігінен, $\angle 1 = 105^\circ$, $\angle 2 = 125^\circ$, $\angle 3 = 115^\circ$. a мен b түзу сызықтар параллель емес, өйткені $\angle 1 + 65^\circ = 105^\circ + 65^\circ \neq 180^\circ$.

$a \parallel d$ болады, өйткені $\angle 1 + 75^\circ = 105^\circ + 75^\circ = 180^\circ$ (2-нәтижеге қара).

Дәл осындай $b \parallel e$ болады, өйткені

$$65^\circ + \angle 3 = 65^\circ + 115^\circ = 180^\circ.$$

a , c мен e түзу сызықтар өзара параллель емес, өйткені сәйкес бұрыштар тең емес (1-нәтижеге қара).

Дәл осындай b мен d түзу сызықтарда параллель емес, өйткені сәйкес бұрыштар тең емес; $65^\circ \neq 75^\circ$.

Жауабы: $a \parallel d$, $b \parallel e$.

Есеп. 8-суретте $a \parallel d$, параллель болады ма?

Шешілуі. Вертикаль бұрыштардың қасиеттеріне орай $x = 36^\circ$. Онда $\alpha = 4x = 4 \cdot 36^\circ = 144^\circ$ болады. Бір жақты бұрыштар қосындысы $x + \alpha = 36^\circ + 144^\circ = 180^\circ$.

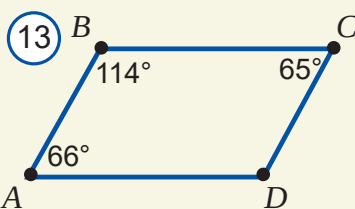
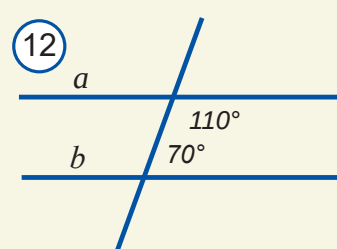
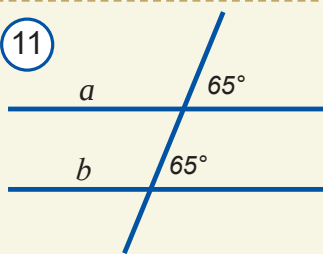
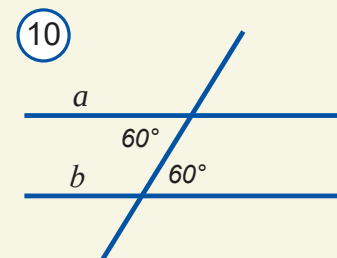
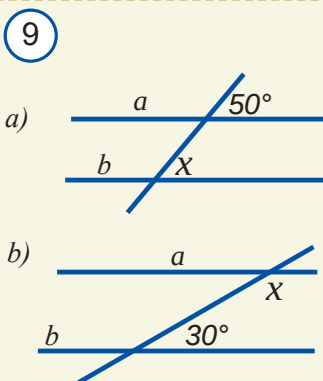
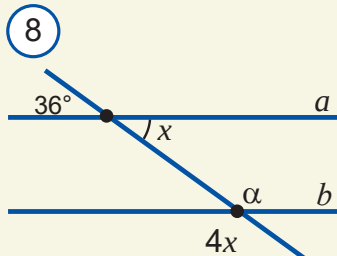
Демек, 2-нәтижеге орай $a \parallel d$ болады.

Тақырыпқа байланысты сұрақтар

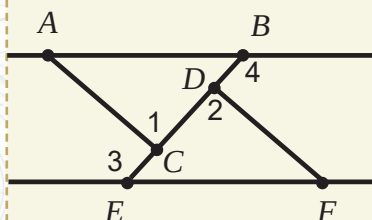
1. Екі түзу сызықтың параллельдігін қалай анықтау мүмкін?
2. Белгі деп неге айтылады? Мысал келтір.
3. Екі түзу сызықтың параллельдік белгілерін түсінтір.
4. Нәтиже деп неге айтылады? Мысал келтір.

Практикалық тапсырма және қолдану

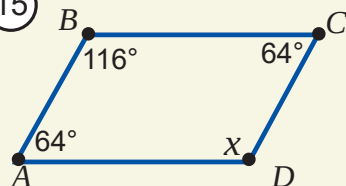
1. 9-суретте a мен b түзу сызықтар параллель болуы үшін белгісіз бұрыш неше градус болуы керек?
2. 10-суретте $a \parallel d$ болуын көрсет.
3. 10-суретте келтірілген есепке ұқсас есеп түз және оны шеш.
4. 11-суретте $a \parallel d$ болуын көрсет.
5. 12-суретте $a \parallel d$ болуын көрсет.
6. 11-12 – суреттерде келтірілген есептерге ұқсас есеп түз және оны шеш.
7. Егер 1-суретте: а) $\angle 1 = 132^\circ$, $\angle 8 = 48^\circ$, б) $\angle 2 = 36^\circ$, $\angle 5 = 144^\circ$, болса, $a \parallel d$ болады ма?
8. Егер 1-суретте: а) $\angle 3 = 113^\circ$, $\angle 6 = 77^\circ$, б) $\angle 1 + \angle 7 = 180^\circ$, болса, $a \parallel d$ болады ма?
- 9*. 13-суреттегі төртбұрыштардың қайсы қабырғалары параллель болады?
- 10*. а) Түзу сызық және онда жатпайтын K нүкте берілген. K нүкте арқылы төрт түзу сызық жүргізілді. Бұл түзу сызықтардан нешеуі a түзу сызықпен қиылысады?
11. Егер 14-суретте: а) $\angle 3 = \angle 4$, $BD = CE$, $AB = EF$; б) $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, $BD = CE$; в) $AB = EF$, $BD = EC$, $AC = FD$ болса, $\angle ABC = \angle EFD$ екендігін көрсет.
12. Екі түзу сызықтың кесушісі мен қиылысқанда болған бұрыштардың бірі: а) 32° және оған сәйкес болған бұрыш болса 33° -қа; б) 47° және оған сәйкес болған бұрыш болса 133° -қа тең болса, бұл түзу сызықтар параллель болады ма?



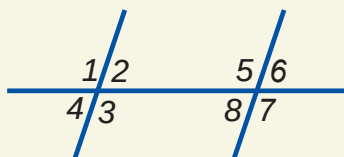
14



15



16



14. 15-суретте белгісіз бұрыштарды тап.

15. Егер 16-суретте $\angle 1 = \angle 5 = 105^\circ$ болса, қалған бұрыштарды тап.

16. Егер 17-суретте $\angle 3 = 60^\circ$, $\angle 8 = 120^\circ$ болса, қалған бұрыштарды тап.

17*. a мен b параллель түзу сызықтарды c түзу сызықпен қиылысқанда пайда болған айнымалы бұрыштардың биссектрисалары параллель екендігін көрсет (18-сурет).

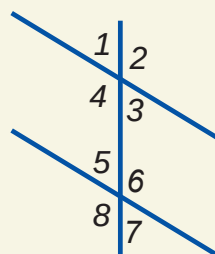
18. 19-суретте параллель түзу сызықтарды анықта.

19. 20-суретте параллель түзу сызықтарды анықта.

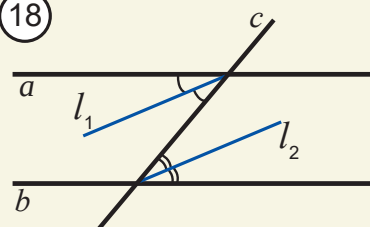
20. 21-суретте параллель түзу сызықтарды анықта.

21*. Түзу сызықтардың параллельдік белгілеріне байланысты есептер түз және оларды шеш.

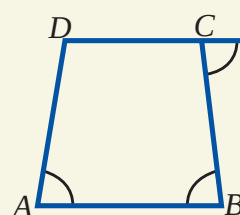
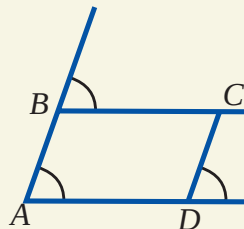
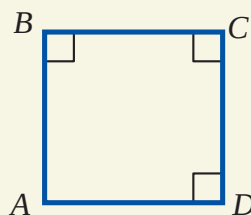
17



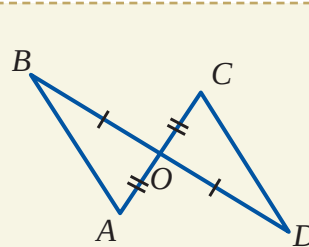
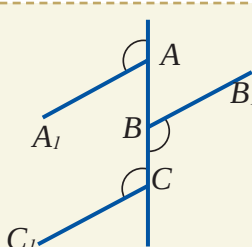
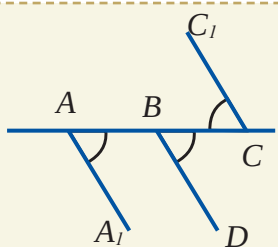
18



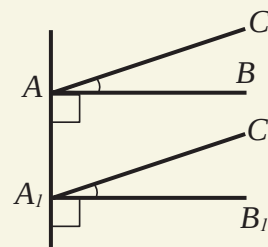
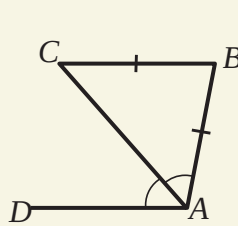
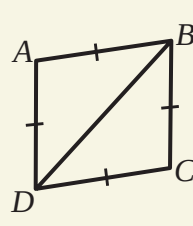
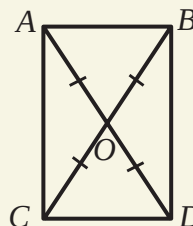
19



20



21



16

ЕКІ ПАРАЛЛЕЛЬ ТҮЗУ СЫЗЫҚ ЖӘНЕ КЕСІНДІСІН ПАЙДА ЕТКЕН БҰРЫШТАР

16.1. Кері теорема

Егер теореманың шарты мен қасиеттерінің орны ауыстырылса, жаңа тұжырым пайда болады ма? Егер бұл тұжырым да түзу болса (яғни оны дәлелдеуге болса), ол берілген теоремада кері теорема деп аталады. Берілген теорема болса дұрыс теорема деп айтылады.

Дұрыс теорема:

Егер **А тұжырым** орынды болса, **Б тұжырым** орынды болады.

Қысқаша: $A \Rightarrow B$.

Кері теорема:

Егер **Б тұжырым** орынды болса, **А** орынды болады.

Қысқаша: $B \Rightarrow A$.

Есеп. «Егер үшбұрыш тең бүйірлі болса, оның табанындағы бұрыштар тең болады – деген теоремаға кері теорема тамендегіден тұрады: **Егер үшбұрыштың екі бұрышы тең болса, ол тең бүйірлі үшбұрыш болады.**

1-жаттығу.

Жоғарыда келтірілген кері теорема үшбұрыштың тең бүйірлі болу белгісі деп айтылады.

Айтып кету керек, әр қашан да берілген дұрыс теоремаға кері болған тұжырым орынды бола бермейді.

Мысалы, «Егер бұрыштар вертикаль болса, олар тең болады» деген теоремаға кері «Егер бұрыштар тең болса, олар вертикаль болады» деген тұжырым дұрыс емес.

Егер тік және вертикаль теореманың әр екеуі де дұрыс болса, бұл тұжырым **өзара тең күшті** деп аталады. Бұл қысқаша $A \Leftrightarrow B$ түрінде жазылады.

2-жаттығу.

1. «Егер жаңбыр жауса, аспанда бұлт болады» деген тұжырымға кері дәлелді түз. Пайда болған кері дәлелді әрқашан дұрыс болсын немесе болмастығын түсіндір.

2. Төмендегі дұрыс теоремаларға кері теоремаларды дұрыс немесе дұрыс еместігін тексер.

- Бір түзу сызыққа перпендикуляр болған екі түзу сызық өзара қиылыспайды.
- Егер екі үшбұрыш тең болса, олардың сәйкес қабырғалары тең болады.
- Егер сыбайлас бұрыштар өзара тең болса, олар тік бұрыш болады.
- Бір түзу сызыққа параллель болған екі түзу сызық параллель.

3. Өзара тең күшті тұжырымдарға мысалдар келтір.

16.2. Екі параллель түзу сызық пен кесінді пайда болатын бұрыштар

Төменде екі түзу сызықтың параллельдік белгілеріне кері болған теоремаларға тоқталамыз.



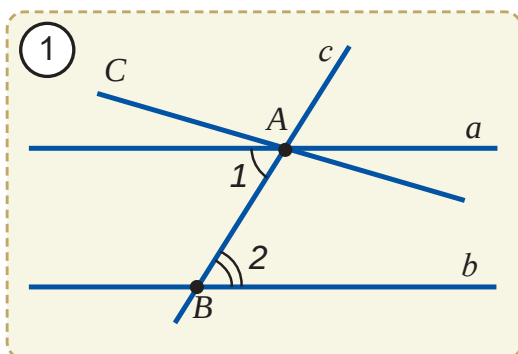
1-теорема. Екі параллель түзу сызық пен кесінді пайда еткен айнымалы бұрыштар өзара тең болады.



$a \parallel b$, c – кесінді (1-сурет)



$\angle 1 = \angle 2$



Дәлелдеу. Кері ойлаймыз: $\angle 1 \neq \angle 2$ болсын. AB сәулеге $\angle 2$ -ге тең болған CAB бұрышын қоямыз. Олай болса, CA мен b түзу сызықтарды AB кесіндімен қиғанда, бір-біріне тең (салуына орай) айнымалы $\angle CAB$ және $\angle 2$ бұрыштарға ие боламыз.

Демек, CA мен b түзу сызықтар өзара параллель болған екі (CA мен a) түзу сызыққа ие боламыз.

Бұл болса параллельдік аксиомасына қайшы келеді. Демек, тұжырым дұрыс емес, $\angle 1 = \angle 2$ екен.

Теорема дәлденді.

Нәтиже. Егер екі түзу сызық параллель түзу сызықтардан біріне перпендикуляр болса, екіншісіне де перпендикуляр болады.

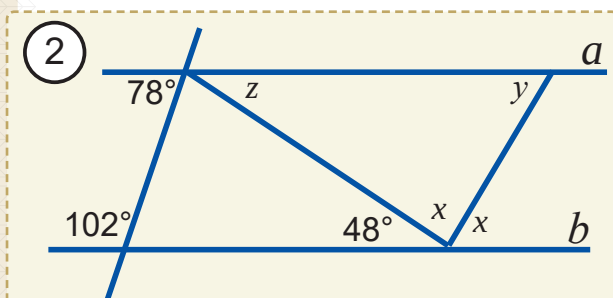
Нәтиже түрінде келтірілген тұжырым дұрыстығын өз бетіңше тексеріп көр.



2-теорема. Екі параллель түзуді қиюшы қиып өткенде пайда болған сәйкес бұрыштар өзара тең болады.



3-теорема. Екі параллель түзуді қиюшы қиып өткенде пайда болған тұтас бұрыштардың қосындысы 180° -қа тең болады.
Теореманы өз бетіңше дәлелдеуге әрекет жаса.



Есеп. 2-суретте белгісіз бұрышты тап.

Шешілуі. Бір қабырғалар қосындысы $78^\circ + 102^\circ = 180^\circ$ болғаны үшін $a \parallel b$ болады. Демек, 1-теоремаға орай, $z = 48^\circ$ va $x = y$ болады. $x + x + 48^\circ = 180^\circ$ болғаны үшін (жазыңқы бұрыштар үлкендігі) $x = 66^\circ$. Демек, $y = 66^\circ$.

Жауабы: $x = 66^\circ$; $y = 66^\circ$; $z = 48^\circ$.

Есеп. 3-суретте $a \parallel b$, $c \parallel d$. Төмендегі теңдіктердің қайсылыры дұрыс?

1) $\angle 1 = \angle 15$; 2) $\angle 3 = \angle 13$; 3) $\angle 4 = \angle 16$; 4) $\angle 4 = \angle 8$; 5) $\angle 1 = \angle 12$; 6) $\angle 7 = \angle 10$;

- 7) $\angle 8 = \angle 16$; 8) $\angle 8 = \angle 11$; 9) $\angle 4 + \angle 13 = 180^\circ$;
 10) $\angle 6 + \angle 14 = 180^\circ$;
 11) $\angle 7 + \angle 12 = 180^\circ$; 12) $\angle 8 + \angle 9 = 180^\circ$.

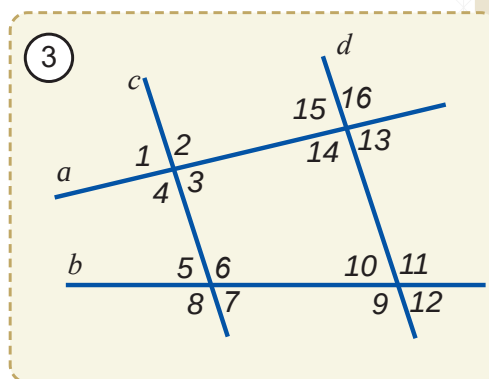
Шешуі. 3) $\angle 4 = \angle 2$ (вертикаль бұрыштар қасиетіне орай), $\angle 2$ және $\angle 16$ сәйкес бұрыштар болғаны үшін $\angle 2 = \angle 16$. Демек, $\angle 4 = \angle 16$ теңдік дұрыс.

5) $\angle 12 = \angle 7$ (сәйкес бұрыштар қасиетіне орай) және $\angle 7 = \angle 5$ (вертикаль бұрыштар). $\angle 5$ пен $\angle 1$ сәйкес бұрыштар. $a \parallel b$, сондықтан $\angle 1 \neq \angle 5 = \angle 7 = \angle 12$, яғни $\angle 1 = \angle 12$ теңдік дұрыс емес.

9) $\angle 4 = \angle 12$, $\angle 13 = \angle 15$ (вертикаль бұрыштар), $c \parallel d$, $\angle 2$ мен $\angle 15$ – бір қабырғалы бұрыштар болғаны үшін, $\angle 2 + \angle 15 = 180^\circ$. Демек, $\angle 4 + \angle 13 = 180^\circ$ теңдігі дұрыс.

11) $c \parallel d$ болғаны үшін $\angle 7 = \angle 10$ (айнымалы бұрыштар қасиетіне орай) және $\angle 10 = \angle 12$ (вертикаль бұрыштар). Демек, $\angle 7 = \angle 12$.

Сондықтан $\angle 7 + \angle 12 = 180^\circ$ теңдік тек $\angle 7 + \angle 12 = 90^\circ$ болғанда орынды болады. Қалған теңдіктерді осылайша өздігіңше тексеріп шық.

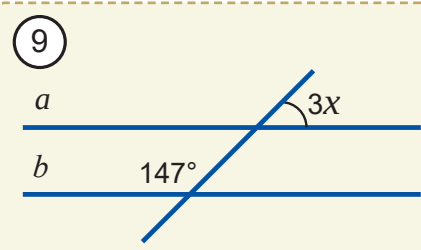
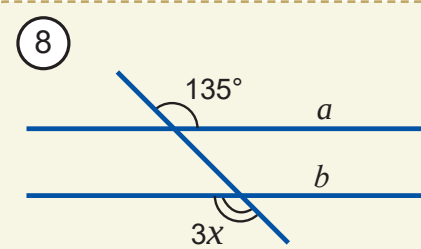
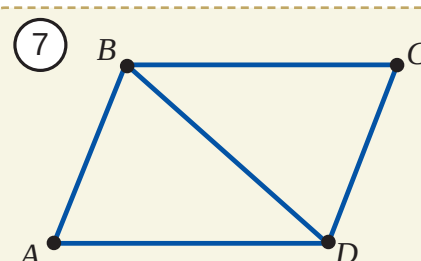
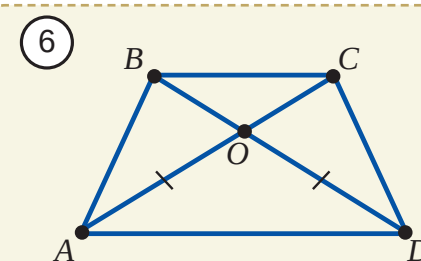
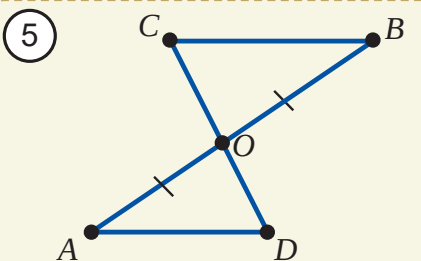
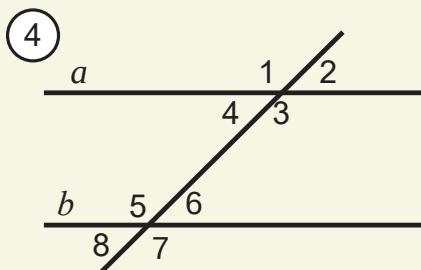


? Тақырыпқа байланысты сұрақтар

1. Кері теорема не? Оның дұрыс теоремадан қандай айырмашылығы бар?
2. Дұрыс теоремаға кері болған теорема әр қашан да орынды болады ма?
3. Дұрыс теореманы дәлелдеп, оған кері теореманы дәлелсіз қабылдауға болады ма?
4. Берілген кері теоремаға кері болған теорема не болады?
5. Екі параллель түзу сызық және кесінді пайда еткен айнымалы, сәйкесінше және бір қабырғалы бұрыштар туралы не деуге болады?

? Тақырыпқа байланысты сұрақтар.

1. Төмендегі тұжырымдарға кері болған тұжырымдарды түз, оларды дұрыс болуы немесе болмауын анықта:
 - Егер сан түп сан болса, ол натурал сан болады.
 - Егер сан 9-ға бөлінсе, ол 3-ке де бөлінеді.
 - Егер үшбұрыштар тең болса, олардың сәйкес бұрыштары да тең болады.
 - Егер оқушының ыстығы жоғары болса, ол науқас болып қалған болады.
 - Егер футбол ойыншысы қызыл карточка алған болса, ойыннан шығып кетеді.
 - Егер үшбұрыштың қабырғалары 3, 4 және 5 ке тең болса, оның периметрі 12-ге тең болады.
 - Егер автомобильдің бензині болмаса, ол жүрмейді.
2. Төмендегі теоремаға кері теоремаларды түз және олардың дұрыстығын тексер:
 - Егер екі түзу сызықты кесінді мен қиылысқанынан пайда болған сәйкесінше бұрыштар тең болса, онда бұл түзу сызықтар параллель болады.
 - Егер екі түзу сызық үшінші түзу сызыққа параллель болса, олар параллель болады.
 - Егер үшбұрыш тең қабырғалы болса, оның барлық бұрыштары өзара тең болады.



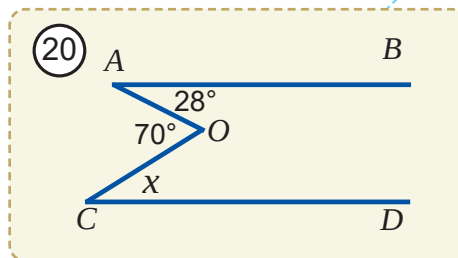
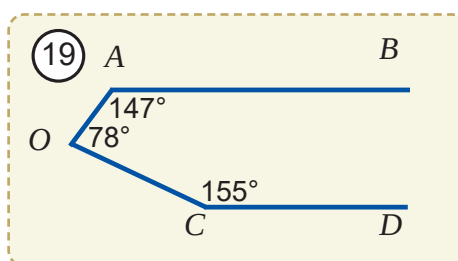
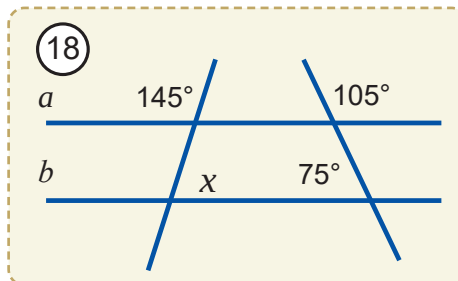
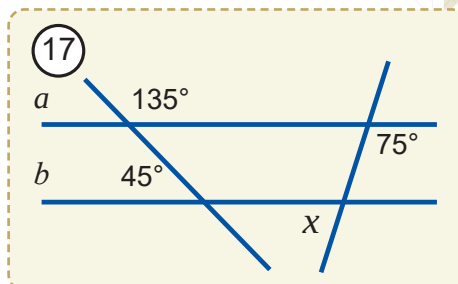
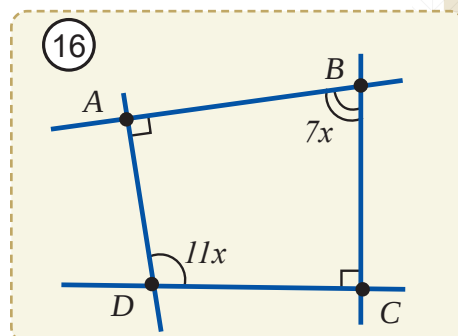
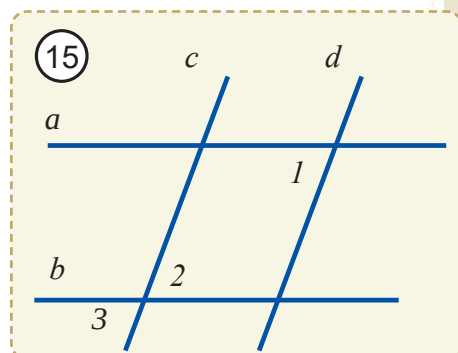
3. Үшбұрыштардың теңдік белгісіне кері теоремаларды түз. Олар дұрыс па?
4. 4-суретте $a \parallel b$, $\angle 7 = 135^\circ$. Қалған бұрыштарды тап.
5. 4-суретте $a \parallel b$, $\angle 2 = 49^\circ$. Қалған бұрыштарды тап.
6. 5-суретте $BC \parallel AD$, $AO = OB$ екендігі белгілі.
а) $DO = OC$; б) $\angle AOB = \angle COB$ теңдіктерді дәлелде.
7. 6-суретте а) $BC \parallel AD$, $AO = OD$; б) $\triangle AOB = \triangle COD$; с) $\triangle AOB - D = \triangle ACD$ теңдіктерді дәлелде.
8. 7-суретте $BC \parallel AD$ және $AB \parallel CD$ болса, $\triangle AOB - D = \triangle CDB$ екендігін дәлелде.
9. 8-суретте $a \parallel b$ болса, x -ты тап.
10. 9-суретте $a \parallel b$ болса, x -ты тап.
- 11*. ABC және $A_1B_1C_1$ сүйір бұрыштар берілген. Егер $AB \parallel A_1B_1$ және $BC \parallel B_1C_1$ болса, $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$ болуын дәлелде.
- 12*. Сәйкес қабырғалары параллель түзу сызықтарда жатқан бұрыштардан бірі сүйір, екіншісі доғал. Бұл бұрыштар қосындысы 180° -қа тең болуын дәлелде.

Ескерту. 12–13 есептерде келтірілген теоремалар сәйкес қабырғалары параллель болған бұрыштардың қасиеттері деп айтылады.

13. Егер 15-суретте $a \parallel b$, $c \parallel d$ және $\angle 1 = 55^\circ$ болса, $\angle 2$ мен $\angle 3$ -ті тап.
14. Егер 15-суретте $a \parallel b$, $c \parallel d$ және $\angle 3 = 73^\circ$ болса, $\angle 1$ мен $\angle 2$ -ны тап.
- 15*. Сәйкес қабырғалары параллель түзу сызықтарда жатқан бұрыштар айырмасы 40° -қа тең. Бұл бұрыштарды тап.
- 16*. ABC сүйір және $A_1B_1C_1$ доғал бұрыштар берілген. Егер $AB \angle A_1B_1$ және $BC \angle B_1C_1$ болса, $\angle ABC + \angle A_1B_1C_1 = 180^\circ$ болуын дәлелде.
- 17*. Сәйкес қабырғалары перпендикуляр түзу сызықтарда жатқан бұрыштардан бірі сүйір, екіншісі болса дағал. Бұл бұрыштар қосындысы 180° -қа тең болуын дәлелде.

Ескерту. 17–18 есептерде келтірілген теоремалар сәйкес қабырғалары өзара перпендикуляр болған бұрыштардың қасиеттері деп айтылады.

- 18*. 11-суреттегі ABC және ADC бұрыштарының сәйкес қабырғалары перпендикуляр. Белгісіз бұрыштарды тап.
19. ABC бұрыш 118° қа тең. BCD бұрыш болса 62° қа тең. AB мен CD түзу сызықтар. а) параллель болуы; б) қиылысуы мүмкін.
20. ABC бұрыш 53° -қа тең. BCD бұрыш болса 53° -қа тең. AB мен CD түзу сызықтар. а) параллель болуы; б) қиылысуы мүмкін.
- 21*. 101-бетте келтірілген Саккери төртбұрышының тік төртбұрыш екендігін дәлелде.
22. 12-суретте x бұрыштарды тап.
23. 13-суретте x бұрыштарды тап.
- 24*. Екі параллель түзу сызықтарды кесінді кесіп өткенде пайда болған бір қабырғалы бұрыштардың біреуі басқасынан 24° -қа үлкен болса, қалған бұрыштарды тап.
- 25*. Екі параллель түзу сызықтарды кесінді кесіп өткенде пайда болған бір қабырғалы бұрыштардың қосындысы 128° -қа тең болса, қалған бұрыштарды тап.
- 26*. 14-суретте AB мен CD түзу сызықтар параллель болады ма?
- 27*. 15-суретте AB мен CD түзу сызықтар параллель болуы үшін x неге тең болуы керек?
- 28*. Екі түзу сызықты кесінді қиып өткенде пайда болған бұрыштардың бесеуі сүйір болмаса, олардың барлығын тап.
- 29*. Екі түзу сызықты кесінді қиып өткенде пайда болған бұрыштардың алтауының қосындысы 620° қа тең болса, олардың барлығын тап.
- 30*. Негізі AC кесінді болған ABC тең бүйірлі үшбұрыш берілген. AC қабырғаға тең параллель болған түзу сызық AB қабырғаны A_1 және BC қабырғасы C_1 нүктеде қиып өтеді. A_1BC_1 үшбұрыш тең бүйірлі екендігін дәлелде.
31. ABC бұрыш 98° -қа тең. Оның A мен C нүктелерінен өтіп қабырғаларға параллель болған түзу сызықтар D нүктеде қиылысады. ADC бұрышты тап.

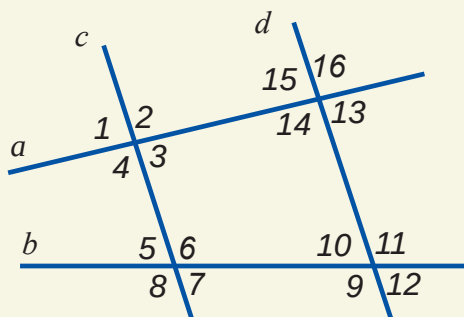


17

ПРАКТИКАЛЫҚ ЖАТТЫҒУ ЖӘНЕ ҚОЛДАНУ. БІЛІМДІ СЫНАП КӨР

17.1. Кіші топтарда практикалық жаттығу

1



1-суретте $a \parallel b$, $c \parallel d$ түзу сызықтар берілген. Төрт кіші топ құрылады және:

1-топқа $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$, және $\angle 4$;

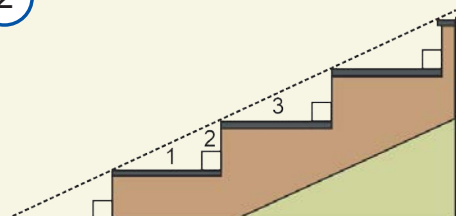
2-топқа $\angle 5$, $\angle 6$, $\angle 7$, және $\angle 8$;

3-топқа $\angle 9$, $\angle 10$, $\angle 11$, және $\angle 12$;

4-топқа $\angle 13$, $\angle 14$, $\angle 15$, және $\angle 16$ бөлініп беріледі. Топтар кезекпен өз бұрыштары өлшемдерін хабарлайды. Қалған топтар сәйкес өз бұрыштары өлшемдерін анықтап айтады.

17.2. Практикалық қолдану

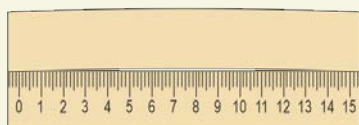
2



1. Ағаш ұсташылығында баспалдақтың аяқ қоятын баспалдақтары горизонталь болуы керек (17-сурет). Содан келіп шығып, баспалдақ бейнесінен белгіленген бұрыштар арасында қандай қатынастар орындалғанын анықта және геометриядан үйренген білімің негізінде түсіндір.

2. Екі сызғыштың 18-суреттегідей тексеріледі. Мұнда түзу сызықтардың қайсы қасиеттерінен пайдаланылады.

3



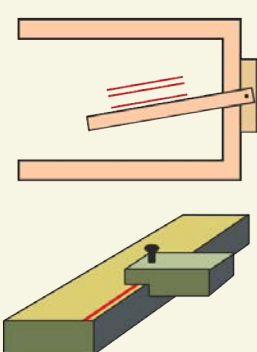
3. 19-суреттен пайдаланып, бейнеленген құралдар көмегінде ағаш ұсталары параллель түзу сызықтарды қалай сызуға бейімделгенін білімің негізінде түсінтір.

4. 20-суретте бейнеленген кітап текшесін

берік етіп жасауда үшбұрыштардың қайсы қасиетінен пайдаланған?

5. A мен B нүктелерде қатырылған блоктар арқылы өткен жіпте P_1 мен P_2 денелер ілінген (21-сурет). P_3 дене болса осы жіптің C нүктесінде ілінген болып, P_1 мен P_2 денелерді теңдікте сақтап тұр. $AP_1 \parallel BP_2 \parallel CP_3$ екендігі белгілі болса, $\angle ACB = \angle A + \angle B$ болуын дәлелде.

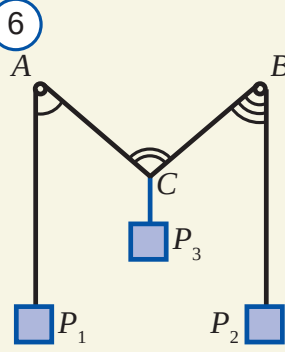
4



5



6



17.3. Білімді сынап көр

1. Бос қалдырылған жерлерге логикалық дұрыс сөздерді жаз.

1. Түзу сызықта жататын нүкте арқылы оған перпендикуляр болған жүргізу мүмкін.
2. Егер екі түзу сызықты кесіндімен қиғанда пайда болған тең болса, бұл түзу сызықтар параллель болады.
3. Жазықтағы екі түзу сызық , олар параллель түзу сызықтар деп аталады.
4. Екі түзу сызықтан біреуін қиып өткен түзу сызық
5. Түзу сызыққа жатпайтын нүкте арқылы оған параллель болған түзу сызық жүргізу мүмкін.
6. Түзу сызықтың кез-келген нүктесі арқылы тек бір түзу сызық жүргізу мүмкін.
7. Тік бұрышпен қиылысқан түзулер деп аталады.
8. Бір түзу сызыққа екі түзу сызық өзара параллель.
9. Егер екі түзу сызықты кесуші мен қиғанда пайда болған бір қабырғалы бұрыштар бұл түзу сызықтар параллель болады.
10. Параллель түзу сызықтарды кесінді мен қиғанда пайда болған сәйкес бұрыштар болады.
11. Параллель түзу сызықтарды кесіндімен қиғанда пайда болған айнымалы бұрыштар болады.

2. Төменде келтірілген сөйлемдерден қатені тап және оны дұрыс жаз.

1. Түзу сызықтың тек бір нүктесінен оған перпендикуляр түзу сызық жүргізу мүмкін.
2. Берілген түзу сызыққа жатпайтын тек бір нүктеден осы түзу сызыққа перпендикуляр түсіру мүмкін.
3. AB және AK параллель түзу сызықтардың біріне перпендикуляр болған түзу сызық екіншісіне де перпендикуляр болады.
4. Екі түзу сызықты қиюшымен қиғанда пайда болған айнымалы бұрыштар тең болады.
5. Егер екі кесінді қиылысса олар параллель кесінділер деп аталады.
6. Сәйкес қабырғалар болған бұрыштар тең болады.
7. Егер $a \perp b$, $b \perp c$ болса, $a \perp c$ болады.
8. Сәйкес қабырғалары перпендикуляр болған бұрыштардың қосындысы 180° -қа тең.
9. Егер екі түзу сызықты кесінді мен қиғанда пайда болған бір қабырғалы бұрыштар тең болса, бұл түзу сызықтар параллель болады.
10. Перпендикуляр түзу сызықтарға параллель болған түзу сызықтар өзара параллель болады.
11. Егер $a \parallel b$, $b \parallel c$ болса, $a \perp c$ болады.
12. Егер $a \parallel b$, $b \perp c$ болса, $a \parallel c$ болады.

3. Кестеде берілген қасиеттер мен тұжырымдарға сәйкес келетін геометриялық түсініктерді жаз.

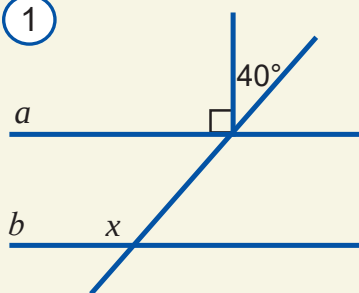
1	Ортақ нүктеге ие емес түзулер	
2	Тік бұрышпен қиылысады	
3	Нүктеден түзу сызыққа тек біреу ғана түсіру мүмкін	
4	Нүктеден түзуге қалағанынша түсіруге болады	
5	Шарт пен қорытынды бөлімі ауысқан	
6	Екі түзу сызықты кесіндімен қиғанда пайда болатын бұрыштар	

4. Бірінші бағанда берілген геометриялық түсінікке екінші бағандағы тиісті қасиет немесе тұжырымды қой.

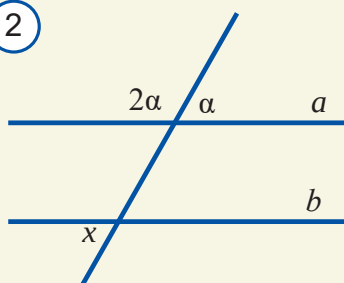
Геометриялық түсініктер	Қасиеті немесе тұжырымы
1. Параллель түзу сызықтар	(A) Әрқашанда дұрыс емес.
2. Перпендикуляр түзу сызықтар	(B) Қиылыспайды.
3. Кесінді екі түзу сызықты қиғанда	(C) Қиылысқанда тік бұрыштар пайда болады.
4. Айнымалы бұрыштар	(D) Айнымалы, сәйкес және бір қабырғалы бұрыштар пайда болады.
5. Кері теорема	(E) Бір жарты жазықтықта жатады.
6. Бір қабырғалы бұрыштар	(F) Тең болса, түзу сызықтар параллель болады.

5. Тесттер.

1



2



1. Берілген түзу сызыққа жатпайтын нүкте арқылы осы түзу сызыққа неше параллель түзу сызық өткізу мүмкін?

A) 1; B) 2; B) 4; Г) қалағанша.

2. Егер $a \parallel b$, $b \perp c$, $c \perp d$ болса, төмендегі жауаптардың қайсы бірі дұрыс?

3. Жазықтықта берілген түзу сызыққа жатпайтын нүкте арқылы осы түзу сызыққа неше перпендикуляр түзу сызық өткізу мүмкін?

A) 1 B) 2 B) 4 E) қалағанша.

4. 1-суретте $a \parallel b$ болса, x ты тап

A) 100° B) 110° B) 130° Г) 140° .

5. 2-суретте $a \parallel b$ болса, x -ты тап

A) 30° B) 45° B) 60° Г) 36° .

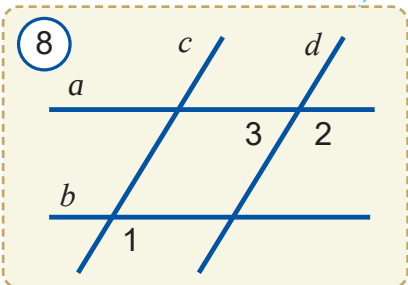
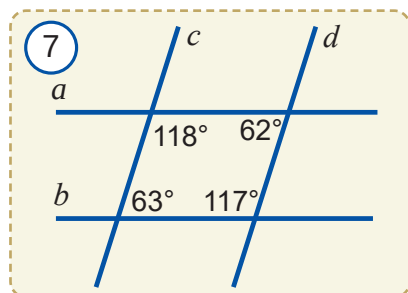
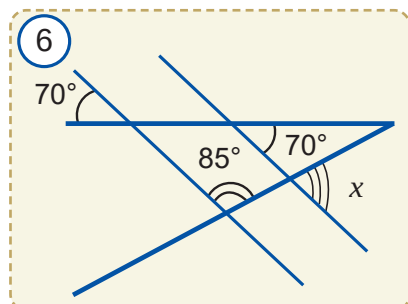
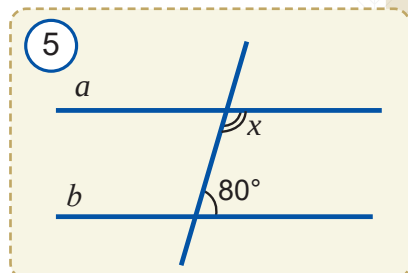
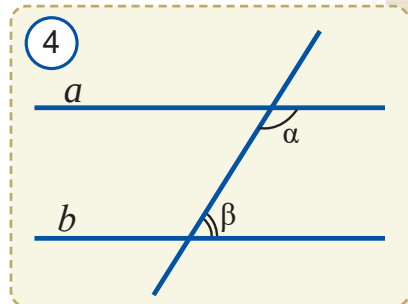
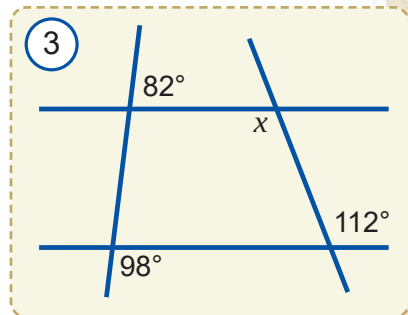
6. x -ты тап (3-сурет).

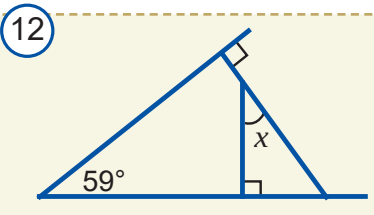
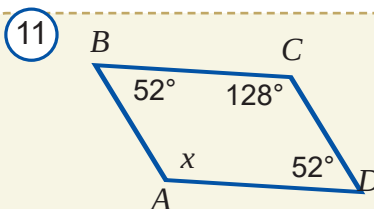
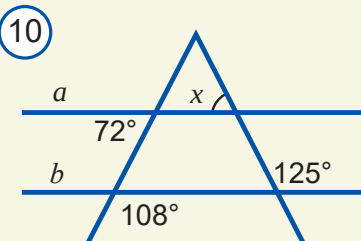
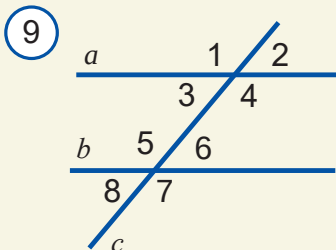
A) 96° B) 108° B) 112° Г) 78°

7. 4-суретте $a \parallel b$ және $a - B = 70^\circ$ болса, a ны тап.
 А) 30° Б) 125° В) 75° Г) 36°
8. Екі түзу сызық үшінші түзу сызықпен қиылысқанда неше тең доғал бұрыш пайда болуы мүмкін?
 А) 3 Б) 8 В) 6 Г) 4
9. Екі түзу сызықты түзу сызықпен қиылысуынан пайда болатын бұрыштардың бірі 97° -қа тең. Пайда болған бұрыштардың ең кішісін тап.
 А) 97° Б) 83° В) 77° Г) 7° .
10. Екі түзу сызық үшінші түзу сызық пен қиылысқанда көбі мен неше тең сүйір бұрыш пайда болады?
 А) 3 Б) 4 В) 6 Г) 5.
11. Екі түзу сызық үшінші түзу сызықпен қиылысқанда көбі мен неше тік бұрыш пайда болады?
 А) 2 Б) 6 В) 8 Г) 5
12. Екі түзу сызықты үшінші түзу сызықпен қиылысқанда пайда болған үш айнымалы бұрыштар қосындысы 290° -қа тең. Төртінші айнымалы бұрышты тап.
 А) 145° Б) 110° В) 36° Г) 70°
13. 5-суретте $a \parallel b$ болса, x -ты тап.
 А) 100° Б) 80° В) 110° Г) 90°
14. 6-суреттегі x бұрышты тап.
 А) 105° Б) 95° В) 85° Г) 75°
15. 7-суретте қайсы түзу сызықтар өзара параллель болады?
 А) $a \parallel b$ Б) $a \parallel c$ В) $c \parallel b$ Г) $c \parallel d$
16. 8-суретте $a \parallel b$, $c \parallel d$ және $\angle 1 = 122^\circ$ болса, $\angle 2$ мен $\angle 3$ -ті тап.
 А) $\angle 2 = 122^\circ$, $\angle 3 = 58^\circ$ Б) $\angle 2 = 130^\circ$, $\angle 3 = 58^\circ$
 В) $\angle 2 = 122^\circ$, $\angle 3 = 68^\circ$ Г) $\angle 2 = 130^\circ$, $\angle 3 = 50^\circ$

6. Есептер.

1. 9-суретте $\angle 4 + \angle 5 = 180^\circ$ болса, $a \parallel b$ болады ма?
2. 9-суретте $\angle 2 = \angle 6$ болса, $a \parallel b$ болады ма?
3. 9-суретте $\angle 1 = \angle 5 = 118^\circ$ болса, қалған бұрыштарды тап.
4. 9-суретте $\angle 2 = 71^\circ$ және $\angle 7 = 119^\circ$ болса, $a \parallel b$ болады ма?





5. 10-суретте x бұрышты тап.

6. 11-суреттегі белгісіз бұрыштарды тап.

7. Екі түзу сызықты үшінші түзу сызықпен қиылысуынан пайда болатын бұрыштардың бірі 47° -қа тең. Оған сәйкес бұрыш неше градус болғанда бұл екі түзу сызық параллель болады?

8. Екі параллель түзу сызықты кесінді мен қиылысуынан пайда болған айнымалы бұрыштар жиындысы 84° . Қалған бұрыштарын тап.

9. Екі параллель түзу сызықты кесіндімен қиылысуынан пайда болған бұрыштардан бірі екіншісінен 8 есе үлкен. Пайда болған барлық бұрыштарды тап.

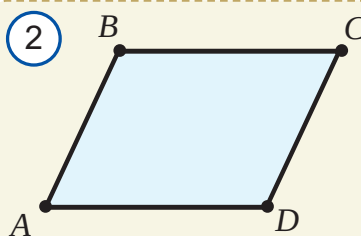
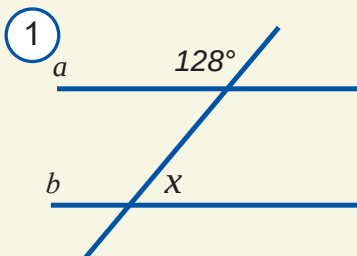
10. Екі параллель түзу сызықты кесінді мен қиғанда пайда болған бір қабырғалы бұрыштар айырмасы 30° . Бұл бұрыштарды тап.

12. Сәйкес қабырғалары параллель түзу сызықтарда жатқан бұрыштар айырмасы 36° -қа тең. Бұл бұрыштарды тап.

4-бақылау жұмысы үлгісі

1) 116–117-беттегі тесттерге ұқсас 5 тест;

2) төмендегі есептерге ұқсас 3 есеп (4 есеп «үздік» баға алмақшы болған оқушылар үшін қосымша).



1. Екі параллель түзу сызық кесіндімен қиылысуынан пайда болған бұрыштардың бірі 34° -қа тең. Қалған бұрыштарды тап.

2. 1-суретте A мен b түзу сызықтар параллель болуы үшін белгісіз бұрыш неше градус болуы керек?

3. Егер 2-суретте $B \parallel AD$ және $AB \parallel CD$ болса, $AB = CD$

4. ABC үшбұрыштардың A төбесінен өткізілген биссектриса BC қабырғасын D нүктеде қиып өтеді. D нүктеден өткізілген түзу сызық AC қабырғаны E нүктеде қиып өтеді. Егер $AE = DE$ болса, $DE \parallel AB$ екендігін дәлелде.

«GeoGebra»да практикалық тапсырмалар орындау

1. Берілген өлшемдегі бұрыштарды жаса.

Екі түзу сызық тік бұрыш астында қиылысса, олар перпендикуляр түзу сызықтар деп аталады. Олардың бейнесін пайда қылу үшін:

- 1) құралдар панелінен **«Прямые линии»** (Түзу сызықтар) тобын ашамыз;
- 2) менюден **«Прямая»** (Түзу сызық) үстіне тінтуірдің сол жақ түймесін басу таңдаймыз;
- 3) жазықтықта екі нүктені белгілейміз;
- 4) құралдар панелінен **«Измерения»** (Өлшемдер) тобын ашамыз;
- 5) менюден **«Угол заданной величины»** (берілген өлшемдегі бұрыш) үстіне тінтуірдің сол жақ түймесін басу арқылы таңдаймыз;
- 6) пайда болған терезеге бұрыш өлшемін енгіземіз және **«Enter»** түймесін басамыз. Нәтижесінде үшінші нүкте қалыптасады;
- 7) бұрыштың ұшы мен нүктеден түзу сызық жүргіземіз. Нәтижесінде қалаған бұрыш пайда болады;

2. Бұрыш биссектрисасын жасау алгоритімін түзу және оны жасау.

Жоғарыдағы алгоритмге ұқсас бұрыш биссектрисасын жасау алгоритмін түз және оны жаса:

3. Көпбұрыштар жасау

Көпбұрыштардың бейнесін пайда ету үшін:

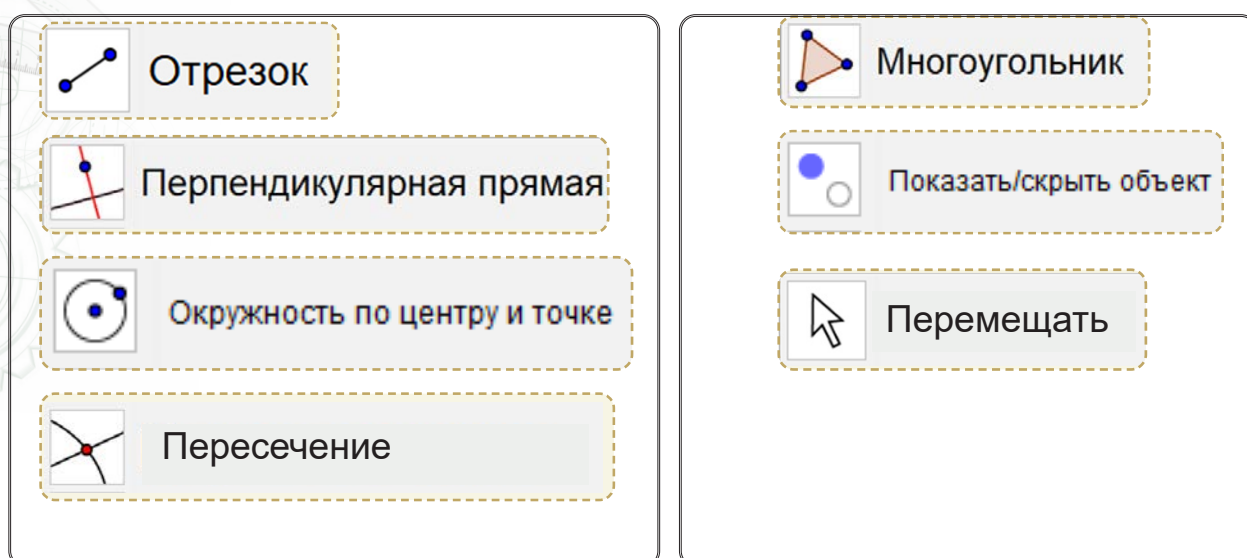
- 1) құралдар панелінде **«Многоугольник»** (Көпбұрыш) тобын ашамыз;
- 2) жазықтықта көпбұрыш ұштарын тәртіп пен белгілейміз және тағы бірінші нүктеге қайтамыз;
- 3) нәтижеде көпбұрыш пайда болады.

4. Тұрақты көпбұрыш жасау алгоритмін түзу және оны жасау

Жоғарыдағы алгоритмге ұқсас тұрақты көпбұрыш жасау алгоритмін түз және оны жаса.

5. Квадрат жасау

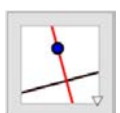
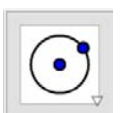
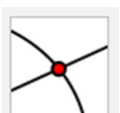
Квадрат жасау үшін төмендегі құралдар керек болады. Квадрат жасаудан алдын бағдарламаның әрбір құралдан пайдалану нұсқауларын қайталаймыз.

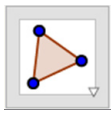


Қажетті компоненттер:

- **GeoGebra**дан жаңа айна аш.
- **GeoGebra** интерфейсін «Настройки» –  «Геометрия» көрінісіне ауыстыр.
- Жаңа нүкте үшін параметрлерін өзгерт.

Квадрат жасау алгоритмі

1		$a = AB$ кесінді жаса.
2		AB кесіндінің B нүктесінен өтуші перпендикуляр сызықты жаса.
3		Орталығы B нүктеде болған және A нүктесі арқылы өтетін c шеңберін сыз.
4		b перпендикуляр және c шеңбердің қиылысу нүктелері – C және D -ларды жаса.
5		AB кесіндінің A нүктесінен өтуші d перпендикуляр сызық сыз.
6		Орталығы A нүктеде болған және B нүктеден өтуші e шеңберді сыз.

7		d перпендикуляр және e шіңбердің қиылысу нүктелері E және F терді жаса.
8		$ABCE$ көпұрыштарды жаса.
9		Екі шеңбер және перпендикуляр сызықтарды жасырын жағдайда өткіз.
10		Квадрат дұрыс жасалғанын тексер.
11		Квадрат реңі және көрінісін өзгерт.

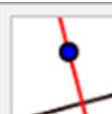
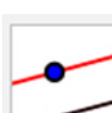
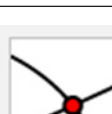
6. Квадратты басқа тәсілде жасау алгоритмін түз.

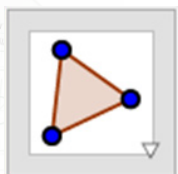
7. Тік төртбұрыш жасау.

Қажетті компоненттер:

- Жасауды бастаудан алдын тік төртбұрыштың қасиетін еске ал.
- Жаңа **GeoGebra** айнасын аш.
- GeoGebra** интерфейсін «**Настройки**» –  «**Геометрия**» көрінісіне ауыстыр.
- Жаңа нүкте үшін параметрлерді ауыстыр.

GeoGebra құралдар панеліндегі қажетті жабдықтар

	Перпендикулярная прямая Ескерту. Нүкте мен түзу сызық үстіне басып, осы нүкте арқылы түзу сызыққа перпендикуляр өткіз.
	Параллельные прямые Ескерту. Нүкте мен түзу сызық үстіне басып, осы нүкте арқылы түзу сызыққа параллель өткіз.
	Пересечение Екі түзу сызық қиылысу нүктесі үстіне басып, қиылысу нүктесін белгіле немесе екі түзу сызық үстіне қатарынан басып, олардың қиылысу нүктесін тап.



Многоугольник

Ескерту. Графикалық көрінісі үстіне бас немесе қолданыстағы нүктелер үстіне басып, тік төртбұрыш жаса. Әрқашан көпбұрыш жабық болуы үшін бірінші мен соңғы нүктені біріктірі. Көпбұрыш қабырғаларын сағат стрелкасына қарсы бағытта біріктірі.

Тік төртбұрыш жасау алгоритмі

1	 Отрезок	AB кесінді жаса
2	 Перпендикулярная прямая	AB кесіндіге B нүкте арқылы өтетін перпендикуляр өткіз.
3	 Точка	Перпендикуляр сызыққа жаңа C нүктені іске қос
4	 Параллельная прямая	C нүкте арқылы өтуші және AB кесіндіге параллель түзу сызық өткіз.
5	 Перпендикулярная прямая	AB кесіндінің A нүктесі арқылы өтуші перпендикуляр өткіз.
6	 Пересечение	D қиылысу нүктесін белгіле.
7	 Многоугольник	$ABCD$ көпбұрышты жаса.
8	 Сохранить	Өзгерістерді сақта.
9	 Перемещать	«Перемещать» – құрылмасынан пайдаланып, тіктөртбұрыш дұрыс жасалғанын тексер.

IV ТАРАУ

ҮШБҰРЫШ ҚАБЫРҒАЛАРЫ МЕН БҰРЫШТАРЫ АРАСЫНДАҒЫ ҚАТЫНАСТАР

Бұл тарауды меңгерген соң, төмендегі біліммен практикалық дағдыларға ие боласыз:

Білім:

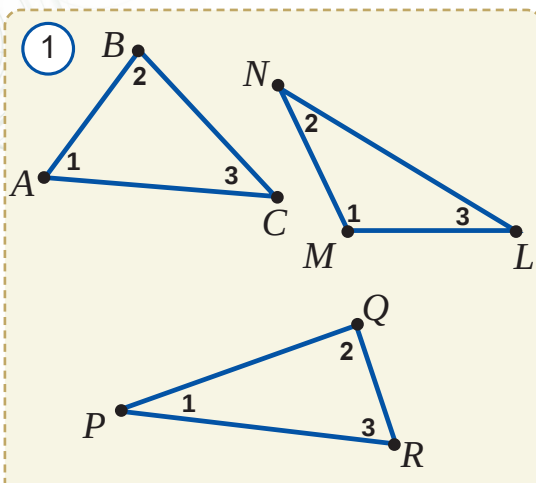
- үшбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы туралы теорема мен оны дәлелдеу;
- үшбұрыштың сыртқы бұрышы мен қасиеті;
- тікбұрышты үшбұрыштың қасиеттері;
- тікбұрышты үшбұрыштардың теңдік белгілері;
- бұрыш биссектрисасының қасиеті;
- үшбұрыш бұрыштары мен қабырғалары арасындағы қатынастарды түсінтіруші қатынастар;
- үшбұрыш теңсіздігі.

Практикалық дағдылар:

- үшбұрыштың ішкі бұрыштары қосындысын практикалық тәсілмен таба алу;
- меңгерген теориялық білімдерді, қасиеттерін есептер шешуде және практикалық жұмыстарды орындауда қолдана алу.

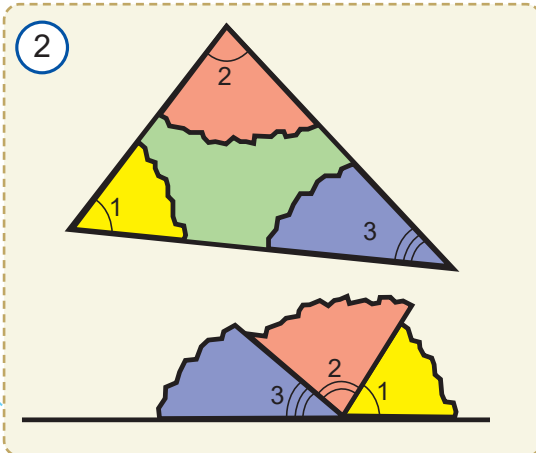


Белсенділік жаттығуы



1. 1-суретте бейнеленген ABC үшбұрыштың үш бұрыштарын транспортир көмегінде өлше және олардың қосындыларын есепте. Дәл осы жұмысты MNL және HQR үшбұрыштары үшін де орында. Нәтижелер негізінде кестені толтыр. Қандай қасиетті анықтадың? Оны бір сөзбен түсінтір.

Үшбұрыштар	$\angle 1$	$\angle 2$	$\angle 3$	$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$
$\triangle ABC$				
$\triangle MNL$				
$\triangle PQR$				



2. Бір парақ қағазға кез келген ABC үшбұрышты сыз және бұрыштарын 1, 2 және 3 сандарымен белгіле. Оның бұрыштарын 2-суретте көрсетілгендей етіп, жүргізіп ал және қатарластырып қой. Бұдан қандай қорытынды шығару мүмкін?

Енді геометрияның ең қажетті теоремаларынан бірі – үшбұрыштың ішкі бұрыштары қосындысы туралы теореманы дәлелдейміз.

18.1. Үшбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы



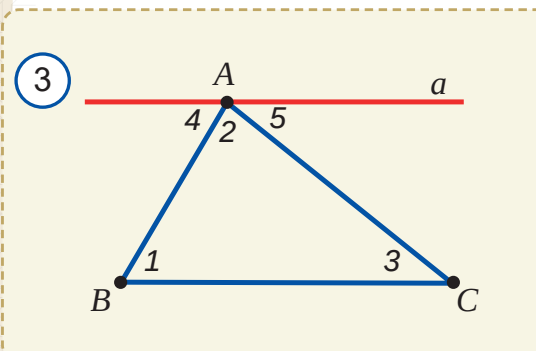
Теорема. Үшбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы 180° қа тең.



$\triangle ABC$



$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$



Дәлелдеу. ABC үшбұрыштың ішкі бұрыштарына сәйкес түрде $\angle 1, \angle 2$ және $\angle 3$ пен белгілейміз (3-сурет). A ұшынан BC қабырғаға параллель A түзу сызық өткіземіз және $\angle 4$ пен $\angle 5$ бұрыштарын белгілейміз.

$\angle 1 = \angle 4$, өйткені бұл бұрыштар, A мен BC параллель түзу сызықтарын AB кесінді мен қиылысқанда пайда болған айнымалы бұрыштар.

$\angle 3 = \angle 5$, өйткені бұл бұрыштар, a мен BC параллель түзу сызықтарын AC кесінді мен

қиғанда пайда болған айнымалы бұрыштар.

$\angle 4 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$, өйткені бұл бұрыштар жалпы ұшына ие және жазыңқы бұрышты құрайды. Пайда болған бұл үш теңдіктен $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$, яғни $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ екендігін тұжырым жасаймыз.

Теорема дәлелденді.

1-нәтиже. Кез келген үшбұрыштың кем дегенде екі сүйір бұрышы болады.

Дәлелдеу. Керісінше тұжырымдаймыз, яғни үшбұрыштың тек бір бұрышы сүйір болсын. Онда оның қалған екі бұрышы доғал болып, ал олардың қосындысы 180° -тан үлкен болады. Бұл болса жоғарыда дәлелденген үшбұрыш ішкі бұрыштарының қосындысы туралы теоремаға орай болуы мүмкін емес.

Демек, тұжырымымыз дұрыс емес.

Нәтиже дәлелденді.

2-нәтиже. Кез келген үшбұрыштың біреуден артық тік немесе доғал бұрышы болуы мүмкін емес.

Бұл нәтиженің дәлелін өздігіңше орында.

1-есеп. 4-суретте белгісіз бұрыш – x -ті тап.

Шешуі. $\angle ABC$ – тең бүйірлі үшбұрыш болғаны үшін, $\angle ACB = \angle A = 40^\circ$. Вертикаль бұрыштар қасиетіне сәйкес, $\angle DCE = \angle A = 40^\circ$.

Шартқа сәйкес, $\angle CED$ -те тең бүйірлі. $\angle DCE = \angle DEC = 40^\circ$. Онда үшбұрыш бұрыштарының қосындысы туралы теоремаға сәйкес, $\angle CDE$ -де: $40^\circ + 40^\circ + x = 180^\circ$ немесе $x = 100^\circ$.

Жауабы: 100° .

2-есеп. Үшбұрыштың ішкі бұрыштары $2 : 3 : 7$ сияқты қатынаста. Олардың градус өлшемін тап.

Шешілуі. Шартқа сәйкес, үшбұрыштың ішкі бұрыштарын $2x$, $3x$ және $7x$ деп белгілейміз. Олай болса үшбұрыштардың қосындысы туралы теорема бойынша, $2x + 3x + 7x = 180^\circ$ теңдікке ие боламыз. Одан $x = 15^\circ$ екендігін табамыз.

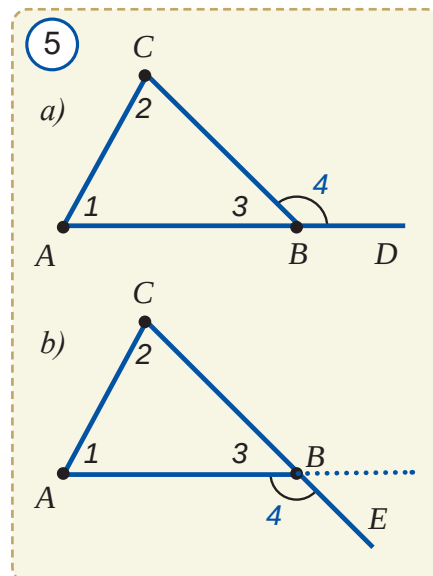
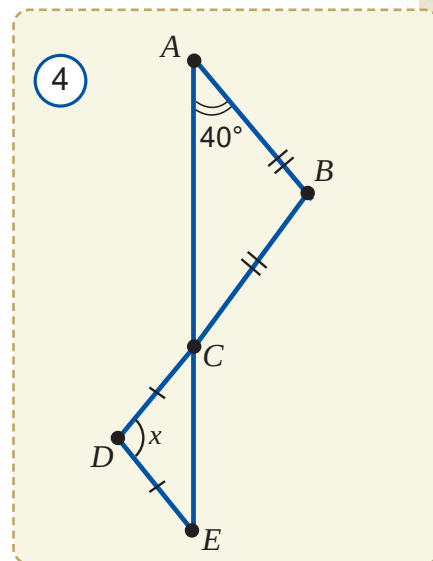
$2x = 2 \cdot 15^\circ = 30^\circ$, $3x = 3 \cdot 15^\circ = 45^\circ$ және $7x = 7 \cdot 15^\circ = 105^\circ$.

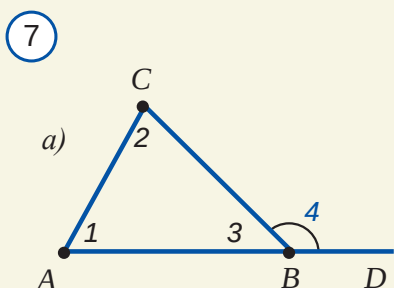
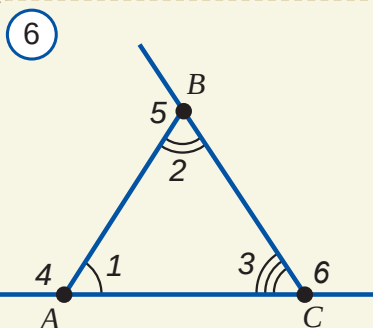
Жауабы. Үшбұрыштың ішкі бұрыштары 30° , 45° және 105° -қа тең.

18.2. Үшбұрыштың сыртқы бұрышының қасиеті

Үшбұрыштың ішкі бұрышына сыбайлас болған үшбұрыштың **сыртқы бұрышы** деп аталады.

5-суретте ABC үшбұрышының B бұрышына сыртқы болған CBD және ABE бұрыштар бейнеленген. Бұл бұрыштар вертикаль болғаны үшін өзара тең болады. Қалған A мен C бұрыштар сыртқы бұрыштарды сызып көрсет.





Үшбұрыш бұрыштарын оның сыртқы бұрыштарынан шатастырмас үшін *ішкі бұрыштар* деп те айтамыз.

Геометриялық зерттеу

6-суретте ABC үшбұрыштың барлық ішкі және сыртқы бұрыштарын транспортирде өлше және төмендегі бұрыштар (әрбір сыртқы және оған сыбайлас болмаған ішкі бұрыштар қосындысы) өлшемдерін өзара салыстыр: а) $\angle 4$ және $\angle 2 + \angle 3$; б) $\angle 5$ және $\angle 1 + \angle 3$; с) $\angle 6$ және $\angle 1 + \angle 2$.

Салыстыру нәтижесінде қандай қорытындыға келдің. Оны тұжырым ретінде өрнекте.



Теорема. Үшбұрыштың сыртқы бұрышы онымен сыбайлас емес екі ішкі бұрыштар қосындысына тең.



$\triangle ABC$, $\angle 4$ – сыртқы бұрыш (7-сурет)



$$\angle 1 + \angle 2 = \angle 4$$

Дәлелдеу. 7-суретке қарайық. Онда сыбайлас бұрыштардың қасиетіне орай: $\angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$.

Үшбұрыш бұрыштарының қосындысы туралы теорема бойынша $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$.

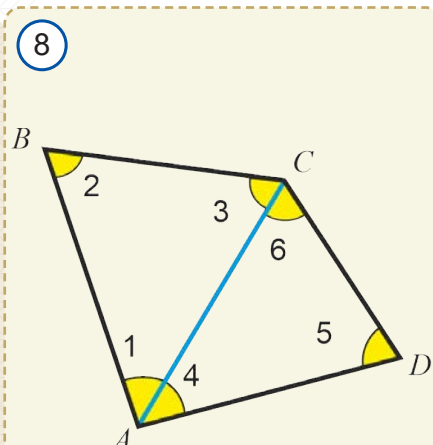
Бұл екі теңдіктен $\angle 1 + \angle 2 + \cancel{\angle 3} = \cancel{\angle 3} + \angle 4$, яғни $\angle 1 + \angle 2 = \angle 4$ теңдікті пайда қыламыз.

Теорема дәлелденді.

Бұл теоремадан төмендегі нәтиже келіп шығады.

Нәтиже. Үшбұрыштың сыртқы бұрышы онымен сыбайлас емес кез келген ішкі бұрыштан үлкен болады.

Оның дұрыстығын өздігіңше тексер.



Есеп. Төртбұрыштың бұрыштар қосындысы 360° -қа тең екендігін дәлелде.

Шешуі. Кез келген $ABCD$ төртбұрыш сызамыз. A мен C нүктелерін тұтастырып, оны екі үшбұрышқа бөлеміз.

Әрбір ABC және ADC үшбұрыштар ішкі бұрыштары қосындысы 180° -қа тең (8-сурет).

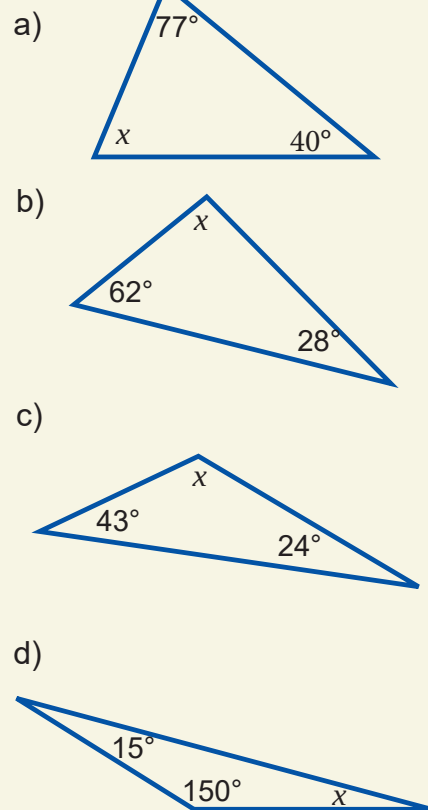
$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ, \quad \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 180^\circ.$$

$$\begin{aligned} \angle A = \angle 1 + \angle 4 \text{ және } \angle C = \angle 3 + \angle 6 \text{ болғаны үшін} \\ \angle A + \angle B + \angle C + \angle D = (\angle 1 + \angle 4) + \angle 2 + (\angle 3 + \angle 6) + \angle 5 = \\ = (\angle 1 + \angle 2 + \angle 3) + (\angle 4 + \angle 5 + \angle 6) = 180^\circ + 180^\circ = 360^\circ. \end{aligned}$$

Тақырыпқа байланысты сұрақтар

1. Үшбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы туралы теореманы айт және суретте түсіндір.
2. Үшбұрыштың көбі мен неше бұрышы дұрыс болуы мүмкін?
3. Үшбұрыштың екі қабырғасы үшінші қабырғаға перпендикуляр болуы мүмкін бе?
4. Үшбұрыштың неше бұрышы доғал болуы мүмкін?
5. Бұрыштары а) 5° , 55° , 120° ;
б) 46° , 150° , 4° ; д) 100° , 20° , 50° ;
е) 25° , 35° , 100° болған үшбұрыш бар ма?
6. Үшбұрыштың сыртқы бұрышы не?
7. Үшбұрыштың доғал сыртқы бұрыштары:
а) 1 б) 2
д) 3 үшеу болуы мүмкін бе?
8. Үшбұрыштардың бір ұшында ішкі және сыртқы бұрыштар тең болуы мүмкін бе?
9. Үшбұрыштың көбімен неше сыртқы бұрышы сүйір болуы мүмкін?

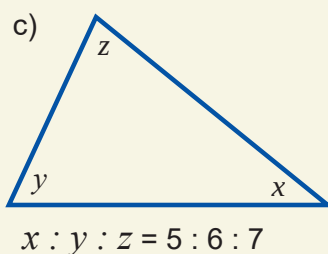
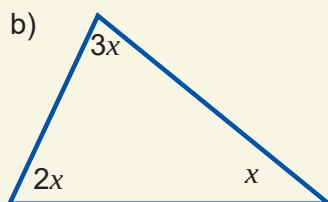
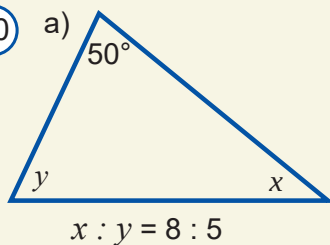
9



Практикалық жаттығу және қолдану

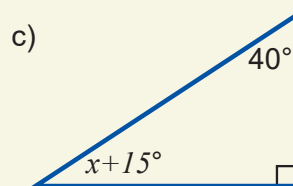
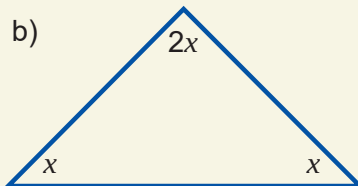
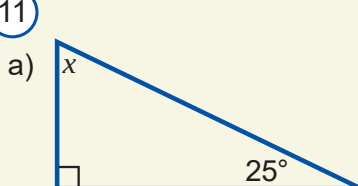
1. Егер үшбұрыштардың екі бұрышы а) 60° және 40° ; б) 70° және 85° ; в) 90° және 45° ; г) 105° және 30° болса, оның үшінші бұрышын тап.
2. 9-суреттегі белгісіз бұрышты тап.
3. Үшбұрыштың екі бұрышының қосындысы 78° -қа тең. Үшінші бұрышын тап.
4. 10-суреттегі белгісіз бұрышты тап.

10



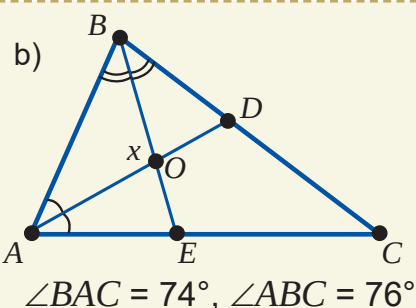
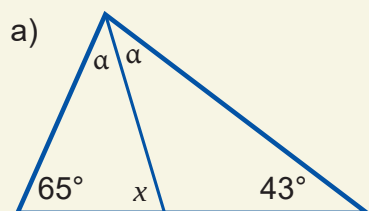
5. 11-суретте белгісіз бұрышты тап.

11

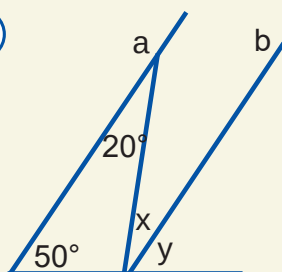


6. 12-суретте белгісіз бұрышты тап.

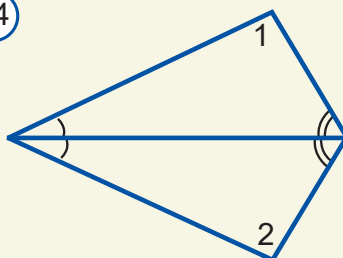
12



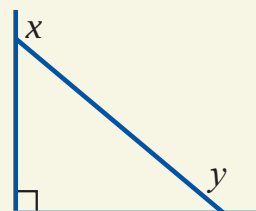
13



14



15



7. 13-суретте $a \parallel b$, x пен y -ті тап.

8. 14-суретте $\angle 1 = \angle 2$ екендігін дәлелде.

9. 15-суретте $x + y$ -ті тап.

10*. Үшбұрыш бұрыштары α , β , γ үшін $\alpha = (\beta + \alpha) / 2$ болса, α -ны тап.

11. Тең қабырғалы үшбұрыш бұрыштарын тап.

12. Тең бүйірлі тік бұрышты үшбұрыш бұрыштарын тап.

13. Егер тең бүйірлі үшбұрыш бұрыштарынан бірі а) 50° ; б) 60° ; с) 105° болса, олардың бұрыштарын тап.

14. Үшбұрыштың екі сыртқы бұрышы 120° және 135° болса, ішкі бұрыштарын тап.

15. Үшбұрыштың ішкі бұрыштарынан бірі 30° -қа тең, сыртқы бұрыштарынан бірі 60° -қа тең. Үшбұрыштардың қалған ішкі бұрыштарын тап.

16. 16-суретте белгісіз бұрышты тап.

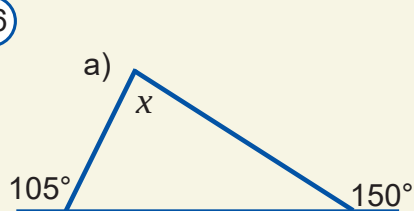
17. 17-суретте белгісіз бұрышты тап.

18*. Үшбұрыштың сыртқы бұрыштарының қосындысын есепте.

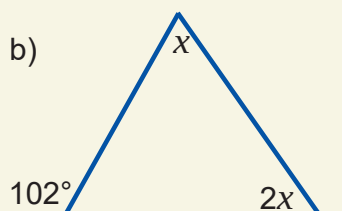
19. Үшбұрыш екі ішкі бұрышының өлшемдері қатынасы $5 : 9$ сияқты, үшінші ішкі бұрышы осы бұрыштардың кішісінен 10° -ға кіші. Үшбұрыштың ішкі бұрыштарын тап.

20. Егер 18-суретте $a \parallel b$ болса, x -ті тап.

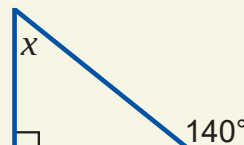
16

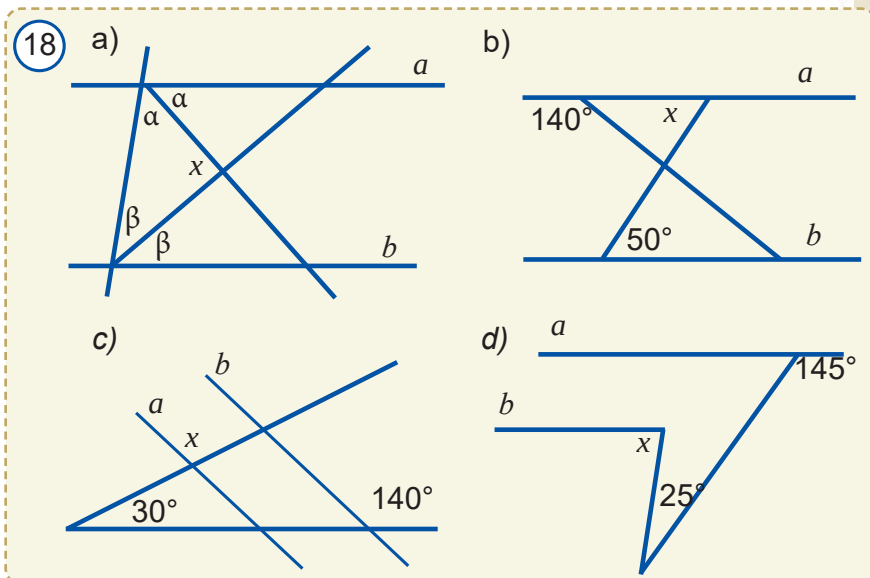
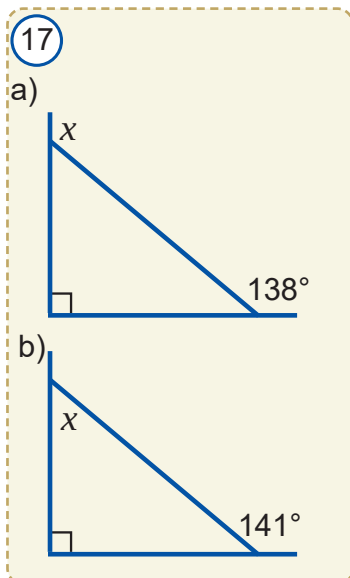


b)



c)





21. Үшбұрыштың 108° -ты бұрышына сыбайлас болмаған ішкі бұрыштардың қатынасы $5 : 4$ сияқты. Осы ішкі бұрыштарды тап.

22*. 19-суретте бейнеленген бесбұрыш бұрыштарының қосындысын тап.

23. 20-суретте белгісіз бұрыштарды тап.

24. Екі бұрышы тең болған үшбұрышты тең бүйірлі екендігін көрсет.

25. Тең бүйірлі үшбұрыштың бір бұрышы а) 120° ; б) 70° болса, оның қалған бұрыштарын тап.

26. Тең бүйірлі үшбұрыштың негізіндегі бұрыштарынан бірі а) 15° ; б) 75° болса, қалған бұрыштары неге тең?

27. Екі үшбұрыштың барлық сәйкес қабырғалары өзара параллель болса, олардың сәйкес бұрыштары тең болуын дәлелде.

28. Егер 21-суретте $AB = BC$, $\angle ABC = 50^\circ$, AE және FC – биссектрисалар болса, $\angle AOB$ және $\angle EOC$ бұрыштарын тап.

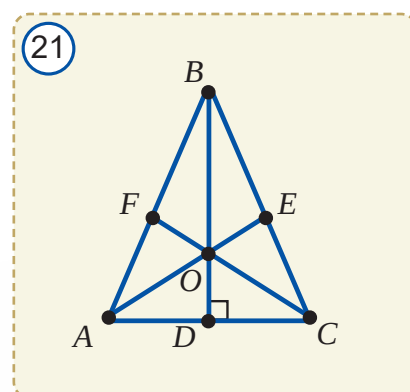
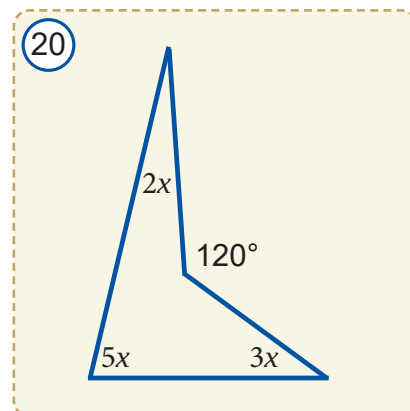
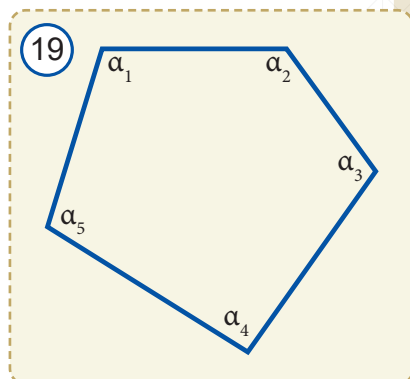
29. 22-суреттегі белгісіз – x бұрышты тап.

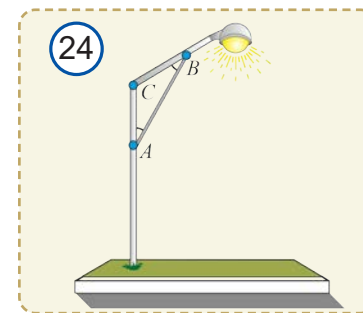
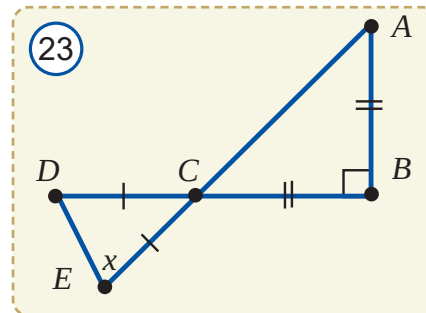
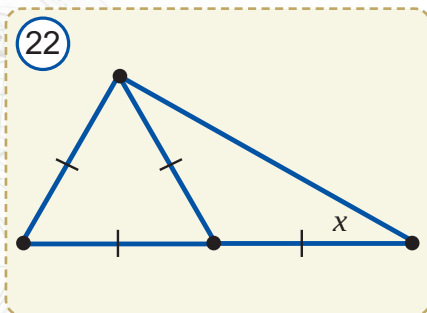
30. 23-суреттегі белгісіз – x бұрышты тап.

31. Екі үшбұрыштың барлық сәйкес қабырғалары өзара перпендикуляр болса, олардың сәйкес бұрыштары тең болады ма? Жауабыңды тұжырымда.

32. Бір үшбұрышты тек бір сызық бойлап қиып екі сүйір бұрышты үшбұрыш пайда ету мүмкін бе? Жауабыңды тұжырымда.

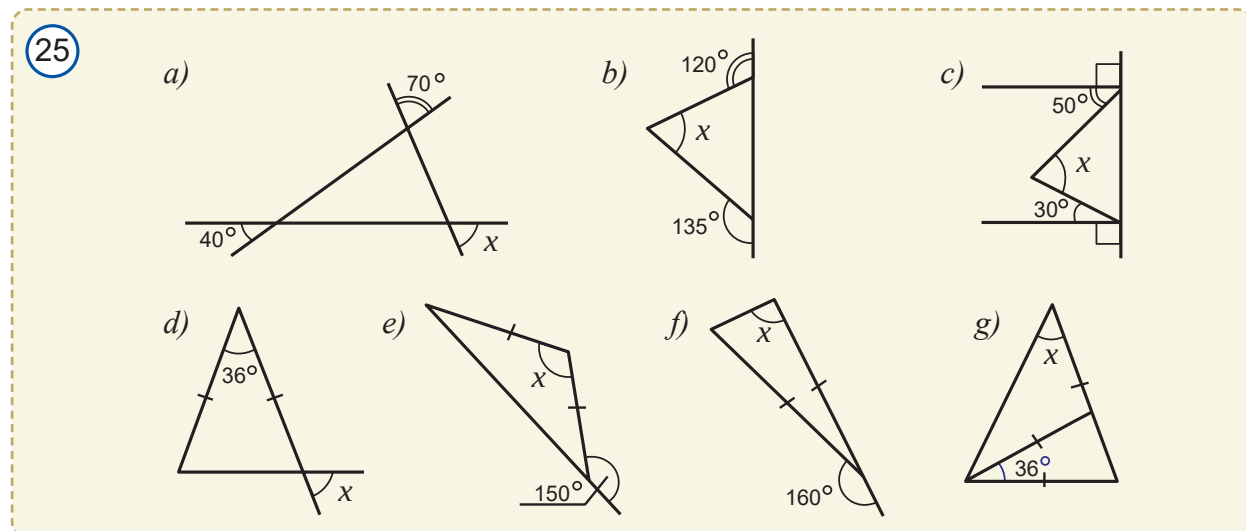
33. ABC үшбұрышта $\angle A + \angle B = 110^\circ$; және $\angle B + \angle C = 100^\circ$. Оның ішкі бұрыштарын тап.



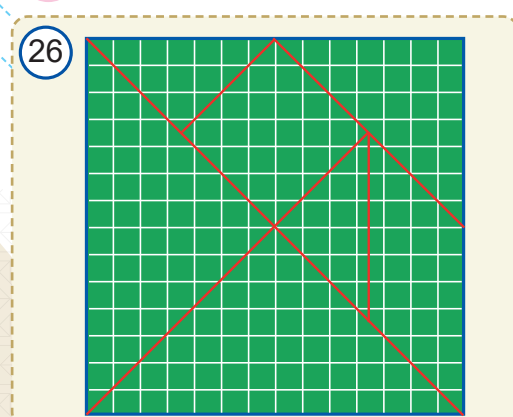


34. 24-суретте бейнеленген үстөл шырағына сай жасалған, $\angle C = 110^\circ$ және $\angle A = \angle B$. A мен B бұрыштардың градус өлшемін тап. Неге ол дәл осы пішінде жасалған, деп ойлайсың?

35. 25-суретте белгісіз бұрышты тап.

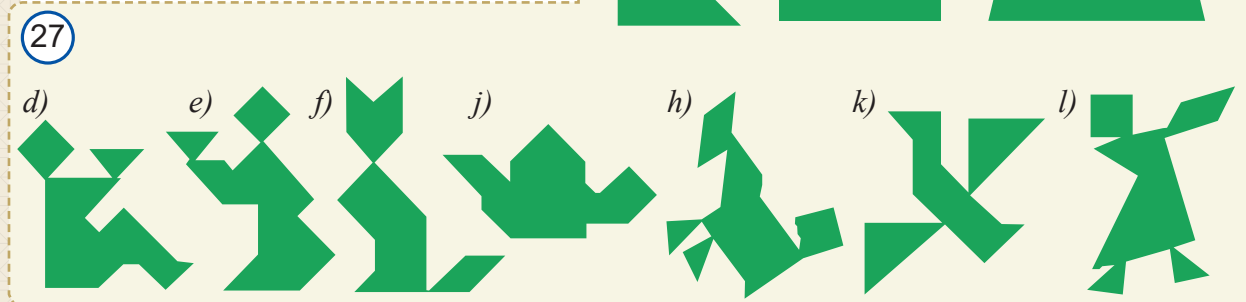


Геометриялық басқатырма



«Танграм» атты қытай қуыршағын жаса. Бұл үшін квадратты қалың қағазға сыз және 26-суретте көрсетілгендей, оны жеті бөлікке бөліп, қырқып ал.

Кейін «Танграм» бөліктерінің барлығынан пайдаланып, 27-суретте бейнеленген пішіндерді пайда ет.



19 ТІК БҰРЫШТЫ ҮШБҰРЫШ

19.1. Тік бұрышты үшбұрыштың қасиеттері

Ескертіп өтеміз, тік бұрышты үшбұрыштың бір бұрышы тік (90°) болып, қалған екі бұрышы болса сүйір бұрыштан тұрады. Тік бұрышты үшбұрыштың тік бұрышы қарама-қарсы қабырғасы **гипотенуза**, қалған екі қабырғасы болса **катет** деп аталады. Тік бұрышты үшбұрыштың кейбір қасиеттерін көріп шығайық.



1-қасиет. Тік бұрышты үшбұрыштың екі сүйір бұрыштары қосындысы 90° -қа тең.

Шынында да, үшбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы 180° -қа тең. Тік бұрышты үшбұрыштың бір бұрышы болса 90° -қа тең. Сол үшін қалған екі бұрышы қосындысы $180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ -қа тең болады.



2-қасиет. Тік бұрышты үшбұрыштың катеті гипотенузасының жартысына тең боса, онда осы катетке қарсы жатқан бұрышы 30° -қа тең болады.

Дәлелдеу. Айтайық, 1-суретте бейнеленген ABC тік бұрышты үшбұрыш берілген болып, онда $\angle ACD = 90^\circ$ және $\angle ABC = 30^\circ$ -ға тең болсын. Онда $\angle BAC = 60^\circ$ болады.

$$AC = \frac{AB}{2} \text{ екендігін көрсетеміз.}$$

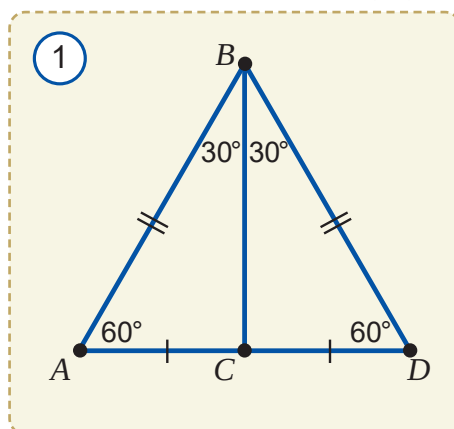
Берілген үшбұрышқа тең DBC үшбұрыштарды 1-суретте көрсетілгендей етіп жасаймыз. Нәтижеде барлық бұрыштары 60° -қа тең болған ABD үшбұрышқа ие боламыз.

Демек, ABD үшбұрыш тең қабырғалы. Негізінен, $AB = AD$ болады. Бірақ:

$$AD = AC + CD = 2$$

$$\text{Сондай қылып, } AB = 2 AC, \text{ яғни } AC = \frac{AB}{2}.$$

Қасиет дәлелденді.



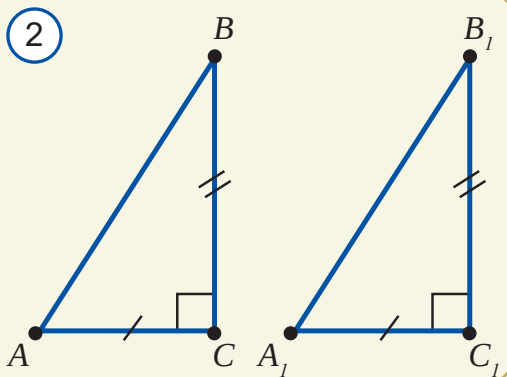
3-қасиет. Тік бұрышты үшбұрыштың катеттерінен бірі гипотенузасының жартысына тең болса, бұл катет 30° -ты бұрыш қарсысында жатады.

Бұл қасиет 2-қасиетке кері дәлел болып, оны өздігіңше дәлелде.

19.2. Тік бұрышты үшбұрыштардың теңдік белгілері.

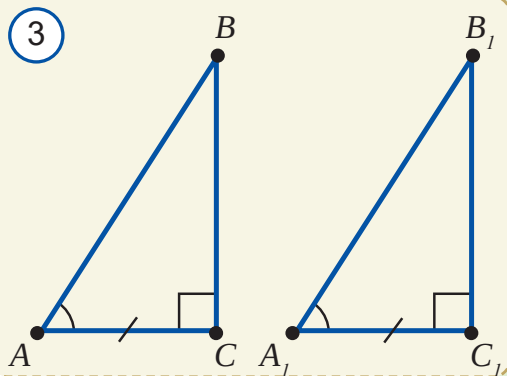
ABC және $A_1B_1C_1$ тік бұрышты үшбұрыштар берілген болсын. Бұл үшбұрыштардың біреуден бұрышы тік болғандығы үшін, бұл бұрыштар әрқашан өзара тең. Сондықтан тік бұрышты үшбұрыштар үшін үшбұрыштардың теңдік белгілері әлдеқайда қарапайым болды.

Тік бұрышты үшбұрыштар үшін катет бойынша (КК белгісі), катет және сүйір бұрыш бойынша (КБ белгісі) және гипотенуза және катет бойынша (ГК белгісі) сияқты теңдік белгілерін келтіреміз.



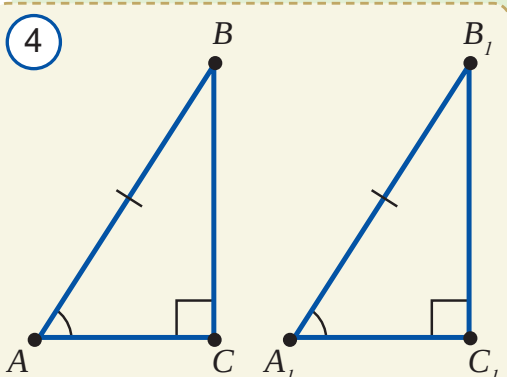
Теорема. КК белгісі. Бір тік бұрышты үшбұрыштың катеттері екінші тік бұрышты үшбұрыштың катеттеріне сәйкесінше тең болса, бұл үшбұрыштар өзара тең болады (2-сурет).

Бұл белгі үшбұрыштар теңдігінің ҚБҚ – белгісінен келіп шығады.



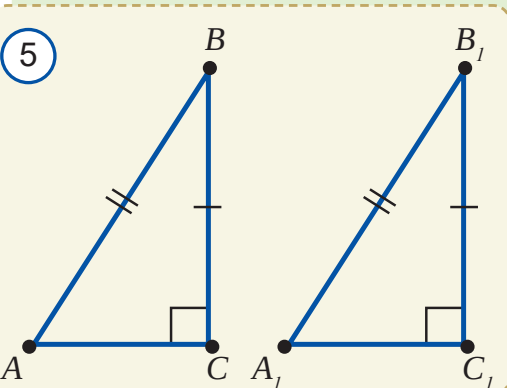
Теорема. КБ белгісі. Бір тік бұрышты үшбұрыштың катеті мен оған жабысқан сүйір бұрышы, екінші тік бұрышты үшбұрыштың катеті және оған жабысқан сүйір бұрышына тең болса, бұл үшбұрыштар өзара тең болады (3-сурет).

Бұл белгі үшбұрыштар теңдігінің БҚБ белгісінен келіп шығады.



Теорема. ГБ белгісі. Бір тік бұрышты гипотенуза және бір сүйір бұрышы екінші тік бұрышты үшбұрыштың гипотенузасы және бір сүйір бұрышына тең болса, бұл үшбұрыштар өзара тең болады (4-сурет).

Бұл белгі үшбұрыштар теңдігінің БҚБ белгісінен келіп шығады.



Теорема. ГК белгісі. Бір тік бұрышты үшбұрыштың гипотенузасы мен катеті басқасының сәйкес гипотенузасы мен катетіне тең болса, онда мұндай бұрыштар тең болады.

Кел, бұл белгіні дәлелдейік.

ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштар берілген (5-сурет) және оларда $\angle C = 90^\circ$, $\angle C_1 = 90^\circ$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$ болсын.

Онда $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ екендігін көрсетеміз.

Дәлел. ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштарының екіден тараптары өзара тең: $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$. Егер ABC және $A_1B_1C_1$ бұрыштардың

теңдігін көрсетсек, ҚБҚ белгісіне орай, бұл бұрыштар өзара тең болады.

Бұл үшін, $A_1B_1C_1$ үшбұрышты ABC үшбұрыш пен BC және B_1C_1 катеттер беттесіп тұтастырып қатарластырып қоямыз (6-сурет).

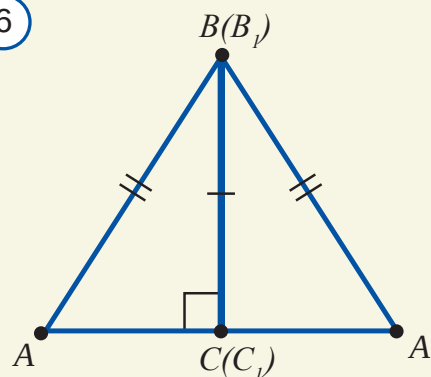
Онда $\angle C$ мен $\angle C_1$ тік бұрыш болғаны үшін CA мен C_1A_1 сәулелер жазық бұрышты құрайды, яғни A, C, C_1 және A_1 нүктелер бір түзу сызықта жатады.

Нәтижеде, ABA_1 тең бүйірлі үшбұрыш болады. Бірақ, тең бүйірлі үшбұрышта негізге түсірілген биіктік биссектриса да болады (83-беттегі теорема қорытындысына орай).

Демек, $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$.

Теорема дәлелденді.

6



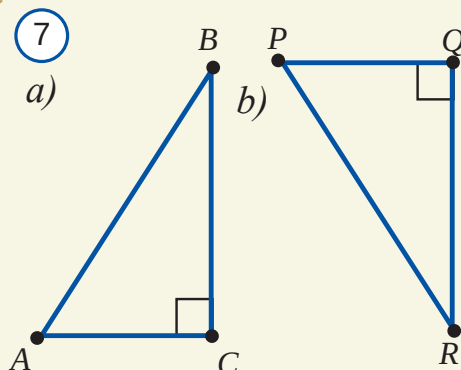
Тақырып бойынша сұрақтар

1. Тік бұрышты үшбұрыштың қабырғалары қалай аталады?
2. Тік бұрышты үшбұрыштың сүйір бұрыштарының қосындысы неге тең?
3. Тік бұрышты үшбұрыштың бұрыштарынан бірі доғал болуы мүмкін бе?
4. Тік бұрышты үшбұрыштың неше биіктігі бар?
5. Тік бұрышты үшбұрыштың сүйір бұрыштарының қосындысы 120° -қа тең бола ала ма? Неліктен?
6. Тік бұрышты үшбұрыштың 30° -ты бұрышқа қарама-қарсы катет пен гипотенузасы арасында қандай қатынас бар?
7. Тік бұрышты үшбұрыштардың қасиеттерін айт және түсіндір.
8. Тік бұрышты үшбұрыштардың теңдік белгілерін айт және түсіндір.
9. Тік бұрышты үшбұрыштардың бір катеті мен бір бұрышы сәйкес түрде тең болса, бұл үшбұрыштар тең болады ма?
10. Егер тік бұрышты ABC үшбұрышында $\angle A + \angle B = \angle C$ болса, оның катеттері мен гипотенузасын көрсет.

Практикалық жаттығу және қолдану

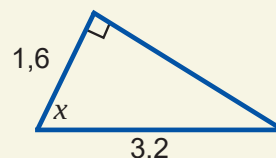
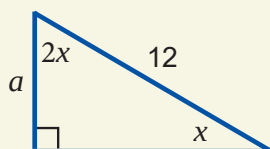
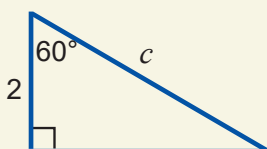
1. 7a-суреттегі ACB тік бұрышты үшбұрыштың гипотенузасы мен катеттерін жаз. Бұл үшбұрыштың қайсы қабырғасы ұзын: а) AB немесе BC ; б) AB немесе AC ?
2. 7b-суреттегі PQR тік бұрышты үшбұрыштың гипотенузасы мен катеттерін жаз. Бұл үшбұрыштардың қайсы қабырғалары ұзын: а) PR немесе PQ ; б) PR немесе QR ?
3. Тік бұрышты үшбұрыштың бір сүйір бұрышы 23° -қа тең. Осы үшбұрыштың үшінші бұрышын тап.

7
a)



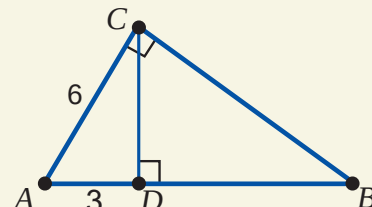
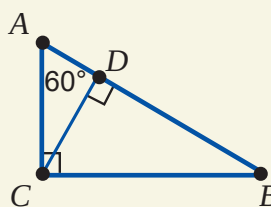
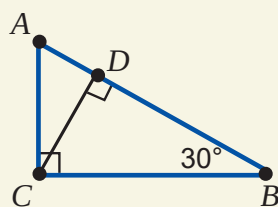
4. Тік бұрышты үшбұрыштың бір бұрышы: а) 78° ; б) 43° . Қалған бұрыштарын тап.
5. Тік бұрышты үшбұрыштың сүйір бұрыштарынан біреуі 30° , гипотенузасы 34° -қа тең. Бұл үшбұрыштардың бұрыштары және катеттерінен бірін тап.
6. Тік бұрышты үшбұрыштың гипотенузасы 14-ке, катеттерінен бірі 7-ге тең. Бұл үшбұрыштың бұрыштарын тап.
7. 8-сурет: а) $c = ?$ б) $a = ?$ д) $x = ?$

8



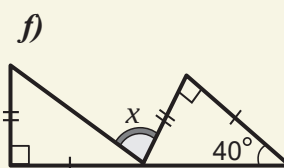
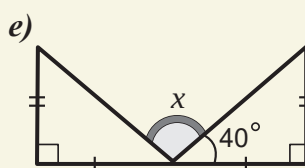
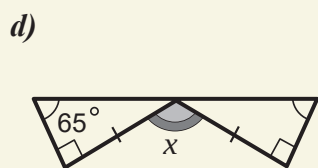
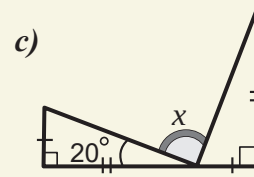
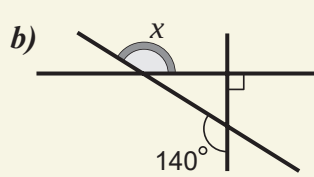
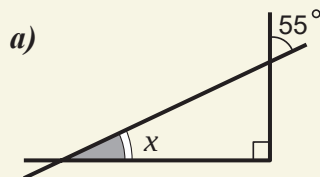
8. 9-сурет: а) $AB = 20$, $AD = ?$; б) $AB = 18$, $BD = ?$ с) $BD = ?$.

9

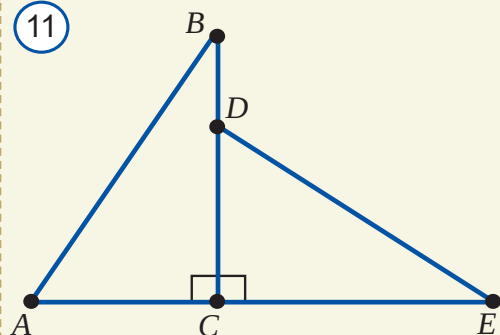


9. 10-суреттегі белгісіз бұрыштады тап.

10



11



10. Егер 11-суретте: а) $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$; б) $BC = DE$, $AB = CE$; с) $AC = CD$, $BC = CE$; е) $AB = DE$ болса, ACB мен DCE үшбұрыштар тең болады ма?
11. Тік бұрышты ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштарда A мен A_1 тік бұрыштар, BD және BD_1 биссектрисалар және $\angle B = \angle B_1$, BD және B_1D_1 болса, $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$ екендігін дәлелде.



Теорема. Тік бұрышты үшбұрыштың гипотенузасы түсірілген медианасы гипотенузасының жартысына тең.

ABC тік бұрышты үшбұрышта AB – гипотенуза және CD – медиана, яғни $AD = DB$ болсын (1-сурет). $CD = \frac{AB}{2}$ екендігін дәлелдейміз.

Дәлелдеу. Қосымша жасауларды амалға асырамыз: CB қабырғасының B нүктесінен перпендикуляр шығарамыз. Онда E нүктені $AC = EB$ деп белгілейміз және CE кесіндіні жасаймыз.

ABC және EBC тік бұрышты үшбұрыштарды қараймыз. Оларда CB катет жалпы және жасауына орай $AC = EB$. Онда тік бұрышты үшбұрыштардың KK белгісіне орай бұл үшбұрыштар өзара тең болады. Негізінен, $\angle ABC = \angle ECB$ болады. Бұл CDB үшбұрыш тең бүйірлі және $CD = DB$ екендігін білдіреді.

Бірақ, шартқа орай $DB = \frac{AB}{2}$.

Бұдан $DB = \frac{AB}{2}$ екендігі келіп шығады.

Теорема дәлелденді.

Есеп. 2-суреттегі ABC үшбұрыш тең бүйірлі екендігін дәлелде.

Шешуі. $\angle AED = \angle BFD$, өйткені олардың гипотенузалары және біреуден сүйір бұрыштары тең. CED және CFD – тік бұрышты үшбұрыштар. $ED = FD$ тағы CD гипотенуза жалпы болғандықтан, тік бұрыштар теңдігінің KK белгісіне орай $\angle CED = \angle CFD$.

Демек, $\angle ADC = \angle BDC$, яғни $AC = BC$ және $\angle ABC$ тең бүйірлі.

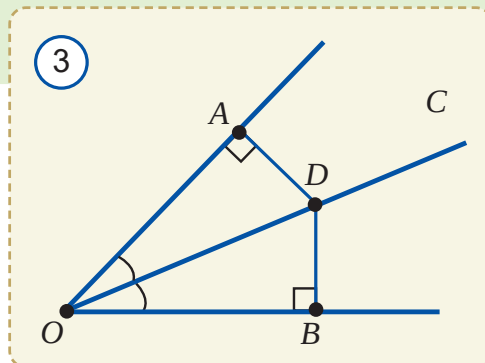
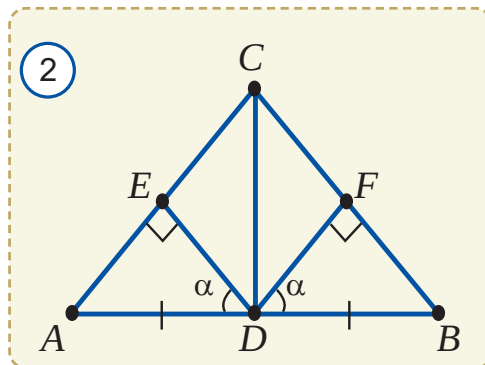
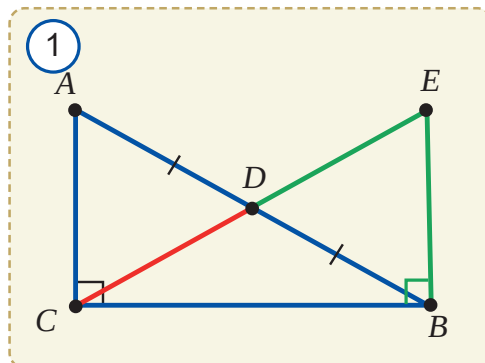
Бұрыш биссектрисасының қасиеті

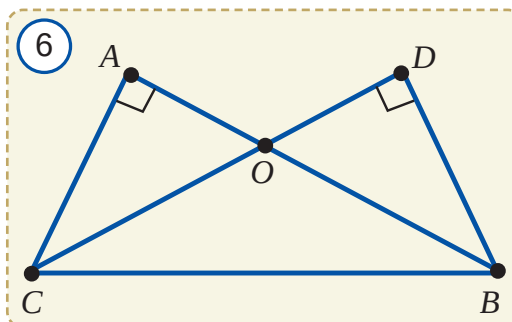
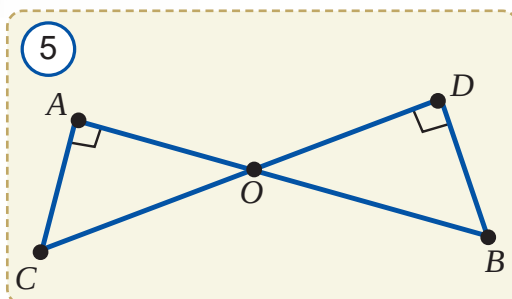
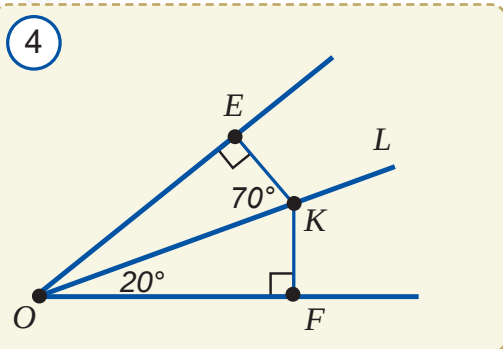
Есінде болса, нүктеден түзу сызыққа дейін болған қашықтық деп нүктеден түзу сызыққа түсірілген перпендикуляр ұзындығына айтылған еді.



Теорема. Бұрыш биссектрисасының кез келген нүктесінен бұрыш қабырғаларына дейін болған қашықтықтар өзара тең.

Дәлелдеу. Айтайық, O бұрыш және оның биссектрисасы OC берілген болсын (3-сурет). OC биссектрисасында кез келген D нүкте аламыз және берілген бұрыш қабырғаларына DA мен DB перпендикуляр түсіреміз.





OAD және OBD тік бұрышты үшбұрыштарда:
1) $\angle AOD = \angle BOD$ шартқа орай; 2) OD – жалпы гипотенуза.

Тік бұрышты үшбұрыштар теңдігінің GB – белгісіне сәйкес, $\angle OAD = \angle OBD$. Сондай-ақ, $DA = DB$

Теорема дәлелденді.

Есеп. EOF бұрыштың OL биссектрисасында K нүкте алынған (4-сурет). Егер $EK \perp OE$, $KF \perp OF$ және $\angle KOF = 20^\circ$ болса, а) EOK және OKF бұрыштарды; б) EOF және EKF бұрыштарды тап.

Шешуі. 1. Жоғарыда қарастырылғандай $\triangle EOK = \triangle FOK$.

Сол үшін $\angle EOK = \angle FOK = 20^\circ$ және $\angle OKF = \angle OKE = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ$.

2. $\angle EOF = 2 \cdot \angle KOF = 40^\circ$,

$\angle FKE = \angle FKO + \angle OKE = 70^\circ + 70^\circ = 140^\circ$.

Жауабы: а) 20° және 70° ; б) 40° және 140° .



Тақырыпқа байланысты сұрақтар

1. Тік бұрышты үшбұрыштың гипотенузаға түсірілген медианасы гипотенузаның қандай бөлімін ұйымдастырады?
2. Бұрыш биссектрисасының қасиетін айт және түсініктеме бер.



Практикалық жаттығу және қолдану

1. Егер 5-суретте: а) $OC = OB$, б) $AC = BD$; в) $AO = OD$; г) $AC = OD$; д) $\angle OCA = \angle OBD$ болса, OAC және ODB үшбұрыштар тең болады ма?
2. Егер 6-суретте: а) $AC = BD$; б) $OA = OD$; в) $\angle OCB = \angle OBC$; д) $BC = OD$; е) $\angle ACB = \angle DBC$ болса, BAC және CDB үшбұрыштар тең болады ма?
3. ABC үшбұрышта BD биіктік жүргізілген. Егер $AD = DC$ болса, ABC үшбұрыштың тең бүйірлі екендігін дәлелде.
4. Сүйір бұрышты ABC үшбұрышта AA_1 мен CC_1 биіктіктері тең. $\angle BAC = \angle BCA$ теңдікті дәлелде.
5. Бұрыш биссектрисасының кез келген нүктесі оның қабырғаларынан тең қашықтықта орналасқанын дәлелде.
6. Бұрышы AOB биссектрисасынан алынған нүктеден OA сәулеге дейін болған қашықтық 7 см болса, осы нүктеден OB сәулеге дейін болған қашықтықты тап.
7. O бұрыш және оның биссектрисасында C нүкте берілген. Егер $\angle O = 60^\circ$ және $OC = 14 \text{ см}$ болса, C нүктеден бұрыш қабырғаларына дейін болған қашықтықты тап.
- 8*. Тең бүйірлі тік бұрышты үшбұрыштардың гипотенузасына түсірілген биіктік гипотенузаның жартысына теңдігін көрсет.

9. AOB бұрыш ішінде N нүкте алынған. Егер $AN=BN$, $OA \perp AN$ және $OB \perp BN$ болса, N нүкте AOB бұрыш биссектрисасында жатуын дәлелде.

10*. 7-суретте тор қағазға сызылған бұрыштың бір бөлігі бейнеленген. Қағаздың бұрыш төбесі орналасқан бөлігі жыртылып кеткен. A мен B нүктелер бұрыш қабырғаларынан тең алыстағаны белгілі. Бұрыш биссектрисасын қалай салуға болады.

11. 8-суретте бейнеленген бесбұрыш бұрыштары қосындысын тап.

12. 9-суретте бейнеленген куб сыртында орналасқан үшбұрыштың санмен белгіленген бұрыштары қосындысын тап.

13. ABC тік бұрышты үшбұрышта C тік бұрыш және $AB=12$ және $CD=DB$ болса, CD -ні тап (10-сурет).

14. Тік бұрышты үшбұрыштардың гипотенузаға түсірілген медианасы 8 см . Егер үшбұрыштардың бір бұрышы 60° -қа тең болса, бұл бұрышқа жабысқан қабырғаларын тап.

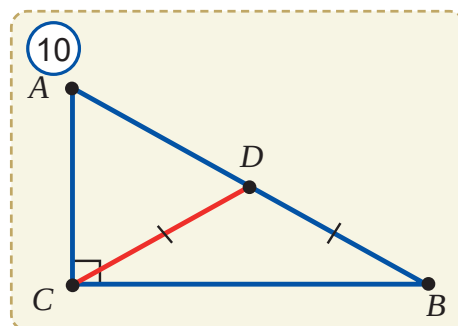
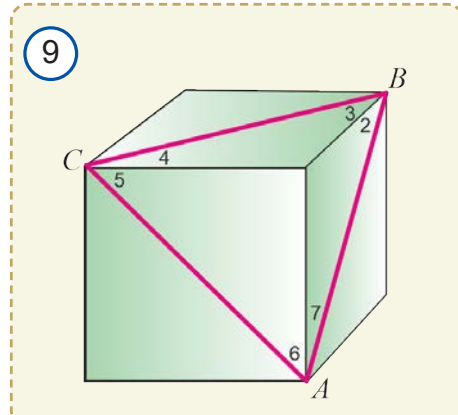
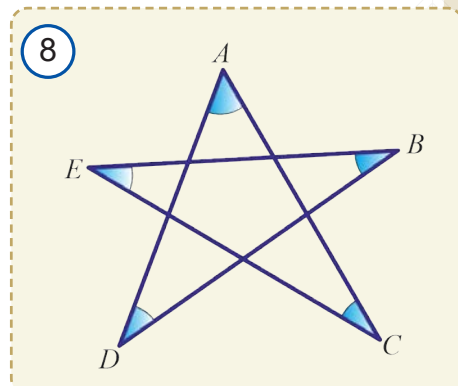
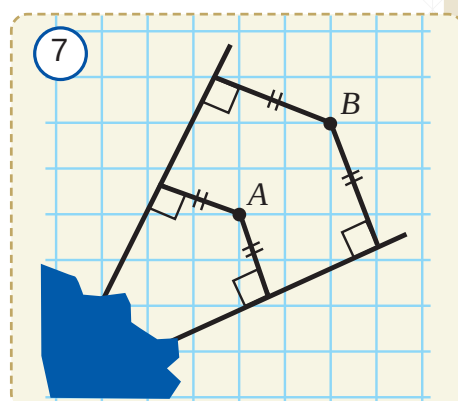
15*. Үшбұрыштың екі биссектрисасы қиылысқанда нүкте үшбұрыш үш қабырғадан тең қашықтықта болуын дәлелде.

16*. Тең бүйірлі ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштардың AC және A_1B_1 негіздері және табанына түсірілген BD және B_1D_1 биіктіктерге тең. $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$ теңдікті дәлелде.

17*. Тең бүйірлі ABC үшбұрышта AC негіз және AD тағы BE биіктіктер 50° -ты бұрыш астында қиылысады. Үшбұрыштардың бұрыштарын тап.

18*. Тік бұрышты үшбұрыштардың біреуден катеті және гипотенузаға түсірілген биіктігі бойынша теңдікті дәлелде.

19*. Тік бұрышты үшбұрыштардың біреуден катеті және гипотенузаға түсірілген биссектрисасы бойынша теңдікті дәлелде. Математикалық сөйлем анық, тола және осы мен бірге қысқа, артықша сөздерсіз болуы керектігі белгілі. Төмендегі сөйлемдерден анықтап көр?



Геометрияда анықтық және қысқалық

1. Тік бұрышты үшбұрыштың екі сүйір бұрыштары қосындысы 90° -қа тең.
2. Егер тік бұрышты үшбұрышта катет гипотенузаның жартысына тең болса, оның қарсысында жатушы сүйір бұрыш 30° -қа тең болады.
3. Ең аз қабырғалы көпбұрыш: а) шеңбер орталығынан өтуші ватар; б) негізі бүйір қабырғасына тең болған тең бүйірлі үшбұрыш.

21

ҮШБҰРЫШТАРДЫҢ ҚАБЫРҒАЛАРЫ ЖӘНЕ БҰРЫШТАРЫ АРАСЫНДАҒЫ ҚАТЫНАСТАР

21. Үшбұрыштардың қабырғалары және бұрыштары арасындағы қатынастар



Теорема. Үшбұрыштың үлкен қабырғасына қарсы үлкен бұрыш жатады.

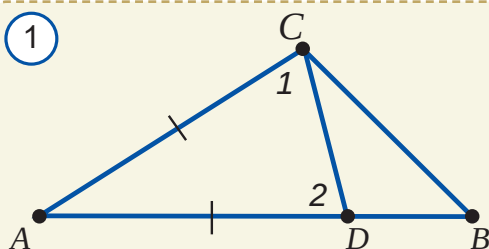


$\triangle ABC$, $AB > AC$ (1-сурет)



$\angle C > \angle B$

1



Дәлелдеу. AB сәулені сызамыз және оған AC қабырғаға тең AD кесіндіні қоямыз. $AB > AD$ болғаны үшін, D нүкте AB кесіндіге тиісті болады. Демек, CD сәуле C бұрыштың ішкі аймағында жатады және C бұрышты екі бұрышқа бөледі. Соған сәйкес $\angle C > \angle 1$.

ACD үшбұрышты тең бүйірлі етіп салғанымыз үшін $\angle 1 = \angle 2$.

$\angle 2$ CDB үшбұрыштың сыртқы бұрышы болғаны үшін $\angle 2 > \angle B$.

Бұл жеке көрсетілген үш қатынастан, $\angle C > \angle 1 = \angle 2 > \angle B$, яғни $\angle C > \angle B$ екенін аламыз. Теорема дәлелденді.

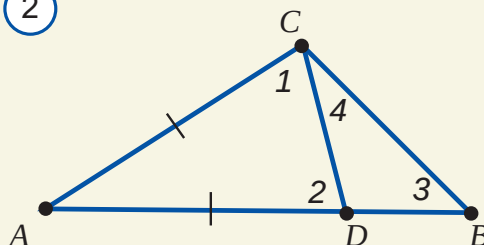
Сонымен, бұл теоремаға кері теорема да орынды.



Кері теорема. Үшбұрыштың үлкен бұрышы қарсысында үлкен қабырға жатады.

Бұл теореманың дәлелдеуін өз бетіңше орында.

2



1-нәтиже. Тең қабырғалы үшбұрышта тең қабырғалар қарсысында тең бұрыштар жатады.

Оның дұрыстығын алдын да дәлелдеген едік.

1-есеп. 2-суретте берілген мәліметтерден пайдаланып, $\angle 1 > \angle 3$ екендігін дәлелде.

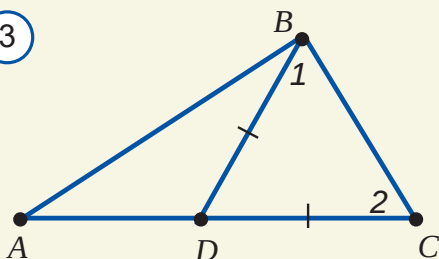
Шешуі. $\angle 2 > \angle 3$ екендігі анық, өйткені $\angle 2$ BDC үшбұрыштың сыртқы бұрышы болып, сыртқы бұрыш қасиетіне орай, $\angle 2 = \angle 3 + \angle 4$ және $\angle 4 > 0$.

ACD тең бүйірлі үшбұрыш болғаны үшін $\angle 1 = \angle 2$. Демек, $\angle 1 > \angle 3$ болады.

2-есеп. 3-суретте берілгендерден пайдаланып, $AB < AC$ екендігін көрсет.

Шешуі. BDC – тең бүйірлі үшбұрыш (өйткені $BD = DC$). Демек, $\angle 1 = \angle 2$ болады. $\angle 1 < \angle ABC$ болғаны үшін $\angle 2 < \angle ABC$. Үлкен бұрыш қарсысында үлкен қабырға жатқаны үшін $AB < AC$ болады.

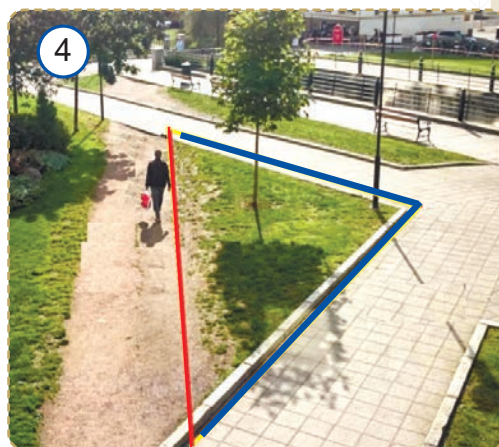
3



21. Үшбұрыштың теңсіздігі

Белсендіруші сұрақтар

Адамдар қала жолдарында жолақтар қалып, көк майсалар үстінен жүріп қалдырған іздеріне көзің түскен болуы керек (4-сурет). Әдетте олар асығып тұрғанда жолды қысқарту мақсатында осындай жол тұтады және өздері білмеген жағдайда «үшбұрыш теңсіздігі» деп аталған үшбұрыштың геометриялық қасиеттерінен қолданады. Бұл қандай қасиет? Төменде осы туралы сөз барады.



Үшбұрыштың қалаған бір қабырғасы қосындысынан кіші.



$\triangle ABC$ (1-сурет)



$AC < AB + BC$

Дәлелдеу. AB түзу сызыққа BC кесіндіге тең BD кесіндіні қоямыз және C мен D нүктелерін байланыстырамыз (5-сурет). Нәтижеде BCD тең бүйірлі үшбұрыш пайда болады. Онда $\angle 1 = \angle 2$, өйткені $BC = BD$. Пішімінен түсінікті, $\angle ACD > \angle 1$.

Бұл жағдайда, $\angle ACD > \angle 2$, өйткені $\angle 1 = \angle 2$.

Бұл бұрыштар ACD үшбұрышқа тиісті. Енді үлкен бұрыш қарсысында үлкен қабырғаға жатуын есепке алсақ, $AC < AD$ теңсіздікке ие боламыз. Бұл жағдайда $C < AB + BD$ өйткені, $AD = AB + BD$. Одан $BD = BC$ екендігін есепке алсақ, $AC < AB + BC$ пайда етеміз.

Теорема дәлелденді.

Бұл теоремадан төмендегі нәтиже келіп шығады.

2-нәтиже. Бір түзу сызықта жатпаған кез келген үш – A , B және C нүкте үшін $AB < AC + BC$, $AC < AB + BC$ және $BC < AB + AC$ теңсіздіктер орынды.

Бұл теңсіздіктердің әрбірі **үшбұрыш теңсіздігі** деп аталады.

Егер A , B мен C нүктелер бір түзу сызықта жатса, жоғарыдағылардан бірі теңдікке айналады, қалғандары болса дұрыс күйінде қалады.

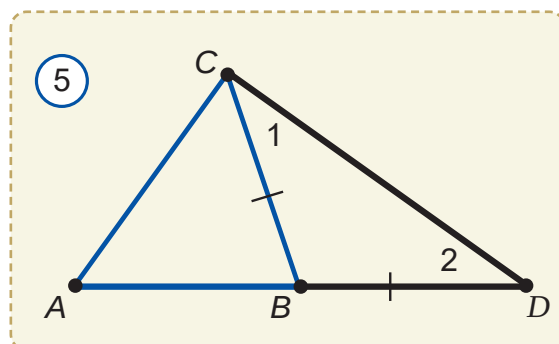
Мысалы, бұл нүктелер бір түзу сызықта жатып, A нүктеде B мен C нүктелер арасында жатса, $AC = AB + BC$, $AB < AC + BC$ және $BC < AB + AC$ қатынастар орынды болады.

3-нәтиже. Үшбұрыштардың қалаған бір қабырғасы қалған екі қабырғасының ұзындықтарының айырмасынан үлкен.

Шынында да, $AB < AC + BC$ көрінісіндегі үшбұрыш теңсіздіктерінен біреуін алып, төмендегі пішін орын ауыстыруларын орындаймыз: $AB - AC < BC$ немесе $BC > AB - AC$.

Дәл осы жолмен $AC < AB + BC$ теңсіздіктен $BC > AC - AB$ теңсіздігін пайда етеміз. $BC > AB - AC$ және $BC > AC - AB$ теңсіздіктерден $BC > |AB - AC|$ болады.

Сөйтіп, үшбұрыштардың кез келген қабырғасы қалған қабырғаларының қосындысынан кіші және айырмасы модульден үлкен болады.



Есеп. Үшбұрыштың екі қабырғасы 0,7 және 1,9. Егер үшінші қабырғасы бүтін сан екендігі белгілі болса, оны тап (6-сурет).

Шешуі. Берілген үшбұрыштың екі қабырғасы белгілі: 0,7 және 1,9.

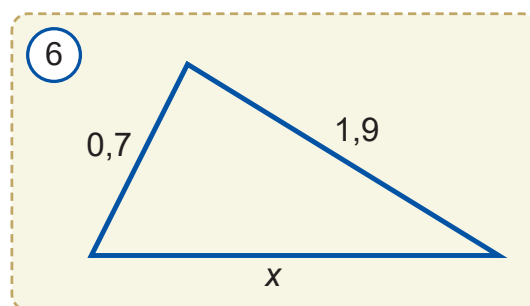
Үшінші қабырғасы үшбұрыш теңсіздігін қолданып табамыз: 1) $x + 0,7 > 1,9$ немесе $x > 1,2$; 2) $1,9 + 0,7 > x$ немесе $x < 2,6$.

Бұл екі теңсіздіктен $1,2 < x < 2,6$ ні пайда етеміз.

x – бүтін сан, тек $x = 2$ қосынды бұл қос теңсіздікті қанағаттандырады.

Демек, үшбұрыштардың белгісіз қабырғалары 2-ге тең.

Жауабы. 2.



Тақырыпқа байланысты сұрақтар

1. Үшбұрыштың үлкен бұрышы 60° -тан кіші болуы мүмкін бе? Үшбұрыштың кіші бұрышы 60° -тан үлкен болуы мүмкін бе?
2. ABC үшбұрышта: а) $AB < BC < AC$; б) $AB = AC < BC$ болса, үшбұрыш бұрыштарын салыстыр. A бұрыш доғал болуы мүмкін бе?
3. Үшбұрыштың доғал бұрышы қарсысында кіші қабырға жатуы мүмкін бе?
4. Үшбұрыш теңсіздігінің мазмұны неден құралады?
5. Үшбұрыш теңсіздігі қандай есептерді шешуде қолданылады?
6. Тік бұрышты үшбұрыштың гипотенузасы ұзын ба немесе катеті ме?



Практикалық жаттығу мен қолдану

1. ABC үшбұрышта $\angle A > \angle B > \angle C$ болса, үшбұрыштың ең ұзын қабырғасын анықта.
2. ABC үшбұрышта $\angle A = \angle B < \angle C$ болса, үшбұрыштың ең кіші қабырғасын анықта.
3. ABC үшбұрышта $AB = BC > AC$ болса үшбұрыштың: а) ең үлкен; б) ең кіші бұрышын анықта.
4. ABC үшбұрышта $AB > BC >$ болса үшбұрыштың: а) ең үлкен; б) ең кіші бұрышын анықта.
5. Ұзындықтары а) 2 м , 2 м және 3 м ; б) 1 дм , 2 дм және 3 дм болған кесінділерден үшбұрыш жасау мүмкін бе?
6. Ұзындықтары: а) 12 см , 23 см және 35 см ; б) 45 м , 22 м және 33 м болған кесінділерден үшбұрыш жасау мүмкін бе?
7. Қабырғалары: а) 2; 3; 4; б) 2; 2; 4; с) 3,6; 1,8; 5; д) 56; 38; 19 болған үшбұрыш бар ма?
8. Тең бүйрлі үшбұрыш қабырғалары: а) 7 және 3; б) 10 және 5; с) 8 және 5 болса, үшінші қабырғасын тап.
9. Үшбұрыштың периметрі 34 дм . Оның бір қабырғасы: а) 16 дм ; б) 17 дм ; с) 18 дм болуы мүмкін бе? Неге?
10. Үшбұрыштың периметрі 12-ге тең. Оның бір қабырғасы: а) 5; б) 6; с) 8-ге тең болуы мүмкін бе? Неге?

11*. ABC үшбұрышта: а) $BC = 9$, $AC = 8$, $AB = 7$; б) $BC = 9$, $AC = 8$; $AB = 8$; в) $BC = 9$, $AC = 9$, $AB = 8$ болса, оның ең үлкен және ең кіші бұрыштарын анықта.

12. Егер а) $\angle A = 25^\circ$, $\angle B = 100^\circ$; б) $\angle A = 40^\circ$, $\angle B = 100^\circ$; в) $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 60^\circ$ болса, ABC үшбұрыш қабырғаларын өзара салыстыр.

13. Үшбұрыштың қалаған қабырғасы оның қалған екі қабырғасы айырмасынан үлкен болуын дәлелде.

14. Тең бүйірлі үшбұрыштың периметрі 25 см , бір қабырғасы екінші қабырғадан 4 см артық және сыртқы бұрыштарынан бірі сүйір болса, үшбұрыштардың қабырғаларын тап.

15*. Ұзындықтары 2 , 3 , 4 , 5 және 6 -ға кесінділерден неше түрлі үшбұрыш салуға болады?

16. Керісінен үш A , B , C нүктелер үшін $AB + BC \geq AC$ теңсіздік орындалса, AB , BC және AC кесінділер қандай геометриялық пішіндерді өрнектейді?

17*. Үшбұрыш медианасы үшбұрыштың жарты периметрінен (периметрдің жартысынан) кіші екендігін дәлелде.

18. ABC үшбұрыштарда $AB = 12\text{ см}$, $BC = 10\text{ см}$, $CA = 7\text{ см}$ болса, үшбұрыштардың ең үлкен және ең кіші бұрыштарын тап.

19. Тең бүйірлі үшбұрыштың төбесіндегі бұрышы 62° болса, оның қайсы қабырғасы үлкен болады? 58° болса ше?

20. ABC үшбұрыштарда: а) $\angle A > \angle B > \angle C$; б) $\angle A = \angle B < \angle C$ болса, үшбұрыш қабырғаларын салыстыр.

21. Тең қабырғалы үшбұрыштың екі биссектрисасы қиылғанда пайда болған бұрыштарды тап.

22*. ABC үшбұрышта $AB > BC$ және $\angle A = 60^\circ$ болса, B бұрыш қандай өлшем қабылдауы мүмкін?

23*. Үшбұрыштың α , β және γ бұрыштары төбесін $\alpha < \beta + \gamma$, $\beta < \alpha + \gamma$, $\gamma < \alpha + \beta$ қатынастар орынды болса, бұл қандай үшбұрыш болады?

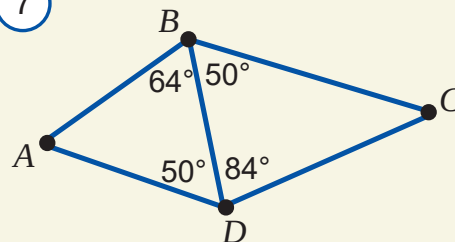
24*. 7-суретте ең үлкен және ең кіші кесінділерді көрсет. Жауабыңды түсіндір.

25. 8-суретте үшбұрыштың ең кіші қабырғасын тап.

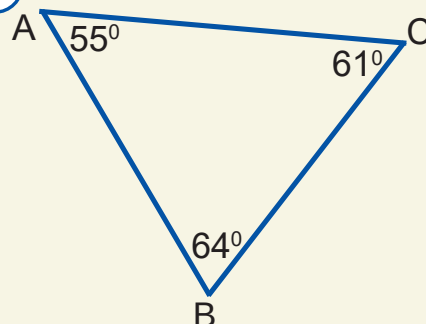
26. Мұндай үшбұрыштар бар ма? Есептің берілгені дұрыс па (9-сурет)?

27. Периметрі 20 см , бір қабырғасы екінші қабырғасынан 2 см ұзын, үшінші қабырғадан болса 4 см қысқа үшбұрыш бар ма?

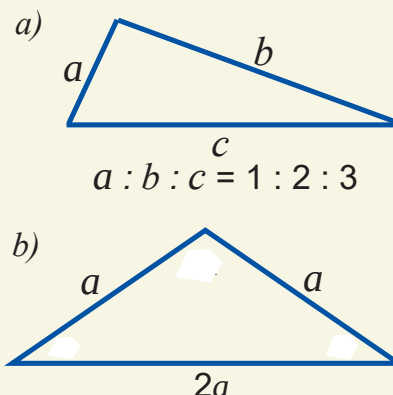
7

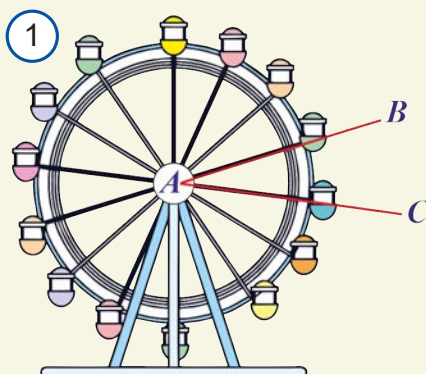


8



9



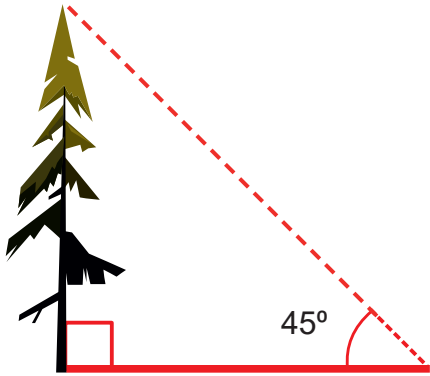


22.1. Практикалық жаттығу мен қолдану

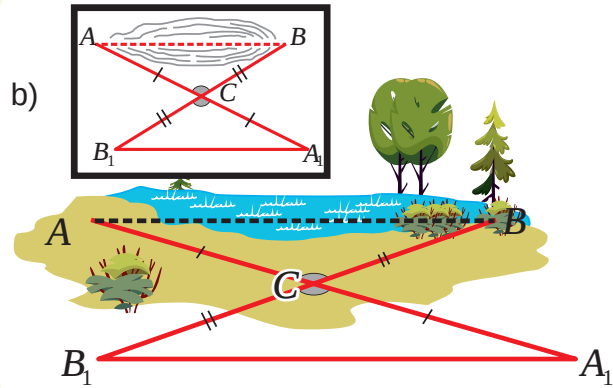
1. Адам үшбұрыш пішініндегі алаң бойлап әрекеттеніп, алдыңғы тұрған орнына қайтып келсе, ол жалпы неше градусқа бұрылған болады? Егер квадрат пішініндегі алаң бойлап әрекеттенсе ше?
2. 1-суретте су диірмені бейнеленген. Диірменнің бір бөлігі ASC пішінінде болып, онда $\angle A = 30^\circ$, $AB = AC$. $\angle B$ және $\angle C$ = ні тап.
3. Сым бөлегі ұзындығы бүтін сантиметрлерде өлшенеді. Одан үшбұрыш жасалуда. Үшбұрыштың бір қабырғасы 1 см , екінші қабырғасы 10 см . Үшбұрыштың үшінші қабырғасы ұзындығы қанша болады.
4. Қағазға бұрыш сызылды және оның төбесі жыртып тасталды. Бұл бұрыштың биссектрисасын жасай аласың ба?
5. Парақты бүктеу көмегінде параллель түзу сызықтардан пайда ету мүмкін бе?
6. 2-суретте белгіленген «Stop» жол белгісі пішіні қабырғалары тең болған сегізбұрыш көрінісінде. Оның ішкі және сыртқы бұрыштарының қосындысын тап.
7. 3-суретте бейнеленген автомобиль дөңгелегі бір секторының градус өлшемін тап.
8. Ұзындық өлшем жабдығы жиылатын метр (4-сурет) көмегінде қандай үшбұрыштар жасай аласың?
9. Бұл тарауда дағдыланған білімдерің негізінде 5-суретте бейнеленген ағаш, көл және жарлықтарды тікелей өлшеп болмайтын өлшемдер ұзындықтарын анықтау алгоритмін түз және негізде.
10. Тік бұрышты үшбұрыштар теңдігі белгісінен пайдаланып, 6-суретте бейнеленген өзеннің кеңдігін анықтау үшін орындалған жұмыстарды түсінтір және өзеннің кеңдігін табу тәсілін баяндап бер.
11. Құрушылар түзу сызықты туннельді бір уақытта таудың екі жағынан бастап ойып келуде (7-сурет). Өлшемдер $\angle A_1 = 50^\circ 10'$, $\angle B_1 = 48^\circ 20'$ және $\angle C = 80^\circ 5'$ көрсетіп тұрған болса, құрушылар дұрыс бағытты таңдаған ба?

5

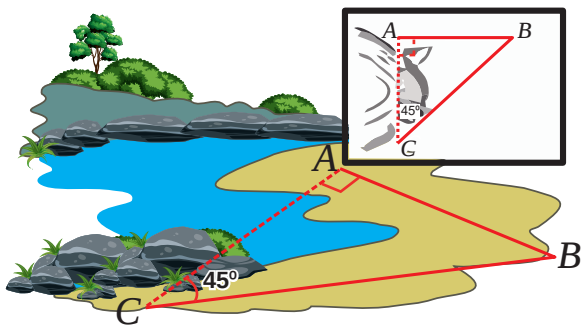
a)



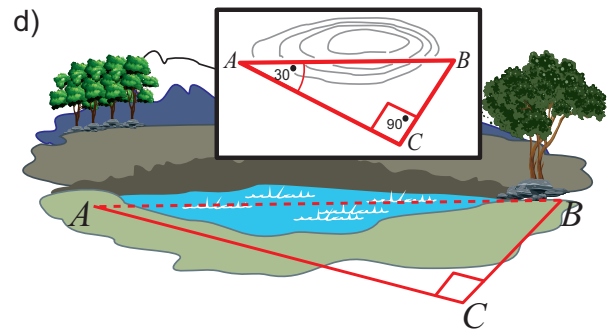
b)



c)



d)



Қызықты геометрия

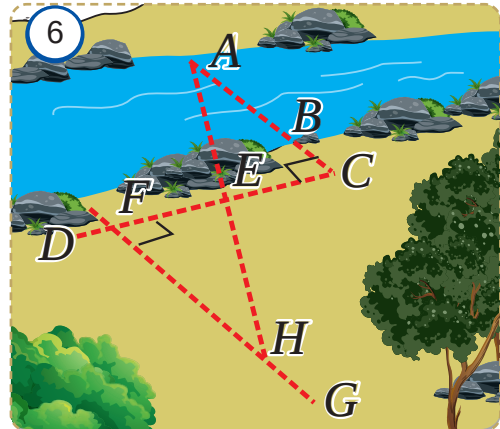
1. 8-суретте бейнеленген екі қабырғалы, яғни әр екі қабырғадан пайдаланып түзу сызық сызу мүмкін болған, әдеттегі оқу сызғышын қолданып:

- a) берілген бұрышты тең екіге бөл;
- b) берілген кесіндіні тең екіге бөл;
- d) берілген бұрыштан екі есе үлкен бұрыштар жаса;
- г) берілген кесіндіден екі есе үлкен бұрыштар жаса;
- д) түзу сызықтың нүктесіне параллель және берілген нүктеден өтуші түзу сызықты сыз;
- е) берілген нүктеден берілген түзу сызыққа перпендикуляр түсір;

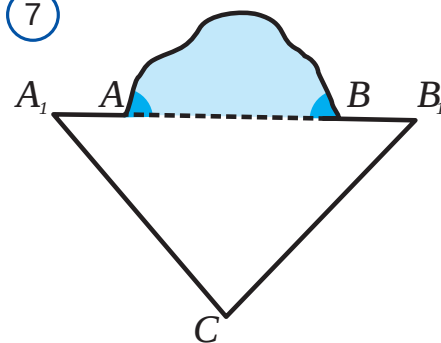
2. Квадратты тек:

- a) бір қабырғасы;
- b) диагонали;
- d) екі қарама-қарсы қабырғалары орталары;
- г) екі сыбайлас қабырғалары орталары;
- д) бір қыры мен орталығы;
- е) орталығы және бір қабырғасында берілген екі нүктесіне орай қалай тіктеу мүмкін?

6



7



8



22.2. Білімді сынап көр

1. Сөйлемде бос қалдырылған орындарды логикалық дұрыс сөздермен толтыр.

1. Үшбұрыштың ішкі бұрышына үшбұрыштың сыртқы бұрышы деп аталады.
2. Үшбұрыш 180° -қа тең.
3. Екі бұрыштың қосындысы 90° -қа тең болған үшбұрыш болады.
4. Үшбұрыштың сыртқы бұрышы оған сыбайлас болмаған ға тең.
5. Егер үшбұрыштардың бір бұрышы доғал болса, қалған екі
6. Тік бұрышты үшбұрыштың бұрыштары бола алмайды.
7. Үшбұрыштың әрбір қабырғасы қалған қабырғалар қосындысынан
8. Екі тік бұрышты үшбұрыштың гипотенузасы және тең болса, бұл үшбұрыштар тең болады.
9. Тік бұрышты үшбұрыштың катеттері тең болса, ол болады.
10. Тік бұрышты үшбұрыштың гипотенузасына түсірілген осы гипотенузаның жартысына тең.
11. Тік бұрышты үшбұрыштың катеті болса, ол 30° -ты бұрыш қарсысында жатады.
12. Бұрыш қабырғаларынан тең қашықтықта алыстаған нүкте осы бұрыштың жатады.

2. Төмендегі сөйлемдерде қате болса, оны тап және дұрыста.

1. Тік бұрышты үшбұрыштардың гипотенузасы және біреуден бұрыштары сәйкесінше тең болса, бұл үшбұрыштар тең болады.
2. Үшбұрыштардың ішкі және сыртқы бұрыштары қосындысы 180° -қа тең.
3. Үшбұрыштың сыртқы бұрышы екі сыртқы бұрыштары қосындысына тең.
4. Үшбұрыштың үлкен қабырғасы қарсысында кіші бұрыш, үлкен бұрышы қарсысында кіші қабырға жатады.
5. Үшбұрыштың әрбір қабырғасы қалған қабырғалары айырмасынан кіші.
6. Тік бұрышты үшбұрыштың тек бір биіктігі болады.
7. Тік бұрышты үшбұрыштың катеті гипотенузасының жартысына тең.
8. Тік бұрышты үшбұрыштың биіктік гипотенузасының жартысына тең.
9. Тік бұрышты үшбұрыштардың гипотенузалары тең болса, бұл үшбұрыштар тең болады.
10. Үшбұрыштардың ішкі бұрышы оның қалған екі ішкі бұрыштарының қосындысынан әрқашан кіші болады.
11. Үшбұрыштың сыртқы бұрыштары әрқашан доғал болады.
12. Тік бұрышты үшбұрыштардың биіктігі оның тік бұрышты төбесінде қиылысады.
13. Бұрыш қабырғаларынан тең қашықтыққа алыстаған нүктелер бұрыштың биссектрисасында жатады.
14. Бұрыш биссектрисасы бұрыштың қабырғаларынан тең қашықтықта алыстаған нүктелердің геометриялық орнынан тұрады.

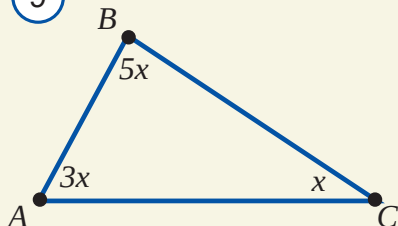
3. Кестеде берілген қасиеттер мен тұжырымдарға сәйкес келетін геометриялық түсініктерді тап.

1	Ішкі бұрыштарының қосындысы 180° -қа тең	
2	Сүйір бұрыштарының қосындысы 90° -қа тең	
3	Қабырғалары кесінділерден құралған	
4	Үшбұрыш қабырғаларының арасындағы қатынастар	
5	Гипотенузаның жартысына тең	
6	Үш биіктігі бір ұшында қиылысады	
7	Катеттен әрқашан кіші	
8	Нүктелер бұрыш қабырғаларынан тең алыстаған	

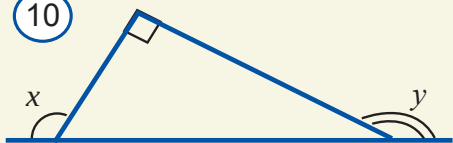
4. Тесттер.

- Егер үшбұрыштың бұрыштары 2:3:4 сияқты қатынаста болса, оның бұрыштарын тап.
 А) 20° , 30° , 40° Б) 40° , 60° , 80° В) 36° , 54° , 90° Г) 18° , 27° , 36° .
- Егер үшбұрыштың бұрыштары 3:2:1 сияқты қатынаста болса, оның түрін анықта.
 А) сүйір бұрышты Б) доғал бұрышты
 В) тік бұрышты Г) анықтауға болмайды
- Егер үшбұрыштың бір сыртқы бұрышы сүйір болса, оның түрін анықта.
 А) сүйір бұрышты Б) доғал бұрышты
 В) тік бұрышты Г) анықтап болмайды
- Егер үшбұрыштың бір бұрышы оның қалған екі бұрыштары қосындысынан үлкен болса, оның түрін анықта.
 А) сүйір бұрышты Б) доғал бұрышты
 В) тік бұрышты Г) анықтауға болмайды
- Қайсы үшбұрыштың биіктіктері оның бір ұшында қиылысады?
 А) тең бүйірлі үшбұрыш
 Б) тең қабырғалы үшбұрыш
 В) тік бұрышты үшбұрыш
 Г) мұндай үшбұрыштар жоқ
- ABC үшбұрышта A төбесіндегі сыртқы бұрыш 120° -қа, C ішіндегі ішкі бұрыш болса 80° -қа тең. B ұшындағы сыртқы бұрышты тап.
 А) 120° Б) 140° В) 160° Г) 40°
- Үшбұрыштың сыртқы бұрыштарының біреуі 120° -қа, осы бұрышқа сыбайлас болған ішкі бұрыштардың айырмасы 30° -қа тең. Үшбұрыштың ішкі бұрыштарынан үлкенін тап.
 А) 70° Б) 75° В) 85° Г) 90°

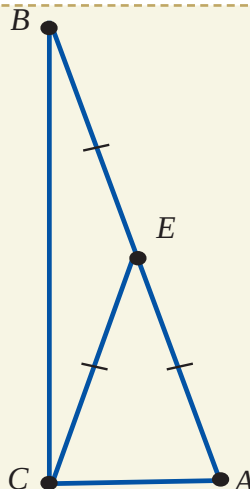
9



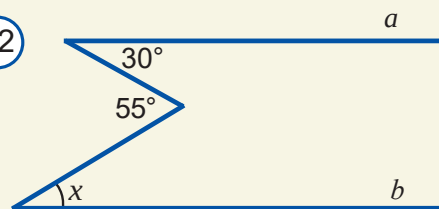
10



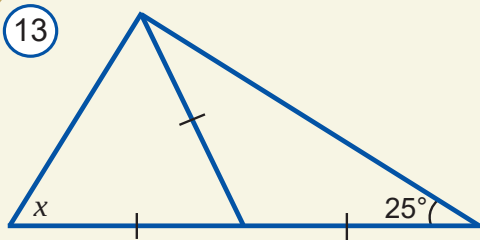
11



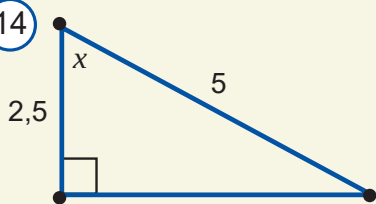
12



13



14



8. Үшбұрыштардың екі бұрышының өлшемдерінің қатынасы 1:2 сияқты. Үшінші бұрышы осы бұрыштардың кішісінен 40° -қа үлкен. Үшбұрыштың үлкен бұрышын тап.

А) 105° Б) 75° В) 80° Г) 90°

9. Тең бүйірлі үшбұрыштың периметрі 48-ге тең. Оның қабырғаларының біреуі 12-ге тең болса, қалған қабырғаларын тап.

А) 18; 12 Б) 16; 16 В) 18; 24 Г) 18; 18

10. Тік бұрышты үшбұрыштың тік бұрышынан биссектриса және биіктік шығарылған болып, олар арасындағы бұрыш 24° -қа тең. Үшбұрыштың кіші бұрышын тап.

А) 21° Б) 24° В) 36° Г) 16°

11. 9-суретте $\angle A$ -ны тап.

А) 10° Б) 20° В) 60° Г) 100°

12. Ұзындықтары 3, 5, 7 және 11-ге тең кесінділерден неше түрлі қабырғалы үшбұрыштар жасау мүмкін?

А) 2 Б) 3 В) 5 Г) 6

13. 10-суреттегі $x + y$ -ті тап.

А) 90° Б) 180° В) 270°
Г) анықтауға болмайды.

14. 11-суреттегі $\angle BCA$ -ны тап.

А) 90° Б) 96° В) 144° Г) 84°

15. 12-суретте $a \parallel b$ болса, x -ті тап.

А) 35° Б) 45° В) 25° Г) 20°

16. 13-суреттегі x -ті тап.

А) 60° Б) 55° В) 65° Г) 70°

17. 14-суреттегі x ті тап.

А) 30° Б) 45° В) 15° Г) 75°

18. Ұзындығы 2 см, 3 см, 4 см және 5 см болған кесінділерден неше түрлі тарапты үшбұрыш салуға болады?

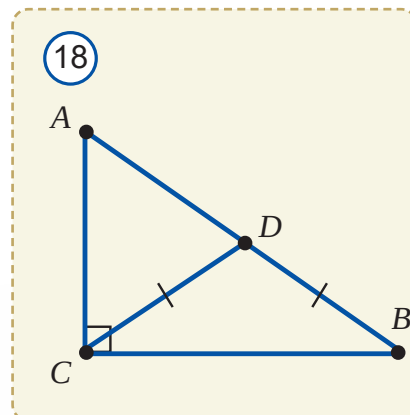
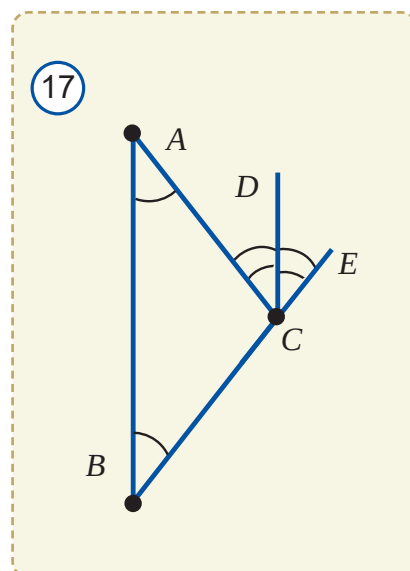
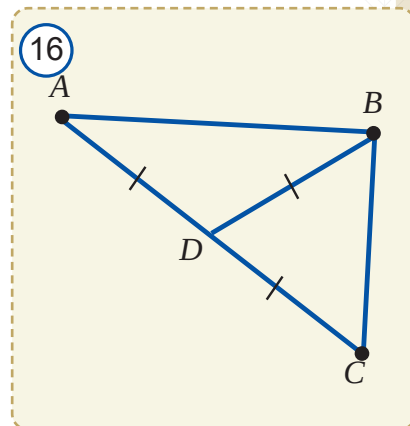
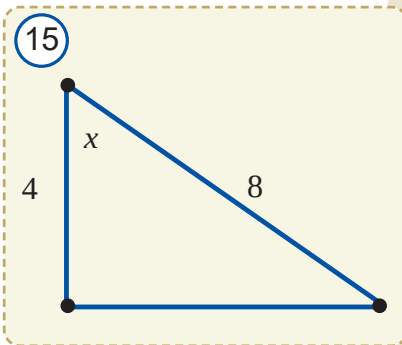
А) 1 Б) 2 В) 3 Г) 4.

19. Үшбұрыштың қалаған қабырғасы оның қалған екі қабырғасының айырмасынан

А) үлкен Б) кіші В) тең
Г) үлкен немесе тең болады.

5. Есептер.

1. Буындардың ұзындығы 1 м , 2 м , 4 м , 8 м және 16 м болған жабық сынық сызық жасау мүмкін бе?
2. Егер үшбұрыштардың қабырғалары бүтін сандар болып, периметрі 15-ке тең болса, оның қабырғаларын анықта.
3. Үшбұрыштардың биіктігі оның қабырғаларынан әрқашан кіші болады ма?
4. Үлкен қабырғасы 36-ға тең болған үшбұрыштардың бұрыштары $1:2:3$ сияқты қатынаста болса, осы үшбұрыштың кіші қабырғасын тап.
5. Үшбұрыштың табанына түсірілген биіктік оның бүйірі мен 27° және 36° -ті бұрыштар пайда етеді. Үшбұрыштың бұрыштарын тап.
6. Тік бұрышты ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштарда A және A_1 тік бұрыштар, BD және B_1D_1 биссектрисалар және $\angle B = \angle B_1$, $BP = B_1P_1$ болса, $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$ екендігін дәлелде.
7. 15-суреттегі x -ті тап.
8. 16-суреттегі $\angle ABC$ -ты тап.
9. 17-суретте $AB \parallel CD$ екендігін дәлелде.
10. Тең бүйірлі үшбұрыштың бір бұрышы 100° -қа тең. Үшбұрыштың қалған бұрыштарын тап.
11. Егер тең бүйірлі үшбұрыштың бір бұрышы 60° -қа тең болса бұл үшбұрыш тең қабырғалы болады ма?
12. Негізі AC және B бұрышы 36° -тең болған тең бүйірлі ABC үшбұрыштың AD биссектрисасы жүргізілген. CDA және ADB үшбұрыштардың тең бүйірлі екенін дәлелде.
13. Бір үшбұрышы 60° және 38° -ты бұрыштарға, екінші үшбұрыш болса 38° және 82° -ты бұрыштарға ие. Бұл үшбұрыштар тең болуы мүмкін бе?
14. 18-суретте $BD = CD = 10$ болса, AB -ны тап.



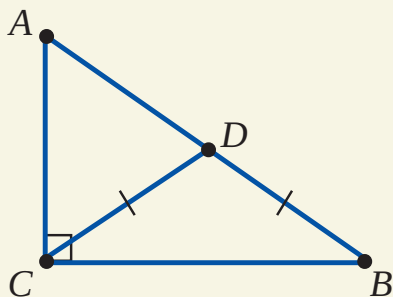
15. Үшбұрыш периметрі қабырғаларынан 14 см , 16 см және 24 см үлкен болса, үшбұрыштың ең үлкен қабырғасын тап.
16. Тік бұрышты ABC үшбұрыштың тік бұрышы ұшынан CD биіктік түсірілген. Егер а) $A = 24^\circ$; б) $A = 70^\circ$ болса, CDB бұрышты тап.
17. Тең бүйірлі үшбұрыштың бір сыртқы бұрышы 70° -қа тең. Оның ішкі бұрыштарын тап.
18. ABC үшбұрыштың A және C ұшынан түсірілген биіктіктер N нүктеде қиылысады. Егер $\angle A = 50^\circ$ және $\angle C = 84^\circ$ болса, ANC бұрышты тап.
19. ABC үшбұрышта BD медиана AC қабырғаның жартысына тең. Үшбұрыштың B бұрышын тап.
20. Периметрі 23 м , бір қабырғасы екінші қабырғасынан 2 м қысқа, үшінші қабырғадан болса 1 м ұзын үшбұрыш бар ма?
21. ABC үшбұрышта A бұрыш B бұрыштан 3 есе кіші, C бұрыштан болса 15° -қа үлкен. Үшбұрыштың бұрыштарын тап.
- 22*. Үшбұрыштың екі биіктігінің әр екеуі де қиылысу нүктесінде тең екіге бөлінбейтінін дәлелде.
- 23*. Үшбұрышты төрт параллель түзу сызық қиып өтуде. Олардың кемінде біреуі үшбұрыштың ұшынан өтпейтіндігін дәлелде.

5-бақылау жұмысы үлгісі

1



2



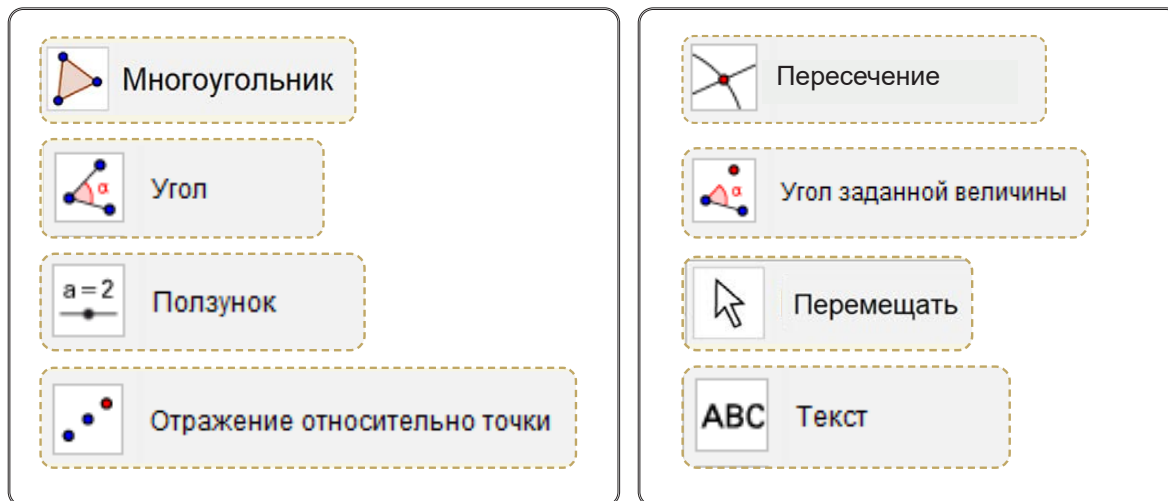
Үлгілі бақылау жұмысы екі бөлімнен тұрады:

1. 145-беттегі тесттерге ұқсас 5 тест;
2. Төмендегі есептерге ұқсас 3 есеп (4-есеп «үздік» баға алмақшы болған оқушылар үшін қосымша).
1. Белгісіз бұрыштарды тап (1-сурет).
2. Үшбұрыштың сыртқы бұрышы 120° болып, оған сыбайлас болған ішкі бұрышы $1:2$ қатынаста болса, үшбұрыштың бұрыштарын тап.
3. Егер 2-суретте $\angle ACB = 90^\circ$, $CD = BD$ және $AB = 24\text{ см}$ болса, CD кесіндіні тап.
4. ABC үшбұрыш BD биссектрисасы AC қабырғаны 100° бұрыш астында қияды. Егер $BD = BC$ болса, үшбұрыш бұрыштарын тап.

Практикалық тапсырма

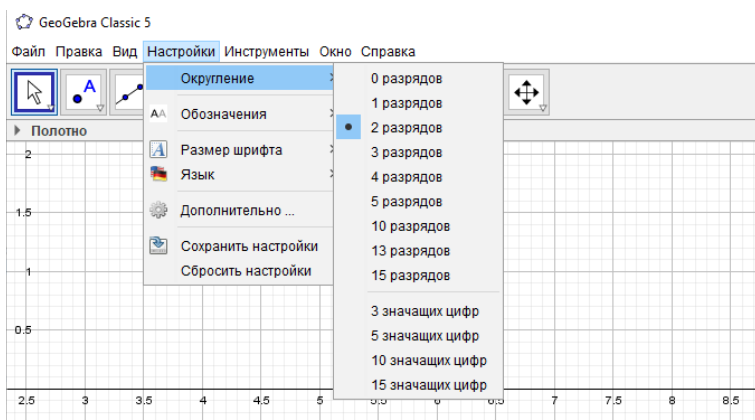
Үшбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысын визуалдастыру

Үшбұрыштардың ішкі бұрыштарының қосындысын визуалдастыру үшін төмендегі құралдар қажет болады.



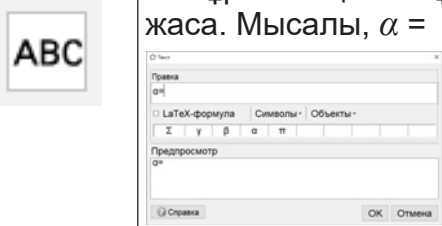
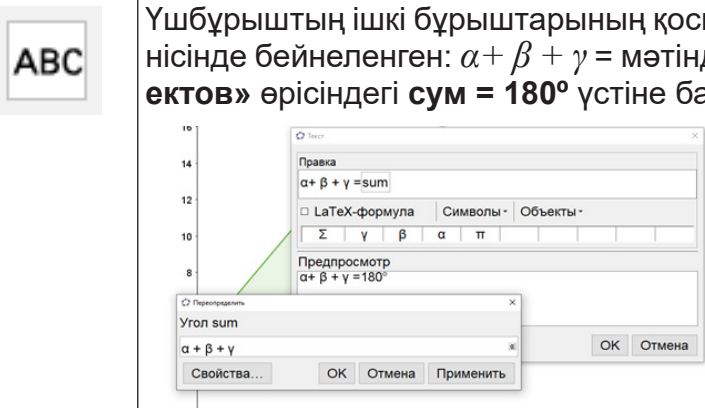
Қажетті компоненттер:

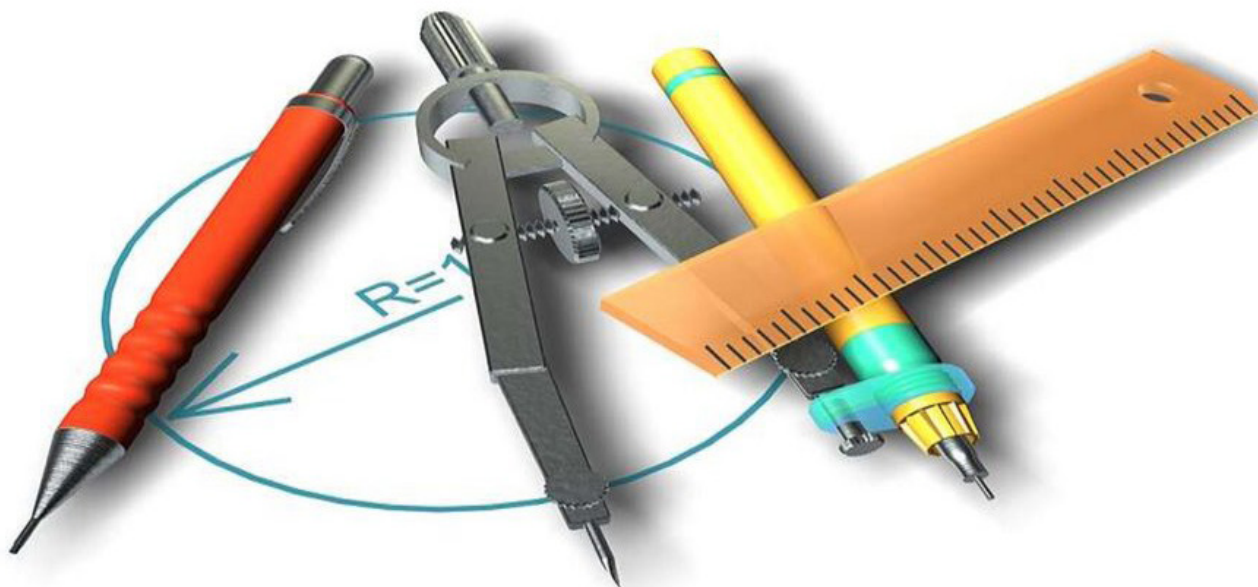
- **GeoGebra**да жаңа айна аш.
- **GeoGebra** интерфейсін «Настройки» –  «Геометрия» көрінісіне өткіз.
- «Вид» менюсі арқылы «Строка ввода» (енгізу шарты) алаңын іске қос.
- «Настройки» менюсінен «Округление – 0 разрядов» яғни санның ондық бөлшек бөлігін тұтастыруды белгіле.



Үшбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысын визуалдастыру алгоритмі

1		Кез келген ABC үшбұрышты тінтуірді сағат стрелкасына қарсы бағытта әрекеттендіру арқылы жаса.
2		ABC үшбұрыштың α , β және γ бұрыштарын белгіле.

3		δ бұрыш үшін 0° -ден 180° аралықта 100 қадамымен жылжытушы (ползунок) жаса.
4		ε бұрыш үшін 0° -ден 180° аралықта 100 қадамымен жылжытушы (ползунок) жаса.
5		AC кесіндінің ортасы – D және AB кесіндінің ортасы E нүктелерін жаса.
6		Ұшбұрыштың D нүкте айналасында δ бұрышқа бұр (сағат стрелкасы бағытында).
7		Ұшбұрышты E нүкте айналасында ε бұрышқа бұр (сағат стрелкасы бағытына қарсы).
8		Екі δ және ε мен жылжытушыларды (ползунок) 180° -ге өзгерт.
9		$A'C'B'$ бұрышты ζ жаса.
10		C', B', A' бұрышты η жаса.
11		Объект үстіне тінтуірдің оң түймесін бас және контекст менюден «Свойства» бұйрығын таңда. Объект түсі, көрінісі, сызық қалыңдығы сияқтыларды өзгерт.
12		Ұшбұрыштың ішкі бұрыштарын бейнелеуші динамик мәтінді жаса. Мысалы, $\alpha =$ «Объекты» бөлімінен α -ны таңда.
13		«Ввод» – енгізу бағанына $\text{сум} = \alpha + \beta + \gamma$ -ті енгізу арқылы үшбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысын есепте
14		Ұшбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы динамик мәтін көрінісінде бейнеленген: $\alpha + \beta + \gamma =$ мәтінді енгіз, кейін «Панель объектов» өрісіндегі $\text{сум} = 180^\circ$ үстіне бас.
15		Ұшбұрыштардың түсі мен көрінісін және атауларын өзгерт.



V ТАРАУ

ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ СЫЗУҒА ҚАТЫСТЫ ЕСЕПТЕР

Бұл тарауды меңгерген соң, төмендегі білім және практикалық дағдыларға ие боласыз:

Білім:

- циркуль мен жай сызғыш көмегінде геометриялық салуға байланысты есептерді шешуде сақтауға тиісті арнайы ережелер;
- геометриялық жасауға байланысты есептерді шешу кезеңдері.

Практикалық дағдылар:

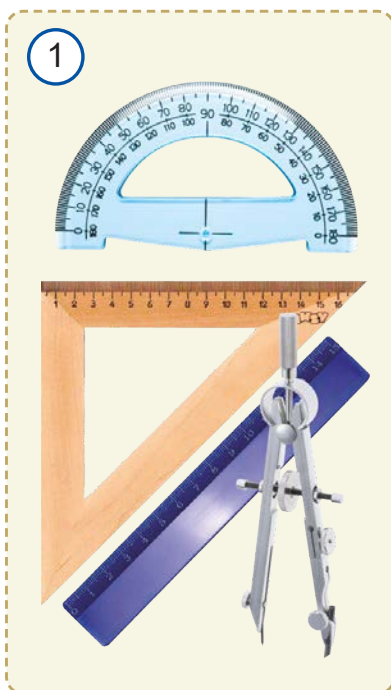
- сызғыш пен циркульді дұрыс қолдану;
- берілген бұрышқа тең бұрышты жасай алу;
- бұрыштың биссектрисасын жасай алу;
- перпендикуляр түзу сызықтарды жасай алу;
- кесіндіні тең екіге бөлу;
- берілген элементтерге орай үшбұрыштарды жасай алу.

23

ЦИРКУЛЬ МЕН СЫЗҒЫШ КӨМЕГІНДЕ ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ ЖАСАУҒА ҚАТЫСТЫ ЕСЕПТЕР

23.1. Геометриялық жасауларға қарасты ережелер

Жасауға қатысты есептерді тек жай сызғыш пен циркуль құралында шешу – логикалық пікірлеу қабілетін асырады. Бұл Ежелгі Грецияда өнер дәрежесіне жеткен еді. Осы күнге дейін әртүрлі құралдар көмегінде әр түрлі геометриялық пішіндерді салып келдік. Мысалы, сызғыш көмегінде түзу сызық, сәуле, кесінді, үшбұрыш және басқа пішіндерді сыздық. Сызғыш пен транспортер көмегінде әр түрлі бұрыштарды салдық. Циркуль көмегінде болса шеңбер мен доғаларды бейнеледік (1-сурет).



Белгілі болғандай, көптеген геометриялық пішіндерді тек жай сызғыш пен циркуль (2-сурет) көмегінде салу мүмкін екен. Жай сызғыш дегенде масштабты бөлімдері жоқ және бір қабырғасы тегіс болған сызғышты түсінеміз.

Сол себептен геометрияда осы екі құрал көмегінде салуға қатысты есептер арнайы ажыратылып көрсетіледі. Бұл екі құралдан қолданудың арнайы ережелері бар.

Олармен тек төмендегі жұмыстарды орындауға рұқсат беріледі.

Жай сызғыш көмегінде тек:

- кез келген түзу сызық сызу;
- берілген нүктеден өтетін түзу сызық сызу;
- екі нүктеден өтетін түзу сызық сызу мүмкін;

Циркуль көмегінде тек:

- кез келген шеңбер сызу;
- орталығы берілген нүктеде болатын кез келген радиусты шеңбер сызу;
- берілген радиусты, орталығы болса кез келген шеңбер сызу;
- орталығы берілген нүктеде радиусы берілген кесіндіден құралған шеңбер сызу;
- берілген кесіндіге тең кесіндіні берілген түзуге оның берілген нүктесінен бастап әр екі бағытқа қою мүмкін.

Басқа әрқандай геометриялық жасаулар міне осы амалдарға келтірілуі қажет. Жасауға байланысты есептерде тек бір геометриялық пішіндерді жасау жолын, әдісін табу ғана емес, тіпті пайда болған геометриялық пішіннің шындығында берілген шарттарды қанағаттандыратынын негіздеу, яғни дәлелдеп беруі де шарт болады.

Сондықтан жасауға байланысты кейбір қиын есептерді шешу үдерісінің түсінігі ұзыннан-ұзақ болуы мүмкін. Сол үшін жасауға қатысты есептер ішінен негізгі есептерді ажыратамыз және оларды шешу үдерісін толық түсінігімен келтірміз.

Қиындау есепті шешу кезінде мұндай есептерге кез келсек, қысқалық үшін олардың

бейнесін толық келтірмейміз.

23.2. Геометриялық жасауға қатысты негізгі есептер

1. Берілген бұрышқа тең бұрышты салу

Салу. A бұрыш берілген. Оған тең бұрыш саламыз, яғни O сәулеге (3-сурет) A бұрышқа тең бұрыш қоямыз.

1-қадам. Орталығы A нүктеде болған кез келген шеңбер саламыз (3-4-сурет). Бұл шеңбер берілген A бұрыш қабырғалары B және C нүктелерде кесіп өтсін.

2-қадам. Радиусы сызылған шеңбер радиусына тең және орталығы O нүктеде болған шеңбер сызамыз (4-сурет). Бұл шеңберді O сәулемен қиылысқан нүктесі D -мен белгілейміз.

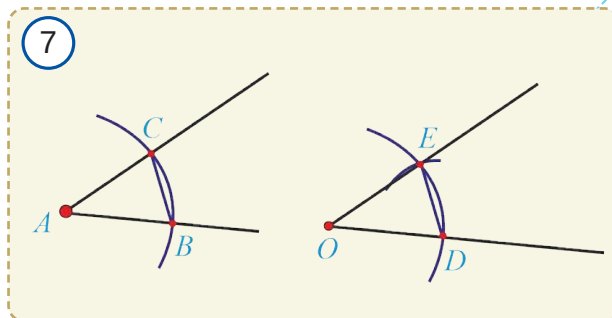
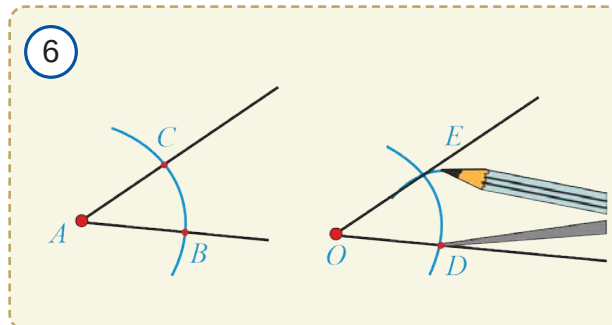
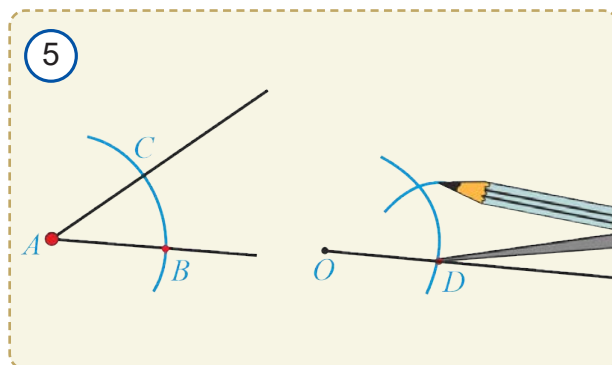
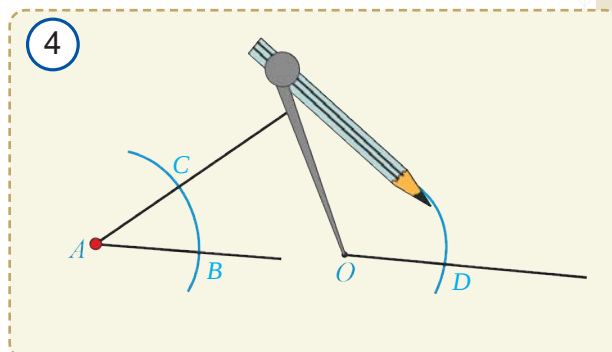
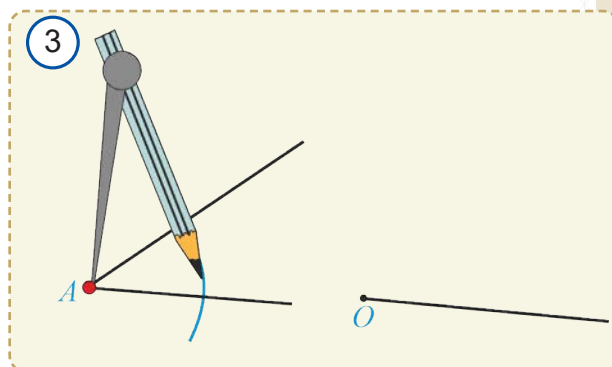
3-қадам. Орталығы D нүктеде, радиусы болса BC -ға тең үшінші шеңбер сызамыз (5-сурет). Оның екінші шеңбермен қиылысқан нүктелерінен біреуін айтайық, жоғары жарты жазықтықта жатқанын E мен белгілейміз (6-сурет).

4-қадам. OE сәулені жүргіземіз (6-сурет). Пайда болған EOD бұрыш O сәулеге қойылған, берілген A бұрышқа тең бұрыш болады.

Негіздеу. 7-суретте бейнеленген ABC және ODE үшбұрыштар салуына орай: $AB=OD$, $AC=OE$ және $BC=DE$.

Демек, үшбұрыштар теңдігінің ҚҚҚ белгісіне орай: $\angle ABC = \angle ODE$. Сондай-ақ, $\angle DOE = \angle A$.

Ескерту. Бұл есептің екі шешімі болып, шешімдер 3-қадамда O сәуле жатқан түзу сызық бөлген қайсы жарты жазықтық алынуына байланысты болады.



2. Бұрыш биссектрисасын салу

Айтайық, A бұрыш берілген болсын. Бұл бұрышты тең екіге бөлу, яғни оның биссектрисасын салу үшін төмендегі жол құрастырылады:

Салу.

1-қадам. Орталығы A нүктеде болған кез келген радиусты шеңбер сызылады (8-сурет) және оның бұрыш қабырғалары мен қиылысу нүктелері B және C белгіленеді.

2-қадам. Радиусты өзгертпестен орталықтары B және C нүктелерде болған екі шеңбер сызылады (9-сурет). Бұл екі шеңбердің қиылысуынан пайда болған D нүкте белгіленеді (10-сурет).

3-қадам. A мен D нүктеден өтуші AD сәуле өткізіледі (10–11- суреттер).

AD сәуле – берілген бұрыш биссектрисасы болады.

Негіздеу. ABD және ACD үшбұрыштарды (11-сурет)

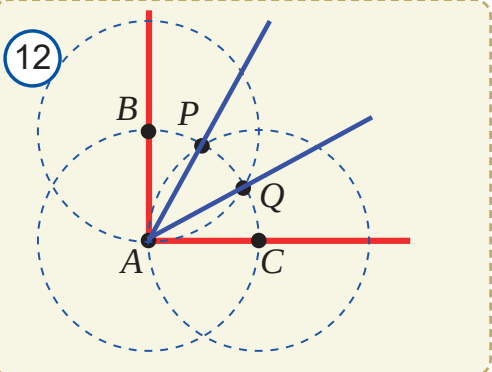
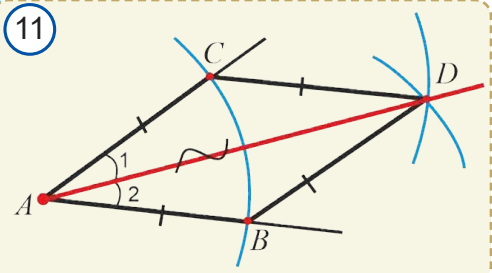
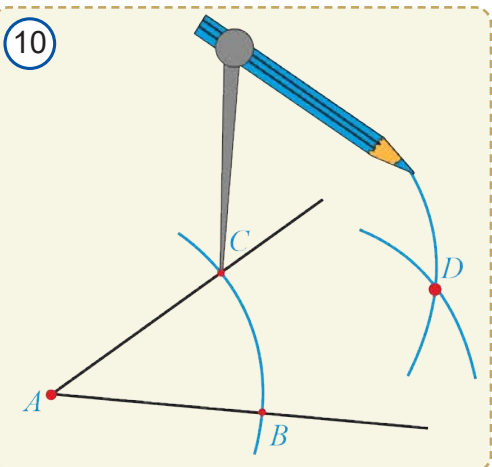
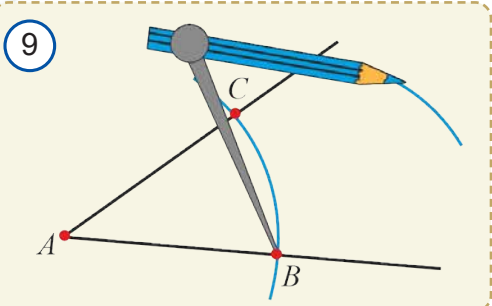
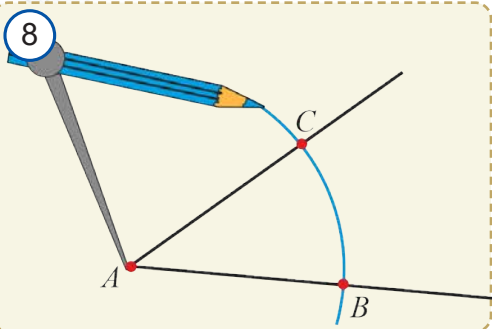
- 1) салынуына қарай $AB = AC$;
- 2) салуға қарай $BD = CD$;
- 3) AD – ортақ қабырға.

Үшбұрыштар теңдігінің ҚҚҚ белгісіне орай, $\angle ABD = \angle ACD$. Одан, $\angle BAD = \angle CAD$.



Есеп. Берілген тік бұрышты тең үшке бөл.

Шешуі. $\angle A$ тік бұрыш берілген болсын. Оның ұшын орталық етіп белгілеп, кез келген радиусты шеңбер саламыз (12-сурет). Шеңбер тік бұрыш қабырғаларын B және C нүктелерде қиып өтсін. Радиусты өзгертпестен B және C нүктелерде болған тағы екі шеңбер саламыз. Бұл шеңберлер бірінші шеңбермен қиылысқан нүктелерден тік бұрыш ішінде жатқандарын P және Q мен белгілейміз. AP және AQ сәулелерін саламыз. Бұл сәулелер берілген тік бұрышты үш тең бұрышқа бөледі. бұл тұжырымның дұрыстығын өздігіңше негізде.



Ескерту. Берілген кез келген бұрышты үшке бөлу есебі өте ертедегі және белгілі есеп болып, бұл туралы көп ғалымдар бас қатырған. Тек XIX ғасырда кейбір бұрыштар ескерілмей, әдетте бұрышты тек үшке бөлуге болмайтыны дәлелденді. Мысалы 60° – тық бұрышты тең үшке бөлуге болмайды. Сөз әрине, жай сызғыш және циркульмен анық салу жайлы болып жатыр. Бұл құралдармен өте үлкен анықтықпен салу немесе басқа құралдарды пайдаланып анық салуды орындау мүмкін.

3. Берілген түзу сызыққа перпендикуляр түзу сызық салу

Берілген A түзу сызыққа оның O нүктесінен өтуші перпендикуляр түзу сызықты саламыз.

Салу.

1-қадам. O нүктені орталық етіп кез келген шеңбер сызамыз. Ол берілген түзу сызықты A және B нүктелерде қиып өтсін (13-сурет).

2-қадам. A және B нүктелерді орталық етіп, радиусы AB -ға тең шеңберлер сызамыз (14–15-суреттер). Бұл шеңберлердің қиылысу нүктелерінен біреуін P деп белгілейміз.

3-қадам. P және O нүктелерден өтуші OP түзу сызықты саламыз (15–16-суреттер).

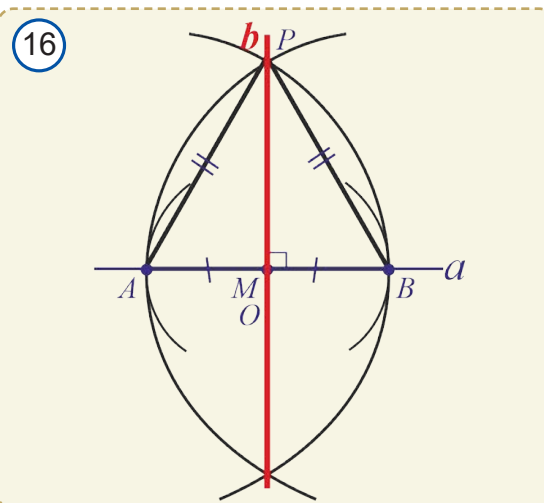
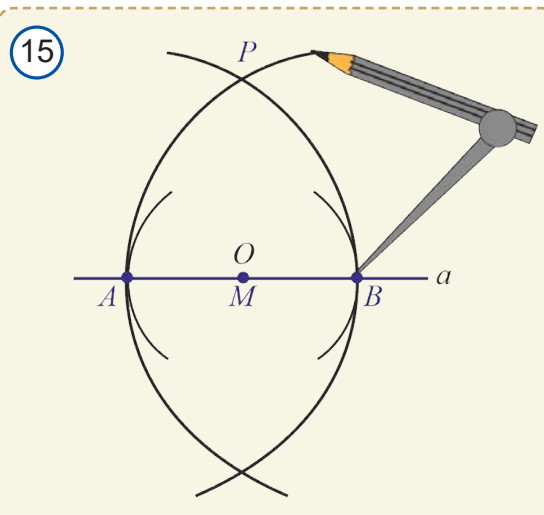
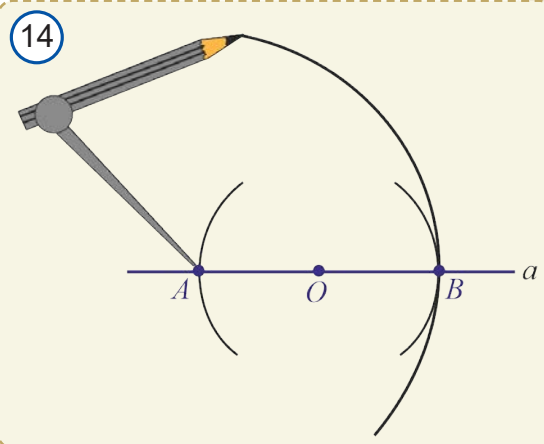
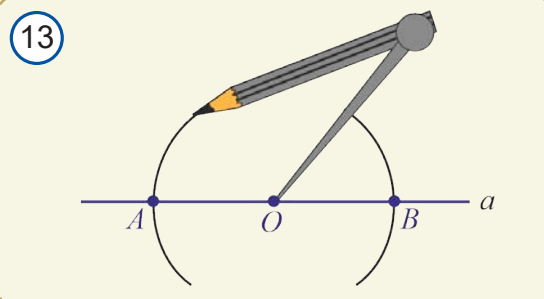
OP түзу сызық берілген A түзу сызыққа оның O нүктесінен өтуші перпендикуляр болады.

Негіздеу. AOP және BOP үшбұрыштарды қараймыз. Оларда салуына қарай:

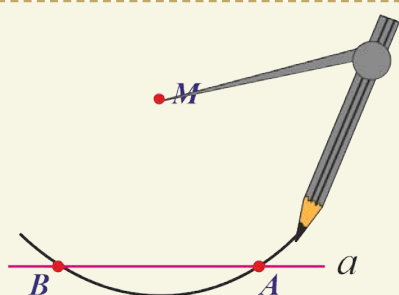
- 1) $AO = BO$;
- 2) $AP = BP$;
- 3) PO болса ортақ қабырға.

Демек, үшбұрыштар теңдігінің $ҚҚҚ$ белгісіне орай: $\triangle AOP = \triangle BOP$. Ол жағдайда, $\angle AOP = \angle BOP$. Бірақ $\angle AOP + \angle BOP = 180^\circ$. Бұдан $\angle AOP = \angle BOP = 90^\circ$ екендігі келіп шығады.

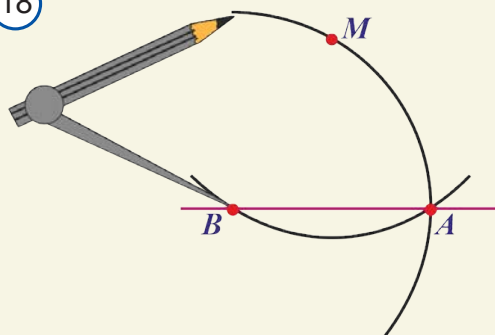
Демек, шындығында да $OP \perp a$.



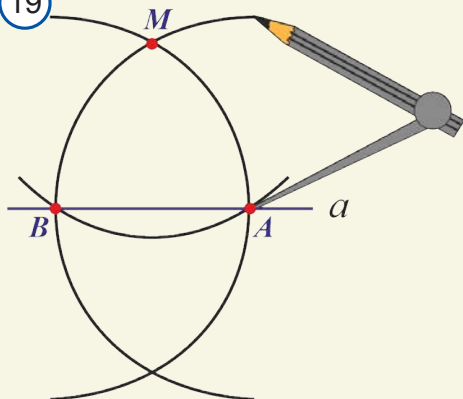
17



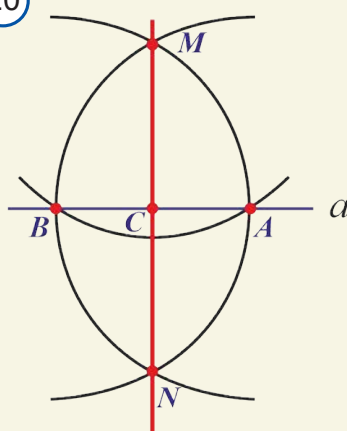
18



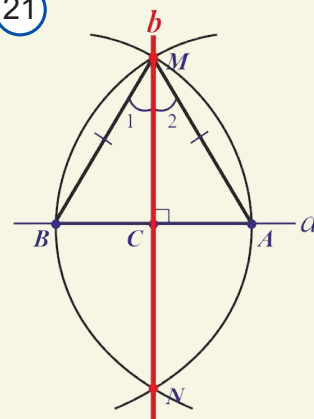
19



20



21



3-қадам. M және N нүктелерден өтуші түзу сызық сызамыз MN берілген A түзу сызыққа перпендикуляр және онда жатпаған M нүктеден өтуші түзу сызық болады.

Негіздеуді 20-сурет негізінде өздігіңше орында.

Бұл есепті шешіп, A түзу сызықтан сырттағы нүкте арқылы A түзу сызыққа перпендикуляр түзу сызық өткізу мүмкін деген қорытындыға келеміз. Бұдан және 14-сабақта келтірілген теорема нәтижесінен төмендегі теореманың орынды екендігі келіп шығады.



Теорема. Түзу сызыққа жатпаған нүкте арқылы бұл түзу сызыққа перпендикуляр болған жалғыз түзу сызық өткізу.

4. Берілген түзу сызыққа онда жатпаған нүктеден перпендикуляр түсіру

Берілген A түзу сызыққа онда жатпаған M нүктеден өтуші перпендикуляр түзу сызықты саламыз.

Салу. 1-қадам. Орталығы M нүктеде болған, A түзу сызықты кесіп өтуші кез келген шеңбер сызамыз. Ол берілген түзу сызықты A және B нүктелерде қиып өтсін (17-сурет).

2-қадам. Орталығы A және B нүктеде болған, радиусы бірінші сызылған шеңбер радиусына тең шеңберлер сызамыз (18–19-суреттер). Бұл шеңберлердің қиылысу нүктелерінен бірі M нүктеде болады. Екіншісін N мен белгілейміз (20-сурет).

5. Берілген кесіндіні тең екіге бөлу

Жасау. Айтайық, AB кесінді берілген болсын. Бұл кесіндіні тең екіге бөлуші нүктені табу үшін төмендегі жол қарастырылады:

1-қадам. Радиусы берілген AB кесіндіге тең болған, орталығы болса A және B нүктелерде болған екі шеңбер сызылады (22-сурет).

2-қадам. Шеңберлер қиылысқан P және D нүктелері кесінділер мен тұтастырылады (23-сурет). PD түзу сызық және AB кесіндінің қиылысу нүктесі O берілген кесіндінің ортасы болады.

О нүктенің шындығында да AB кесіндінің ортасы болуын өздігіңше негізде.

6. Берілген кесіндінің орта перпендикулярын салу

Жасау. AB кесінді берілген болсын. Орталықтары A және B нүктелерде болған AB радиусты шеңберлер сызамыз (23-сурет). Бұл шеңберлер P және D нүктелерде қиылысады және салуға орай:

$AP=AD=BP=BD$ болады.

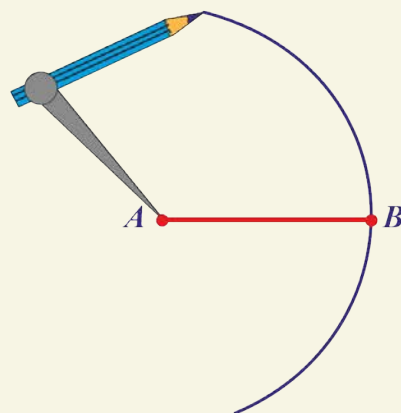
PD түзу сызық өткіземіз.

Бұл түзу сызық AB кесіндінің орта перпендикуляры.

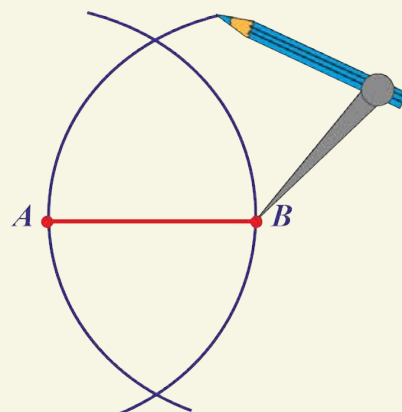
Негіздеу. P және D нүктелер AB кесіндінің ұштарынан тең қашықтықта жатқаны үшін осы кесіндінің ортасынан өтуші перпендикулярда жатады.

Демек, бұл нүктелерден өтуші түзу сызық берілген кесіндінің орта перпендикуляры болады.

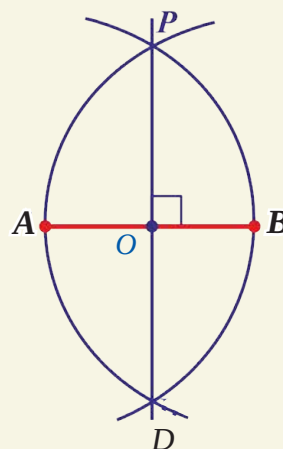
22



23



24

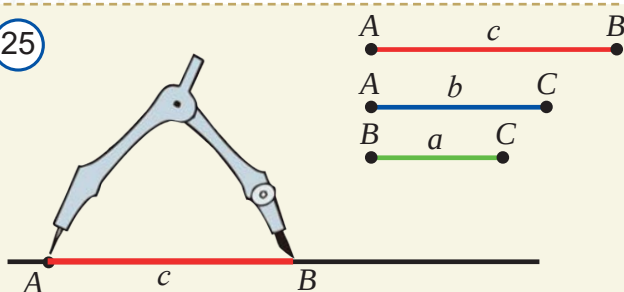


Геометриялық басқатырма

Нұржан шеңбер сызып болғаннан кейін, оның орталығын қалам мен белгілеуді ұмытқанын байқап қалды. Ерегіскендей, дәптерде циркульдің ізі де қалмапты. Бірақ шеңбердің радиусы 12 см екендігі оның есінде еді. Бұл мәліметтен пайдаланып, тек циркуль көмегінде сызылған шеңбердің орталығын анықтауға болады ма?

7. Үшбұрышты берілген үш қабырғасына қарай салу

25



Айтайық, 25-суретте бейнеленгендей, ұзындықтары сәйкес түрде a , b және c -ке тең кесінділер берілген болып, c олардан ең үлкені болсын. Қабырғалары сәйкес түрде $AB = c$, $BC = a$ және $AC = b$ болған үшбұрыш салу үшін төмендегіше жол қарастырамыз:

1-қадам. Кез келген түзу сызық

сызамыз. Түзу сызыққа ұзындығы c ке тең болған AB кесіндіні циркуль көмегінде бөлеміз (25 – сурет).

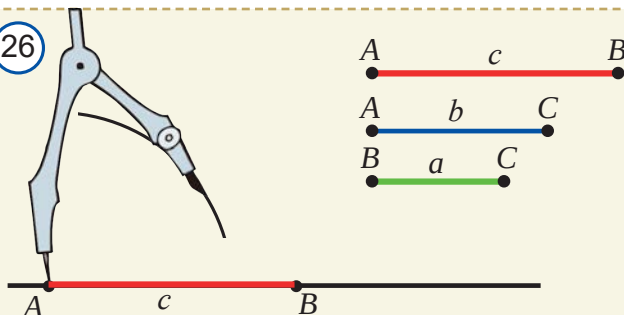
2-қадам. A және C нүктелер арасындағы қашықтық b -ға тең болуы керек. Бұдан пайдаланып, орталағы A нүктеде радиусы b -ға тең болған шеңбер сызамыз (26-сурет).

3-қадам. B және C нүктелер арасындағы қашықтық a -ға тең болуы. Бұдан пайдаланып, орталағы B нүктеде, радиусы a -ға тең болған тағы бір шеңбер сызамыз (27-сурет).

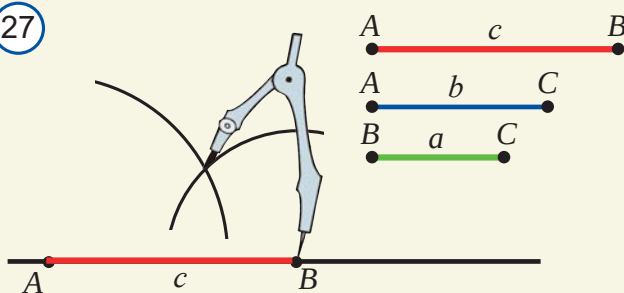
4-қадам. Бұл шеңберлер қиылысу нүктесін C пен белгілейміз. C нүктені A және B нүктелер мен тұтастырамыз (28-сурет). Салуына қарай: $AC = b$ және $BC = a$ болады. Онда пайда болған ABC үшбұрыштың қабырғалары сәйкес түрде a , b және c -ке тең болады.

Талдау. Салудан көрініп тұрғандай, егер 2- және 3-қадамда салынған шеңберлер қиылысқанда ғана шешімі болады. Ол үшін $a + b > c$ болуы қажет.

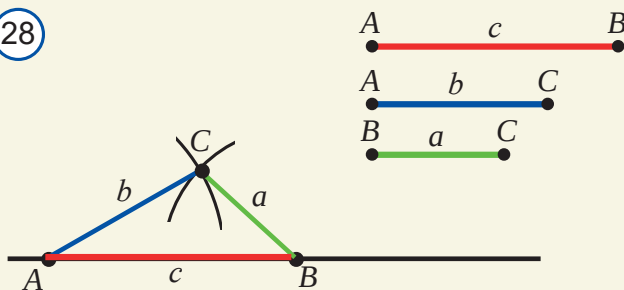
26



27



28



Ескерту. Осы әдістен пайдаланып, берілген үшбұрышқа тең үшбұрышты да салу мүмкін. Бұл жағдайда a , b және c кесінділер ұзындығы циркульдің ұшын берілген үшбұрыштың сәйкес ұштарына қойып анықталады.

Сондай-ақ, 1-тармақта берілген бұрышқа тең бұрышты салу есебін де жоғарыдағы әдіс көмегінде шешуге болады. Бұл үшін берілген A бұрыш қабырғаларында сәйкес түрде B және C нүктелер таңдалып, ABC үшбұрыш пайда болады. Кейін жоғарыда келтірілген әдіс пен осы үшбұрышқа тең үшбұрыш салынады. Үшбұрыштар тең болғаны үшін олардың сәйкес бұрыштары да тең болады.

23.3. Геометриялық салуларға қатысты қиындау есептерді шешу

Геометриялық салуға қатысты есептер шешу үдерісін талдау, салу, негіздеу және зерттеу сияқты кезеңдерден тұрады.

Геометриялық салуларға қатысты есептерді шешу кезеңдері	
1. Талдау кезеңі	Салынатын пішіннің шамамен сызбасы сызылады. Оның элементтері және есеп шартында берілген элементтер арасындағы қатынастар анықталады. Геометриялық пішінді салу жоспары түзіледі.
2. Салу кезеңі	Геометриялық пішін түзілген жоспарға орай салынады.
3. Негіздеу кезеңі	Салынған пішін есептің барша шарттарын қанағаттандыруы дәлелденеді.
4. Зерттеу кезеңі	Есеп шешімінің барлығы, шешімдер саны анықталады немесе шешімнің жоқтығы, яғни бұндай пішінді салуға болмайтындығы көрсетіледі.

Егер есеп қарапайым болса, салу кезеңінде басқа кейбір кезеңдегі ауызекі орындалады. Кейбір жағдайларда зерттеу кезеңі тереңдеу, 8–9- сыныптарда өтілетін білімдерді талап етсе оны уақытша түсіріп қалдырамыз.

Есеп. Тең бүйірлі үшбұрышты оның табаны және табанына түсірілген биіктікке қарай сал (29-сурет).

Салу. $AB=c$ табан және $CD=hc$ биіктік салынған ABC тең бүйірлі үшбұрыштың берілген элементтері болсын (29-сурет).

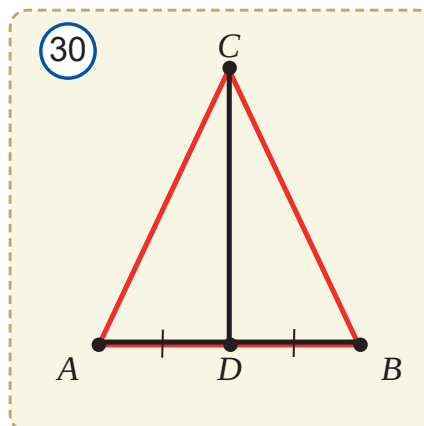
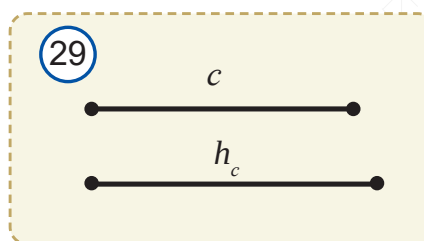
1. Зерттеу кезеңі. Айтайық, ABC үшбұрыш салынған болсын. Оның AB табаны берілгені үшін A және B ұштарының орны белгілі C ұшының орнын тапсақ, есеп шешіледі. CD биіктік тең бүйірлі үшбұрыш табанының ортасына түсетіні белгілі.

Демек, берілген AB табанның ортасы D нүктені тауып, осы нүктеден табанға перпендикуляр түсірсек және перпендикулярда D нүктеден бастап берілген биіктік кесіндісін бөлсек C нүктенің орнын тапқан боламыз.

2. Салу кезеңі: а) берілген AB кесіндінің ортасы D нүктені табамыз б) D нүктеден өтуші және AB кесіндіге перпендикуляр болған түзу сызыққа өткіземіз; с) перпендикулярға D нүктеден бастап hc биіктік кесіндісін қоямыз; д) C нүктені A және B нүктелермен тұтастырамыз.

3. Негіздеу кезеңі. Пайда болаған ABC үшбұрыштың табаны және биіктігі берілген кесінділерге тең тағы ол тең бүйірлі, өйткені оның биіктігі табанына перпендикуляр. Демек, салынған үшбұрыш табылған үшбұрыш.

4. Зерттеу кезеңі. Кез келген кесіндінің ортасына тұтас перпендикуляр түсіру мүмкін болғандығы үшін есеп жалғыз шешуге ие болады.





Тақырыпқа байланысты сұрақтар

1. Салуға байланысты есептерді шешуде жай сызғыш пен циркуль көмегінде қандай жұмыстарды амалға асыру мүмкін?
2. Не себептен салуға байланысты есептерді шешуде орындалатын салулар негіздеу керек?
3. Геометриялық салуларға байланысты негізгі есептерді сана.
4. Геометриялық салуға байланысты қиындау есептерді шешудің қандай кезеңдері бар?



Практикалық жаттығу және қолдану

1. а) 30° ; б) 60° ; с) 15° ; д) 120° ; е) 45° -ты бұрыштар берілген. Жай сызғыш және циркульді пайдаланып, оларға тең бұрыштарды сал.
2. а) 75° ; б) 90° ; с) 135° -ты бұрыштар берілген. Жай сызғыш және циркульді пайдаланып, оларға тең бұрыштарды сал.
3. $\angle A = \alpha$ және $\angle B = \beta$ бұрыштар берілген ($\alpha > \beta$). Өлшемі: а) 2α ; б) $\alpha - \beta$; с) $2\alpha + \beta$ болған бұрыштарды сал.
4. 45° және 30° бұрыштар берілген. Өлшемі: а) 15° ; б) 75° ; с) 105° ; д) 120° болған бұрыштарды сал.
5. Бұрыш сыз және оны төрт тең бұрышқа бөл.
6. Жай сызғышпен циркульдің көмегінде: а) 90° ; б) 60° ; с) 30° -ты бұрыштарды тең екіге бөл.
7. 45° -ты бұрышты үш тең бұрыштарға бөл.
- 8*. 36° -ты бұрыш берілген. Циркуль мен жай сызғыш көмегінде 99° -ты бұрыш сал.
- 9*. 54° -ты бұрыш берілген. Циркуль мен жай сызғыш көмегінде бұл бұрышты тең үшке бөл.
10. Кесіндіні тең екіге бөлудің қандай әдісін білесің? Кесінді сыз және оны тең екіге бөл.
11. Түзу сызықта A және B нүктелер берілген. BA сәуледе B нүктеден бастап осындай BC кесіндіні қой, $BC = 2AB$ болсын.
12. A және B нүктелер берілген. Тек циркульді пайдаланып осындай C нүкте сал, $AC = 3AB$ болсын.
13. a және b ұзындықтағы кесінділер берілген: ($a > b$). а) $a + b$; б) $a - b$ ұзындықтағы кесінділерді сал.
14. Ұзындығы 12 см және 5 см болған кесінділер берілген. Ұзындығы а) 17 см ; б) 7 см ; с) 12 см ; д) 22 см ; е) 29 см болған кесінділерді сал.
- 15*. A және B нүктелерден бірдей алыстаған тағы да a түзу сызыққа жатушы нүктені тап.

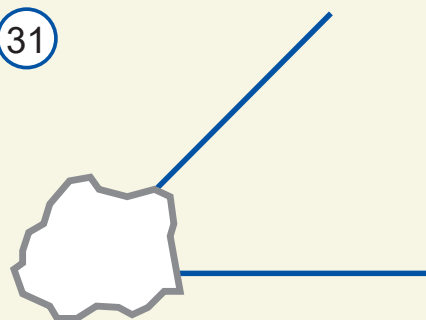
16. Тек сызғыш көмегінде a түзу сызықта жатпайтын M нүкте арқылы a түзу сызыққа параллель болған b түзу сызықты өткіз.
17. Берілген кесіндіні тең төрт бөлікке бөл.
18. Төмендегілерге орай ABC үшбұрыш сал: а) $AB = 3$; $BC = 5$, $\angle C = 45^\circ$; б) $AB = 9$; $BC = 5$; $AC = 12$; в) $AB = 22$; $\angle A = 30^\circ$; $\angle B = 56^\circ$.
19. Төмендегілерге орай ABC үшбұрыш сал: а) $AB = 7$; $BC = 3$; $\angle B = 38^\circ$; б) $AB = 3$; $BC = 8$; $AC = 6$; в) $AB = 9$; $\angle A = 90^\circ$; $\angle B = 50^\circ$.
20. Қабырғалары $A = 3$ см, $b = 8$ см және $c = 9$ см болған үшбұрыш сал.
21. а) Қабырғалары $A = 3$ см, $b = 4$ см және $c = 7$ см болған үшбұрыш салу мүмкін бе? б) үшбұрыштар салу үшін оның a , b және c қабырғалары қандай шартты қанағаттандыруы керек?
22. Берілген үлкен қабырғасы және сүйір бұрышы бойынша тік бұрышты үшбұрыш сал.
23. Үшбұрыш сыз. Оның биіктіктерін сал.
24. Берілген үшбұрыштардың медианаларын сал.
25. Тік бұрышты қалай салу мүмкін?
26. Берілген түзу сызыққа параллель түзу сызық сыз.
27. Табаны және оған түсірілген биіктік бойынша тең бүйірлі үшбұрыш сал.
- 28*. Екі қабырғасы және олар арасындағы бұрыш бойынша үшбұрыш сал.
- 29*. Берілген қабырға бойынша квадрат сал.
- 30*. Бір қабырғасы және оған жабысқан бұрыштар бойынша үшбұрыш сал.
- 31*. Гипотенузасы және катеті бойынша тік бұрышты үшбұрыш сал.
- 32*. Бір қабырғасы және оған жабысқан бұрышы және осы қабырға түсірілген биіктікке қарай үшбұрыш сал.
- 33*. Бір қабырғасы және оған жабысқан бұрышы және қалған екі қабырғасы қосындысына қарай үшбұрыш сал.
- 34*. Бір қабырғасы және оған жабысқан бұрышы және қалған екі қабырғасы айырмасына қарай үшбұрыш сал.



Геометриялық басқатырма

Шахжаһан әкесінің жазбалары ішінен 31-суретте бейнеленген сызба тауып алды. Бірақ бұл бұрыштың бір бөлігіне сия төгіліп өшіп кеткен екен. Шахжаһан бұл бұрыштың биссектрисасын сала алады ма?

31



1. Тесттер.

1. Кесінділердің ұзындықтары a , b және c лардың қайсы мәндері бұл кесінділерден үшбұрыш салу мүмкін емес?

A) $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$

Б) $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$

В) $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$

Г) $a = 6$, $b = 4$, $c = 3$

2. Геометриялық салуларды орындау үшін қайсы оқу құралдарынан пайдалануға рұқсат беріледі?

A) Транспортир;

Б) Транспортир, сызғыш;

В) Циркуль, сызғыш;

Г) Циркуль, транспортир.

3. Геометриялық салуларды орындауда сызғыштан қандай тапсырмаларды орындауға рұқсат беріледі?

A) Кесіндіні өлшеуде;

Б) Кесінді, түзу сызық сызуда;

В) Нүктеден өтуші және берілген түзу сызыққа перпендикуляр түзу сызықты шамамен сызуда;

Г) Кесіндіні өлшеп, оның ортасын табуда.

2. Есептер.

1. a және b ұзындықтағы кесінділер берілген: ($a > b$). а) $2a + 3b$; б) $2a - b$ ұзындықтағы кесінділерді сал.

2. Тек бір жарты жазықтықта салу жұмыстарын орындап, берілген кесіндіні тең екіге бөл.

3. Тек үшбұрышты сызғышты қолданып, берілген кесіндіні тең екіге бөл.

4. AB кесіндінің ортасын турадан-тура анықтау мүмкіндігі болмаса, оның ортасынан өтуші перпендикулярды салу мүмкін бе?

5. $\angle A = \alpha$ және $\angle B = \beta$ бұрыштар берілген: ($\alpha > \beta$) Өлшемі: а) 3α ; б) $\alpha + 2\beta$; в) $3\alpha + \beta$ болған бұрыштарды сал.

6. Жай сызғыш пен циркуль көмегімен: а) 124° ; б) 68° ; в) 46° ты бұрыштарды тең екіге бөл.

7. Егер шеңберден сырттағы нүктеден шеңбердің ең жақын және ең алыс нүктелеріне дейін болған қашықтықтар сәйкес түрде 2 см және 10 см боса, шеңбер радиусын тап.

8. Берілген гипотенуза бойынша тең бүйірлі тік бұрышты үшбұрыш сал.

9*. Ұзындығы $a + b$, $b + c$ және $a + c$ кесінділер берілген. Қабырғалары a , b , c болған үшбұрыш сал.

10*. Екі катеті бойынша тік бұрышты үшбұрыш сал.

11. a түзу сызық пен үшбұрыш берілген. Бір қабырғасы A -да жатқан және берілген үшбұрышқа тең болған үшбұрыш сал.

12. Түзу сызық сыз және онда жатпаған нүкте белгіле. Осы нүктеден өтуші және осы түзу сызыққа перпендикуляр түзу сызық сал.

13. Түзу сызық сыз және онда жатпаған нүкте белгіле. Осы нүктеден өтуші және осы түзу сызыққа параллель түзу сызық сал.

6 – бақылау жұмысы үлгісі

Үлгілі бақылау жұмысы екі бөлімнен тұрады:

1. Теориялық 5 тест.
2. Төмендегі есептерге ұқсас 3 есеп (4-есеп «үздік» баға алмақшы болған оқушылар үшін қосымша).
 1. 120° -ты бұрыш берілген. Циркуль мен сызғыш көмегінде оған тең бұрыш сал.
 2. Қабырғалары $a = 5 \text{ см}$, $b = 6 \text{ см}$ және $c = 7 \text{ см}$ болған үшбұрыш сал.
 3. 2-есепте құрылған үшбұрыштың a қабырғасына медиана өткіз.
 4. Үшбұрышты оның табаны, бір қабырғасы мен табанына түсірілген биіктікке орай сал.

«GeoGebra» да практикалық тапсырмаларды орындау

1. Тұрақты алтыбұрыш жасау

Тұрақты алтыбұрыш жасау үшін төмендегі құралдар қажет болады.



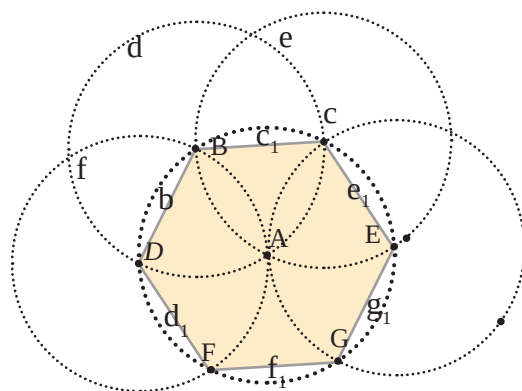
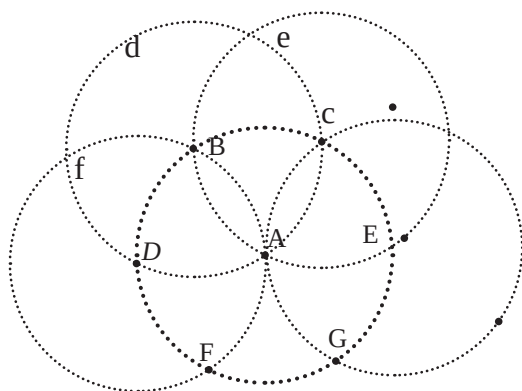
Қажетті компоненттер:

- **GeoGebra**да жаңа айна аш.
- **GeoGebra** интерфейсі «**Настройки**» –  «**Геометрия**» көрінісіне өткіз.
- Жаңа нүкте үшін параметрлерін өзгерт.

Тұрақты алтыбұрыш жасау алгоритмі

1		Орталығы A нүктеде және B нүктеден өтуші c шеңберін сыз.
2		Орталығы B нүктеде және A нүктеден өтуші жаңа d шеңберін сыз.
3		c мен d шеңберлер қиылысу нүктелері C мен D -ны, яғни тұрақты алтыбұрыштың төбелерін белгілейміз.

4		Орталығы C нүкте және A нүктеден өтуші жаңа e шеңберін сыз.
5		e мен c шеңберлер қиылысу нүктесінде тұрақты алтыбұрыштың E ұшын белгілейміз.
6		Орталығы D нүкте және A нүктеден өтуші жаңа f шеңберді сыз.
7		f және c шеңберлер қиылысу нүктесінде кәдімгі алтыбұрыштың F төбесін белгілейміз.
8		Орталығы E нүкте және A нүктеден өтуші жаңа γ шеңберді сыз.
9		γ мен c шеңберлер қиылысу нүктесінде кәдімгі алтыбұрыш G төбесін белгілейміз.
10		Кәдімгі $FGE CBD$ алтыбұрышты жаса.
11		Шеңберлерді жасырын жағдайға өткіз.
12		Алтыбұрыштың ішкі бұрыштарын көрсет.
13		Алтыбұрыш дұрыс орындалғанын тексер.



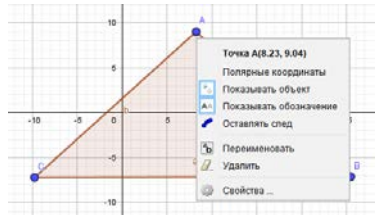
Тапсырма. Алтыбұрыштың салыну кезеңін түсіндіруге әрекет жаса.
Шеңбер радиусы қандай болуы керек және не үшін? Жауабыңды түсіндір.

2. Геометриялық түсінік және мәліметтерді визуалдастыру

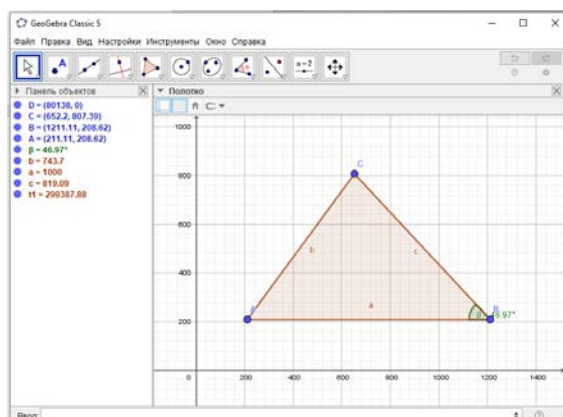
1-тапсырма

Теорема. *Үшбұрыштың сыртқы бұрышы оған сыбайлас болмаған екі ішкі бұрыштар қосындысына тең.*

Теореманы **GeoGebra**дан пайдаланып визуалдастырамыз. Төменде келтірілген амалдар тізбектілігін орында.

	ABC үшбұрышты сал.
	AB сәулені өткіз.
	Үшбұрыштың A және C ішкі бұрыштарын, сондай-ақ, B сыртқы бұрышты белгіле.
	$\beta = \alpha + \gamma$ – үшбұрыштың екі ішкі бұрыштары қосындысын бейнелеуші динамик мәтінді жаса. Мысалы, $\beta =$ «Объекты» бөлімінен α мен γ -ты тап.
	Үшбұрыш бұрыштары және оның аттары түсі мен көріністерін өзгерт. Объект үстінде тінтуірдің оң түймесін басып, «Свойства»... бұйрығын таңда.

Нәтижеде төмендегі көріністегі динамик сызба пайда болады. Мұнда үшбұрыштардың пішінін өзгертіру мүмкін, бірақ B сыртқы бұрыш әрқашан A және C ішкі бұрыштарының қосындысына тең болады.



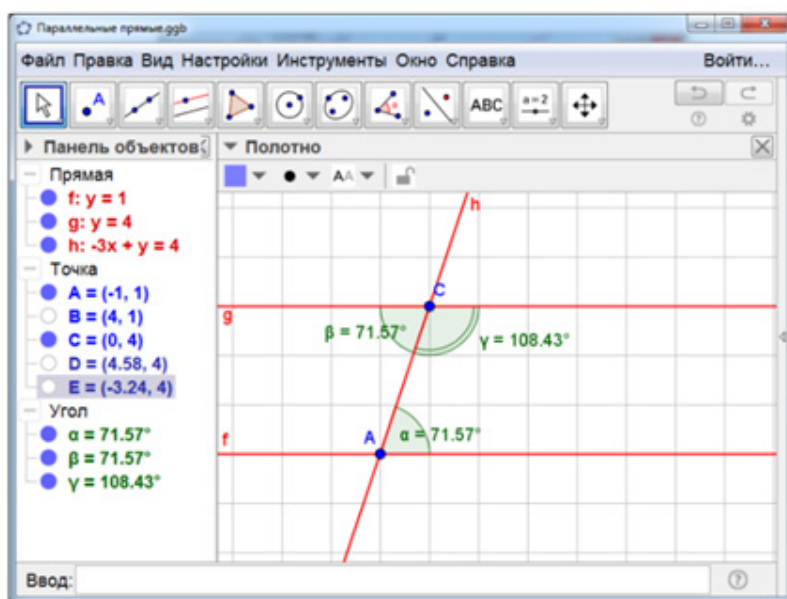
2-тарсырма

Теорема. Екі параллель түзу сызық және кесіндіні пайда еткен бір қабырғалы бұрыштар қосындысы 180° -қа тең болады.

Теореманы **GeoGebra**дан пайдаланып визуалдастырамыз. Төменде келтірілген тізбектігін орында.

	AB түзу сызықты өткіз.
	C нүктені таңда және ол арқылы AB түзу сызыққа параллель түзу сызық өткіз.
	A мен C нүктелер арқылы параллель сызықтарды кесінді h түзу сызықты өткіз.
	Ішкі бір қабырғалы және оған сыбайлас бұрыштарды белгіле.
Точка A(8.23, 9.04) Полярные координаты Показывать объект Показывать обозначение Оставлять след Переименовать Удалить Свойства ...	Түзу сызықтар және бұрыштардың түсі мен көрінісін өзгерт. Объект үстінде тінтуірдің оң түймесін басып, «Свойства» бұйрығын таңда.

Нәтижеде төмендегі көріністегі динамик сызба пайда болады. Бұнда кесінді мен параллель сызықтар орнын өзгерту мүмкін, бірақ кесінді сызық пайда еткен бір қабырғалы бұрыштар қосындысы әрқашан 180° -қа тең болады.





VI ТАРАУ

ҚАЙТАЛАУ

Бұл тарауды үйреніп шыққаннан кейін, төмендегі білім және практикалық дағдыларға ие боласыз:

Білім:

- геометриялық есептерді шешу кезеңдері;
- геометриялық есеп түрлері;
- есептерді шешуде кездесетін кейбір типикалық қателіктер.

Практикалық дағдылар:

- геометриялық есептерді түрлерге бөліп және шешу кезеңдеріне қарай қызметін ұйымдастыру;
- есептерді шешуде кездесетін қателердің алдын алу;
- планиметрия бойынша жылдық қорытынды бақылау жұмысына дайын болу.

25.1. ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ ЕСЕПТЕРДІ ШЕШУ КЕЗЕҢДЕРІ

Геометриялық есептерде шешуде төмендегілерге көңіл аудару қажет:

- 1) геометрияның негізгі түсініктері, олардың қасиеттерін жақсы білу және есте сақтау;
- 2) түрлі геометриялық пішіндердің қасиеттері туралы теоремаларды дәлелдеу әдістерін игеру;
- 3) берілген геометриялық есептің маңызын түсініп жету.

Әдетте геометриялық есептерді шешу кезеңі төмендегі кезеңдерден тұрады:

1-кезең: *есепті түсіну*. Бұл кезеңде есептің шарты мен қорытындысы бөлек ажыратып алынады. Нелер берілген, нені табу, дәлелдеу немесе салу қажеттілігі анықталады. Есепке байланысты сызба сызылады. Сызбаның үлкен және анық болуы мақсатқа сай. Берілген барлық мәліметтер сызбада белгіленеді.

2-кезең: *жоспарлау*. Бұл кезеңде есепті шешу әдісі таңдалады. Оны қолдау үшін қандай қосымша мәліметтер қажеттігі анықталады. Көмекші пішіндер сызылады.

3-кезең: *шешім*. Бұл кезеңде есеп тікелей, берілген жоспар бойынша орындалады.

4-кезең: *тексеру*. Бұл кезеңде есептің табылған шешімі тікелей тексеріледі. Шешу кезеңіне сын көзбен қаралады. Егер қателік анықталса, ол түзетіледі. Түзетудің мүмкіншілігі болмаса, есепті шешудің бастапқы кезеңіне қайтады және барлық жұмыс қайтадан орындалады.

**Есеп шешуді үйрену үшін көбірек есеп шешу керек!
Есепке қатысты сызбаны дұрыс сызу –
есепті жартылай шешу дегені.**

Геометриялық есептер қойылуы және мәніне қарап үш түрлі болуы мүмкін:

- 1) есептеуге қатысты есептер;
- 2) дәлелдеуге қатысты есептер;
- 3) салуға қатысты есептер;

Геометриялық есепті шешу тек геометриялық пішіннің қасиетін үйренуден ғана тұрмайды. Ол дұрыс пікірлеу, логикалық ойлау және олар негізінде дұрыс және шешім қабылдау, қорытынды шығару дағдылар мен біліктілігін де қалыптастырады. Мұндай дағды және біліктілік тек қана математикада, бұл күнделік тұрмыста кездесетін мәселелерді шешуде де қол келеді.

Әрине, мәселені шешу – бұл тек жауапты табу дегені емес. Есептер шешу кезеңінде белгілі қасиеттерді, теоремаларды және олардың нәтижелерін қолдай алу, түрлі әдістерден пайдалана алуды білу керек болады.

Төмендегі есептің шешу үдерісін бақылайық.



Есеп. Ұштары тең қабырғалары үшбұрыш қабырғаларының ортасы болған үшбұрыштың тең қабырғалы екендігін дәлелде.



$\triangle ABC$ – тең қабырғалы, K – AB қабырға ортасы, N – BC қабырға ортасы, L – AC қабырға ортасы



$\triangle KNL$ – тең бүйірлі

1. Есепті түсіну кезеңі.

Есеп шарттары негізінде сызып аламыз (1-сурет).

2. Жоспарлау кезеңі. Тең қабырғалы үшбұрыштың қасиетінен және үшбұрыштың ҚБҚ белгісінен пайдаланамыз.

3. Шешу кезеңі.

Шартқа орай

$LA = AK = KB = BN = NC = CL$ және $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$. Онда $\triangle LAK$ – тең қабырғалы, AK қабырғалары және A бұрышы $\triangle KBN$ – тең қабырғалы, BK , BN қабырғалары және B бұрышына және $\triangle NCL$ – тең қабырғалы, CN , CL қабырғалары және C бұрышына сәйкес түрде тең.

Демек, $\triangle LAK = \triangle KBN = \triangle NCL$. Онда бұл үшбұрыштардың үшінші қабырғалары да өзара тең болады; $KL = KN = NL$.

Демек, $\triangle KNL$ – тең қабырғалар.

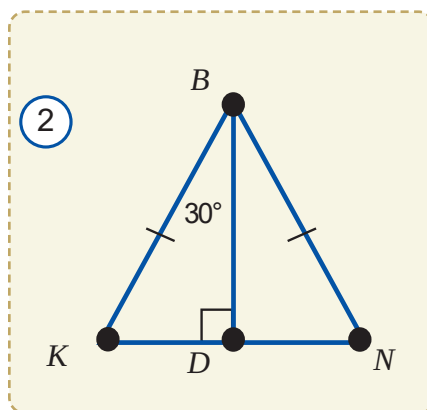
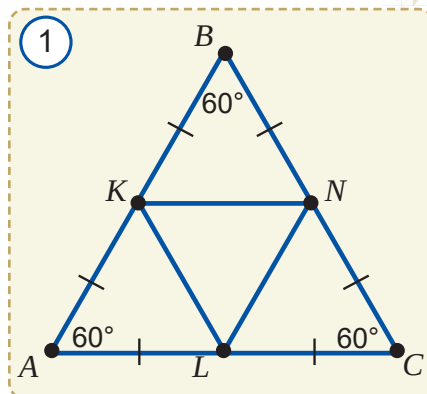
4. Тексеру кезеңі.

Есептің шешу кезеңі бір рет қарап шығып, онда әр тұжырымның логикалық дұрыс алып барылғанын тексерейік.

Бұл есепті басқа әдіспен де шешу мүмкін.

Мұнда үшбұрыш бұрышы 60° болған тең бүйірлі үшбұрыштың қасиетінен пайдаланамыз. $\triangle KBN$ тең бүйірлі үшбұрыштың BD биіктігін түсіреміз (2-сурет). BD биссектрисада болғаны үшін $\angle KBD = 60^\circ : 2 = 30^\circ$ және $\angle BKD = \angle BND = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ болады.

Демек, $\triangle KBN$ тең бүйірлі үшбұрыш екен. Осы тәрізде $\triangle KAL$ және $\triangle NCL$ – тең қабырғалы үшбұрыштар екендігі анықталды және $BK = KN = NL = LK$ екендігі белгілі болды. Бұдан $\triangle KNL$ – тең бүйірлі үшбұрыш, мүмкін, $\triangle KNL = \triangle KBN = \triangle NCL = \triangle KAL$ екендігі де белгілі болады.



25.2. Есептеуге қатысты есептер

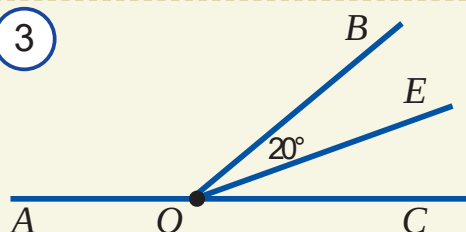
Есептеуге қатысты есептер арифметикалық есептерге ұқсап кетеді. Түрлі геометриялық формулалар көмегінде, берілген санды шамалар негізінде тізбекті есептеу жұмыстары орындалады және ізделінген шамалар табылады.

Бұл есептерде көбінесе сызбаны дұрыс сызып алу және қажетті белгілеулерді енгізу жұмысын жеңілдетеді.



1-есеп. Сыбайлас бұрыштардан бірінің биссектрисасы екінші бұрыштың қабырғаларының бірімен 20° -тық бұрыш жасайды. Осы бұрыштарды тап.

3



Шешуі. Есеп шартын сызбада бейнелейміз (3-сурет). Бұдан OE биссектрисасы сүйір бұрыштың биссектрисасы екендігі белгілі болады. Демек, $\angle BOC = 2 \cdot 20^\circ = 40^\circ$, $\angle AOB = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$ болады.



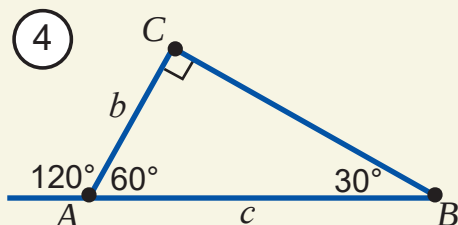
2-есеп. ABC тік бұрышты үшбұрышта $\angle C$ – тік бұрыш, A ұшындағы сыртқы бұрыш 120° – қа тең. Егер $AC + AB = 18$ см болса, үшбұрыштың гипотенузасын тап.

Шешуі. Есеп шарты бойынша сызбаны бейнелейміз (4-сурет). Үшбұрыштың сыртқы бұрыштарының сипаттамасынан, $\angle A = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$, $\angle B = 90^\circ - \angle A = 30^\circ$ екендігін анықтаймыз. $AC = b$, $AB = c$ болсын. Ондай болса $b + c = 18$. Сүйір бұрышы 30° – қа тең болған тік бұрышты үшбұрыштың қасиеттері бойынша, $c = 2b$ болады. Бұдан $b + c = b + 2b = 18$, яғни $b = 6$. Онда:

$c = 12$ екендігі белгілі болады.

Жауабы: 12 см

4



3-есеп. ABC үшбұрышта $AB = 1$, A бұрыштың биссектрисасы B төбеден түсірілген медианаға перпендикуляр. Егер BC қабырғаның ұзындығы бүтін санмен өрнектелсе, үшбұрыштың периметрін тап.

Шешуі. Есеп шартын сызбада бейнелейміз (5-сурет): $AK = KC$. $AN \perp BK$. $\triangle ANB = \triangle ANK$ екендігін анықтаймыз, өйткені AN катет ортақ және біреуден бұрыштары тең (катет және оған жабысқан сүйір бұрыш бойынша). Бұдан болса, $AB = AK = KC = 1$, яғни, $AC = 1 + 1 = 2$ екендігі белгілі болды.

$BC = x$ – бүтін сан, үшбұрыш теңсіздігіне орай $2 + 1 > x$ және $x + 1 > 2$, немесе $x < 3$ және $x > 1$, яғни $1 < x < 3$ болуы керек. 1 мен 3-тің арасында бір бүтін сан бар: 2.

Демек, $BC = 2$ және $P_{ABC} = 1 + 2 + 2 = 5$.

Жауабы: 5.

25.3. Дәлелдеуге қатысты есептер

Дәлелдеуге қатысты есептер өзіне тән кішкене теоремалар. Оларды шешу есепте келтірілген тұжырымды дәлелдеуден құралады. Мысал ретінде төмендегі есепті қарастырайық.

1-есеп. Сыбайлас бұрыштардың биссектрисалары өзара перпендикуляр екендігін дәлелде.



1-masala. Ортақ бұрыштардың биссектрисалары өзара перпендикуляр екеніні дәлелде.



$\angle AOC$ және $\angle BOC$ – сыбайлас бұрыштар, OO_1 және OO_2 – биссектрисалар (6-сурет)



$OO_1 \perp OO_2$.

Дәлелдеу. OO_1 және OO_2 биссектрисалар ажыратқан бұрыштарды сәйкесінше (1-суретте бейнеленгендей) α және β деп белгілейміз. Онда $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$, немесе $\alpha + \beta = 90^\circ$, яғни $\angle O_1OO_2 = \alpha + \beta = 90^\circ$. Демек, $OO_1 \perp OO_2$. Осыны дәлелдеу талап етілген еді.

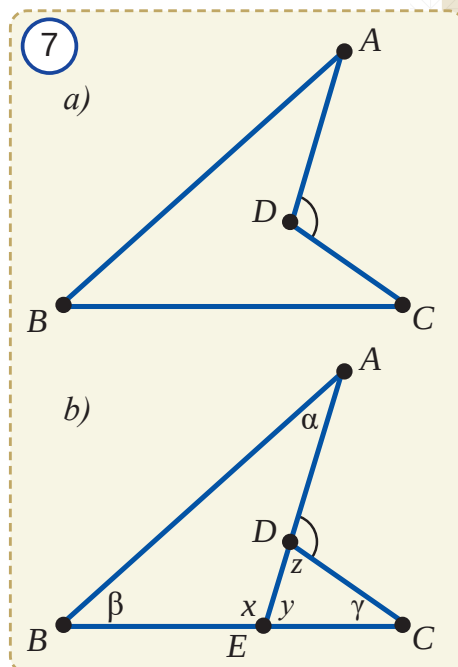
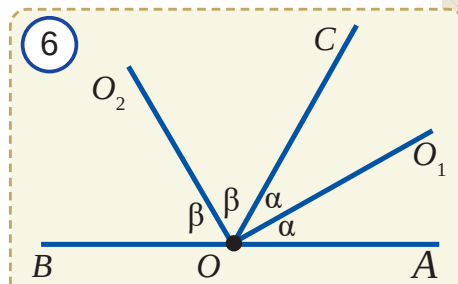
2-есеп. 7a-суретте бейнеленген $ABCD$ төртбұрышта $\angle D = \angle A + \angle B + \angle C$ екендігін дәлелде.

Дәлелдеу. AD түзу сызықтың BC қабырға мен қиылысқан нүктесін E мен белгілейміз (AD қабырғаны жалғастырамыз) және бұрыштар үшін қажетті белгілерді енгіземіз (7b-сурет). Белгілі, $\alpha + \beta + x = 180^\circ$ және $y + z + \gamma = 180^\circ$. Бұл теңдіктерді қосып $\alpha + \beta + \gamma + x + y + z = 360^\circ$ теңдікке ие боламыз. Сыбайлас бұрыштың қасиетіне орай, $x + y = 180^\circ$ болғаны үшін $\alpha + \beta + \gamma + 180^\circ + z = 360^\circ$ немесе $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ - z = \angle D$, яғни:

$\angle D = \alpha + \beta + \gamma = \angle A + \angle B + \angle C$ болады.

Теңдік дәлелденді.

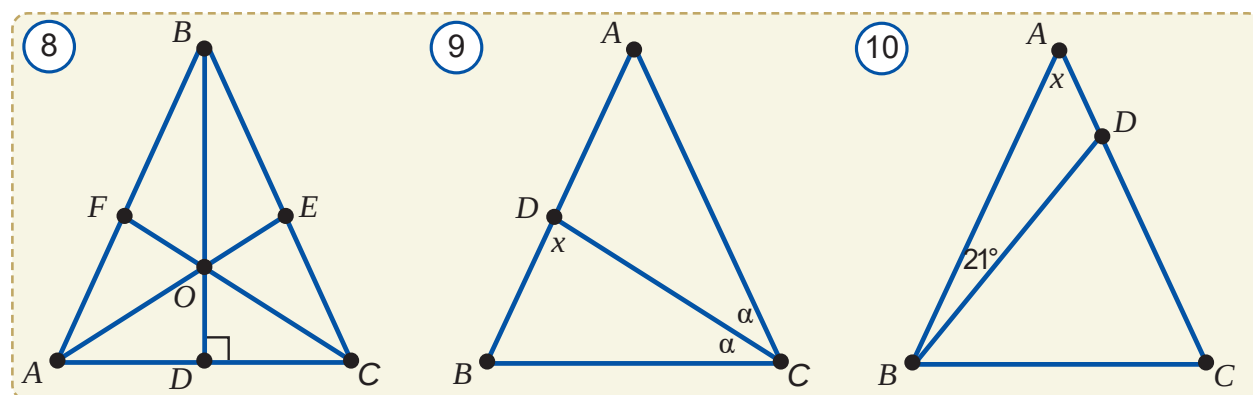
Жоғарыдағы екі есепті дайын сызбаға сүйеніп істедік, 2-есепте қосымша салу және керек белгілеулерді амалға асырдық, бұл болса мәселені оңай шешуімізге көмек берді.



Практикалық жаттығу және қолдану

1. AB кесінді ұзындықтары 1: 2: 3: 4 сияқты қатынастағы кесінділер (осы тізбекте) ажыратылған. Егер шеткі кесінділердің орталары арасындағы қашықтық 15 см тең болса, AB кесіндінің ұзындығын тап.
2. $\angle ABC = 160^\circ$ болған бұрыштың ұшынан осы бұрыш қабырғалары арасында жатушы BO және BE сәулелер шығарылған. Егер BO сәуле берілген бұрышты тең екіге, BE сәуле болса 3: 5 сияқты қатынаста болса, OBE бұрышты тап.
3. $\angle AOB$ бұрыш OC сәуле арқылы бірі екіншісінен 30° -қа үлкен болған екі бұрышқа ажыратылған. Берілген бұрыш биссектрисасы мен OC сәуле арасындағы бұрышты тап.
4. Тең бүйірлі үшбұрыштың негізіндегі бұрышы 30° -қа тең. Осы бұрыштың бүйір қабырғасына және екінші бүйір қабырғасына түсірілген биіктігі арасындағы бұрышты тап.

5. Үшбұрыштың бір сыртқы бұрышы 100° , оның сыбайлас болмаған бұрыштарының қатынасы 2:3 сияқты. Үшбұрыштың бұрыштарын тап.
6. A, B, C, D сәулелер көрсетілген тәртіпте бір түзу сызықта жатады және $AB=BC=1$, $CD=2$. К нүкте BC кесінді де сондай орналасқан, ол BC және AD кесінділерді бір түрлі қатынаста бөліктерге бөледі: $BK:KC=AK:KD$. Осы қатынастарды тап.
7. Үшбұрыштың екі бұрышының биссектрисалары кесіндіден пайда болған бұрыш 128° қа тең. Үшбұрыштың үшінші бұрышын тап.
8. Тең бүйірлі үшбұрыштың ұшындағы бұрышы 96° қа тең. Табанындағы ұштарынан биссектрисалары қиылысқанда пайда болған сүйір бұрышты тап.
9. Тік бұрышты үшбұрыштың тік бұрышынан биссектриса және биіктік шығарылған болып, олар арасындағы бұрыш 24° қа тең. Үшбұрыштың қалған бұрыштарын тап.
10. Егер 8-суретте $AB=BC$, $\angle ABC=50^\circ$, AE және FC - биссектрисалар болса, AOB , EOC бұрыштарын тап.
11. Егер 9-суретте $AB=AC$, $AD=DC$ болса, x -ті тап.
12. Егер 10-суретте $AB=AC$, $BD=BC$ болса, x -ті тап.



13. Үшбұрыштардың бір бұрышы өзара сыбайлас болмаған сыртқы бұрыштарының айырмасына тең. Бұл үшбұрыштың тік бұрышы үшбұрыш екендігін дәлелде.
14. Бір бұрышы 150° болған тең бүйірлі үшбұрыштың табанындағы төбелерінен түсірілген биіктіктері тең болуын дәлелде.
15. Тең қабырғалы үшбұрыштың медианалары қиылысу нүктесінде 2 : 1 қатынаста болуын дәлелде.
16. Тең бүйірлі үшбұрыштың ұшындағы сыртқы бұрышы биссектрисасы үшбұрыш табанына параллель болуын дәлелде.
17. 4-есепте кері теореманы өрнекте және оны дәлелде.
18. Тең қабырғалы үшбұрыштың кез келген екі медианасы 60° -ты бұрыш астында қиылысуын дәлелде.
- 19*. Үшбұрыштың теңдігін олардың екі қабырғасы және үшінші қабырғаға түсірілген медианасы бойынша дәлелде.
- 20*. ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштарда BM және B_1M_1 медианалар өткізілген. Егер $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$ және $BM=B_1M_1$ болса, $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$ екендігін дәлелде.
- 21*. ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштарда AD , A_1D_1 - биссектрисалар. Егер $AB=A_1B_1$, $BD=B_1D_1$ және $AD=A_1D_1$ болса, $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$ екендігін көрсет.
22. ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштарда BH және B_1H_1 биіктіктер өткіз. Егер $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ және $BH=B_1H_1$ болса, $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$ болуын дәлелде.

23*. Үшбұрыштардың екі биіктігі тең болса, оның тең бүйірлі үшбұрыш екендігін дәлелде.

24*. 11-суретте $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 90^\circ$ екендігін дәлелде.

25*. 12-суретте $\alpha < \beta < \gamma$ екендігін дәлелде.

26. Екі параллель түзу сызық және кесінді пайда еткен= айнымалы бұрыштардың биссектрисалары параллель болуын дәлелде.

27. Үшбұрыштардың қалаған бір қабырғасы оның қалған екі қабырғасы айырмасынан үлкен болуын дәлелде.

28. Үшбұрыштың α , β және γ бұрыштары үшін $\alpha < \beta + \gamma$, $\beta < \alpha + \gamma$, $\gamma < \alpha + \beta$ қатынастар орынды болса, бұл қандай үшбұрыш болады?

29. Берілген екі нүктеден өтуші шеңбер сал. Есеп неше шешімге ие?

30. ABC үшбұрыштардың AA_1 және BB_1 биссектрисалары O нүктеде қиылысады. Егер: а) $\angle AOB = 136^\circ$; б) $\angle AOB = 111^\circ$ болса, $\angle ACB$ бұрышты тап.

31. 13-суреттегі кубта $BD = 6$ болса, BE , DE , AC кесінділер және $\angle BED$ -ты тап.

32. Периметрі 42 см болға, ABC үшбұрыштардың медианасы оның периметрі 33 см және 35 см болған екі үшбұрышқа бөледі. Медиананың ұзындығын тап.

33. Тік бұрышты үшбұрыштар сүйір бұрыштарының биссектрисалары қандай бұрыш астында қиылысады?

34. 14-суретте $\angle 1 = \angle 2$ екендігін дәлелде.

35. MN және NM сәулелердің ортақ бөлігі қандай пішінде болады?

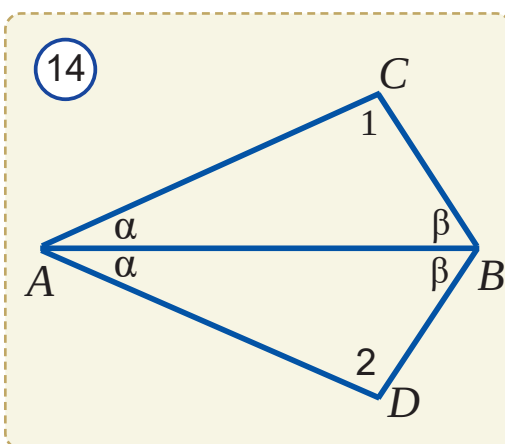
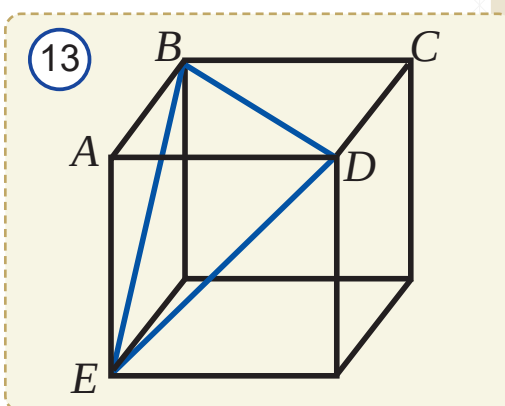
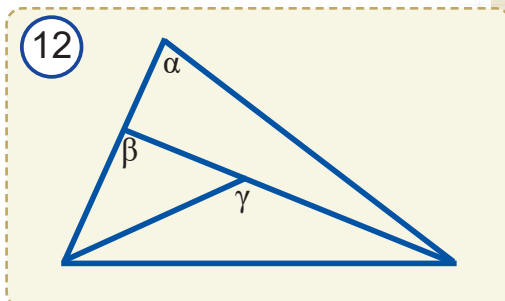
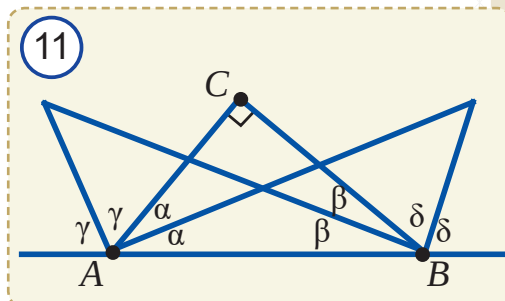
36. Шеңбердің өзара перпендикуляр диаметрлерін жаса.

37. Сыбайлас бұрыштардан бірі екіншісінен 4 есе кіші болса, осы бұрыштардан үлкенін тап.

38. Екі түзу сызықтың қиылысуынан пайда болған бұрыштардың қатынасы $7 : 3$ ке тең. Осы бұрыштардан кішісін тап.

39. A , B және C нүктелер бір түзу сызықта жатады. BC кесіндінің ұзындығы AC кесіндінің ұзындығынан 3 есе үлкен, AB кесіндінің ұзындығы болса BC ұзындығынан $3,6 \text{ см}$ -ге қысқа. AC кесіндінің ұзындығын тап.

40. Екі түзу сызықты үшінші түзу сызық кескенде сыртқы бір қабырғалы бұрыштардың қосындысы 180° -қа тең болса, бұл түзу сызықтардың өзара параллель екендігін дәлелде.



1. Геометриялық диктант. Сөйлемді мазмұнынан келіп шығып толтыр.

1. Жазықтықта... арқылы бір түзу сызық өткізу мүмкін.
2. Бұрыштың...бұрышты екі өзара тең бұрышқа ажыратады.
3. Кесіндінің ортасы оны екі ...бөледі.
4. Жазықтықта түзу сызыққа тиісті болған ... да, тиісті болмаған... да бар.
5. Егер үшбұрыш тең бүйірлі болса... бұрыштары тең болады.
6. Екі үшбұрыштардың сәйкес...және сәйкес...тең болады.
7. Тең қабырғалы үшбұрыштың әрбір...градусқа тең.
8. Тік бұрышты үшбұрыштың сүйір... 90° -қа тең.
9. Жазыңқы бұрыш биссектрисасы он екі...бұрышқа бөледі.
10. Үшінші түзу сызыққа параллель болған екі түзу сызық ...болады.
11. Бір түзу сызыққа перпендикуляр болған екі түзу сызық ...болады.
12. Параллель түзу сызықтарды кесіндімен қиғанда, пайда болған ішкі бір қабырғалы бұрыштар...болады.
13. Кесіндінің ұшынан тең ... кесіндінің орта перпендикулярында жатады.
14. Шеңбердегі нүктелер шеңбер орталығынан тең ...

2. Төменде келтірілген сөйлемдерде қате болса, оны тап және дұрыста.

1. Жазықтықта екі нүкте арқылы екі түзу сызық өткізу мүмкін.
2. Тік бұрыш 180° -қа тең болады.
3. Сыбайлас бұрыштар тең болады.
4. Вертикаль бұрыштар қосындысы 180° -қа тең.
5. Үшбұрыштың ұшынан осы ұшы қарсысындағы қабырғасының ортасын тұтастырушы кесінді үшбұрыштың биссектрисасы дейіледі.
6. Үшбұрыштың периметрі деп оның бұрыштары қосындысына айтылады.
7. Үшбұрыштың қабырғаларының қосындысы 180° -қа тең.
8. 90° -қа тең бұрыш астында қиылысқан түзу сызықтар параллель дейіледі.
9. Параллель түзу сызықтар бір нүктеде қиылысады.
10. Шеңбердің диаметрі радиусқа тең.
11. Тік бұрышты үшбұрыштың катеттері тең болса, оның кіші бұрышы 30° -қа тең болады.
12. Тең бүйірлі үшбұрыштың әрбір бұрышы 60° -қа тең.
13. Бұрыш биссектрисасында жатқан нүктелер бұрыш ұштарынан тең қашықтықта жатады.

3. Берілген қасиетке ие болған геометриялық пішінді оң бағанға сәйкес қатарға жаз.

1.	Ұзындығы 5 <i>см</i>	
2	Нүкте және ұштары осы нүктелерден болған екі сәуледен тұрады	
3	Қиылыспайтын түзу сызықтар	
4	Ұшынан шыққан биіктігі де медианасы да биссектрисасы болады	
5	Барлық қабырғасы тең үшбұрыш	
6	Екі қабырғасы тең үшбұрыш	
7	Бұрышты екі тең бұрышқа бөледі	
8	Екі катеті бар	
9	Екі бұрышының қосындысы 90° -тан үлкен болған үшбұрыш	

4. Бірінші бағанда берілген геометриялық түсініктерге екінші бағаннан тиісті қасиет немесе тұжырымдарды қой.

Геометриялық түсінік	Қасиет немесе тұжырым
1. Перпендикуляр түзу сызықтар	(А) белгілі ұзындыққа ие
2. Тең қабырғалы үшбұрыш	(В) екі бұрышы тең
3. Шеңбер	(С) гипотенузаның жартысына тең
4. Бұрыш биссектрисасындағы нүкте	(D) төбесі мен қарсысындағы қабырға ортасына тұтастырады
5. Үшбұрыш биіктігі	(E) бір ішкі бұрышына сыбайлас және қалған екі бұрышы қосындысына тең
6. 30° -ты бұрыш қарсысындағы катет	(F) қиылыспайды
7. Медиана	(G) 90° -ты бұрыш астында қиылысады
8. Үшбұрыштың сыртқы бұрышы	(H) қабырғалары тең
9. Тең бүйірлі үшбұрыш	(I) нүктелері орталықтан тең алыстаған
10. Кесінді	(J) оның қабырғаларынан тең алыстықта жатады
11. Параллель түзу сызықтар	(K) бір ұшынан өтеді және бір қабырғасына перпендикуляр

5. Тесттер.

1. Берілген нүктеден берілген түзу сызыққа параллель етіп неше түзу сызық өткізу мүмкін?

А) 1

Б) 2

В) 3

Г) 4

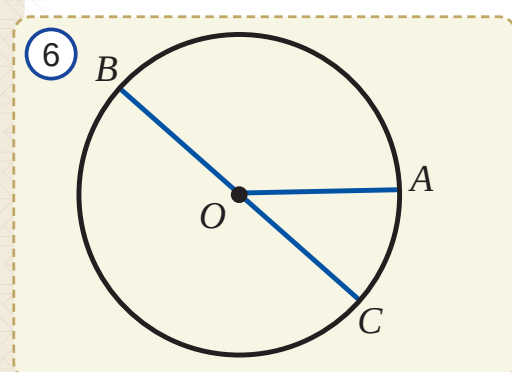
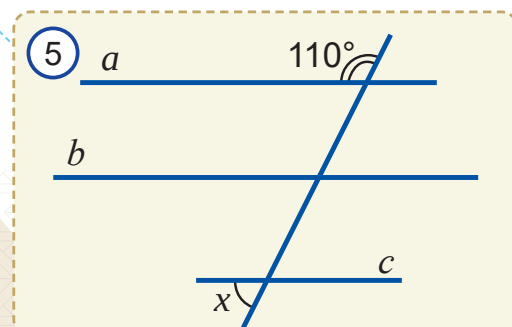
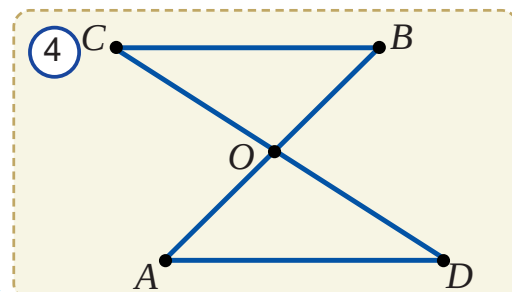
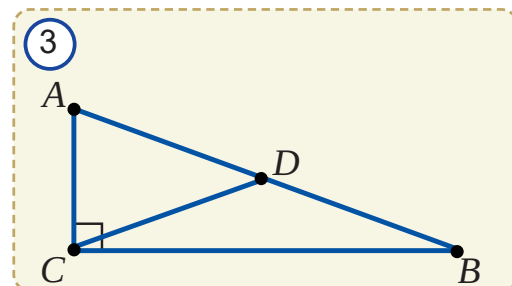
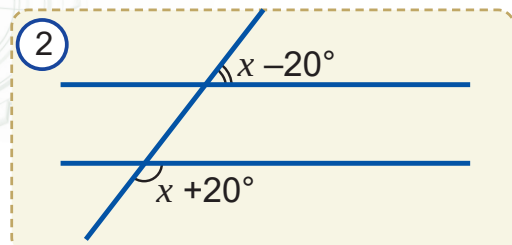
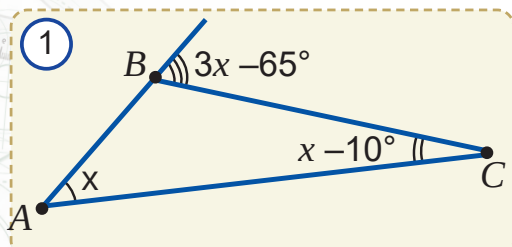
2. Жазыңқы бұрыш неше градусқа тең?

А) 90°

Б) 90° -тан үлкен

В) 90° -тан кіші

Г) 180°



3. 1-суреттегі $\angle BCA$ бұрышты тап.
А) 25° Б) 35° В) 45° Г) 55°
4. 2-суреттегі x -ты тап.
А) 80° Б) 90° В) 100° Г) 70°
5. Егер ABC үшбұрышта $\angle B = 30^\circ$, $\angle C = 90^\circ$ және $AC = 10 \text{ см}$ болса, AB гипотенузасын тап.
А) 10 см Б) 12 см В) 15 см Г) 20 см
6. ABC үшбұрышта $AB = BC$, $AB = AC + 7(\text{см})$. Егер ABC үшбұрыш периметрі 23 см болса, үшбұрыштың кіші қабырғасын тап.
А) 3 см Б) 5 см В) 7 см Г) 9 см
7. Сыбайлас бұрыштардан бірі екіншісінен үш есе үлкен. Бұл бұрыштардың айырмасын тап.
А) 45° Б) 60° В) 75° Г) 90°
8. Шеңбердің радиусы $3,2 \text{ см}$. Оның диаметрін тап.
А) $3,2$ Б) $5,2$ В) $6,4$ Г) $1,6$
9. ABC – тік бұрышты үшбұрыш (3-сурет), $\angle C = 90^\circ$, CD - медиана. $\angle BDC = 130^\circ$ боса, $\angle A$ ны тап.
А) 45° Б) 65° В) 75° Г) 85°
10. ABC тең бүйірлі үшбұрыштың ұшындағы B бұрышы 80° -қа тең. Оның A ұшындағы сыртқы бұрышын тап.
А) 130° Б) 120° В) 110° Г) 100°
11. Егер $A \perp b$, $b \perp c$, $c \perp d$ болса, төмендегі жауаптардың қайсысы дұрыс.
А) $a \parallel c$ Б) $b \parallel d$ В) $a \parallel d$ Г) $b \parallel c$
12. Егер 4-суретте $AO = OB$, $OC = OD$, $BC = 5 \text{ см}$ және $AO + OC = 7 \text{ см}$ болса, AOD үшбұрыш периметрін тап.
А) 5 см Б) 7 см В) 12 см Г) 17 см
13. Егер 5-суретте $a \parallel b$ және $b \parallel c$ болса, $x = ?$
А) 60° Б) 70° В) 80° Г) 90°
14. ABC үшбұрышта $\angle A = 50^\circ$ және $\angle B = 70^\circ$ болса, оның үлкен қабырғасын анықта.
А) AB Б) BC В) AC
Г) анықтауға болмайды.
15. Егер 6-суретте O шеңбер орталығы, $AO = 4 \text{ см}$ болса, BC кесінді ұзындығын тап.
А) 4 см Б) 5 см В) 2 см Г) 8 см
16. 7-суретте бейнеленген үшбұрыштың кіші бұрышын тап.
А) 30° Б) 45° В) 60° Г) 90°

17. Үшбұрыштың бір биіктігі оның периметрлері 25 см және 29 см болған үшбұрыштарға бөледі. Егер берілген үшбұрыш периметрі 40 см болса, оның биіктігін тап.

А) 10 см Б) 7 см В) 5 см Г) 9 см

18. $120^\circ = \alpha$ тең бұрышқа сыбайлас бұрыштар қосындысын тап.

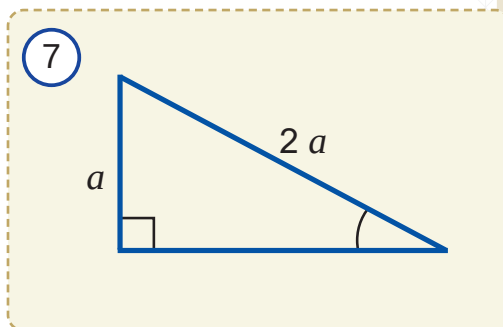
А) 30° Б) 45° В) 180° Г) 120°

19. ABC үшбұрыштың C бұрышы 70° -қа тең болса, A және B бұрыштар биссектрисалары арасындағы бұрышты тап.

А) 55° Б) 60° В) 65° Г) 75° .

20. $ABCD$ тік төртбұрыштың A және D ұштарынан шығарылған биссектрисалар BC қабырға 3 тең бөлікке бөледі. Егер тік төртбұрыштың қабырғалары бүтін сандардан тұрса, $AB = 5$ болса, оның периметрін тап.

А) 20 Б) 30; В) 40 Г) 80.



6. Есептер

1. Тең қабырғалы ABC үшбұрыштың ұшынан AB табанына өткізілген биссектрисасы оны екі үшбұрышқа бөледі. Бұл үшбұрыштардың теңдігін дәлелде.
2. Периметрі 30 см болған бір қабырғаның екінші қабырғасынан 2 см үлкен, үшінші қабырғадан болса 2 см кіші. Үшбұрыштың үлкен қабырғасын тап.
3. Үшбұрыштың табанына түсірілген медианасы оны периметрі 18 см және 24 см -ге тең екі үшбұрышқа бөледі. Берілген үшбұрыштың кіші бүйір қабырғасы 6 см -ге тең. Үшбұрыштың үлкен бүйір қабырғасын тап.
4. Үшбұрыштың 5-ке тең болған 18 және 26 болған екі үшбұрышқа бөледі. Берілген үшбұрыштың периметрін тап.
5. Тең бүйірлі үшбұрыштың периметрі $7,6\text{ см}$ -ге, табаны болса 2 см -ге тең. Бүйір қабырғаны тап.
6. AB және CD түзу сызықтар O нүктеде қиылысады. BOC және AOD бұрыштардың қосындысы 194° -қа тең. AOC бұрышты тап.
7. ABC үшбұрыштарда A бұрыш C бұрышқа тең, AD биіктігі болса BC қабырғаны тең екіге бөледі. Егер $BD = 7,8\text{ см}$ болса, AC -ны тап.
8. Тең бүйірлі үшбұрыштың бүйір қабырғасына түсірілген биіктігі мен екінші бүйір қабырғасы арасындағы бұрыш 20° -қа тең. Үшбұрыштың табанындағы бұрышын тап.
9. B бұрыштың биссектрисасында жатқан D нүктеден бұрыштың қабырғаларына DA және DC перпендикуляр өткізілген. $DA = DC$ екенін дәлелде.
10. Егер A , B және C нүктелер бір түзу сызықта жатып, $AC = 7\text{ м}$ және $BC = 9\text{ м}$ болса, AB кесіндінің ұзындығын тап.
11. Сыбайлас бұрыштардың бірі екіншісінен 18° -қа кіші. Осы бұрыштарды тап.
12. Екі параллель түзу сызықты үшінші түзу сызық қиғанда пайда болған бұрыштардың бірі 55° -қа тең. Қалған бұрыштарды тап.

13. A , B және C нүктелер бір түзу сызықта жатады. Егер $AB = 2\text{ см}$, $BC = 3\text{ см}$ және $AC = 5\text{ см}$ болса, B нүкте AC кесіндіге тиісті болады ма? Жауабыңды негізде.
14. A нүкте BC түзу сызықтың B және C нүктелер арасында жатады. Егер $BC = 15\text{ см}$, AC кесінді болса AB кесіндіден 3 см -ге қысқа болса, AB кесіндінің ұзындығын тап.
15. Сыбайлас бұрыштардың бірі екіншісінен 5 есе үлкен болса, осы бұрыштардың үлкенін тап.
16. Екі түзу сызықтың қиылысқанынан пайда болған бұрыштардың қатынасы $5:4$ -ке тең. Осы бұрыштардың кішісін тап.
17. A , B және C нүктелер бір түзу сызықта жатады. BC кесіндінің ұзындығы AC кесіндінің ұзындығынан 2 есе кіші, AB кесіндінің ұзындығы болса BC ұзындығынан $5,3\text{ см}$ -ге ұзын. AC кесіндінің ұзындығын тап.
18. Тең бүйірлі үшбұрыштың ұшындағы бұрыш 42° -қа тең. Табанындағы бұрыштардың биссектрисалары қиылысқанда пайда болған сүйір бұрышты тап.
19. Екі параллель түзу сызықты үшінші түзу сызық қиғанда пайда болған бұрыштардың бірі 109° -қа тең. Қалған бұрыштарды тап.

7. Күрделі есептер

1. Жерден Күнге дейін болған қашықтық шамамен 149 500 мың км, Жерден Айға дейінгі қашықтық болса 400 мың км. Күннен Айға дейін қашықтық болса: а) Айдың; б) Күннің толық тұтылған кезінде қанша болады?
2. C нүкте AB кесіндінің ортасы. AB кесінді де осындай D нүктені тап, $DA = 1,5 (DB + DC)$ болсын.
3. Сыбайлас бұрыштардан бірі олардың айырмасынан 4 есе үлкен. Бұл бұрыштарды тап.
4. D нүкте ABC үшбұрыштың ішкі аймағында жатыр. ABC бұрыш ADC бұрыштан кіші екендігін көрсет.
5. Берілген сүйір бұрыштан 25° -қа үлкен болған бұрышты сал.
6. Үшбұрыш периметрі оның бір қабырғасынан a -ға, екінші қабырғасынан b -ға және үшінші қабырғадан c ға үлкен. Үшбұрыштың периметрін тап.
7. Үшбұрыш медианалары қосындысы оның периметрінен кіші, бірақ оның жарты периметрінен үлкен екендігін дәлелде.
8. Кез келген үшбұрышты бір неше тең бүйірлі үшбұрыштарға бөлуі мүмкіндігін дәлелде.
9. Егер BB_1 кесінді ABC үшбұрыштың биссектрисасы болса, $AB > AB_1$ және $BC > B_1C$ екендігін дәлелде.
10. AB және CD кесінділер O нүктеде қиылысады. Егер $AC = AO = BO = BD$ болса, $OC = OD$ екендігін дәлелде.
11. Үшбұрыштың биіктіктері қиылысу нүктесінде тең екіге бөлінуі мүмкін бе?
12. A , B , C және D нүктелер жазықтықта сондай орналассын, $AB = BC = CA$ және $DA = DB = DC$. ADB бұрыштың градус өлшемін тап.
13. 8-суреттегі AB және CD кесінділер өзара параллель болады ма?

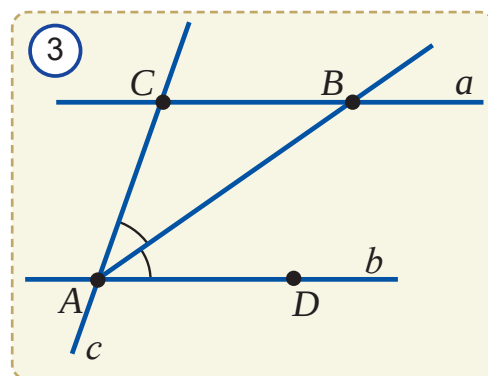
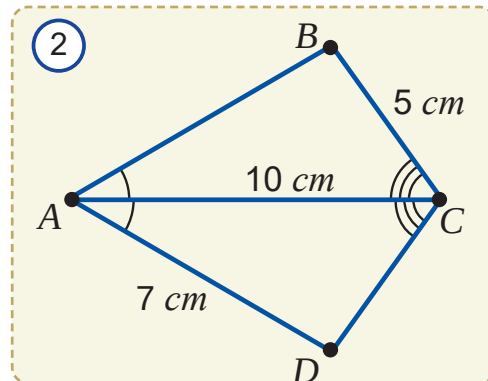
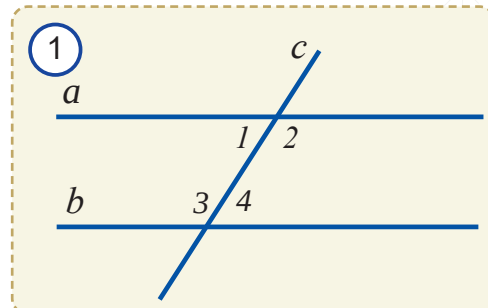
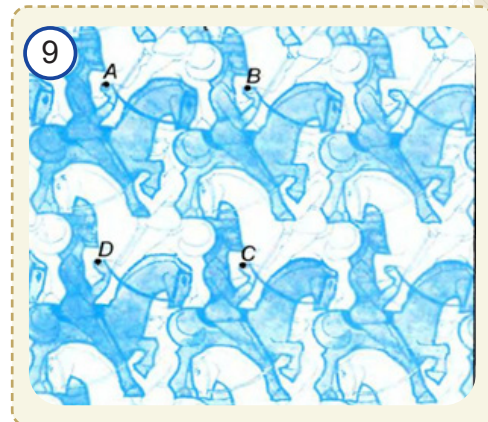
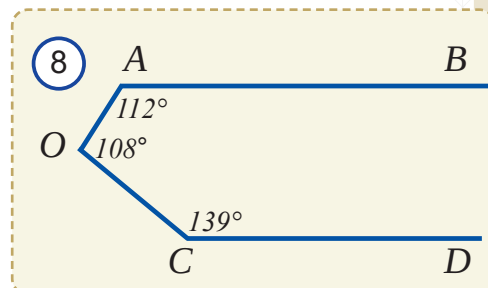
14. Доғал бұрыштардың градус өлшемі α -ға тең. Оның қабырғаларына перпендикуляр екі сәуле өткізілген. Бұл сәулелер өзара градус өлшемі β -ға тең бұрыш пайда етеді. $\alpha + \beta = 180^\circ$ екендігін дәлелде.
15. 9-суретте келтірілген атты-шабандоз бейнесі тең екі пішіннен тұрады. Егер $ABCD$ ауданы S -ке тең болған төртбұрыш болса, бір атты пішінінің ауданын анықта.
16. ABC тең бүйірлі үшбұрышта $AB = AC$, M нүкте – AB қабырғаның ортасы, N нүкте болса, AC қабырғаның ортасы. N нүктеден шығушы перпендикуляр AB қабырғаны L нүктеде, M нүктеден шығушы перпендикуляр AC қабырғаны K нүктеде қиып өтеді: $MK \perp AB$ және $NL \perp AC$. $\angle NLK = \angle MKL$ екендігін дәлелде.

Қорытынды бақылау жұмысы

Қорытынды бақылау жұмысы екі бөлімнен тұрады. Бірінші бөлімде алдыңғы оқулықтарда қарастырылған геометриялық диктант және тест сұрақтарына ұқсас 5 диктант сұрақтар және 10 тестті шешуге ұсыныс беріледі. Бақылау жұмысының екінші бөлімінде төмендегі вариантта берілген есептерге ұқсас 6 есеп берілуі мүмкін.

Қорытынды жазба бақылау жұмысы үлгісі

- Егер 1-суретте $a \parallel b$ және $\angle 1 = 45^\circ$ болса, $\angle 2$, $\angle 3$ және $\angle 4$ -ты тап.
- ABC үшбұрышта $\angle A = 32^\circ$, B бұрыш A бұрыштан 12° кіші болса, C бұрышқа сырт болған бұрышты тап.
- 2-суретте берілген мәліметтер негізінде
 - $\triangle ABC = \triangle ADC$ екендігін дәлелде;
 - ACD үшбұрыш периметрін тап.
- 3-суретте $a \parallel b$ және AB – CAD бұрыш биссектрисасы, $AC = 7 \text{ cm}$. BC кесінді ұзындығын тап.
- Тік бұрышты үшбұрыштың тік бұрышынан түсірілген биіктігі оның биссектрисасы да болады. Бұл үшбұрыштың биссектрисасын тап.
- Берілген бұрышқа тең бұрыш және оның биссектрисасын сал.



7- сынып үшін геометрияға байланысты негізгі мәліметтер

1



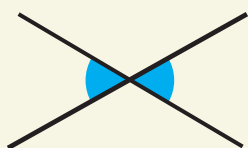
Сыбайлас және вертикаль бұрыштар

Сыбайлас бұрыштар қосындысы 180° -қа тең.

Сыбайлас бұрыштардың биссектрисалары өзара перпендикуляр.

Вертикаль бұрыштар тең (2-сурет).

2



Үшбұрыштар

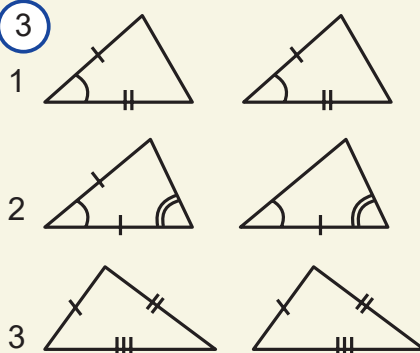
Үшбұрыштар теңдігінің белгілері:

1) (ҚБҚ) екі қабырға және олар арасындағы бұрышқа орай;

2) (БҚБ) қабырға және оған жабысқан екі бұрышқа орай;

3) (ҚҚҚ) төбе қабырғаға орай.

3



Тең бүйірлі үшбұрыштар

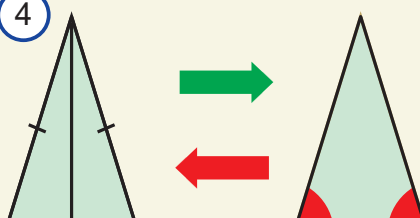
Тең бүйірлі үшбұрыштардың табанындағы бұрыштар тең болады.

Егер үшбұрыштың екі тең бұрышы болса, ол тең бүйірлі қабырғалы үшбұрыш болады.

Тең бүйірлі үшбұрыш ұшынан табанына түсірілген биссектриса оның биіктігі және медианасы да болады.

Егер үшбұрыштың биіктігі оның биссектрисасы немесе медианасы да болса, бұл үшбұрыш тең бүйірлі қабырға болады.

4



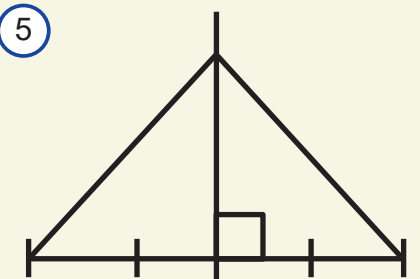
Кесіндінің орта перпендикулярларының қасиеті

Кесіндінің орта перпендикулярларының қалған нүктесі осы кесіндінің ұштарынан тең қашықтықта орналасқан.

Егер нүкте кесінді төбелерінен тең қашықтықта орналасқан болса, ол кесіндінің орта перпендикулярларында жатады.

Орта перпендикуляр – кесіндінің ұштарынан тең қашықтықта орналасқан нүктелердің геометриялық орны.

5



Параллель түзу сызықтар

Үшіні түзу сызыққа параллель түзу сызық өзара параллель болады.

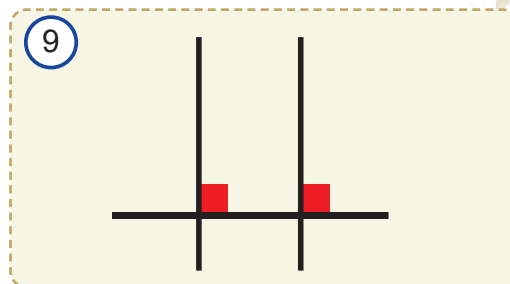
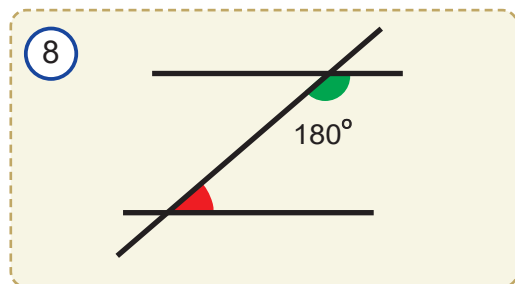
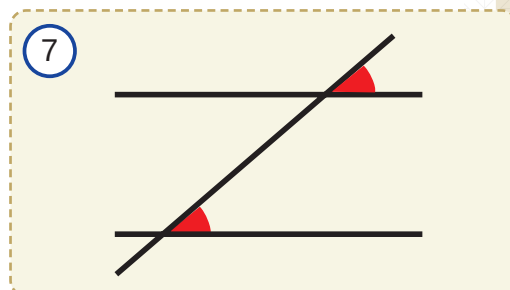
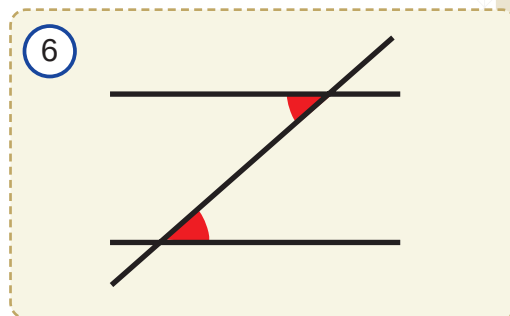
Егер айнаымалы бұрыштар тең болса, онда түзу сызықтар параллель және тескері (6-сурет).

Егер сәйкес бұрыштар тең болса, онда түзу сызықтар параллель және тескері (7-сурет)

Егер бір қабырғалы бұрыштар қосындысы 180° -болса, онда түзу сызықтар параллель және кері (8-сурет).

Үшінші түзу сызыққа перпендикуляр екі түзу сызық бір-біріне параллель болады (9-сурет).

Параллель сызықтардан біріне перпендикуляр болған түзу сызық олардың екіншісіне де перпендикуляр болады.



Үшбұрыш қабырғалары және бұрыштары арасындағы қатынастар

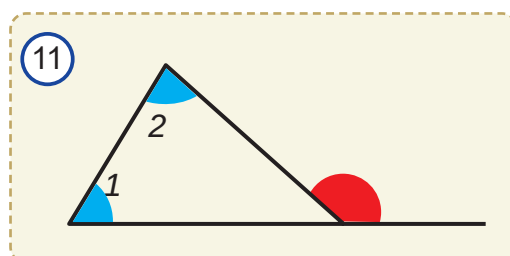
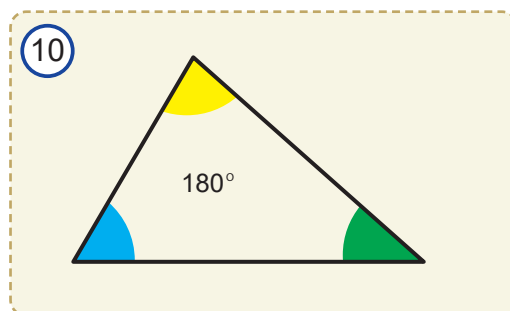
Үшбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы 180° -қа тең (10-сурет).

Үшбұрыштың сыртқы бұрышы онда сыбайлас болмаған екі ішкі бұрыштар қосындысына тең (11-сурет).

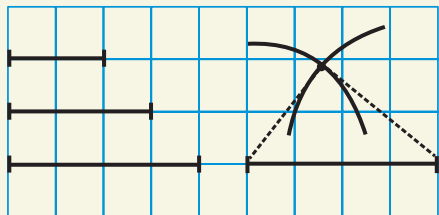
Үшбұрыштың сыртқы бұрышы оған сыбайлас болмаған әрқандай ішкі бұрыштан үлкен.

Үшбұрыштың қалаған қабырғасы оның қалған екі қабырғасы қосындысынан кіші.

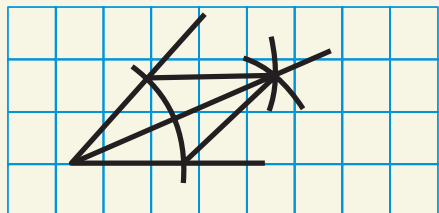
Үшбұрышта үлкен бұрыш қарсысында үлкен қабырға, үлкен қабырға қарсысында болса үлкен бұрыш жатады.



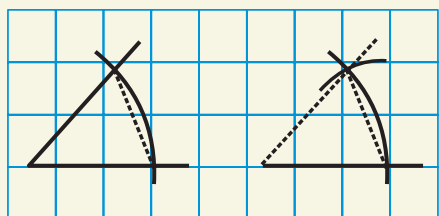
12



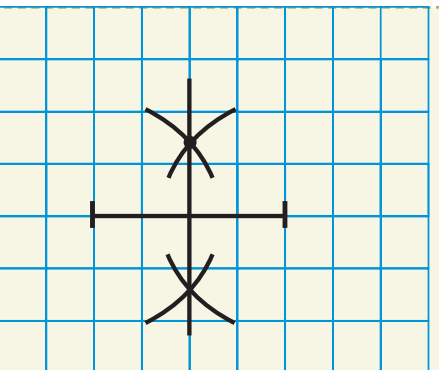
13



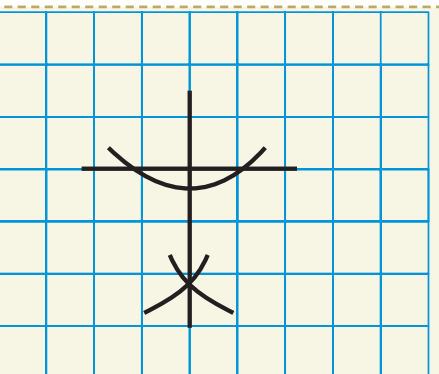
14



15



16



Тік бұрышты үшбұрыш

Тік бұрышты үшбұрыштың екі сүйір бұрышының қосындысы 90° -қа тең.

Тік бұрышты үшбұрышта 30° бұрыш қарсысында жатқан катет гипотенузасының жартысына тең.

Тік бұрышты үшбұрыштың катеті гипотенузасынан кіші.

Тік бұрышты үшбұрыштар теңдік белгілері:

- 1) (КК) екі катетке орай;
- 2) (КБ) катет және оған жабысқан сүйір бұрышқа орай;
- 3) (ГБ) гипотенуза және сүйір бұрышқа орай;
- 4) (ГК) катет гипотенузаға орай.

Бұрыш биссектрисасының қасиеті

Бұрыш биссектрисасының қалаған нүктесі бұрыш қабырғаларынан тең қашықтықта оранласқан.

Егер бұрыш ішкі аймағында нүкте бұрыш қабырғаларынан тең қашықтықта орналасқан болса, ол бұрыштың биссектрисасында жатады.

Биссектриса – бұрыштың қабырғаларынан тең қашықтықта орналасқан бұрыш ішіндегі нүктелердің геометриялық орны.

Салуға қатысты негізгі есептер

Үш қабырғаға орай үшбұрыш салу (12-сурет);

Бұрыш биссектрисасын салу (13-сурет);

Берілген бұрышқа тең бұрышты салу (14-сурет);

Кесінді ортасын салу (15-сурет);

Берілген түзу сызыққа перпендикуляр түзу сызықты салу (16-сурет);

10 нан 99 ға дейінгі болған натурал сандар квадраттарының кестесі

Ондық Бірлік	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	100	400	900	1600	2500	3600	4900	6400	8100
1	121	441	961	1681	2601	3721	5041	6561	8281
2	144	484	1024	1764	2704	3844	5184	6724	8464
3	169	529	1089	1849	2809	3969	5329	6889	8649
4	196	576	1156	1936	2916	4036	5476	7056	8836
5	225	625	1225	2025	3025	4225	5625	7225	9025
6	256	676	1296	2116	3136	4356	5776	7396	9216
7	289	729	1369	2209	3249	4489	5929	7569	9409
8	324	784	1444	2304	3364	4624	6084	7744	9604
9	361	841	1521	2401	3481	4761	6241	7921	9801

ГРЕК ӘЛІППЕСІ

Жазылуы	Оқылуы
$A \alpha$	alfa
$B \beta$	betta
$\Gamma \gamma$	gamma
$\Delta \delta$	delta
$E \varepsilon$	epsilon
$Z \zeta$	dzeta
$H \eta$	eta
$\Theta \theta$	teta
$I \iota$	yota
$K \kappa$	kappa
$\Lambda \lambda$	lyambda
$M \mu$	myu
$N \nu$	nyu

Жазылуы	Оқылуы
$\Xi \xi$	ksi
$O \omicron$	omikron
$\Pi \pi$	pi
$\rho \rho$	ro
$\Sigma \sigma$	sigma
$T \tau$	tau
$Y \upsilon$	yupsilon (ipsilon)
$\Phi \phi$	fi
$X \chi$	xi
$\Psi \psi$	psi
$\Omega \omega$	omega

Жауаптар мен нұсқаулар

1 4. а) А, О, Е нүктелер түзу сызыққа тиісті; б) нүктелер түзу сызыққа тиісті; с) нүкте түзу сызыққа да түзу сызыққа да тиісті; d) нүктелер түзу сызыққа тиісті, түзу сызыққа тиісті емес; д) нүкте түзу сызыққа е) нүкте түзу сызыққа тиісті емес. **5.** Нүкте де га ге тиісті. **6.** 1 немесе шексіз көп. **7.** Жатпайды. **8.** а) қалағанша; б) 1; d) 1 немесе 3. **9.** 2, 3, 4. **10.** 2, 7. **11.** 6 түзу сызық. Бұл түзу сызықтар 12 бөлекке бөледі. **12.** а) 3; б) 6. **13.** 6; 10. **14*.** Мүмкін емес.

2 1. 6. **2.** 6: AB, BC, CD; AC; AD; BD. **3.** Толтырушы сәулелер: 1) AB va AE; 2) AC және AF; 3) AD және AH. **4.** а) С нүктеден шығушы сәулелер: CA, CD, CB, CM, CN; Толтырушы сәулелер: CA және CD немесе CA және CB; б) D нүктеден шығушы сәулелер: DC, DA, DB, DQ,- DP; толтырушы сәулелер: DC және DB немесе DA және DB. **5.** 4. **6.** **7.** а) b және d, p және q, n және u; б) 2 және 5; 6 және 9. **8.** 3 v және a 14; 4 және 10; 6 және 9; 5 және 12. **9*.** а) 2; б) 3; с) 4; d) 11. **10.** 2; 4; 7; 11. **11.** Иә. **12.** 5; **13.** 29 бөлекке бөледі. **14.** 26,8 см. **15.** 1 бірлік; 2 бірлік; 1/2 бірлік; 2/3 бірлік; 16. 4 см; 5 см; 6,5 см; 1 см; 2,5 см; 1,5см. **17.** а) 6,6; б) 1; с) 9. **18.** 12,8 см. **19.** 0,8. **21.** 2 жағдай болуы мүмкін. В нүкте AC кесіндіде болса, AC=800 м. С нүкте AB кесіндіде болса, AC=400 м. **22.** 5. **23.** 46 см. **24.** а) 24 см; б) 14 см. **25.** 5. **26.**

а) 2; б) 1. **27.** а) 4 см; б) 1,6 см; с) 0,4 см; d) 2,6 см. **28.** 26. **29.** $CD = \frac{AB}{2} + 46 \text{ cm}$

31. а) 5 см; б) 7,8 м; с) 2,8 км. **32.** а) 70 см; б) 186 dm; с) 82 м. **33.** а) AC=5 см; BC=4 см; б) AC=11 см; BC=2 см; с) AC=10 см; BC=1 см. **35.** В нүкте А және С нүктелер арасында жатады. **36.** а) 5,9 см; б) 9,5 см. **37.** а) 3 AB; б) $\frac{3AC}{2}$ с) $\frac{3AE}{4}$

39. Бір түзу сызыққа алынған қалаған үш нүктенің тек біреуі қалған екеуінің ортасында жатады. **40.** Өрқандай екі нүктеден тек бір түзу сызық өтеді.

3 1. а) бұрыштың ұш: N; бұрыштың қабырғалары NM және NL; б) бұрыштың ұшы: В; бұрыштың қабырғалары: BA және BO. 2. бұрыштары: $\angle BAC$, $\angle BAD$, $\angle CAD$; бұрыштың ұшы А; бұрыштың қабырғалары: AB, AC, AD. 3. а) $\angle AOC$, $\angle COD$, $\angle BOD$, $\angle AOD$, $\angle AOB$, $\angle COD$. б) $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COD$, $\angle DOE$, $\angle AOE$, $\angle AOC$, $\angle AOD$, $\angle BOD$, $\angle COE$, $\angle BOE$. 4. а) Ha; б) жоқ. 5.1) $\angle AOC=30^\circ$; $\angle BOC=30^\circ$. 2) $\angle AOC=88^\circ$; $\angle BOC=88^\circ$. 6. 1) $24,5^\circ$; 2) $39,5^\circ$; 3) 71° . 7. 1) a және h; 2) c, d, e, g; 3) b және f. 8. а) иә; б) ия; с) жоқ. 9. а) $87^\circ 56''$; б) $128^\circ 29' 47''$; с) $1^\circ 47' 29''$. 11. а) 72° ; б) $60^\circ 19'$; с) $55^\circ 45'$. 12. 1) $\angle CBF$; 2) $\angle DBF$. 14. $\angle POQ > \angle ABC$. 15. а) Ия; б) Жоқ; с) Жоқ. **16.** 176° . **17*.** 61° . **18*.** а) 90° ; б) 180° . 19. $\angle AOB=60^\circ$, $\angle AOC=90^\circ$, $\angle AOD=130^\circ$; $\angle BOC=30^\circ$, $\angle BOD=70^\circ$; $\angle COD=40^\circ$. Биссектрисалары: 1) 30° ; 2) 45° ; 3) 65° ; 4) 15° ; 5) 35° ; 6) 20° бұрыштардан өтеді. 20. 3) 15° ; 2) $22,5^\circ$; 5) 30° ; 6) 45° ; 1) 90° ; 4) 135° .

4 7. а) Ташкент пен Ферғана қалаларының арасындағы қашықтық 148 km. б) Ташкент пен Терміз қалаларының арасындағы қашықтық 444 km. с) Ташкент пен Жиззах қалаларының арасындағы қашықтық 126 km. d) Ташкен пен Гүлістан қалаларының арасындағы қашықтық 90 km. д) Ташкент пен Самарқант қалаларының арасындағы қашықтық 183 km. е) Ташкент пен Қаршы қалаларының арасындағы қашықтық 280 km. ж) Ташкент пен Науаи қалаларының арасындағы

кашкытык 319 km. з) Ташкент пен Үргенш қалаларының арасындағы кашкытык 704 km. и) Ташкент пен Нөкіс қалаларының арасындағы кашкытык 777 km. й) Ташкент пен Қарақалпақстан арасындағы кашкытык 1019 km. 8. 246 шақырым. 9.1)120°; 2) 6 сағат. 10. 1) 38,1 см; 2) 43,18 см; 3) 48,26 см. 11. 1) Жерден Айға дейін 149637000 km. 2) Жерден Күнге дейін 107803000 km. 3) Меркурийдан Күнге дейін 57924000 km. 4) Марстан Айға дейін 226869000 km. 5) Юпитерден Күнге дейін 777147000 km. 6) Сатурннан Күнге дейін 1427183000 km. 7) Ураннан Күнге дейін 2 868 847 000 km. 8) Нептуннан Күнге дейін 4 498 764 000 km. 12. а) 2235 m; б) 7822,5 m; в) 10 877 m. 1 – бақылау жұмысы: 1. BC=3 см. 2. BC=12 см. 3. $\angle BOC=35^\circ$. 4. $\angle O=150^\circ$.

- 5** 3. 45° . 4. а) 8; б) 8; в) 8; г) 8. 5. 5 сүйір; 1 доғал. 6. Екі рет бүгу арқылы пайда қылу мүмкін. 7. $3^\circ 00'$, $9^\circ 00'$. 8. а) 105° ; б) 75° ; в) 105° . 9. а) 30° ; б) 180° ; в) 1° . 10. а) 160° ; б) 90° ; в) 35° ; г) 171° . 11. а) 146° ; б) 71° ; в) 175° ; г) 13° . 12. $\angle AOB=135^\circ$, $\angle BOC=45^\circ$. 13. $\angle AOB=36^\circ$, $\angle BOC=144^\circ$. 14. а) Жоқ; б) иә; в) жоқ. 15. а) 140° ; б) 137° . 16. а) 45° ; б) 45° ; в) 53° . 17. Ия, егер екі бұрышта 90° тан тұрса. 18. а) 40° ; 140° ; б) 55° ; 125° ; в) 18° ; 162° . 19. 140° . 40° . 140° . г) 30° ; 60° ; 90° . 27. р) 90° ; 90° ;

20.

$\angle 1$	34°	62°	48°	19°	175°
$\angle 2$	146°	118°	132°	161°	5°

21.

$\angle 1$	12°	162°	120°	15°	45°
$\angle 2$	168°	18°	60°	165°	135°

22. 1) 110° ; 2) 50° ; 3) 50° . 23. 149° ; 2) 59° ; 3) 59° . 24. а) 45° ; 135° ; б) 60° ; 120° . 25. а) 75° ; 105° ; б) 100° ; 80° ; в) 108° ; 72° . 26. а) 120° ; б) 80° ; в) 60° ; 60° ; 60° . 27. а) 90° ; б) 75° ; 105° ; 75° ; в) 46° ; 46° ; 134° . 28. 135° . 29. 135° . 30. а) $Z_3=Z_4$; $\angle 9=\angle 10$; б) $\angle 1$ және $\angle 2$. 31. ОС сәуле $\angle AOD$ тың; OD сәуле $\angle COE$ тың; OE сәуле $\angle DOB$ тың; OD сәуле $\angle AOB$ тың биссектрисасы болады. 32. А нүкте В және С нүктелер арасында жатады.

- 6** 3. 30° . 5. AO=1 см, AB=2 см, AC=1 см. 6. 13700 km. 7. а) В нүкте қалған екеуінің арасында жатады; б) А нүкте қалған екеуінің арасында жатады. 8. 90° . 10. сәулелерден ОС нүкте қалған екеуінің арасында жатады. 11. 60° ; 60° . 12. 80° ; 100° ; 80° ; 100° . 13. OE және OF бір түзу сызықта жатады. **6-тесттер:** 1. Е; 2. D; 3. D; 4. A; 5. E; 6. B; 7. E; 8. E; 9. B; 10. A; 11. A; 12. D; 13. E; 14. B; 15. A; 16. A; 17. B; 18. E

- 7** 2. 90° . 3. 60° . 4. Жоқ 5. Есеп 2 шешімге ие 1) 65° ; 2) 15° . 6. 15° . 7. а) $\angle AOC=45^\circ$; $\angle BOC=45^\circ$; б) $\angle AOC=30^\circ$; $\angle BOC=30^\circ$; в) $\angle AOC=25^\circ$; $\angle BOC=25^\circ$; г) $\angle AOC=10^\circ$; $\angle BOC=10^\circ$. 8. $\angle DOE=60^\circ$. 9. Жоқ. 10. Есеп екі шешімге ие: 1) 0,5 m; 2) 5,9 m. 11. а) AC=9 m, BC=6 m; б) AC=7,5 m, BC=7,5 m; в) AC=6 m, BC=9m. 13. а) 15; б) 21; в) 45. 15. 1,3. 16. 6. 17. 4.30 немесе 7.30. 18. 6. 19. $\angle AOB=90^\circ$, $\angle BOC=70^\circ$; б) $\angle AOB=36^\circ$, $\angle BOC=144^\circ$; в) $\angle AOB=112^\circ$, $\angle BOC=68^\circ$; г) $\angle AOB=150^\circ$, $\angle BOC=30^\circ$. 20. 50° , 130° , 50° , 130° . 21. а) $C \angle AB$; б) $A \angle BC$. 22. а) $x=180^\circ-\alpha$; $y=\alpha$. б) $x=90^\circ$; $y=90^\circ$; в) $x=180^\circ-\alpha$; $y=\alpha$. 23. а) 6; б) 10; в) $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ та 2 та. 24. $b_{50} = \frac{2^{49}}{10}$ mm.

- 8** 6. 1,2,3,4,5,7 сан белгілері сынық сызық болады 7. а) a, b, d, e, g; б) c, f, h; в) c, f. 9. а) тік; б) сүйір; в) тең бүйірлі; г) тең қабырғалы; д) доғал бұрышты. 10. а) тік бұрышты үшбұрыш, б) сүйір бұрышты үшбұрыш, в) тең қабырғалы үшбұрыш,

d) тең бүйірлі үшбұрыш, д) доғал бұрышты үшбұрыш. **11.** а) 12,2 dm; b) 102,4 m. **12.** а) 139,6 mm; b) 102,4 m. **14.** Өр бір бұрышы 60° . **15.** а) 3; b) 3; c) 3. **16.** 1) ABE-доғал; 2) ACE, BCE, DCE-тік; 3) BED-тең бүйірлі; 4) AED-түрлі қабырғалы. 20. Биіктік, биссектриса, медиана және ішкі бұрыштар. 21. Тік бұрышты үшбұрыш. 22. Ия. 23. 3. 24. 9. 25. 16. 27. $\angle KLM$ - тік бұрышты үшбұрыш, $ML=5$ cm. 28. 18 cm; 24 cm; 30 cm. Бұл тік бұрышты үшбұрыш. 29. $a=36$ mm; $b=48$ mm; $c=60$ mm.

9 **3.** $AB=BA$; $BC=AC$; $AC=BC$. **4.** $\angle MNL=\angle LMN$; $\angle MLN=\angle LNM$; $\angle NML=\angle MLN$. **5.** $\angle B=80^\circ$; $\angle D=52^\circ$; $\angle F=48^\circ$. **6.** $AB=LM=5$; $BC=MN=8$; $AC=LN=9$. **7.** $x=5$. **12.** e) $\angle ZD=35^\circ$, $\angle ZC=62^\circ$. **13.** 85° . **15.** Жоқ.

10 **1.** 10 cm. **2.** $a=12$; $b=8$. **8.** $AB=8$ cm; $BC=8$ cm; $AC=11$ cm.

11 **2.** 4. **3.** $\angle E=\angle N=35^\circ$; $\angle D=\angle L=135^\circ$; $ED=NL=7$. **10.** $AC=BD=7$.

12 **5.** 6. $\triangle ABN=\triangle CAK$; $\triangle ABC=\triangle CNK$; $\triangle BNK=\triangle BCK$; $\triangle BNC=\triangle CKN$; $\triangle BAC=\triangle KAN$; $\triangle BAN=\triangle KAC$. **8.** 3. $\triangle ABD=\triangle ACD$; $\triangle ABC=\triangle BCD$; $\triangle AOB=\triangle COD$. **10.** 10,4 cm. **12.** 8 cm. **15.** $\angle C=90^\circ$, $\angle A=30^\circ$, $\angle B=60^\circ$. **16.** 10 cm, 10 cm.

13 **5 - тесттер:** **1.** B; **2.** A; **3.** B; **4.** E; **5.** D. **6.** A. **7.** D; **8.** A; **9.** B; **10.** D; **11.** A; **12.** B; **13.** A; **14.** B; **15.** D; **16.** A. **6 - есептер:** **1.** 1) Тең қабырғалы үшбұрыш; 2) Тік бұрышты үшбұрыш. 3) Сүйір бұрышты үшбұрыш; 4) Тең бүйірлі үшбұрыш; 5) Доғал бұрышты үшбұрыш. **2.** 1) Үшбұрыштар тең емес. ҚБҚ белгісіне сай емес. 2) Үшбұрыштар тең. ҚБҚ белгісіне орай тең. 3) Үшбұрыштар тең емес. ҚБҚ белгісіне сәйкес емес. 4) Үшбұрыштар тең. БҚБ белгісіне орай тең. 5) Үшбұрыштар тең. ҚҚҚ белгісіне орай тең. 6) Үшбұрыштар тең емес. ҚБҚ белгісіне сәйкес емес. **7.** Иә. **8.** $\triangle ABD=\triangle CAD$; $\triangle AED=\triangle AFD$; $\triangle BED=\triangle CFD$. **11.** 58° . **12.** 48° . **13.** 120° .

3- бақылау жұмысы: **1.** 10 **3.** $7\frac{1}{3}$, $7\frac{1}{3}$, $3\frac{11}{15}$.

14 **2.** $a||b$; $c||d$. **4.** Ия. **6.** 1) $a||b$, 3 бөлек пайда болады. 2) $a||b$ 4 бөлек пайда болады. **8.** а) Вертикаль бұрыштар: $\angle 1$ және $\angle 4$; $\angle 2$ және $\angle 3$; $\angle 5$ және $\angle 7$; $\angle 6$ және $\angle 8$. б) Сыбайлас бұрыштар: $\angle 1$ және $\angle 2$; $\angle 2$ және $\angle 4$; $\angle 4$ және $\angle 3$; $\angle 3$ және $\angle 1$; $\angle 5$ және $\angle 6$; $\angle 6$ және $\angle 7$; $\angle 7$ және $\angle 8$; $\angle 8$ және $\angle 5$. **9.** $\angle 1=\angle 6=63^\circ$; $\angle 2=\angle 3=\angle 5=\angle 7=117^\circ$. б) $\angle 2=\angle 3=\angle 5=\angle 7=117^\circ$; $\angle 4=\angle 8=63^\circ$. **10.** $\angle 1=\angle 3=\angle 5=\angle 7=117^\circ$; $\angle 4=\angle 8=63^\circ$. **11.** $\angle 2=\angle 4=\angle 6=\angle 8=58^\circ$; $\angle 3=\angle 5=122^\circ$. **12.** 98° , 82° , 98° ; 70° , 110° , 70° . **13.** $\angle 2=148^\circ$; $\angle 3=148^\circ$; $\angle 4=32^\circ$; $\angle 6=46^\circ$; $\angle 7=134^\circ$; $\angle 8=46^\circ$. **14.** $\angle 3=\angle 5$ ішкі айнымалы; $\angle 2=\angle 8$ Сыртқы айнымалы; $\angle 4=\angle 6$ ішкі айнымалы бұрыштар тең. **15.** Теңдіктер орындалды **16.** Мүмкін **17.** $\angle 1+\angle 8=180^\circ$; $\angle 2+\angle 7=180^\circ$; $\angle 4+\angle 5=180^\circ$; $\angle 3+\angle 6=180^\circ$. **18.** Айнымалы бұрыштар өзара тең болады.

15 **1.** $x=150^\circ$. **3.** $x=60^\circ$; $y=120^\circ$. **8.** а) Иә; б) Иә. **9.** а) Жоқ; б) Иә. **11.** 1 еуі қимауы мүмкін немесе барлығы қиып өтеді. **12.** $AD||BC$. **13.** а) $a||b$; б) $a||b$. **14.** $x=116^\circ$. **15.** $\angle 2=75^\circ$; $\angle 3=105^\circ$; $\angle 4=75^\circ$; $\angle 6=75^\circ$; $\angle 7=105^\circ$; $\angle 8=75^\circ$. **16.** $\angle 1=60^\circ$; $\angle 2=120^\circ$; $\angle 4=120^\circ$; $\angle 5=60^\circ$; $\angle 6=120^\circ$; $\angle 7=60^\circ$. **17.** $\angle 2=\angle 4=\angle 6=\angle 8=75^\circ$. **18.** а) $BC||AD$; $AB||CD$. б) $AD||BC$; в) $AD||BD$

16 **1.** а) дұрыс емес; б) дұрыс емес; в) дұрыс емес; г) дұрыс емес; д) дұрыс емес; ж) дұрыс емес; з) дұрыс емес; и) дұрыс емес. **2.** а) дұрыс; б) дұрыс; в) дұрыс. **3.** а) дұрыс; б) дұрыс; в) дұрыс. **4.** $\angle 2=45^\circ$; $\angle 3=135^\circ$; $\angle 4=45^\circ$; $\angle 5=135^\circ$; $\angle 6=45^\circ$; $\angle 7=135^\circ$; $\angle 8=45^\circ$. **5.** $\angle 1=131^\circ$; $\angle 3=131^\circ$; $\angle 4=49^\circ$; $\angle 5=131^\circ$; $\angle 6=49^\circ$; $\angle 7=131^\circ$; $\angle 8=49^\circ$. **9.** 45° . **10.** $x=11^\circ$. **14.** $\angle 2=\angle 3=53^\circ$. **15.** $\angle 1=73^\circ$, $\angle 2=73^\circ$. **16.** 70° , 110° . **19.** 70° , 110° . **20.** а) мүмкін б) мүмкін. **21.** а) мүмкін б) мүмкін. **23.** $x=105^\circ$. **24.** $x=35^\circ$.

25. $\angle 1=78^\circ$; $\angle 2=102^\circ$; $\angle 3=78^\circ$; $\angle 4=102^\circ$; $\angle 5=78^\circ$; $\angle 6=102^\circ$; $\angle 7=78^\circ$; $\angle 8=102^\circ$. 26. $\angle 1=64^\circ$; $\angle 2=116^\circ$; $\angle 3=64^\circ$; $\angle 4=116^\circ$; $\angle 5=64^\circ$; $\angle 6=116^\circ$; $\angle 7=64^\circ$; $\angle 8=116^\circ$. 27. Жоқ. 28. $x=42^\circ$. 29. 8 бұрыштан 4 еуі доғал болады. Егер мұндай болмаса, бұрыштардың барлығы 90° қа тең болады. $a \perp e$; $b \perp c$; $a \parallel b$ болады. 30. $\angle 1=\angle 3=\angle 5=\angle 7=50^\circ$; $\angle 2=\angle 4=\angle 6=\angle 8=130^\circ$. 32. $\angle D=98^\circ$

17 5 - тесттер: 1. А; 2. В; 3. А; 4. D; 5. D; 6. D; 7. D; 8. Е; 9. В; 10. В; 11. D; 12. Е; 13. А; 14. В; 15. Е; 16. А. 6- есептер: 1. Иә 2. Иә 3. $\angle 4=\angle 7=118^\circ$; $\angle 2=\angle 3=\angle 6=\angle 8=62^\circ$. 4. $a \parallel b$. 5. $x=55^\circ$. 6. 128° . 8. $\angle 1=\angle 3=\angle 5=\angle 7=42^\circ$; $\angle 2=\angle 4=\angle 6=\angle 8=133^\circ$. 9. $\angle 1=\angle 3=\angle 5=\angle 7=20^\circ$; $\angle 2=\angle 4=\angle 6=\angle 8=160^\circ$. 10. $\angle 1=\angle 3=\angle 5=\angle 7=75^\circ$; $\angle 2=\angle 4=\angle 6=\angle 8=105^\circ$. 11. 59° . 12. $\angle 1=\angle 3=\angle 5=\angle 7=72^\circ$; $\angle 2=\angle 4=\angle 6=\angle 8=108^\circ$. 4 - бақылау жұмысы: 1. $\angle 3=\angle 5=\angle 7=34^\circ$; $\angle 2=\angle 4=\angle 6=\angle 8=146^\circ$. 2. 52° .

18 1. а) 80° ; б) 25° ; в) 45° ; г) 45° . 2. а) 63° ; б) 90° ; в) 113° ; г) 15° . 3. 102° . 4. а) 80° , 50° ; б) 30° ; 60° ; 90° ; в) 50° , 60° , 70° . 5. а) 65° ; б) 45° ; 90° ; 45° . 6. а) 79° ; б) 105° . 7. $x=20^\circ$, $y=50^\circ$. 9. $x+y=270^\circ$. 10. 60° . 11. 60° , 60° , 60° . 12. 45° , 45° , 90° . 13. а) 65° , 65° ; б) 60° ; 60° ; в) $37,5^\circ$; $37,5^\circ$. 14. 60° , 45° , 75° . 15. 30° , 120° . 16. а) 75° ; б) 34° ; 68° ; в) 50° . 17. а) 128° ; б) 51° . 18. $x+y+z=540^\circ-(\angle + \angle + y)$. 19. 50° ; 90° ; 40° . 20. а) 90° ; б) 50° ; в) 110° , г) 60° . 21. 60° ; 48° . 22. 540° . 23. 24° , 36° , 60° . 25. а) 30° , 30° ; б) 55° , 55° . 26. а) 15° , 150° ; б) 75° , 30° . 28. $\angle AOB=122,5^\circ$; $\angle EOC=65^\circ$. 29. 30° . 30. $67,5^\circ$. 31. Ия 32. мүмкін емес 33. $\angle A=80^\circ$, $\angle B=30^\circ$, $\angle C=70^\circ$. 34. $\angle A=35^\circ$; $\angle B=35^\circ$. 35. а) 70° ; б) 75° ; в) 80° ; г) 72° ; д) 120° ; е) 80° ; ж) 36°

19 1. а) АВ; б) АВ. 2. а) PR; б) PR. 3. $\angle A=67^\circ$; $\angle B=23^\circ$; $\angle C=90^\circ$. 4. а) 78° ; 12° ; 90° ; б) 47° ; 43° ; 90° . 5. $\angle A=60^\circ$; $\angle B=30^\circ$; $\angle C=90^\circ$; $AC=17$; $BC=17\sqrt{3}$. 6. 60° , 30° , 90° . 7. 1) 4; 2) 6; 3) 60° . 8. а) 5; б) 13,5; в) 9. 9. 1) 35° ; 2) 130° ; 3) 90° ; 4) 130° ; 5) 100° ; 6) 90° . 10. а) жоқ; б) жоқ; в) иә; г) жоқ.

20 1. а) болады; б) болады; в) болады; г) жоқ; д) жоқ. 2. а) болады; б) болады; в) болады; г) жоқ; ф) болады. 6. 7 см. 7. 7 см, 7 см. 11. 180° . 12. 270° . 13. 6. 14. 8 см. 17. $\angle B=80^\circ$.

21 1. ВС; 2. АВ және ВС ($AB=BC$). 3. а) $\angle A$ немесе $\angle C$; б) $\angle B$. 4. а) $\angle C$; б) $\angle B$. 5. а) мүмкін; б) мүмкін емес. 6. мүмкін емес; б) мүмкін. 7. а) бар; б) жоқ; в) бар; г) бар. 8. а) 7; б) 10; в) 8 немесе 5. 9. а) мүмкін. Үшбұрыштың екі қабырғасының қосындысы үшінші қабырғадан үлкен болуы мүмкін. Тең де, кіші де болмауы керек. Өйткені үшбұрыш пайда болмайды. б) мүмкін емес. Үшбұрыш пайда болмайды. в) мүмкін емес. Үшбұрыш пайда болмайды. 10. а) мүмкін. Үшбұрыштың екі қабырғасының қосындысы үшінші қабырғадан үлкен болуы керек. Тең де, кіші де болмауы керек. Болмаса үшбұрыш пайда болмайды. б) мүмкін емес. Үшбұрыш пайда болмайды. в) мүмкін емес. Үшбұрыш пайда болмайды. 11. а) Ең үлкен бұрыш А, ең кіші бұрыш С. б) ең үлкен бұрыш А, ең кіші бұрыш С немесе В. в) ең үлкен бұрыш А, немесе В. 12. а) $BC < AB < AC$; б) $BC = AB < AC$; в) $BC = AC = AB$. 14. 7; 7; 11. 15. 7 та. 16. Үшбұрыш немесе кесінді 18. Ең үлкені $\angle ACB$, ең кішісі $\angle ABC$. 19. Табаны, бүйір қабырғасы. 20. а) $BC > AC > AB$; б) $BC = AC < B$. 21. 60° ; 120° ; 60° ; 120° . 22. $0^\circ < \angle Z < 60^\circ$. 23. Сүйір бұрышты үшбұрыш 24. Ең үлкені ВС, ең кішісі АВ. 25. Үшбұрыштың ең кіші қабырғасы ВС. 26. а) Үшбұрыш жоқ. б) Үшбұрыш жоқ. 27. Үшбұрыш жоқ.

22 1. 1) 180° ; 2) 360° . 2. $\angle B=75^\circ$; $\angle C=75^\circ$. 3. $c=10$ см. 6. Ішкі бұрыштар қосындысы $\angle = 1080^\circ$ -қа тең. Сыртқы бұрыштар қосындысы $\angle = 360^\circ$ қа тең. 7. 72° . 4 - тесттер:

1. B; 2. D; 3. B; 4. B; 5. D; 6. B; 7. B; 8. B; 9. E; 10. A; 11. D; 12. A; 13. D; 14. A; 15. D; 16. D; 17. D; 18. D. 19. A. 5 – бақылау жұмысы: 1. 65° . 2. $40^\circ, 60^\circ, 80^\circ$. 3. 12 cm. 4. $40^\circ, 60^\circ, 80^\circ$.

24 Тесттер: 1. A; 2. D; 3. B.

1. 20 cm. 2. 20° . 3. 15° . 4. 30° . 5. 40° ; 60° ; 80° . 6. 1:2. 7. 76° . 8. 42° . 9. 21° , 69° . 10. $\angle AOB = 122,5^\circ$. 11. 72° . 12. 46° . 28. Сүйір бұрышты. 30. а) 92° ; б) 42° . 31. 6; 6; 6; 60° . 33. 45° . 35. Кесінді. 37. 144° . 38. 54° . 39. 3,6 cm.

25 5 - Тесттер: 1. A; 2. E; 3. D; 4. B; 5. E; 6. A; 7. E; 8. D. 9. B. 10. A. 11. A; 12. D; 13. B; 14. D; 15. E; 16. A; 17. B; 18. E; 19. A; 20. D. **6-Есептер:** 2. 12 cm. 3. 12 cm. 4. 34. 5. 2,8 cm. 6. 83° . 7. $\angle$ 8. 55° . 10. 2 m немесе 16 m. 13. Ия. 14. 9 cm. **15.** 30° , 150° . **16.** 80° , 100° . **17.** 5,3 cm. **18.** 69° . **19.** 109° ; 71° ; 71° ; 71° ; 109° ; 109° ; 71° ; 109° ;

7. Күрделі есептер: 1. а) 149900 мың км. б) 149100 мың км **2.** D нүкте.

3. $\alpha = \frac{540^\circ}{7}$; $\beta = \frac{720^\circ}{7}$. 6. $P = \frac{a+b+c}{2}$. 11. Yo'q. 12. 120° ; 13. Yo'q.

Қорытынды бақылау жұмысы: 1. 135° , $135^\circ, 45^\circ$. 3. б) 22 cm. 4. 7 cm. 5. $\angle B = 45^\circ$; $\angle C = 45^\circ$.

Оқулықты түзуде пайдаланылған және қосымша үйренуге ұсынылған оқу-әдістемелік әдебиеттер мен электрон ресурстар

1. Азамов А., Һайдаров В. Математика планетасы. Ташкент: «Оқытушы», 1993.
2. Саитов Ю. «Математика және математиктер туралы». Ташкент: «Оқытушы», 1992.
4. Афонина С.И.. Математика және сұлулық. Ташкент: «Оқытушы», 1986.
6. Исмаилов А., Һайдаров Б., Каримов Н., Ш. Исмайлов. Халықаралық зерттеулер оқытушылардың математикалық сауаттылығын бағалау, әдістемелік қолданба. - Ташкент, 2019.
8. Погорелое А. В. «Геометрия 7-9», учебник, Москва: «Просвещение», 2004.
9. Атанасян С. «Геометрия 7-9 классы», учебник, Москва: «Просвещение», 2002.
10. Шарыгин Ф. «Геометрия 7-9 классы», учебник, Москва: «Дрофа», 2000.
11. Штейнгауз Г. Математический калейдоскоп, Москва: «Наука», 1993.
12. Перельман Я. И. Қизикарли геометрия, Ташкент: «Оқытушы», 1981.
13. Кордемский Б. А. Математическая Смекалка. Москва: «Наука», 1991.
16. Бевз Г. П. и др. «Геометрия 7» учебник, Киев: «Вежа», 2007.
17. Александров А. Д. «Геометрия -7» учебник, Москва. «Просвещение», 2013.
18. Johannes Paasonen «Ahaa matematiikkaa 7», Porvoo-Helsinki-Juva, 1993.
19. Daniel C. Alexander, Elementary geometry for college students. Canada, Brooks/Cole, Cengage Learning, 2011.
20. <http://www.uzedu.uz> – Халық білім министрлігінің ресми сайты, ақпарат білім порталы.
21. <http://centeroko.ru>. – Білім сапасын бағалау орталығы (Россия) сайты.
22. <http://www.markaz.tdi.uz> - Білім сапасын бағалау бойынша халықаралық ізденулерді амалға асыру ұлттық орталығының сайты.
23. <http://www.avloniy.uz> - А. Авлоний атындағы ғылыми-зерттеу институтының сайты.
24. <http://www.masofa.uz> - А. Авлоний атындағы ғылыми-зерттеу институтының қашықтықтан оқыту сайты
25. <http://www.onlinedu.uz> - А. Авлоний атындағы ғылыми-зерттеу институтының «Үздіксіз кәсіптік білім беру» электрон платформасы.
26. <http://www.ziynet.uz> – Зиенет әлеуметтік білім беру порталы.
27. <http://www.rtm.uz> – Республикалық білім орталығы порталы.
28. <http://dr.rtm.uz> – жаңа оқулықтар, оқытушылар үшін әдістемелік қолданбалардың электрон пішіндері, презентациялар, мультимедиялық қолданба, видеосабақтар және сандық ресурстар платформасы.
29. <http://www.maktab.uz> - 1-11-сыныптар үшін онлайн мектебі тағы да мектеп оқу жоспары бойынша видеосабақтар және басқа материалдар платформасы.
30. <http://www.stesting.uz> – Оқытушылар үшін «Халықаралық бағалау зерттеулерге дайындау» электрон платформасы.
31. <http://www.skillsgrover.uz>- Финляндияның математиканы үйрену және оқушылар білімдерін бағалау платформасы (өзбек тілінде)
32. <http://www.khanakademy.org> - «Хон академиясы» қашықтықтан білім сайты (ағылшын тілінде).
33. <http://www.xanakademyasi.uz>-математика, информатика, химия, физика, саясат, биология және астронаомия сияқты пәндер бойынша видеосабақтар платформасы «өзбек тілінде».
34. <http://www.school.edu.ru> – жалпы білім порталы (орыс тілінде).
35. <http://www.problems.ru/> - математикадан есептер іздеу тізімі (орыс тілінде).
36. <http://geometry.net/> - алгебра және геометриядан оқу материалдары (ағылшын тілінде).
37. <http://mathproblem.narod.ru/> - Математикалық төгерекектер және олимпиадалар (орыс тілінде).
38. <http://www.ixl.com> – Қашықтықтан тұрып оқыту математика тәлімі порталы (ағылшын тілінде)
39. <http://www.mathkang.ru> – «Кенуру» халықаралық математикалық таңдау сайты (орыс тілінде).
40. <http://www.olimpia.uz> - «Кенуру» халықаралық математикалық таңдау сайты (өзбек тілінде).
41. <http://www.brilliant.org> – Математикадан қашықтықтан тәлім (ағылшын тілінде).
42. <http://www.geogebra.com> – Геометрия және алгебра пәндері бойынша динамикалық («жанды») сызбалар жарату мүмкіншілігін беретін тегін бағдарлама.
43. <http://www.yaclass.ru> – Мектеп оқушылары және оқытушылары үшін онлайн білім платформасы.
44. www.schulen-ans-netz.de - Германия «Интернет – Мектеп» сайты (неміс тілінде).
45. www.studienkreis.de – Германия оқу төгерекектер сайты (неміс тілінде).

O`quv nashri

GEOMETRIYA

Umumiy o`rta ta`lim maktablarining
7-sinfi uchun darslik

(Qozoq tilida)

Аударған Гаюпов Алиби
Редактор Айдын Тәжібаева
Көркем редактор Сарвар Фармонов
Техникалық редактор Акмал Сулайманов
Беттеген және дизайнер Ихволдин Салохитдинов
Суретші Умид Сулайманов
Корректор Дилнура Байдиллаева

Оригинал макеттен басуға рұсат етілді _____.2022.

Пішімі 70x90/16. «Arial» гарнитурасы.

Офсет баспа тәсілінде басылды.

Шартты баспа табағы 14,0. Баспа табағы 13,0.

Нұсқасы _____ Тапсырыс N _____.

Таралымы N_____

Пайдалануға берілген оқулықтың жағдайын көрсететін кесте

№	Оқушының аты, фамилиясы	Оқу жылы	Оқулықтың пайдалануға берілгендегі жағдайы	Сынып жетекшісінің қолы	Оқулықты тапсырғандағы жағдайы	Сынып жетекшісінің қолы
1.						
2.						
3.						
4.						
5.						
6.						

Пайдалануға берілген оқулықты оқу жылы аяқталғанда қайтарып тапсырады. Жоғарыдағы кестені сынып жетекшісі төмендегі бағалау мөлшері негізінде толтырады:

Жаңа	Оқулықты алғаш рет пайдалануға берілгендегі жағдайы.
Жақсы	Мұқаба бүтін, оқулықтың негізгі бөлігінен ажыралмаған. Барлық парақтары бар, жыртылмаған, көшпеген, беттеріне жазбаған және сызбаған.
Орташа	Мұқаба езілген, аздап қана сызылған, шеттері жейілген, оқулықтың негізгі бөлігінен ажыраған жерлері бар. Пайдаланушы жағынан қанағаттанарлық жөнделген. Жұлынған, кейбір беттері сызылған.
Нашар	Мұқаба былғанған, сызылған, жыртылған, негізгі бөлігінен ажыраған немесе мүлдем жоқ, нашар жөнделген. Беттері жыртылған, парақтары жетіспейді, сызып, бояп тасталған. Оқулық қалпына келтіруге жарамайды.