

Алгебра

7

Учебник для
7 класса школ общего
среднего образования

Рекомендован к
изданию Министерством
народного образования
Республики Узбекистан



Новое издание

Ташкент – 2022

УДК 512 (075.3)
ББК 22.14я72
А 45

Составители:

*Аббос Акмалов, Жамоладдин Сапарбоев, Дилмурод Бойтиллаев,
Эргаш Каримов, Мураджан Ходжаниязов*

Международный эксперт:

Марсело Старикофф

Рецензенты:

- Б.Б. Камолов** – методист точных наук ОНО Кашкадарьинской области;
Д. Н. Камолова – учитель математики СГОШ №12 города
Навои Навоийской области;
Б. Х. Умирзаков – учитель математики СГОШ №5 города
Чартак Наманганской области

Алгебра 7 класс [Текст]: учебник / А. Акмалов [и др.]. - Ташкент: Республиканский центр образования, 2022. - 192стр.

Подготовлен в сотрудничестве с представительством
ЮНИСЕФ в Узбекистане

Усовершенствован на основе заключения
Института математики им. В.И. Романовского Академии наук
Республики Узбекистан.

Оригинал-макет и концепция дизайна разработаны
Республиканским центром образования.

Издано за счёт средств Республиканского целевого книжного фонда.

СОДЕРЖАНИЕ

Абу Абдуллох Мухаммад ибн Муса аль-Хорезми	5
Повторение пройденного в 6 классе	6

ГЛАВА I. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ И СТЕПЕНЬ

1. Числовые выражения.....	12
2. Алгебраические выражения	15
3. Алгебраические равенства. Формулы	17
4. Правила раскрытия скобок, коэффициент	20
5. Свойства арифметических действий.....	23
6. Степень с натуральным показателем	26
7. Свойства степени с натуральным показателем	30
8. Одночлен и его стандартный вид	34
9. Умножение и деление одночленов	36
10. Многочлены.....	38
11. Подобные члены и их приведение.....	41
12. Сложение и вычитание многочленов	44
13. Умножение многочленов	46
14. Деление многочленов	50
15. Разложение многочленов на множители.....	52

ГЛАВА II. ФОРМУЛЫ СОКРАЩЁННОГО УМНОЖЕНИЯ

1. Квадрат суммы и разности	57
2. Разность квадратов.....	60
3. Куб суммы.....	63
4. Разность и сумма кубов	66
5. Способы разложения на множители	69
6. Применение формул сокращённого умножения	71

ГЛАВА III. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДРОБИ

1. Алгебраическая дробь. Сокращение дробей	75
2. Приведение алгебраических дробей к общему знаменателю	80
3. Сложение и вычитание алгебраических дробей	83
4. Умножение и деление алгебраических дробей	87
5. Проектная работа	93

ГЛАВА IV. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Уравнение и его корень	95
2. Линейные уравнения с одним неизвестным	97
3. Способ решения уравнений аль-Хорезми	101
4. Решение задач с помощью уравнений	104

ГЛАВА V. ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ

1. Декартова система координат	112
2. Понятие функции	115
3. Линейная функция	120
4. Проектная работа	128

ГЛАВА VI. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Системы линейных уравнений	131
2. Способы решения систем линейных уравнений.....	137
3. Решение задач с помощью систем линейных уравнений.....	143

ГЛАВА VII. РАБОТА С ДАННЫМИ

1. Основные правила комбинаторики	146
2. Виды комбинаторных задач.	150
3. Способы решения комбинаторных задач.....	156

ПОВТОРЕНИЕ

160

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

173

ЗАДАНИЯ МЕЖДУНАРОДНОЙ ПРОГРАММЫ ПО ОЦЕНКЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ДОСТИЖЕНИЙ УЧАЩИХСЯ

183

ЛОГИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

187



ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ИГРЫ ДЛЯ
УЧЕБНИКА 7 КЛАССА «АЛГЕБРА»



ВИДЕОУРОКИ ДЛЯ УЧЕБНИКА
7 КЛАССА «АЛГЕБРА»



Аль-Хорезми (783-850)

Абу Абдуллох Мухаммад ибн Муса аль-Хорезми родился в Хорезме приблизительно в 783 году.

Из более чем 20 трудов аль-Хорезми до нас дошли только 10. Это «Краткая книга по счету Аль-Джабр Валь-мукобала» – алгебраический труд, «Книга об индийском счёте» или «Книга о сложении и вычитании» – арифметический труд, «Китаб суратул арз» – труд по географии. «Зидж», «Книга о работе с астролябией», «Книга об изготовлении астролябии», «Об определении азимута с помощью астролябии», «Китобут рухома», «Китабут тарих», «Трактат об определении календаря и праздников евреев». Четыре из этих произведений сохранились на арабском языке, одно – в составе Ферганского труда, два – в латинском переводе.

Название «алгоритм», которое служит основой для современных технологий, происходит от имени учёного аль-Хорезми. Полное название алгебраического трактата Хорезми – «Аль-Китаб аль-Мухтасар фи хисоб Аль-Джабр Валь-мукобала». Слова «Аль-Джабр» и «Валь-мукобала» в названии трактата – «о восполнении и противопоставлении» – означают два основных действия средневековой алгебры. Латинская форма слова «Аль-Джабр» «алгебра»

стала названием новой науки, основанной Хорезми.

Алгебраический трактат Хорезми состоит из трёх частей:

- 1) алгебраическая часть, в конце которой приводится небольшой раздел – глава о торговом обороте;
- 2) геометрическая часть, об измерении с помощью алгебраического метода;
- 3) часть о завещаниях. Хорезми дал ей отдельное название – «Книга завещаний». Хорезми в своём трактате не приводит никаких обозначений, а излагает содержание целиком в словах и приводит формы.

В то же время Хорезми заявляет, что он также предусмотрел решение вопросов, связанных с повседневными потребностями, вопросами, возникающими в соответствии с требованиями ислама и шариата, а также вопросами, связанными с архитектурой и ирригацией. Вообще, алгебра Хорезми – это наука о решении числовых квадратных и линейных уравнений.

Европейские учёные в течение нескольких веков во всех вычислениях добавляли «Как говорил аль-Хорезми».

Это означало, что учёные проводили расчеты именно по указаниям аль-Хорезми.

Аль-Хорезми умер в 850 году в Багдаде.

ПОВТОРЕНИЕ ПРОЙДЕННОГО В 6 КЛАССЕ

Целые числа и действия над ними

Натуральные числа, их противоположные и ноль называют **целыми числами**.

$$\{ \dots, -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; \dots \}$$

0; 7; 212 и $-1023 \rightarrow$ целые числа. $\frac{1}{2}$; 1,1 и $-5,2 \rightarrow$ не целые числа.

Модуль числа указывает, на каком расстоянии оно расположено от числа 0 на числовой оси.

Он обозначается как $|a|$ и читается **модуль числа a** .

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найдите числа, противоположные данным числам.

1) 6

2) -7

3) -23

4) 0,25

2. Заполните таблицу.

a	4	-5				-210			2	8,8
$-a$			-21	72	-10		8	-1		

3. На числовой оси определите, какое из чисел находится левее.

1) -8 и -15

2) -10 и 6

3) 5 и -15

4) 0 и -100

4. Сравните модули чисел.

1) -6 и 6

2) -5 и -12

3) 14 и 20

4) 16 и -6

5. Сложите целые числа.

1) $19 + 6$

2) $-6 + (-12)$

3) $7 + 12$

4) $-19 + (-19)$

6. Выполните действия.

1) $(-5 + 19) + (-19)$

2) $(-16 + (-17)) + 17$

3) $-78 + 36 + 19 + (-22) + (-25)$

4) $43 + (-60) + 12 + 39 + (-21)$

7. Вычислите.

1) $14 - 23 - 37 + 23 + 56 - 13$

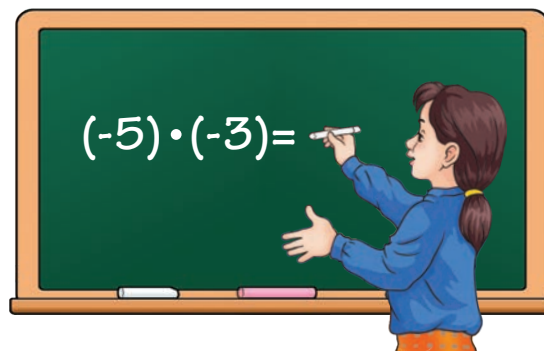
2) $-51 - 18 - 29 + 11 + 51 + 29 - 14$

3) $27 - 49 - 12 + 38 + 49 - 60$

4) $46 + 34 - 15 - 34 - 46 + 15 - 100$

8. Умножьте и поделите целые числа.

- | | |
|----------------------|-----------------------|
| 1) $(+7) \cdot (-4)$ | 2) $(+15) \cdot (-3)$ |
| 3) $(-8) \cdot (-6)$ | 4) $(-6) \cdot (-9)$ |
| 5) $(-42) : 2$ | 6) $-30 : (-10)$ |
| 7) $64 : (-4)$ | 8) $-270 : (-30)$ |



9. Выполните действия.

- | | |
|-------------------------|------------------------|
| 1) $-7 \cdot (-6) + 17$ | 2) $-27 : (-3) - 10$ |
| 3) $-4 \cdot (-3) : 12$ | 4) $-64 : (-8) : (-4)$ |

Рациональные числа и действия над ними

Несократимые дроби, представленные в виде $\frac{p}{q}$, называются **рациональными числами**. p – целое, q – натуральное.

Все целые числа считаются рациональными.

Любое целое число можно записать в виде:

$$p = \frac{p}{1}$$

Дроби $\frac{8}{16} = \frac{4}{8} = \frac{2}{4}$ также рациональные числа, так как после сокращения они равны дроби $\frac{1}{2}$.

Действия над рациональными числами

$$\frac{k}{n} + \frac{p}{q} = \frac{k \cdot q + p \cdot n}{n \cdot q}$$

$$\frac{k}{n} - \frac{p}{q} = \frac{k \cdot q - p \cdot n}{n \cdot q}$$

$$\frac{k}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{k \cdot p}{n \cdot q}$$

$$\frac{k}{n} : \frac{p}{q} = \frac{k}{n} \cdot \frac{q}{p} = \frac{k \cdot q}{n \cdot p}$$

УПРАЖНЕНИЯ

10. Вычислите.

1) $\frac{15}{20} + \frac{42}{30} - \frac{56}{40}$

2) $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$

3) $\frac{17}{51} + \frac{19}{57} - \frac{13}{39}$

4) $\frac{2}{3} + 1\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$

5) $\left(\frac{3}{6} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)$

6) $\left(1\frac{3}{5} - \frac{3}{10}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right)$

11. Выполните умножение.

1) $5 \cdot \frac{4}{5}$

2) $3 \cdot \frac{1}{3}$

3) $\frac{8}{9} \cdot 9$

4) $\frac{12}{17} \cdot 17$

5) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$

6) $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5}$

7) $\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{6}$

8) $\frac{12}{25} \cdot \frac{5}{6}$

9) $1\frac{1}{5} \cdot 1\frac{2}{3}$

10) $1\frac{1}{4} \cdot 10\frac{2}{3}$

11) $1\frac{4}{11} \cdot 3\frac{2}{3}$

12) $2\frac{2}{3} \cdot 1\frac{1}{8}$

13) $1\frac{5}{7} \cdot 2\frac{1}{3}$

14) $4\frac{1}{6} \cdot 3\frac{3}{5}$

15) $2\frac{8}{9} \cdot 1\frac{1}{17} \cdot \frac{1}{2}$

16) $3\frac{1}{7} \cdot (-(-4\frac{5}{11})) \cdot (-\frac{5}{77})$

12. Выполните действия.

1) $241,215 \cdot 10$

2) $0,05501 \cdot 1\ 000$

3) $0,155 \cdot 10\ 000$

4) $4,0107 \cdot 100$

5) $241,215 : 10$

6) $0,05501 : 1\ 000$

7) $0,155 : 10\ 000$

8) $4,0107 : 100$

13. Выполните действия.

1) $542,1 : 0,1$

2) $215,04 : 0,01$

3) $301,1 : 0,001$

4) $4,281 : 0,0001$

5) $542,1 \cdot 0,1$

6) $215,04 \cdot 0,01$

7) $301,1 \cdot 0,001$

8) $4,281 \cdot 0,0001$

14*. Найдите значение выражения.

1) $\frac{13 \cdot 86}{468} : 0,25 + \frac{57 \cdot 14}{27} - \frac{10}{9}$

2) $\left(\frac{92}{85} + \frac{104}{17}\right) \cdot \frac{5}{18} + \left(\frac{1}{3} + \frac{7}{6}\right) - \frac{5}{2}$

3) $\frac{10}{16} + \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{17}{4} : 17\right) + 3,75 : \frac{5}{6}$

4) $\left(\frac{41}{18} - \frac{17}{36}\right) \cdot \frac{18}{65} + \left(\frac{8}{7} - \frac{23}{49}\right) : \frac{99}{49} + \frac{7}{6}$

5) $\left(\frac{1}{2} + 0,8 - 1\frac{1}{2} : 2,5\right) : \left(3 + 4\frac{3}{25} - 0,12\right)$

6) $\left(6,3 + 3\left(35\frac{17}{42} - 4\frac{6}{35}\right)\right) \left(0,7 - \frac{1}{12}\right) \cdot 6$

7) $\left(2,75 - \frac{3}{2}\right) + \left(\frac{5}{2} - 1,875\right) : 0,125 - \frac{1}{4}$

8) $\left(3\frac{4}{9} : \left(2\frac{1}{36} - 1\frac{20}{27}\right)\right) : (2,08 : 10,4 + 2,5 \cdot 0,4)$

Соотношение, пропорция, процент

Частное $a : b$ называют количественным отношением a, b . Такая запись читается «отношение a к b ».

Равенство двух отношений называют **пропорцией**.

С помощью букв пропорцию можно записать так:

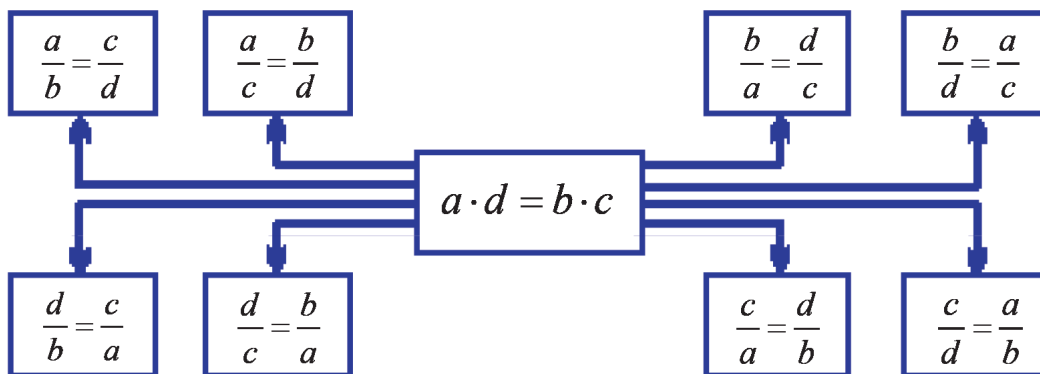
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{или} \quad a : b = c : d$$

Читается: «отношение a к b равно отношению c к d ».

Числа, участвующие в пропорции, называются **пропорциональными числами**.

Все значения считаются ненулевыми. $a \neq 0; b \neq 0; c \neq 0; d \neq 0$

Основное свойство пропорции



Проценты

нахождение процента числа b от
числа a :

$$\frac{b}{a} \cdot 100\% = x\%$$

нахождение x
процентов от числа a

$$\frac{a \cdot x\%}{100\%} = b$$

нахождение числа, если x
процентов от него равно b

$$\frac{b}{x\%} \cdot 100\% = a$$

УПРАЖНЕНИЯ

15. Вычислите.

- 1) Число 12 разбить на две части в отношении 1 : 3.
- 2) Число 36 разбить на три части в отношении 2 : 3 : 7.

16. Найдите неизвестное значение пропорции.

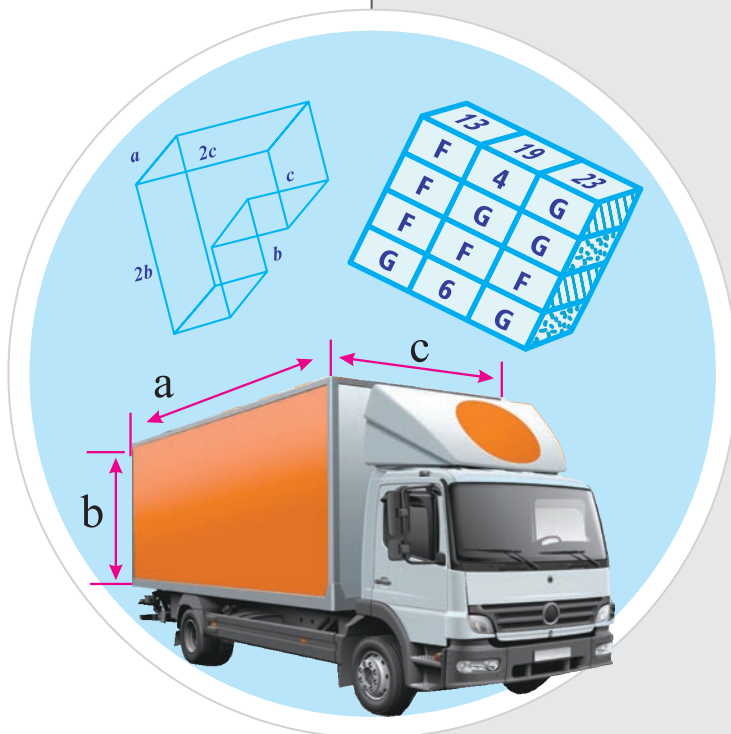
- 1) $x : 4 = 9 : 12$
- 2) $x : 3 = 2 : 9$
- 3) $5 : 3 = x : 8$
- 4) $1 : 4 = 12 : x$

- 17.** Какое из приведённых ниже выражений может быть пропорцией?
- | | |
|------------------------------------|------------------------------------|
| 1) $0,6 : 18 = 1 : 30$ | 2) $4,5 : 3,5 = 27 : 21$ |
| 3) $4 : 14 = 1,4 : 409$ | 4) $10,2 : 0,66 = 55 : 0,55$ |
| 5) $\frac{5}{7} : 0,7 = 50 : 49$ | 6) $\frac{24}{42} = \frac{20}{35}$ |
| 7) $\frac{63}{56} = \frac{81}{72}$ | 8) $\frac{5}{88} = \frac{1}{1,6}$ |
- 18.** Крайние члены пропорции равны 5 и 16, а один из средних членов – 8. Найдите второе среднее значение пропорции.
- 19.** Представьте следующие числа в виде процента.
- | | | | |
|------|---------|---------|------|
| 1) 5 | 2) 0,01 | 3) 1,02 | 4) 1 |
|------|---------|---------|------|
- 20.** Вычислите.
- | | |
|------------------------------|-----------------------------|
| 1) Найдите 25% от числа 56. | 2) Найдите 50% от числа 48. |
| 3) Найдите 15% от числа 120. | 4) Найдите % от числа 460. |
- 21.** Вычислите.
- 1) Найдите число, 15% которого равно 45.
 - 2) Найдите число, 20% которого равно 62.
 - 3) Найдите число, 25% которого равно 62,5.
 - 4) Найдите число, 10% которого равно 33,7.
- 22.** Стороны треугольника пропорциональны числам 3, 4 и 5, периметр равен 72 см. Найдите наименьшую сторону треугольника.
- 23.** Брусok делится на три части, длина которых обратно пропорциональна числам 2, 3 и 5. Найдите длину наименьшей части, если самая длинная из них составляет 25 см.
- 24.** Определите масштаб карты, если изображение на карте двух кишлаков, находящихся на расстоянии 0,5 km, равно 2 см.
- 25.** Если расстояние между двумя городами равно 25 km, каким будет это расстояние на карте масштаба 1:250 000?
- 26.** Выразите в граммах.
- | | | | |
|-------------|-------------|--------------|--------------|
| 1) 0,467 kg | 2) 2,064 kg | 3) 0,0485 kg | 4) 0,0055 kg |
|-------------|-------------|--------------|--------------|
- 27.** Выразите в килограммах.
- | | | | |
|----------|-----------|------------|------------|
| 1) 0,5 q | 2) 1,75 q | 3) 0,950 t | 4) 14,25 t |
|----------|-----------|------------|------------|
- 28.** Выразите в минутах.
- | | | | |
|----------|-----------|-----------|-----------|
| 1) 0,1 h | 2) 0,15 h | 3) 0,25 h | 4) 1,25 h |
|----------|-----------|-----------|-----------|
- 29.** Выразите в квадратных метрах.
- | | | | |
|-----------|-----------|------------|-------------|
| 1) 0,5 ha | 2) 1,5 ha | 3) 1,25 ha | 4) 0,075 ha |
|-----------|-----------|------------|-------------|
- 30.** Выразите в метрах.
- | | | |
|---------|---------------|-------------------|
| 1) 9 dm | 2) 15 dm 2 cm | 3) 2 m 7 dm 18 cm |
|---------|---------------|-------------------|

I

ГЛАВА

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ И СТЕПЕНЬ



ЧИСЛОВЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

Вспоминаем

Переместительное свойство сложения: $6 + 3 = 3 + 6$

Свойство группировки сложения: $49 + 17 + 51 = (49 + 51) + 17$

Переместительное свойство умножения: $6 \cdot 5 = 5 \cdot 6$

Свойство группировки в умножении: $4 \cdot (3 \cdot 2) = (4 \cdot 3) \cdot 2$

Распределительное свойство умножения: $2,5 \cdot 1,125 + 2,775 \cdot 2,5 = 2,5 \cdot (1,125 + 2,775)$

Числовое выражение – это математическая запись, которая состоит из чисел и одной или нескольких арифметических операций.

$$2 \cdot 5$$

$$25 : 5$$

$$14 : 2 - 12$$

$$(4,3 + 5,7) \cdot 6,7$$

Значением числового выражения является число, полученное в результате действий, указанных в этом числовом выражении.

Значение числового выражения $2 \cdot 5$ равно 10;

Значение числового выражения $25 : 5$ равно 5;

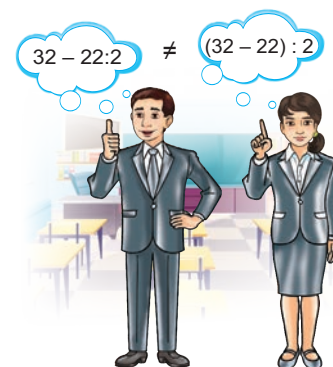
Значение числового выражения $14 : 2 - 12$ равно -5 ;

Значение числового выражения $(4,3 + 5,7) \cdot 6,7$ равно 67.

- Числовое выражение может состоять из одного числа. Его значением будет само это число.

- Два числовых выражения, соединённые знаком $=$, образуют числовое равенство.

- Если значения левой и правой частей равенства являются одним и тем же числом, то равенство называется верным равенством.



Порядок выполнения действий

Сложение и вычитание относятся к действиям **I ступени**, умножение и деление – к действиям **II ступени**, а возведение в степень – к действиям **III ступени**.

1. Если в выражении нет скобок, задействованы только действия одной ступени, то действия выполняются последовательно в порядке их записи слева направо.
2. Если в выражении нет скобок и задействованы действия всех трёх ступеней, то сначала выполняются действия III ступени, затем II ступени и действия ступени I.
3. При наличии в выражении скобок сначала выполняются действия внутри скобок, затем остальные действия выполняются по 1-му и 2-му правилам.
4. Если в выражении есть другие скобки, то в первую очередь выполняются действия внутри скобок

Примеры

Пример 1. $25 \cdot 4 + 112 = 100 + 112 = 212$

Пример 2. $4 \cdot (3^2 \cdot 5 + 5) = 4 \cdot (9 \cdot 5 + 5) = 4 \cdot (45 + 5) = 4 \cdot 50 = 200$

Пример 3. $0,5 \cdot 10 - 450 = 5 - 450 = -445$

Пример 4. $-4 \cdot (-3^2 : 9 - 26) = -4 \cdot (9 : 9 - 26) = -4 \cdot (1 - 26) = -4 \cdot (-25) = 100$

Пример 5. $\frac{3 \cdot 2^5 - 5 \cdot 4}{3^2 + 1} = \frac{3 \cdot 32 - 20}{9 + 1} = \frac{96 - 20}{10} = \frac{76}{10} = 7,6$

Пример 6. $((4^2 - 6) + 10) : 5 = ((16 - 6) + 10) : 5 = 20 : 5 = 4$

Упражнения

1. Выполните действия.

1) $(57 + 26) - 27$

2) $49 - 55 + 11 - 0,4$

3) $7,5 \cdot 2 - 3 \cdot (2,1 + 0,6 : 0,2)$

4) $(5,26 - 3,8) + 2,8$

2. Найдите значение числового выражения.

1) $1 \frac{4}{5} + 5 \frac{4}{35} + 7 \frac{1}{5} - 4 \frac{4}{35}$

2) $5 \frac{2}{3} + 4 \frac{1}{8} + 1 \frac{1}{6} + 3 \frac{5}{8}$

3) $\left(\frac{2}{3} + 1 \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{7}{13}\right)$

4) $\left(1 - \frac{4}{5}\right) \cdot \left(1 - \frac{5}{6}\right)$

3. Найдите числовые выражения, равные значениям 5; -2; 1; 3.

1) $(40 : 2 + 5) : 5$

2) $5^2 - (4 \cdot 8 - 17) - 12$

3) $6 \frac{5}{9} + 2 \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} - 6 \frac{1}{3}$

4) $\frac{15 \cdot 4 - 27}{5 + 6}$

4. Один человек в Узбекистане потребляет в среднем 1500 kW электроэнергии в год. Только в США компьютеры потребляют 650 миллиардов kW энергии в год. Во сколько раз годовое потребление электроэнергии в 2022 году в Узбекистане с населением около 35 000 000 человек превышает потребление энергии компьютерами в США?

5. Какое равенство верно?

1) $\frac{3}{10} + \frac{3}{4} = \frac{11}{20} + \frac{1}{2}$

2) $22 \frac{17}{25} + 77 \frac{8}{25} = (17 + 8) \cdot 4$

3) $21 \frac{8}{35} - 3 \frac{19}{70} = 10 \frac{5}{14} + 6 \frac{6}{10}$

4) $1 \frac{2}{3} + 4 \frac{1}{5} = 41,5 \cdot \frac{2}{15}$

5) $1 - \frac{14}{17} = 1 - \frac{21}{34}$

6) $(34 \cdot 150) : 25 = (17 + 48) \cdot 5$

6. Запишите в виде числового выражения.

1) Сумма чисел 14 и 36 равна разности чисел 85 и 35.

2) Разность чисел $1 \frac{2}{3}$ и $1 \frac{1}{3}$ равна сумме чисел $\frac{1}{6}$ и $\frac{1}{3}$.

3) Произведение чисел 4 и 0,25 равно полуразности чисел 8 и 6.

4) Удвоенная сумма чисел 0,12 и 1,88 равна произведению чисел $\frac{4}{5}$ и 5.

7. Вычислите.

1) $12,7 \cdot 64 + 173 \cdot 3,6 + 12,7 \cdot 36 + 17,3 \cdot 64$

2) $13,5 \cdot 5,8 - 8,3 \cdot 4,2 - 5,8 \cdot 8,3 + 4,2 \cdot 13,5$

8. Выполните действия.

1) $12 \frac{5}{6} + 2 \frac{7}{9} \cdot \left(15 \frac{9}{10} - 12 \frac{9}{10}\right)$

2) $5 \frac{7}{16} \cdot 1 \frac{3}{29} + 2 \frac{5}{16} \cdot 2 \frac{2}{7}$

3) $\left(2022 \frac{3}{5} - 2021 \frac{1}{6}\right) \cdot 1 \frac{1}{29}$

4) $\frac{7}{10} + \left(1 \frac{1}{3} - \frac{2}{9}\right) : 1 \frac{2}{9} + 2 \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)$

9. Найдите значение числового выражения.

1) $\frac{3}{5} : \frac{9}{10} + 3 \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} - 4 : 2 \frac{2}{3}$

2) $7 \frac{1}{3} : 12 \frac{1}{4} \cdot 6 \frac{1}{8}$

3) $1 \frac{5}{12} \cdot \frac{3}{34} + 1 \frac{5}{12} \cdot 1 \frac{31}{34}$

4) $10 \frac{2}{3} \cdot 2 \frac{2}{15} - 2 \frac{2}{5} \cdot 5 \frac{1}{2}$

10*. Выполните действия.

1) $\frac{1,95 \cdot 0,48 : 6,25}{(2,03 - 1,25) \cdot 0,4 : 2,4}$

2) $6 \frac{3}{7} : \frac{(0,19 + 3,2) : 22,6}{4,05 + 0,75 - 2 \frac{5}{6}}$

3) $7 \frac{13}{28} - \left(3 \frac{9}{28} - 5 \frac{3}{13}\right)$

4) $\frac{\frac{4}{7} - \frac{4}{7} \cdot \frac{7}{8} + \frac{1}{8}}{\frac{3}{7} - \frac{1}{28}}$

5) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{2} + \dots + \frac{15}{2} + \frac{16}{3}$

6) $\frac{1}{16} + \frac{2}{18} + \frac{3}{16} + \dots + \frac{15}{16} + \frac{16}{18}$

7) $\frac{\left((1,2 : 36) + \frac{6}{5} \cdot 0,25\right) \cdot \left(\frac{128}{45} - \frac{1}{15}\right) : \frac{125}{9}}{\left(\frac{128}{45} - \frac{1}{15}\right) : \frac{125}{9}}$

8) $\frac{\left(1,8 + \frac{19}{20}\right) : 0,5}{\frac{7}{40} : 0,35 + \frac{7}{3} : \frac{217}{31}}$

9) $\left(\frac{14}{15} + \frac{5}{2} + 0,3\right) \cdot \frac{8}{7} \cdot 0,75 + \frac{5}{10}$

10) $\left(\frac{1}{2} + 0,125 - \frac{1}{6}\right) \cdot \left(6,4 : \frac{80}{3}\right) + \frac{1}{8}$

11) $\frac{13 \cdot 86}{450} : 0,25 + \frac{57 \cdot 14}{27} - \frac{10}{9}$

12) $\left(\frac{92}{85} + \frac{104}{17}\right) \cdot \frac{5}{18} + \left(\frac{1}{3} + \frac{7}{6}\right) - \frac{5}{2}$

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

Пример

Пример 1. Скорость велосипедиста 12 км/ч. Какое расстояние он проедет за 2 часа, 3 часа, a часов?

- 1) $12 \cdot 2 = 24$ (км);
- 2) $12 \cdot 3 = 36$ (км);
- 3) За a часов $12 \cdot a$ (км)



Алгебраическое выражение — это выражение, состоящее из цифр и букв в сочетании со знаками арифметических операций.

$$4 \cdot a \quad 12 : 5b \quad 514 : 2-x \quad (x + y) \cdot 4$$

Пример

Пример 2. Сколько килограммов яблок можно купить на 6000 сумов, если 1 килограмм стоит 2000 сумов? Сколько килограммов можно купить на 7000 сумов, если 1 килограмм стоит 1000 сумов? Сколько килограммов можно купить за a сумов, если 1 килограмм стоит b сумов?

- 1) $\frac{6\ 000}{2\ 000} = 3$ (kg) 2) $\frac{7\ 000}{1\ 000} = 7$ (kg)
- 3) $\frac{a}{b}$ (kg), $b \neq 0$ (на ноль делить нельзя)



Если в буквенную часть алгебраического выражения подставить число и произвести указанные действия, то получится число, называемое **числовым значением алгебраического выражения**

Пример

Пример 3. Найдите значение выражения $\frac{x+1}{x-2}$ при $x = 5$.

Вместо букв, которые были ранее в выражении, подставляем их числовое значение, а затем производим вычисление:

$$\frac{x+1}{x-2} = \frac{5+1}{5-2} = \frac{6}{3} = 2.$$

Порядок выполнения действий над числами сохраняется и при выполнении задач, связанных с нахождением числовых значений алгебраических выражений.

Знак умножения — «точка» между буквой и буквой, цифрой и буквой часто опускается. Например, $S = ab$, $P = 2(a + b)$.

Пример

Пример 4. Если $a = 5$, $b = 6$, найдите значение выражения $\frac{a + b}{b - 3}$.

$$\frac{a + b}{b - 3} = \frac{5 + 6}{6 - 3} = \frac{11}{3} = 3 \frac{2}{3}$$

Упражнения

1. Найдите значение алгебраического выражения.

- 1) $a + 3b$, если $a = 5$, $b = 5$ 2) $2a - 4b$, если $a = 6$, $b = -2$
 3) $2a^2 + \frac{1}{5}b$, если $a = 3$, $b = 25$ 4) $(a - 4) : b$, если $a = 19$, $b = 3$
 5) $\frac{(2a - 1) \cdot b}{a + b}$, если $a = 8$, $b = 2$ 6) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ если, $a = 2$, $b = 3$

2. Обувная фабрика производит 500 пар обуви каждый час. Сколько пар обуви производится на фабрике за t часов? А за 24 часа?

3. Автомобильный завод производит 500 автомобилей в день. Сколько автомобилей будет произведено за n дней? А за 1 месяц?



4. Решите выражения и заполните графу с ответами.

№	x	y	Алгебраическое выражение	Ответ
1.	4	1	$\frac{x - 3}{y + 1}$	
2.	0,5	1	$2x + 7y$	
3.	-1	1	$2 \cdot (x + 1) + y$	
4.	2	8	$(x + y) \cdot 3$	
5.	0,5	40	$x \cdot y - 4$	
6.	2	5	$\frac{2x + y}{x - 2y}$	

5. Найдите значения алгебраических выражений при $k = 6$ и $t = -5$.

- 1) $k + \frac{1}{5}t$ 2) $(2k + 8) + 2t$ 3) $\frac{3 \cdot (k - t) + 7}{4(k + t)}$ 4) $2k + 5(t + 8)$

6. Заполните таблицу при $x = 2$ и $y = -1$

$x + 2y$	$4x - y$	$2(x + y)$	$2x - xy + 5$	$x + y - 1$	$\frac{3x - 2y}{4(x + y)}$

7*. Найдите значение выражения при $k = 2$: $y = \frac{k}{1011k + 1}$, $x = \left(1 - \frac{2021}{2023}\right) \cdot y + 2021$.

8*. Найдите числовое значение алгебраического выражения.

- 1) $(mn)^2$, при $m = 3, n = 2$
- 2) $-mn^2$, при $m = 3, n = 5$
- 3) $a + 2b$, при $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{4}$
- 4) $c - 3ab + dc$, при $a = -1, b = 3, c = -2$
- 5) $a^2 - b^2$, при $a = 6, b = -4$

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ РАВЕНСТВА. ФОРМУЛЫ

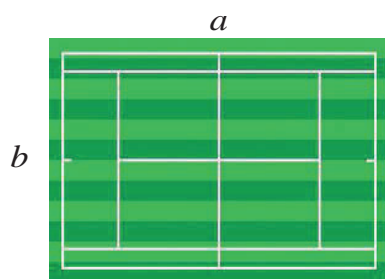
Вспоминаем

- Нахождение площади прямоугольника: $S = a \cdot b$
- Нахождение периметра прямоугольника: $P = 2 \cdot (a + b)$
- Нахождение площади квадрата: $S = a^2$
- Нахождение периметра квадрата: $P = 4 \cdot a$
- Нахождение объёма куба: $V = a^3$

Связь двух числовых выражений со знаком $=$ называется **равенством**.

В равенствах значения выражений взаимно **равны**.

Алгебра в повседневной жизни



Теннисный корт имеет форму прямоугольника.
Площадь поля = ширина · длина

$$S = a \cdot b$$

Это – формула.

$$P = 2 \cdot (a + b)$$

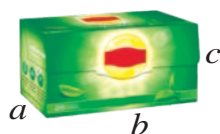
Коробка из-под чая имеет форму прямоугольного параллелепипеда.

Объём коробки =
ширина · длина · высота.

$$S = 2(a \cdot b + b \cdot c + a \cdot c)$$

Это – формулы.

$$V = a \cdot b \cdot c$$



Формула – алгебраическое равенство, выражающее зависимость одной величины от других величин.

Примеры

Пример 1. Для нахождения объёма куба используем формулу $V = a^3$, для нахождения суммы рёбер используем формулу $P = 12a$.

Пример 2. Коробка формой прямоугольного параллелепипеда имеет высоту H см. Её длина в 3 раза больше высоты, ширина меньше длины на 7 см. Выразите длину и ширину через высоту.

Пусть длина, ширина и высота прямоугольной коробки равны соответственно L, B, H .

Длина коробки: $L = 3H$

Ширина коробки: $B = L - 7$

Ширина коробки относительно высоты равна: $B = 3H - 7$

Пример 3.

$2n = 2 \cdot 1 = 2$

$2n = 2 \cdot 2 = 4$

$2n = 2 \cdot 3 = 6$

.....
 $2n = 2 \cdot 41 = 82$

.....
 $2n = 2 \cdot 1\,000 = 2\,000$

К какому выводу
пришли?



$2n - 1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$

$2n - 1 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$

$2n - 1 = 2 \cdot 3 - 1 = 5$

$2n - 1 = 2 \cdot 4 - 1 = 7$

.....
 $2n - 1 = 2 \cdot 41 - 1 = 81$

.....
 $2n - 1 = 2 \cdot 1000 - 1 = 1999$

Если a чётное число, тогда это число кратно 2.

Формула: $a = 2n$, здесь n – натуральное число.

Если a нечётное число, тогда при его делении на 2 остаток будет равен 1.

Формула: $a = 2n + 1$, здесь n – натуральное число.

Формулу нечётного натурального числа можно записать так:

Формула: $a = 2n - 1$, здесь n – натуральное число.

Упражнения

1. Напишите предложения математическим языком:

- 1) сумма чисел m и n ;
- 2) разность чисел a и b ;
- 3) удвоенная разность чисел a и b ;
- 4) удвоенное произведение m и n ;
- 5) деление суммы чисел n и m на их разность;
- 6) произведение суммы чисел a и b на их разность;
- 7) разность удвоенного числа a и b ;
- 8) удвоенная разность a и b ;
- 9) сумма удвоенного a и утроенного b ;
- 10) разность произведения чисел a и b и b .

2. Найдите периметр квадрата со стороной a см.
3. Поле сельхозугодья имеет прямоугольную форму, его длина равна a метрам, а ширина равна b метрам. После приобретения новой земли площадь увеличилась на 220 m^2 . Какой стала площадь поля?



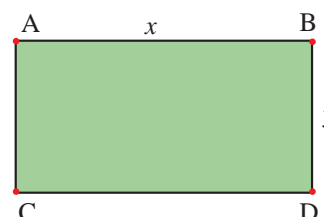
4. Пассажир вышел из села и направился в город. Пройдя a километров, он сел в автобус, едущий со скоростью 60 km/h , и за t часов доехал до города.
1. Найдите расстояние S от села до города при $a = 4$ и $t = 1,5$.
 2. Найдите t при $S = 70$, $a = 10$.
5. Рассчитайте время движения автомобиля Spark, движущегося с постоянной скоростью 100 km/h , если он прошёл 1) $1\ 000 \text{ km}$; 2) 500 km ; 3) 450 km .
6. Автомобиль «Малибу» расходует a литров топлива на 100 km . Заполните таблицу ниже.

Пройденный путь, (km)	500	700		800	S	
Расход топлива (L)			$11a$			$4a$

7. У Анвара есть x сумов. У Азизбека на y сумов больше. Сколько денег у Азизбека? Решите задачу, если 1) $x = 5000$ и $y = 2\ 000$; 2) $x = 4\ 500$ и $y = 350$.
8. Заполните следующую таблицу, пользуясь формулой $S = v \cdot t$.

S (km)	500	600	480	340	720	432	900
t (время)	5	12	4	4	8	6	12
Вариант ответа	A	B	C	D	E	F	G
v (km/h)	85	90	100	75	50	120	72

9. В саду растут n яблонь, на каждой из них в среднем по 30 kg плодов. Составьте формулу, выражающую, сколько килограммов яблок можно собрать в саду, и решите задачу при $n = 250$.
10. Составьте формулу для нахождения каждой переменной из данных формул.
- 1) $\angle x + \angle y + \angle z = 180^\circ$
 - 2) $P = 4 \cdot a$
 - 3) $v = s : t$
 - 4) $S = a \cdot b$
 - 5) $T = m + 3$
 - 6) $x = 5t + 4$
 - 7) $P = a + b + c$
 - 8) $C = 2\pi r$
11. Найдите формулу вычисления периметра прямоугольника.



ПРАВИЛА РАСКРЫТИЯ СКОБОК И КОЭФФИЦИЕНТ

Правила раскрытия скобок

Часто в процессе выполнения расчётов приходится раскрывать скобки или выносить за скобки общий множитель. Необходимо соблюдать следующие правила.

$$58 + (-48 + 3)$$



$$58 - 48 + 3$$

Правило 1. Если перед скобками стоит знак плюс, все числа, которые стоят внутри скобок, сохраняют свой знак.

$$a + (b - c) = a + b - c$$

$$8,2 + (4,8a + 13)$$



$$8,2 + 4,8a + 13$$

Правило 2. Если первое слагаемое в скобках пишется без знака, то считается, что ему предшествует знак $+$.

$$a + (b + c) = a + b + c$$

$$107 - (-5,6a + 6b)$$



$$107 + 5,6a - 6b$$

Правило 3. Если перед скобками стоит знак $-$, скобки нужно опустить, изменив знак каждого слагаемого внутри скобок на противоположный:

$$a - (b + c) = a - b - c$$

$$a - (b - c) = a - b + c$$

Если сумма заключена в скобки и перед скобками стоит знак $+$, то знаки слагаемых в скобках остаются без изменений.

Примеры

Пример 1. $-45 + 27 - 2 = +(-45 + 27 - 2) = +(-20) = -20$

Пример 2. $9 + (-14) + 11 + (-14) + 31 + (-53) = 9 - 14 + 11 - 14 + 31 - 53 = -30$

Если сумма заключена в скобки и перед скобками стоит знак $-$, то знаки слагаемых в скобках меняются на противоположный.

Примеры

Пример 3. $-54 + 275 - 12 = -(+54 - 275 + 12) = -(-209) = 209$

Пример 4. $6 - 8 + 10 = -(6 + 8 - 10)$

Пример 5. $a + b - c = -(a - b + c)$

Упражнения

1. Сначала раскройте скобки, а потом вычислите. *Примечание:* знак + перед скобками не пишется, но он учитывается при раскрытии скобок.

1) $-(43 + 71) + 71$

2) $+(-23 - 510) + 23$

3) $-(-31 + 40) + 40$

4) $0,65 - (18 - 0,35)$

5) $1 - (1 - (1 - 2))$

6) $-1 + (-1 + (-1 + 2))$

2. Раскройте скобки.

1) $+(a + 5 - b)$

2) $-(c + 42)$

3) $1,35 - (1,5 - k)$

4) $a - (-b + 4c - d)$

5) $-(a + b - c - 5)$

6) $a + (-b + 4c - d)$

3. Замените вопросительный знак знаком + или -.

1) $13 ? (15 - 27) = 13 + 15 - 27$

2) $1,8 ? (-12 + 0,4) = 1,8 + 12 - 0,4$

3) $-40,2 ? (5a - 1,84) = -40,2 + 5a - 1,84$

4) $57,8 ? (12n - 0,125) = 57,8 - 12n + 0,125$

4. Раскройте скобки, а затем вычислите.

1) $+(84 - 208 + 25)$

2) $-(59 - 69) - 29$

3) $+(86 - 98) + 42$

4) $-(284 - 49 - 244)$

5) $-(45 - 69 - 21)$

6) $+(-38 - 410) + 38$

5. Раскройте скобки, а затем вычислите.

1) $(119 + 141) - (-59 + 119)$

2) $(325 + 219) + (-50 + 110)$

3) $(-228 - 215) - (-28 + 315)$

6. Найдите верный ответ.

$+(a + b + c)$	A	$a - b - c$
$-(a + b + c)$	B	$-a - b + c$
$-(a - b - c)$	C	$a - b + c$
$+(-a - b + c)$	D	$-a + b - c$
$-(-a + b - c)$	E	$-a + b + c$
$-(a - b + c)$	F	$a + b + c$
$-(-a - (-b) + c)$	G	$-a - b - c$

7. Назовите слагаемые и отделите их.

1) $2a - 5b + 3$

2) $x - 5y + z - 8$

3) $a - b + c - d$

4) $\frac{1}{3}a - \frac{2}{5}b + 0,3c - d$

8. Раскройте скобки и упростите.

1) $(-a + b) - (a - b)$

2) $x - (x + y)$

3) $5m - (m - 2)$

4) $p - (t - (p - t))$

5) $(-a + b) - (2a - b)$

6) $x - (-(5x + 4y) + 8y)$

7) $5m - (2m - 5)$

8) $3p - (t - (p - 2t))$

9. Заключите все слагаемые, начинающиеся с числа m или $(-m)$, в скобки, поставив перед скобкой знак $+$.

Образец: $-2a + 5b + m - 4n = -2a + 5b + (m - 4n)$

1) $3a - 0,1b - m + 0,1n$

2) $1 + m - 4k - \frac{2}{3}t$

3) $a + b - 2c + m - n + 5$

4) $1\frac{1}{5}c - m + 2\frac{1}{3}b - 0,8c$

10. Заключите все слагаемые, начинающиеся с числа m или $(-m)$, в скобки, поставив перед скобкой знак $-$.

Образец: а) $5a - b + m + n - k = 5a - b - (-m - n + k)$

б) $2a - b - m + n - c + d = 2a - b - (m - n + c - d)$

1) $p + q + m - n + 6$

2) $b - 2c - m + 3n - 7$

3) $2k - 5l + m + 4n + 3$

4) $11q - 10r - m - k + 2l$

5) $p + m - 7q - n + 8$

6) $b - m - 5c + 2n - 1$

11. Составив формулу, продолжите числовой ряд.

Образец: 7, 9, 11, 13,... Формула: $2n + 5$

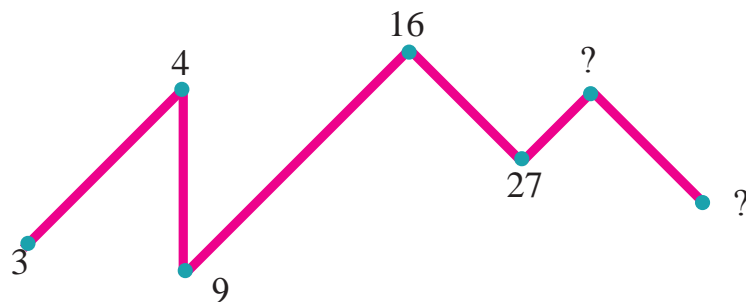
1) 2, 4, 6, 8,...

2) 7, 11, 15 19,...

3) 3, 6, 9, 12,...

4) 4, 7, 10, 13,...

12. Какие цифры нужно поставить вместо вопросительного знака?



СВОЙСТВА АРИФМЕТИЧЕСКИХ ДЕЙСТВИЙ

Как и в других областях математики, в алгебре необходимо следовать правилам.

Сложение и произведение

1) **Перестановочное свойство:**

$$a + b = b + a$$



$$a \cdot b = b \cdot a$$

2) **Свойство группировки:**

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$



$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = b \cdot (a \cdot c)$$

3) **Распределительное свойство умножения относительно сложения и вычитания:**

$$a(b + c) = ab + ac$$

$$a(b - c) = ab - ac$$

Использование свойств арифметических действий позволяет сначала упростить алгебраическое выражение, а затем легко вычислить его значение.

Примеры

- 1) $12 + 33 = 33 + 12$
- 2) $55 + 82 + 45 = (55 + 82) + 45 = (55 + 45) + 82 = 55 + (82 + 45) = 182$
- 3) $14 \cdot 20 = 20 \cdot 14$
- 4) $4 \cdot 25 \cdot 37 = (4 \cdot 25) \cdot 37 = (4 \cdot 37) \cdot 25 = 4 \cdot (25 \cdot 37) = 370$
- 5) $7 \cdot (111 + 8) = 7 \cdot 111 + 7 \cdot 8 = 777 + 56 = 833$
- 6) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = (1 + 9) + (2 + 8) + (3 + 7) + (4 + 6) + 5 =$
 $= 10 + 10 + 10 + 10 + 5 = 40 + 5 = 45$
- 7) $55 + 82 + 45 + 18 = (55 + 45) + (82 + 18) = 100 + 100 = 200$
- 8) $(95 + 19) + (5 + 31) = (95 + 5) + (19 + 31) = 100 + 50 = 150$
- 9) $145 \cdot 49 + 145 \cdot 51 = 145 \cdot (49 + 51) = 145 \cdot 100 = 14\,500$
- 10) $25 \cdot 712 \cdot 4 = (25 \cdot 4) \cdot 712 = 100 \cdot 712 = 71\,200$

Вычитание и деление

1) Чтобы вычесть из числа a число b , достаточно к числу a прибавить число, противоположное b :

$$a - b = a + (-b)$$

2) Деление можно заменить умножением на число, обратное делителю:

$$a : b = \frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$$

Примеры

Пример 1. Если к некоторому задуманному числу прибавить 20, получится 45. Найдите задуманное число.

Способ 1:

$$\begin{aligned}x + 20 &= 45 \\x &= 45 - 20 \\x &= 25\end{aligned}$$

Способ 2:

$$\begin{aligned}x + 20 &= 45 \\x + 20 + (-20) &= 45 + (-20) \\x &= 45 + (-20) \\x &= 25\end{aligned}$$

Пример 2.

$$30 : 45 = \frac{30}{45} = \frac{2 \cdot \cancel{30}}{\cancel{45}_3} = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Упражнения

1. Вычислите числовое выражение удобным способом, используя свойства арифметических операций.

1) $28 \cdot 45 + 28 \cdot 55$

2) $2,5 \cdot 7,2 + 2,5 \cdot 2,8$

3) $72 \cdot 139 - 72 \cdot 39$

4) $13,5 \cdot 3,1 - 3,1 \cdot 10,5$

5) $124 - 42 + 226 - 18$

6) $2,51 - 4,41 + 3,49 - 6,59$

7) $91 + 117 + 9 + 83$

8) $31,11 + 42,89 - 1,8 - 5,2$

2. Упростите выражения.

1) $5x - 4y + 17x - 4y$

2) $4a - 2b + a - b$

3) $12a - 5b - 2a - b$

4) $5x + 8y - 9y + x$

5) $4a - 11a + 9a - b$

6) $7b + 7a - 4b + 3b$

3. Упростите выражения.

1) $7,5a - 6,8b - 7,5a - 6,8b$

2) $a - 3a + 4,7 - 7,2$

3) $2,1a - 1,7c + 2,7a - 2,2c$

4) $-9,8c + 5,1d + 1,1c + 4,2d + 4c$

5) $4,2a + 1,8b - 2,6a + 3,4a$

6) $-8,9a + 1,5b - 1,1a - 5,5b$

4. Найдите значение числового выражения.

1) $2,17 + (3,2 - 0,17)$

2) $\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{2}\right)$

3) $9,49 - (1,5 - 0,01)$

4) $\left(1\frac{1}{3} + 4\frac{1}{2}\right) : \frac{5}{6}$

5) $0,94 - (-1,06 - 98)$

6) $\left(3\frac{1}{4} + 2\frac{1}{3}\right) : 11\frac{1}{6}$

СТЕПЕНЬ С НАТУРАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Вспоминаем

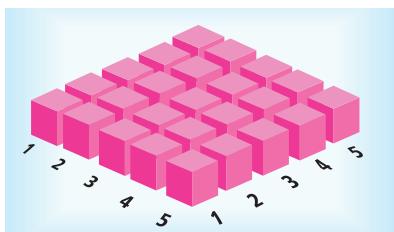
1) Сумму одинаковых чисел можно заменить умножением:

$$\underbrace{4 + 4 + 4 + 4 + 4}_{5 \text{ раз}} = 4 \cdot 5$$

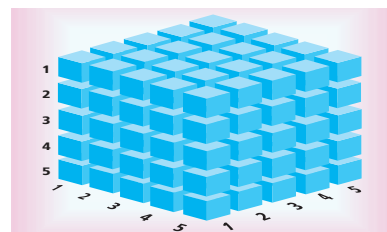
$$\underbrace{a + a + a + \dots + a + a}_{n \text{ раз}} = na$$

2)

$$5 \cdot 5 = 5^2 = 25$$



$$5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = 125$$



Запомните!

Степень числа a с натуральным показателем n равна произведению n множителей, каждый из которых равен a :

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ раз}} = a^n$$

основание степени $\leftarrow a^n \rightarrow$ показатель степени

Умножение одинаковых чисел можно заменить новым действием – **возведением в степень**:

$$\underbrace{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 7}_{8 \text{ раз}} = 7^8$$

$$12 = 12^1$$

$$2^5 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{5 \text{ раз}} = 32$$

$$\underbrace{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6}_{7 \text{ раз}} = 6^7$$

$$\underbrace{\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} \cdot \dots \cdot \frac{1}{7}}_{11 \text{ раз}} = \left(\frac{1}{7}\right)^{11}$$

Число в первой степени равно самому числу: $a^1 = a$

$$4^1 = 4$$

$$21^1 = 21$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^1 = \frac{3}{5}$$

$$(-0,5)^1 = -0,5$$

Степени числа 10:

$$10^1 = 10$$

$$10^4 = 10\,000$$

$$10^7 = 10\,000\,000$$

$$10^2 = 100$$

$$10^5 = 100\,000$$

$$10^8 = 100\,000\,000$$

$$10^3 = 1\,000$$

$$10^6 = 1\,000\,000$$

$$10^9 = 1\,000\,000\,000$$

Примеры

$$2^1 = 2$$

$$2^2 = 2 \cdot 2 = 4$$

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

$$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

$$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$$

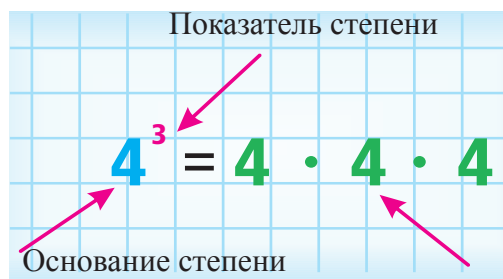
$$2^6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$$

$$2^7 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 128$$

$$2^8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 256$$

$$2^9 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 512$$

$$2^{10} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 1024$$



~~$$4^3 = 4 \cdot 3$$~~

Упражнения

1. Запишите сумму в виде произведения.

1) $7 + 7 + 7 + 7 + 7$

2) $a + a + a + a$

3) $d + d + d + d + d + d + d$

4) $2x + 2x + 2x + 2x$

5) $5ab + 5ab + 5ab + 5ab + 5ab$

6) $(a - 2b) + (a - 2b) + (a - 2b)$

7) $\underbrace{10 + 10 + 10 + \dots + 10}_{43 \text{ раз}}$

8) $\underbrace{k + k + k + \dots + k}_{n \text{ раз}}$

2. Запишите произведение в виде степени.

1) $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$

2) $\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5}$

3) $(-5,1) \cdot (-5,1) \cdot (-5,1) \cdot (-5,1) \cdot (-5,1)$

4) $x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$

5) $\frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y}$

6) $\frac{3a}{4} \cdot \frac{3a}{4} \cdot \frac{3a}{4} \cdot \frac{3a}{4} \cdot \frac{3a}{4}$

3. Упростите, используя обозначение степени.

1) $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$

2) $a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b$

3) $2 \cdot 2 \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b$

4) $x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y \cdot z \cdot z \cdot z$

5) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$

6) $\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{c}{d}$

7) $(x - y) \cdot (x - y) \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{a}{c}$

8) $1,2 \cdot 1,2 \cdot 1,2$

9) $(-5,1) \cdot (-5,1) \cdot x \cdot x$

10) $0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,6 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b$

11) $(5a - 4b) \cdot (5a - 4b)$

12) $a \cdot a \cdot a + b \cdot b \cdot b \cdot b + c \cdot c \cdot c \cdot c \cdot c$

13) $a \cdot a + b \cdot b + c \cdot c$

4. Упростите выражения.

1) $7 \cdot 7 + a \cdot a \cdot a + b \cdot b \cdot b \cdot b$

2) $\underbrace{x \cdot x + x \cdot x + x \cdot x + \dots + x \cdot x}_{n \text{ раз } x \cdot x}$

3) $\underbrace{x \cdot x + x \cdot x + x \cdot x + \dots + x \cdot x}_{x \text{ раз } x \cdot x}$

4) $\underbrace{a \cdot a \cdot a + a \cdot a \cdot a + \dots + a \cdot a \cdot a}_{b \text{ раз } a \cdot a \cdot a}$

5) $\underbrace{a \cdot a \cdot a + a \cdot a \cdot a + a \cdot a \cdot a + \dots + a \cdot a \cdot a}_{a \text{ раз } a \cdot a \cdot a}$

6) $\underbrace{a \cdot a + a \cdot a + a \cdot a + \dots + a \cdot a}_{b \text{ раз } a \cdot a} + \underbrace{b \cdot b \cdot b + b \cdot b \cdot b + \dots + b \cdot b \cdot b}_{a \text{ раз } b \cdot b \cdot b}$

5. Вычислите.

1) 5^2

2) 6^3

3) 2^4

4) 2^7

5) 1^{10}

6) $(-1)^{12}$

7) $\left(\frac{2}{3}\right)^3$

8) $\left(-\frac{1}{4}\right)^4$

9) $(2,5)^2$

10) $(-2,5)^2$

11) -2^5

12) $(-2)^5$

Запомните!

Каждое число больше 10 можно записать в виде $a \cdot 10^n$, где $1 < a < 10$, n — натуральное число. Такая запись называется **стандартной записью числа**.

При изучении физики и химии, расчётах на микрокалькуляторе и во многих других случаях используется стандартная форма записи чисел..

Масса Земли:

24 23 22 21 20 19 18 17 16 15 14 13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1


Стандартная запись числа

$$5,9742 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

Примеры

Пример 1. $52 = 5,2 \cdot 10 = 5,2 \cdot 10^1$

Пример 2. $73 = 7,3 \cdot 10 = 7,3 \cdot 10^1$

Пример 3. $625 = 6,25 \cdot 10 = 6,25 \cdot 10^2$

Пример 4. $3147 = 3,147 \cdot 10^3$

Пример 5. $516,444 = 5,16444 \cdot 10^2$

Пример 6. $3\,265\,400 = 3,2654 \cdot 10^6$

Пример 7. Расстояние от Земли до Солнца 150 000 000 km или $1,5 \cdot 10^8$ km.

Пример 8. Масса ташкентской телевышки $6 \cdot 10^6$ kg или 6 000 000 kg.

Запомните!

Возведение в степень – действие III степени. Если в выражении нет скобок, то сначала выполняется третья степень, затем вторая степень (умножение и деление) и, наконец, первая степень (сложение и вычитание).

$$2 \cdot 5^2 + 4 \cdot 3^3 = 2 \cdot 25 + 4 \cdot 27 = 50 + 108 = 158$$

Запись чисел с использованием степеней используется во многих случаях, например, для записи натуральных чисел в виде сумм разрядных слагаемых:

$$2\ 021 = 2 \cdot 1000 + 0 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 1 = 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 1$$

Упражнения

6. Запишите данные числа в стандартном виде.

- 1) 17 2) 128 3) 75716
4) 12 000 000 5) 128 000 000 000 6) 74,28

7. Запишите числа, заданные в стандартном виде, в полной форме.

- 1) $2,5 \cdot 10^2$ 2) $3,45 \cdot 10$ 3) $5,567 \cdot 10^3$ 4) $6 \cdot 10^6$

8. Запишите числа в виде суммы разрядных слагаемых.

- 1) 2 715 2) 10 785 3) 475 064 4) 89 412 141

9. Записать числа, представленные в виде суммы разрядных слагаемых.

- 1) $4 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 2$ 2) $7 \cdot 10^4 + 6 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^1 + 7$
3) $8 \cdot 10^6 + 3 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 4$ 4) $9 \cdot 10^6 + 9$

10. Вычислите.

- 1) $(0,3)^3$ 2) -5^4 3) -5^3 4) $-(-2)^5$
5) $(-5)^2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)$ 6) $(-2)^3 \cdot \frac{3}{8}$ 7) $-\frac{3}{5} \cdot (-5)^3$ 8) $-\frac{3}{18} \cdot (-6)^3$

11. Вычислите.

- 1) $(-1)^{19} + (-1)^{20} + (-1)^{21}$ 2) $(-1)^{23} - (-1)^{24} - (-1)^{25}$
3) $(-1)^{2021} - (-1)^{2022} + (-1)^{2023}$ 4) $-(-1)^{49} - (-1)^{58} - (-1)^{79}$

12. Вычислите значение выражения x^2 для значений x , приведённых в таблице.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
x^2									

13. Найдите неизвестные.

- 1) $10^n = 1\ 000$ 2) $4^k = 64$ 3) $30^m = 30$ 4) $(-5)^t = -125$

14. Вычислите значение выражения x^3 для значений x , приведённых в таблице.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
x^3									

15. Вычислите значение выражения $x^2 - x^3$ для значений x , приведённых в таблице.

x	0	-2	3	-4	10	-6	-0,5	1,2	$\frac{3}{4}$	$-1\frac{3}{5}$
$x^2 - x^3$										

16. Данные числа представьте в стандартном виде.

- 1) Среднее расстояние от Меркурия до Солнца 58 миллионов km.
- 2) Среднее расстояние от Венеры до Солнца 108,3 миллиона km.
- 3) Среднее расстояние от Земли до Солнца составляет 150 миллионов km.
- 4) Среднее расстояние от Марса до Солнца составляет 227,94 миллиона km.
- 5) Среднее расстояние от Юпитера до Солнца составляет 778,6 миллиона km.
- 6) Среднее расстояние от Сатурна до Солнца составляет 1429,3 миллиона km.
- 7) Среднее расстояние от Урана до Солнца 2872 миллиона km.
- 8) Среднее расстояние от Нептуна до Солнца 4498,6 миллиона km.

СВОЙСТВА СТЕПЕНИ С НАТУРАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Запомните!

Свойство 1.

При умножении степеней с одинаковыми основаниями основание остаётся прежним, а показатели степеней складываются.

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$$

Свойство 2.

При делении степеней с одинаковыми основаниями основание остаётся прежним, а показатели степеней вычитаются.

$$x^m : x^n = x^{m-n}, \quad m > n, x \neq 0.$$

Свойство 3.

При возведении степени в степень основание остается прежним, а показатели степеней перемножаются.

$$(x^m)^n = x^{mn}$$

Свойство 4.

При возведении произведения в степень каждый множитель возводится в эту степень.

$$(xy)^n = x^n y^n$$

Свойство 5.

При возведении в степень дроби в эту степень возводятся числитель и знаменатель дроби.

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}, \quad y \neq 0$$

$$6^2 \cdot 6^3 = 6^5 \quad 2+3=5$$

$$4^4 \div 4^2 = 4^2 \quad 4-2=2$$

Таблица степеней

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3^n	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049
4^n	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144	
5^n	25	125	625	3125	15625	78125	390625		
6^n	36	216	1296	7776	46656	279936			
7^n	49	343	2401	16807	117649				
8^n	64	512	4096	32768					
9^n	81	729	6561	59049					

$3^7 = 2187$

$5^5 = 3125$

$8^3 = 512$

Примеры

Пример 1. $\frac{2^9 \cdot (2^5)^6 \cdot (2^4)^5}{64^9} = \frac{2^9 \cdot 2^{30} \cdot 2^{20}}{64^9} = \frac{2^{9+30+20}}{(2^6)^9} = \frac{2^{59}}{2^{54}} = 2^{59-54} = 2^5 = 32$

Пример 2. $(-1)^9 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$

Пример 3. $0^5 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$

Упражнения

1. Запишите произведение в виде степени.

1) $5^7 \cdot 5^4$

2) $a^6 \cdot a^9$

3) $(3b)^5 \cdot (3b)^{11}$

4) $a^3 \cdot a^4 \cdot a^5$

5) $(-2,6a)^7 \cdot (-2,6a)^6$

6) $c^3 \cdot c^4 \cdot c^{10}$

7) $\left(\frac{1}{3}\right)^{10} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{17}$

8) $\left(-1\frac{3}{4}\right)^8 \cdot \left(-1\frac{3}{4}\right)^{10}$

9) $x^8 \cdot x^9 \cdot x^3$

10) $c^n \cdot c^{2n} \cdot c^{5n}$

11) $a^{3n} \cdot a^{6n} \cdot a^{9n}$

12) $(-x)^9 \cdot (-x)^{18}$

2. Запишите частное в виде степени.

1) $8^{15} : 8^3$

2) $5^{13} : 5^9$

3) $3^4 : 3$

4) $(0,8)^9 : (0,8)^4$

5) $\left(-\frac{4}{5}\right)^7 : \left(-\frac{4}{5}\right)$

6) $\left(\frac{a}{b}\right)^7 : \left(\frac{a}{b}\right)$

$$7) (ab)^{19} : (ab)^{10} \qquad 8) \left(\frac{3a}{5b}\right)^{43} : \left(\frac{3a}{5b}\right)^9$$

3. Запишите в виде произведения двух степеней с одинаковым основанием.

$$1) x^{10} \qquad 2) a^5 \qquad 3) (-y)^{11} \qquad 4) c^{30} \qquad 5) (-11x)^{19}$$

$$6) \left(\frac{2}{3}\right)^5 \qquad 7) (1,2)^{13} \qquad 8) (4a)^{20} \qquad 9) (ab^4)^3 \qquad 10) (-5xy)^{25}$$

4. Запишите выражение в виде степени с основанием a .

$$1) (a^7)^8 \qquad 2) (a^9)^{11} \qquad 3) (a^7)^{13} \qquad 4) (a^2)^4 \cdot a^9$$

$$5) a^8 \cdot (a^3)^{11} \qquad 6) (a^3)^5 \cdot (a^6)^8 \qquad 7) a^{21} \cdot a^{24} \qquad 8) (a^9)^3 \cdot (a^{11})^8$$

5. Возведите дробь в степень.

$$1) \left(\frac{4}{5}\right)^6 \qquad 2) \left(\frac{3}{7}\right)^{10} \qquad 3) \left(\frac{11}{17}\right)^8 \qquad 4) \left(\frac{a}{b}\right)^{21} \qquad 5) \left(\frac{b}{c}\right)^{19}$$

6. Запишите числа в виде степени с основанием 2.

$$1) 64 \qquad 2) 32 \qquad 3) 256 \qquad 4) 16$$

$$5) 2048 \qquad 6) 1024 \qquad 7) 2^5 \cdot 16 \qquad 8) 2^6 \cdot 32$$

$$9) 64 \cdot 2^{10} \qquad 10) 2^a \cdot 32 \qquad 11) 2^{11} \cdot 2^5 \cdot 64 \qquad 12) 16 \cdot 64 \cdot 256$$

7. Возведите произведение в степень.

$$1) (5 \cdot 7)^3 \qquad 2) (6 \cdot 1,2)^5 \qquad 3) \left(2 \frac{1}{5} \cdot 7\right)^6 \qquad 4) (5x)^7 \qquad 5) (-3a)^6$$

8. Запишите числа в виде степени с основанием 3.

$$1) 3 \qquad 2) 9 \qquad 3) 27 \qquad 4) 81 \qquad 5) 729 \qquad 6) 3 \cdot 3^{10}$$

9. Вычислите:

$$1) \frac{2 \cdot 3^{10}}{3^7} \qquad 2) \frac{3 \cdot 2^{15}}{2^{14}} \qquad 3) \frac{3^6 \cdot 5^8}{3^4 \cdot 5^7} \qquad 4) \frac{7^9 \cdot 7^{13}}{7^6 \cdot 7^{14}} \qquad 5) \frac{5^9 \cdot 5^{19}}{5^{25}}$$

$$6) \frac{2^{17} \cdot 3^{41}}{2^{15} \cdot 3^{39}} \qquad 7) \frac{6^8}{2^{17} \cdot 3^7} \qquad 8) \frac{3^{10} \cdot 2^9}{6^9} \qquad 9) \frac{6^{13}}{(-6)^{12}} \qquad 10) \frac{3^8 \cdot 5^8}{15^7}$$

$$11) \frac{(-3)^{10}}{(-3)^7} \qquad 12) \frac{(-3)^{10}}{3^7} \qquad 13) -\frac{3^8}{(-3)^8} \qquad 14) \frac{(-5)^9}{(-5)^7} \qquad 15) \frac{(-8)^{11}}{8^{10}}$$

10. При каких значениях n выполняются равенства?

$$1) 2^n = 64 \qquad 2) 3^n = 729 \qquad 3) 2^n = 256 \qquad 4) 3^n = 243$$

$$5) 2^n \cdot 3^n = 36 \qquad 6) 2^n \cdot 3^n = 216 \qquad 7) (3^n)^3 = 27 \qquad 8) (2^n)^5 = 1024$$

11. Запишите выражение в виде степени с показателем степени 3.

- 1) a^{63} 2) b^{99} 3) c^{12} 4) 5^{24} 5) a^3b^6
 6) $a^3b^6c^9$ 7) $a^{12}b^{24}c^{36}$ 8) $27a^{15}$ 9) $125a^{18}b^{33}$ 10) $-0,008x^{12}y^{18}$

12. Вычислите.

- 1) $0,5^4 \cdot 2^4$ 2) $(-0,125)^3 \cdot (-8)^3$ 3) $\left(\frac{3}{5}\right)^{10} \cdot \left(1\frac{2}{3}\right)^{10}$ 4) $\left(-\frac{8}{27}\right)^6 \cdot \left(-3\frac{3}{8}\right)^6$
 5) $\frac{3^5 \cdot 2^6}{6^5}$ 6) $\frac{3^8 \cdot 2^6}{6^6}$ 7) $\frac{15^{13}}{5^{11} \cdot 3^{12}}$ 8) $\frac{2^9 \cdot (2^5)^6 \cdot (2^4)^5}{64^9}$

13. Запишите дроби в виде степени.

- 1) $\frac{3^6}{5^6}$ 2) $\frac{2^{10}}{7^{10}}$ 3) $\frac{8^{15}}{9^{15}}$ 4) $\frac{5^{13}}{a^{13}}$ 5) $\frac{x^{30}}{y^{30}}$

14. Найдите числовое значение выражения.

- 1) $\frac{a^2}{a^2 - 1}$, если $a = -3$ 2) $\frac{a^2 + b^2}{4}$, если $a = -1, b = 2$
 3) $\frac{a^3 - b^3}{a + b}$, если $a = -1, b = 2$ 4) $\frac{2a - 5}{a^3}$, если $a = 4$

15. Запишите выражение в виде степени.

- 1) $5^{n+2} \cdot 5^{2n+1}$ 2) $3^{n-2} \cdot 3^{3n-4}$ 3) $2^{n-1} \cdot 4^{n-2} \cdot 8^{n-3}$ 4) $3^{2n+6} : 3^{n+8}$
 5) $9^{3n+4} : 27^{2n+1}$ 6) $a^{5n-3} \cdot a^{4n+1}$ 7) $a^{2n+9} \cdot a^{3n+7}$ 8) $b^{k+5} : b^{k+4}$

16. При каком значении n выполняется равенство?

- 1) $(3^n)^4 = 3^{20}$ 2) $(5^2)^n = 5^{18}$ 3) $4^{6n} = 2^{60}$
 4) $36^n = 216^8$ 5) $49^{5n} = 343^{20}$ 6) $2^5 \cdot (2^6)^3 = 2^n$
 7) $4^3 \cdot 8^4 \cdot 16^5 = 2^n$ 8) $a^4 b^4 c^4 = (abc)^n$ 9) $a^{15} b^{18} c^{21} = (a^5 b^6 c^7)^n$

17*. Сравните.

- 1) 12^5 и 24^4 2) 5^{10} и 10^5 3) 100^{200} и 200^{100} 4) 3^{15} и 7^{10}

18. Запишите число в стандартном виде.

- 1) 1 800 2) 27 900 3) 256 000
 4) Расстояние от Земли до Солнца 149 500 000 km

19*. Сколькими нулями заканчивается число?

- 1) $720 \cdot 1620 \cdot 625$ 2) $280 \cdot 280 \cdot 1875 \cdot 900$

20*. Найдите последнюю цифру выражения.

- 1) $1245 + 5647$ 2) $145781 + 659874$
 3) $455412 - 6542$ 4) $45781147 - 451259$
 5) $4152547 \cdot 145218$ 6) $41526 \cdot 415879$

ОДНОЧЛЕН И ЕГО СТАНДАРТНЫЙ ВИД

Вспоминаем

Найдём объём кузова грузовика:

$$V = a \cdot b \cdot c$$

Это выражение можно записать в виде $3abc$.

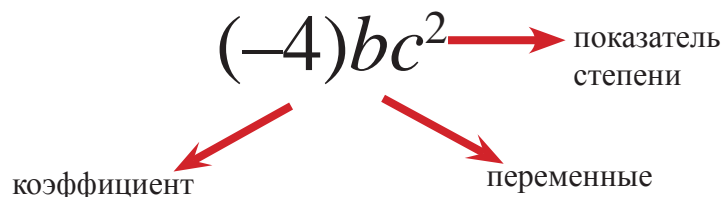
3 – числовой множитель
 abc – буквенные множители.



Запомните!

Алгебраическое выражение, состоящее из произведения числовых и буквенных множителей, называется **одночленом**. Например, эти выражения – одночлены:

$$5 \quad 2a \quad 5ab \cdot 5c \quad -2a \quad 1\frac{7}{9}ab^3 \quad (-4)bc^2$$



Коэффициент

Если выражение состоит из произведения числа и нескольких букв, то множитель, стоящий перед буквами, называется **коэффициентом**.

Обычно коэффициент ставится перед буквенным множителем. При умножении между коэффициентом и буквами нет знака умножения: $a2b$, $-ab3$.

Пример

$100n$ – коэффициент 100

$-3ab$ – коэффициент (-3)

px – коэффициент 1

$-b$ – коэффициент (-1)

$\frac{3}{4}a^7b$ коэффициент одночлена $\frac{3}{4}$

Стандартный вид одночлена

Для приведения заданного выражения к стандартному виду числовые и буквенные множители группируются отдельно и находится их произведение. Найденное число записывается перед буквенными множителями.

$$6a \cdot 2b \quad \longrightarrow \quad 6 \cdot a \cdot 2 \cdot b \quad \longrightarrow \quad 12 \cdot ab = 12ab$$

1) $-0,1a \cdot (-10b) = -0,1 \cdot (-10) \cdot ab = 1ab = ab$ – стандартный вид одночлена.

2) $\frac{1}{2}a \cdot \left(-\frac{4}{5}b^2\right) \cdot 3ac = -\frac{6}{5}a^2b^2c$
 $-\frac{6}{5}a^2b^2c$ – стандартный вид одночлена.

Упражнения

1. Приведите одночлен в стандартный вид.

1) $\frac{1}{4}a^5 \cdot 4a^5b^2a$

2) $ab^2ba^3b^2$

3) $64a^5 \cdot \frac{7}{16}b^4 \cdot \frac{2}{49}ab$

4) $100x \cdot 0,01x^5y^2$

5) $abc^2b^6ca^2cc$

6) $a^7b^2ab^4b^2a^4b$

7) $5ab \cdot 0,7bc \cdot 40ac$

8) $-x^3y \cdot 3a^2y^4$

9) $-0,45xy \cdot \left(1\frac{1}{9}xz\right) \cdot 9xy$

10) $0,6a^3b(-0,5ab^3)$

2. Приведите одночлен в стандартный вид, затем найдите его числовое значение.

1) $\frac{1}{2}a^2 \cdot 4a^3b$, если $a = 3, b = -2$

2) ab^2a^2bab , если $a = -3, b = 2$

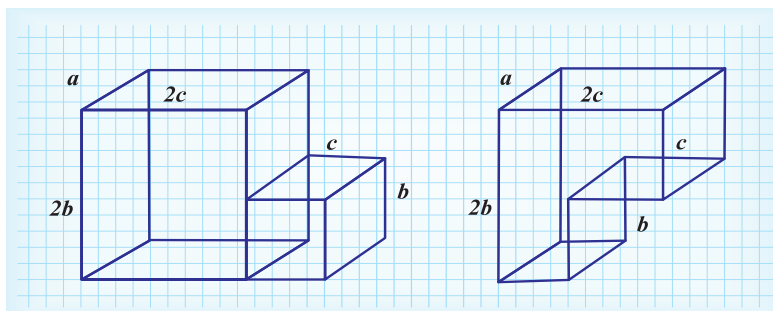
3) $5a^2 \cdot \frac{8}{25}b^2 \cdot 1\frac{1}{4}ab$, если $a = 2, b = 5$

4) $0,2x^{10}y \cdot 0,4x^7y^3$, если $x = -1, y = -5$

5) $abc^2ab^2ca^2bc$, если $a = 1, b = -2, c = -3$

6) $a^2b^4ab^2a^4b$, если $a = -5, b = -0,2$

3. Найдите объёмы фигур и приведите результат к стандартному виду.



УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ ОДНОЧЛЕНОВ

Умножение одночленов

Чтобы упростить алгебраическое выражение, нужно написать его как можно короче и упорядоченнее.

При умножении одночленов в стандартной записи мы сначала умножаем числа, затем буквы.

$$(4a^2bc^3) \cdot (3ab^4cd) = 4a^2bc^3 \cdot 3ab^4cd = 4 \cdot 3 \cdot a^{2+1} \cdot b^{1+4} \cdot c^{3+1} \cdot d = 12a^3b^5c^4d$$

Умножение одночленов аналогично приведению их от нестандартного вида к стандартному. При умножении сначала записывается коэффициент, а потом буквы в алфавитном порядке.

Упражнения

1. Выполните умножение одночленов.

1) $(3a)(4b)$

2) $b^3 \cdot (5b^2)$

3) $(4a) \cdot (10b)$

4) $(-2a) \cdot (-8b)$

5) $(-a) \cdot (7b)$

6) $(-6m^4) \cdot (5n^4)$

7) $\frac{1}{2}x \cdot \left(-\frac{1}{3}y\right)$

8) $(-8m^3) \cdot (-7m^3)$

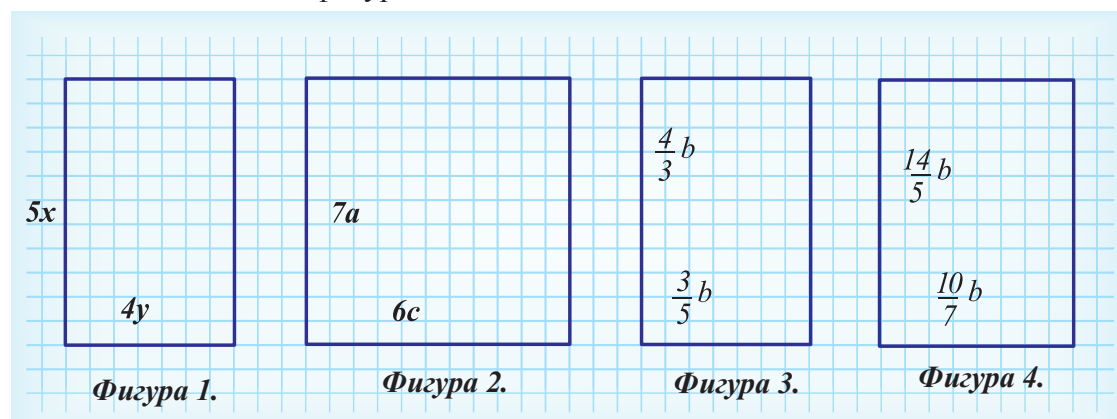
9) $(-4xy) \cdot (-5x^2y^2)$

10) $(ab) \cdot (bc)$

11) $(2,5a^8) \cdot (-4a^9)$

12) $(-abc^3)(-a^3bc)$

2. Найдите площади фигур.



3. Выполните действия.

1) $(-5a)^3 \cdot (-4a)$

2) $(-a)^5 \cdot (-a)^4$

3) $(a^2b^3c^3)^9 \cdot (a^3b^7c^2)^2$

4) $(a^{10}b^9c^8)^5 \cdot (a^9b^8c^8)^4$

5) $(2,5a^7)^2 \cdot (2a^{11})^4$

6) $(-2a^2b)^2 \cdot (-2ab^2)^3$

7) $(8a)^3 \cdot (5a^4) \cdot (2a^7)$

8) $(abc^3)^3 \cdot (ab^3c^4) \cdot (a^3bc)^5$

4. Умножьте одночлены.

1) $(a^6)(b^6)(a^7b^8)$

2) $(a^{10}b^9) \cdot (a^{13}b^7)$

3) $(-5a^4)(0,2b^3)(-8a^5b^7)$

4) $(1,2x^9) \cdot (1,3x^{10})$

5) $(2a)(3a^2)(4a^3)(5a^4)$

6) $(0,6m^4)(0,8n^4)$

Деление одночленов

При делении одночлена на одночлен коэффициент делимого делится на коэффициент делителя, затем из показателей степени соответствующих буквенных выражений делимого вычитаются показатели степени соответствующих буквенных выражений делителя.

$$(3a^4b^3c) : (2ab^2) = (3 : 2) \cdot (a^4 : a) \cdot (b^3 : b^2) \cdot c = 1\frac{1}{2}a^3bc$$

Примечание: если показатель степени хотя бы одного из соответствующих буквенных выражений делителя больше показателя степени соответствующего делимого, то результат операции деления не будет одночленом.

Деление одночлена на одночлен можно записать в виде $k : n = \frac{k}{n}$.

Например: $4\frac{1}{3}a^3b^2c : \frac{13}{18}a^2b^2 = \frac{13}{3} \cdot \frac{18}{13} \cdot \frac{a^3b^2c}{a^2b^2} = 6ac$

Упражнения

5. Разделите одночлен на одночлен.

1) $b^{10} : b^7$

2) $y^{16} : y$

3) $x^{19} : x^{11}$

4) $3c : (-2)$

5) $(-0,6a) \cdot 0,3$

6) $(36a^7) : (18a^3)$

7) $(-6c) : (-4c)$

8) $(5ab) : (-2a)$

9) $(1,2a^9b^7) : (-0,6a^5b^3)$

6. Какое из приведённых выражений одночлен?

1) $3,4x^2y$

2) $-0,7xy^2$

3) $a(-0,8)$

4) $x^2 + x$

5) x^2x

6) $-\frac{3}{4}m^3nm^2$

7) $a - b$

8) $2(x + y)^2$

7. Приведите одночлен к стандартному виду.

1) $6xy$

2) $-2abc$

3) $0,5m2n$

4) $-bca$

8. Запишите одночлен в виде квадрата другого одночлена.

1) $9x^4$

2) $81x^6$

3) $16y^{10}$

4) $25a^8b^{10}$

5) $36a^{10}b^{12}c^{16}$

6) $a^8b^{16}c^{14}$

9. Приведите одночлен к стандартному виду, найдите его числовое значение.

1) $\frac{1}{6}a^2 \cdot 8a \cdot b$, если $a = 6$, $b = -4$

2) $ab^2a^2b^3$, если $a = -1$, $b = 1$

3) $0,25a^3 \cdot \frac{4}{5}b \cdot 2\frac{1}{2}a^2b$, если $a = -3$, $b = -1$

4) $4x^4y^2 \cdot 0,5x^2y$, если $x = -2$, $y = -4$

5) $a^2bca^2b^2c$, если $a = 1$, $b = -1$, $c = -2$

6) $4a^2b^2 \cdot a^2 \cdot b^3$, если $a = -4$, $b = -0,25$

10. Разделите одночлен на одночлен.

$$1) (-2c) : 0,1c$$

$$2) \left(\frac{1}{4} a\right) : \left(\frac{3}{4} a\right)$$

$$3) (30m^6 n^9) : (-0,3m^5 n^3)$$

$$4) (42a^9) : (-6a^4)$$

$$5) (0,2x^6 y^7) : (-0,01x^4 y^6)$$

$$6) (0,9x^5 y^4) : (-0,2x^5 y)$$

$$7) \left(2\frac{3}{5} a^4 b^9\right) : \left(1\frac{1}{25} a^2 b^6\right)$$

$$8) (30ab) : (-40ab)$$

11. Выполните умножение.

$$1) -\frac{1}{2} a^3 b \cdot (-a^2 b^4) \cdot 4b^3 a$$

$$2) 2\frac{1}{4} c^3 d \cdot \left(-\frac{2}{3} cd^2\right)^2$$

$$3) 8a^2 b \cdot \left(-\frac{1}{4} ab^6\right) \cdot \left(-\frac{1}{2} b^5\right) a^3$$

$$4) 3\frac{3}{8} c^3 d^2 \cdot \left(-\frac{2}{3} c^2 d^2\right)^3$$

12. Найдите значение одночлена.

$$1) 2x^2 y^3, \text{ если } x = -0,5; y = -2$$

$$2) 3a^3 b^2, \text{ если } a = -3; b = -\frac{1}{3}$$

13. Найдите значение одночлена.

$$1) -200xy^3, \text{ если } x = -\frac{1}{2}; y = -0,1$$

$$2) -800a^3 b, \text{ если } a = -\frac{1}{2}; b = -0,1$$

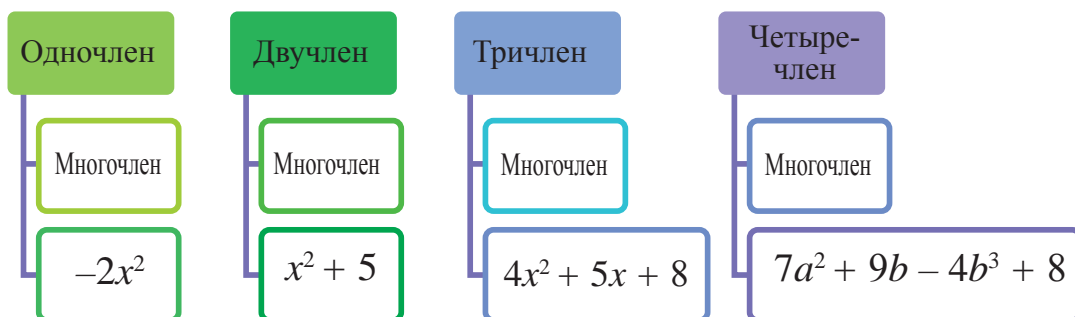
МНОГОЧЛЕНЫ

Запомните!

Алгебраическую сумму нескольких одночленов называют **многочленом**.
Каждый одночлен, входящий в состав многочлена, называется его **членом**.

$$\underbrace{-2a^4b + ab^2 + \frac{1}{3}c}_{\text{Многочлен}}$$

$$\underbrace{-2a^4b; ab^2; \frac{1}{3}c}_{\text{Члены многочлена}}$$



Примеры

Пример 1. Составьте из следующих одночленов многочлен: $-5\frac{1}{9}ab^2$; $3a^4$; $-a^2bc$; abc ; $3\frac{2}{5}$.

Их можно записать последовательно следующим образом $-5\frac{1}{9}ab^2 + 3a^4 - a^2bc + abc + 3\frac{2}{5}$.

Пример 2. Представьте многочлен в виде суммы следующих одночленов: $9a^6b^2c - 2a^3bc^4 + 2ab - 5ac$.

$$9a^6b^2c - 2a^3bc^4 + 2ab - 5ac = 9a^6b^2c + (-2a^3bc^4) + 2ab + (-5ac).$$

Пример 3. Упростите многочлен: $3a \cdot 2ab + \frac{1}{4}a^3bc \cdot 2b - 4mn \cdot 2mn^3$.

Каждый член данного многочлена запишите в стандартном виде:

$$3a \cdot 2ab + \frac{1}{4}a^3bc \cdot 2b - 4mn \cdot 2mn^3 = 6a^2b + \frac{1}{2}a^3b^2c - 8m^2n^4$$

Пример 4. Найдите числовое значение многочлена: $2a^3 + 3ab + b^2$, если $a = 0,5$; $b = \frac{1}{3}$

$$2 \cdot (0,5)^3 + 3 \cdot 0,5 \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 2 \cdot 0,125 + 0,5 + \frac{1}{9} = 0,25 + 0,5 + \frac{1}{9} =$$

$$= 0,75 + \frac{1}{9} = \frac{3}{4} + \frac{1}{9} = \frac{27 + 4}{36} = \frac{31}{36}$$

Упражнения

1. Перечислите все одночлены, входящие в многочлен.

1) $-3x^2 + 9x - 5$

2) $7a^2 + \frac{3}{4}b - c$

3) $a^2 - b^2 - \frac{1}{4}c$

4) $-2a + 3b - 5c$

2. Запишите многочлен в виде суммы одночленов.

1) $6a^4 - 8a^3 + 4a^2 - 5$

3) $ab^3 + a^3b - abc$

2) $1,6a^3b - 5ab^2 - 4$

4) $1,6a + 3,4b - 0,2c$

3. Из данных одночленов составьте многочлен.

1) $3x^2, 6x, 9$

2) $a^5, -b^5, c^4$

3) $2x^4, -3x, -8$

4) $-a^7, -b^6, c^4$

4. Преобразовав многочлен, найдите его значение.

1) $-aba + abab - a^2bab^3$, если $a = 1, b = 2$

2) $b^5a^4 \cdot 5 - b^6a^3 \cdot 2 - 2a^4b^7$, если $a = -1, b = -1$

3) $ababab - a^3b^2ab^3 - 3a^4ba^5b^7$, если $a = 2, b = -1$

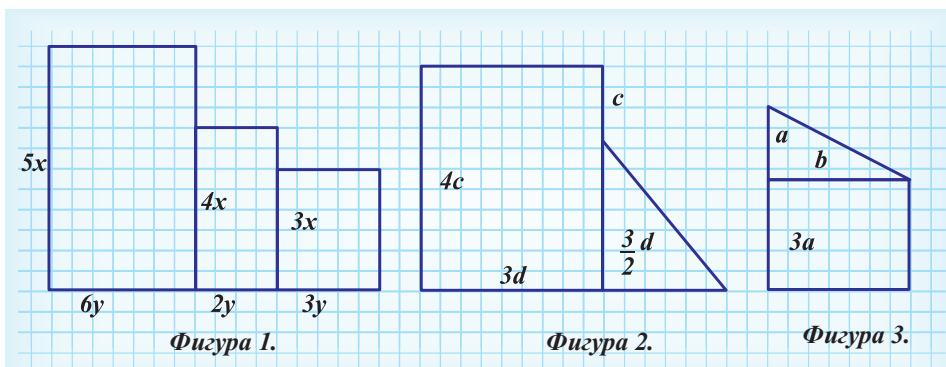
4) $a^3b^7a - a^4bab^2 - aabab^3$, если $a = -2, b = -1$

5. Найдите значение многочлена.

1) $x^3 + 2x^2 + 5y + 1$, если $x = 2$ и $y = 3$

2) $v^4 - d^4$, если $v = 4$ и $d = 3$

6. Найдите площади фигур.



7. Составьте многочлен, используя следующие коэффициенты:

- 1) 1; -4; 7; 0; 0; 1 2) 3; -3; 5; 0; 6; $-\frac{1}{2}$; 0 3) 6; 0; 7; 0; 4

8. Найдите значение многочлена.

- 1) $12(2-p) - 29p - 9(p+1)$, если $p = \frac{1}{4}$ 2) $8x - (3x+1)5x$, если $x = -2$
 3) $(c+2)c - (c+3)c^2$, если $c = -3$ 4) $2(3b+1) - 5$, если $b = -2$

9. Найдите значение многочлена: $6a^2 - 5ab + b^2 - (3a^2 - 5ab + b^2)$, если $a = -\frac{2}{3}$; $b = -3$.

10. Найдите значение многочлена: $-8a^2 - 2ax - x^2 - (-4a^2 - 2ax - x^2)$, если $a = -\frac{3}{4}$, $x = -2$.

11. Найдите площадь фигур.

Рис. 1

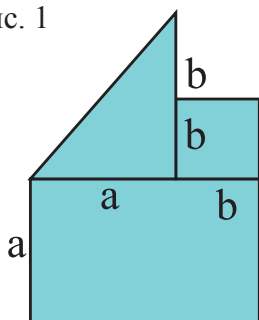
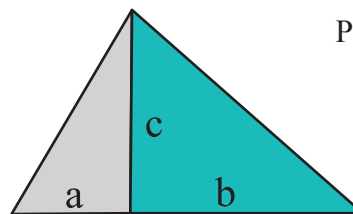


Рис. 2



12. Верны ли выражения? Сделайте вывод и заполните следующий ряд.

$$1^3 + 5^3 + 3^3 = 153$$

$$16^3 + 50^3 + 33^3 = 165\ 033$$

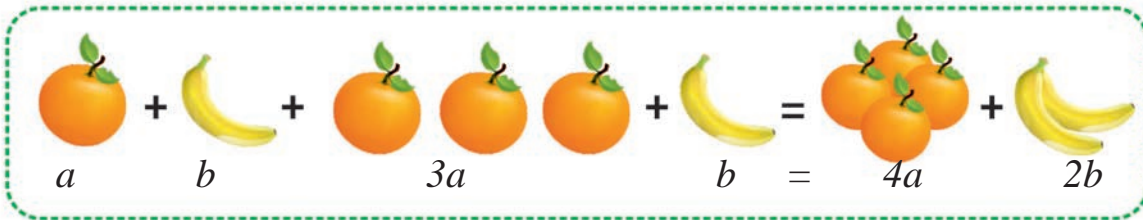
$$166^3 + 500^3 + 333^3 = 166\ 500\ 333$$

.....

ПОДОБНЫЕ ЧЛЕНЫ И ИХ ПРИВЕДЕНИЕ

Пример

$$a + b + 3a + b = a + 3a + b + b = 4a + 2b = 2(2a + b).$$



Запомните!

Чтобы заменить выражение более простым ему эквивалентным выражением:

шаг 1: сложите коэффициенты подобных членов;

шаг 2: результат умножьте на общий буквенный множитель.

$$3a - 5b + 6b - 2a + 3b - 7b$$

$$\downarrow$$

$$3a - 2a - 5b + 6b + 3b - 7b$$

$$\downarrow$$

$$1a - 3b$$

$$\downarrow$$

$$a - 3b$$

$$6p - 3q + 3 - 4p - 2q =$$

$$6p - 4p - 3q - 2q + 3$$

$$= 2p - 5q + 3$$

$6p - 4p$	$-3q - 2q$
\downarrow	\downarrow
$6 - 4 = 2$	$-3 - 2 = -5$
$2p$	$-5q$
3	
$+3$	

Такое упрощение выражения называют **приведением подобных членов**.

Вы знаете, что свойство распределительного закона умножения $(a + b) \cdot c = ac + bc$ выполняется для произвольных чисел a , b и c .

Замена выражения $(a + b) \cdot c$ на $ac + bc$ или $c \cdot (a + b)$ на выражение $ca + cb$ также называется **раскрытием скобок**.

Замена выражения $ac + bc$ выражением $(a + b) \cdot c$ или $c \cdot (a + b)$ называется **вынесением общего множителя c** .

Примеры

Пример 1. Упростите выражение:

$$4,75x + 5,25x = (4,75 + 5,25)x = 10x$$

Пример 2. Раскройте скобки и приведите подобные слагаемые:

$$(5x - 2y) - (3y - 5x) = 5x - 2y - 3y + 5x = 10x - 5y$$

Пример 3. Вычислите удобным способом:

$$639 \cdot 1\,001 = 639 \cdot (1\,000 + 1) = 639\,000 + 639 = 639\,639$$

Пример 4. Если уменьшаемое уменьшить на 24, а вычитаемое на 36, как изменится разность?

$$a - b = c$$

$$(a - 24) - (b - 36) = a - 24 - b + 36 = a - b + 12 = c + 12$$

Упражнения

1. Раскройте скобки.

1) $2 \cdot (x + 13)$

2) $(2 - x) \cdot 24$

3) $(y - 27) \cdot 5$

4) $3,2 \cdot (c + 5)$

2. Приведите подобные слагаемые.

1) $6a - 3a + 5a$

2) $14b - (8b + 4b)$

3) $2b - 3b + 8b$

3. Упростите выражения.

1) $2a + 3 \cdot (3b - 4a) + b$

2) $2 \cdot (2x - 3y) + 12x + 7$

3) $x - (a + b - c + d)$

4. Упростите выражения и укажите правильный ответ.

$4x - (3x - 7) + (x + 3)$

$4(2x - 5) + 3x + 20$

$0,4(4x - 3) + 1,4 - 1,6x$

$0,3(3x + 5) - 1,3 - 0,8x$

$0,1x + 0,2$

$2x + 10$

$11x$

$0,2$

5. Упростите выражения и найдите значения при $x = 1; -4; 2,5; -40$.

1) $(5x - 1) - (2 - 8x)$

2) $37 - (x - 16) + (12x - 1)$

6. Приведите подобные слагаемые.

1) $4a - 5a$

2) $3m - 4m$

3) $7n - 5n$

4) $p - 8p$

5) $1,002a - 2,01a$

6) $32,1m + 41,02m$

7) $7,5c - 4,6c$

8) $22,001s + 4,084s$

9) $2, (3)d + 1, (4)d$

7. Если уменьшаемое уменьшить на 4, вычитаемое на 16, на сколько изменится разность?

8. Если уменьшаемое увеличить на 24, а вычитаемое уменьшить на 15, на сколько изменится разность?

9. Раскройте скобки.

1) $(a - b) + (2b - 3a)$

2) $3a - (a + 2b)$

3) $2(a - 1,5) + 1,4(a - 1)$

Запомните!

Для упрощения выражения складываются или вычитаются только подобные слагаемые.

Обратите внимание, что переменные не изменяются. Вычисляются только коэффициенты.

Выражение $4p + 81 + 3x + 9$ нельзя упростить, так как $4p$, 81 , $3x$ и 9 не подобные.

10. Приведите подобные слагаемые.

1) $7,5a - 6,8b - 7,5a - 6,8b$

2) $a - 3a + 4,7 - 7,2$

3) $2,1a - 1,7c + 2,7a - 2,2c$

4) $-9,8c + 5,1d + 1,1c + 4,2d + 4c$

5) $4,2a + 1,8b - 2,6a + 3,4a$

6) $-8,9a + 1,5b - 1,1a - 5,5b$

11. Найдите значение числовых выражений.

1) $7,107 + (5,002 + 3,893)$

3) $19,49 - (1,49 + 0,99)$

12. Найдите значение алгебраического выражения.

1) $a = \frac{1}{3}; b = 1$, если $3a - 2b$

3) $a = 5,1; b = 4,7$, если $P = 2(a + b)$

2) $a = 12,5; h = 6,4$, если $S = \frac{1}{2}ah$

4) $a = 2,5; b = 2,4; c = 3,5$, если $V = abc$

13. Найдите значение числовых выражений.

1) $5(3x - 7) + 2(1 - x)$, если $x = \frac{1}{26}$

2) $(2c + 5d) - (c + 4d)$, если $c = 0,4; d = 0,6$

3) $3 \cdot \left(1 - \frac{1}{7}x + 2 - \frac{1}{4}y\right) - 2 \cdot \left(2 - \frac{1}{7}x + 1 - \frac{1}{14}y\right)$, если $x = 0,5; y = 0,1$

4) $1,(3) \cdot (a + b) + 2,(7) \cdot (a - b)$, если $a = 2; b = -9$

5) $-0,1(2) \cdot (a - b) + 0,0(2) \cdot (a + 2b)$, если $a = -10; b = 6$

14. Запишите в виде алгебраической суммы.

1) $a - b + c$

2) $m + n - t$

3) $m - n - t - d$

4) $-a + b - c$

5) $-a - b - c$

6) $n - m + t$

7) $a + b + c - d$

8) $-n + m - t$

15. Раскройте скобки.

1) $(a - b) + (2b - 3a)$

3) $2(a - 1,5) + 1,4(a - 1)$

2) $3a - (a + 2b)$

4) $5a + (3a - (4a + 3))$

16. Дополните последовательность чисел.

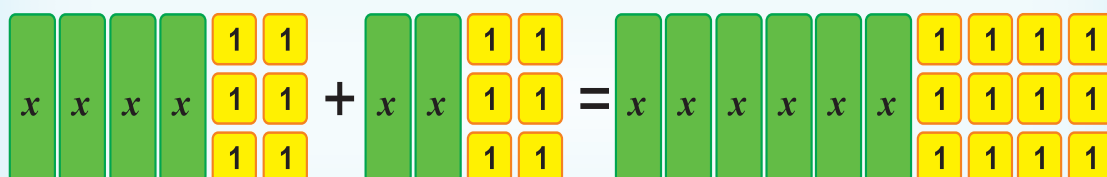
1) 5 25 125 _____ 3125 15625

2) 6 36 _____ 1296 _____

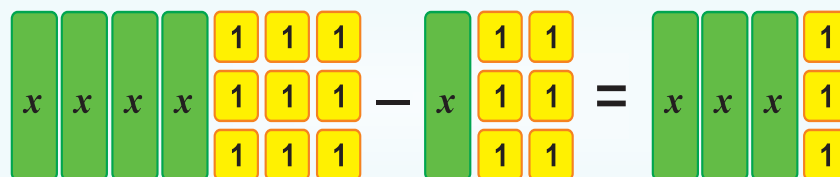
СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ

Запомните!

Сложение многочленов: $(4x + 6) + (2x + 6) = 4x + 6 + 2x + 6 = 6x + 12$



Вычитание многочленов: $(4x + 9) - (x + 6) = 4x + 9 - x - 6 = 3x + 3$



Чтобы записать алгебраическую сумму нескольких многочленов в стандартном виде, необходимо раскрыть скобки и привести подобные члены.

Сумму или разность некоторых многочленов удобно вычислять методом в столбик, подобным сложению и вычитанию чисел. В этом случае подобные члены пишутся друг под другом.

Пример 1.

$$\begin{array}{r} 2a^2b - 3ab^2 + 4ab + 5 \\ + a^2b + ab^2 + 5ab - 1 \\ \hline 3a^2b - 2ab^2 + 9ab + 4 \end{array}$$

Пример 2.

$$\begin{array}{r} 5a^3b^2c - 2abc^2 - 9 \\ - 2a^3b^2c + abc^2 + 5 \\ \hline 3a^3b^2c - 3abc^2 - 14 \end{array}$$

Упражнения

1. Найдите алгебраическую сумму многочленов.

1) $-6a + (-3c + 4a)$

2) $8x + (-7x + 3y)$

3) $(3a - 4b) + (-6a + 7b)$

4) $(5x - 2) + (-3x + 2)$

5) $4x^2 + (5y^2 - 3x^2)$

6) $1,2a^2 + (-4,8b^2 + 1,9a^2) + 3,6b^2$

7) $8,1x + (-1,9x + 7,2y) - 8,3y$

8) $(0,2x - 3,1c^2) + (2,4c + 0,9c^2)$

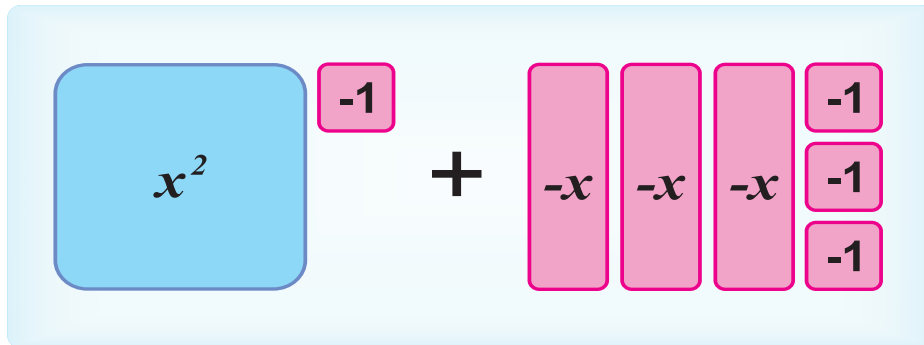
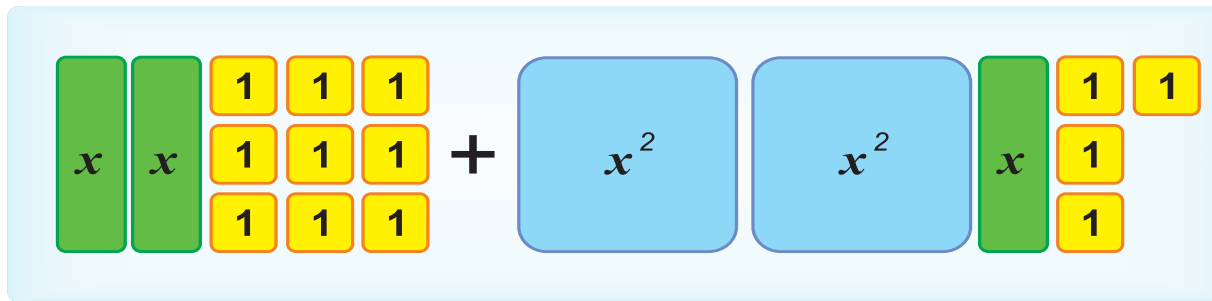
9) $(6a - 7b + 8c) + (-4a + 5b - 3c)$

10) $(11ac - 9a^2 + 3b^2) + (3ac + 7a^2 - 9b^2)$

11) $-(4x^2 - 3xy + 5y^2) + (7x^2 + 6xy - 9y^2)$

12) $(9m^2 - 13mn - 9n^2) + (-7m^2 + 6mn - 11n^2)$

2. Сложите многочлены на основе модели.



3. Найдите алгебраическую сумму и разность многочленов.

- 1) $(6a^2 - 9ab - 7b^2) + (-8a^2 + ab + 6b^2)$
- 2) $(-8a^2 + ab - 8b^2) - (-9a^2 - ab + 7b^2)$
- 3) $(5x - 4y) - (-3x + 4y) + (8x - 9y)$
- 4) $(1,2x + 0,6y) - (0,9x - 1,3y) + (1,3x - 2,4y)$
- 5) $(6x^3 + 7x^2) - (-9x^3 + x^2) - (-10x^3 - 4x^2)$
- 6) $(0,3x - 0,7y) - (-0,9x + 0,6y) - (0,1x - 0,4y)$
- 7) $(a^2 - ab - 3b^2) - (4a^2 + 5ab - 7b^2)$
- 8) $(1 + 3x) + (x^2 - 2x)$
- 9) $(2a^2 + 3a) + (-a + 4)$
- 10) $(x^2 + 6x) + (5x - 2x^2)$
- 11) $(a^2 - a + 7) - (a^2 + a + 8)$
- 12) $(8a^3 - 3a^2) - (7 + 8a^3 - 2a^2)$
- 13) $(x^2 + 5x + 4) - (x^2 + 5x - 4)$

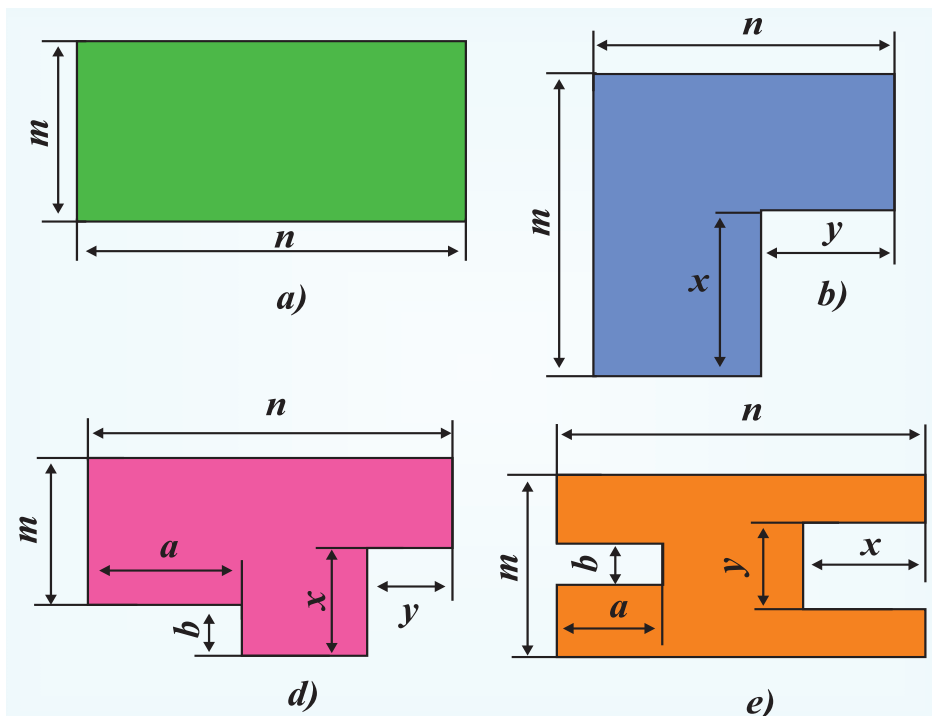
4. Найдите сумму многочленов.

- 1) $0,2x^2 - 0,4y^2$ и $-0,3x^2 + 0,5y^2$
- 2) $0,6x^4 + 0,7y^5$ и $1,8x^4 - 4,3y^5$
- 3) $5a^2b - ab^2$ и $-3a^2b + 4ab^2$
- 4) $-4a^3b + 5a^4b^2$ и $6a^3b - 7a^4b^2$
- 5) $2\frac{1}{3}a^2 - 4\frac{3}{5}b^2$ и $6\frac{2}{3}a^2 + 7\frac{2}{5}b^2$
- 6) $\frac{3}{4}a^4 - \frac{2}{5}b^4$ и $-\frac{2}{5}a^4 + \frac{1}{4}b^4$

5. Найдите разность многочленов.

- 1) $4a^2 - b^2$ и $-a^2 + 3b^2$
- 2) $6a^2 + 4b$ и $-9a^2 - 9b$
- 3) $-a^3 + 8b^2$ и $-4a^3 - 9b^2$
- 4) $ab - bc$ и $-2ab + 3bc$
- 5) $-1,2a + 2,4b$ и $1,6a - 4,7b$
- 6) $0,6a - 1,2b - 0,8c$ и $1,9a + 2,1b - 1,3c$

6. Составьте формулу для нахождения периметра данных фигур.



УМНОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ

Умножение многочлена на одночлен

Чтобы умножить многочлен на одночлен, нужно каждый член многочлена умножить на этот одночлен и сложить полученные произведения.

$$(x)(ax) = ax^2$$

$$(x)(a+b) = ax + bx$$

$$(x)(a+b+c) = ax + bx + cx$$

Умножение многочлена на одночлен даёт другой многочлен. Все члены полученного многочлена следует записать в стандартном виде и упростить. Можно устно умножить суммы, не записывая промежуточные результаты, и записать ответ.

Пример 1.

$$(-2a^4) \cdot (14ab + 2,5b) = -28a^5b - 5a^4b$$

$$4x^2 \cdot (3x^3 - 2x^2 + 6x) = 4x^2 \cdot 3x^3 + 4x^2 \cdot (-2x^2) + 4x^2 \cdot 6x = 12x^5 - 8x^4 + 24x^3$$

Упражнения

1. Найдите произведение одночленов и многочленов.

- | | | |
|---------------------------------------|---|----------------------------|
| 1) $-2(6 - m)$ | 2) $-0,3(-0,9 - c)$ | 3) $(-2x + 5y) \cdot (-4)$ |
| 4) $6a(-3b + 4c)$ | 5) $(x - y)a^2$ | 6) $-4x(5x - 7y)$ |
| 7) $(6a - 7b)8c$ | 8) $(x^7 - x^6 + x^4)x^3$ | 9) $7xy(x + y - 3xy)$ |
| 10) $-4(-8c - 9d + 2)$ | 11) $1,2a(0,6b - 1,5c)$ | 12) $abc(a + b + c)$ |
| 13) $ab^3(a^3b - a^4b^5 + a^7b^{11})$ | 14) $-2ab^3(-3a^7b^6 + 8a^5b^2 - 9a^4b^{11})$ | |
| 15) $-6,2ab(5a - 10b)$ | 16) $(2x^4 - 5x^6 + 7x^{11}) \cdot 0,1x^5$ | |

2. Упростите выражения.

- | | |
|----------------------------------|------------------------------------|
| 1) $2(2x - 5) - 3(-2x + 1)$ | 2) $-3(5 - 4x) + 6(3x + 4)$ |
| 3) $-2(7 - 2x) - 5(-2x + 9)$ | 4) $4(5x - 11) + 8(-7x - 3)$ |
| 5) $-3(7 - 2x) - 4(-6x + 1)$ | 6) $6(2x - 5) - 3(3x - 8)$ |
| 7) $(3a - 4b)(-3) - 6(a - b)$ | 8) $(-a + b)(-8) + 2(6a - 5b)$ |
| 9) $1,2(2a - 3b) - 1,8(3a + 2b)$ | 10) $1,8(4a - 5b) - 3,6(3a + 10b)$ |

Запомните!

При умножении многочлена на одночлен мы используем распределительный закон.

Пример 2. $ab^2(ab - bc + 2a) = ab^2 \cdot ab - ab^2 \cdot bc + ab^2 \cdot 2a = a^2b^3 - ab^3c + 2a^2b^2$

Умножение любого многочлена на одночлен производится аналогично.

Пример 3.

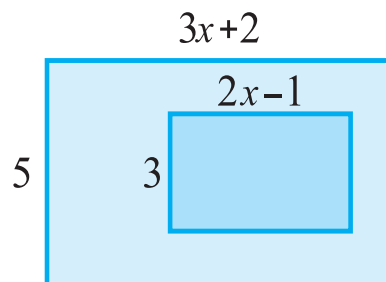
$$\begin{aligned} & \left(-mn^3 - 2mnp + \frac{2}{3}qr\right) \cdot 1\frac{1}{2}mp^2 = \\ & = (-mn^3) \cdot \left(1\frac{1}{2}mp^2\right) - (2mnp) \cdot \left(1\frac{1}{2}mp^2\right) + \left(\frac{2}{3}qr\right) \cdot \left(1\frac{1}{2}mp^2\right) = \\ & = -1\frac{1}{2}m^2n^3p^2 - 3m^2np^3 + mp^2qr \end{aligned}$$

3. Проверьте алгебраическое равенство на основе рисунка и сформулируйте свой вывод.

Образец: $2(x + 3) = 2x + 6$

	x	3
2	$2x$	6
3	$6x$	9
4	$12x$	8

4. От прямоугольника со сторонами 5 и $3x + 2$ отрезается прямоугольник со сторонами 3 и $2x - 1$. Найдите площадь оставшейся фигуры.



Умножение многочлена на многочлен

Удобно использовать следующий алгоритм умножения многочленов.

Алгоритм умножения многочлена на многочлен:

- 1) умножить каждый член одного многочлена на каждый член другого многочлена;
- 2) сложить полученные результаты;
- 3) полученный многочлен привести к стандартному виду.

$$(x+y)(m+n) = xm + xn + ym + yn$$

Многочлены можно умножать методом столбика, как числа. Этот способ удобен для умножения многочленов от одной переменной.

$$\begin{array}{r} a^2 + 2a + 1 \\ \times \quad a - 2 \\ \hline -2a^2 - 4a - 2 \\ + a^3 + 2a^2 + a \\ \hline a^3 \quad -3a - 2 \end{array}$$

Упражнения

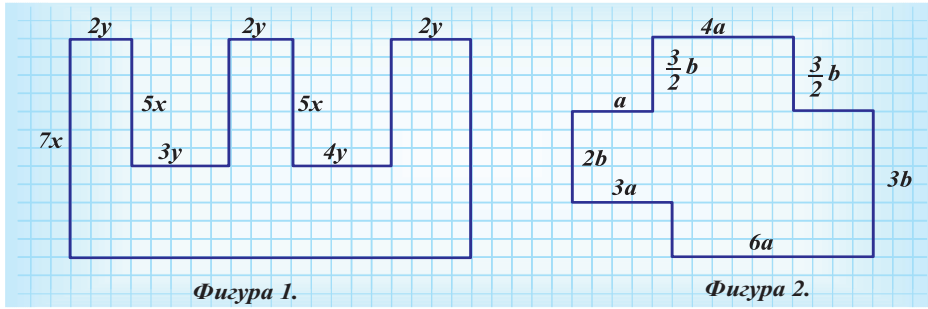
5. Умножьте многочлен на многочлен.

- | | | |
|------------------------|--------------------------|-------------------------|
| 1) $(x - a)(x + y)$ | 2) $(a + z)(m - n)$ | 3) $(t + s)(b + 1)$ |
| 4) $(c - d)(x - y)$ | 5) $(a + 2)(b - 3)$ | 6) $(4 - b)(5 + c)$ |
| 7) $(d - 4)(t + 5)$ | 8) $(k - 6)(7 - d)$ | 9) $(x - 7)(x + 8)$ |
| 10) $(9 - x)(y + 5)$ | 11) $(a + 6)(4 - a)$ | 12) $(2 - b)(b + 3)$ |
| 13) $(a + 5)(a + 3)$ | 14) $(x - 2)(x + 7)$ | 15) $(x - 9)(x - 11)$ |
| 16) $(y + 8)(y - 5)$ | 17) $(-c + 3)(c - 7)$ | 18) $(-c - 5)(-2c + 1)$ |
| 19) $(2a + 9)(3a - 7)$ | 20) $(-5a + 1)(-4a + 5)$ | 21) $(5x - 9y)(8x + y)$ |

6. Упростите выражения.

- | | |
|--|--|
| 1) $a(a + b) - b(a + b)$ | 2) $6(x - 2) + 4(x - 3) - 8(x - 4)$ |
| 3) $3(2x + y) - 3(4x - 3y) + 5(2x - 5y)$ | 4) $-5(1,2x + 3,6y) + 10(2,4x - 1,8y)$ |
| 5) $5a(a + 1) + 2a(3a - 1) - 4a(2a - 5)$ | 6) $5(0,4x - 1,2) + 4(0,5x - 0,25y)$ |

7. Найдите площадь фигур.



8. Упростите выражения.

1) $8(3n - 2m) - 5(2n - m)$

2) $-11(4x + 3y) - 9(2y - 3x)$

3) $-1,2(5x - 6y) + 1,4(5y - 3x)$

4) $0,7(2a - 3d) + 0,6(a + 2d)$

5) $(x - 4a)(5a + 8x) - (6a - 7x)(3x - 2a)$

6) $(6c + d)(8c - 9d) + (-10d + 2c)(11c - 4d)$

9. Найдите значение алгебраического выражения.

1) $3(8a + 7) - 9(3a - 1)$, если $a = -2$

2) $-2(3a - 7) + 4(5a - 8)$, если $a = -1$

3) $6(-2a + 9) - 7(3a - 9)$, если $a = 3$

4) $5a^2(4a - 3) - 7a^2(2a + 1)$, если $a = 2$

10. Найдите числа, соответствующие буквам.

27	29	24
A	B	A
A	A	B
B	C	3
A	C	A

33	29	30
E	D	D
D	E	E
D	5	D
D	D	E

13	19	23
F	4	G
F	G	G
F	F	F
G	6	G

19	12	13
H	I	I
I	H	I
H	I	I
J	2	H

ДЕЛЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ

Деление многочлена на одночлен

Чтобы разделить многочлен на одночлен, нужно каждый член многочлена разделить на данный одночлен и результаты сложить.

Пример 1. $(4mn^2 - 2mn) : 2mn = (4mn^2) : (2mn) - (2mn) : (2mn) =$
 $= \frac{4mn^2}{2mn} - \frac{2mn}{2mn} = 2n - 1$

Пример 2. $(3,6a^2b^2 + 3a^2b + 4a^4b^4) : (-4a^2b) = 3,6a^2b^2 : (-4a^2b) + 3a^2b : (-4a^2b) + 4a^4b^4 :$
 $:(-4a^2b) = \frac{3,6a^2b^2}{-4a^2b} + \frac{3a^2b}{-4a^2b} + \frac{4a^4b^4}{-4a^2b} = -0,9b - 0,75 - a^2b^3$

Примечание: если каждый член многочлена делится на какой-то одночлен, то данный многочлен делится на данный одночлен или наоборот.

Например, многочлен $mn + mp - mnp$ делится на m , но на mp не делится.

Упражнения

1. Упростите выражения.

1) $(5a^6b^9)^3 : (5a^3b^6)^2$

2) $(4a^8b^{13})^4 : (2a^5b^7)^6$

3) $(-a^4b^3c^4)^5 : (a^3b^2c)^6$

4) $(-a^3b^5)^{10} : (-a^3b^6)^7$

2. Выполните деление.

1) $(15a + 10) : 2$

2) $(8a - 16b) : (-4)$

3) $(-21x + 14) : 7$

4) $(-8 + 10x) : (-2)$

5) $(a + ab) : (-a)$

6) $(b + ab) : b$

7) $(2x - 3y + 4z) : 5$

8) $(-2x + 5y - z) : (-10)$

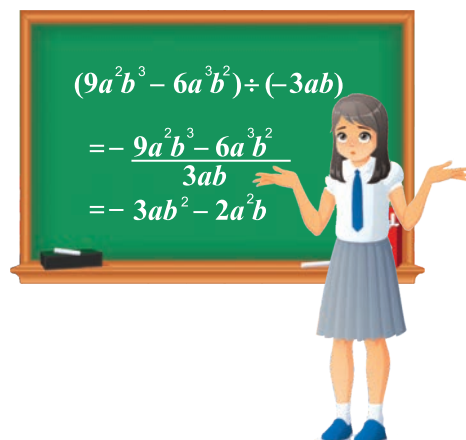
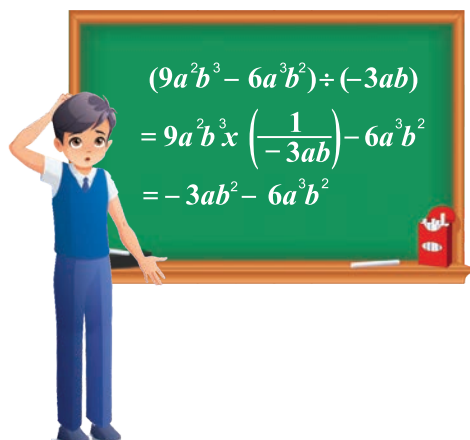
9) $(10a + 15b - 20c) : 5$

10) $(12a^2 - 9ab + 6a) : (-3a)$

11) $(7a^8 - 9a^7 + 6a^5) : (-a^3)$

12) $(7a^3 - 8a^2) : a^2 + (15a^2 - 9a) : (-3a)$

3. Кто правильно решил пример?



4. Разделите многочлен на одночлен.

1) $(1,8a^9 - 2,4a^8 + 3,6a^{15}) : 0,06a^5$

2) $(a^3 b^4 c^5 + a^5 b^4 c^3) : (a^3 b^3 c^3)$

3) $(8b^3 - 9b^2) : (-2b^2) - (10b^3 - 20b^2) : (-5b^2)$

4) $(a^9 - a^8) : a^7 + (a^6 + a^5) : a^4$

5) $(a^3 b + 6ab^2) : (-ab) + (8a^3 b - 8ab^2) : (-2ab)$

6) $(2a^{11} - a^9) : a^7 - (8a^6 + 5a^4) : a^2$

7) $\left(5 \frac{2}{3} a + 4 \frac{1}{4} b + 2 \frac{1}{8} c\right) : \left(1 \frac{10}{11}\right)$

5. Какой многочлен необходимо записать вместо **A**, чтобы получить верное равенство?

1) $A + (5a^2 - 2ab) = 6a^2 + 9ab - b^2$

2) $A - (4xy - 3y^2) = x^2 - 7xy + 8y^2$

3) $(4b^4 - 7b^2 + 6) - A = 0$

4) $(5a^2 + 9b - 3) + A = 8a^2 + b - 1$

6. Найдите значение выражения.

1) $8a^2(a - 5) - 4a(a^2 - 7)$, если $a = 3$

2) $b(-9b^2 + 1) + 3b(2b^2 + b)$, если $b = -2$

3) $(3x - 4)(8x + 2) - 24x^2 - 2$, если $x = 2$

4) $(c^2 + 3)(c - 9) - c^2(c - 6)$, если $c = -5$

7. Решите уравнение.

1) $3x(x^2 - 8) - 3x^3 = 12$

2) $(x + 8)(5x - 6) - 20 = 5x^2$

3) $18y^3 - 2y(2 + 9y^2) = 6,5$

4) $53 - 8y(1 - 3y) = 24y^2$

8. Докажите, что равенство верно.

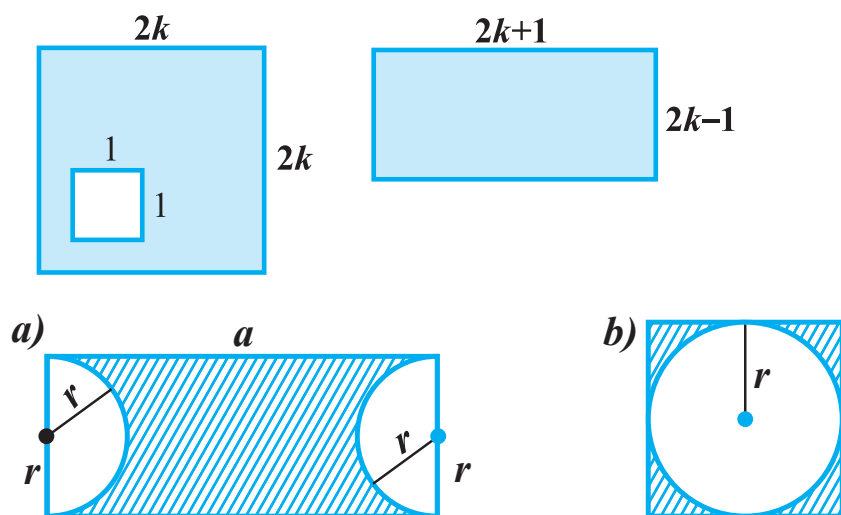
1) $(7x - 3)(4 - 8x) + 2x(28x - 26) = -12$

2) $1,1x^2(x^2 - 10) - x(1,1x^3 - 9x) = -2x^2$

3) $(-y^3 + 5y)2y - 10y^2(1 + 0,2y^2) = -4y^4$

4) $(2,5a + b^2)(-4a) + 2a(5a - b^2) = -6ab^2$

9. Найдите площадь закрашенной части.



РАЗЛОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНА НА МНОЖИТЕЛИ

Вспоминаем

$$\text{НОД}(24; 18) = 6$$

$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$$

$$18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$$

$$2 \cdot 3 = 6$$

Распределительное свойство

$$ab + ac = a(b + c)$$

$$14 \cdot 8 + 14 \cdot 2 = 14 \cdot (8 + 2) = 140$$

Вынесение общего множителя за скобки

При решении уравнений и упрощении выражений часто приходится разлагать многочлены на множители, то есть записывать их в виде произведения многочленов.

$$8xy - 0,7xz + 1,9x = x(8y - 0,7z + 1,9)$$

Разложение многочлена на множители противоположно умножению многочлена на одночлен или многочлена на многочлен.

Пример

Пример 1. Разложите многочлен $14m^2n - 28mn^3 - 21m^3n^2$ на множители:

- находим наибольший общий делитель коэффициентов каждого члена многочлена.
- затем определяем наименьший показатель степени буквенных выражений с одним и тем же основанием в каждом из одночленов.
- в этом примере НОД чисел 14; 28 и 21 равен 7.
- мы можем видеть, что в буквенных выражениях mn один и тот же множитель.
- тогда общий множитель для всех членов этого многочлена равен $7mn$. Тогда:

$$14m^2n - 28mn^3 - 21m^3n^2 = 7mn \cdot 2m - 7mn \cdot 4n^2 - 7mn \cdot 3m^2n = 7mn(2m - 4n^2 - 3m^2n)$$

Упражнения

1. Вынесите за скобки общий множитель.

1) $3a + 3b$

2) $7x - 7y$

3) $5 - 5c$

4) $12 - 4a$

5) $9a + 18$

6) $ab + a$

7) $abc + bcd$

8) $cx - cy$

9) $5x - ax$

10) $2ab + 4bc$

11) $a^2b + ab^2 - 2ab$

12) $a^{10} + a^8 + a^6$

2. Вычислите.

1) $11 \cdot 13 + 13 \cdot 19$

2) $25 \cdot 18 + 25 \cdot 42$

3) $56 \cdot 49 - 56 \cdot 39$

4) $71 \cdot 33 - 33 \cdot 51$

5) $84^2 + 84 \cdot 16$

6) $79^2 + 79 \cdot 21$

3. Вынесите за скобки общий множитель.

1) $12x^2y^4 - 6x^5y^3$

2) $8a^7 - 12a^5 + 30a^3$

3) $15a^4b^9 - 20a^9b^4$

4) $2a^6 + a^5 - a$

5) $8a^7 b^9 - 12a^5 b^{13} + 20a^8 b^5$

6) $27x^4 y^5 z^9 - 18x^6 y^3 z^{13}$

7) $42y^{13} - 49y^8 + 35y^{17}$

8) $a^4 b^9 - a^{10} b$

Примеры

Пример 2. Разложите на множители многочлен $19(3a + 2b) - a(3a + 2b) + 3b(3a + 2b)$.

Для некоторых многочленов общим множителем может быть не одночлен, а многочлен.

Для многочлена $19(3a + 2b) - a(3a + 2b) + 3b(3a + 2b)$ общим множителем является $(3a + 2b)$.

Поэтому:

$$19(3a + 2b) - a(3a + 2b) + 3b(3a + 2b) = (3a + 2b)(19 - a + 3b)$$

В некоторых случаях необходимо подвести слагаемое под общий множитель.

В этом случае используется равенство $a - b = -(b - a)$.

Пример 3. $25 - 17 = -(17 - 25) = 8$

Пример 4. $a(a - b) + b(b - a) = c(a - b) - d(a - b) = (a - b)(c - d)$.

Упражнения

4. Разложите на множители.

1) $x(a + b) + y(a + b)$

2) $m(x + y) - n(x + y)$

3) $a(b + 3) - (b + 3)$

4) $x(a - 9) - y(a - 9)$

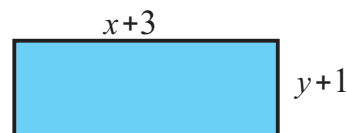
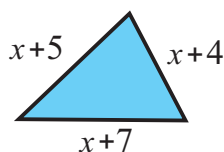
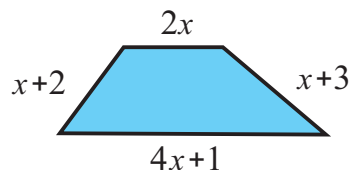
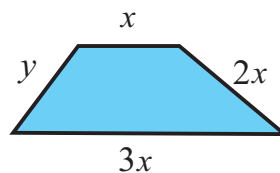
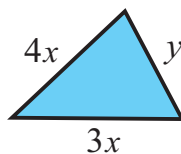
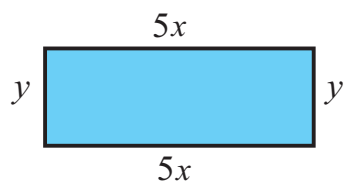
5) $2m(x + y) - 3n(x + y)$

6) $3b(x - 7) + 4c(x - 7)$

7) $8(a + b) - (a + b)c$

8) $(a - b)^4 - (a - b)^4 c$

5. Найдите периметр фигур.



6. Вычислите.

1) $15 \cdot 13 + 15 \cdot 29 + 42 \cdot 19 + 34 \cdot 58$

2) $72 \cdot 19 + 72 \cdot 34 + 53 \cdot 17 + 89 \cdot 47$

3) $2,8 \cdot 6,9 + 6,9 \cdot 3,6 + 6,4 \cdot 2,8 + 9,7 \cdot 3,6$

4) $8,3 \cdot 1,8 + 1,8 \cdot 7,6 - 1,8 \cdot 5,9$

5) $8,4 \cdot 4,7 - 8,4 \cdot 2,3 + 2,4 \cdot 5,8 - 14,2 \cdot 1,4$

6) $2,9 \cdot 74 + 29 \cdot 2,6 + 7,1 \cdot 59 + 71 \cdot 4,1$

7) $5 \frac{3}{8} \cdot 4 \frac{7}{19} + 5 \frac{3}{8} \cdot 3 \frac{12}{19}$

Способ группировки

Мы умеем разлагать многочлен на множители, вынося общий множитель за скобки. Рассмотрим также метод группировки. Этот способ удобен, если многочлен имеет четыре или более одночленов.

Пример 5. Разложите на множители $5a - 3ab + 5c - 3bc$.

$$5a - 3ab + 5c - 3bc = (5a - 3ab) + (5c - 3bc) = a(5 - 3b) + c(5 - 3b) = (5 - 3b)(a + c)$$

Заметьте, в многочлене мы сгруппировали некоторые одночлены. Из сгруппированных многочленов мы вынесли за скобки общий множитель. Таким образом, мы привели выражение к привычному для нас виду.

Этот метод разложения на множители называют **способом группировки**.

Пример 6. Разложите на множители $t(n - m) - m + n$.

$$t(n - m) - m + n = t(n - m) + (n - m) = (n - m)(t + 1)$$

Пример 7. Разложите на множители $nt - mt - 4t + 5n - 5m - 20$.

$$\begin{aligned} \text{Способ 1. } nt - mt - 4t + 5n - 5m - 20 &= (nt + 5n) - (mt + 5m) - (4t + 20) = \\ &= n(t + 5) - m(t + 5) - 4(t + 5) = (t + 5)(n - m - 4) \end{aligned}$$

$$\text{Способ 2. } nt - mt - 4t + 5n - 5m - 5 \cdot 4 = t(n - m - 4) + 5(n - m - 4) = (n - m - 4)(t + 5)$$

Таким образом, при разложении многочлена на множители группировка может производиться по-разному.

Иногда кажется, что при группировке одночленов не хватает составляющих многочлена. Как производится разложение в таких случаях, вы узнаете ниже.

Пример 8. Разложите на множители $a^2 + 14a + 33$.

$$a^2 + 14a + 33 = a^2 + 3a + 11a + 33 = a(a + 3) + 11(a + 3) = (a + 3)(a + 11)$$

Упражнения

7. Разложите на множители.

1) $a + (a + b)d + b$

2) $a + (a + b)c + b$

3) $x - y - (x - y)a$

4) $a^2 + (a^2 + b^2)c + b^2$

5) $(a - b)^9 + (a - b)^7$

6) $(a - b)^8 - (a - b)^5$

7) $(a - b)^7 - (b - a)^3$

8) $3(x - y) - x + y$

9) $x(m - n) - m + n$

10) $(3x + 2y)^2 - (3x + 2y)^3$

11) $k(m + n) + bm + bn$

12) $3x(m + n) + mc + nc$

13) $ab + ac + 11b + 11c$

14) $mk + mb + n^2k + n^2b$

15) $mx + xn - 3m - 3n$

8. Разложите на множители.

1) $a^2b + ab^2 + 8a + 8b$

2) $8x(3x - 4y) - 12xy + 16y^2$

3) $xy^2 - x^2y - 3x + 3y$

4) $x^2 + 3x - 4x - 12$

5) $x^2 - 3x + 4x - 12$

6) $6x^2 - 2x + 9x - 3$

7) $35x^2 + 21x - 10x - 6$

8) $ab + 7b + 3a + 21$

9) $ab - 4b - ac + 4c$

10) $a^3 + ab + a^2b^2 + b^3$

11) $a^6 + a^2b^3 + a^4b^5 + b^8$

12) $a^6 + a^2 + a^4 + 1$

9. Вынесите общий множитель за скобки.

1) $3a^3 - 15a^2b + 5ab^2$

2) $12a^2b - 18ab^2 - 30ab^3$

3) $20x^4 - 25x^2y^2 - 10x^3$

4) $4ax^3 + 8a^2x^2 - 12a^3x$

5) $-6bn^2 + 9n^3 - 12n^4$

6) $-3x^4y^2 - 6x^2y^2 + 9x^2y^4$

10. Вычислите.

1) $59 \cdot 79 - 79^2$

2) $8^3 + 8 \cdot 36$

3) $0,9^2 + 0,9 \cdot 9,1$

4) $0,9^3 + 0,9 \cdot 0,19$

5) $8,3 \cdot 1,8 + 1,8 \cdot 7,6 - 1,8 \cdot 5,9$

6) $4,7 \cdot 28 + 47 \cdot 7,2 + 5,3 \cdot 68 + 53 \cdot 3,2$

7) $9,6 \cdot 4,3 + 7,2 \cdot 4,3 + 5,7 \cdot 6,2 + 5,7 \cdot 10,2$

11. Разложите на множители.

1) $x(a^2 - b^2) - y(b^2 - a^2)$

2) $2a(3x - 1) - 5b(1 - 3x)$

3) $a(a + c) + b(a + c) + c(a + c)$

4) $a(a + b) + b(a + b)$

5) $a(a - b) + b(a - b)$

6) $a^2(a - b) + b^2(a - b)$

12. Разложите на множители.

1) $(x + y)a^3 - (x + y)b^2$

2) $(a - b)x - (b - a)y$

3) $(a - b)c - (b - a)d + (b - a)n$

4) $x(a^2 + b^2) + y(b^2 + a^2)$

5) $m^2(n^2 - 3) - n^2(3 - n^2)$

6) $(x^2 + 5)m - (x^2 + 5)n$

7) $a(-x - y) + b(x + y)$

8) $m(-x + y) + n(x - y)$

9) $a(2 - x) - b(x - 2)$

10) $a^3(1 - a) + b(1 - a) - c(a - 1)$

13. Умножьте многочлен на многочлен.

1) $(4x + 11)(-5x^3 + 2x^2 - 4x + 7)$

2) $(9a^2 + ab - 5b^2)(-2a - 3b)$

3) $(2x^3 - 11x^2 + 7x - 3)(4x + 3)$

4) $(-2a^2 + 5ab + 3b^2)(3a - 5b)$

5) $(7x^2 - 4x - 5)(-2x^2 + 3x - 11)$

6) $(3a^2 + 5ab - 11b^2)(2a + 7b)$

7) $(-3x + 13)(2x^3 - 2x^2 + 5x - 11)$

8) $(-5a^2 - 7ab + 9b^2)(a - 5b)$

9) $(-5x^3 - 2x^2 + 4x - 11)(3x + 2)$

10) $(a^2 - 7ab + 11b^2)(3a - 7b)$

14. Вынесите общий множитель за скобки.

1) $8a^3b - 16b^3$

2) $35a^7b^9 - 40a^8b^{11}$

3) $a^4b^3 + a^3b^3 + a^3b^4$

4) $-3x + 3y - 3z$

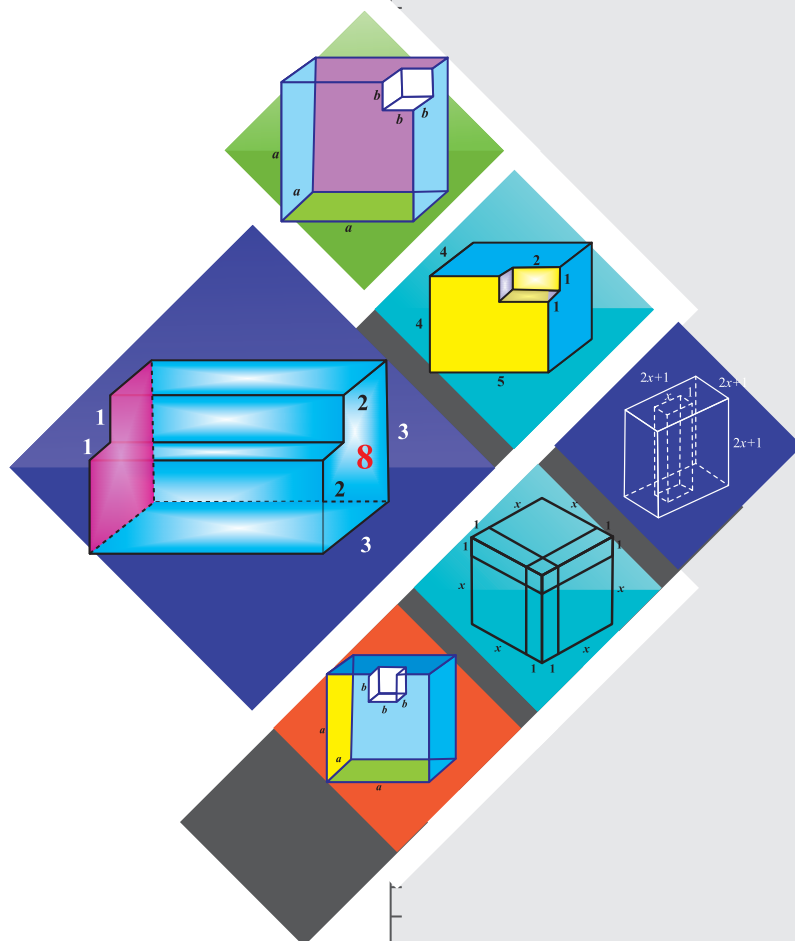
5) $-8x - 16y - 24z$

6) $0,5a + 1,5b - 2,5c$

III

ГЛАВА

ФОРМУЛЫ СОКРАЩЁННОГО УМНОЖЕНИЯ



КВАДРАТ СУММЫ И РАЗНОСТИ

Вспоминаем

Умножение многочлена на многочлен:

$$(a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Каждый член первого многочлена умножается на каждый член второго многочлена, результаты складываются и приводятся к стандартному виду.

Запомните!

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

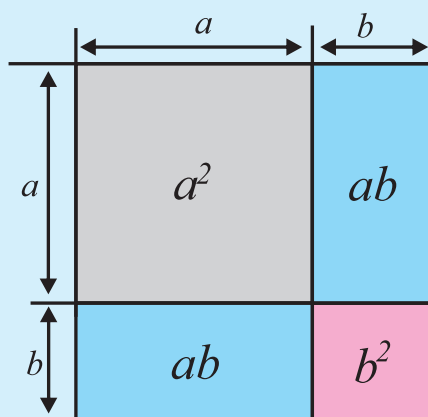
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Обратите внимание на знаки в двучлене $(a + b)^2$ плюс (+) и в $(a - b)^2$ минус (-).

Формулы квадрата суммы и разности называют **формулами сокращённого умножения** и используют для упрощения вычислений.

Пример 1. $101^2 = (100 + 1)^2 = 100^2 + 2 \cdot 100 \cdot 1 + 1^2 = 10000 + 200 + 1 = 10201$

Пример 2. $999^2 = (1000 - 1)^2 = 1000^2 - 2 \cdot 1000 \cdot 1 + 1^2 = 1000001 - 2000 = 998001$



На рисунке многочлен $(a + b)$ представлен в геометрическом виде, как сторона квадрата. Площадь поверхности внешнего квадрата равна сумме его внутренних частей

$$(a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\text{Поэтому } (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Площадь квадрата равна $S = S_1 + 2S_2 + S_3$.

Подставим выражения

$$S = a^2; S_1 = (a - b)^2; S_2 = b(a - b); S_3 = b^2$$

в полученное выражение,

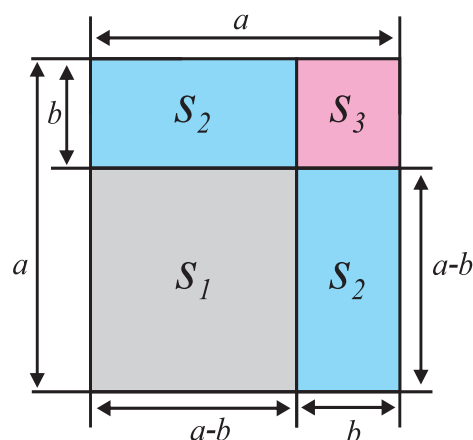
$$a^2 = (a - b)^2 + 2b(a - b) + b^2$$

$$a^2 = (a - b)^2 + 2ab - 2b^2 + b^2$$

$$a^2 = (a - b)^2 + 2ab - b^2.$$

Отсюда получаем

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$



Если вы забыли это свойство, перемножьте многочлены!

$$\begin{array}{r} a+b \\ \underline{a+b} \\ ab+b^2 \\ \underline{a^2+ab} \\ a^2+2ab+b^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a-b \\ \underline{a-b} \\ -ab+b^2 \\ \underline{a^2-ab} \\ a^2-2ab+b^2 \end{array}$$

Будьте осторожны!
Это неправильно!

$$(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$$

$$(a-b)^2 \neq a^2 - b^2$$

Примеры

Пример 3. $(2m + n)^2 = (2m)^2 + 2 \cdot (2m) \cdot n + n^2 = 4m^2 + 4mn + n^2$

Пример 4. $(2x + 3)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = 4x^2 + 12x + 9$

Пример 5. $(2x + 3y)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3y + (3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$

Пример 6. $(2x - 3)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = 4x^2 - 12x + 9$

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Упражнения

1. Запишите в виде многочлена.

1) $(x + y)^2$

2) $(5 + a)^2$

3) $(c + 9)^2$

4) $(m + 4)^2$

5) $(n + 1)^2$

6) $(3 + x)^2$

7) $(a - 4)^2$

8) $(b - 8)^2$

2. Вычислите, используя формулу сокращённого умножения.

1) $(70 - 3)^2$

2) $(50 - 4)^2$

3) $(60 - 1)^2$

4) $(80 - 1)^2$

5) $(20 + 1)^2$

6) $(50 + 1)^2$

7) $(60 + 1)^2$

8) $(100 + 1)^2$

3. Найдите квадраты чисел.

1) 12^2

2) 13^2

3) 14^2

4) 15^2

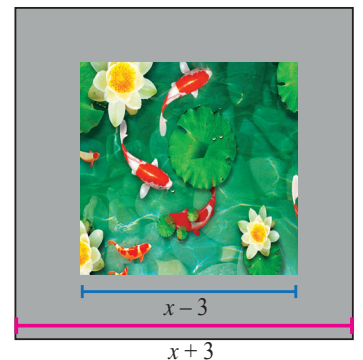
5) 35^2

6) 46^2

7) 27^2

8) 48^2

4. Квадратный бассейн окружен бетонной дорожкой. Запишите выражение для нахождения площади поверхности дорожки.



5. Упростите выражения.

1) $(a + 1)^2 + (a - 1)^2$

2) $(a - 1)^2 - (a + 1)^2$

3) $(x + y)^2 + (x - y)^2$

4) $(x - y)^2 - (x + y)^2$

5) $(a + b)^2 + (a - b)^2$

6) $(a - b)^2 - (a + b)^2$

6. Вычислите, используя формулу сокращённого умножения.

- | | |
|--------------------------------|--------------------------------|
| 1) $(3a + 2b)^2 + (3a - 2b)^2$ | 2) $(4a - 3)^2 - (4a + 3)^2$ |
| 3) $(5a - 1)^2 - (5a + 2)^2$ | 4) $(3 - 4a)^2 - (3 + 4a)^2$ |
| 5) $(5 - 2x)^2 - (5 + 2x)^2$ | 6) $(5a - 3x)^2 - (5a + 3x)^2$ |

7. Найдите квадраты чисел.

- | | | | | | |
|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 1) 102^2 | 2) 103^2 | 3) 104^2 | 4) 105^2 | 5) 95^2 | 6) 96^2 |
| 7) 97^2 | 8) 98^2 | 9) 53^2 | 10) 49^2 | 11) 18^2 | 12) 37^2 |

8. Представьте в виде многочлена.

- | | | |
|-------------------------------------|--------------------------------------|---------------------------------------|
| 1) $\left(b + \frac{1}{2}\right)^2$ | 2) $\left(2a - \frac{1}{4}\right)^2$ | 3) $\left(5c + \frac{7}{10}\right)^2$ |
| 4) $(a - 0,5)^2$ | 5) $(m - 0,1)^2$ | 6) $(2a - 1,5)^2$ |
| 7) $\left(b + \frac{1}{3}\right)^2$ | 8) $\left(a - \frac{1}{4}\right)^2$ | 9) $\left(c + \frac{7}{10}\right)^2$ |
| 10) $(3a - 0,5)^2$ | 11) $(5m - 0,1)^2$ | 12) $(5a - 3,5)^2$ |

9. Представьте выражение в виде многочлена.

- | | |
|--------------------|-------------------|
| 1) $2(a - 5)^2$ | 2) $2(x - 1)^2$ |
| 3) $3(2a - 5)^2$ | 4) $-2(4a - 7)^2$ |
| 5) $-8(-5a + 1)^2$ | 6) $3(-2a - 3)^2$ |
| 7) $-2(3a + 4)^2$ | 8) $-3(1 + x)^2$ |

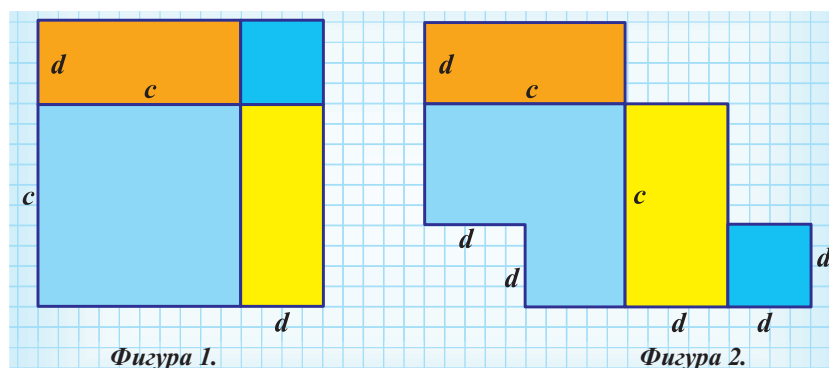
10. При каком значении «...» имеет место равенство?

- | | |
|---------------------------------------|--|
| 1) $(2 + 3a)^2 = 4 + 12a + \dots$ | 2) $(3a + 4)^2 = \dots + 24a + 16$ |
| 3) $(a - 5)^2 = \dots - \dots + 25$ | 4) $(2a + 5)^2 = 4a^2 + \dots + \dots$ |
| 5) $(7a - 3)^2 = \dots - 42a + \dots$ | 6) $(3a - 4)^2 = \dots - 24a + \dots$ |

11. Решите уравнение.

- | | |
|----------------------------------|---------------------------------|
| 1) $(x + 3)^2 - (x + 1)^2 = 12$ | 3) $(x + 2)^2 - (x - 1)^2 = 15$ |
| 2) $(x - 3)^2 - (x + 2)^2 = -25$ | 4) $(x - 1)^2 - (x - 2)^2 = 5$ |

12. Найдите площади фигур.



РАЗНОСТЬ КВАДРАТОВ

Запомните!

Согласно правилу умножения многочленов $a - b$ и $a + b$, получим

$$(a - b)(a + b) = a^2 + \underbrace{ab - ab}_{[+ab - ab = 0ab]} - b^2.$$

Взаимно уничтожая подобные слагаемые в правой части, получаем выражение $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

Равенство $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ называют **формулой разности квадратов**.

Эту формулу удобно использовать при расчёте некоторых числовых выражений.

Пример 1. $101^2 - 91^2 = (101 - 91)(101 + 91) = 10 \cdot 192 = 1920$

Это выражение также можно вывести, используя геометрические фигуры.

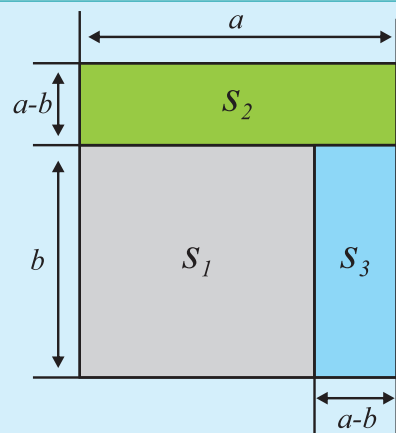
$$S = S_1 + S_2 + S_3 = a^2$$

$$S_1 = b^2, S_2 = a(a - b), S_3 = b(a - b)$$

Тогда, записав в выражение $S - S_1 = S_2 + S_3$ выше приведённые значения, получим:

$$a^2 - b^2 = a(a - b) + b(a - b) = (a - b)(a + b)$$

Вынесем за скобки общий множитель $(a - b)$, получим: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.



Примеры

Пример 2. $n^2 - 36 = n^2 - 6^2 = (n - 6)(n + 6)$

Пример 3. $36 - n^2 = 6^2 - n^2 = (6 - n)(6 + n)$

Пример 4. $36n^2 - 4 = (6n)^2 - 2^2 = (6n - 2)(6n + 2)$

Пример 5. $x^2 - 9y^2 = x^2 - (3y)^2 = (x - 3y)(x + 3y)$

Пример 6. $16x^2 - 25y^2 = (4x)^2 - (5y)^2 = (4x - 5y)(4x + 5y)$

$$\begin{aligned} & a+b \\ & \underline{a-b} \\ & \quad -ab-b^2 \\ & \underline{a^2+ab} \\ & a^2+0ab-b^2=a^2-b^2 \end{aligned}$$

Упражнения

1. Выполните умножение.

1) $(a + y)(a - y)$

2) $(n - m)(n + m)$

3) $(k - n)(k + n)$

4) $(b - c)(b + c)$

5) $(p - q)(p + q)$

6) $(l - k)(l + k)$

2. Разложите на множители.

1) $a^2 - c^2$

2) $c^2 - t^2$

3) $x^2 - d^2$

4) $d^2 - m^2$

$$5) y^2 - n^2 \quad 6) b^2 - m^2 \quad 7) y^2 - k^2 \quad 8) a^2 - z^2$$

$$9) a^2 - 1 \quad 10) c^2 - 4 \quad 11) 9 - d^2 \quad 12) 16 - m^2$$

3. Выполните умножение.

$$1) (0,1 + n)(0,1 - n) \quad 2) (k + 1,1)(k - 1,1) \quad 3) (d - 2,2)(d + 2,2)$$

$$4) (0,4n - 1)(0,4n + 1) \quad 5) (2 + 1,1k)(2 - 1,1k) \quad 6) (3d - 1,5)(3d + 1,5)$$

4. Вычислите, используя формулу $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

$$1) 11 \cdot 9 \quad 2) 12 \cdot 8 \quad 3) 13 \cdot 7 \quad 4) 14 \cdot 6 \quad 5) 15 \cdot 5$$

5. Выполните умножение.

$$1) (x + y)(x - y) \quad 2) (x + t)(x - t) \quad 3) (a - n)(a + n)$$

$$4) (y - 11)(y + 11) \quad 5) (c + 9)(c - 9) \quad 6) (c - 13)(c + 13)$$

$$7) \left(2c - \frac{1}{3}d\right) \left(2c + \frac{1}{3}d\right) \quad 8) \left(\frac{1}{3}x - 3y\right) \left(3y + \frac{1}{3}x\right)$$

6. Запишите в виде произведения двучленов.

$$1) \frac{36}{81} - y^2 \quad 2) \frac{100}{121} - n^2 \quad 3) v^2 - \frac{25}{36} \quad 4) h^2 - \frac{100}{121}$$

7. Вычислите, используя формулу $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

$$1) 14^2 - 11^2 \quad 2) 20^2 - 19^2 \quad 3) 51^2 - 41^2 \quad 4) 54^2 - 45^2$$

$$5) 76^2 - 24^2 \quad 6) 128^2 - 172^2 \quad 7) 2,5^2 - 2,4^2 \quad 8) 1,1^2 - 1^2$$

8. Вычислите, используя формулу $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

$$1) 17 \cdot 23 \quad 2) 29 \cdot 31 \quad 3) 47 \cdot 53 \quad 4) 56 \cdot 64$$

$$5) 88 \cdot 92 \quad 6) 73 \cdot 67 \quad 7) 98 \cdot 102 \quad 8) 101 \cdot 99$$

$$9) 102 \cdot 98 \quad 10) 103 \cdot 97 \quad 11) 104 \cdot 96 \quad 12) 105 \cdot 95$$

9. Упростите выражения.

$$1) (5 + a)(a - 5) - a^2 \quad 2) b^2 + (9 - b)(9 + b)$$

$$3) \left(\frac{1}{3} - c\right) \left(\frac{1}{3} + c\right) - \frac{1}{9} \quad 4) -\frac{16}{49} + \left(\frac{4}{7} - d\right) \left(d + \frac{4}{7}\right)$$

$$5) (0,9 - x)(x + 0,9) + x(1 + x) \quad 6) a(5 - a) + (1,2 + a)(a - 1,2)$$

10. Выполните умножение.

$$1) (c - d^2)(c + d^2) \quad 2) (a^3 - b^5)(a^3 + b^5)$$

$$3) (a - b^9)(a + b^9) \quad 4) (3x^5 - 4y^9)(3x^5 + 4y^9)$$

$$5) (6a^2 - 11b^3)(6a^2 + 11b^3) \quad 6) (7x^3y + 5)(7x^3y - 5)$$

$$7) (abc - 13)(abc + 13) \quad 8) (9 - 4a^2b^9)(9 + 4a^2b^9)$$

11. Вычислите, используя формулу сокращённого умножения.

- | | | |
|----------------------|--------------------|--------------------|
| 1) $999 \cdot 1001$ | 2) $175 \cdot 225$ | 3) $186 \cdot 214$ |
| 4) $1999 \cdot 2001$ | 5) $3,9 \cdot 4,1$ | 6) $2,8 \cdot 3,2$ |

12. Упростите.

- | | |
|-------------------------------------|---------------------------------|
| 1) $(x-2)^2 - (x+2)(x-2)$ | 2) $(x+3)^2 - (x-3)(x+3)$ |
| 3) $(2x-5y)(2x+5y) - (2x-5y)^2$ | 4) $(-a-b)(a+b) - (a+b)(a-b)$ |
| 5) $(5a-7)(5a+7) - 25(a-2)^2$ | 6) $(-3a-1)^2 - (3a-1)(3a+1)$ |
| 7) $(2x+4)(2x-4) - (2x+5)(2x-5)$ | 8) $(x+4)(x+2) - (x-3)(x+3)$ |
| 9) $(a+b)(a-b) - (a+b)^2 + (a-b)^2$ | 10) $(a-c)(a+c) - (-b+c)(-b-c)$ |

13. Решите уравнение.

- | | |
|---|----------------------------------|
| 1) $(3x-2)(2x+3) - 6(x-1)^2 = 5$ | 2) $(-2x+7)(x+2) + 2(x+1)^2 = 2$ |
| 3) $(x+3)(x+6) - (x+4)(x+5) = 2$ | |
| 4) $(x-5)(x+5) = (3x+1)(3x-1) - 8(x+2)^2$ | |

14. Разложите на множители, используя формулу $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

- | | | |
|------------------------|-------------------------|----------------------|
| 1) $0,09x^2 - 0,16y^2$ | 2) $4a^4 - 25d^4$ | 3) $a^{100} - b^6$ |
| 4) $a^2b^4 - c^4d^2$ | 5) $100a^6 - 121b^{10}$ | 6) $a^4 - b^8$ |
| 7) $a^4 - 625$ | 8) $b^4 - 81$ | 9) $a^{20} - b^{30}$ |

15. Вычислите.

- | | | | |
|--------------------------------------|--------------------------------------|--|--|
| 1) $\frac{20^2 - 13^2}{31^2 - 24^2}$ | 2) $\frac{17^2 - 22^2}{49^2 - 10^2}$ | 3) $\frac{37^2 - 47^2}{72^2 - 12^2}$ | 4) $\frac{100^2 - 60^2}{70^2 - 90^2}$ |
| 5) $\frac{38^2 - 28^2}{47^2 - 19^2}$ | 6) $\frac{53^2 - 25^2}{79^2 - 51^2}$ | 7) $\frac{181^2 - 61^2}{319^2 - 77^2}$ | 8) $\frac{200^2 - 380^2}{420^2 - 160^2}$ |

16*. Вычислите.

- 1) $2^2 - 1^2 + 3^2 - 2^2 + 4^2 - 3^2 + \dots + 10^2 - 9^2$
- 2) $12^2 - 11^2 + 13^2 - 12^2 + 14^2 - 13^2 + \dots + 20^2 - 19^2$
- 3) $22^2 - 21^2 + 20^2 - 19^2 + 18^2 - 17^2 + \dots + 10^2 - 9^2$
- 4) $31^2 - 29^2 + 27^2 - 25^2 + 23^2 - 21^2 + \dots + 11^2 - 9^2$

17. Выполните умножение.

- | | |
|---|---|
| 1) $(5a-5b)(2a+2b)$ | 2) $(7x+7y)(10x-10y)$ |
| 3) $\left(1\frac{1}{5}m - 1\frac{1}{5}n\right)\left(\frac{5}{6}m + \frac{5}{6}n\right)$ | 4) $\left(\frac{3}{4}x + \frac{3}{4}y\right)\left(1\frac{1}{3}x - 1\frac{1}{3}y\right)$ |
| 5) $(10a+10b)(0,1a-0,1b)$ | 6) $(0,05p+0,05q)(20p-20q)$ |

КУБ СУММЫ. КУБ РАЗНОСТИ

Вспоминаем

Квадрат суммы:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Квадрат разности:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Запомните!

$$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b)$$

Чтобы найти куб суммы, умножьте выражение само на себя три раза. Это двухэтапный процесс.

Шаг 1: Умножьте первые два выражения.

Шаг 2: Умножьте результат на третье выражение.

$$\begin{aligned} (a + b)^3 &= (a + b)(a + b)(a + b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) = \\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{aligned}$$

Формулу $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ называют **кубом суммы**.

Шаг 1.
Умножьте первые два выражения.

Шаг 2.
Умножьте результат шага 1
на третье выражение.

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ ab+b^2 \end{array} & \begin{array}{r} a^2+2ab+b^2 \\ \hline a+b \\ a^2b+2ab^2+b^3 \\ \hline a^3+2a^2b+ab^2 \\ \hline a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \end{array} \end{array}$$

Запомните!

$$(a - b)^3 = (a - b)(a - b)(a - b)$$

Чтобы найти куб разности, умножьте выражение само на себя три раза. Это двухэтапный процесс.

Шаг 1: Умножьте первые два выражения.

Шаг 2: Умножьте результат на третье выражение.

$$\begin{aligned} (a - b)^3 &= (a - b)(a - b)(a - b) = (a^2 - 2ab + b^2)(a - b) = \\ &= a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \end{aligned}$$

Формулу $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ называют **кубом разности**.

Примеры

Пример 1. $(m + 3)^3 = (m)^3 + 3 \cdot (m)^2 \cdot 3 + 3 \cdot m \cdot (3)^2 + (3)^3 = m^3 + 9m^2 + 27m + 27$

Пример 2. $(4 + n)^3 = (4)^3 + 3 \cdot (4)^2 \cdot n + 3 \cdot 4 \cdot (n)^2 + (n)^3 = 64 + 48n + 12n^2 + n^3$

Пример 3. $(5 - y)^3 = (5)^3 - 3 \cdot (5)^2 \cdot y + 3 \cdot 5 \cdot (y)^2 - (y)^3 = 125 - 75y + 15y^2 - y^3$

Пример 4. $(6a - 1)^3 = (6a)^3 - 3 \cdot (6a)^2 \cdot 1 + 3 \cdot 6a \cdot (1)^2 - (1)^3 = 216a^3 - 108a^2 + 18a - 1$

Упражнения

1. Запишите в виде многочлена.

1) $(a - c)^3$

2) $(c + d)^3$

3) $(z - t)^3$

4) $(m + n)^3$

5) $(1 + x)^3$

6) $(a - 1)^3$

7) $(4 - b)^3$

8) $(y + 2)^3$

9) $(x + y)^3$

10) $(m - n)^3$

11) $(2x + 1)^3$

12) $(3x - 2)^3$

13) $(2a + 3b)^3$

14) $(4a - b)^3$

15) $(1 - 3x)^3$

16) $(5 + 2n)^3$

2. Вычислите.

1) $2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 3^2 + 3^3$

2) $4^3 + 3 \cdot 4^2 \cdot 6 + 3 \cdot 4 \cdot 6^2 + 6^3$

3) $2^3 - 3 \cdot 2^2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 3^2 - 3^3$

4) $5^3 - 3 \cdot 5^2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 \cdot 4^2 - 4^3$

5) $7^3 - 3 \cdot 7^2 \cdot 3 + 3 \cdot 7 \cdot 3^2 - 3^3$

6) $1^3 - 3 \cdot 1^2 \cdot 6 + 3 \cdot 1 \cdot 6^2 - 6^3$

7) $8 + 3 \cdot 2^2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 3^2 + 27$

8) $4^3 + 3 \cdot 16 \cdot 6 + 3 \cdot 4 \cdot 36 + 6^3$

9) $8^3 + 30 \cdot 8 \cdot 2 + 2^3$

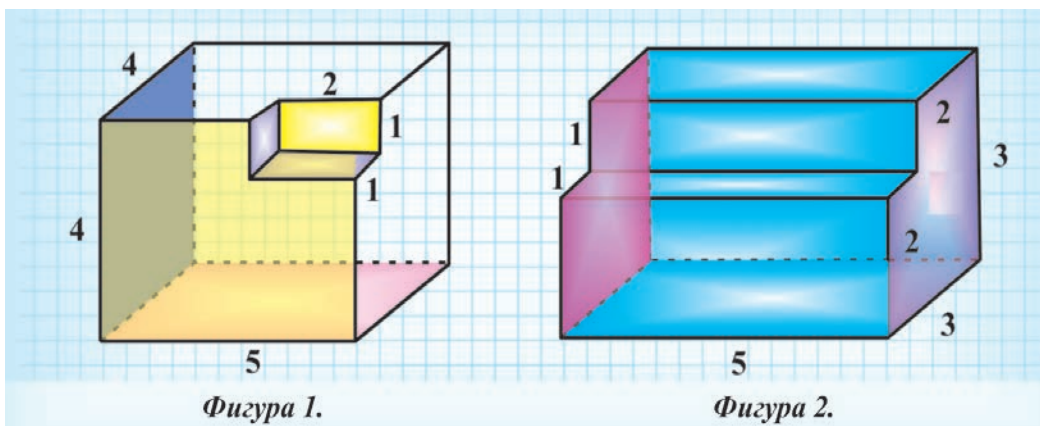
10) $9^3 + 30 \cdot 9 \cdot 1 + 1^3$

3. Упростите и вычислите согласно значениям.

1) $(x - 1)^3 - x^3 + 5$, здесь $x = 0; 1; 2$

2) $(y - 2)^3 - (y + 2)^3$, здесь $y = -2; 0; 3$

4. Найдите объём фигур.



Фигура 1.

Фигура 2.

5. Представьте в виде многочлена.

1) $(ab - 1)^3$

2) $(a^2 + b^3)^3$

3) $(a^7 - b^9)^3$

4) $(a^6 + x^6)^3$

5) $(abc - 9)^3$

6) $(ab + cd)^3$

7) $(a^2 + a^3)^3$

8) $(xy^2 + x^2y)^3$

6. Представьте в виде куба суммы или куба разности двучлена.

1) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

2) $y^3 - 3y^2 + 3y - 1$

3) $8 + 12a + 6a^2 + a^3$

4) $1 - 6c + 12c^2 - 8c^3$

7. Вычислите.

1) $17^3 + 3 \cdot 17^2 \cdot 23 + 3 \cdot 17 \cdot 23^2 + 23^3$

2) $84^3 - 3 \cdot 84^2 \cdot 14 + 3 \cdot 84 \cdot 14^2 - 14^3$

3) $17^3 + 69 \cdot 17^2 + 51 \cdot 23^2 + 23^3$

4) $84^3 - 42 \cdot 84^2 + 252 \cdot 14^2 - 14^3$

8. Упростите.

1) $(x + y)^3 + (x - y)^3$

2) $(x - y)^3 - (x + y)^3$

3) $(2x - 3)^3 - (2x + 3)^3$

4) $(2a + 3b)^3 - (2a - 3b)^3$

9. Запишите в виде куба суммы двучлена.

1) $8a^3 - 12a^2b + 6ab^2 - b^3$

2) $x^3 + 9x^2y + 27xy^2 + 27y^3$

3) $64m^3 - 48m^2 + 12m - 1$

4) $p^{12} + 3p^8q^5 + 3p^4q^{10} + q^{15}$

10. Упростите выражения.

1) $(x - 1)^3 - x^3 + 1$

2) $(x - 2)^3 + 8 - x^3$

3) $(1 - a)^3 - 3a^2 - 1$

4) $(d + 2)^3 - 6d^2 - d^3$

11. Выполните умножение.

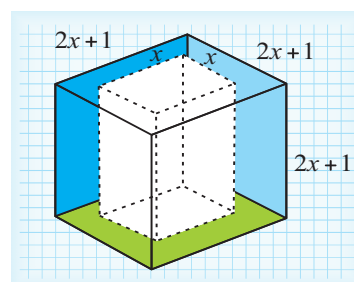
1) $(a - 1)(a^2 + a + 1)$

2) $(a + 3)(a^2 - 3a + 9)$

3) $(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$

4) $(n - 4)(n^2 + 4n + 16)$

12. Каждое ребро деревянного куба равна $2x + 1$ см. Из него вырезали кусок со сторонами, равными x см. Найдите объём оставшегося куска дерева.



13. Представьте в виде многочлена.

1) $(x^2y^3z^4 + x^4y^3z^2)^3$

2) $(a^9b^8 - a^7b^{11})^3$

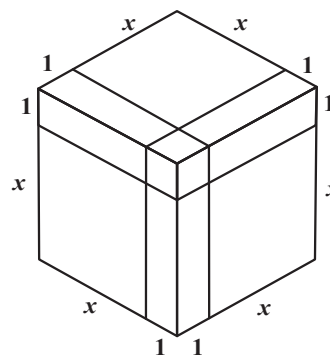
3) $(a^4b^{54}c^6 - a^5c^6d^7)^3$

4) $(a^{12} - b^{13})^3$

5) $(4x^2 - 3y^5)^3$

6) $(0,2x + 0,3y)^3$

14. Куб с ребром $x + 1$ см разделён на восемь частей. На основании оставшейся фигуры покажите разложение куба суммы.



15. Вычислите.

1) $718^3 + 3000 \cdot 718 \cdot 282 + 282^3$

2) $489^3 + 3000 \cdot 489 \cdot 511 + 511^3$

3) $189^3 - 300 \cdot 189 \cdot 89 - 89^3$

4) $409^3 - 600 \cdot 409 \cdot 209 - 209^3$

5) $17^2 \cdot (17 + 3 \cdot 23) + 23^2 \cdot (3 \cdot 17 + 23)$

6) $84 \cdot (84^2 - 3 \cdot 84 \cdot 14 + 3 \cdot 14^2) - 14^3$

16. Упростите.

1) $x(x+1)^2 - (x-1)^3$

2) $x(x-1)^2 - (x-1)^3$

3) $a(a+1)(a+2) - (a+3)^3$

4) $(2a+1)(3a-2)(a-1) - (a+2)^3$

17. Запишите в виде куба суммы или разности двучлена.

1) $8a^3 - 60a^2b + 150ab^2 - 125b^3$

2) $64x^{15} + 144x^{10}y^3 + 108x^5y^6 + 27y^9$

18. Упростите выражения.

1) $(x^2 + 1)^3 - 3(x^2 - 1)^2 - x^2(x^4 + 9)$

2) $(x - 2)^3 - (x - 1)^3 + 3x(x + 3)$

РАЗНОСТЬ И СУММА КУБОВ

Вспоминаем

Квадрат суммы
 $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Квадрат разности
 $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Разность квадратов
 $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

Запомните!

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - \cancel{a^2b} + \cancel{ab^2} + \cancel{a^2b} - \cancel{ab^2} + b^3 = a^3 + b^3$$

Умножаем каждый член первого многочлена на каждый член второго многочлена и упрощаем. Запишем выражение следующим образом:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) - \text{формула } \mathbf{\text{суммы кубов}}.$$

Таким же образом можно получить формулу разности кубов:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) - \text{формула } \mathbf{\text{разности кубов}}.$$

Примеры

Пример 1. Упростите выражение $64c^3 - (4c + 1)(16c^2 - 4c + 1)$.

$$64c^3 - (4c + 1)(16c^2 - 4c + 1) = 64c^3 - (64c^3 + 1) = 64c^3 - 64c^3 - 1 = -1$$

Пример 2. Разложите на множители $8a^3 - b^3$.

$$8a^3 - b^3 = (2a)^3 - b^3 = (2a - b)((2a)^2 + 2ab + b^2) = (2a - b)(4a^2 + 2ab + b^2)$$

Упражнения

1. Разложите на множители.

- | | | | |
|------------------|------------------|-------------------|----------------|
| 1) $u^3 + v^3$ | 2) $a^3 - c^3$ | 3) $m^3 + n^3$ | 4) $k^3 - l^3$ |
| 5) $a^3 + 1$ | 6) $c^3 - 8$ | 7) $d^3 - 27$ | 8) $a^3 + 125$ |
| 9) $27x^3 + y^3$ | 10) $m^3 - 64$ | 11) $125 - x^9$ | 12) $1 - p^3$ |
| 13) $m^3 - 8n^3$ | 14) $-a^3 - b^3$ | 15) $27a^3 + b^3$ | 16) $-1 - a^3$ |

2. Используя формулы суммы или разности кубов, представьте выражение в виде двучлена.

- | | |
|--------------------------------|--------------------------------------|
| 1) $(a + 2)(a^2 - 2a + 4)$ | 2) $(a - 3)(a^2 + 3a + 9)$ |
| 3) $(a - 4)(a^2 + 4a + 16)$ | 4) $(5 + b)(25 - 5b + b^2)$ |
| 5) $(2a - 5)(4a^2 + 10a + 25)$ | 6) $(x^3 - y^2)(x^6 + x^3y^2 + y^4)$ |
| 7) $(a^4 - 1)(a^8 + a^4 + 1)$ | 8) $(x + 3y)(x^2 - 3xy + 9y^2)$ |

3. Разложите на множители.

- | | | |
|-----------------------|--------------------|--------------------|
| 1) $5x^3 + 5$ | 2) $10y^3 + 10$ | 3) $m^4n - mn^4$ |
| 4) $a^5b^2 + a^2b^5$ | 5) $a^5b - a^2b^4$ | 6) $54a^3 - 16$ |
| 7) $2ad^3 + 16a^4$ | 8) $a^4b - ab^4$ | 9) $40a^3 - 5b^6$ |
| 10) $7x^5 - 56x^{14}$ | 11) $7a^7 - 56a^4$ | 12) $2000a - 2a^4$ |
| 13) $2x^3 + 16x^9$ | 14) $a^{10} + a^7$ | 15) $b^{10} - b^7$ |

4. Вычислите.

- | | | |
|---|--|---|
| 1) $\frac{7^3 - 1^3}{7^2 + 7 \cdot 1 + 1^2}$ | 2) $\frac{8^3 + 1^3}{8^2 - 8 \cdot 1 + 1^2}$ | 3) $\frac{3^2 - 3 \cdot 5 + 5^2}{3^3 + 5^3}$ |
| 4) $\frac{(6^2 - 2^2)(6^2 + 6 \cdot 2 + 2^2)}{6^3 - 2^3}$ | 5) $\frac{8^2 + 8 \cdot 5 + 5^2}{8^3 - 5^3}$ | 6) $\frac{(6^2 - 7^2)(6^2 - 6 \cdot 7 + 7^2)}{6^3 + 7^3}$ |

5. Разложите на множители многочлен.

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| 1) $a^3 + b^3 + a + b$ | 2) $a^3 - b^3 + a - b$ |
| 3) $x^3 + y^3 - x - y$ | 4) $x^3 - y^3 - x + y$ |
| 5) $a^3 + b^3 + 7a + 7b$ | 6) $a^3 - b^3 + 5a - 5b$ |

6. Разложите на множители.

- | | | | |
|----------------|-------------------|--------------------|----------------------|
| 1) $a^3 - b^6$ | 2) $m^9 + n^3$ | 3) $x^6 + y^{12}$ | 4) $a^{12} - n^{15}$ |
| 5) $8a^3 - 27$ | 6) $125m^3 + n^3$ | 7) $x^9 + 8y^{12}$ | 8) $64a^9 - n^{15}$ |

7. Используя формулы суммы или разности кубов, представьте выражение в виде двучлена.

- | | |
|---------------------------------|---------------------------------|
| 1) $(a + 2b)(a^2 - 2ab + 4b^2)$ | 2) $(a - 3c)(a^2 + 3ac + 9c^2)$ |
|---------------------------------|---------------------------------|

3) $(3a - 4)(9a^2 + 12a + 16)$

4) $(5a + b)(25a^2 - 5ab + b^2)$

5) $(2a - 5)(4a^2 + 10a + 25)$

6) $(x^3 + y^2)(x^6 - x^3y^2 + y^4)$

8. Разложите на множители.

1) $5x^3 + 40$

2) $10y^3 + 10\,000$

3) $m^7n + mn^7$

4) $a^8b^2 - a^2b^8$

5) $a^8b - a^2b^4$

6) $54a^3 + 16a^6$

9. Вычислите.

1) $(17 - 1)(17^2 + 17 \cdot 1 + 1^2) - (17 - 2)(17^2 + 17 \cdot 2 + 2^2)$

2) $(25 - 2)(25^2 + 25 \cdot 2 + 2^2) - (25 - 3)(25^2 + 25 \cdot 3 + 3^2)$

3) $\frac{79^3 - 19^3}{79^2 + 79 \cdot 19 + 19^2}$

4) $\frac{84^3 + 16^3}{84^2 - 84 \cdot 16 + 16^2}$

5) $\frac{2,73^2 - 2,73 \cdot 1,27 + 1,27^2}{2,73^3 + 1,27^3}$

6) $\frac{(65^2 - 25^2)(65^2 + 65 \cdot 25 + 25^2)}{65^3 - 25^3}$

10*. Покажите, что выражение кратно 10.

1) $7^3 + 3^3$

2) $47^3 - 17^3$

3) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 99^3$

4) $2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + 98^3$

5) $2^3 - 1^3 + 3^3 - 2^3 + 4^3 - 3^3 + \dots + 101^3 - 100^3$

6) $1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + 99^3$

11*. Разложите на множители.

1) $(a - b)^3 + (b - c)^3 - (a - c)^3$

2) $(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3$

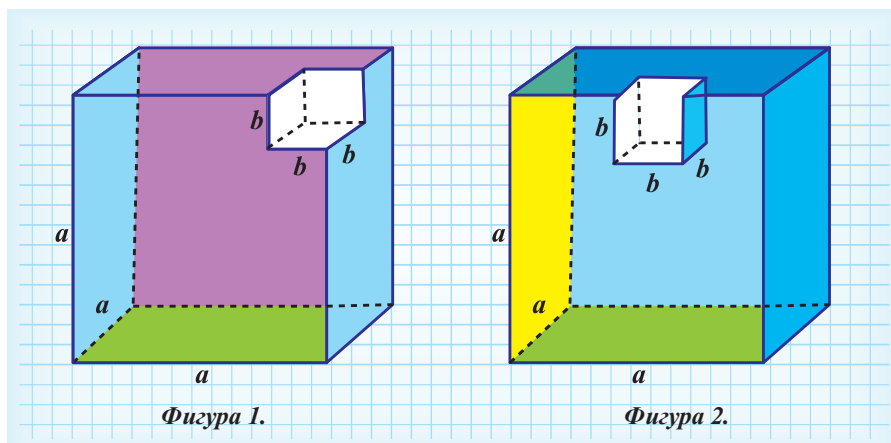
3) $(2x - 3y)^3 + (5z - 2x)^3 + (3y - 5z)^3$

4) $(2x - 3y)^3 - (5z + 2x)^3 + (3y + 5z)^3$

12*. Для скольких натуральных чисел $a < 100$ выражение $\frac{a^3 + 23}{24}$ будет натуральным числом?

13*. Покажите, что выражение $(2n + 5)^3 - (2n - 5)^3$ кратно 10.

14. Найдите объём фигур.



СПОСОБЫ РАЗЛОЖЕНИЯ МНОГОЧЛЕНОВ НА МНОЖИТЕЛИ

Познакомимся со способами разложения выражения на множители с помощью формул сокращённого умножения.

Пример 1. Разложите на множители $x^4 + 4$.

$$\begin{aligned} x^4 + 4 &= x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^4 + 4x^2 + 4) - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = \\ &= (x^2 + 2 - 2x)(x^2 + 2 + 2x) = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2) \end{aligned}$$

Пример 2. Разложите на множители $(2a + 3b)^2 - (3a - 2b)^2$.

$$(2a + 3b)^2 - (3a - 2b)^2 = (\underline{2a} + \underline{3b} - \underline{3a} + \underline{2b})(\underline{2a} + \underline{3b} + \underline{3a} - \underline{2b}) = (-a + 5b)(5a + b)$$

Пример 3. Разложите на множители $(2a + 3b)^2 + (3a - 2b)^2$.

$$\begin{aligned} (2a + 3b)^2 + (3a - 2b)^2 &= 2^2 a^2 + 2 \cdot 2a \cdot 3b + 3^2 b^2 + 3^2 a^2 - 2 \cdot 3a \cdot 2b + 2^2 b^2 = \\ &= \underline{4a^2} + \underline{9b^2} + \underline{9a^2} + \underline{4b^2} = 13a^2 + 13b^2 = 13(a^2 + b^2) \end{aligned}$$

Пример 4. Разложите на множители $(ax + by)^2 + (ay - bx)^2$.

$$\begin{aligned} (ax + by)^2 + (ay - bx)^2 &= a^2 x^2 + 2axby + b^2 y^2 + a^2 y^2 - 2aybx + b^2 x^2 = \\ &= \underline{a^2 x^2} + \underline{b^2 y^2} + \underline{a^2 y^2} + \underline{b^2 x^2} = a^2(x^2 + y^2) + b^2(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2)(a^2 + b^2) \end{aligned}$$

Пример 5. Разложите на множители $a^2 - a - 12$.

$$a^2 - a - 12 = a^2 - 9 - a - 3 = (a - 3)(a + 3) - (a + 3) = (a + 3)(a - 3 - 1) = (a + 3)(a - 4)$$

Пример 6. Разложите на множители $x^4 + 3x^2 + 4$.

$$\begin{aligned} x^4 + 3x^2 + 4 &= x^4 + 4x^2 + 4 - x^2 = (x^2 + 2)^2 - x^2 = (x^2 + 2 - x)(x^2 + 2 + x) = \\ &= (x^2 - x + 2)(x^2 + x + 2) \end{aligned}$$

Пример 7. Разложите на множители $x^4 - 5x^2 + 4$.

$$x^4 - 5x^2 + 4 = x^4 - 4x^2 + 4 - x^2 = (x^2 - 2)^2 - x^2 = (x^2 - 2 - x)(x^2 - 2 + x)$$

Упражнения

Разложите на множители. (1 – 6)

- | | | | | |
|----|-----------------------|------------------------------------|------------------------|---------------------------|
| 1. | 1) $x^3 - 64y^3$ | | 2) $p^3 q^3 + n^3$ | |
| | 3) $a^6 - b^6$ | | 4) $m^6 + (pn)^6$ | |
| | 5) $(m - n)^3 + n^3$ | | 6) $(a - 2)^3 - 8$ | |
| | 7) $8c^3 + (c - d)^3$ | | 8) $27a^3 - (a - b)^3$ | |
| 2. | 1) $27a^9 + 8d^{12}$ | 2) $a^{18} + b^{15}$ | 3) $a^{27} b^{30} - 1$ | 4) $a^3 b^6 c^9 + 8$ |
| 3. | 1) $1 - 125c^3$ | 2) $8 + 125c^6$ | 3) $x^3 + 1000$ | 4) $a^{60} - b^{30}$ |
| | 5) $a^{45} - b^{51}$ | 6) $a^{30} b^{15} - c^{45} d^{75}$ | 7) $64a^5 - a^2$ | 8) $1000x^6 - 343x^3 y^3$ |
| | 9) $x^{12} - y^{12}$ | 10) $x^{12} + y^{12}$ | | |

4. 1) $(3x - 4)(3x + 4) - 4(3x - 4)$ 2) $-5x(5x - 2) - (5x + 2)(2 - 5x)$
3) $(x + 6y)^2 - (6y + x)(6y - x)$ 4) $(x + 1)(2x - 1) + x^2 + 2x + 1$

5. 1) $a(b + c) + (3b + 3c)$ 2) $(5a - 5b) - (ac - bc)$
3) $(mn + mp) - (n + p)$ 4) $(ax - ay) - (bx - by)$

6. 1) $ac + bc + 2ad + 2bd$ 2) $xy + xn - 3mn - 3my$
3) $3ax - 4ay + 3bx - 4by$ 4) $2ax - bx - 4a + 2b$

Разложите на множители. (7 – 10)

7. 1) $6a^2 + 9ab + 8ac + 12bc$ 2) $15a^2 + 20ab + 3ac + 4bc$
3) $6ab + 21b + 8a + 28$ 4) $8x^2 + 12xy + 10xz + 15yz$
5) $30x^3y - 15x^2y^2 - 20x^4y^2 + 10x^3y^3$ 6) $-24a^4b^4 + 8a^3b^4 + 12a^2b^3 - 4ab^3$

8. 1) $a^2 - a - 2$ 2) $b^2 + 6ab + 5a^2$
3) $m^2 - 5mn + 6n^2$ 4) $2x^2 + 3xy + y^2$
5) $b^2 - 6ab + 5a^2$ 6) $b^2 + 6ab - 7a^2$

9. 1) $(x^2 + 1)^2 - 4x^2$ 2) $(x^2 + 9)^2 - 36x^2$
3) $x^4 + x^2 + 1$ 4) $x^8 + x^4 + 1$
5) $x^4 + 5x^2 + 9$ 6) $x^4 - 9x^2 + 16$

10. 1) $(a + b)^2 - (a - b)^2$ 2) $(a - b)^2 - (b + a)^2$
3) $(2c - d)^2 - (2c + d)^2$ 4) $(c - 3d)^2 - (c + 3d)^2$
5) $(a + b)^2 - (c + d)^2$ 6) $(a - b)^2 - (c - d)^2$
7) $(a + b)^2 - (c - d)^2$ 8) $(a - b)^2 - (c + d)^2$

11*. Усложнённые примеры для разложения на множители.

- 1) Разложите на множители $a^2(b + c) + b^2(a + c) + c^2(a + b) + 2abc$.
- 2) Покажите, что если $a = b + 1$, тогда $(a + b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4) \dots (a^{64} + b^{64}) = a^{128} - b^{128}$.
- 3) Покажите, что если $a + b + c = 0$, тогда $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.
- 4) Разложите на множители $bc(b + c) + ac(c - a) - ab(a + b)$.
- 5) Покажите, что выражение $97^3 - 41^3$ делится на 28 без остатка.
- 6) Покажите, что выражение $57^6 - 43^6$ делится на 1400 без остатка.
- 7) Разложите на множители $x^2(y + z) + y^2(x + z) + z^2(x + y) + 3xyz$.
- 8) Разложите на множители $a^3 + b^3 + c^3 + ab(a + b) + ac(a + c) + bc(b + c)$.

ПРИМЕНЕНИЕ ФОРМУЛ СОКРАЩЁННОГО УМНОЖЕНИЯ

Запомните!

Формулы сокращённого умножения

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	– квадрат суммы
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	– квадрат разности
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	– куб суммы
$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	– куб разности
$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$	– разность квадратов
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$	– разность кубов
$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$	– сумма кубов

Примеры

Рассмотрим примеры, где используются эти формулы.

Пример 1. Упростите выражение $(4a - 5)^2 - 2a(3a + 4) - 5a(2a - 2)$.

Шаг 1. Раскроем скобки в выражении $(4a - 5)^2 - 2a(3a + 4) - 5a(2a - 2)$, используя формулу сокращённого умножения (квадрат разности) и распределительный закон.

$$(4a - 5)^2 - 2a(3a + 4) - 5a(2a - 2) = 16a^2 - 40a + 25 - 6a^2 - 8a - 10a^2 + 10a$$

Шаг 2. Приведём подобные слагаемые.

$$16a^2 - 40a + 25 - 6a^2 - 8a - 10a^2 + 10a = -38a + 25$$

Пример 2. Проверьте равенство: $(3a - 1)^3 - (3a + 1)^3 + (100a^2 + 2) = 46a^2$

Приведём к многочлену выражение в левой части равенства, используя формулы сокращённого умножения, и приведём подобные слагаемые.

$$(3a - 1)^3 - (3a + 1)^3 + (100a^2 + 2) = 27a^3 - 3 \cdot (3a)^2 \cdot 1 + 3 \cdot 3a \cdot 1^2 - 1 - 27a^3 - 3 \cdot (3a)^2 \cdot 1 - 3 \cdot 3a \cdot 1^2 - 1 + 100a^2 + 2 = 27a^3 - 27a^3 + 9a - 2 - 27a^2 - 27a^2 - 9a + 100a^2 + 2 = 46a^2$$

Таким образом, равенство $(3a - 1)^3 - (3a + 1)^3 + (100a^2 + 2) = 46a^2$ верно.

Упражнения

Представьте в виде квадрата двучлена. (1 – 2)

- | | | |
|---------------------|----------------------|---------------------|
| 1) $a^2 + 2a + 1$ | 2) $b^2 - 8b + 16$ | 3) $c^2 + 10c + 25$ |
| 4) $n^2 + 14n + 49$ | 5) $100 - 20z + z^2$ | 6) $81 + 18b + b^2$ |
- | | | |
|------------------------|------------------------|------------------------|
| 1) $0,16 - 0,8t + t^2$ | 2) $z^2 + 1,4z + 0,49$ | 3) $0,36 - 1,2b + b^2$ |
| 4) $2,25 - 3x + x^2$ | 5) $y^2 - 3,2y + 2,56$ | 6) $3,61 + 3,8d + d^2$ |
- Упростите выражения.

1) $(a^3 + 6b^2)^2 - (6b^2 - a^3)^2$	2) $(a^2 - 7b^3)^2 + (a^2 + 7b^3)^2$
3) $(9x + 2y^4)^2 - (2y^4 - 9x)^2$	4) $(5x^3 - 4y)^2 + (4y + 5x^3)^2$

4. Решите уравнения.

1) $(x - 3)(x^2 + 3x + 9) - x^3 = 3x$

2) $(3 + x)(x^2 - 3x + 9) - x^3 = -10x$

3) $(5 - x)(x^2 + 5x + 25) = 5x - x^3$

4) $(6 - x)(36 + 6x + x^2) = 18x - x^3$

5. Проверьте верность равенств.

1) $(x - 6)(x^2 + 6x + 36) - 0,5(2x^3 - 432) = 0$

2) $28x^3 - (3x - 1)(9x^2 + 3x + 1) - (3 + x)(9 - 3x + x^2) = -26$

6. Запишите выражения как квадрат двучлена.

1) $a^2 - 10ab + 25b^2$

4) $a^{12} - 2a^6b^7 + b^{14}$

2) $k^6 + 6k^3 + 9$

5) $4a^2b^2 + 36ab + 81$

3) $a^2 - 4ay + 4y^2$

6) $0,01x^2 + 0,1xy + 0,25y^2$

7. Упростите выражения.

1) $(4a^3 - 1)(9a^3 + 5) - (6a^3 - 1)^2$

2) $(c^4 - 1)^2 - (c^4 + 4)(c^4 - 6)$

3) $(d^7 - 3)(d^7 + 7) - (d^7 + 2)^2$

4) $(k^8 + 9)(11 - k^8) + (k^8 + 1)^2$

8. Решите уравнения.

1) $(2x - 3)(4x^2 + 6x + 9) - 8x^3 = 27x$

2) $(3 + 4x)(16x^2 - 12x + 9) - 64x^3 = -10x$

3) $(5 - 2x)(4x^2 + 10x + 25) = 25x - 8x^3$

4) $(6 - 5x)(36 + 30x + 25x^2) = 108x - 125x^3$

9*. Проверьте верность равенств.

1) $(5x - 6)(25x^2 + 30x + 36) - 0,25(500x^3 - 864) = 0$

2) $91x^3 - (3x - 4)(9x^2 + 12x + 16) - (3 + 4x)(9 - 12x + 16x^2) = 37$

10*. Разложите на множители.

1) $a^{12} - b^{12}$

2) $a^6 + b^6$

3) $x^4 + x^2 - 2$

4) $a^8 - b^8$

5) $a^4 + 4$

6) $a^8 + a^4 + 1$

7) $(x + y + 2)(x + y) - (x - y)^2 + 1$

11*. Вычислите.

1) $\frac{36^2 - 8^2}{32^2 - 10^2}$

2) $\frac{70^2 - 20^2}{60^2 - 20^2}$

3) $\frac{38^2 - 10^2}{33^2 - 9^2}$

4) $\frac{51^3 - 49^3}{51 - 49} + 51 \cdot 49$

5) $\frac{67^3 + 47^3}{67 + 47} - 67 \cdot 47$

6) $\frac{84^3 + 54^3}{84 + 54} - 84 \cdot 54$

7) $(91^3 + 39^3):(91^2 - 91 \cdot 39 + 39^2)$

8) $(56^3 + 44^3):(56^2 - 56 \cdot 44 + 44^2)$

9) $2020 \frac{2018}{2019} \cdot 2021 \frac{2018}{2019} - 2019 \frac{2018}{2019} \cdot 2022 \frac{2018}{2019}$

10) $\frac{1,8^2 - 0,7^2}{2,5 \cdot 0,7 - 4,5}$

11) $\frac{0,8^2 + 1,12 + 0,7^2}{0,8^2 - 0,7^2}$

12) $\frac{1,4^2 + 4,2 + 1,5^2}{1,4^2 - 1,5^2}$

13) $\frac{(4,7^2 - 5,3^2)(11,4^2 - 4,2^2)}{(8,1^2 - 7,5^2)(9,1^2 - 1,9^2)}$

12*. Разложите на множители.

1) $ax^2 - bx^2 - bx + ax - a + b$

2) $ax^2 + bx^2 - bx - ax + a + b$

3) $ax^2 + bx^2 + ax - cx^2 + bx - cx$

4) $ax^2 + bx^2 - bx - ax + cx^2 - cx$

5) $5ax^2 - 10ax - bx + 2b - x + 2$

6) $m^2 x^4 - mnx^3 + 2mx^2 - 2nx - n + mx$

7) $xyz + x^2 y^2 + 3x^4 y^4 + 3x^3 y^2 z - xy - z$

8) $12a^2 b^2 - 6abc + 3ac^2 - 6a^2 bc - c + 2ab$

13*. Упростите.

1) $(a + b)(a - b)(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$

2) $(a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)(a^4 - a^2 + 1)$

3) $(a + 1)(a - 3)(a^2 - a + 1)(a^2 + 3a + 9)$

4) $(a - 1)(a + 3)(a^2 - 3a + 9)(a^2 + a + 1)$

5) $(2a + 1)(4a^2 - 4a + 1) - (a - 3)(a^2 + 3a + 9)$

6) $(3a + 1)(9a^2 - 3a + 1) + (a - 1)(a^2 + a + 1)$

7) $(3a + 1)(3a - 1)(9a^2 - 3a + 1)(9a^2 + 3a + 1)$

8) $(a + 3)(a - 3)(a^2 - 3a + 9)(a^2 + 3a + 9)$

14*. Запишите выражения в виде квадрата многочлена.

1) $a(a + 2) + b(b + 2) + 2ab + 1$

2) $(a + b)^2 - 4(a + b - 1)$

3) $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$

4) $(a + 1)(a + 2)(a + 3)(a + 4) + 1$

15*. Решите уравнения, используя формулы сокращённого умножения:

1) $16x^2 - (4x - 1)(4x + 1) + 2x = 7$

2) $(2x - 5)^2 - (2x - 3)(2x + 3) = 0$

3) $(3x + 2)^2 + (4x - 1)(4x + 1) = (5x - 1)^2$

4) $(3x - 1)^2 - 8(x + 1)^2 = (x + 2)(x - 2)$

16*. Решите уравнения:

1) $(2 - x)(x + 2) = x(3 - x)$

2) $x(x - 2) - 8 = (x + 2)(x - 4)$

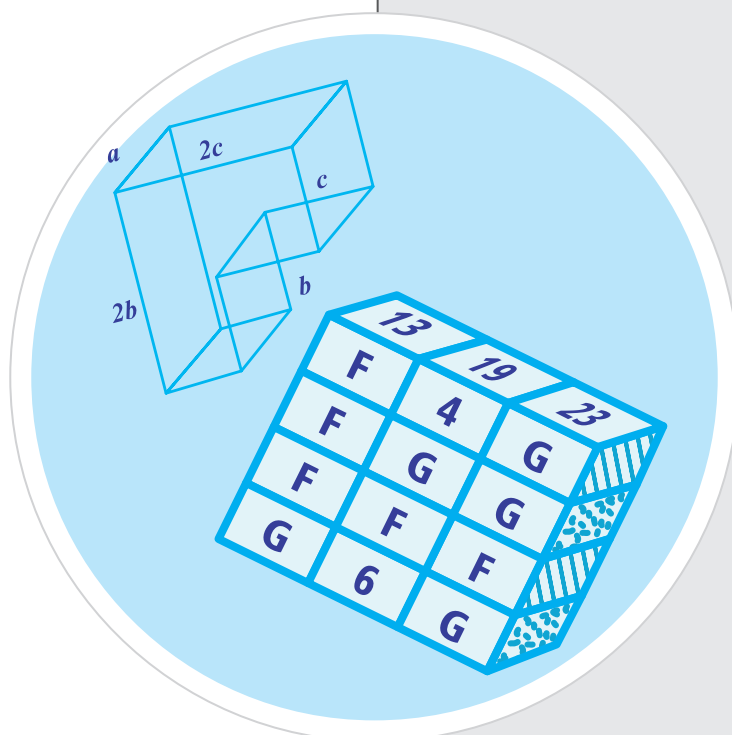
3) $2(x + 3)(x - 2) - 7 = (2x + 1)(x - 3)$

4) $13x(6x - 1) - 6x(13x - 9) = -13 - 24x$

III

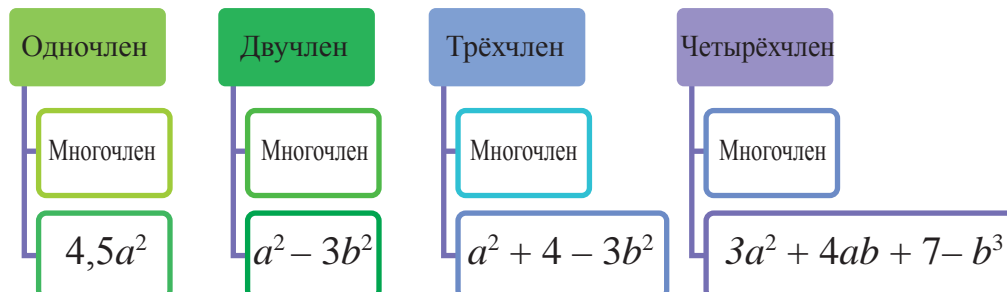
ГЛАВА

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДРОБИ



АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ДРОБЬ. СОКРАЩЕНИЕ ДРОБЕЙ

Вспоминаем



Запомните!

Выражение вида $\frac{A}{B}$ называют **алгебраической дробью**. Здесь

A и B – могут быть числами, одночленами, многочленами.

Если числитель и знаменатель дроби является числом, такую дробь тоже можно назвать алгебраической.

Алгебраические дроби:

$$\frac{1}{2}; \frac{x}{4}; \frac{2}{x}; \frac{x+3}{5}; \frac{6}{x-5}; \frac{2x-y}{x+3y}; \frac{2ab}{a+b}; \frac{x^2-3xy}{x+4y^2}; \dots$$

Если вместо букв в алгебраическую дробь подставить их числовые значения и проделать соответствующие арифметические действия, то получим её числовое значение

Например, $\frac{2ab}{a-2b}$. Найдите значение алгебраической дроби при $a = 3$; $b = 1$.

$$\frac{2 \cdot 3 \cdot 1}{3 - 2 \cdot 1} = \frac{6}{1} = 6.$$

Здесь можно найти числовое значение алгебраической дроби только при условии, что $a \neq 2b$, поскольку дробь имеет смысл только при знаменателе, не равном нулю. Все знают, что на ноль делить нельзя. Если знаменатель алгебраической дроби обращается в ноль при каком-то числовом значении неизвестного, то это выражение не имеет смысла.

Буквы в знаменателе алгебраической дроби принимают только такие значения, при которых знаменатель этой дроби не обращается в ноль.

Алгебраическая дробь $\frac{2abc}{a(a-1)}$ принимает все значения, за исключением $a = 1$ и $a = 0$, так как при $a = 1$ и $a = 0$ знаменатель принимает значение ноль. Это невозможно.

Вспоминаем

Замену выражения $ac + bc$ выражением $(a + b) \cdot c$ или выражением $c \cdot (a + b)$ называют **вынесением общего множителя c за скобку**.

Запомните!

При сокращении алгебраических дробей используется основное свойство обыкновенных дробей.

$\frac{A}{B}$ Числитель и знаменатель дроби можно умножать или делить на число, не равное нулю.

$$\frac{A}{B} = \frac{A \cdot C}{B \cdot C} \qquad \frac{A}{B} = \frac{A : C}{B : C} \qquad B \neq 0, \quad C \neq 0.$$

Поскольку числитель и знаменатель алгебраической дроби являются одночленами или многочленами, то их можно представить в виде произведения. В этом нам помогут пройденные темы умножения одночленов и многочленов, а также формулы сокращённого умножения.

Примеры

Пример 1: Сократите дробь $\frac{2}{6a}$.

Так как в числителе и знаменателе этого выражения 2 является общим множителем, то мы получаем следующий результат

$$\frac{2}{6a} = \frac{1 \cdot 2}{3a \cdot 2} = \frac{1}{3a}.$$

Пример 2: Сократите алгебраическую дробь $\frac{3a}{4a}$.

Как видите, в числителе и знаменателе этой алгебраической дроби общий множитель a . Следовательно, числитель и знаменатель этого выражения можно разделить на a .

$$\frac{3a}{4a} = \frac{3}{4}$$

Пример 3: Сократите алгебраическую дробь $\frac{4ab}{12a^2b}$.

В числителе и знаменателе выражения отделяем общий множитель.

$$\frac{1 \cdot 4ab}{3a \cdot 4ab} = \frac{1}{3a}$$

Пример 4: Сократите алгебраическую дробь $\frac{3a - 3b}{3a + 3b}$.

$$\frac{3a - 3b}{3a + 3b} = \frac{3(a - b)}{3(a + b)} = \frac{a - b}{a + b}$$

Пример 5: Сократите алгебраическую дробь $\frac{5a + 5b}{9a + 9b}$.

$$\frac{5a + 5b}{9a + 9b} = \frac{5(a + b)}{9(a + b)} = \frac{5}{9}$$

Пример 6: Сократите алгебраическую дробь $\frac{2a+2b}{a^2-b^2}$.

В числителе и знаменателе дроби $\frac{2a+2b}{a^2-b^2}$ есть общий множитель $a+b$.

$$\frac{2a+2b}{a^2-b^2} = \frac{2(a+b)}{(a-b)(a+b)} = \frac{2}{a-b}$$

Пример 7: Сократите алгебраическую дробь $\frac{x^3-y^3}{x^2+xy+y^2}$.

$$\frac{x^3-y^3}{x^2+xy+y^2} = \frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{x^2+xy+y^2} = x-y$$

Запомните!

Если в числителе или знаменателе дроби $\frac{A}{B}$ по ходу преобразования появятся противоположные выражения, то наша дробь преобразуется в противоположную дробь:

$$\frac{-A}{B} \text{ или } \frac{A}{-B}$$

Всегда имеет место равенство $\frac{-A}{B} = -\frac{A}{B}$ или $\frac{A}{-B} = -\frac{A}{B}$.

Примеры

Пример 8. $\frac{-1}{6} = -\frac{1}{6}$

Пример 9. Сократите алгебраическую дробь $\frac{-3a-3b}{3a+3b}$.

$$\frac{-3a-3b}{3a+3b} = \frac{-3(a+b)}{3(a+b)} = \frac{-3}{3} = -\frac{3}{3} = -1$$

Упражнения

1. Среди перечисленных выражений найдите алгебраическую дробь.

1) $\frac{4a}{7} + \frac{1}{2}$

2) $\frac{7a+5}{11}$

3) $\frac{1}{a} + \frac{1}{2}$

4) $\frac{2x-b}{2x+b}$

5) $\frac{4}{5a+1}$

6) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

7) $\frac{2a-1}{a+1} + \frac{a}{5}$

8) $\frac{7c}{4,5 + \frac{2}{3}}$

2. Найдите значение выражений.

1) $\frac{2a-1}{a}$, если $a = 1; -1; -4; 6; 100$.

2) $\frac{3x-7}{2x+5}$, если $x = -1; 2; -0,2; 0; 2,1$.

3) $\frac{k^2+4}{2k-4}$, если $k = 3; 1,5; 5; 10$.

4) $\frac{d+3}{2d} + \frac{2d}{d-3}$, если $d = 4; 2,5; 5; 2$.

5) $\frac{(x+y)^2-1}{x^2+1}$, если $x = 1; y = 0$.

6) $\frac{a^2-b}{b^2+a}$, если $a = 2; b = 1$.

3. Заполните таблицу.

a	-6	-4	-3	-0,5	0	1	4	1,5
$\frac{a-4}{a+2}$								

4. При каком значении переменной данное выражение не имеет смысла?

1) $\frac{a}{a-1}$

2) $\frac{5}{x-4}$

3) $\frac{5a-1}{b}$

4) $\frac{3}{a^2+1}$

5) $\frac{2a+1}{a(a+1)} - 5$

6) $\frac{1}{a} + \frac{2}{a-2}$

5. Составьте алгебраическую дробь по данным.

1) Числитель – это разность $2x$ и y , а знаменатель – их сумма.

2) Числитель представляет собой произведение чисел a и b , знаменатель представляет собой удвоенную сумму чисел a и b .

6. Сократите дроби.

1) $\frac{-35}{-49}$

2) $\frac{-91}{-39}$

3) $\frac{77}{-42}$

4) $\frac{-125}{175}$

7. Сократите алгебраические дроби. (7 – 8)

1) $\frac{a^9}{a^{13}}$

2) $\frac{a^{43}}{a^{49}}$

3) $\frac{15a}{25a^2}$

4) $\frac{35ab}{57ac}$

5) $\frac{a^7}{3a^9}$

6) $\frac{4x^2y}{6xy^2}$

7) $\frac{a^7b^{10}}{a^9b^5}$

8) $\frac{36a^9b^7}{54a^2b^{13}}$

8. 1) $\frac{12ab}{15ac}$ 2) $\frac{16ac^2}{4a^3c}$ 3) $\frac{-18xy^3}{12x^2y}$ 4) $\frac{-5m^5n}{-10n^7}$

5) $\frac{24abc}{36ac}$ 6) $\frac{14p^3q}{21p^2q^3}$ 7) $\frac{35ab^7}{41a^4b^4}$ 8) $\frac{15kt^9}{3k^8t}$

9. Приведите знаменатель дроби к виду $6a^4b^3$.

1) $\frac{a}{3ab}$ 2) $\frac{2ab^2}{a^2b}$ 3) $\frac{5b}{15ab^4}$

4) $\frac{7ab}{4a^3b^2}$ 5) $\frac{0,5ab}{ab^2}$ 6) $\frac{-abc}{a^5b}$

10. Приведите знаменатель алгебраической дроби к виду:

1) $a^2 - b^2$, если дана дробь $\frac{2a}{a-b}$.

2) $(x+y)^2$, если дана дробь $\frac{-3c}{x+y}$.

3) $x^3 - 1$, если дана дробь $\frac{2a}{x-1}$.

4) $m^3 + n^3$, если дана дробь $\frac{1}{m^2 - mn + n^2}$.

11. Преобразуйте дробно-рациональное выражение.

1) $\frac{a^7 + a^5}{a^4 + a^2}$ 2) $\frac{x^7 + x^9}{x^4 + x^2}$ 3) $\frac{b^7 - b^{10}}{b^5 - b^2}$ 4) $\frac{m^6 - m^4}{m^3 + m^2}$

5) $\frac{x-2y}{2y-x}$ 6) $\frac{6(k-t)^2}{3t-3k}$ 7) $\frac{-(-c-d)^2}{c+d}$ 8) $\frac{(p-q)^2}{(q-p)^2}$

12. Сократите дроби.

1) $\frac{2(x-y)}{3(x-y)}$ 2) $\frac{2a(a+b)^2}{(a+b)^3}$ 3) $\frac{7(x-y)}{3(y-x)}$ 4) $\frac{a-b}{(a-b)^4}$

5) $\frac{c-d}{(d-c)^5}$ 6) $\frac{3a+3b}{5a+5b}$ 7) $\frac{13ab}{a^2b - ab^2}$ 8) $\frac{8a+12b}{10a+15b}$

9) $\frac{ac-cd}{bc-cd}$ 10) $\frac{4m^2 - mn}{4mn - n^2}$ 11) $\frac{3ac+4bc}{3ad+4bd}$ 12) $\frac{5y-35}{y^2-49}$

13. Найдите значение алгебраической дроби.

1) $\frac{a^5 + 4a^4}{a^4 + 4a^3}$, если $a = 2$. 2) $\frac{3m^5 - 4m^4}{3m^3 - 4m^2}$, если $m = -2$.

3) $\frac{2a^5 + 12a^4}{a^4 + 6a^3}$, если $a = 1,6$. 4) $\frac{12m^5 - 20m^4}{3m^3 - 5m^2}$, если $m = -1\frac{1}{2}$.

14. Сократите алгебраическую дробь.

$$1) \frac{x(a-2b)}{y(2b-a)} \quad 2) \frac{3x-36}{12y-xy} \quad 3) \frac{16-z^2}{2z-8} \quad 4) \frac{7c^2-7d^2}{d^2-2dc+c^2}$$

$$5) \frac{6u(u-v)}{u^4(v-u)} \quad 6) \frac{5a-15a^2}{60a^2-20a} \quad 7) \frac{9-9z}{(z^2-2z+1)} \quad 8) \frac{(2a-4b)^2}{4(a^2-4b^2)}$$

15. Преобразуйте дробно-рациональное выражение.

$$1) \frac{18x-3x^2}{8x^2-48x} \quad 2) \frac{8a-40}{15-3a} \quad 3) \frac{4-b^2}{10-5b} \quad 4) \frac{(3a+6b)^2}{5a+10b}$$

$$5) \frac{az+bz-at-bt}{bz-bt} \quad 6) \frac{x^2+6x+9}{27+x^3}$$

ПРИВЕДЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДРОБЕЙ К ОБЩЕМУ ЗНАМЕНАТЕЛЮ

Вспоминаем

Приведите дробь к общему знаменателю $\frac{1}{16}$ и $\frac{3}{20}$.

Для знаменателей дробей находим НОК $(16, 20) = 80$. Найденный НОК будет общим знаменателем для наших дробей.

То есть:

$$\frac{1 \cdot 5}{4 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{5}{80} \quad \text{и} \quad \frac{3 \cdot 4}{4 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{12}{80} \quad \text{Ответ: } \frac{5}{80} \quad \text{и} \quad \frac{12}{80}$$

Этот метод подчиняется основному свойству дробей. То есть числитель и знаменатель обыкновенной дроби можно умножить или разделить на одно и то же ненулевое число. При этом значение дроби не меняется.

Запомните!

Правило приведения обыкновенных дробей к общему знаменателю справедливо и для алгебраических дробей.

Чтобы привести алгебраические дроби к общему знаменателю, нужно:

- 1) найти общий знаменатель данных дробей;
- 2) найти дополнительный множитель для каждой дроби;
- 3) умножить числитель каждой дроби на её дополнительный множитель;
- 4) каждая дробь должна быть записана с найденным числителем и общим знаменателем.

Общий знаменатель алгебраических дробей – это наименьшее общее кратное знаменателей этих дробей. Это отличный от нуля многочлен с целым коэффициентом, делящийся на каждый из знаменателей данных алгебраических дробей.

Примеры

Пример 1. Приведите алгебраические дроби $\frac{2a}{5b}$; $\frac{1}{15ab}$ к общему знаменателю.

Искомый общий знаменатель данных алгебраических дробей должен делиться на знаменатель каждой дроби (каждый делитель должен быть отличным от нуля одночленом или многочленом с целыми коэффициентами).

Общий знаменатель данных алгебраических дробей равен $15ab$, и при делении его на знаменатель первой дроби получается $3a$, а при делении на знаменатель второй дроби получается 1 . Итак, чтобы привести эти две дроби к общему знаменателю, достаточно числитель и знаменатель первой дроби умножить на $3a$, а второй на 1 .

$$\frac{2a \cdot 3a}{5b \cdot 3a} = \frac{6a^2}{15ab} \text{ и } \frac{1}{15ab}$$

Пример 2. Приведите алгебраические дроби к общему знаменателю:

$$\frac{5}{12ab^2c}; \frac{7}{4a^2bc^3}; \frac{1}{24ab^3c^2}$$

НОК чисел 12 , 4 и 24 равен 24 . Знаменатели трёх дробей состоят из произведения abc . Поскольку a , b и c имеют разные натуральные показатели степеней, каждый из них делится на $a^2b^3c^3$, то общий знаменатель этих алгебраических дробей равен $24a^2b^3c^3$. Делим этот одночлен на знаменатель каждой дроби и получаем выражение, на которое нужно умножить его числитель и знаменатель.

Числитель и знаменатель первой дроби умножаем на $24a^2b^3c^3 : 12ab^2c = 2abc$.

$$\frac{5 \cdot 2abc}{12ab^2c \cdot 2abc} = \frac{10abc}{24a^2b^3c^3};$$

Числитель и знаменатель второй дроби умножаем на $24a^2b^3c^3 : 4a^2bc^3 = 6b^2$.

$$\frac{7 \cdot 6b^2}{4a^2bc^3 \cdot 6b^2} = \frac{42b^2}{24a^2b^3c^3};$$

Числитель и знаменатель третьей дроби умножаем на $24a^2b^3c^3 : 24ab^3c^2 = ac$.

$$\frac{1 \cdot ac}{24ab^3c^2 \cdot ac} = \frac{ac}{24a^2b^3c^3}$$

Пример 3. Приведите алгебраические дроби к общему знаменателю:

$$\frac{1}{(a+b)^2}; \frac{2}{a^2+ab}; \frac{5}{ab+b^2}.$$

Разложим на множители знаменатели данных дробей.

$$\frac{1}{(a+b)^2} = \frac{1}{(a+b)(a+b)}; \frac{2}{a^2+ab} = \frac{2}{a(a+b)}; \frac{5}{ab+b^2} = \frac{5}{b(a+b)}$$

Если обратить внимание на знаменатели этих дробей, то каждый из них содержит множитель $(a+b)$. Помимо общего множителя в каждом знаменателе имеется ещё избыточный множитель, умножив на который числитель и знаменатель других дробей, можно получить общий знаменатель.

Числитель и знаменатель 1 дроби умножим на ab .

$$\frac{1 \cdot ab}{(a+b)(a+b) \cdot ab} = \frac{ab}{ab(a+b)^2}$$

Числитель и знаменатель 2 дроби умножим на $b(a+b)$.

$$\frac{2 \cdot b(a+b)}{a(a+b) \cdot b(a+b)} = \frac{2ab + 2b^2}{ab(a+b)^2}$$

Числитель и знаменатель 3 дроби умножим на $a(a+b)$.

$$\frac{5 \cdot a(a+b)}{b(a+b) \cdot a(a+b)} = \frac{5a^2 + 5ab}{ab(a+b)^2}$$

Упражнения

Приведите к общему знаменателю. (1 – 10)

1. 1) $\frac{3}{4}$ и $\frac{5}{6}$ 2) $\frac{4}{7}$ и $\frac{9}{14}$ 3) $\frac{8}{33}$ и $\frac{9}{44}$ 4) $\frac{11}{25}$ и $\frac{13}{15}$

2. 1) $\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{a}$ 2) $\frac{3}{a}$ и $\frac{a}{4}$ 3) $\frac{3}{2a}$ и $\frac{7}{a}$ 4) $\frac{4}{3a}$ и $\frac{1}{6}$

3. 1) $\frac{1}{2x}$, $\frac{2}{3x}$, $\frac{5}{6x^2}$ 2) $\frac{1}{2x}$, $\frac{5}{3y}$, $\frac{7}{6xy}$ 3) a и $\frac{3}{a}$ 4) a и $\frac{1}{b}$

4. 1) ab , $\frac{b}{2a}$, $\frac{a}{3b}$ 2) a^2 , $\frac{1}{a^4}$ 3) $\frac{2x}{a^2b}$, $\frac{3x}{ab^2}$ 4) $\frac{5c}{3a}$, $\frac{3d}{4a}$

5. 1) $\frac{a}{y}$, $\frac{b}{xy}$ 2) $\frac{3}{x}$, $\frac{4}{xy}$ 3) $\frac{4}{3x^4}$, $\frac{4}{5y^3}$, $\frac{5}{15x^3y^4}$

6. 1) $\frac{1}{c}$, $\frac{2}{c^2}$ 2) $\frac{a}{4n}$, $\frac{b}{8n}$ 3) $\frac{3}{c^3}$, $\frac{1}{c^2}$ 4) $\frac{a}{12b}$, $\frac{b}{18a}$

7. 1) $\frac{1}{3x}$, $\frac{15}{y}$, $\frac{7}{45xy}$ 2) $\frac{a}{3b}$, $\frac{1}{ab}$, $\frac{3b}{4a}$ 3) $\frac{2}{k^2}$, $\frac{1}{12kt}$, $\frac{3}{t^3}$

8. 1) $\frac{1}{5a^2}$, $\frac{a^2+b^2}{15ab^2}$, $\frac{b-1}{3a^2b}$ 2) $\frac{a-b}{20a^4b^2}$, $\frac{5}{8ab^2}$, $\frac{2}{5a^2b}$

3) $\frac{a}{a-2b}$, $\frac{b}{a+2b}$, $\frac{ab}{a^2-4b^2}$ 4) $\frac{b}{2a^2}$, $\frac{1}{6a^2b}$, $\frac{5}{12a^3b^2}$

9. 1) $\frac{x}{2a-2b}, \frac{y}{3a-3b}$ 2) $\frac{a}{4a-8b}, \frac{b}{5a-10b}$
- 3) $\frac{a+b}{a^3}, \frac{a-b}{b^3}$ 4) $\frac{a+b}{a^2b}, \frac{a-b}{ab^2}$
- 10*. 1) $\frac{3b}{b-2}, \frac{4b}{b+2}, \frac{12b^2}{b^2-4}$ 2) $\frac{1}{x^2-6x+9}, \frac{1}{x^2+6x+9}$
- 3) $\frac{5x}{x^2-49}, \frac{8x}{x-7}, \frac{4x}{x+7}$ 4) $\frac{1}{a+1}, \frac{1}{a+2}, \frac{1}{a+3}$

СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДРОБЕЙ

Запомните!

Сложение и вычитание алгебраических дробей выполняется так же, как сложение и вычитание обыкновенных дробей. Отличие в том, что знаменатели обыкновенных дробей – натуральные числа, а знаменатели алгебраических дробей – многочлены.

Если нужно найти сумму (или разность) алгебраических дробей с одинаковыми знаменателями, достаточно сложить (или вычесть) их числители.

$$\frac{k}{m} + \frac{p}{m} = \frac{k+p}{m} \qquad \frac{k}{m} - \frac{p}{m} = \frac{k-p}{m}$$

Равенства имеют место для любых алгебраических дробей со знаменателем $m \neq 0$.

Примеры

Пример 1. Сложите дроби $\frac{a}{2c}$ и $\frac{b}{2c}$. $\frac{a}{2c} + \frac{b}{2c} = \frac{a+b}{2c}$.

Пример 2. Сложите дроби $\frac{5a}{x+y} + \frac{2b}{x+y} + \frac{3a-b}{x+y}$.

$$\frac{5a}{x+y} + \frac{2b}{x+y} + \frac{3a-b}{x+y} = \frac{5a+2b+3a-b}{x+y} = \frac{8a+b}{x+y}$$

Пример 3. Найдите сумму дробей $\frac{a^2}{a-3b}; \frac{2ab}{a-3b}; \frac{b^2}{a-3b}$.

$$\frac{a^2}{a-3b} + \frac{2ab}{a-3b} + \frac{b^2}{a-3b} = \frac{a^2 + 2ab + b^2}{a-3b} = \frac{(a+b)^2}{a-3b}.$$

Пример 4. Найдите разность дробей $\frac{5}{7a}$ и $\frac{2}{7a}$. $\frac{5}{7a} - \frac{2}{7a} = \frac{5-2}{7a} = \frac{3}{7a}$.

Пример 5. Найдите разность дробей $\frac{5x}{2x-1}$ и $\frac{4}{2x-1}$.

$$\frac{5x}{2x-1} - \frac{4}{2x-1} = \frac{5x-4}{2x-1}.$$

Чтобы сложить (или вычесть) алгебраические дроби с разными знаменателями, приведите их к алгебраическим дробям с общим знаменателем и используйте правило сложения (или вычитания) алгебраических дробей с одинаковыми знаменателями.

Пример 6. Сложите дроби $\frac{1}{2a^2b}$ и $\frac{1}{6ab^2}$.

Для данных дробей общим знаменателем будет $6a^2b^2$.

$$\frac{1}{2a^2b} + \frac{1}{6ab^2} = \frac{3b}{6a^2b^2} + \frac{a}{6a^2b^2} = \frac{a+3b}{6a^2b^2}.$$

Пример 7. Найдите сумму $\frac{a+7}{a^2+ab}$ и $\frac{b-7}{ab+b^2}$.

Знаменатели этих дробей мы можем разложить на множители.

$$a^2 + ab = a(a+b); \quad ab + b^2 = b(a+b).$$

Сравнив их, находим общий знаменатель $ab(a+b)$.

$$\begin{aligned} \text{Таким образом: } \frac{a+7}{a^2+ab} + \frac{b-7}{ab+b^2} &= \frac{a+7}{a(a+b)} + \frac{b-7}{b(a+b)} = \frac{b(a+7)+a(b-7)}{ab(a+b)} = \frac{ab+7b+ab-7a}{ab(a+b)} = \\ &= \frac{7b-7a+2ab}{ab(a+b)}. \end{aligned}$$

Пример 8. Найдите разность дробей $\frac{4a-3b}{a^3-2a^2b}$ и $\frac{a-3b}{a^2b-2ab^2}$.

Чтобы найти общий знаменатель этих дробей, для начала представим многочлены в их знаменателях в виде произведения множителей.

$$a^3 - 2a^2b = a \cdot a \cdot (a - 2b); \quad a^2b - 2ab^2 = a \cdot b \cdot (a - 2b).$$

Общий знаменатель $a^2b(a-2b)$.

$$\frac{4a-3b}{a^3-2a^2b} - \frac{a-3b}{a^2b-2b^2} = \frac{(4a-3b)b}{a^2b(a-2b)} - \frac{(a-3b)a}{a^2b(a-2b)} = \frac{4ab-3b^2-a^2+3ab}{a^2b(a-2b)} = \frac{7ab-a^2-3b^2}{a^3b-2a^2b^2}$$

Упрощайте результат сложения или вычитания.

Упражнения

Выполните действия. (1 – 5)

1. 1) $\frac{2}{a} + \frac{3}{a}$ 2) $\frac{2}{a} - \frac{3}{a}$ 3) $\frac{7a}{b^5} + \frac{9a}{b^5}$

2. 1) $\frac{a}{2} - \frac{b}{3}$ 2) $\frac{a}{5} + \frac{c}{10}$ 3) $\frac{7}{9a} + \frac{5}{6}$

4) $\frac{3}{4a} - \frac{5}{8a}$ 5) $\frac{2}{3a} - \frac{1}{4a}$ 6) $\frac{7}{12c} - \frac{13}{15c}$

3. 1) $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$ 2) $\frac{a}{5} - \frac{b}{6}$ 3) $a - \frac{1}{a}$

4) $2 + \frac{a}{2}$ 5) $13 - \frac{x}{5}$ 6) $-3a + \frac{a}{4}$

4. 1) $\frac{a}{4} - \frac{c}{6b}$ 2) $\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2}$ 3) $\frac{a}{b} - c + \frac{b}{a}$

4) $7 - \frac{3}{a} + \frac{4}{a^2}$ 5) $\frac{5}{a^2b} + \frac{6}{ab^2}$ 6) $\frac{1}{ab} - \frac{1}{bc}$

5. 1) $\frac{2}{ab} + \frac{3}{ac} + \frac{4}{bc}$ 2) $\frac{7}{ab} - \frac{8}{b^3}$ 3) $\frac{b^2}{a^4} + \frac{b}{a^3}$

4) $n - \frac{1}{n^3} + \frac{2}{n^2}$ 5) $\frac{a}{m^3n} + \frac{b}{mn}$ 6) $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b}$

Выполните действия. (6 – 9)

6. 1) $\frac{1}{4a^3b^5} + \frac{1}{6a^4b^2} + \frac{1}{3a^6b}$ 2) $\frac{5}{2a^3} + \frac{4}{5a^6} + \frac{9}{a^2}$

3) $\frac{b}{ac} + \frac{b}{a^2c} + \frac{b}{ac^2}$ 4) $\frac{2}{a-b} + \frac{2}{a+b}$

$$7. \quad 1) \frac{1}{xy} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \qquad 2) \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

$$3) \frac{6}{a+1} - \frac{5}{a} \qquad 4) \frac{a}{a-b} + \frac{b}{a+b}$$

$$8. \quad 1) \frac{3}{a^2+a} - \frac{2}{ab+b} \qquad 2) \frac{4}{(x-y)^2} - \frac{3}{x-y}$$

$$3) \frac{3x+2y}{x^2-y^2} + \frac{1}{x+y} + \frac{2}{x-y} \qquad 4) \frac{3x}{3-x} - \frac{5x^2+7}{x^2-9};$$

$$5) \frac{5a+3}{a^2-4a+4} - \frac{7}{a-2} \qquad 6) \frac{6}{a-3} - \frac{7}{a+3}$$

$$7) \frac{1}{x^2-10x+25} - \frac{1}{(x+5)^2} \qquad 8) a + \frac{a}{a-1} + \frac{a}{a+1}$$

$$9. \quad 1) a - \frac{a+1}{a-1} + 2 \qquad 2) \frac{2x+3}{x^2-49} - \frac{7}{x-7}$$

$$3) \frac{c-11}{c^2-16} - \frac{c+7}{c^2-4c} \qquad 4) \frac{1}{x(x+9)} - \frac{1}{x(x-9)}$$

$$5) \frac{4}{3(a-11)} + \frac{3}{4(a-11)} \qquad 6) \frac{a-b}{a+b} - \frac{a+b}{a-b}$$

10*. Выполните действия.

$$1) \frac{2}{4x+5} + \frac{2}{4x-5} + \frac{8x+10}{16x^2-25} \qquad 2) \frac{5}{a+3} - \frac{a-1}{a^2-3a+9} - \frac{a^2-7a}{a^3+27}$$

$$3) \frac{4}{a-2} + \frac{2a-3}{a^2+2a+4} - \frac{2a^2-4a+5}{a^3-8}$$

$$4) \frac{1}{a^2+3a+2} + \frac{1}{a^2+5a+6}$$

$$5) \frac{2}{a^2-4a+3} - \frac{2}{a^2-8a+15}$$

$$6) \frac{a^2-(b-c)^2}{(a+c)^2-b^2} + \frac{b^2-(a-c)^2}{(a+b)^2-c^2} + \frac{c^2-(a-b)^2}{(b+c)^2-a^2}$$

$$7) \frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-a)(b-c)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)}$$

УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДРОБЕЙ

Запомните!

Умножение и деление алгебраических дробей осуществляется так же, как умножение и деление обыкновенных дробей.

$$\frac{k}{m} \cdot \frac{p}{n} = \frac{k \cdot p}{m \cdot n} \quad \frac{k}{m} : \frac{p}{n} = \frac{k}{m} \cdot \frac{n}{p} = \frac{k \cdot n}{m \cdot p}$$

Равенства справедливы для любых алгебраических дробей с n, m не равным 0.

Примеры

Пример 1. Умножьте дроби $\frac{2a}{3b}$ и $\frac{9b^2}{4a^2}$.

$$\text{Способ 1: } \frac{2a}{3b} \cdot \frac{9b^2}{4a^2} = \frac{2a9b^2}{3b4a^2} = \frac{18ab^2}{12a^2b}$$

$$\text{Сократим результат: } \frac{18ab^2}{12a^2b} = \frac{18ab^2 : 6ab}{12a^2b : 6ab} = \frac{3b}{2a}$$

Способ 2: По возможности, перед умножением алгебраических дробей, выражения в числителе и знаменателе первой дроби нужно сократить на выражения в числителе и знаменателе второй дроби.

$$\frac{\cancel{2}a}{\cancel{3}b} \cdot \frac{\cancel{9}_3b^2}{\cancel{4}_2a^2} = \frac{3b}{2a}$$

Пример 2. Найдите произведение $\frac{12ab^3c}{17a^{14}} \cdot \frac{34c}{36a^2b}$.

$$\frac{12ab^3c}{17a^{14}} \cdot \frac{34c}{36a^2b} = \frac{2b^2c^2}{3a^{15}}$$

Пример 3. Перемножьте рациональные выражения $\frac{a^7}{28b^6}$ и $\frac{24b^5}{a^6}$.

$$\frac{a^7}{28b^6} \cdot \frac{24b^5}{a^6} \quad \text{Теперь сократим и получим } \frac{6a}{7b}.$$

Пример 4. Перемножьте алгебраические дроби $\frac{x^2-4}{x^2y^3}$ и $\frac{x^3y^2}{2y-xy}$.

Перед вычислением произведения числитель и знаменатель дроби разложим на множители.

$$\frac{(x^2-4) \cdot x^3y^2}{x^2y^3 \cdot (2y-xy)} = \frac{(x-2) \cdot (x+2) \cdot x^3 \cdot y^2}{x^2y^3 \cdot y \cdot (2-x)} \quad \text{Теперь сократим дроби.}$$

$$\frac{(x-2) \cdot (x+2) \cdot x^3 \cdot y^2}{x^2 y^3 \cdot y \cdot (2-x)} = \frac{-(x+2) \cdot x}{y \cdot y} = -\frac{x(x+2)}{y^2}$$

Пример 5. Выполните умножение. $\frac{2x+x^2}{1-x^2} \cdot \frac{x+1}{x+2} \cdot \frac{x-1}{x}$

$$\frac{2x+x^2}{1-x^2} \cdot \frac{x+1}{x+2} \cdot \frac{x-1}{x} = \frac{x(2+x) \cdot (x+1) \cdot (x-1)}{(1-x) \cdot (1+x) \cdot (x+2) \cdot x} = \frac{x(2+x) \cdot (x+1) \cdot (x-1)}{-(x-1) \cdot (1+x) \cdot (x+2) \cdot x}$$

Теперь сократим.

$$\frac{x(2+x) \cdot (x+1) \cdot (x-1)}{-(x-1) \cdot (1+x) \cdot (x+2) \cdot x} = -1$$

Пример 6. $\frac{3m+2n}{9m^2-4n^2}$ умножьте на $4n^2-12nm+9m^2$.

$$\begin{aligned} \frac{3m+2n}{9m^2-4n^2} \cdot (4n^2-12nm+9m^2) &= \frac{3m+2n}{9m^2-4n^2} \cdot \frac{4n^2-12nm+9m^2}{1} = \\ &= \frac{(3m+2n) \cdot (4n^2-12nm+9m^2)}{9m^2-4n^2} \end{aligned}$$

Теперь разложим на множители числитель и знаменатель.

$$\frac{(3m+2n) \cdot (4n^2-12nm+9m^2)}{9m^2-4n^2} = \frac{(3m+2n) \cdot (2n-3m)^2}{(3m-2n) \cdot (3m+2n)} = \frac{(3m+2n) \cdot (2n-3m)^2}{-(2n-3m) \cdot (3m+2n)}$$

Сократим дробь.

$$\frac{(3m+2n) \cdot (2n-3m)^2}{-(2n-3m) \cdot (3m+2n)} = \frac{(2n-3m)}{-1} = -(2n-3m) = 3m-2n$$

Упражнения

Выполните умножение. (1 – 6)

1. 1) $\frac{19}{42} \cdot \frac{21}{38}$

2) $\frac{45}{77} \cdot \frac{49}{54}$

3) $\frac{36}{55} \cdot \frac{25}{72}$

4) $\frac{16}{23} \cdot \frac{69}{100}$

5) $84 \cdot \frac{11}{12}$

6) $50 \cdot \frac{33}{55}$

2. 1) $\frac{3a}{b} \cdot \frac{b}{6a}$

2) $\frac{a^2 b}{12c} \cdot \frac{4c}{ab^2}$

3) $6x \cdot \frac{a}{3x^2}$

4) $\frac{x^2}{8x^3} \cdot \frac{4x}{x+4}$

5) $13a^2 \cdot \frac{b^2}{a^4}$

6) $\frac{a^8}{3b^9} \cdot 6b^7$

7) $\frac{9c^2}{5b^3} \cdot \frac{10b^4}{99c^7}$

8) $\frac{a^2b}{c^2d} \cdot c^2d$

9) $\frac{4m^2}{n} \cdot \frac{n}{16m}$

10) $\frac{9a^2}{2b^3} \cdot \frac{4b^2}{27a^3}$

11) $\frac{24a^7}{b^9} \cdot \frac{b^4}{8a^4}$

12) $\frac{21x^2y}{81} \cdot \frac{3}{7x^3y^2}$

3. 1) $\frac{x+y}{x-y} \cdot (x-y)$

2) $\frac{a-b}{a+b} \cdot (a+b)$

3) $\frac{ab}{a+b} \cdot (a+b)$

4) $\frac{7x-7y}{5x+5y} \cdot \frac{10x+10y}{49x-49y}$

4. 1) $\left(\frac{a}{7} + \frac{a}{8}\right) \cdot \frac{14}{a}$

2) $\left(\frac{b}{12} + \frac{b}{12}\right) \cdot \frac{48}{b^2}$

3) $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \cdot \frac{2ab}{a^2+b^2}$

4) $\left(\frac{m}{9n} - \frac{n}{4m}\right) \cdot \frac{36mn}{(2m-3n)}$

5. 1) $\frac{x+3}{y+3} \cdot \frac{y+3}{x^2-9}$

2) $\frac{ab}{x^2-16} \cdot \frac{x+4}{a^3b^3}$

3) $\frac{8c^2}{a^2-49} \cdot \frac{a-7}{4c^3}$

4) $\frac{5mn}{m^2-n^2} \cdot \frac{m-n}{10mn}$

5) $\frac{ab+b^2}{15} \cdot \frac{b}{a+b}$

6) $\frac{x^2-4y^2}{10} \cdot \frac{2y}{x+2y}$

7) $\frac{4x-y}{4x} \cdot \frac{1}{(4x-y)(4x+y)}$

8) $\frac{a-b}{b^4} \cdot \frac{3b^5}{a^2-b^2}$

9) $\frac{a+b}{a} \cdot \frac{a^3}{a^2+2ab+b^2}$

6. 1) $\frac{5(a+b)}{3(a+b)} \cdot \frac{9(a-b)^4}{10(a-b)^5}$

2) $\frac{a^2-10ab+25b^2}{a+5b} \cdot \frac{a^2+10ab+25b^2}{a-5b}$

3) $\frac{m^3-n^3}{m+n} \cdot \frac{m^3+n^3}{m-n} \cdot \frac{mn}{m^4+m^2n^2+n^4}$

Примеры

Пример 7. Выполните деление $\frac{a}{b} : \frac{2a}{b^2}$.

$$\frac{a}{b} : \frac{2a}{b^2} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b^2}{2a} = \frac{b}{2}$$

Пример 8. Выполните деление $\frac{ax^3}{4b^4} : \frac{a^3x}{2b^3}$.

$$\frac{ax^3}{4b^4} : \frac{a^3x}{2b^3} = \frac{ax^3}{4b^4} \cdot \frac{2b^3}{a^3x} = \frac{x^2}{2a^2b}$$

Пример 9. Выполните деление $\frac{a^2 - b^2}{a^3b^4 - a^4b^3} : \frac{a+b}{a^2b^2}$.

$$\frac{a^2 - b^2}{a^3b^4 - a^4b^3} : \frac{a+b}{a^2b^2} = \frac{(a-b)(a+b)}{a^3b^3(b-a)} \cdot \frac{a^2b^2}{a+b} = \frac{(a+b)}{ab(a+b)} = -\frac{1}{ab}$$

Пример 10. $\left(\frac{3+y}{2y^2-6y}\right)^3 : \left(\frac{y^2+6y+9}{2y(y^2-6y+9)}\right)^2$

Числитель и знаменатель каждой дроби представим в виде произведения множителей.

$$\left(\frac{3+y}{2y^2-6y}\right)^3 : \left(\frac{(y+3)^3}{2y(y-3)^2}\right)^2 = \left(\frac{3+y}{2y(y-3)}\right)^3 : \left(\frac{(y+3)^2}{2y(y-3)^2}\right)^2$$

Раскроем скобки, пользуясь свойством степени.

$$\begin{aligned} \left(\frac{3+y}{2y(y-3)}\right)^3 : \left(\frac{(y+3)^2}{2y(y-3)^2}\right)^2 &= \frac{(3+y)^3}{8y^3(y-3)^3} : \frac{(y+3)^4}{4y^2(y-3)^4} = \\ &= \frac{(3+y)^3}{8y^3(y-3)^3} \cdot \frac{4y^2(y-3)^4}{(y+3)^4} \end{aligned}$$

Теперь сократим.

$$\frac{(3+y)^3}{8y^3(y-3)^3} \cdot \frac{4y^2(y-3)^4}{(y+3)^4} = \frac{y-3}{2y(y+3)}$$

Упражнения

Выполните деление алгебраических дробей (1-5).

1. 1) $\frac{a}{10} : \frac{a}{5}$ 2) $\frac{a}{b} : \frac{b}{a}$ 3) $ab : \frac{a}{b}$ 4) $\frac{a^3}{b^2} : \frac{a^4}{b^5}$
- 5) $\frac{a^3}{b^{11}} : \frac{a^9}{b^5}$ 6) $\frac{3a}{5b} : \frac{9a^2}{25b^2}$ 7) $\frac{7m}{8n} : \frac{49m^3}{64n^5}$ 8) $abc : \frac{bc}{a}$
2. 1) $\frac{a-5}{b^9} : \frac{a-5}{b^{14}}$ 2) $\left(\frac{4a^3}{5b^2}\right)^2 : \left(\frac{2a^5}{5b^3}\right)^3$ 3) $30ab : \frac{15ab}{7cd}$
- 4) $\frac{a-8}{b^9} : \frac{(a-8)^3}{b^9}$ 5) $30x^2y^3 : \frac{15x^3y^2}{4ab}$ 6) $\frac{a^6b^7}{c^{10}} : \frac{a^5b^{11}}{c^7}$
- 7) $\frac{8a}{11b} : (a^2)$ 8) $\frac{m^3n}{k^5} : \frac{m^2n^5}{k^6}$
3. 1) $\left(\frac{a}{b^2} - \frac{b}{a^2}\right) : \frac{a^2 + ab + b^2}{3ab}$ 2) $\frac{a^2 - 36}{a^2 - 9} : \frac{a-6}{a+3}$
- 3) $\left(3 + \frac{1}{a^2}\right) : \left(3 - \frac{1}{a^2}\right)$ 4) $\left(\frac{a}{2} + \frac{a}{3} + \frac{a}{4}\right) : \left(\frac{a}{3} - \frac{a}{4} - \frac{a}{6}\right)$
- 5) $\left(\frac{a^3 - b^3}{a-b} + \frac{a^3 + b^3}{a+b}\right) : \frac{a^2 + b^2}{ab}$ 6) $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) : \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)$
- 7) $\left(\frac{x-3}{x+4} + \frac{x-4}{x+3}\right) : \left(\frac{x+3}{x-4} + \frac{x+4}{x-3}\right)$ 8) $\frac{a+1}{a^3 + a^2 + a} : \frac{1}{a^4 - a}$
4. 1) $\frac{a^2 - 6a + 9}{a^2 + 6a + 9} : \frac{a-3}{a+3}$ 2) $\frac{a^2 - 4a + 4}{a^2 + 4a + 4} : \frac{(a-2)^3}{(a+2)^3}$
- 3) $\frac{4a^2 - 12ab + 9b^2}{4a^2 + 12ab + 9b^2} : \frac{10a - 15b}{2a^2 + 3ab}$ 4) $\frac{a^2 - b^2}{3a - 3b} : \frac{5a + 5b}{9}$
- 5) $\frac{a^4x - b^4x}{a^2y + b^2y} : \frac{a^2 - b^2}{xy}$ 6) $\frac{a-b}{7b^4} : \frac{a-b}{14b^4}$
- 7) $\frac{x^3 - 2x^2}{3x+3} : \frac{x^2 - 4}{3x^2 + 6x + 3}$ 8) $\frac{a^3 - b^3}{a^2 - ab + b^2} : \frac{a^3 + b^3}{a^2 + ab + b^2} : \frac{7a^2 - 7b^2}{7ab}$

5. 1) $\left(\frac{2x+3y}{2x-3y} - \frac{2x-3y}{2x+3y}\right) : \left(\frac{2x-3y}{2x+3y} - \frac{2x+3y}{2x-3y}\right)$

2) $\left(\frac{5x+4y}{5x-4y} - \frac{5x-4y}{5x+4y}\right) : \left(\frac{5x-4y}{5x+4y} - \frac{5x+4y}{5x-4y}\right)$

6. Вычислите.

1) $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{10^2}\right)$

2) $\left(1 - \frac{1}{12^2}\right) \left(1 - \frac{1}{13^2}\right) \left(1 - \frac{1}{14^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{20^2}\right)$

3) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + 99^2 - 100^2$

4) $\frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{4^2-1} + \frac{1}{6^2-1} + \frac{1}{8^2-1} + \frac{1}{10^2-1}$

5) $\frac{1}{3^2-1} + \frac{1}{5^2-1} + \frac{1}{7^2-1} + \frac{1}{9^2-1}$

6) $\frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{4^2-1} + \frac{1}{6^2-1} + \dots + \frac{1}{100^2-1}$

7) $\frac{1}{3^2-1} + \frac{1}{5^2-1} + \frac{1}{7^2-1} + \dots + \frac{1}{99^2-1}$

7*. Проверить равенство.

1) $\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} + \frac{16}{1+x^{16}} = \frac{32}{1-x^{32}}$

2) $\frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-c)(b-a)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)} = 0$

3) $\left(\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} + 3\right) \cdot \frac{abc}{ab+bc+ac} = a+b+c$

8*. Найдите значение выражения, если $abc = 1$. $\left(\frac{5}{a} - bc\right) \left(\frac{4}{b} - ac\right) \left(\frac{3}{c} - ab\right)$.

ПРОЕКТНАЯ РАБОТА

Задание 1.

Две компании предложили свои собственные шкалы заработной платы.

Компания А: начальная месячная зарплата = 900 000, ежемесячная надбавка = 50 000.

Компания В: начальная месячная зарплата = 750 000, ежемесячная надбавка = 60 000.

С января 2022 года Али начал работать в компании А, а Ахмед — в компании В. Когда месячные зарплаты Али и Ахмеда сравняются? Рассчитайте тремя способами.

Какая шкала оплаты лучше?

Задание 2.

Компании С и D предложили разные шкалы заработной платы для одной и той же должности.

Компания С: Начальная месячная зарплата = 500 000.

После этого заработная плата за каждый последующий месяц будет увеличиваться на 10%.

Компания D: Начальная месячная зарплата = 300 000.

После этого заработная плата за каждый последующий месяц будет увеличиваться на 15%.

Азиз и Одил начали работать в компаниях С и D соответственно в одном и том же месяце.

- 1) Через сколько месяцев месячная зарплата Одила будет больше, чем у Азиза?
- 2) Какой контракт имеет лучшую шкалу заработной платы?

Задание 3.

Компания предложила выгодную ежегодную надбавку к зарплате. В таблице указана общая заработная плата, полученная рабочим за работу в течение n лет.

Количество лет, n	3	4	5	6	7
Полученная заработная плата (сум)	28 080	39 360	51 600	64 800	78 960

- 1) На основании таблицы напишите соответствующие расчёты шкалы окладов.
- 2) Подтвердите свой расчёт, используя соответствующий графический метод. Изобразите полностью шкалу заработной платы на диаграмме.

IV ГЛАВА

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ



УРАВНЕНИЕ И ЕГО КОРЕНЬ

Вспоминаем

$$\begin{aligned} 1) \quad & 5x + 10 = 25 \\ & 5x = 25 - 10 \\ & 5x = 15 \\ & x = 15 : 5 \\ & x = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad & 120 + 10x = 250 \\ & 10x = 250 - 120 \\ & 10x = 130 \\ & x = 130 : 10 \\ & x = 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad & 1080 : x = 540 \\ & x = 1080 : 540 \\ & x = 2 \end{aligned}$$

Запомните!

Равенство, содержащее неизвестное число, обозначенное буквой, называется уравнением.

Неизвестное число называется неизвестной (переменной) уравнения.

Обычно неизвестные (переменные) обозначают буквами латинского алфавита.

Пример 1. При каком неизвестном числе x равенство $4x - 15 = x + 15$ становится верным: $x = 10$.

Пример 2. При каком неизвестном числе a равенство $a \cdot 173 = 1730$ становится верным: $a = 10$.

Пример 3. Ни при каких значениях y равенство $435 - 3y = -3y$ верным не будет.

Корень уравнения – это значение неизвестного, которое превращает уравнение в верное равенство.

Пример 4. Уравнение $5x = 20$ имеет один корень. Корень уравнения число 4.

Пример 5. Уравнение $4x - 15 = x + 15$ имеет один корень. Корень уравнения число 10.

Решить уравнение – означает найти все его корни или показать, что оно не имеет корней.

Чтобы узнать, является ли число корнем уравнения, нужно подставить его в уравнение вместо переменной и получить верное равенство.

Пример 6. Не решая уравнения, определите, какое из чисел является его корнем:

$$-3(x + 3) = 4x + 5$$

1) -2

2) 0

3) 1

4) 2

Уравнения с одинаковыми корнями называются равносильными уравнениями.

Уравнения, не имеющие корней, также являются равносильными уравнениями.

Пример 7. $x + 5 = x$ и $3x - 3(x + 1) = 0$.

Упражнения

1. Корнем какого из уравнений является число 5?

1) $4x + 1 = 21$

2) $(x - 2) + (x + 2) = 15$

3) $2(5x - 4) = 8x + 2$

4) $3x - 4 = 10$

2. Какое из чисел -2 ; -1 ; 0 ; 2 ; 3 является корнем следующих уравнений?

1) $2x + 10 = 10 - 3x$

2) $x + (x + 8) = 6$

3) $x - (x - 8) + 5 = 4(x + 1) + 1$

4) $(x - 2) + (x + 2) + 7 = 3x + 5$

- 3.** Какое из чисел 1; -1; 7; -7 является корнем уравнения $x + (x - 7) = 7$.
- 4.** Какое из чисел 1; -1; 7; -7 является корнем уравнения $x + (5x - 35) = 7$
- 5.** Какое из чисел 15; -8; 1 и 0 является корнем уравнения $x + (x + 5) - (x + 8) - (x - 3) = 0$?
- 6.** Какое из чисел 15; -8; 1 и 0 является корнем уравнения $x + (x + 7) - (x + 8) - (x - 2) = 0$?
- 7.** Какое из чисел 2,4 и -2,4 является корнем уравнения $24x = 57,6$?
- 8.** 1) Покажите, что любое число является корнем уравнения $5(2x - 3) = 2(x + 1) + 8x - 17$;
2) Покажите, что уравнение $y = y - 11$ не имеет корней.
- 9.** Имеют ли корни уравнения?
1) $5x + 2 = 5x + 9$ 2) $7y = y$ 3) $x - 20 = 20 - x$ 4) $x + 4 = 4 + x$
- 10.** Равносильны ли уравнения?
1) $4(x - 8) = 16$ и $x - 8 = 4$ 2) $11x = 4$ и $11x - 4 = 0$
3) $\frac{3x}{4} = 9$ и $3x = 36$ 4) $7x = 7(x - 1)$ и $2x = 5x - 3(x - 2)$
- 11.** Корнем какого из уравнений будет число 5?
1) $4x + \frac{1}{4} = \frac{21}{4}$ 2) $\left(\frac{x}{5} - 2\right) + (x + 2) = 15$
3) $2(5x - 4) = 8x + 2,4$ 4) $3x - 4,5 = 15$
- 12.** Какое из чисел -2; -1; 0; 2; 3 является корнем уравнения?
1) $2x + \frac{10}{7} = 10 - 3x$ 2) $\frac{x}{2} + (x + 8) = 6$
3) $x - \left(\frac{x}{2} - 8\right) + 5 = 4(x + 1) + 1$ 4) $\left(3x - \frac{2}{5}\right) + (x + 2) + \frac{7}{5} = 3x + 5$
- 13*.** Покажите, что уравнение $\frac{1}{2}y + \frac{5}{6} = y - \frac{1}{2}y - \frac{11}{6}$ не имеет корней.
- 14*.** Имеет ли уравнение корень?
1) $\frac{1}{5}x + \frac{5}{7} = 5x - \frac{2}{7}$ 2) $7y = -9y$
3) $\frac{4}{5}x - 20 = 20 - \frac{1}{5}x$ 4) $4x + 1 + x = 4 + 5x$
- 15*.** Равносильны ли уравнения?
1) $4\left(\frac{x}{3} - 8\right) = 16$ и $x - 25 = 11$ 2) $1,1x = 4$ и $11x - 40 = 0$
3) $\frac{3x}{5} = 21$ и $0,3x - \frac{1}{2} = 10$ 4) $5,4x = 2,7(2x - 2)$ и $4\frac{1}{2}x = 7,5x - 3(x - 2)$

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

Уравнение вида $ax = b$

Уравнение вида $ax = b$ называют **линейным уравнением с одним неизвестным**.
Здесь x – неизвестное, a и b – произвольные числа.

1) $4x + 1 = 21$

2) $(x - 2) + (x + 2) = 15$

3) $2(5x - 4) = 8x + 2$

4) $3x - 4 = 10$

Все эти уравнения являются линейными уравнениями с одним неизвестным.

После упрощения они примут вид $ax = b$

Для решения такого уравнения необходимо обе части уравнения разделить на $a \neq 0$, получим $x = \frac{b}{a}$.

Если в линейном уравнении $ax = b$:

- 1) $a \neq 0$ уравнение имеет единственный корень;
- 2) $a = 0, b \neq 0$ уравнение не имеет корней, так как равенство $0 \cdot x = b$ не будет верным;
- 3) $a = 0, b = 0$ корнем уравнения будет любое значение x , так как равенство $0 \cdot x = 0$ верно при любом x .

Таким образом, в зависимости от количества корней линейные уравнения с одним неизвестным бывают трёх видов:

1. с одним корнем;
2. не имеет корней;
3. бесконечно много корней.

Примеры

Пример 1. Уравнение $3(x - 2) = 12$ имеет корень $x = 6$, так как после преобразования мы придём к уравнению $3x = 18$.

Пример 2. Уравнение $x + 5 = x$ не имеет корней, так как оно приводится к явно неверному равенству $0 \cdot x = -5$. В таких случаях уравнение не будет иметь корня.

Пример 3. Уравнение $2(x - 1) = 2(x - 7) + 12$ имеет бесконечно много корней, так как после преобразования уравнение приводится к виду $0 \cdot x = 0$. А это равенство верно при любом значении x .

Упражнения

1. Какое из этих уравнений является линейным?

1) $5x = 7$

2) $0,7x - 5 = 0$

3) $\frac{4}{x} = 2x$

4) $0,(3)x = 1,(2)$

5) $-5,8 = 4,4x$

6) $4x = 1$

2. Найдите корень уравнения.

1) $5x = 20$

2) $6x = 72$

3) $5x = 0$

4) $9x = 36$

5) $-10x = 110$

6) $5x = -125$

7) $11x = 44$

8) $-6x = -18$

3. Решите уравнения.

1) $2x = -6$

2) $3x = -12$

3) $6x = -30$

4) $8x = -72$

5) $-9x = 36$

6) $-7x = -14$

7) $3x = 0,3$

8) $-5x = -1,5$

4. Решите линейное уравнение.

1) $\frac{1}{2}x = 7$

2) $-5x = \frac{1}{3}$

3) $\frac{1}{7}y = \frac{1}{2}$

4) $\frac{2}{3}x = \frac{2}{3}$

5) $8x = -16$

6) $-17x = 0$

7) $5x = -\frac{1}{5}$

8) $\frac{1}{12}x = \frac{1}{2}$

5. Найдите корень уравнения.

1) $-1,5x = -12$

2) $0,5x = -42$

3) $2x = 7$

4) $6x = -9$

5) $7x = 15$

6) $0,1x = -0,2$

7) $0,04x = 0,4$

8) $\frac{1}{4}x = -7$

6. Найдите корень уравнения.

1) $3x - 120 = 0$

2) $11x - 2 = 21$

3) $9 = 8 + 0,1x$

4) $48 - 3x = 0$

5) $-x + 5 = 49$

6) $0,16x + 0,01 = 0,17$

7) $-1,5x - 9 = 0$

8) $-0,9x + 2 = 65$

9) $2(x - 4) = 3(x - 1)$

7. Приведите запись к линейному уравнению с одним неизвестным и определите его корень.1) Число 47 на 19 больше числа x ;2) Число 75 в 15 раз больше числа x ;3) Число x меньше числа 76 на 19;4) Число x меньше числа 76 в 19 раз;5) Удвоенная сумма чисел y и 15 равна 50;6) Четыре пятых от разности чисел y и 47 равно 64;7) Утроенная разность чисел x и 9 равна удвоенной сумме чисел x и 11;8) Сумма одной третьей и одной четвертой частей числа x равна 14.**8.** Заполните графу «Совместно» в таблице.

№	Уравнение		Корень	Совместимость
1	$x + 3 = 19$	<i>A</i>	$x = 7$	$1 - F$
2	$2x - 8 = 10$	<i>B</i>	$x = -0,25$	
3	$9x - 1 = 0,8$	<i>C</i>	$x = -10$	
4	$5x - 4 = 4x - 5$	<i>D</i>	$x = \frac{1}{9}$	
5	$2x = 3x - 7$	<i>E</i>	$x = 1,2$	

6	$5x + 49 = x + 1$	<i>F</i>	$x = 16$	
7	$8x = -2$	<i>K</i>	$x = 0,2$	
8	$9x = 3$	<i>L</i>	$x = -9$	
9	$0,5x = -5$	<i>M</i>	$x = 1 \frac{7}{9}$	
10	$-0,9x = -0,1$	<i>N</i>	$x = -12$	
11	$2x - 9 = x - 9$	<i>P</i>	$x = 0,2$	
12	$4(x - 1) = 5(x + 1)$	<i>R</i>	$x = 9$	
13	$15x - 24 = 10x - 18$	<i>S</i>	$x = \frac{1}{3}$	
14	$-5x - 7x = 8x - 46$	<i>Z</i>	$x = 2,3$	
15	$0,5x + 0,6 = 0,7$	<i>O</i>	$x = 0$	

Свойства верных равенств

Словесная запись свойства	Общая запись свойства	Пример
1. Если к обеим частям верного равенства прибавить одно и то же число или от обеих частей вычесть одно и то же число, то получим верное равенство.	Если $a = b$, c – любое число, то $a + c = b + c$, $a - c = b - c$.	$15 = 15$ $15 + 9 = 15 + 9$ $15 - 9 = 15 - 9$
2. Если обе части верного равенства умножить или разделить на какое-нибудь отличное от нуля число, то получим верное равенство.	Если $a = b$, c – не равно нулю, тогда $a \cdot c = b \cdot c$ $a : c = b : c$.	$15 = 15$ $15 \cdot 5 = 15 \cdot 5$ $15 : 5 = 15 : 5$

Пример

$$3(3x + 2) = 42$$

$$9x + 6 = 42$$

$$-6 \quad -6$$

$$9x = 36$$

$$: 9 \quad : 9$$

$$x = 4$$

$$3(2x + 1) = 4x + 7$$

$$6x + 3 = 4x + 7$$

$$-4x \quad -4x$$

$$2x + 3 = 7$$

$$-3 \quad -3$$

$$2x = 4$$

$$: 2 \quad : 2$$

$$x = 2$$

Упражнения

9. Составьте уравнение, корнями которого являются числа 7; -4; 1; -10.

10. Найдите корень уравнения.

1) $8(x-1) = 5(x-6)$

2) $9(x+5) = 6(x+9)$

3) $6(x-1) = 4(x-3)$

4) $3(x+2) = 6(x+7)$

5) $2(x+8) = 8(x+8)$

6) $9(x-8) = 9(x-4)$

7) $6(x-4) = 2(x-6)$

8) $2(x+6) = 3(x+5)$

9) $2(x+3) = 9(x-3)$

10) $2(x-1) = 4(x+3)$

11. Решите уравнения.

1) $2x + 9 = 15 - x$

2) $17 - 0,3x = 23 + 1,7x$

3) $y - \frac{1}{2}y = 0$

4) $14 - x = 19 - 11x$

5) $0,8x + 14 = 2 - 1,6x$

6) $x - 4x = 0$

7) $0,5x + 11 = 4 - 3x$

8) $15 - x = \frac{1}{3}x - 1$

12. Решите уравнения.

1) $x = -x$

2) $2,7x - 1 = 5,4 - 1$

3) $1\frac{1}{3}y + 4 = \frac{1}{3}y + 1$

4) $5x - 6x = 0$

5) $3x - 8 = x + 6$

6) $y - \frac{1}{4} = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}y$

13. Решите уравнения.

1) $(7x - 24) - 11x = 16$

2) $2,1x - (12 + 3x) = -x$

3) $0,6x - 0,7 = 0,8x$

4) $4x - 9 = 3(2x - 5)$

5) $21x + 14 = 7(x - 4)$

6) $6x + 15 = 3(3x + 8)$

14*. Покажите, что равенство верно для любого x .

1) $15 - 8x - 17 + 3x = 14x + 20 - 19x - 22$

3) $\frac{2x+7}{5} + \frac{4x-3}{4} = \frac{28x+13}{20}$

2) $18 - 4x + 43 - 7x = -20x + 54 + 9x + 7$

4) $\frac{3x-7}{15} + \frac{9x+8}{6} = \frac{51x+26}{30}$

15*. Покажите, что уравнение не имеет корней.

1) $36 + 4x = 13x + 11 - 9x + 24$

3) $\frac{x-1}{5} + \frac{3x-1}{8} = \frac{23x-17}{40}$

2) $10x - 19 - 7x = 6x - 15 - 4x + 13 + x$

4) $\frac{17x-6}{15} - \frac{x+5}{3} = \frac{4x+3}{5}$

СПОСОБ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ АЛЬ-ХОРЕЗМИ

Запомните!

Методы решения линейных уравнений описаны в книге «Китаб аль-мухтасар фи хисоб аль-джабр валь-мукабала» («Краткая книга об исчислении Аль-джабр валь-мукабала») нашего земляка, великого математика Мухаммада ибн Мусы аль-Хорезми.

«Аль-джабр» – это восстановление положительных членов, то есть перенос отрицательных членов из одной части уравнения в другую;

«Вал-мукабала» означает удаление равных членов с обеих сторон уравнения.

Предисловие
к «Аль-Джабр».



$7x - 4 = 3x + 12$ $7x - 3x = 12 + 4$	<p>Аль-джабр: 3x, влево перейдешь как -3x! -4, ты перейдешь как +4!</p>
$\cancel{11x} - \cancel{7} + 3x = 9 + \cancel{11x} - \cancel{7}$ $3x = 9$	<p>«Вал-мукабала» В левой и правой части 11x и -7 – мы с вами прощаемся!</p>

Упражнения

- Найдите уравнение, корнем которого является число -3.
 - $-3x = 1$
 - $2x - 7 = -13$
 - $\frac{1}{3}x = -1$
 - $5(x - 2) + 1 = 4x$
- Покажите, что число 10 не является корнем уравнения.
 - $0,02x = 0,002$
 - $8,9x + 8,9 = 98,9$
 - $\frac{x}{5} = 50$
 - $-x - 9x = -90$
- Какое из чисел 5; 2,1; -8 и $\frac{1}{3}$ является корнем уравнения $5x + 57 = -4x - 15$?
- Составьте уравнение вида $ax = b$, корнями которого являются числа 4; -1; 0.

5. Среди приведённых уравнений определите линейные и назовите их коэффициенты a и b .

1) $2x = -7$

2) $8x = 1$

3) $-x = 9,1$

4) $0,2x = 12$

5) $0x = 12$

6) $3x = 0$

7) $0x = 0$

8) $\frac{1}{x} = 4x$

6. Равносильны ли уравнения?

1) $3x - 4 = 0$ и $3x = 4$

2) $-5x = 35$ и $x = -7$

3) $0,1x = 9$ и $x = 0,9$

4) $(x - 2) + (x + 4) = 0$ и $x = 2$

7. Определите, какие из приведённых уравнений равносильны уравнению $x - 2 = 3 - 2x$.

1) $2 - x = 2x - 3$

2) $5(x - 2) = 5(3 - 2x)$

3) $\frac{x-2}{4} = \frac{3-2x}{4}$

4) $x - 2x = 3 - 2$

Подумайте и приведите два равносильных уравнения данному уравнению $x - 2 = 3 - 2x$

8. Решите линейные уравнения.

1) $-5x = 45$

2) $24x = 8$

3) $-x = 2,8$

4) $-4x = 1$

5) $-7x = -\frac{1}{8}$

6) $0,5x = -9$

7) $\frac{2}{7}x = \frac{8}{9}$

8) $-0,6x = \frac{1}{3}$

9) $-8x = 0$

10) $\frac{x}{7} = 5$

11) $3,5x = 2\frac{1}{3}$

12) $1,6x = -0,64$

9. Составьте такое линейное уравнение, корнем которого является произвольное число.

10. Решите уравнения и запишите, какие из них не имеют корней.

1) $8x = 0$

2) $0x = -2$

3) $-3x = 1$

4) $0x = \frac{1}{3}$

5) $0x = 0$

6) $0,2x = 0$

11. Решите линейные уравнения.

1) $7x - 21 = 0$

2) $10x + 36 = 0$

3) $8 - x = 0$

4) $15 - 3x = 0$

5) $9x - 1 = 17$

6) $-3x + 22 = 19$

12. Объясните действия.

$$\begin{array}{r} 3(5x - 1) = 42 \\ 15x - 3 = 42 \\ \underline{+3 \quad +3} \\ 15x = 45 \\ \underline{:15 \quad :15} \\ x = 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3(5x - 1) = 42 \\ \underline{:3 \quad :3} \\ 5x - 1 = 14 \\ \underline{+1 \quad +1} \\ 5x = 15 \\ \underline{:5 \quad :5} \\ x = 3 \end{array}$$

13. При каком значении x $8 - 0,1x$ выражение равно: -1 ; 0 ; 8 ?

14. Найдите корень уравнения.

1) $6x - 11 = 4x - 7$

2) $7 - x = 4 + 4x$

3) $0,7x + 1 = 0,4x - 5$

4) $6x - 10,3 = -2x - 0,3$

15. При каком значении x уравнения принимают равные значения x ?

1) $1,8x - 5$ и $0,6x + 1$

2) $0,5x - 3$ и $0,8 - 1,4x$

16. Найдите корень уравнения.

1) $3x - (x - 14) = 5$

2) $18 - (6x + 5) = 4 - 7x$

3) $(7x - 3) - (3x + 4) = 6$

4) $(4x + 15) - (15 - 3x) = 120 - x$

17. При каком значении x :

1) разность выражений $5 - \frac{1}{3}x$ и $\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$ равна нулю?

2) выражение $0,6x - 13$ меньше выражения $\frac{3}{5}x + 8$ на 21?

18. Решите уравнения.

1) $4x + 5 = 6 + 5(x - 3)$

2) $19x - (3x - 4) = 4(5x - 1)$

3) $2(x - 1) - 4 = 6(x + 2)$

4) $3(x - 2) - 5(x + 1) = -8x$

5) $4(x + 1) = 15x - 7(2x + 5)$

6) $5x + 8 + 2(6 - x) = 1 - 3(2x - 3)$

19*. Найдите значения a , при которых уравнения будут равносильны:

1) $5x - a = 2x - 2$ и $3x + 2 = 6x + 5$

2) $5x - a = 2x - 2$ и $3x + a = 6x + 5$

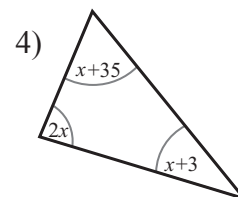
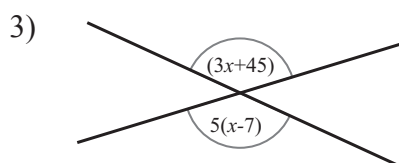
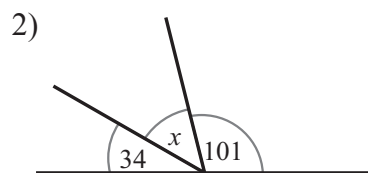
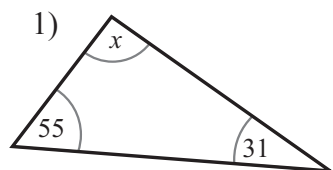
20*. При каких значениях a и b уравнение $ax + 1 = 2x + b$

1) имеет единственное решение;

2) не будет иметь решения;

3) имеет бесконечно много решений?

21. Найдите неизвестное.



РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ УРАВНЕНИЙ

Задачи

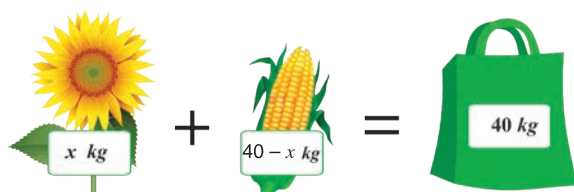
Задача 1. После того, как от мотка было отрезано 6 метров пряжи, её стало в 3 раза меньше. Сколько метров пряжи было в мотке?

1) Выясним, о каких величинах идёт речь в условии задачи.	Задача о мотке и пряжи в нём.
2) Обращаем внимание на взаимосвязь между выявленными величинами.	После того, как от мотка было отрезано 6 метров пряжи, её стало в 3 раза меньше.
3) Определяем, какая из величин в условии задачи неизвестна.	Длина пряжи в мотке и длина оставшейся пряжи неизвестна.
4) Обозначим одну из неизвестных величин (по возможности меньшую) буквой x .	Пусть после отрезания 6 м пряжи в мотке осталось x метров пряжи. В таком случае раньше в мотке было $3x$ метра пряжи.
5) Определяем связь между величинами, данными в условии задачи, и составляем уравнение.	После того, как от мотка отрезали 6 метров пряжи, в мотке осталось x метров. То есть, разница между длиной нити, которая была в мотке $3x$ и оставшейся частью x составляет 6 метров. $3x - x = 6$
6) Находим решение полученного уравнения.	$2x = 6, x = 3$. Следовательно, в мотке было $3x = 3 \cdot 3 = 9$ метров пряжи.

Задача 2.

Один килограмм подсолнечника стоит 0,50 тысяч сумов, а дроблёной кукурузы – 0,30 тысяч сумов. Сколько килограммов каждого из кормов нужно для 40 килограммов комбикорма, проданного за 16,40 тысяч сумов?

Задачи, связанные со смесями, часто решают в виде схемы (или таблицы):



x = масса подсолнечника.

$0,50x$ = цена подсолнечника в комбикорме.

$40 - x$ = масса кукурузы.

$0,30(40 - x)$ = цена кукурузы в комбикорме.

Составляем уравнение:

$$0,50x + 0,30(40 - x) = 16,40$$

Решаем уравнение:

$$0,50x + 12 - 0,30x = 16,40$$

$$0,20x = 16,40 - 12$$

$$0,20x = 4,40$$

$$x = 22$$

Для 40 kg комбикорма необходимо 22 kg подсолнечника и 18 kg кукурузы.

Запомните!

Использование уравнения при решении задачи облегчает поиск её решения.

Процесс решения задач состоит из следующих шагов:

- 1) определить, о каких величинах идёт речь;
- 2) обратить внимание на взаимосвязь между выявляемыми величинами;
- 3) определить, какие из величин в условии задачи неизвестны;
- 4) обозначить одну из неизвестных величин (желательно меньшую) буквой x ;
- 5) определить связи между величинами, заданными в условии задачи, и составить уравнение на основе этих связей (составляемое уравнение является математической моделью задачи);
- 6) найти решение полученного уравнения.

УПРАЖНЕНИЯ:

1. Найдите число, если:
 - 1) число, больше его в четыре раза, равно 48;
 - 2) число, вдвое меньше его, равно 10;
 - 3) число, больше его на 15, равно 59;
 - 4) число, меньше его на 12, равно 34.

2. Одно число в 8 раз меньше другого. Найдите числа, если их сумма равна 100.

3. Из двух чисел, сумма которых равна 20, одно больше другого в 3 раза. Найдите эти числа.

4. В первом вагоне метро пассажиров было в 3 раза больше, чем во втором. На станции из первого вагона вышли 30 человек, во второй вагон сели 10 человек. После этого число пассажиров в вагонах уравнилось. Сколько пассажиров было в вагонах?

5. За 5 часов до Нового года игрушек на ёлке было в 5 раз меньше, чем в коробке. В следующие 1,5 часа ёлку украсили еще 15 игрушками. После этого игрушек на ёлке стало на 1 меньше, чем в коробке. Сколько игрушек было на ёлке за 5 часов до Нового года?

6. Работники фермы решили посадить 78 саженцев абрикоса тремя группами. Первая группа получила в 2 раза меньше саженцев, чем вторая группа, а третья группа получила на 12 саженцев больше, чем первая группа. Сколько саженцев нужно отдать первой группе согласно распределению?



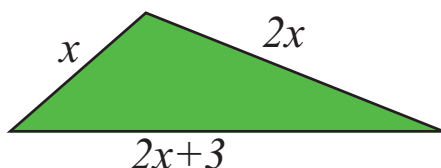
7. Расстояние между поселками А и В составляет 18 км. Одновременно из поселка А в поселок В выехал велосипедист, а из посёлка В в посёлок А вышел пешеход. Они встретились через 36 минут после начала движения. С какой скоростью двигался каждый из них, если расстояние, пройденное за это время велосипедистом, в 5 раз больше, чем у пешехода?



8. В корзине было в 2 раза меньше яблок, чем в ящике. После того, как 10 яблок переложили из корзины в ящик, яблок в ящике оказалось в 5 раз больше, чем яблок в корзине. Сколько яблок было в корзине и в ящике изначально?



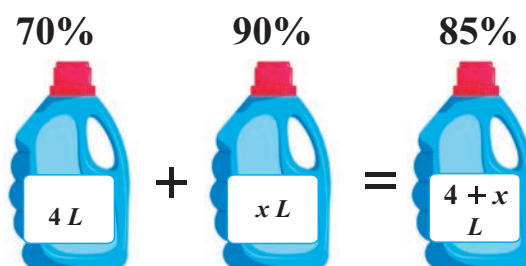
9. Найдите стороны треугольника, если его периметр 23 см.



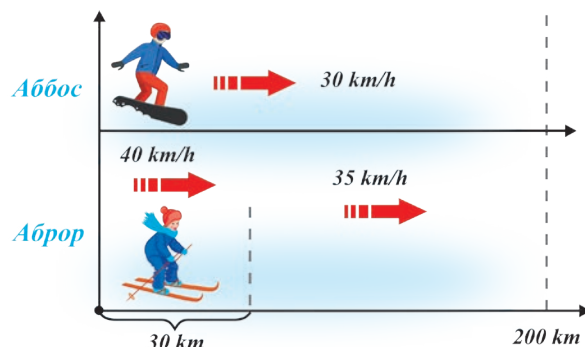
10. Комил старше Умиды на 6 лет. 9 лет назад он был в два раза старше Умиды. Сколько сейчас лет Комицу?



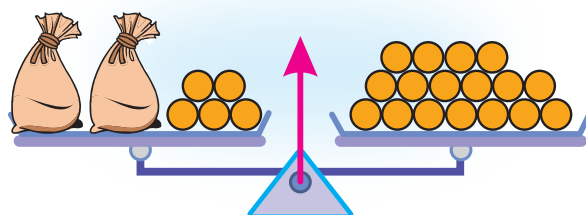
11. На основании рисунка составьте задачу и найдите неизвестные величины.



12. Аббос и Аброр соревнуются, кто первым доберётся до точки, находящейся на расстоянии 200 km от них. Аббос всю дистанцию передвигался с постоянной скоростью 30 km/h. Аброр первые 30 km передвигался с постоянной скоростью 40 km/h. Из-за схода лавины он остановился на 3 минуты, а затем продолжил движение со скоростью 35 km/h до конца дистанции. Кто выиграл гонку?

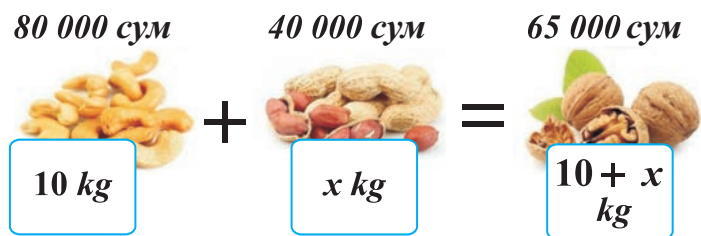


13. В первый из двух построенных рядом домов в «Ташкент-сити» привезли 230 банок краски, во второй – 321 банку. Если на ремонт первого дома ежедневно расходуется 30 банок краски, а на ремонт второго дома – 39 банок, то через сколько дней количество неиспользованной краски во втором доме будет в 1,5 раза больше, чем в первом доме?
14. Всего в хозяйстве собрано 425 kg помидоров, огурцов и картофеля. Если помидоров было собрано на 65 kg больше, чем огурцов, и в 3 раза меньше, чем картофеля, то сколько было собрано каждого овоща?
15. Сколько шаров весит один мешок? Составьте уравнение по картинке.



16. Ученик запланировал прочесть 190 страниц книги за три дня. В пятницу он прочитал в 1,2 раза меньше, чем в субботу, а в субботу на 20 страниц меньше, чем в воскресенье. Сколько страниц прочитал ученик в субботу?
17. Найдите скорость грузовика, если расстояние, пройденное грузовиком за 2 часа, на 20 km больше, чем расстояние, пройденное автобусом за 1 час, а скорость автобуса в 1,5 раза больше скорости грузовика.
18. Вертолёт преодолел расстояние между двумя базами за 45 минут по направлению ветра и за 1 час против ветра. Найдите расстояние между базами, если скорость ветра 10 km/h.
19. Корабль прошёл путь между пунктами А и В за 4 часа 30 минут и вернулся за 6 часов 18 минут. Найдите расстояние между пунктами А и В, если скорость корабля 14,4 km/h.
20. Лодка плыла вверх по течению 6 часов, против течения – 9 часов. Найдите скорость течения реки, если скорость лодки в стоячей воде 15 km/h.

21.



а) Каким уравнением можно воспользоваться, чтобы найти количество арахиса, необходимого для приготовления смеси?

$$80000x + 40000x = 650000 \qquad 40000 + 80000x = 65000(10 + x)$$

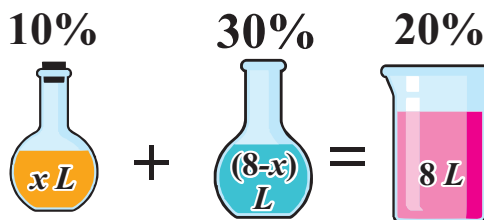
$$80000x + 40000x = 650000(10 + x) \qquad 800000 + 40000x = 65000(10 + x)$$

б) Сколько килограммов арахиса нужно для смеси?

4 kg 6 kg 10 kg 12 kg

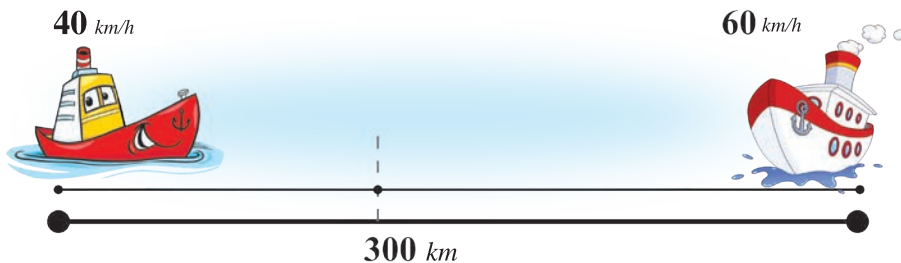
22. Путешественник может добраться из посёлка А в посёлок В за 5 часов. Если он увеличит свою скорость на 1 km/h, то сможет преодолеть это расстояние за 4 часа. Найдите скорость путешественника.

23. На основании рисунка составьте задачу и найдите неизвестные величины.



24. Пешеход шёл из пункта А в пункт В, расстояние между которыми 10 km, со скоростью 6 km/h. Через полчаса за ним последовал велосипедист со скоростью 18 km/h. Сколько километров им осталось проехать до пункта В после того, как велосипедист обогнал пешехода?

25. Две лодки находятся на расстоянии 300 km друг от друга и движутся навстречу друг другу. Первая лодка движется со скоростью 40 km/h, вторая со скоростью 60 km/h. Лодки одновременно начали своё движение.



а) Каким уравнением можно воспользоваться, чтобы найти время, через которое лодки встретятся (где t — время в часах)?

$$1) 60t - 40t = 300 \qquad 2) 40t + 60t = 300$$

$$3) (60t) \cdot (40t) = 300 \qquad 4) 300t - 60 = 40$$

б) Через сколько часов они встретятся?

2,7 часа 4,5 часа 3 часа 10 часа

26. Одна пятая часть высоты башни окрашена в чёрный цвет, следующие 20 метров – в жёлтый, а оставшиеся две третьих высоты – в красный.

- а) какое уравнение можно использовать для нахождения высоты башни?
б) какова высота башни?



27. Отцу 47 лет, сыну 23 года. Сколько лет назад сын был в 3 раза моложе отца?
28. Матери 30 лет, дочери 6 лет. Через сколько лет мать будет в 4 раза старше дочери?
29. Сумма возрастов трёх братьев равна 26. Если средний брат на 4 года старше младшего брата, но на 3 года младше старшего брата, сколько им лет?
30. Чтобы достичь пункта назначения согласно расписанию, поезд должен был двигаться со средней скоростью 60 km/h. Но он двигался со средней скоростью 70 km/h и прибыл в пункт назначения на 0,5 часа раньше расписания. Какое расстояние проехал поезд до пункта назначения?
31. Сумма двух натуральных чисел равна 90. Если разделить большее из них на меньшее, то частное от деления будет равно 3, а остаток будет равен 6. Найдите эти числа.
32. Сумма двузначных чисел равна 15. Если мы поменяем её цифры местами, то получим двузначное число, которое на 9 меньше заданного. Найдите заданное двузначное число.
33. Первое число на 16 больше второго. Второе число в 5 раз меньше первого числа. Найдите эти числа.
34. Сумма пяти последовательных натуральных чисел равна 350. Найдите наибольшее из этих чисел.
35. Корабль прошёл в общей сложности 153 km за 6 часов по озеру и 3 часа по течению реки. Если скорость течения реки 3 km/h, с какой скоростью двигался корабль в озере?
36. Работу, запланированную на 20 дней, завод выполнил за 18 дней, выпуская в день на 2 автомобиля больше. Сколько автомобилей выпустил завод?
37. Моторная лодка прошла из пункта А в пункт В вверх по течению за 8 часов, а из пункта В в пункт А против течения за 10 часов. Найдите скорость моторной лодки в стоячей воде, если скорость течения реки 3 km/h.
38. Разность квадратов двух последовательных положительных чётных чисел равна 116. Найдите меньшее из этих чисел.

39. Сколько литров воды температурой $40\text{ }^{\circ}\text{C}$ нужно добавить к 3 литрам воды температурой $30\text{ }^{\circ}\text{C}$, чтобы температура раствора была $37\text{ }^{\circ}\text{C}$?
40. Сумма двух чисел равна 242, и при делении большего из этих чисел на меньшее частное от деления равно 4, а остаток равен 22. Найдите меньшее из этих чисел.
41. 20 человек могут выполнить определённую работу за 17 дней. Если через 2 дня к ним присоединятся 5 человек, то за сколько дней они выполнят оставшуюся работу?
42. Тулкин задумал число. Он прибавил к нему 4, разделил сумму на 5 и вычел 6 из полученного числа. Результат был равен 7. Найдите задуманное число.
43. Сумма четырёх последовательных чётных чисел в 5 раз больше наименьшего из них. Найдите среднее арифметическое этих чисел.

Проверьте себя с помощью вопросов PISA

Талантливый мальчик

Алишер увлекается математикой и регулярно участвует в олимпиадах по этому предмету.

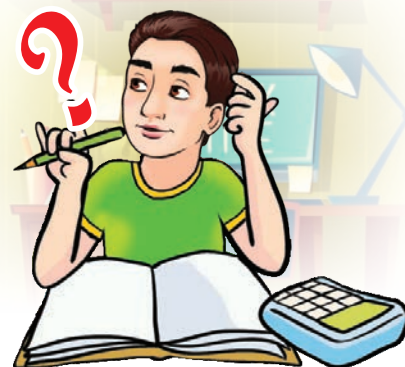
По условию очередной онлайн-олимпиады, в которой он участвует, участникам будет начислено по 10 баллов за каждый правильный ответ, а за каждый неправильный ответ будет вычтено по 5 баллов из общей суммы баллов.

Вопрос 1.

Если Алишер набрал 155 баллов из 20 вопросов, как вы думаете, на сколько вопросов он ответил правильно?

Вопрос 2.

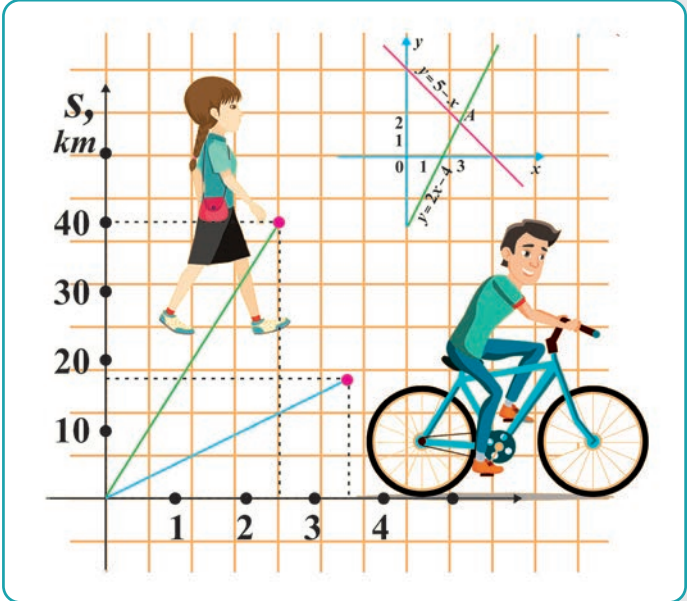
По итогам олимпиады участник, занявший первое место, набрал 170 баллов. Если бы у Алишера было на один правильный ответ больше, чем у победителя, с какими баллами он бы выиграл олимпиаду?



V

ГЛАВА

ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ



ДЕКАРТОВА СИСТЕМА КООРДИНАТ

Вспоминаем

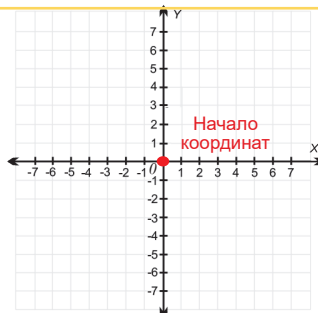
Система координат образуется перпендикулярным пересечением двух числовых осей.

x – горизонтальная числовая ось.

y – вертикальная числовая ось.

Точка пересечения осей x и y называется началом координат, и в этой точке находится число 0 для обеих осей.

Система координат делит плоскость на четыре части, называемые четвертями.



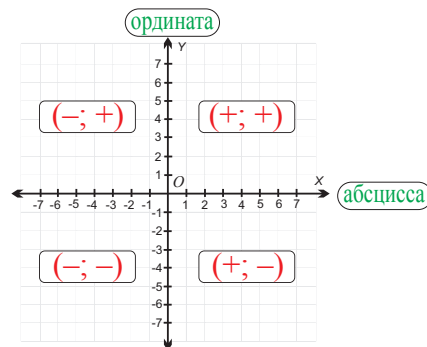
Рене Декарт (1596–1650) – французский философ, математик, физик, физиолог. Он ввёл в науку понятие системы координат, эта система называется **декартовой системой координат**.

Запомните!

- горизонтальная числовая ось обозначается Ox и называется **осью абсцисс**;
- вертикальная числовая ось обозначается Oy и называется **осью ординат**;
- оси абсцисс и ординат называются **осями координат**, точка их пересечения – **центром координат**;

- начало координат обозначает 0 на каждой оси;
- на оси абсцисс положительные числа представлены точками, расположенными правее точки O , а отрицательные числа представлены точками, расположенными левее точки O ;
- на оси ординат положительные числа изображаются точками, расположенными выше точки O , а отрицательные числа – точками, расположенными ниже точки O ;

– плоскость, в которой выбирается система координат, называется **координатной плоскостью**.



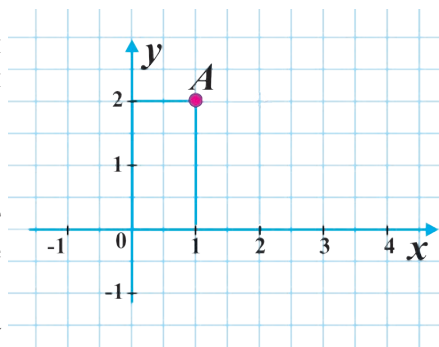
Примеры

Выбираем точку A на координатной плоскости. Из точки A проводим перпендикуляр к оси абсцисс. Абсцисса точки A обозначает число $x = 2$.

Из точки A проводим перпендикуляр к оси ординат. Ордината точки A обозначает число $y = 1$.

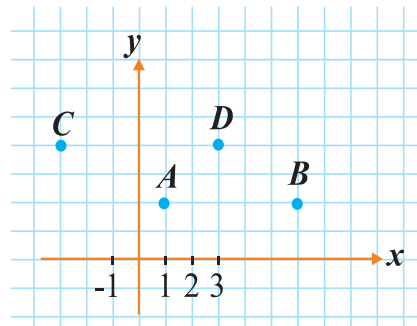
Эти найденные значения абсцисс и ординат называются координатами точки A . Обозначение $A(x; y)$ означает, что точка A имеет абсциссу x и ординату y .

В обозначении $A(2;1)$ цифра 1 – это абсцисса, а цифра 2 – это ордината.



УПРАЖНЕНИЯ:

1. Отметьте в системе координат точки $A(2; 3)$, $B(-4; -3)$, $C(-1; 4)$ и $D(2; -5)$.
Найдите, в какой четверти они расположены.



2. В системе координат заданы точки $A(1; 2)$, $B(6; 2)$, $C(-3; 5)$ и $D(3; 5)$. Найдите расстояние от точки A до точки B и от точки C до точки D .

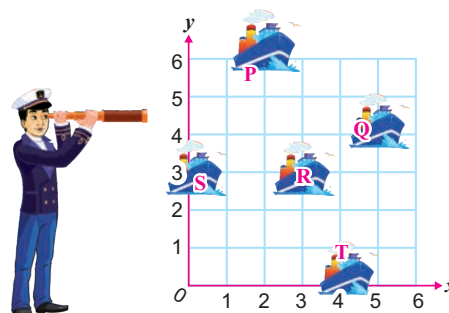
3. Постройте отрезки с концами в точках $M(-3; 4)$ и $N(4; 1)$.

4. Сравните отрезки с концами в точках $P(-4; -1)$ и $Q(-1; -4)$, $K(2; 1)$ и $L(6; 5)$.

5. Постройте треугольник с вершинами в точках $A(-3; 3)$, $B(2; 2)$ и $O(0; 0)$.

6. Постройте отрезок с концами в точках $A(-2; -3)$ и $B(4; 3)$. Найдите координаты середины отрезка.

7. По картинке определите координаты мест стоянок кораблей.
Какие корабли находятся в точках $(2; 6)$ и $(4; 0)$?



8. Точка $A(3; 3)$ сдвинута на две единицы вверх и на три единицы вправо, а точка $B(5; 1)$ сдвинута на три единицы влево. Найдите, во сколько раз увеличилось расстояние между точками A и B по сравнению с первоначальным расстоянием.

9. Постройте треугольники с вершинами в точках:

- а) $A(2; 1)$, $B(6; 1)$ и $C(-1; 4)$;
б) $M(1; -2)$, $N(6; -2)$ и $K(2; 6)$;
с) $X(1; 0)$, $Y(4; 3)$ и $Z(5; -2)$

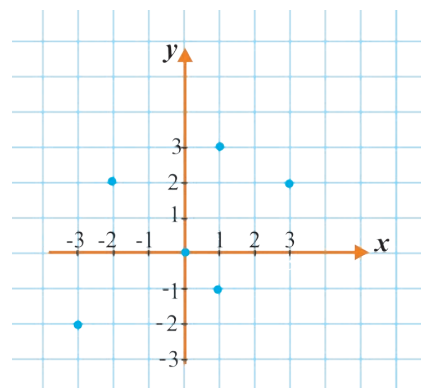
По полученным сторонам определите вид треугольников.

10. Отметьте точки $A(-2; -2)$, $B(-2; 3)$ и $C(3; 3)$. Выберите точку D таким образом, чтобы точки A , B , C , D стали вершинами квадрата. Найдите координаты точки D .

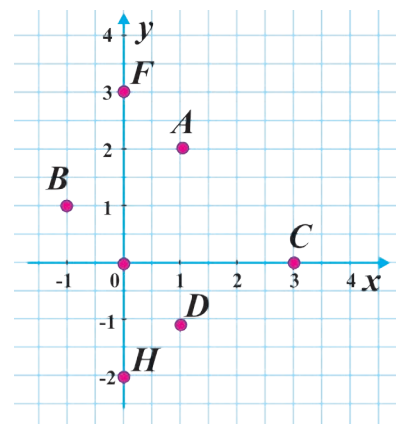
11. Найдите взаимно симметричные точки относительно осей Ox , Oy и начала координат.
 $A(1; 3)$; $B(5; 2)$; $C(1; -3)$; $D(-5; -2)$; $E(-1; 3)$; $F(5; -2)$.

- 12.** а) Проведите прямую через точки $A(2; 1)$ и $B(2; 5)$. Найдите координаты трёх точек на этой прямой.
 б) Проведите прямую через точки $P(-3; 2)$ и $B(4; 2)$. Найдите координаты трёх точек на этой прямой.
- 13.** Постройте треугольник с вершинами в точках $A(-3; -2)$, $B(-1; 4)$ и $C(3; 2)$.
- 14.** Найдите координаты точек $M(3; 5)$ и $N(-2; 4)$, полученных в результате симметричного смещения:
 а) относительно оси Ox ;
 б) относительно оси Oy ;
 в) относительно начала координат.

- 15.** Найдите координаты точек, изображённых на рисунке.



- 16.** Определите координаты точек, заданных в декартовой системе координат.



- 17.** Изобразите точки и найдите, в какой координатной четверти они расположены.
 1) $A(1; 7)$ 2) $B(-5; 2)$ 3) $C(-3; -6)$ 4) $D(4; -1)$
- 18.** Отметьте на оси абсцисс 4 точки, определите их координаты. Что у них общего?
- 19.** Отметьте на оси ординат 4 точки, определите их координаты. Что у них общего?
- 20.** Среди точек:
 а) запишите симметричные относительно оси Ox ;
 б) запишите симметричные относительно оси Oy .

$A(1; -1);$ $B(1; 1);$ $C(4; -5);$ $D(-4; -5);$ $E(7; 9);$ $F(7; -9)$

ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ

Вспоминаем

Пример 1. Таблица умножения на 2.

Вопрос: если ввести 100, чему будет равен результат? А если ввести 200?

Ввод	Отношение	Результат
0	· 2	0
1	· 2	2
2	· 2	4
3	· 2	6
10	· 2	20
20	· 2	40
...	· 2	...

Пример 2. Каждый год дерево вырастает на 20 см, высота дерева зависит от его возраста:

$$f(\text{возраст}) = \text{возраст} \cdot 20$$

Если возраст дерева 10 лет, высота равна:

$$f(10) = 10 \cdot 20 = 200 \text{ см}$$

возраст	$f(\text{возраст}) = \text{возраст} \cdot 20$
0	0
1	20
2	40
3	60
3,5	70
4	80
...	...

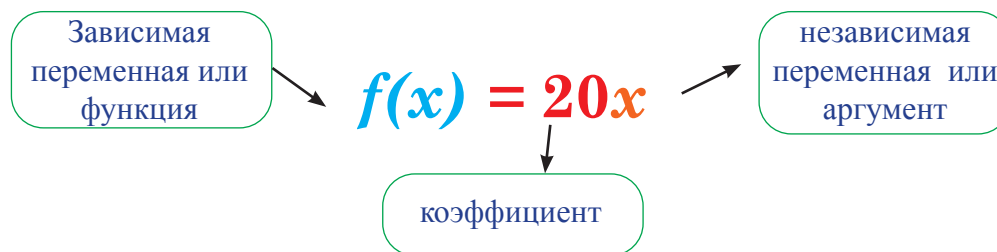
По мере старения дерева его высота меняется. Изменение высоты дерева зависит от формулы (правила) $f(\text{возраст}) = \text{возраст} \cdot 20$. Это то, что мы называем функцией.

Запомните!

Функция связывает каждый элемент множества ровно с одним элементом другого множества по некоторой формуле (правилу).

Если обозначить возраст дерева через x , а его высоту через f , то получится выражение: $f(x) = 20x$.

В функции $f(x)$ f означает, что величина зависит от величины x ($f(x)$), читается как (эф от икс).



Аргумент	Функция	Примеры::
x, a, t, z, \dots	$f(x), f(t), g(a), g(x), y(x), y, \dots$	$y(x) = 20x$ $y(3,5) = 20 \cdot 3,5 = 70$ $x = 3,5$ – аргумент $y = 70$ – значение функции

Способы задания функции

1) Задание функции формулой:

$y = kx$, $y = 2x + 4$, $f(x) = x^2$, $g(t) = t^2 + 5t$ – эти формулы показывают правило вычисления значения функции на основе заданного значения аргумента.

2) Задание функции с помощью таблицы:

При задании функции в виде таблицы значения должны соответствовать определению функции. Следовательно, не каждая таблица относительно x , y может быть табличным представлением функции. Таблица умножения на 2, таблица умножения на 3, таблица чётных и нечётных чисел – это примеры представления функции в таблице.

3) Графическое задание функции:

График функции представляет собой множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых имеют значения независимой переменной, а ординаты – соответствующие значения функции.

Примеры

Пример 3. Найдите значения функции $g(0)$, $g(1)$, $g(-1)$, заданной формулой $g(x) = 5x + 2$.

Вычислим значение функции, заменив аргумент x в формуле заданной функции соответственно на числа 0, 1, -1:

$$1) g(0) = 5 \cdot 0 + 2 = 2$$

$$2) g(1) = 5 \cdot 1 + 2 = 7$$

$$3) g(-1) = 5 \cdot (-1) + 2 = -3$$

Пример 4. Найдите, при каком значении x функция, заданная формулой $y(x) = -2x + 1$ принимает значения, равные $y(x) = -1$.

Мы находим значение аргумента x , подставляя соответственно -1 числа вместо заданного значения функции в данной формуле $y(x)$.

Из уравнения $-1 = -2x + 1$ находим аргумент x .

$$2x = 1 + 1$$

$$2x = 2$$

$$x = 1$$

Пример 5. Используя таблицу, определите, задана ли функция.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	4	8	12	16	20	24	28	32	36

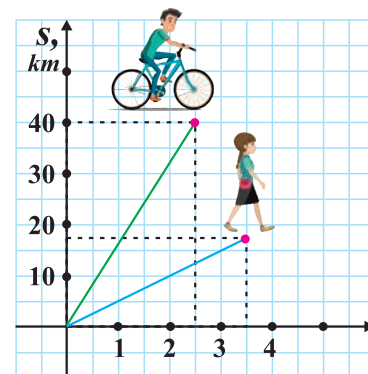
Из таблицы видно, что значение функции $y(x) = 4x$ изменяется согласно правилу. $y(1) = 4 \cdot 1 = 4$; $y(2) = 4 \cdot 2 = 8$; $y(3) = 4 \cdot 3 = 12$; ...

Пример 6. На основе графика убедитесь, что определена функция.

На графике велосипедист проезжает 40 km за 2,5 часа; 15 km за 1 час.

Видно, что он проходит 25 km за 1,5 часа. Итак, этот график определяет функцию.

Найдите самостоятельно, что в графике девушки определена функция.



УПРАЖНЕНИЯ:

1. Функция задана формулой $y(x) = 3x - 1$. Найдите её значения $y(0)$, $y(2)$, $y(-1)$.
2. Функция задана формулой $y(x) = 0,5x - 3$. Найдите её значения $y(1)$, $y(-2)$, $y(0)$.
3. На основе таблиц убедитесь, что определена функция.

x	y
3	18
4	24
5	30

x	y
7	11
8	12
9	13

x	y
5	12
8	15
11	18

x	y
1	5
3	15
5	25

4. Заполните пустые ячейки.

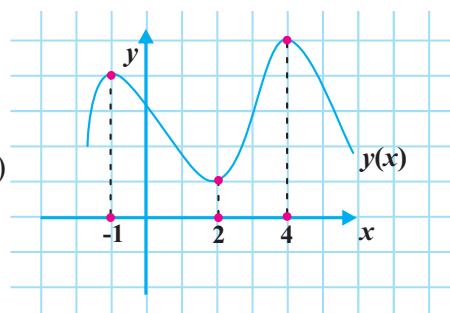
x	y
4	16
5	20
	24
7	

x	y
2	11
4	13
6	
	17

x	y
5	45
6	
7	63
	72

x	y
3	18
5	20
7	
	24

5. На рисунке изображён график функции $y(x)$.
На основе рисунка найдите:
а) значение функции в точках $x = -1$, $x = 2$, $x = 4$;
б) наибольшее и наименьшее значение функции;
в) какие из точек $(-1; 3)$, $(2; 1)$, $(3; 3)$, $(-1; 5)$, $(4; 5)$ лежат на графике функции.



6. Заполните заданную таблицу на основании данных.

x	-4	-2	-1	0	1	2	4
Функция							
$y(x) = 3x$							
$y(x) = 0,25x$							
$y(x) = -x + 2$							
$y(x) = 0,5x + 3$							

7. Высота чинары во дворе школы 7,3 м. Она ежегодно растёт на 15 см. Составьте функцию, представляющую рост чинары.
8. Турист, пройдя 120 km от туристической базы, запланировал для себя проходить по 9 km каждый час. Составьте формулу функции, выражающую путь, пройденный туристом.

9. На рынке цена кускового сахара на 4000 сумов выше, чем у сахара-песка. Составьте выражение, выразив цены на кусковой сахар и сахар-песок разными буквами.
10. Задано соотношение $y = kx$. Заполните следующую таблицу.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = 2x$							
$y = 3x$							
$y = -2x$							
$y = 0,5x$							

11. Велосипедист едет со скоростью 12 km/h. Напишите выражение для вычисления пути S , пройденного им за t часов.
12. Если известно, что точка A лежит на графике функции $y = kx$, найдите значение k .
 а) $A(-2; 1)$ б) $A(6; -18)$ в) $A(-4; 8)$
13. Цена картофеля на рынке 6000 сумов. За x kg картофеля было выплачено y сумов. Составьте выражение зависимости и найдите значение полученного выражения при $x = 4; x = 8; x = 10; x = 70$.
14. Высота, на которую поднимается воздушный шар, меняется в зависимости от времени (минуты) его подъёма.
 а) Запишите изменение пройденного пути h за время t .
 б) Постройте график функции.
 в) Подсчитайте, сколько минут нужно, чтобы подняться на 2100 метров.
 г) Сколько минут потребуется, чтобы подняться на 3500 метров?
15. а) Определите, верны ли последовательности.
 1) 18, 16, 15, 13, ... 2) 4, 9, 14, 19, ...
 б) Найдите следующие три члена каждой последовательности.
 1) 12, 9, 6, 3, ... 2) -2, 2, 6, 10, ...
 в) Напишите уравнение для n -го члена каждой последовательности.
 1) 15, 13, 11, 9, ... 2) -1, -0,5, 0, 0,5, ...
16. Переработка одной тонны макулатуры сохраняет в среднем 17 деревьев. Напишите формулу функции, представляющую зависимость между количеством переработанной бумаги и количеством сохранённых деревьев.

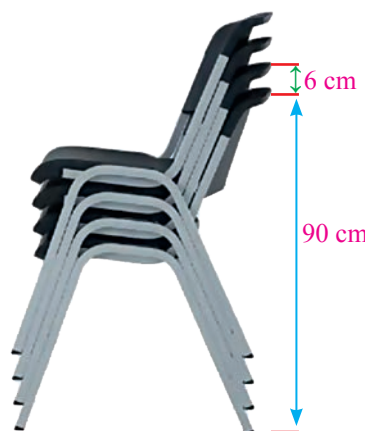
x	y
0	10 080
2	8 640
6	5760
10	
12	1440
14	

17. В час из бассейна спускается 720 литров воды. В таблице показана функция, связывающая объём воды в бассейне со временем её спуска из бассейна. Заполните таблицу

18. В какой из последовательности фигур определена функция? Обоснуйте свои выводы.



19. Высота школьного стула 90 сантиметров. Стулья установлены, как показано на картинке. Могут ли они выражать функцию?



20. Какое из записанных ниже предложений может быть функцией? Объясните свой вывод.

- 1) Если автомобиль потребляет 10 литров бензина на 100 km, он может проехать 500 km с 50 литрами топлива.
- 2) Чем выше ваш доход, тем выше подоходный налог.
- 3) Когда цена растёт, спрос падает, и наоборот.
- 4) Если заработная плата составляет 3 миллиона сумов, уплачивается 300 тысяч подоходного налога. Если ежемесячный доход составляет 3,5 млн сумов, уплачивается 350 тысяч подоходного налога.
- 5) В банкомат была вставлена пластиковая карта для снятия 500 000 сумов наличными. Банкомат выдал 450 000 сумов.

21. Составьте формулу функции для последовательностей, данных в упражнении 15.

22. На рисунке показано расположение папок на жёстком диске компьютера. Какое из расположений отсортировано на основе функции? Объясните свой вывод.

Имя	Дата изменения	Имя	Дата изменения
7 sinf TIMES	24.06.2022 18:50	7 sinf TIMES	24.06.2022 18:50
7-sinf Algebra	08.06.2022 17:52	7-sinf Algebra	08.06.2022 17:52
Папка 1-bob	10.05.2022 13:39	Папка 1-bob	10.05.2022 13:39
Папка 2-bob	10.05.2022 13:39	Папка 2-bob	10.05.2022 13:39
Папка 3-bob	10.05.2022 13:39	Папка 3-bob	10.05.2022 13:39
Папка 4-bob	10.05.2022 13:39	Папка 4-bob	10.05.2022 13:39
Папка 5-bob	10.05.2022 13:39	Папка 5-bob	10.05.2022 13:39
Папка 6 bob	10.05.2022 13:39	Папка 6 bob	10.05.2022 13:39
Папка 6 sinf takrorlash	09.05.2022 13:02	Папка 7-bob	10.05.2022 13:39
Папка 7-bob	10.05.2022 13:39	Папка 6 sinf takrorlash	09.05.2022 13:02

ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ

Вспоминаем

Пример 1. Формула нахождения периметра квадрата выглядит следующим образом:
 $P = 4a$.

В этой формуле P можно выразить функцией, а a аргументом. Мы заменяем P на $f(x)$ и a на x и образуем функцию, выраженную формулой $f(x) = 4x$ или $y = 4x$.

Проверяем функцию по таблице:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	4	8	12	16	20	24	28	32	36

Функция $y = kx$

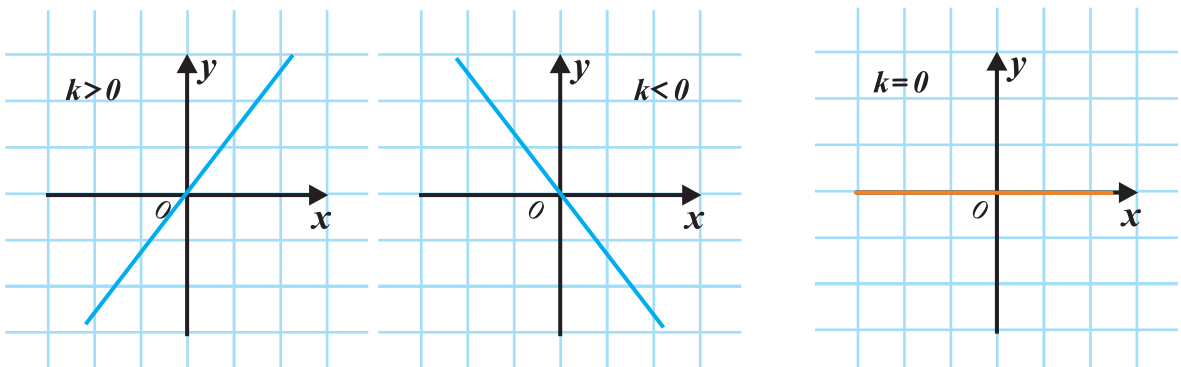
График функции $y = kx$ представляет собой прямую линию, проходящую через начало координат при любом значении k .

Если $k > 0$, то график функции расположен в I и III четвертях.

Если $k < 0$, то график функции расположен во II и IV четвертях.

Если $k = 0$, то график функции совпадает с осью Ox .

Таким образом, k могут быть числа -2 ; $-0,5$; 2 ; 3 .



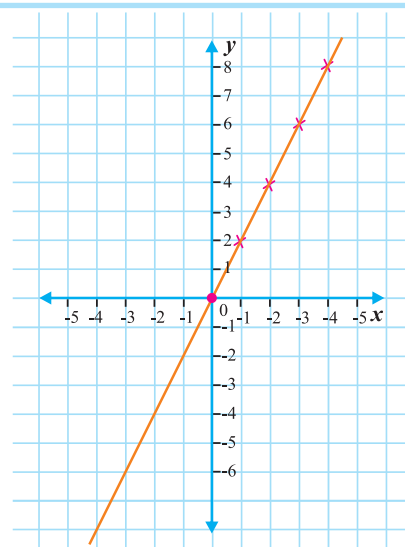
Примеры

Пример 2. Постройте график функции $y = 2x$.

Чтобы построить график функции, вычислим соответствующие значения y , присвоив x разные значения, и покажем это в таблице.

x	-2	-1	0	1	2	3
$y = 2x$	-4	-2	0	2	4	6

Исходя из таблицы, получаем координаты точек $(-2; -4)$; $(-1; -2)$; $(0; 0)$; $(1; 2)$; $(2; 4)$; $(3; 6)$ и откладываем их в декартовой системе координат, соединяем с помощью линейки, чтобы получилась прямая линия.

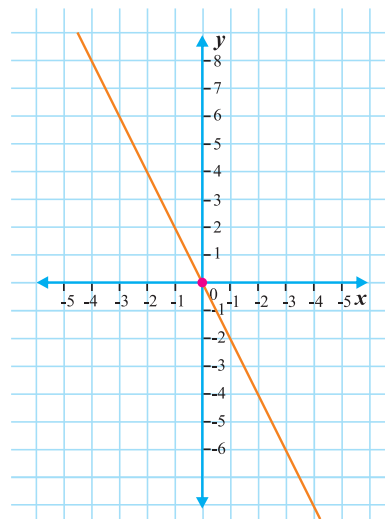


Пример 3. Постройте график функции $y = -2x$.

Чтобы построить график функции, вычислим соответствующие значения y , присвоив x разные значения, и покажем это в таблице.

x	-2	-1	0	1	2	3
$y = -2x$	4	2	0	-2	-4	-6

Исходя из таблицы, получаем координаты точек $(-2; 4)$; $(-1; 2)$; $(0; 0)$; $(1; -2)$; $(2; -4)$; $(3; -6)$ и откладываем их в декартовой системе координат.



Согласно аксиоме «через любые две точки проходит только одна прямая», достаточно найти две точки на графике, чтобы построить график функции $y = kx$.

Упражнения

1. Постройте график функции.

1) $y = x$ 2) $y = 2x$ 3) $y = \frac{3}{4}x$ 4) $y = 1,5x$

2. Постройте график функции.

1) $y = -x$ 2) $y = -3x$ 3) $y = -\frac{1}{2}x$ 4) $y = -2,5x$

3. Постройте графики функций в одной системе координат и покажите, в каких координатных углах эти графики расположены.

1) $y = 4x$; $y = -4x$ 2) $y = 0,5x$; $y = -0,5x$

4. Заполните таблицу в соответствии с соотношением $y = kx$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = -0,2x$							
$y = 0,2x$							
$y = -\frac{1}{4}x$							
$y = 4x$							

5. Удовлетворяют ли данные, приведённые в таблице, условиям функции $y = kx$?

x	18	20	22	24	26
y	9	10	11	12	13

x	10	13	16	19	21
y	10	13	16	19	21

x	4	5	6	7	8
y	1	2	3	4	5

Функция $y = kx + b$

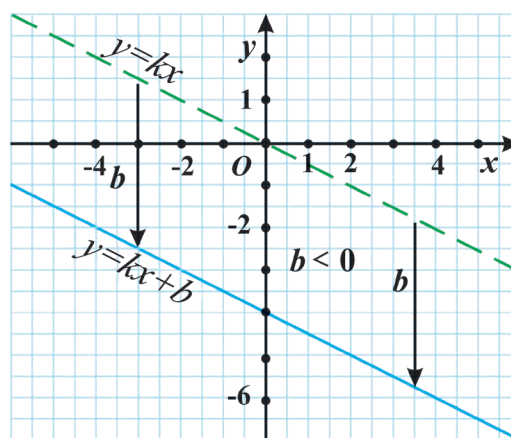
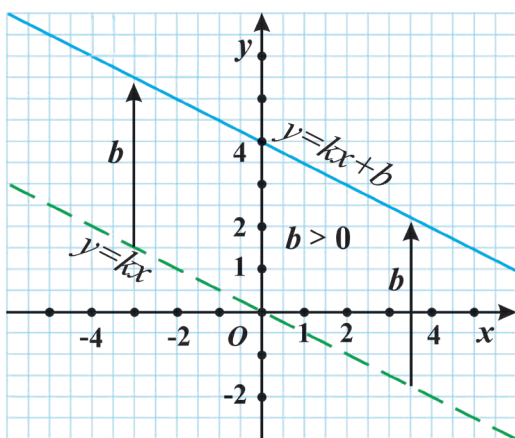
Функция вида $y = kx + b$ называется *линейной функцией*. k, b – заданные числа.

Число k в функции $y = kx + b$ показывает, насколько прямая наклонена к оси Ox .

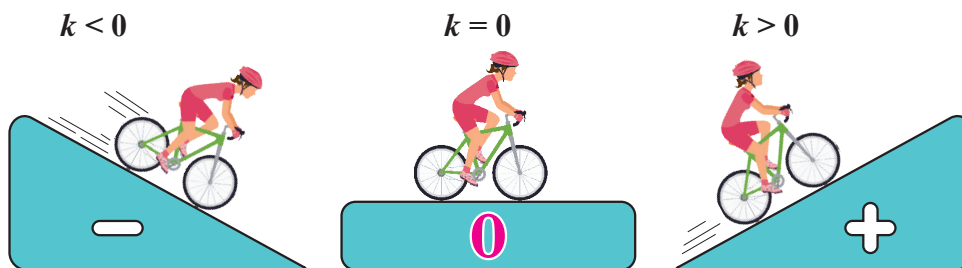
Если $b > 0$, график функции $y = kx$ сдвигается вдоль оси Oy в положительном направлении на расстояние, равное $|b|$.

Если $b < 0$, график функции $y = kx$ сдвигается вдоль оси Oy в отрицательном направлении на расстояние, равное $|b|$.

Если $b = 0$, то получим график функции $y = kx$.



Зависимость графика функции от k



Примеры

Пример 1. Найдите формулу линейной функции по графику.

Формула линейной функции: $y = kx + b$.

Итак, нам нужно определить, чему равны числа, k и b . Из графика видно, что $k > 0$.

1) Число b всегда является точкой пересечения прямой с осью Oy . На рисунке прямая пересекает точку 1 на оси Oy . Отсюда следует, что $b = 1$.

2) $k = \frac{\text{вертикальное расстояние}}{\text{горизонтальное расстояние}} = \frac{6}{3} = 2$. Следовательно, $k = 2$.

3) Запишем формулу функции: $y = kx + b = 2x + 1$.



Пример 2. Найдите формулу линейной функции по графику.

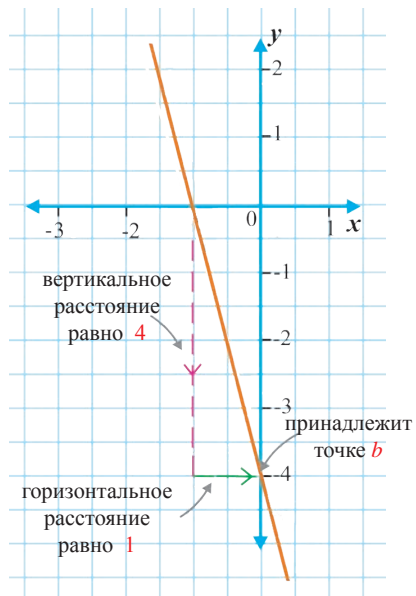
Итак, нам нужно определить, чему равны числа k и b .

Из графика видно, что $k < 0$.

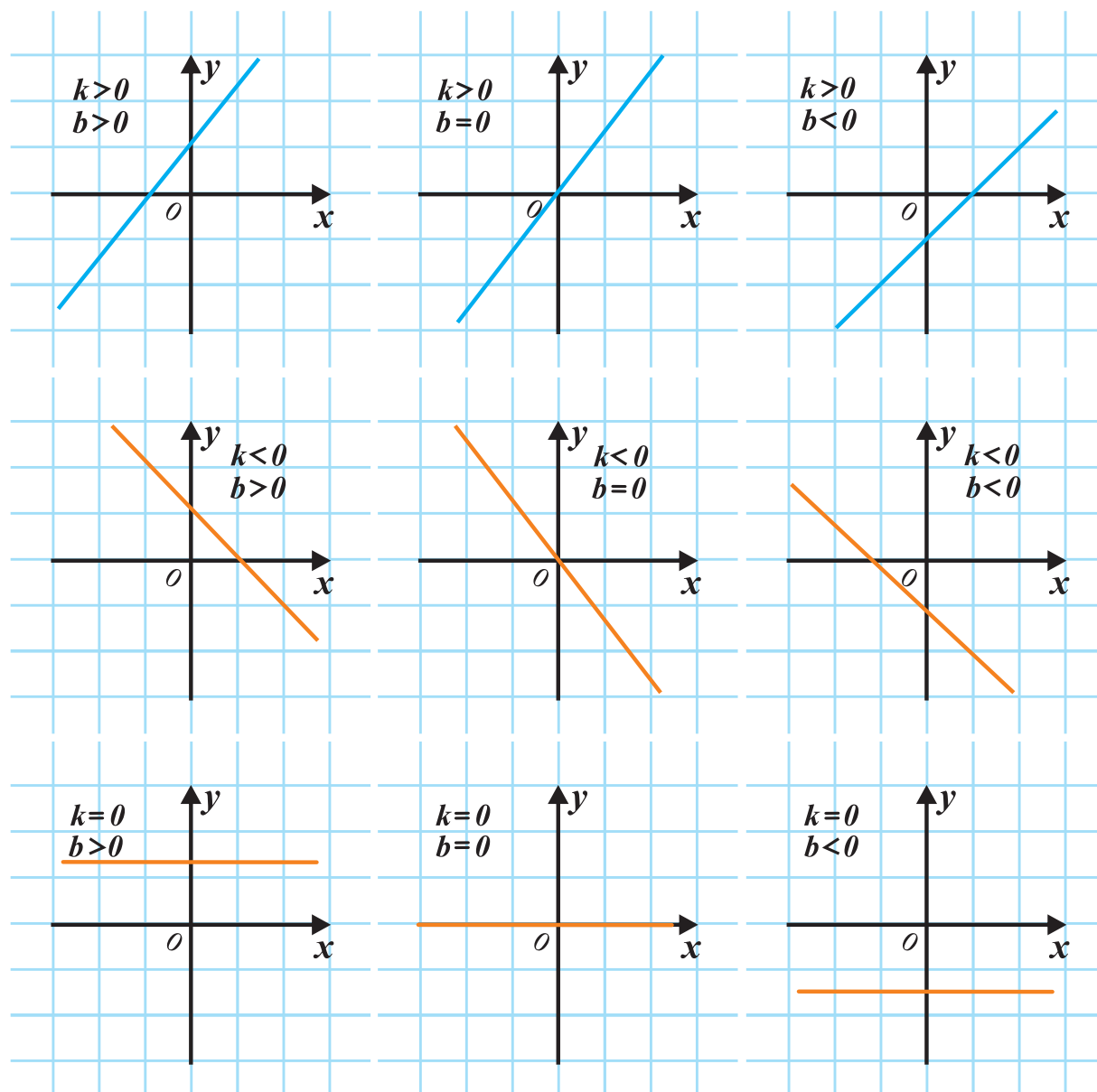
1) Число b всегда является точкой пересечения прямой с осью Oy . На рисунке прямая пересекает точку -4 на оси Oy . Отсюда следует, что $b = -4$.

2) $k = \frac{\text{вертикальное расстояние}}{\text{горизонтальное расстояние}} = \frac{4}{1} = 4$. Следовательно, $k = -4$.

3) Запишем формулу функции: $y = kx + b = -4x - 4$.



Расположение линейной функции $y = kx + b$ в координатной плоскости



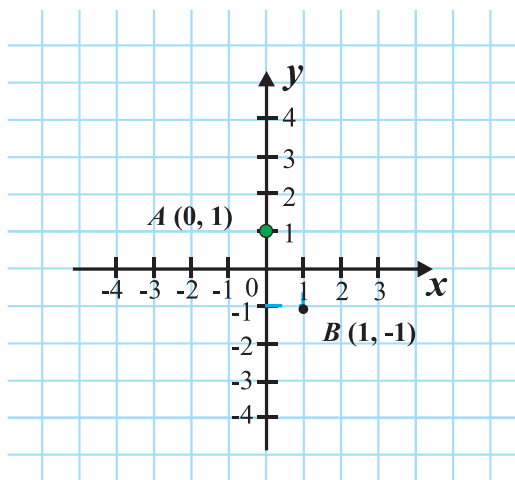
Примеры

Пример 3. Построим график функции $y = -2x + 1$.

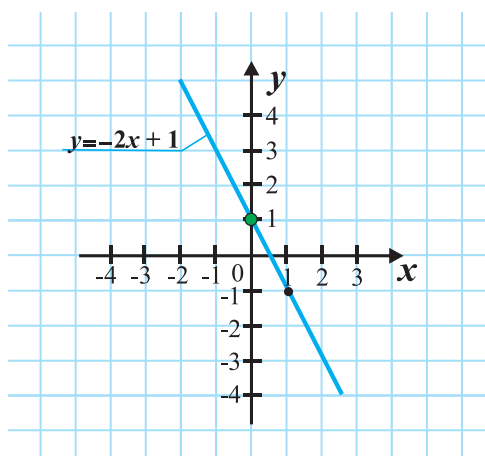
Находим значение функции y для двух произвольных значений x . Например, вместо x возьмём числа 0 и 1. Полученные значения x и y являются координатами точек на графике функции.

x	0	1
y	1	-1

Полученные значения x и y являются координатами точек графика функции, отмечаем эти точки в системе координат.



Теперь проводим прямую линию через отмеченные точки. Эта линия является графиком функции $y = -2x + 1$.

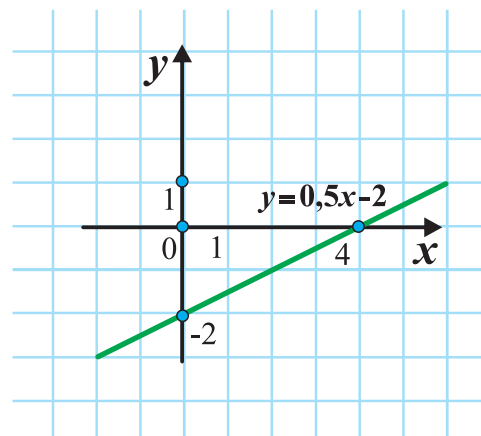


Пример 4. Дана функция $y = 0,5x - 2$.

- 1) если $x = 0$, $y = -2$;
- 2) если $x = 2$, $y = -1$;
- 3) если $x = 4$, $y = 0$ и так далее.

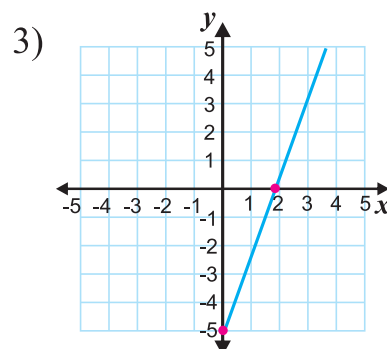
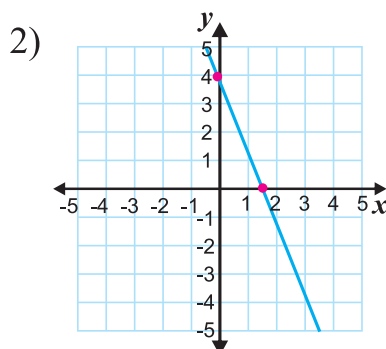
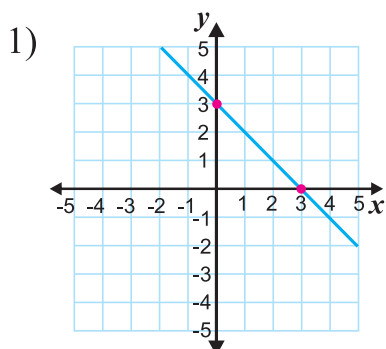
Для удобства результаты можно представить в виде таблицы:

x	0	2	4
y	-2	-1	0

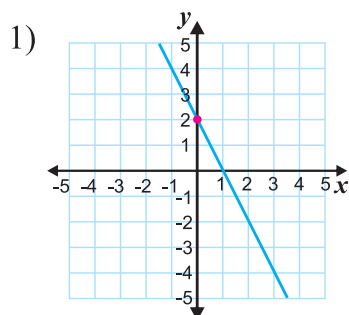


Упражнения

- Если известно, что график функции $y = 3x + b$ проходит через точку $(-2; 1)$, найдите значение b .
- Через какие точки проходит график функции $y = 3x + 1$?
1) $A(3; 7)$ 2) $B(2; -1)$ 3) $C(5; 16)$ 4) $D(7; 20)$
- Найдите координаты точек пересечения графиков функций $y = 2x - 3$ и $y = -x + 6$.
- Запишите функции на основании графика.

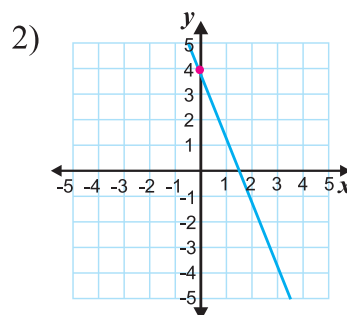


- Используя данные функции, заполните таблицы



$$y = -2x + 2$$

x				
y				



$$y = -\frac{8}{3}x + 4$$

x				
y				

- При каких значениях x функции $y = 2x - 3$ и $y = -x + 6$ принимают равные значения?
- При каких значениях x функции $y = 5x - 1$ и $y = x + 3$ принимают равные значения?
- При каком значении k прямая $y = kx + 3$ проходит через точку A ?
1) $A(2; 25)$ 2) $A(4; 13)$ 3) $A(8; 16)$ 4) $A(4; 19)$
- Найдите площадь треугольника, ограниченного графиком функции $y = 4x + 8$ и осями координат.
- Определите координату точки пересечения графика функции $y = 3x + 5$ с осью Oy .
- Определите координату точки пересечения графика функции $y = -3x + 6$ с осью Oy .

- 17.** 1) Найдите точку, симметричную точке $A(5; 3)$ относительно оси Ox .
 2) Найдите точку, симметричную точке $A(5; 3)$ относительно оси Oy .
 3) Найдите точку, симметричную точке $A(5; 3)$ относительно точки O .
 4) Найдите точку, симметричную точке $A(52; 43)$ относительно точки $B(17; -54)$.

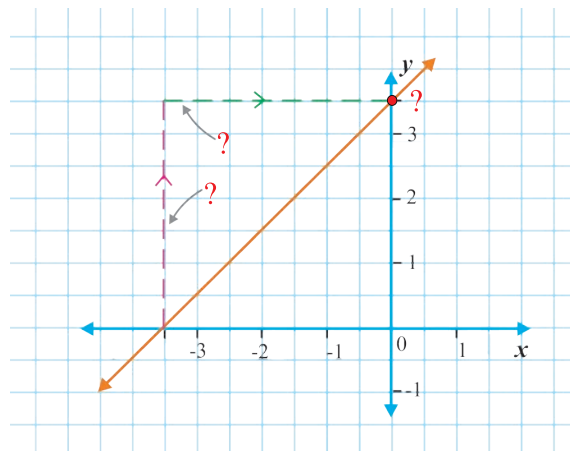
- 18.** Найдите нули функции.

1) $y = 5x + 5$ 2) $y = 3x - 12$ 3) $y = 10x - 30$ 4) $y = 3x - 24$

- 19.** Найдите точку пересечения данной функции с осью Ox .

1) $y = 4x - 8$ 2) $y = 4x - 28$ 3) $y = 7x - 14$ 4) $y = 5x - 1$

- 20.** Какое число можно поставить вместо вопросительного знака? Найдите формулу функции по графику.



- 21.** Ответьте на следующие вопросы:

- 1) Принадлежит ли точка $A(3; 2)$ графику функции $y = 5x - 7$?
 2) Принадлежит ли точка $B(3; 2)$ графику функции $y = 5x - 7$?
 3) Принадлежит ли точка $C(1; 4)$ графику функции $y = 2x - 7$?
 4) Принадлежит ли точка $D(1; 3)$ графику функции $y = 5x - 14$?

- 22.** Ответьте на следующие вопросы:

- 1) Проходит ли график прямой $y = x - 4$ через точку $A(7; 3)$?
 2) Проходит ли график прямой $y = x - 9$ через точку $A(7; 3)$?
 3) Проходит ли график прямой $y = x - 5$ через точку $A(6; 4)$?
 4) Проходит ли график прямой $y = 6x - 1$ через точку $B(0; 3)$?

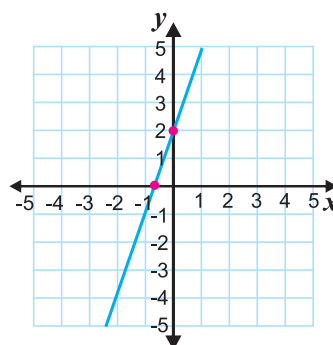
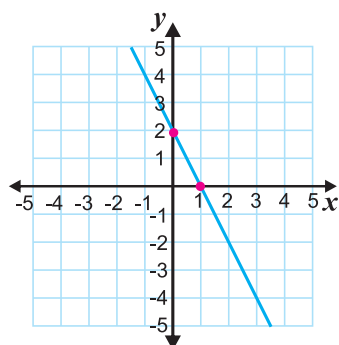
- 23.** Изучите положение графика функции $y = kx + b$ на координатной плоскости, если:

- а) при $k > 0, b = 0$; при $k > 0, b > 0$; при $k > 0, b < 0$;
 б) при $k < 0, b = 0$; при $k < 0, b > 0$; при $k < 0, b < 0$

Сделайте выводы.

- 24.** Постройте графики функций $y = x + 1$ и $y = 2x - 1$.

25. Напишите формулу функции по графику.

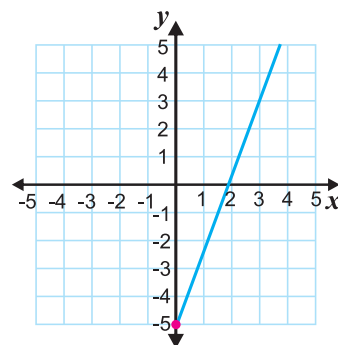
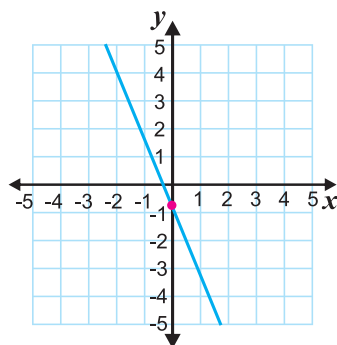
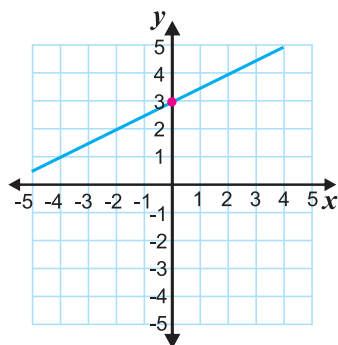


26. Заполните таблицу, используя график функции и формулу.

$$y = \frac{1}{2}x + 3$$

$$y = -2\frac{1}{2}x - 1$$

$$y = 2\frac{2}{3}x - 5$$



x				
y				

x				
y				

x				
y				

27. Найдите координату точки пересечения графика данной прямой с осью Oy .

1) $y = 3x - 7$

2) $y = 3x + 6$

3) $y = 2x + 1$

4) $y = 6x + 7$

28. Начертите графики функций $y = x$, $y = x + 2$ и $y = x - 2$ в одной координатной плоскости и проанализируйте их графики. Сделайте свой вывод.

29. Найдите линейную функцию, проходящую через точки A и B .

1) $A(7; 6)$ и $B(3; 5)$

2) $A(3; 2)$ и $B(5; 4)$

3) $A(4; 2)$ и $B(5; 7)$

4) $A(2; 10)$ и $B(1; 9)$

30. Найдите линейную функцию, параллельную прямой, проходящей через точки A и B , и проходящую через точку C .

1) $A(3; 2)$; $B(4; 1)$; $C(2; 1)$

2) $A(1; 2)$; $B(3; 4)$; $C(2; 4)$

3) $A(-1; 3)$; $B(1; 5)$; $C(-3; 4)$

4) $A(-5; 2)$; $B(2; 4)$; $C(0; 4)$

31. Найдите площадь треугольника, ограниченного графиком функции $y = -3x + 6$ и осями координат.

32. Из формулы найдите y . Чему равно значение y при $x = 0$?

1) $2x + 4y = 16$

2) $-x - y = 5$

3) $-x + 2y = 3$

4) $2x - y = 2$

ПРОЕКТНАЯ РАБОТА

Построение графика линейной функции в программе MS Excel

Одной из возможностей электронных таблиц MS Excel является возможность отображать данные в виде различных диаграмм или графиков. Представление готовых таблиц в графическом виде, во-первых, наглядно представляет данные, во-вторых, создаёт удобную возможность для сравнения результатов.

Учитывая значения функции $y = 3x$ и построение точечного графика:

1) Создаём значения аргумента x и функции y в таблице Excel, как показано на картинке. Для этого мы используем параметры заливки, копирования и форматирования. Значения x : берём целые числа от -5 до 5 и отмечаем значения y в таблице.

	A	B	C	D
1	x	y		
2	-5	$=3*A2$		
3	-4			
4	-3			
5	-2			
6	-1			
7	0			
8	1			
9	2			
10	3			
11	4			
12	5			
13				

2) Для нахождения значения y воспользуемся формулой « $=3*A2$ ». Затем находим все значения y , зависящие от x .

	A	B	C	D
1	x	y		
2	-5	-15		
3	-4	-12		
4	-3	-9		
5	-2	-6		
6	-1	-3		
7	0	0		
8	1	3		
9	2	6		
10	3	9		
11	4	12		
12	5	15		
13				

Выполните действия, указанные на рисунке.

$y = 3x$ построить график функции.

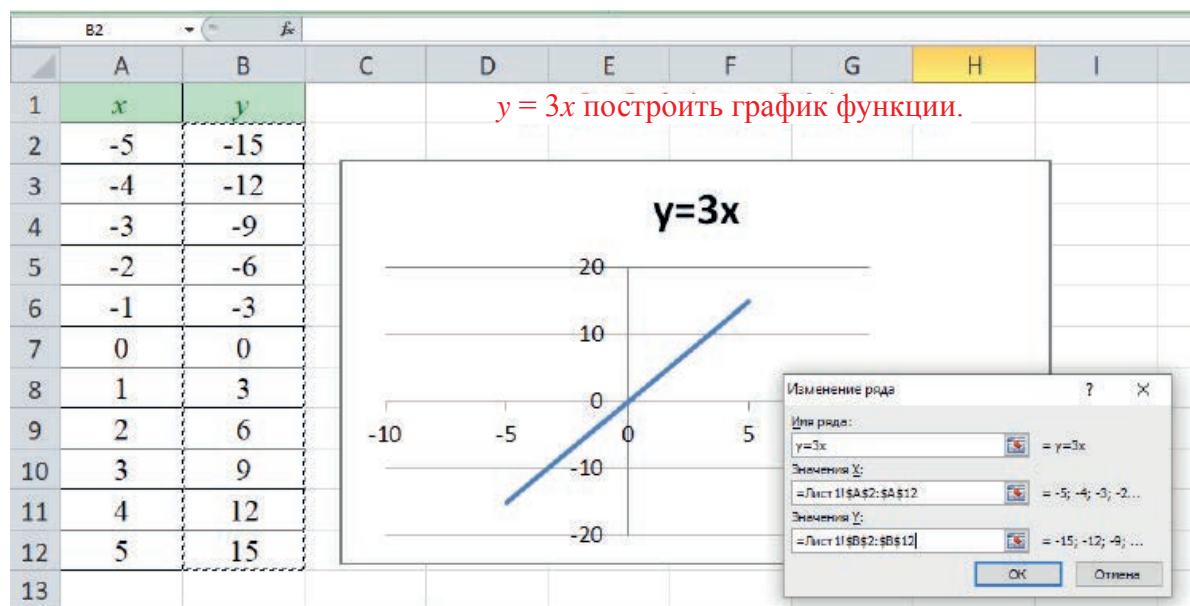
3) В меню **Вставка** отметьте раздел **График** → **Все типы диаграмм** → **Точечная** и нажмите **Ок**.

4) В меню **Конструктор** выберите раздел **Выбрать данные** → **Добавить**.

5) В окне **Ряд** в раздел **Имя ряда** запишите формулу функции $y = 3x$.

6) В окне **Значения X**: отмечаем значения аргумента x , в окне **Значения Y**: значения функции y .

При правильном и точном выполнении всех операций будет построен график функции $y = 3x$.



Задание

1. Нарисуйте график следующих функций, используя электронную таблицу MS Excel.

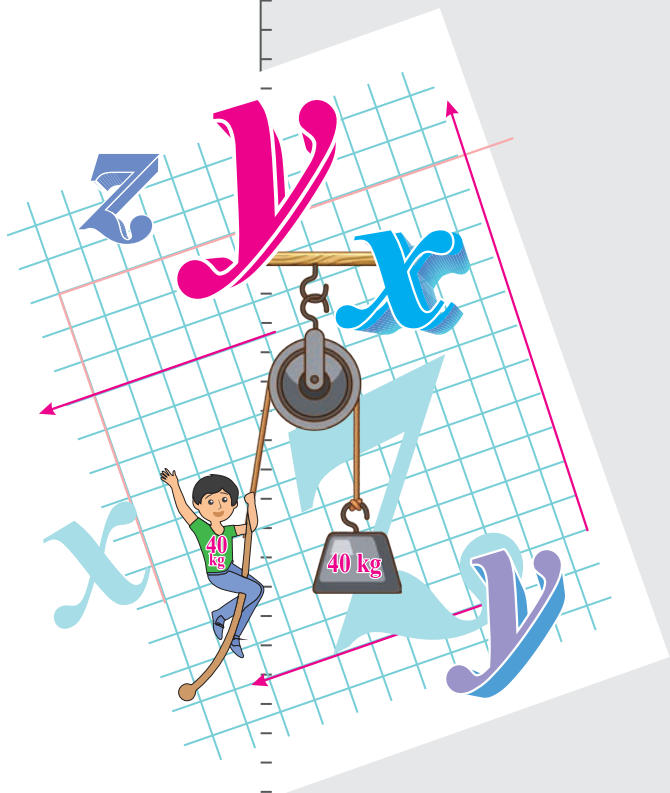
1) $y = 5x - 2$ 2) $y = 2x + 3$ 3) $y = 4x + \frac{1}{4}$ 4) $y = -\frac{1}{2}x + 5$

2. Измените цвет и координаты построенных графиков функций, размеры шрифта.

3. Сделайте презентацию всех результатов.

VI ГЛАВА

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ



СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Вспоминаем

- 1) Прибавьте $3x$ к правой и левой частям уравнения $y = -3x + 4$. К какому уравнению вы пришли? Они равносильные?
- 2) Как называется уравнение $3x + y = 4$? Если в данном уравнении $x = 0$, то чему равен y ? Сможете ли вы найти значение x , если $y = -4$?

Запомните!

Уравнение вида $ax + by = c$ — линейное уравнение с двумя неизвестными, где x и y — переменные (неизвестные), a , b и c — коэффициенты (заданные числа).

В уравнении $3x + y = 4$, $a = 3$, $b = 1$, $c = 4$.

При $x = 1$, $y = 1$ уравнение $3x + y = 4$ становится верным равенством: $3 \cdot 1 + 1 = 4$.

Пара неизвестных значений $x = 1$, $y = 1$ и будет решением этого уравнения.

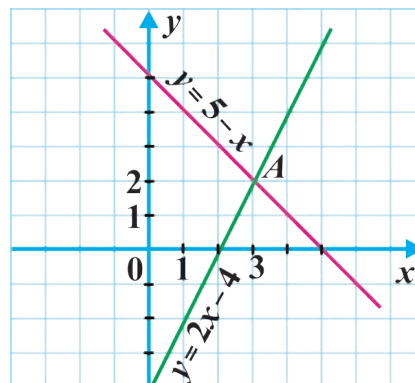
Решением уравнения с двумя неизвестными называется пара значений неизвестных, которые обращают это уравнение в верное равенство.

Пару значений неизвестных иногда кратко обозначают $(1; 1)$; $(0; -7)$.

- 1) Сможете ли вы указать точку пересечения графиков функций, заданных в виде

$$y = 5 - x \text{ и } y = 2x - 4?$$

- 2) $\begin{cases} y = 5 - x \\ y = 2x - 4 \end{cases}$ и $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$ равносильны?



Запомните!

Общий вид системы уравнений первой степени с двумя неизвестными записывается следующим образом:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Здесь $a_1; b_1; c_1; a_2; b_2; c_2$ — **коэффициенты**, x и y — **неизвестные (переменные)**.

Решением системы уравнений называют пары значений неизвестных $(x; y)$, которые обращают каждое из уравнений системы в верное равенство.

Решить систему линейных уравнений значит найти все его решения или показать, что решений нет.

Примеры

Пример 1. Сумма двух чисел равна 5, а их разность равна 3. Найдите эти числа.

Обозначим первое число x , а второе число y . По условию задачи сумма этих чисел равна 5, т.е.

$$x + y = 5.$$

А так как их разность равна 3, то

$$x - y = 3.$$

Мы получили два уравнения с двумя переменными. Это $x + y = 5$ и $x - y = 3$.

Система уравнений записывается в следующем виде с использованием больших скобок:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

Запомните!

Приведём каждое уравнение системы уравнений к виду линейной функции и построим их графики в одной системе координат.

Сделаем каждое уравнение системы уравнений линейной функцией и построим их графики в одной системе координат.

Известно, что 2 прямые на плоскости могут располагаться в трёх разных ситуациях, а именно:

1. параллельно.
2. пересекаются в одной точке.
3. совпадают.

Соотношение коэффициентов	Взаимное расположение прямых	Количество корней	Графики
$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	Прямые параллельны	Система уравнений не имеет корней.	
$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	Прямые пересекаются в одной точке.	Система уравнений имеет единственный корень	
$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	Прямые совпадают	Система имеет бесконечно много корней.	

Примеры

Пример 2. Проверьте, имеет ли система корни.
$$\begin{cases} 4x - 2y = 2 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

Способ 1. В каждом уравнении проверим соотношение коэффициентов.

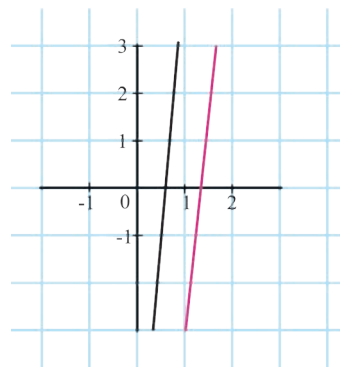
$$\frac{4}{2} = \frac{-2}{-1} \neq \frac{2}{3}, \text{ то есть } 2 = 2 \neq 0,666\dots$$

Таким образом, система уравнений не имеет корней.

Способ 2. В каждом уравнении, входящем в систему, выразим переменную y через переменную x :

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$$

Эти прямые линии параллельны, следовательно, система **не имеет решения.**

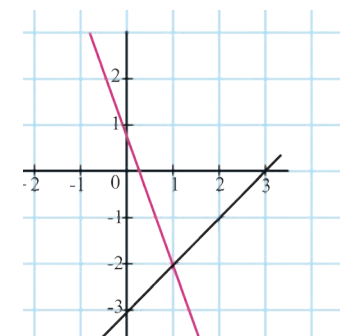


Пример 3. Проверьте, имеет ли система корни.
$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$$

Способ 1. В каждом уравнении проверим соотношение коэффициентов.

$$\frac{1}{3} \neq \frac{-1}{1}, \text{ то есть } 0,333\dots \neq -1. \text{ Следовательно, система}$$

уравнений имеет единственное решение.



Способ 2. В каждом уравнении, входящем в систему, выразим переменную y через переменную x :

$$\begin{cases} y = x - 3 \\ y = -3x + 1 \end{cases}$$

Эти прямые пересекаются, и система имеет **единственное решение.**

Пример 4.
$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x + 3y = 6 \end{cases}$$
 Проверьте, имеет ли система корни.

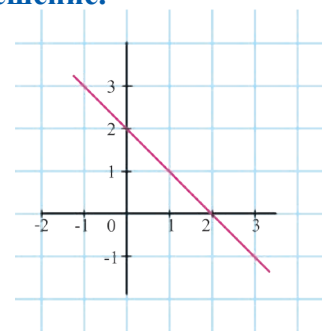
1 способ. В каждом уравнении проверим соотношение коэффициентов.

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} = \frac{2}{6}.$$
 Следовательно, система уравнений имеет бесконечно много решений.

2 способ. В каждом уравнении, входящем в систему, выразим переменную y через переменную x :

$$\begin{cases} y = -x + 2 \\ y = -x + 2 \end{cases}$$

Графики этих функций совпадают, следовательно, система имеет **бесконечно много решений.**



Запомните!

График уравнения $ax + by = c$ представляет собой **прямую линию**. Каждая точка прямой является решением уравнения.

Шаги, необходимые для графического решения некоторых систем линейных уравнений, показаны ниже:

1. Запишем первое уравнение системы в виде линейной функции и построим её график в системе координат.
2. Запишем второе уравнение в виде линейной функции и построим её график в той же системе координат.
3. Определяем расположение линий и находим количество корней.

Примеры

Пример 5. $\begin{cases} x - y = -1 \\ -x - y = 3 \end{cases}$ Решите систему уравнений

графически.

Приведём каждое уравнение системы к виду линейной функции:

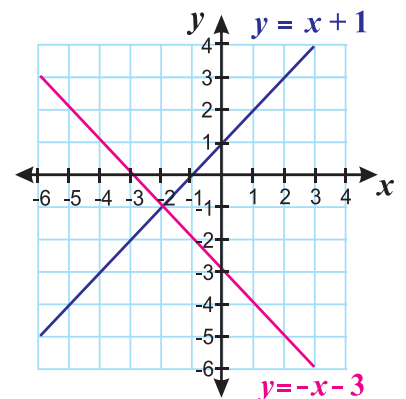
$$x - y = -1 \rightarrow y = x + 1$$

$$-x - y = 3 \rightarrow y = -x - 3$$

Начертим графики каждой из двух функций. Графики представляют собой прямые линии, и они пересекаются.

Найдём точку пересечения: $x = -2$; $y = -1$.

Следовательно, $(-2; -1)$ решение системы.



Пример 6. $\begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = 7 \end{cases}$ Решите систему уравнений

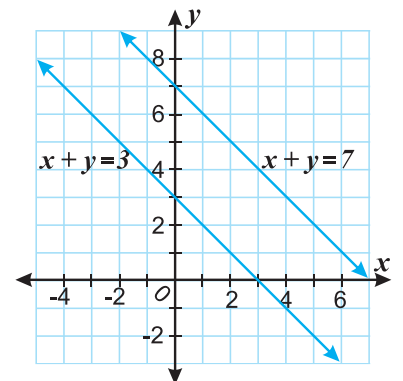
графически.

Приведём каждое уравнение системы к виду линейной функции:

$$x + y = 3 \rightarrow y = -x + 3$$

$$x + y = 7 \rightarrow y = -x + 7$$

Начертим графики каждой из двух функций. Графики представляют собой прямые линии, и они не пересекаются, так как параллельны. Следовательно, система не имеет корней.

**Упражнения**

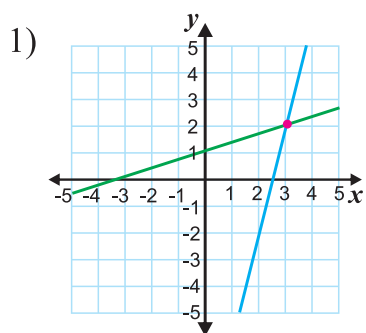
1. Проверьте, являются ли числа $x = 3$, $y = 2$ решением следующих систем уравнений.

$$1) \begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2x + y = 10 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases}$$

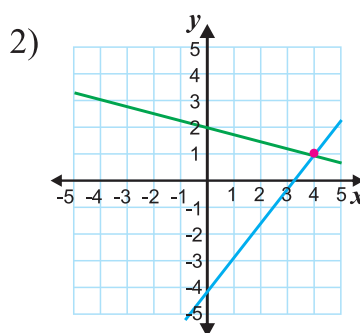
$$3) \begin{cases} x + 2y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

2. Графически найдите значения x и y .



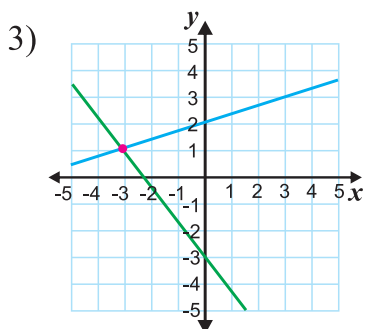
$$y = 4x - 10$$

$$y = \frac{1}{3}x + 1$$



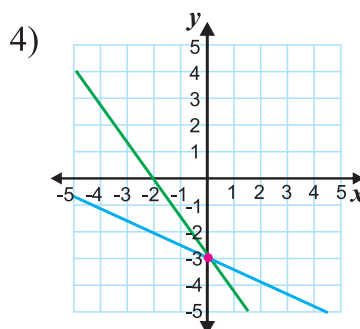
$$-5x + 4y = -16$$

$$x + 4y = 8$$



$$-x + 3y = 6$$

$$4x + 3y = -9$$



$$y = -\frac{4}{9}x - 3$$

$$y = -\frac{7}{5}x - 3$$

3. Какие из приведённых пар чисел будут решением системы уравнений $\begin{cases} 2x - 3y = -6 \\ x - y = 6 \end{cases}$

1) $x = 8; y = 2$

2) $x = 24; y = 18$

3) $x = 3; y = -3$

4) $x = 6; y = 0$

4. Какие из пар являются решениями следующих систем уравнений $(0; 1), (1; 2), (-3; 4), (0; 2)$?

1) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = -2 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = -7 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = -1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x + y = 1 \\ -x + y = 1 \end{cases}$

5. Составьте системы линейных уравнений, решениями которых будут следующие пары чисел:

1) $x = 2; y = 1$

2) $x = 2; y = -1$

3) $x = 2; y = 0$

4) $x = -2; y = -1$

6. Графически проверьте, имеют ли следующие системы уравнений решения:

1) $\begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 4 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - y = 1 \\ 3x + y = 7 \end{cases}$

3) $\begin{cases} y = x - 3 \\ x - y = 3 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$

5) $\begin{cases} y - x = 5 \\ y - 2x = 1 \end{cases}$

6) $\begin{cases} y = x + 3 \\ x = y - 5 \end{cases}$

7) $\begin{cases} y - 2x = 5 \\ -4x + 2y = 10 \end{cases}$

8) $\begin{cases} 4x - y = 5 \\ 2y + 4x = 2 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 3x - y = 6 \\ x + 3y = 10 \end{cases}$

7. При каком значении a системы уравнений не имеют решения?

1) $\begin{cases} ax - y = 2 \\ 3x - 2y = -5 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 7x + 8y = 12 \\ 6x - ay = 2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5x + ay = -6 \\ 9x - 18y = 20 \end{cases}$

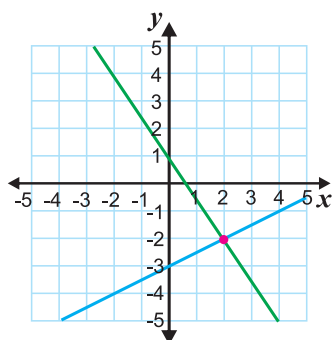
8. При каком значении a системы уравнений имеют решения?

1) $\begin{cases} ax + 8y = 12 \\ 18x - 3y = -1 \end{cases}$

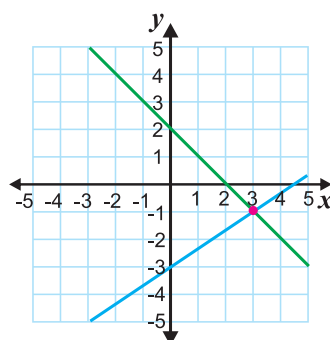
2) $\begin{cases} 5x + ay = -6 \\ 9x - 18y = 20 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 24x + 8y = -3 \\ 3x - 2ay = 6 \end{cases}$

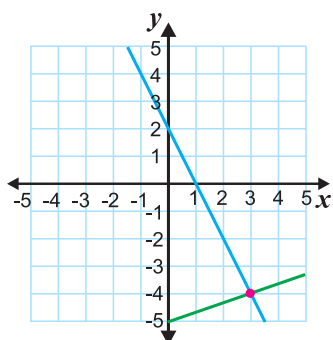
9. По графику найдите пару x и y , которая будет решением системы уравнений, и проверьте результаты.



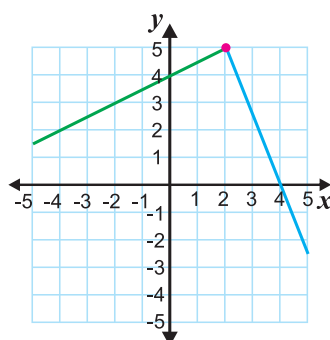
$-x + 2y = -6$
 $3x + 2y = 2$



$-2x + 2y = -6$
 $x + y = 2$



$y = -2x + 2$
 $y = \frac{1}{3}x - 5$



$y = -\frac{5}{2}x - 10$
 $y = \frac{1}{2}x + 4$

10. Для точек A и B найдите прямую, проходящую через точку A , перпендикулярную прямой AB .

1) $A(5; 2); B(2; 5)$

2) $A(4; 3); B(1; 4)$

3) $A(3; 2); B(4; 5)$

4) $A(-3; 0); B(0; -5)$

11. Найти прямую, параллельную прямой $y = 3x + 5$.

1) $y = 3x - 5$

2) $y = 9x - 5$

3) $y = -3x - 5$

4) $y = 3x - 15$

5) $y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{5}$

6) $y = \frac{1}{3}x + 5$

СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Способ подстановки

Одним из простейших способов решения системы линейных уравнений с двумя неизвестными является метод подстановки.

Правило решения системы уравнений подстановкой выглядит следующим образом:

- 1) Из одного уравнения системы (неважно, какого) одно из неизвестных должно быть выражено через другое.
- 2) Полученное выражение нужно подставить во второе уравнение системы (при этом образуется уравнение с одним неизвестным).
- 3) Необходимо решить уравнение с одним неизвестным и найти значение x (или y).
- 4) Подставив найденное значение x (или y) в ранее полученное выражение, находим значение y (или x).

Примеры

Пример 1. Решите систему линейных уравнений
$$\begin{cases} 2x - y = 7 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

Шаг 1: из второго уравнения системы выражаем $x = y + 3$.

Шаг 2: в первое уравнение системы вместо x подставляем полученное выражение $y + 3$.

$$\begin{cases} 2x - y = 7 \\ x - y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 7 \\ x = y + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(y + 3) - y = 7 \\ x = y + 3 \end{cases}$$

Шаг 3: $2y + 6 - y = 7$. Отсюда получаем $y = 1$.

Шаг 4: подставив это значение y во второе уравнение системы, $x = 1 + 3 = 4$, находим $x = 4$.

Ответ: $(4; 1)$ или $x = 4, y = 1$.

Пример 2. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} y = 2x - 4 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

Шаг 1: получив из первого уравнения системы $y = 2x - 4$ подставляем вместо y во второе уравнение $2x - 4$:

$$\begin{cases} y = 2x - 4 \\ x + (2x - 4) = 5 \end{cases}$$

Шаг 2: решив полученное уравнение $x + (2x - 4) = 5$, находим $x = 3$.

Шаг 3: подставив это значение x во второе уравнение системы вместо переменной x , находим $y = 2 \cdot 3 - 4 = 2$.

Ответ: $x = 3$ и $y = 2$ или $(3; 2)$.

Пример 3. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 5x + 4y = 32 \\ 3x - 2y = 6 \end{cases}$$

В двух уравнениях этой системы неудобно выражать одно неизвестное через другое.

Тем не менее, выразив переменную y из второго уравнения $3x - 2y = 6$, которое немного проще, через переменную x и подставив в первое уравнение полученное выражение вместо переменной y , решаем уравнение.

Необходимо найти значение y , подставив найденное значение x в ранее найденное уравнение с одной неизвестной:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 5x + 4y = 32 \\ 3x - 2y = 6 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 5x + 4y = 32 \\ y = \frac{3x-6}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 2 \cdot \frac{3x-6}{2} = 32 \\ y = \frac{3x-6}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 2 \cdot (3x-6) = 32 \\ y = \frac{3x-6}{2} \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} 5x + 6x - 12 = 32 \\ y = \frac{3x-6}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 6x = 32 + 12 \\ y = \frac{3x-6}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11x = 44 \\ y = \frac{3x-6}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = \frac{3x-6}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = \frac{3 \cdot 4 - 6}{2} \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = \frac{12-6}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = \frac{6}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, решением данной системы является пара чисел $(4; 3)$.

Упражнения

1. Выразите одно неизвестное в каждом из данных уравнений через другое:

1) $x - y = 2$

2) $-x + y = 1$

3) $x - 2y = 4$

4) $3x - y = -7$

2. Решите систему линейных уравнений.

1) $\begin{cases} x = y \\ x + y = 4 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = -y \\ x + 2y = 6 \end{cases}$

3) $\begin{cases} y = -x \\ -x + 6y = 7 \end{cases}$

4) $\begin{cases} y = 2x \\ 3x + y = 10 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x + y = 4 \\ x = 2 + y \end{cases}$

6) $\begin{cases} x + y = 7 \\ y = x + 3 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x = 5 - y \\ x - y = 3 \end{cases}$

8) $\begin{cases} y - 4 = x \\ x + y = 4 \end{cases}$

9) $\begin{cases} x = 2y + 1 \\ x + y = 7 \end{cases}$

10) $\begin{cases} x + y = 2 \\ y = 3x - 2 \end{cases}$

11) $\begin{cases} x = -y \\ x - y = 10 \end{cases}$

12) $\begin{cases} x = 8y - 7 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$

13) $\begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ x + y = 0 \end{cases}$

14) $\begin{cases} 4x - 5y = 9 \\ x - y = 2 \end{cases}$

15) $\begin{cases} 2x + y = 9 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$

16) $\begin{cases} x = 5y + 4 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$

17) $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$

18) $\begin{cases} x = 8 - y \\ 5x + 3y = 24 \end{cases}$

19) $\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 4 \end{cases}$

20) $\begin{cases} x - y = 5 \\ x + y = -1 \end{cases}$

21) $\begin{cases} y = 5 + 3x \\ x + y = 9 \end{cases}$

Способ сложения

Другой метод решения системы линейных уравнений с двумя переменными – это **метод алгебраического сложения**.

Правило решения системы уравнений методом сложения следующее:

- 1) приравнивание модулей коэффициентов перед одним из неизвестных;
- 2) нахождение одного неизвестного путём почленного сложения или вычитания полученного уравнения;
- 3) подстановка найденного значения в одно из уравнений данной системы и нахождение второго неизвестного.

Примеры

Пример 4. Решите систему линейных уравнений $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$.

Поскольку здесь коэффициенты перед переменной y в уравнениях $x + y = 5$ и $x - y = 1$ являются противоположными числами, сложим эти уравнения столбиком:

$$\begin{array}{r} + \left| \begin{array}{l} x + y = 5 \\ x - y = 1 \\ \hline 2x + 0 = 6 \end{array} \right. \end{array}$$

Получаем равенство $2x = 6$. Отсюда находим $x = 3$.

Далее, вместо x подставив его значение в уравнение $x + y = 5$ или $x - y = 1$, можно найти $y = 2$.

Можно проверить, что пара чисел $(3; 2)$ удовлетворяет данной системе $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$.

$$\begin{cases} 3 + 2 = 5 \\ 3 - 2 = 1 \end{cases}$$

Два равенства верны. Следовательно, решением данной системы уравнений является $(3; 2)$.

Пример 5. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x + 2y = 11 \\ 3x - y = 8 \end{cases}$.

Почленно вычтем из первого уравнения системы второе.

$$\begin{array}{r} - \left| \begin{array}{l} 3x + 2y = 11 \\ 3x - y = 8 \\ \hline 0 + 3y = 3 \end{array} \right. \end{array}$$

Из уравнения $3y = 3$ находим $y = 1$. Подставляем $y = 1$ в $3x + 2y = 11$ или $3x - y = 8$ и находим $x = 3$. Ответ: $(3; 1)$.

Пример 6. Решите систему уравнений $\begin{cases} 4x + 3y = 10 \\ 5x - y = 3 \end{cases}$.

Если второе уравнение в данной системе уравнений умножить на 3 и почленно сложить с первым, получим:

$$\begin{cases} 4x + 3y = 10 \\ 5x - y = 3 \end{cases} \cdot 3 \Rightarrow \begin{cases} 4x + 3y = 10 \\ 15x - 3y = 9 \end{cases} + \begin{cases} 4x + 3y = 10 \\ 15x - 3y = 9 \end{cases}$$

$$19x = 19$$

Отсюда полученное значение $x=1$ подставим в уравнение $4x + 3y = 10$, то есть

$$\begin{aligned} 4 \cdot 1 + 3y &= 10 \\ 3y &= 10 - 4 \\ 3y &= 6 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Ответ: (1; 2).

Пример 7. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x + 5y = 8 \\ 5x - 4y = 1 \end{cases}$.

Мы можем умножить первое уравнение в данной системе уравнений на 4, а второе уравнение на 5.

$$\begin{cases} 3x + 5y = 8 \\ 5x - 4y = 1 \end{cases} \cdot \begin{matrix} 4 \\ 5 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 12x + 20y = 32 \\ 25x - 20y = 5 \end{cases}$$

Почленно складываем полученные уравнения.

$$\begin{aligned} &+ \begin{cases} 12x + 20y = 32 \\ 25x - 20y = 5 \end{cases} \\ &37x = 37 \end{aligned}$$

Полученное из равенства значение $x = 1$ подставляем в уравнение $5x - 4y = 1$, находим $y = 1$. Таким образом, решением данной системы уравнений будет $x = 1$ и $y = 1$.

Ответ: (1; 1).

Пример 8. Если точки $A(-1; 4)$ и $B(1; 2)$ принадлежат графику функции $y = kx + b$, найдите значения k и b .

По условию примера, точки $A(-1; 4)$ и $B(1; 2)$ принадлежат графику функции $y = kx + b$,

$\begin{cases} 4 = -1 \cdot k + b \\ 2 = 1 \cdot k + b \end{cases}$, то есть нужно найти значения k и b , удовлетворяющие системе

уравнений.

Систему уравнений $\begin{cases} 4 = -1 \cdot k + b \\ 2 = 1 \cdot k + b \end{cases}$ запишем в виде $\begin{cases} -1 \cdot k + b = 4 \\ 1 \cdot k + b = 2 \end{cases}$.

Теперь решим её методом алгебраического сложения.

$$\begin{aligned} &+ \begin{cases} -k + b = 4 \\ k + b = 2 \end{cases} \\ &2b = 6 \end{aligned}$$

Найденное из полученного равенства значение $b = 3$ подставим в уравнение $k + b = 2$ и найдём $k = -1$. Ответ: $k = -1$ и $b = 3$.

Упражнения

1. Решите систему линейных уравнений.

$$\begin{array}{lll}
 1) \begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases} & 2) \begin{cases} x + 2y = 0 \\ x - 2y = 2 \end{cases} & 3) \begin{cases} x - 3y = 2 \\ x + 3y = 8 \end{cases} \\
 4) \begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y = 5 \end{cases} & 5) \begin{cases} x + 6y = 15 \\ x - 6y = -1 \end{cases} & 6) \begin{cases} -x + 6y = 7 \\ x - 4y = -5 \end{cases} \\
 7) \begin{cases} 5x + y = 40 \\ 10x - y = -10 \end{cases} & 8) \begin{cases} 2x + y = 11 \\ 2x - 6y = -1 \end{cases} & 9) \begin{cases} x - y = 12 \\ 2x + y = 30 \end{cases} \\
 10) \begin{cases} 3x + y = 12 \\ 2x + y = 7 \end{cases} & 11) \begin{cases} x - y = 14 \\ -x + 5y = 10 \end{cases} & 12) \begin{cases} 5x + 6y = 17 \\ 10x - 6y = -2 \end{cases}
 \end{array}$$

2. Решите систему уравнений.

$$1) \begin{cases} x + y = 7 \\ 3x - y = 13 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x - 2y = 11 \\ 3x - y = 10 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 2x + 4y = 14 \\ 3x - 4y = 1 \end{cases} \quad 4) \begin{cases} 7x + 2y = 10 \\ 7x + 3y = 8 \end{cases}$$

3. Решите систему линейных уравнений.

$$1) \begin{cases} 4x + 3y = 14 \\ 5x - y = 8 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x + 4y = 11 \\ 2x + y = 9 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 8x - 3y = 21 \end{cases} \quad 4) \begin{cases} 2x - 7y = -1 \\ x - 5y = -2 \end{cases}$$

4. Решите систему линейных уравнений.

$$1) \begin{cases} 3x + 4y = 10 \\ 4x + 5y = 13 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 5x + 6y = -2 \\ 3x - 4y = 18 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 8x - 7y = 6 \\ 6x - 11y = 16 \end{cases} \quad 4) \begin{cases} 12x - 9y = 12 \\ 8x + 13y = 8 \end{cases}$$

5. Точки A и B принадлежат графику функции $y = kx + b$. Найдите значения k и b .

$$\begin{array}{ll}
 1) A(2; 3) \text{ и } B(4; 5) & 2) A(-1; 6) \text{ и } B(0; 3) \\
 3) A(2; 0) \text{ и } B(0; 8) & 4) A(3; 26) \text{ и } B(-5; 10)
 \end{array}$$

6. Ответьте на вопросы.

1) Вместо A запишите такое линейное уравнение, чтобы система уравнений

$$\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ A \end{cases} \text{ имела единственное решение.}$$

2) Вместо A запишите такое линейное уравнение, чтобы система уравнений

$$\begin{cases} 8x + y = 5 \\ A \end{cases} \text{ имела бесконечно много решений.}$$

7. Графическим способом сделайте вывод о существовании решения системы уравнений.

$$1) \begin{cases} y = 5 - x \\ y = 2x + 2 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = -x - 4 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} y = 2x - 7 \\ 2y + 3x = 0 \end{cases}$$

8. Решите систему линейных уравнений методом подстановки.

$$1) \begin{cases} 15x - 4y = 8 \\ y = 1 + 3x \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 4x - 9y = 3 \\ x = 6 - 3y \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 3x - y = -5 \\ -5x + 2y = 13 \end{cases}$$

9. Решите систему линейных уравнений методом алгебраического сложения.

$$1) \begin{cases} x + y = 45 \\ x - y = 13 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x + y = 49 \\ -x + y = 17 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 3x + 2y = -27 \\ -5x + 2y = 13 \end{cases}$$

10. Решите систему линейных уравнений.

$$1) \begin{cases} x + y = 45 \\ x - y = 13 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 11 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} y = x + 1 \\ 5x + 2y = 16 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} y = 2,5x \\ y = 8 - 1,5x \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} 5x - 3y = -8 \\ x + 12y = 11 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 3x - 4y = 5 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 4y = -3 \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} 2x + 11y = 15 \\ 10x - 11y = 9 \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} 3y - 2x = 0 \\ y = -3x + 11 \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} x + y = 5 \\ y = 2x + 2 \end{cases}$$

$$11) \begin{cases} x = 3y - 4 \\ y = x + 1 \end{cases}$$

$$12) \begin{cases} y = 2x - 7 \\ 2y + 3x = 0 \end{cases}$$

$$13) \begin{cases} 4x - 9y = 3 \\ x + 3y = 6 \end{cases}$$

$$14) \begin{cases} 5x - 2y = 0 \\ 3x + 2y = 16 \end{cases}$$

$$15) \begin{cases} 3x - y = -5 \\ -5x + 2y = 1 \end{cases}$$

$$16) \begin{cases} -x + 2y = 4 \\ 7x - 3y = 5 \end{cases}$$

$$17) \begin{cases} 3x + 2y = -27 \\ -5x + 2y = 13 \end{cases}$$

$$18) \begin{cases} 3x - 2y = 64 \\ 3x + 7y = -8 \end{cases}$$

11. Найдите решение системы уравнений удобным для вас способом.

$$1) \begin{cases} 5x - 2y = 0 \\ 3x + 2y - 16 = 0 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 11 \end{cases}$$

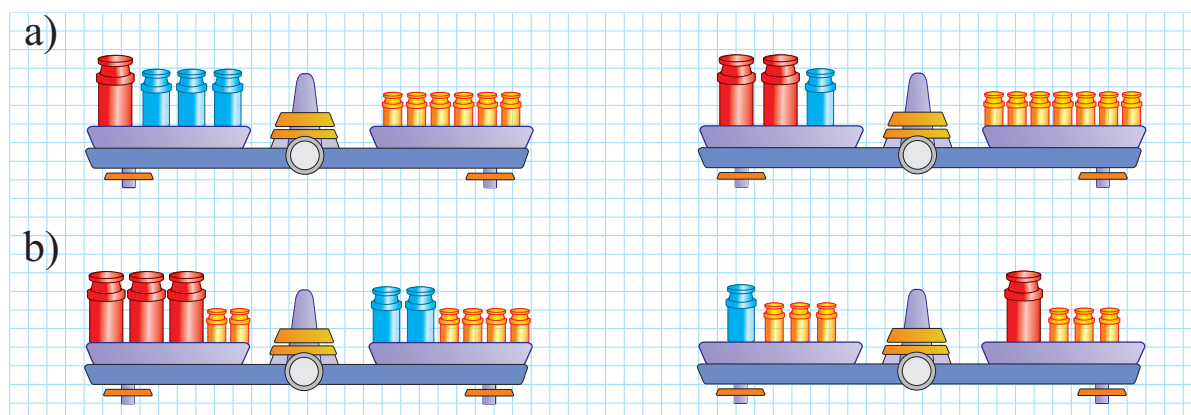
$$3) \begin{cases} x + 2y - 5 = 0 \\ 2x + 4y + 3 = 0 \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Сумма двух чисел равна 50, а их разность 16. Найдите эти числа.

2. Составьте систему уравнений, воспользовавшись двумя весами, и найдите неизвестные.

$$x = x, y = y, 1 = 1$$



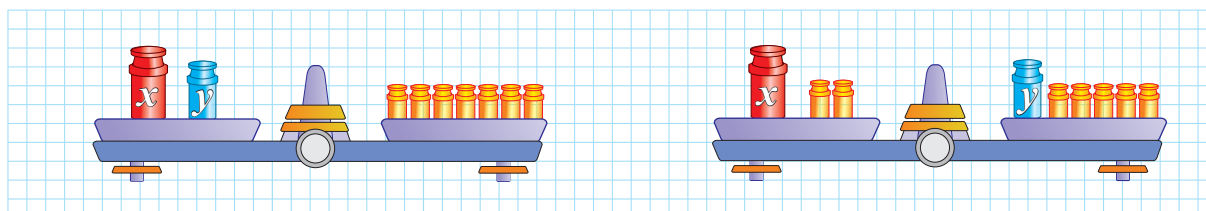
3. Сумма двух чисел равна 16. Удвоенное значение одного из чисел на 7 больше, чем утроенное значение другого. Найдите эти числа.

4. Солихабону заплатила 1600 сум за 3 тетради и 2 карандаша. Дурдона заплатила 1100 сумов за 2 тетради и 2 карандаша. Найдите цену тетради и карандаша.

5. Сумма двух чисел равна 50, а их разность 16. Найдите эти числа.

6. Составьте систему уравнений, воспользовавшись двумя весами, и найдите неизвестные.

$$x = x, y = y, 1 = 1$$



7. 42 ученика отправились в путешествие на 8 лодках. Одни лодки четырёхместные, другие шестиместные. Сколько 4-местных и 6-местных лодок, если все места в них заняты?

8. Прибавление второго числа к двум пятым первого равно 26, а прибавление первого числа к двум пятым второго равно 23. Найдите эти числа.

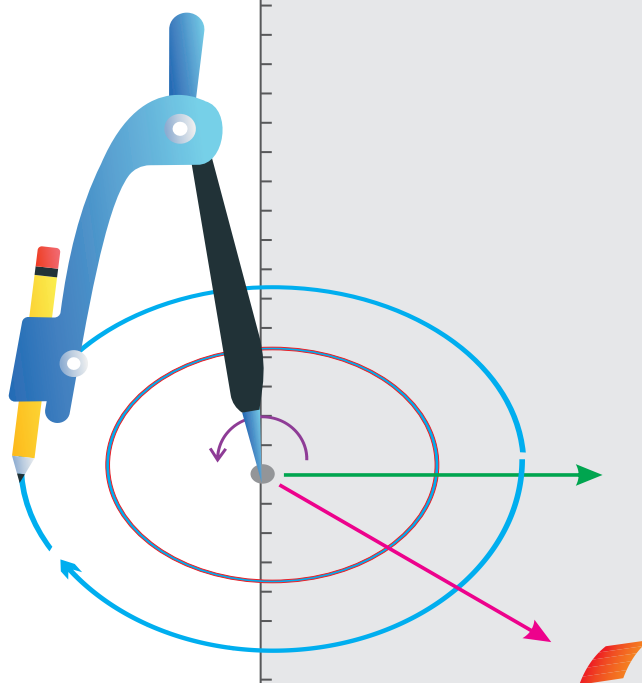
9. На ферме содержатся куры и кролики. У них 310 голов и 880 ног. Сколько кур и сколько кроликов на ферме?

10. В сутки на 12 лошадей и 19 коров выделяется 189 kg корма. Если известно, что 3 коровам дают на 1 kg корма больше, чем 2 лошадям, то сколько kg корма даётся каждой лошади и каждой корове в день?
11. Сумма цифр двузначного числа равна 16. Если его цифры поменять местами, то значение увеличивается на 18. Найдите это двузначное число.
12. Скорость катера по течению 28 km/h, против течения 22 km/h. Найдите скорость катера в стоячей воде и скорость течения.
13. Сумма двух натуральных чисел равна 53. При делении одного из них на другое частное от деления равно 3, а остаток равен 1. Найдите эти числа.
14. Среднее арифметическое двух натуральных чисел равно 24. Одно из них составляет 20% от другого. Найдите эти числа.
15. Расстояние между двумя городами составляет 564 km. Два поезда отправились навстречу друг другу и встретились через 6 часов. Найдите скорость каждого поезда, если скорость одного из них на 10 km/h больше скорости другого.
16. Периметр прямоугольника равен 48 cm. Если одну из его сторон увеличить в 2 раза, а вторую уменьшить на 6 cm, периметр получившегося прямоугольника будет 64 cm. Найдите стороны прямоугольника.
17. По плану мастер и подмастерье должны были за один день изготовить 65 стульев. Мастер увеличил план на 20%, а подмастерье уменьшил его на 20%, и они изготовили вместе 70 стульев за один день. Сколько стульев по плану должен изготовить каждый из них?
18. Для получения воды 42°C было смешано всего 10 литров воды 30°C и 70°C. Сколько литров той и другой воды было взято?
19. У Азизбека было всего 100 сумов купюрами номиналом 5 и 10 сумов. Какая сумма была у Азизбека номиналом по 5 сумов, если 5-сумовых купюр на 5 больше, чем 10-сумовых?
20. Перед походом в горы ученики взяли с собой двух- и трёхместные палатки. Если в горах в 10 палатках расположилось 26 учеников, то сколько учеников в трёхместных палатках?
21. Одна сторона прямоугольника на 4 cm длиннее другой стороны. Если меньшую сторону увеличить в 2 раза, периметр получившегося прямоугольника будет 56 cm. Найдите стороны данного прямоугольника.

VII

ГЛАВА

РАБОТА С ДАНЫМИ



ОСНОВНЫЕ ПРАВИЛА КОМБИНАТОРИКИ

Примеры

Пример 1. Из дома до школы ведут три дороги. Длина 1-й дороги 1 km 200 m, 2-й дороги – 2 km 50 m, 3-й дороги – 1 km 800 m. По какой дороге вы бы пошли в школу?



Конечно, если ходить в школу — основная задача, то путь по 1-й дороге — лучший. Потому что лучший путь — это самый короткий путь.

Если все пути, которые мы должны выбрать, находятся на одинаковом расстоянии, не имеет значения, какой путь мы выберем.

Запомните!

Комбинаторика — это раздел математики, в котором изучаются способы выбора и размещения элементов некоторого множества на основании определённых условий.

Жизнь человека связана с техникой и производством. Обычно мы обращаем внимание на то, полезна ли выполняемая нами работа или нет. Поэтому важно заранее знать, будет ли выполняемая работа полезной или вредной, необходимо искать и анализировать несколько способов её выполнения.

Комбинаторика — это подсчёт комбинаций конечного числа данных объектов при соблюдении того или иного условия.

Примеры

Пример 2. В первой корзине 12 одинаковых шаров, а во второй корзине 11 точно таких же шаров. Сколькими способами можно выбрать один шар из корзины?



Если нам нужно достать один шар из первой корзины, мы можем сделать это 12 различными способами. Если нам нужно достать его из второй корзины, мы можем сделать это 11 способами. Так как не имеет значения, из какой корзины мы достанем один шар, то его можно достать

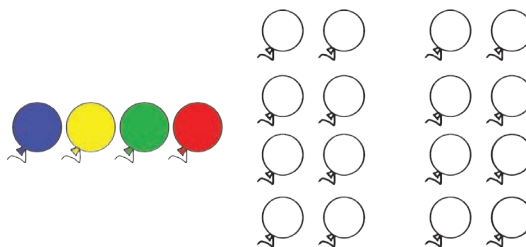
$$12 + 11 = 23$$

способами.

Правило сложения

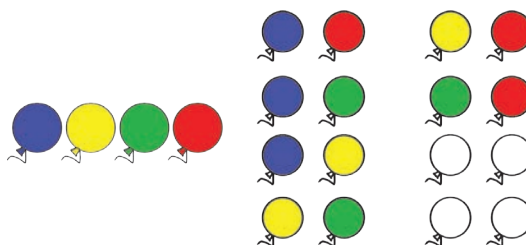
Если объект А можно выбрать n способами, а объект В – m способами, то объект А или В можно выбрать $n + m$ способами.

Пример 3. Сколькими способами можно попарно разложить в ящик 4 шара разных цветов?



Мы размещаем попарно шары четырёх цветов таким образом, чтобы в одном ряду не было двух одинаковых цветов.

Итак: $4 + 2 = 6$



Упражнения

1. В корзине 4 граната, 5 груш и 6 яблок. Сколькими способами можно выбрать один фрукт из корзины?
2. В корзине три вида фруктов: 4 яблока, 5 груш и 7 апельсинов. Сколькими способами можно выбрать один фрукт из корзины?
3. В одном классе 15 девочек и 20 мальчиков. Сколько учеников в этом классе?
4. В одной школе 15 классов по 30 учеников в каждом. Сколько всего учеников в этой школе?
5. Всего в контейнере 15 чёрных и белых шаров. Сколькими способами можно достать из контейнера только один шар?
6. В группе А 15 детей, а в группе В 20. Сколькими способами можно выбрать одного ребёнка из групп?
7. В одной корзине 20 яблок, а в другой 13. Сколькими способами можно выбрать одно яблоко из корзины?
8. Сколько двузначных чисел можно составить из чисел 1, 2, 3, 4 и 5, не повторяя их?
9. В классе 12 мальчиков и 16 девочек. Сколькими способами можно выбрать пару, состоящую из одного мальчика и одной девочки?

Примеры

Пример 4. Если у вас есть 2 галстука, 2 рубашки и 3 пары брюк, сколькими разными способами можно одеться, используя любое сочетание этих вещей?

Во-первых, давайте посмотрим, как 2 рубашки сочетаются с 2 галстуками. Очевидно, вы можете носить их 4 разными способами.

Теперь мы подбираем 3 пары брюк к 4 разным нарядам. Таким образом, получается всего 12 различных нарядов.

Итак, можно одеться 12 разными способами.



Правило умножения

Если элемент А можно выбрать сначала n способами, а затем элемент В можно выбрать m способами, то пару А и В можно выбрать $n \cdot m$.

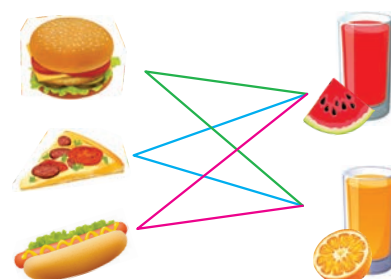
Примеры

Пример 5. Салиму предложили на выбор гамбургер, пиццу, хот-дог, арбузный сок и апельсиновый сок. Какие комбинации он может попробовать?

Есть 3 варианта еды и 2 напитка. Перемножаем их, чтобы найти комбинации:

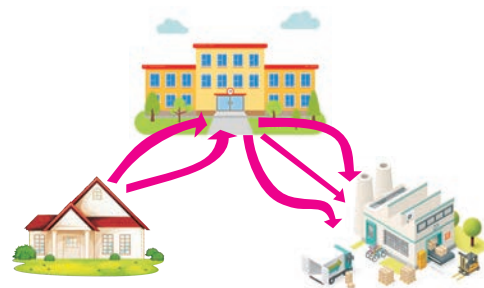
$$3 \cdot 2 = 6.$$

Таким образом, Салим может попробовать 6 комбинаций, используя правило подсчета $n \cdot m$.



Упражнения

1. Сколькими способами Алишер может выбрать путь от дома до школы и от школы до торгового центра?



2. Сколькими способами Джамшид может пройти от своего дома до фабрики?



3. Сколькими способами Абдулла может выбрать дорогу, чтобы добраться от своего дома до города и от города до фабрики?

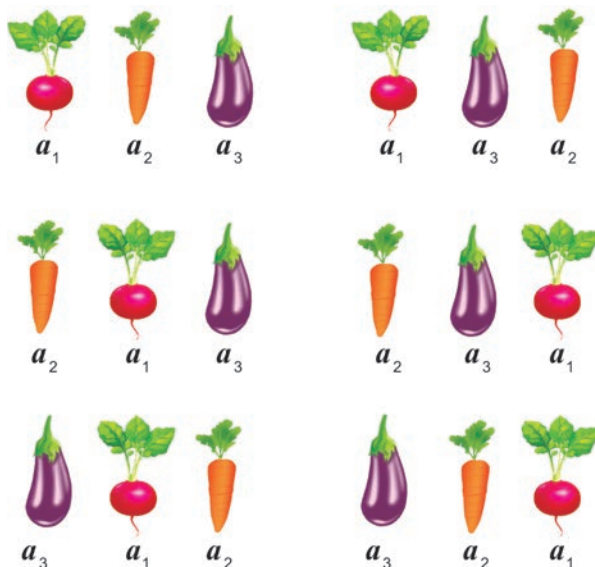


4. Есть два способа добраться из города А в город В. Три дороги ведут из города В в город С. Сколькими способами можно добраться из города А в город С?
5. На подносе лежат 5 яблок и 6 груш. Сколькими различными способами мы можем выбрать два различных фрукта с подноса ?
6. В магазине продаётся 5 видов чашек, 3 вида блюдец и 4 вида чайных ложек.
а) Сколькими способами можно купить пару из чашки и блюда?
б) Сколькими способами можно купить тройку из чашки, блюда и чайной ложки?
в) Сколькими способами можно купить пару из двух различных предметов посуды?
7. В магазине есть 6 kg яблок, 5 kg винограда и 4 kg груш. Сколькими способами можно выбрать по 1 kg каждого из них на 3 kg фруктов?
8. Есть 4 разных способа добраться из города А в город В и 5 разных способов добраться из города В в город С. Сколькими способами можно добраться из города А в город С, если путь пройдёт через город В?
9. Сколькими способами можно выбрать старосту и его заместителя в классе из 12 человек?
10. Сколько способов экзаменационных ответов (сдано, не сдано) может быть в классе из 12 человек?
11. Из Гурлана в Ургенч можно добраться 3 видами транспорта: автобус, такси, мотоцикл. Из Ургенча в Ташкент можно добраться 4 видами транспорта: самолёт, поезд, автобус, такси. Сколькими способами можно добраться из Гурлана в Ташкент?
12. Имеется 3 курицы, 4 утки и 2 гуся. Выберите трёх птиц так, чтобы среди них были курица, утка и гусь. Сколько будет таких вариантов?
13. Сколько различных пар можно составить, взяв один из четырёх разных болтов и трёх разных гаек?
14. Сколько различных пар можно составить из 40 различных болтов и 13 различных гаек?
15. Сколькими способами можно выбрать одну гласную и одну согласную из букв слова «КОМБИНАТ»?

ВИДЫ КОМБИНАТОРНЫХ ЗАДАЧ

Перестановки

В комбинаторике всегда выполняются операции над элементами множества. Ниже приведён пример. В нём дано множество из 3 овощей. Элементы множества {репа, морковь, баклажан} можно обозначить $\{a_1, a_2, a_3\}$



Вы можете увидеть, сколькими различными способами можно организовать их размещение, используя все заданные элементы. Пронумеруем овощи для удобства. Репа – 1, морковь – 2, баклажаны – 3.

Тогда можно будет заменить указанную выше задачу комбинаторики на известную всем нам задачу образования чисел. То есть сколько чисел можно составить из цифр 1, 2, 3?

Самый простой способ решить задачи по комбинаторике — записать все решения одно за другим. Удобнее это делать в виде таблицы.

123	132	213
231	312	321

Этот тип задачи называется задача размещения (расположение или перестановки) в комбинаторике. В этом, как видите, принимают участие все элементы, и, меняя их местами, определяются пути решения задачи. Такое упорядочение (расположение) называется перестановкой.

Количество перестановок из n элементов равно $P_n = n!$ и читается как «эн факториал».

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n$$

$0!$ определён и его значение равно $0! = 1$, так как перестановки 0 элементов снова дают 0. Поэтому

$$0! = 1.$$

$0! = 1$

$1! = 1$

$2! = 1 \cdot 2 = 2$

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$

$7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$

$8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40320$

$9! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 362880$

$10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 3628800$

Основное свойство факториала:

$$(n + 1)! = (n + 1) \cdot n!$$

Например: $(5 + 1)! = (5 + 1) \cdot 5!$

Так же верно: $6! = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5) \cdot 6 = 720$

Подсчитав значение: $(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5) \cdot 6 = 5! \cdot 6 = 120 \cdot 6 = 720$

Примеры

Пример 1. Сколькими способами можно разместить 5 учеников на 5 стульях?

$$P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

Пример 2. Сколькими способами можно разложить 6 различных писем в 6 конвертов?

$$P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$$

Пример 3. Сколькими способами можно раздать 4 различных книги 4 детям?

$$P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

Пример 4. Сколькими способами можно расставить в ряд красные, чёрные, синие и зелёные шары?

На первое место можно поставить любой из четырёх шаров. Вы можете поставить любой из оставшихся трёх шаров на второе место, любой из двух оставшихся шаров на третье место и, наконец, самый последний шар на последнее место: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$.

Пример 5. Сколько трёхзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, каждое из которых встречается ровно один раз?

Сначала можно выбрать любую из трёх цифр. Любую из двух оставшихся цифр можно поставить на второе место, а последнее число на третье место.

Итого: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$ чисел.

Пример 6. Сколькими способами могут стоять в очереди 7 учеников?

Первое место может выбрать любой из 7 учеников. **Второе место** может занять любой из оставшихся 6 учеников, **третье** любой из оставшихся 5 учеников, ..., только один человек может быть на последнем месте.

Итого: $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 7! = 5040$ способов.

СОЧЕТАНИЕ

На тарелке лежат яблоки 4 разных цветов. Сколько различных сочетаний можно составить, взяв 2 таких яблока?



В этом случае мы можем определить следующее:



Итак, количество сочетаний, которые мы ищем, равно 6.

Сочетания находят по формуле $C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}$.

Обозначим количество 4 яблок (элементов) как m . Возьмём сочетания по 2 за n и подставим их в формулу.

$$\text{Таким образом, } C_4^2 = \frac{4!}{2! \cdot (4-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} = \frac{12}{2} = 6$$

Примеры:

Пример 7. Сколько отрезков получится, если точки А, В, С, D и E лежат на одной прямой?



По приведённой выше формуле находим количество отрезков, которые будут образованы:

$$C_5^2 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 10.$$

Пример 8. Сколькими способами можно выбрать старосту, его заместителя и секретаря в классе из 30 учеников?

Итак, количество элементов $m = 30$;

Количество групп $n = 3$.

$$C_{30}^3 = \frac{30!}{3! \cdot 27!} = \frac{28 \cdot 29 \cdot 30}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 28 \cdot 29 \cdot 5 = 4060.$$

Упражнения

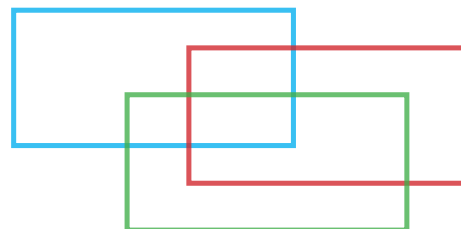
Вычислить. (1 – 5)

- | | | | |
|-----------------------------|------------------------------------|----------------------|----------------------|
| 1. 1) $5!$ | 2) $4!$ | 3) $6!$ | 4) $3!$ |
| 5) $4! + 3!$ | 6) $5! - 4!$ | 7) $5 \cdot 4! - 5!$ | 8) $6! - 5 \cdot 5!$ |
| 9) $7! - (6! + 5!) \cdot 6$ | 10) $(7! - 6!) : 5! - 3! \cdot 3!$ | | |

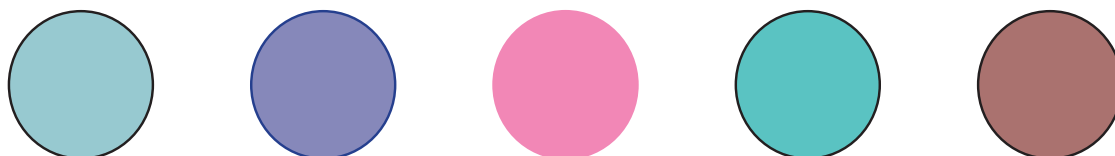
2. 1) P_5 2) P_7 3) $P_2 + P_3$ 4) $12 \cdot P_2 - P_4$ 5) $\frac{P_{10}}{P_8}$
3. 1) $\frac{4! + 5! + 6!}{5! + 4!}$ 2) $\frac{5! - 4! - 3!}{4! + 3! + 2!}$
- 3) $\frac{5! + 5 \cdot 5! + 6 \cdot 6!}{4! + 4 \cdot 4! + 5 \cdot 5!}$ 4) $\frac{4! - 5! + 2 \cdot 6!}{5! - 4!}$
4. 1) C_4^3 2) C_5^2 3) C_{10}^4 4) $\frac{C_7^6}{C_4^3}$ 5) $\frac{C_5^2}{C_5^3}$
5. 1) $\frac{6 \cdot P_5}{12}$ 2) $24 \cdot \frac{P_7}{6!}$ 3) $10! - 9P_9$ 4) $45 \cdot \frac{P_8}{10!}$

6. Сколько четырёхзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, не повторяя их?
7. Сколько трёхзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, не повторяя их?
8. Сколькими способами можно раздать 5 разных книг, лежащих на полке, 5 ученикам?
9. Сколько трёхзначных чисел можно составить из цифр 0, 2, 3, 4, не повторяя их?
10. Сколько прямоугольников на рисунке?

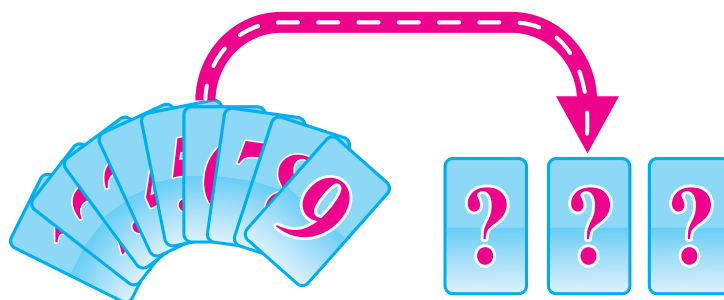
11. Пять учеников хотят обменяться подарками. Какое минимальное количество подарков требуется для этого?



12. Акмаль, Батыр, Собир и Даврон хотят сфотографироваться в ряд. Акмаль не хочет стоять рядом с Собиром, а Даврон соглашается сфотографироваться, только если он будет стоять рядом с Акмалем. Сколькими способами их можно расположить так, чтобы эти условия были выполнены?
13. В футбольном соревновании принимают участие 10 команд. Если каждая команда сыграла с другой командой один раз, сколько всего игр было сыграно?
14. Сколькими способами 6 отличников из 7 «А» класса могут участвовать в олимпиаде по 6 предметам? (Каждый ученик должен участвовать только вна одной олимпиаде.)
15. Взяты 5 точек, принадлежащих прямой a , и 1 точка, не принадлежащая ей. Сколько различных треугольников можно составить с вершинами в этих точках?
16. Дано 5 шаров 5-ти разных цветов. Сколько существует различных сочетаний из 2 таких шаров?



17. Сколькими способами можно разложить 3 различных письма в 3 конверта?
18. На одной из параллельных прямых отметили 5 точек, а на другой — 4 точки. Сколько различных прямоугольников можно составить с вершинами в этих точках?
19. Сколькими способами могут выстроиться в ряд 5 учеников?
20. Сколько трёхзначных чисел можно составить из цифр от 1 до 9, не повторяя их?



21. Библиотекарь предложил ученику 4 книги. Сколькими способами ученик может выбрать две из них?
22. Имеется 5 белых и 6 красных роз. Сколькими способами можно составить букет из 3 белых и 4 красных роз?
23. На олимпиаде по математике было предложено 12 примеров. Сколькими способами можно выбрать 5 из них?
24. Сколькими способами можно разложить 10 одинаковых деталей по 4-м ящикам?
25. Сколькими способами можно установить 4 шины, взятые для замены автомобильного колеса?
27. Сколько чётных трёхзначных чисел можно составить из цифр 3, 4, 5, 6, не повторяя их?
28. Сколько нечётных трёхзначных чисел можно составить из цифр 3, 4, 5, 6, не повторяя их?
29. Сколько трёхзначных чисел, кратных 4, можно составить из чисел 3, 4, 5, 6, не повторяя их?
29. Сколько трёхзначных чисел, делящихся на 5, можно составить из чисел 3, 4, 5, 6, не повторяя их?
30. Сколькими способами можно выбрать 5 из 36 чисел в игре Спортлото?
31. Сколькими способами можно выбрать 6 из 36 чисел в игре Спортлото?
32. В магазине продаётся 7 видов ручек и 3 вида карандашей. Сколькими способами можно выбрать 2 разные ручки и 2 разных карандаша?

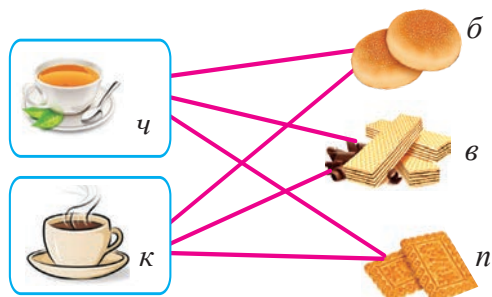
33. Сколькими способами можно рассадить 6 различных цветочных отростков в 3 горшках по 2?
34. Сколькими способами можно разделить 12 человек на 3 бригады по 4 человека?
35. Во время встречи 11 человек обменялись рукопожатием. Сколько раз они пожали друг другу руки?
36. Альпинист может взобраться на гору пятью разными путями, а спуститься — четырьмя. Сколькими способами альпинист может подняться и спуститься с горы?
37. Сколько среди 9-значных чисел, образованных из цифр 1, 2, 3, ..., 9 без их повторения, таких, в которых цифры 2 и 5 стоят рядом?
38. Даны элементы A, B, C:
- Сколько перестановок можно сделать, взяв по одному элементу?
 - Сколько перестановок можно сделать, взяв по два элемента?
 - Сколько перестановок можно сделать, взяв по три элемента?
39. Сколькими способами можно распределить 5 человек на 5-ти работах?
40. Лайло, Шахло, Лола, Гузаль и Гули разместились на 5 местах:
- сколькими способами они могут сесть?
 - сколькими способами Лайло и Лола могут сидеть рядом?
41. Сколькими способами можно расположить Эргаша, Мурада, Аббаса, Бабура, Джалиля, Карима, чтобы Эргаш и Мурад не находились рядом друг с другом?
42. Сколько существует четырёхзначных чисел с разными цифрами в записи?
43. Сколько различных трёхзначных чисел можно записать, используя цифры 2, 3, 4, 5?
44. 25 одноклассников решили на выпускном вечере обменяться фотографиями. Сколько всего фотографий нужно заказать?
45. Сколькими способами можно раздать 2 из 7 пронумерованных шара двум ученикам?
46. В многоквартирном доме замок на двери подъезда открывается кодом. Код — это 4-значное число, состоящее из цифр 0 и 1 (числа 0000 и 1111 не считаются кодом). Каково наибольшее число попыток открыть дверь подъезда, если вы забыли код?
47. Чемодан Лазиза открывается кодом. Этот код состоит из трёх разных цифр, каждая цифра не больше 3. Число 13 не фигурирует в коде. Если Лазиз забудет код, какое наибольшее количество попыток у него будет, чтобы найти код?
48. Сколькими способами можно разменять купюру в 1000 сумов купюрами в 100, 200, 500 сумов?
49. В футбольном соревновании принимают участие 18 команд. Победители соревнования будут награждены золотыми, серебряными и бронзовыми медалями. Сколькими способами можно распределить между командами медали?

СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ КОМБИНАТОРНЫХ ЗАДАЧ

Пример 1. Мухаммад Юсуф хочет позавтракать. В доме есть чай, кофе, вафли, булочки, печенье. Сколькими способами он может приготовить завтрак, состоящий из одного напитка и одной выпечки?



Некоторые комбинаторные задачи можно решить, используя различные специальные схемы. Например, графические, «дерево возможностей», табличные методы.



1. Графический способ. Простые задачи решаются путём перечисления возможных случаев, без составления различных таблиц и диаграмм.

2. «Дерево возможностей». Этот рисунок похож на дерево.

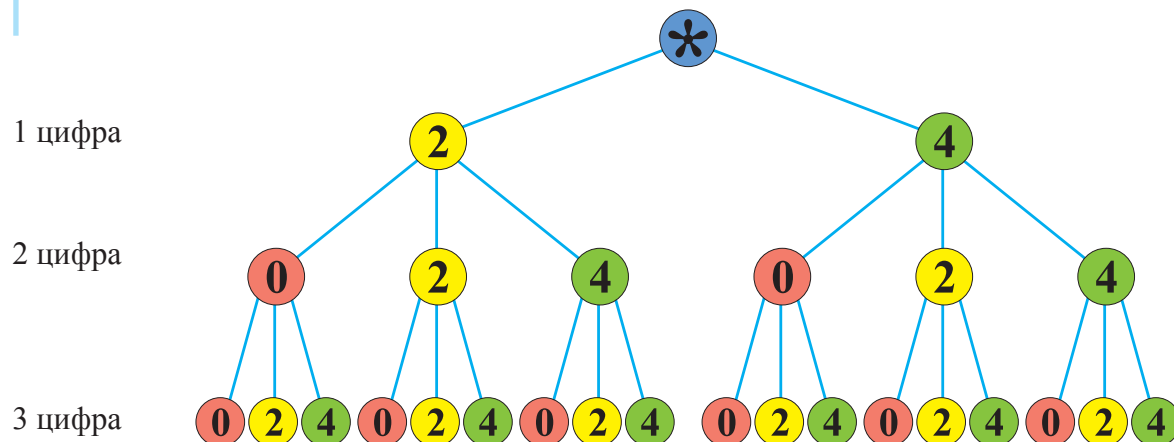


3. Комбинаторные задачи также можно решать с помощью таблиц. В таблице наглядно показаны результаты таких заданий.

Примеры

Пример 2. Какие трёхзначные числа можно составить из цифр 0, 2, 4?

Учитывая, что 0 не может быть первой цифрой числа, составляем «дерево возможностей».



Итак, можно составить числа 200, 202, 204, 220, 222, 224, 240, 242, 244, 400, 402, 404, 420, 422, 424, 440, 442, 444.

Пример 3. Сколько нечётных двузначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 4, 6, 7, 8, 9?

Составим таблицу. Слева первый столбец — первые цифры искомых чисел, вверху в первом ряду — вторые цифры чисел.

	1	3	7	9
1	11	13	17	19
3	31	33	37	39
4	41	43	47	49
6	61	63	67	69
7	71	73	77	79
8	81	83	87	89
9	91	93	97	99

Ответ: 28.

Пример 4. Яшнарбек, Диёрбек и Санжарбек примут участие в финальном этапе забега на 100 м. Найдите возможные способы распределения призов.

Вариант 1: 1) Яшнарбек, 2) Диёрбек, 3) Санжарбек.

Вариант 2: 1) Яшнарбек, 2) Санжарбек, 3) Диёрбек.

Вариант 3: 1) Санжарбек, 2) Яшнарбек, 3) Диёрбек.

Вариант 4: 1) Санжарбек, 2) Диёрбек, 3) Яшнарбек.

Вариант 5: 1) Диёрбек, 2) Санжарбек, 3) Яшнарбек.

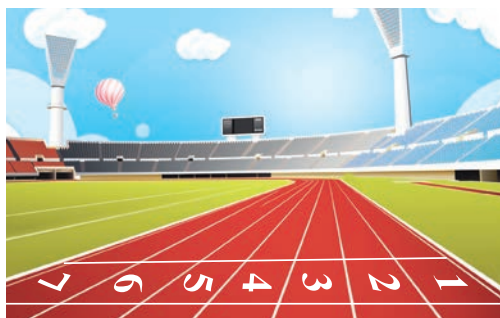
Вариант 6: 1) Диёрбек, 2) Яшнарбек, 3) Санжарбек.

Упражнения

1. Школьники решили отправиться в путешествие на горное озеро. Первый этап пути можно совершить на поезде или автобусе. Второй этап – на байдарках, велосипеде или пешком. Третий этап пути — пешком или с помощью канатной дороги. Какие возможные варианты путешествия есть у школьников?



2. Мадина, Ширин, Лола, Ирода, Анвар, Мурад и Эргаш готовились к празднованию Нового года. Сколькими способами можно выбрать из них одного мальчика и одну девочку?
3. Хамид надевает в школу серую, синюю, зелёную или клетчатую рубашку с чёрными брюками или джинсами и обувью или кроссовками.
- а) Сколько дней Хамид сможет выглядеть по-новому?
 б) Сколько дней при этом он будет ходить в кроссовках?
 в) Сколько дней он будет ходить в рубашке в клетку и джинсах?
4. Запишите все возможные варианты расписания пяти уроков на день из предметов: математика, русский язык, история, английский язык и физика, причём математика должна быть вторым уроком.
5. Сколькими способами можно разместить 7 человек на 7 местах?

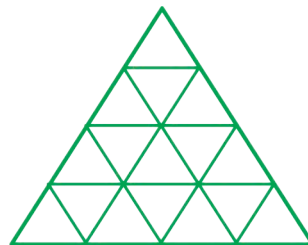
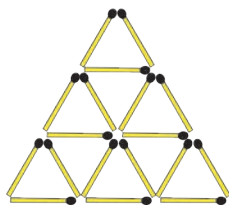


6. Сколькими способами Умар, Фатима, Аиша и Зайнаб могут поделить между собой 12 книг?



7. Имеются два свободных места. Сколькими способами можно пересадить двух из трёх человек на эти места?
8. Из цифр 6, 2, 4, 7, 9 были образованы 5-значные числа без их повторения. Сколько из них делятся на 2 без остатка?

9. Из цифр 6, 2, 4, 7, 9 были образованы 5-значные числа без их повторения. Сколько из них делятся на 4 без остатка?
10. Сколько трёхзначных чисел можно составить из цифр 4, 5, 0, 9, 8, не повторяя их?
11. Сколько треугольников на рисунках?



12. Имеется 2 курицы, 3 утки и 4 гуся. Выберите трёх птиц так, чтобы среди них были курица, утка и гусь. Сколько будет таких вариантов?
13. Сколькими способами можно разменять купюру в 1000 сум купюрами по 50, 100, 200, 500 сум?



14. Сколько четырёхзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, если цифры повторяются?
15. Номера автобусных билетов представляют собой шестизначные цифры от 000001 до 999999:
- Сколько билетов содержат все нечётные цифры?
 - Сколько билетов не содержат нечётных цифр?
 - Каково количество билетов со случайными двумя соседними цифрами?
 - Сколько билетов с разными номерами?
 - Сколько билетов содержат одинаковые пары цифр?
 - Сколько билетов содержат как минимум одну нечётную цифру?
 - В скольких билетах участвовала цифра 7?
 - Сколько билетов без цифр 7 и 0?
 - Каково количество билетов, в которых участвовала цифра 7, а цифра 0 не участвовала?
16. В группе туристов 28 человек говорят по-английски, 13 человек – по-французски, 10 человек – по-немецки, 8 человек – по-английски и по-французски, 5 человек – по-французски и по-немецки, 6 человек – по-английски и по-немецки и 2 человека – на всех трёх языках. 41 человек не знает ни одного из трёх вышеперечисленных языков. Найдите общее количество туристов.

ПОВТОРЕНИЕ

ЧИСЛОВЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

1. Выполните действия.

1) $(48 - 19) - (25 - 21)$

2) $(56 - 73) - (48 - 94)$

3) $(-28 + 34) - 53 + 41$

4) $(-19 + 13) + (-72 + 89)$

5) $(-40 - 49) - (-59 - 63)$

6) $(-2,1 + 3,8) - (4,1 - 7,2)$

2. Вычислите.

1) $(-1,6) \cdot (2,8 : (-0,7) - (-7,2) : 1,8)$

2) $2,6 \cdot (-2,5) - (-3,8) : (19) - 1,7 : (-0,17)$

3) $-18 - 6 : (-3) + 2 \cdot 6$

4) $27 : (-9) - (-3) \cdot (-0,03) + 6 : (0,06) + 3$

5) $0,65 \cdot (-0,35) \cdot (-0,47) - 0,106925$

3. Найдите значение выражения.

1) $(64,2 \cdot 7,2 + 17,8 \cdot 13,04) : 3 \frac{12}{13}$

2) $2 \frac{13}{29} \cdot 0,77 - 3,33 \cdot 1,7 + 3 \frac{1}{2} \cdot 2 \frac{1}{2}$

4. Заполните таблицу.

<i>a</i>	-10	5	0	-1,2	-2,5	1,1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
a^2								
$-a^2$								
$(-a)^2$								
$(-a)^3$								

5. Вычислите.

1) $\frac{-0,6 + 1,9 - 6,5}{1,1 - 4,7 - 1,6}$

2) $\frac{-8,3 + 5,4 - 9,7}{-9,5 + 4,2 - 7,3}$

3) $\frac{-9,6 + 1,8 - 4,1}{-4,1 + 15,8 - 4,4}$

4) $\frac{2,8 - 19,7 + 8,5}{7,9 - 13,4 - 2,9}$

5) $\frac{1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots + 99 - 100}{1 - 3 + 5 - 7 + 9 - 11 + \dots + 97 - 99}$

6. Вычислите.

1) $\left(\frac{511}{73} + \frac{693}{77}\right) \cdot \left(\frac{511}{73} + \frac{693}{77}\right) + \frac{1,2 + 1,3 + 1,4}{0,39}$

2) $\frac{5,(231) + 3,(04) + 7,(101)}{3,(101) + 5,(04) + 7,(231)} \cdot 2022$

3) $\frac{7,(301) - 3,(45) + 9,(110)}{9,(301) - 4,(45) + 8,(110)} \cdot 2022$

4) $\frac{128 \cdot 289 + 318}{127 \cdot 289 + 607}$

5) $\frac{256 \cdot 289 + 636}{127 \cdot 289 + 607}$

6) $\frac{2,17 \cdot 6,19 + 3,48}{3,17 \cdot 6,19 - 2,71}$

7) $\frac{0,57 \cdot 6,9 \cdot 1,28}{0,64 \cdot 1,9 \cdot 0,23}$

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

7. Что такое алгебраическое выражение?
8. Покажите алгебраическое выражение.
- 1) $3a - 4b$ 2) $6 \cdot 3 + 1 \cdot 5$
 3) 2^{14} 4) $(-12 - 3) \cdot (6 \cdot 2 + 3)$
9. Покажите алгебраическое выражение.
- 1) $0,25a - 6b^2$ 2) $-4 - 6 \cdot 3$ 3) $0,2 + 0,5a$ 4) $2a$
 5) $1 - 3a$ 6) $(1 - 3 \cdot 6) \cdot (-7)$ 7) -2 8) $2x$
 9) $0,5(0,2a - 1,8)$ 10) $(-0,8) \cdot (0,2 + 6:(-3))$ 11) $2,34 \cdot 1,9$ 12) 100
10. По заданным значениям чисел a, b, c удобным способом вычислите сумму $a + b + c$.
- 1) $a = -1,8; b = 3,7; c = -6,2$ 2) $a = 9,6; b = -5,8; c = -3,6$
 3) $a = 7,4; b = -3,2; c = -4,8$ 4) $a = -5,9; b = -6,1; c = 2,2$
 5) $a = 2 \frac{2}{13}; b = -5 \frac{4}{13}; c = 3 \frac{11}{13}$ 6) $a = -\frac{4}{5}; b = \frac{3}{5}; c = \frac{1}{5}$
 7) $a = 1,8; b = -0,9; c = 1,9$ 8) $a = -108; b = 49; c = 208$
 9) $a = 0,6; b = 0,9; c = 0,4$ 10) $a = -3,7; b = -4,1; c = -6,3$
11. Найдите значение выражения.
- 1) $2a - b$, здесь $a = 2, b = 2$. 2) $-2a - 3b$, здесь $a = -3, b = -2$.
 3) $0,25a - 4c^2$, здесь $a = 4, c = 2$ 4) $3a^2 - \frac{1}{2}b$, здесь $a = -3, b = 16$
12. Найдите значение алгебраического выражения.
- 1) $\frac{1}{3}x - \frac{1}{7}y$, здесь $x = -9, y = 14$ 2) $\frac{2}{5}x + \frac{2}{9}y$, здесь $x = 125, y = -729$
 3) $\frac{2a - 3b}{a - 2b}$, здесь $a = -3, b = -4$ 4) $\frac{a + 4b}{2a + 3b}$, здесь $a = 1, b = -3$
13. Найдите значение алгебраического выражения. $\frac{m \cdot n(m + n)}{3}$, здесь $m = 3, n = -2$.
14. Найдите значение алгебраического выражения.
- 1) $\frac{2(x - y)}{x + y}$, здесь $x = -2, y = 3$
 2) $\frac{2xy(x - y)}{x + y}$, здесь $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}$
 3) $\frac{5(n \cdot m - k)}{2p - k}$, здесь $m = -1, n = 1, k = 3, p = 2$
 4) $\frac{5(a \cdot b + c)}{2 + c}$, здесь $a = -2, b = 2, c = 1$

15. Найдите значение выражения.

1) $\frac{2(x+y)+z}{xyz}$, при $x = 0,6$; $y = 2,1$; $z = 8,03$

2) $\frac{0,25(p-k)}{\frac{1}{2}p+k}$, при $p = 0,08$; $k = -0,07$

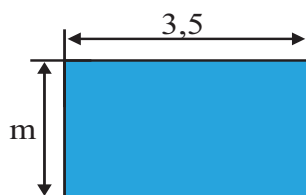
16. Если $a = 2,6$; $b = 3,4$, найдите значение выражения $p = a - b - 8$.

17. Если $x = 2,1$; $y = \frac{1}{2}$, найдите значение выражения $p = (x - y)^2 - xy$.

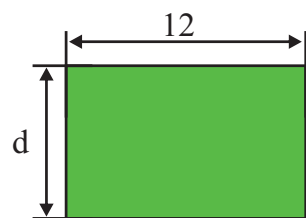
18. Если $a = 6,1$; $b = 3,6$, найдите значение выражения $S = \frac{1}{2}ab$.

19. Если $a = 13,46$; $b = 27,82$, найдите значение выражения $P = 2(a + b)$.

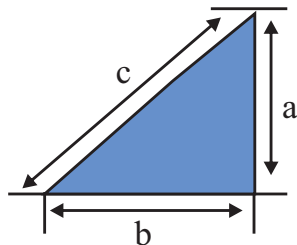
20. Запишите периметр и площадь данного прямоугольника в виде алгебраического выражения.



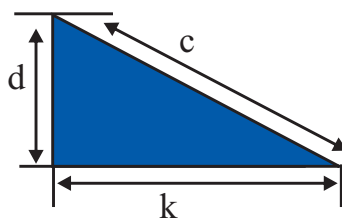
21. Запишите периметр и площадь данного прямоугольника в виде алгебраического выражения.



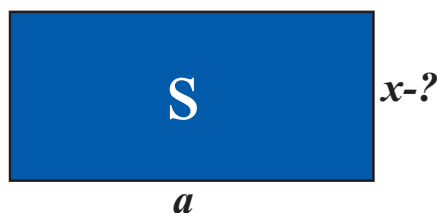
22. Запишите периметр и площадь данной фигуры в виде алгебраического выражения.




23. Запишите периметр и площадь данной фигуры в виде алгебраического выражения.



24. Площадь прямоугольника равна S , а ширина равна a . Составьте выражение для нахождения его периметра.
25. Площадь прямоугольника равна S , а ширина равна a . Найти его вторую сторону.



26. Сторона равностороннего треугольника равна a . Найдите его периметр.
27. Периметр равнобедренного треугольника равен p . Длина основания a . Составьте выражение для нахождения длины боковой стороны треугольника.
28. На чемпионате по футболу было продано n билетов по 600 сумов и m билетов по 800 сумов. Какая сумма была получена за продажу всех билетов?
29. На чемпионате по футболу было продано k билетов по 350 сумов и p билетов по 750 сумов. Какая сумма была получена за продажу всех билетов?
- 
30. Один альбом стоит 200 сум, одна тетрадь – 80 сумов, одна книга – 300 сумов. Найдите общую стоимость за a альбомов, b тетрадей и c книг .
31. Один альбом стоит 250 сумов, одна ручка – 60 сумов и одна книга – 350 сумов. Найдите общую стоимость за k альбомов, d ручек и l книгу.
32. Цена книги 12 сумов. Ученик купил $(m + n)$ таких книг. Сколько денег потратил ученик?
33. Используя формулу нечётного числа $n = 2k + 1$, укажите значение n при $k = 3$.
34. Найдите значение n при $k = 13$, используя формулу для чётных чисел $n = 2k$.
35. Найдите сумму двух последовательных натуральных чисел, наименьшее из которых равно n .
36. Найдите сумму двух последовательных натуральных чисел, наименьшее из которых равно $n + 1$.
37. Найдите произведение трёх последовательных нечётных чисел, наименьшее из которых равно $2p + 1$.
38. Запишите утроенную разность чисел m и n .
39. Запишите удвоенную сумму чисел m и n .

ФОРМУЛЫ

40. Найдите числовое значение выражения $V = abc$, если $a = 2,7$; $b = 1,2$; $c = 7,7$.
41. Найдите числовое значение выражения $V = xyz$, если $x = 0,01$; $y = 3,9$; $z = 1000$.
42. Найдите числовое значение выражения $V = abc$, если $a = 6,5$; $b = 0,65$; $c = 10$.
43. Найдите числовое значение выражения $S = 2(ab + ac + bc)$, если $a = 4,7$; $b = 2,3$; $c = 6$.
44. Мальчик купил 12 тетрадей за a сумов и обнаружил, что у него осталось еще 17 сумов. Сколько денег было у мальчика вначале?
45. Ученик купил 8 тетрадей за b сумов и обнаружил, что у него осталось еще 12 000 сумов. Сколько сумов было у ученика вначале?
46. Как изменится разность, если:
 1) уменьшаемое увеличить на 18, а вычитаемое уменьшить на 25;
 2) уменьшаемое увеличить на 43, а вычитаемое на 37;
 3) уменьшаемое уменьшить на 41, а вычитаемое увеличить на 34;
 4) уменьшаемое уменьшить на 54, а вычитаемое уменьшить на 19?
47. Проверьте верность равенства.
- 1) $(m + n) + (m - n) = 2m$ 2) $(m + n) - (m - n) = 2n$
- 3) $\frac{m + n}{2} - \frac{m - n}{2} = n$ 4) $(a + b - c) + (a - b + c) - (a + b + c) = a - b - c$
- 5) $(a - b - c) - (a + b + c) + (a + b + c) = a - b - c$

СТЕПЕНЬ С НАТУРАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

48. Вычислить.

1) $\frac{62^{71} \cdot 9^{35}}{93^{70} \cdot 32^{14}}$

2) $\frac{39^4}{9^2 \cdot 169^2}$

3) $\frac{3^{12} \cdot 27^4}{81^6}$

4) $\frac{42^6 \cdot 81^2}{63^6 \cdot 8^2}$

5) $\frac{49^{21} \cdot 11^{42}}{77^{42}}$

6) $\frac{32^3 \cdot 81^4}{27^5 \cdot 16^4}$

7) $\frac{13^{19} \cdot 7^{20}}{91^{19}}$

8) $\frac{5^{26} \cdot 81^{13}}{45^{26}}$

9) $\frac{26^{10} \cdot 28^{12} \cdot 52}{91^{11} \cdot 64^6}$

10) $\frac{13^{81} \cdot 25^{40}}{65^{80}}$

11) $\frac{34^5 \cdot 6^3 \cdot 3}{51^4 \cdot 16^2 \cdot 17}$

12) $\frac{33^{17} \cdot 16^4}{22^{16} \cdot 27^5}$

13) $\frac{49^{10} \cdot 52^{20}}{91^{20} \cdot 16^{10}}$

14) $\frac{69^{12} \cdot 4^{13} \cdot 2^3}{92^{13} \cdot 27^4}$

15) $\frac{36^4 \cdot 72^3}{12^8 \cdot 81^2}$

16) $\frac{9^{15}}{9^{12} \cdot 27^2}$

49. Найдите последнюю цифру выражения.

1) $25647 + 658485 - 4571 + 45879 - 45457$

2) $65897 - 54671 + 4578123 - 784519$

3) $2546 \cdot 5487 + 40784 \cdot 547029$

4) $5498 \cdot 1547 - 2145 \cdot 758$

5) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 17 \cdot 18$

6) $5 \cdot 15 \cdot 25 \cdot 35 \cdot \dots \cdot 85 \cdot 95$

7) $6 \cdot 16 \cdot 26 \cdot 36 \cdot \dots \cdot 86 \cdot 96$

8) $5491 \cdot 4572 \cdot 4785 \cdot 45787 \cdot 14599$

9) $540095 \cdot 40571 \cdot 5689 \cdot 12353 \cdot 5647$

МНОГОЧЛЕНЫ

50. Раскройте скобки и приведите подобные слагаемые.

1) $(3x^3 - 5x^2 + 4x - 7)(x - 7)$

2) $(2a^2 - 3ab + b^2)(5a - 3b)$

3) $(4x^2 + 3x - 3)(-2x^2 - 4x + 7)$

4) $(3a^2 + 4ab - 2b^2)(a + 2b)$

5) $(3x - 7)(4x^3 - 5x^2 + 3x - 5)$

6) $(7a^2 - 3ab + 4b^2)(2a - 5b)$

7) $(4x^3 + 5x^2 - 6x + 8)(2x - 1)$

8) $(8a^2 + ab - 3b^2)(3a + b)$

9) $(2x^2 - 5x + 9)(5x^2 - 2x - 8)$

10) $(7a^2 - 2ab - 4b^2)(-a + 2b)$

51. Вынесите общий множитель за скобку.

1) $a^2 + a$

2) $a^3 - a^7$

3) $4c^2 - 12c^4$

4) $x^3 - x^2$

5) $3m^2 + 9m^3$

6) $5x^5 - 15x^3$

7) $c^5 + c^7$

8) $9p^3 - 8p$

9) $-12y^4 - 16y$

10) $-10b^2 + 15b$

11) $24x^3 - 12x^2$

12) $8c^5 + 16c^3$

52. Разложите на множители (52 – 53).

1) $4c^4 - 6x^2c^2 - 20c^4x$

2) $3ax - 6ax^2 - 9a^2x$

3) $10a^2x - 15a^3 - 20a^4x$

4) $8a^4b^3 - 12a^2b^4 + 16a^3b^2$

53. 1) $2a(x + y) + b(x + y)$

2) $9(p - 1) + (p - 1)^2$

3) $y(a - b) - (a - b)$

4) $(a + 3)^2 - a(a + 3)$

5) $(c + 3) - x(c + 3)$

6) $-3b(b - 2) + 7(b - 2)^2$

54. Вычислите.

1) $2,7 \cdot 6,2 - 9,3 \cdot 1,2 + 6,2 \cdot 9,3 - 1,2 \cdot 2,7$

2) $1,25 \cdot 14,9 + 0,75 \cdot 1,1 + 14,9 \cdot 0,75 + 1,1 \cdot 1,25$

55. Упростите выражения.

1) $9(2x - 4) + 6(7x - 4)$

2) $2(4x - 3) + 5(x + 2)$

3) $4(5x - 8) + 4(2x - 9)$

4) $7(2x + 4) - 8(3x + 4)$

5) $8(5x - 1) - 3(8x + 5)$

6) $6(3x - 4) + 5(6x + 7)$

ФОРМУЛЫ СОКРАЩЕННОГО УМНОЖЕНИЯ

56. Представьте многочлен в виде квадрата двучлена.

1) $x^2 + 2xy + y^2$

2) $a^2 + 12a + 36$

3) $1 - 2z + z^2$

4) $p^2 - 2pq + q^2$

5) $64 + 16b + b^2$

6) $n^2 + 4n + 4$

57. Представьте многочлен в виде квадрата двучлена.

1) $4x^2 + 12x + 9$

2) $\frac{1}{4}m^2 + 4n^2 - 2mn$

3) $25b^2 + 10b + 1$

4) $10xy + 0,25x^2 + 100y^2$

5) $9x^2 - 24xy + 16y^2$

6) $9a^2 - ab + \frac{1}{36}b^2$

58. Замените « * » на такой одночлен, чтобы полученный трёхчлен можно было представить в виде квадрата двучлена:

1) $* + 56x + 49;$

2) $25a^2 + * + \frac{1}{4}a^2$

3) $36 - 12x + *$

4) $0,01b^2 + * + 100c^2$

59. Найдите значение выражения.

1) $y^2 - 2y + 1$, при $y = 101; -11; 0,6$

2) $4x^2 - 20x + 25$, при $x = 12,5; 0; -2$

3) $25a^2 + 49 + 70a$, при $a = 0,4; -2; -1,6$

4) $-60b - 100b^2 - 9$, при $b = 1,7; -1,1; 0,3$

60. Разложите на множители.

1) $25x^2 - y^2$

2) $9m^2 - 16n^2$

3) $9 - b^2c^2$

4) $-m^2 + 16n^2$

5) $64p^2 - 81q^2$

6) $4a^2b^2 - 1$

7) $36a^2 - 49$

8) $-49a^2 + 16b^2$

9) $p^2 - a^2b^2$

10) $64 - 25x^2$

11) $0,01n^2 - 4m^2$

12) $16c^2d^2 - 9a^2$

61. Вычислите.

1) $47^2 - 37^2$

2) $126^2 - 74^2$

3) $0,849^2 - 0,151^2$

4) $53^2 - 63^2$

5) $21,3^2 - 21,2^2$

6) $\left(5\frac{2}{3}\right)^2 - \left(4\frac{1}{3}\right)^2$

62. Найдите значение дроби.

1) $\frac{36}{13^2 - 11^2}$

2) $\frac{79^2 - 65^2}{420}$

3) $\frac{53^2 - 27^2}{79^2 - 51^2}$

4) $\frac{53^2 - 32^2}{61^2 - 44^2}$

63. Определите закономерность и найдите следующее число.

1) 1,6; 2,9; 4,2; ?

2) 0,6; 1,7; 2,8; ?

3) -10; -7; -4; ?

4) -8,3; -6,4; -4,5; ?

5) 1,2; 2,4; 4,8; ?

6) 5; -15; 45; ?

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДРОБИ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

Приведите дроби к общему знаменателю (64–66).

64. 1) $\frac{5}{8}$ и $\frac{3}{8}$

2) $\frac{15}{28}$ и $\frac{13}{42}$

3) $\frac{a}{4}$ и $\frac{b}{6}$

65. 1) $\frac{x}{3}$; $\frac{2x}{10}$ и $\frac{4x}{15}$

2) $\frac{4m}{21}$; $\frac{3m}{28}$ и $\frac{m}{42}$

3) $\frac{1}{6ab}$ и $\frac{2}{5ab}$

4) $\frac{4}{27xy}$ и $\frac{5}{18xy}$

5) $\frac{5a}{6b^2c}$; $\frac{7b}{12ac^2}$ и $\frac{11c}{18a^2b}$

6) $\frac{5x}{ab}$; $\frac{7b}{12ac^2}$ и $\frac{11c}{18a^2b}$

66. 1) $\frac{a}{x-1}$ и $\frac{b}{1-x}$

2) $\frac{a}{x^2-1}$ и $\frac{b}{1-x^2}$

3) $\frac{c+d}{c^2-b^2}$ и $\frac{b}{b-c}$

4) $\frac{a}{a^2-16}$ и $\frac{b}{a^2+4a}$

Сократите дроби (67–69).

67. 1) $\frac{8}{12}$

2) $\frac{15}{120}$

3) $\frac{81}{210}$

4) $\frac{435}{1215}$

68. 1) $\frac{m^5}{m^7}$

2) $\frac{6a^2b^2}{8a^2b^4}$

3) $\frac{5x^2y}{10x^8y}$

4) $\frac{16p^4q^3}{32p^6q}$

5) $\frac{3m(x-1)}{9m^2(1-x)}$

6) $\frac{a(b+c)}{a(b+c)}$

7) $\frac{8a(a+b)}{4a(a+b)}$

69. 1) $\frac{5a-5b}{10a}$

2) $\frac{3x+6y}{6x}$

3) $\frac{4m-4n}{8a+8b}$

70. Выполните действия.

1) $\frac{5}{x^2y} + \frac{2}{3xy^2}$

2) $\frac{12}{5a} - \frac{2}{a}$

3) $\frac{a-5}{a^2+5a} + \frac{a+5}{5a-a^2}$

4) $\frac{15x-2}{5a} - \frac{x-2y}{3a}$

5) $\frac{a-5}{a^2-1} - \frac{4}{1-a^2}$

6) $\frac{3a-6b}{ab} - \frac{4a-6b}{ab}$

71. Выполните действия.

1) $\frac{x^2}{3x-15} - \frac{25}{3x-15}$

2) $\frac{5x^2+3}{x^2-2x} - \frac{10x+3}{x^2-2x}$

3) $\frac{x^2+x}{(x+1)^2} - \frac{x+1}{(1+x)^2}$

4) $-\frac{5a-3b}{(a-b)^2} - \frac{3a-b}{(b-a)^2}$

5) $\frac{3x}{3-x} - \frac{2x+3}{3-x}$

6) $\frac{8a}{3a-3b} + \frac{2a+6b}{3(a-b)}$

72. Продолжите выполнение действий.

$$1) \frac{m-2n}{4} - \frac{m+2n}{4} = \frac{m-2n-(m+2n)}{4} =$$

$$2) \frac{a^2-ab}{a-b} + \frac{ab-b^2}{a-b} = \frac{a^2-ab+(ab-b^2)}{a-b} =$$

$$3) \frac{a^2-ab}{a-b} + \frac{ab-b^2}{a-b} = \frac{a^2-ab+(ab-b^2)}{a-b} =$$

73. Продолжите умножение.

$$1) \frac{3a}{b} \cdot \frac{b^3}{6} = \frac{3a \cdot b^3}{b \cdot 6} = \dots$$

$$2) \frac{5x}{y} \cdot \frac{y^4}{x^2} = \frac{5x \cdot y^4}{y \cdot x^2} = \dots$$

$$3) \frac{6a}{7} \cdot 14a^3 = \frac{6a}{7} \cdot \frac{14a^3}{1} = \frac{6a \cdot 14a^3}{7} = \dots$$

$$4) -5b^3 \cdot \frac{a}{b^4} = -\dots$$

74. Выполните действия.

$$1) \left(\frac{5a}{7b}\right)^2 \cdot \frac{14b^2}{25a^3}$$

$$2) \frac{2a^2}{5b^2} : \frac{12a^2}{15b^2}$$

$$3) \left(\frac{3a^2}{2b}\right)^2 \cdot \frac{16b^3}{81a^4}$$

$$4) \frac{3a^3}{7b} : \frac{9a^4}{21b}$$

$$5) \left(\frac{ab}{cd}\right)^2 \cdot acd$$

$$6) abc^2 \cdot \left(\frac{ab}{cd}\right)^2$$

$$7) \frac{8a^2b}{9c} \cdot \frac{96c^3}{5a^3b}$$

$$8) \frac{16x^2y}{7z} : \frac{20xy^3}{21z^2}$$

$$9) \frac{c+d}{c-d} : \frac{c}{c-d}$$

75. Упростите.

$$1) \frac{(x^3y^2)^2 (xy^3)^2}{(x^4y^2)^3}$$

$$2) \frac{(a^2b^3)^2 (a^3b)^4}{(ab^2)^3}$$

$$3) \frac{(x^2y^3)^4 (xy^2)^3}{(x^3y^2)^5}$$

$$4) \frac{(a^2b)^2 (a^3b)^2}{a^4b^2}$$

$$5) \frac{(x^5y^2)^5 (xy^2)^4}{(x^5y^2)^5}$$

$$6) \frac{(a^3b^5)^3 (a^6b^3)^4}{(a^{13}b^2)^2}$$

$$7) \frac{(a^4b^2)^3 (a^3b^2)^5}{(a^4b^3)^2}$$

$$8) \frac{(x^3y^5)^3 (x^4y^2)^2}{(x^8y^5)^2}$$

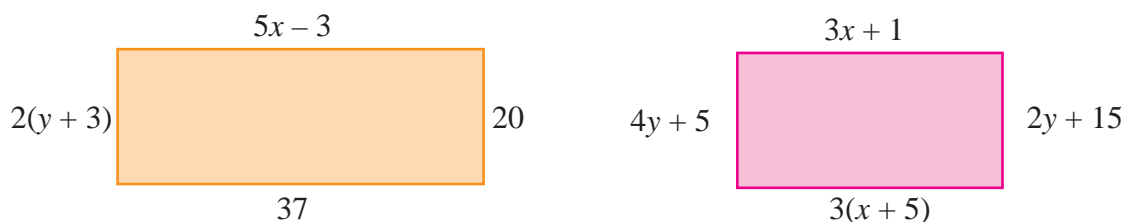
$$9) \frac{(a^3b^7)^3 (a^2b^3)^4}{(a^7b^3)^2}$$

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

Решите уравнения (76–80).

- 76.** 1) $48 + x = 80 - 19$ 2) $-36 + x = -47 - (-17)$
 3) $91 - x = 56 - (-33)$ 4) $-71 - x = -49 + 21$
 5) $x + (-19) = -23 - (-36)$ 6) $-x - (-28) = -21 + 53$
 7) $84 - x = 94 - 128$ 8) $62 - 73 = x + 143$
 9) $-89 + 56 = -x - 72$ 10) $-48 + 33 = 25 - x$
- 77.** 1) $5x - 150 = 0$ 2) $12x - 1 = 35$
 3) $7 = 6 - 0,2x$ 4) $48 - 3x = 0$
 5) $1,3x = 54 + x$ 6) $-0,7x + 2 = 65$
 7) $-1,5x - 9 = 0$ 8) $-3,4x = 17,6 + x$
- 78.** 1) $2x + 9 = 13 - x$ 2) $1\frac{1}{3}x + 4 = \frac{1}{3}x + 1$
 3) $z - \frac{1}{2}z = 0$ 4) $0,5a + 11 = 4 - 3a$
 5) $5y = 6y$ 6) $1,7 - 0,3m = 2 + 1,7m$
 7) $1,2n + 1 = 1$ 8) $15 - p = \frac{1}{3}p - 1$
 9) $14 - y = 19 - 11y$ 10) $0,8x + 14 = 2 - 1,6x$
- 79.** 1) $(y + 4) - (y - 1) = 6y$ 2) $6x - (7x - 12) = 101$
 3) $3p - 1 - (p + 3) = 1$ 4) $20x = 19 - (3 + 12x)$
- 80.**
- 1) $x : \left(-5\frac{3}{4}\right) = -1\frac{1}{23}$ 2) $x \cdot \left(-3\frac{3}{8}\right) = -1\frac{17}{64}$
 3) $x \cdot (-3,6) = -8,4$ 4) $x : (1,5 : 0,5) = 1,2 : 0,5$
 5) $x \cdot 2,1 = 3,2 + 1,9 + 5,4$ 6) $x : (-0,6) = 1,2$
 7) $-3,4 : (-x) = -2$ 8) $-3,8 \cdot x = -9,5$
- 81.** 1) Среднее арифметическое 5-ти чисел равно 4,8. Среднее арифметическое других 6-ти чисел равно 6,2. Найдите среднее арифметическое этих 11 чисел.
 2) Среднее арифметическое чисел a, b, c равно m . Среднее арифметическое чисел d, e, k равно n . Найдите среднее арифметическое этих 6-ти чисел.
- 82.** Наёмному работнику за год работы должны были выплатить 12 динар и один чакман. Проработав 7 месяцев, работник попросил расчёт. Ему выплатили 5 динар и чакман. Сколько стоит чакман?

83. Найдите неизвестные x и y .



84. Если в каждом ряду зала будет сидеть по 27 зрителей, то 30 мест будет не хватать. Если зрители сядут по 30 человек, останется 60 пустых мест. Сколько рядов и зрителей в зале?
85. Дорога по морю из города А в город В на 10 km короче обычной дороги. Корабль проходит расстояние из А в В за 3 часа 20 минут, а автомобиль за 2 часа. Сколько километров в час проходит корабль, если скорость корабля на 17 km/h меньше скорости автомобиля?
86. Автомобиль израсходовал 25% бензина в баке в первой гонке и 20% оставшегося бензина во второй гонке. После этого в баке осталось на 12 литров бензина больше, чем было израсходовано в обеих гонках. Сколько литров бензина было в баке сначала?
87. После прибавления 119 к неизвестному числу, умножения суммы на 5 и удаления 2-х нулей в конце полученного числа образуется число 123. Найдите неизвестное число.
88. Для нумерации страниц энциклопедии потребовалось 365 цифр. Сколько страниц в энциклопедии?

ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ

89. Заполните таблицу для данной функции.

$y = x - 2$	x	-2	-1	0	1	2	3
	y						

$y = -2x + 1$	x	-2	-1	0	1	2	3
	y						

$y = -0,5x + 2$	x	-2	-1	0	1	2	3
	y						

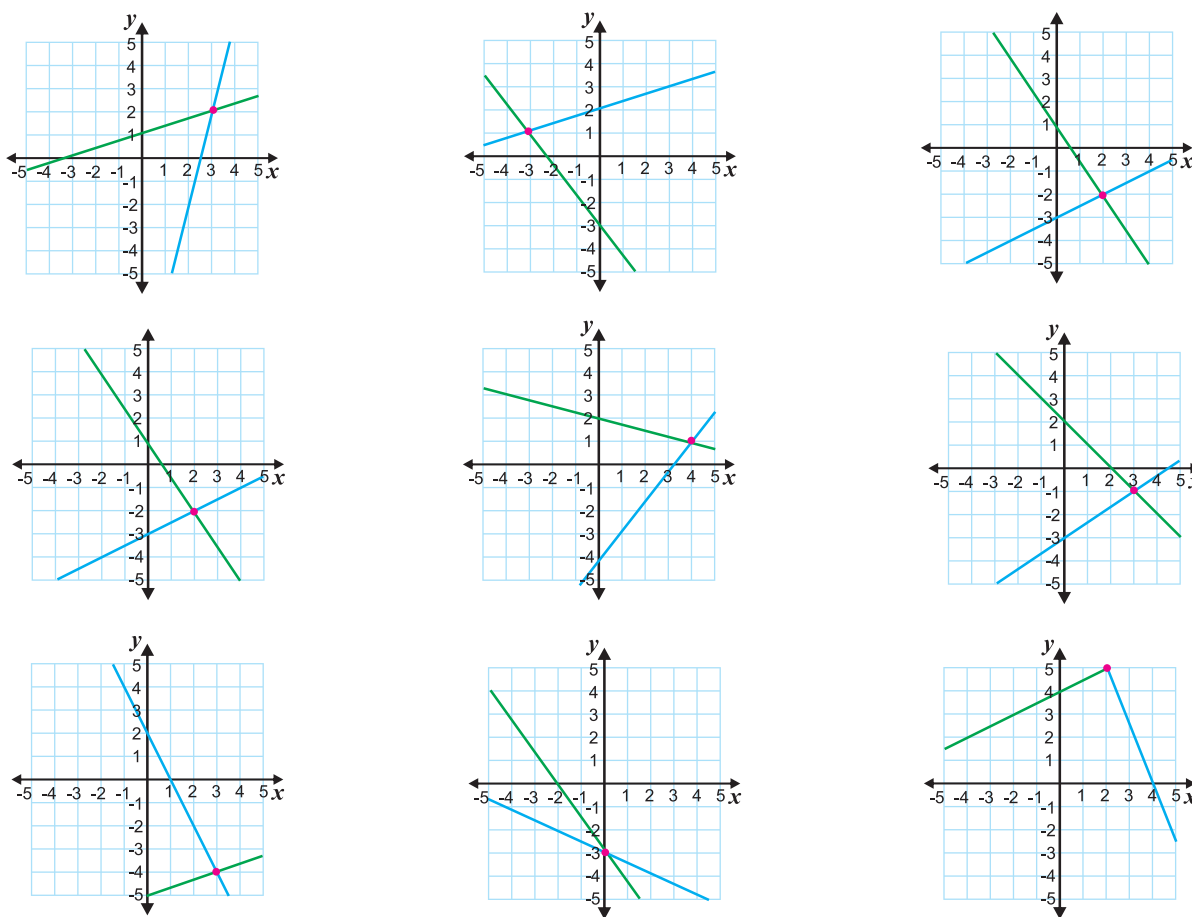
90. В декартовой системе координат найдите координаты середин отрезков, концами которых являются следующие точки.

- | | | |
|------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1) (1; -1) и (7; 5) | 2) (-4; -3) и (2; 5) | 3) (10; -2) и (-2; 10) |
| 4) (5; -2) и (2; -6) | 5) (-4; 5) и (3; 0) | 6) (-7; 5) и (-10; 10) |
| 7) (20; 10) и (50; 30) | 8) (20; 30) и (-40; -10) | 9) (-17; 14) и (19; -20) |

91. Постройте графики следующих функций.

- | | | |
|-----------------|-----------------|-------------------|
| 1) $y = 2x + 4$ | 2) $y = 2x + 3$ | 3) $y = 2x - 1$ |
| 4) $y = x - 4$ | 5) $y = x + 1$ | 6) $y = -(x + 2)$ |

92. На основании графика найдите формулы функций и определите координату точек их пересечения.



93. На празднике Хаит Карим и Мавлон раздавали детям конфеты. Они оба раздавали конфеты с постоянной скоростью, и у обоих закончились конфеты. Изначально у Карима было 300 конфет. После того, как к нему пришли 17 детей, у него осталось 249 конфет.

Количество конфет, оставшихся у Мавлона, как функция количества детей, пришедших к нему, определяется следующей функцией: $C(n) = 270 - 3n$.

Кто давал больше конфет каждому пришедшему ребенку? Кто больше раздал конфет детям?

94. Амир проехал из Иерусалима до самого низкого места на Земле, Мёртвого моря, спускаясь со скоростью 12 метров в минуту. Он был на уровне моря после 30 минут езды. Постройте график зависимости между высотой Амира относительно уровня моря (в метрах) и временем (в минутах).

СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

95.
$$\begin{cases} 7x - 5y = 3, \\ A \end{cases}$$
 Вместо А запишите такое уравнение системы, чтобы система не имела решения

96. Какие из пар чисел (3; -1); (-9; 3); (2; 1); (1; 2) являются решением системы?

$$\begin{cases} 2x + 11y = 15 \\ 10x - 11y = 9 \end{cases}$$

97. Какие из пар чисел (1; 2); (-2; -5); (4; 3); (0; 1) являются решением системы?

$$\begin{cases} 4x - 3y = 7 \\ 5x + 2y = 26 \end{cases}$$

98. Какой из способов наиболее удобен для решения системы уравнений? Найдите её решение с помощью этого метода.

1)
$$\begin{cases} y = 2,5x \\ y = 8 - 1,5x \end{cases}$$

2)
$$\begin{cases} 5x - 3y + 8 = 0 \\ x + 12y = 11 \end{cases}$$

3)
$$\begin{cases} 3x - 4y = 5 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$$

4)
$$\begin{cases} y = x + 1 \\ 5x + 2y = 16 \end{cases}$$

5)
$$\begin{cases} y = x + 5 \\ x = 2y - 10 \end{cases}$$

6)
$$\begin{cases} 3x - 2y = 64 \\ 3x + 7y = -8 \end{cases}$$

99. 6 лошадей и 11 коров ежедневно вместе получали 120 kg сена. Если 7 лошадям скармливают на 33 kg сена больше, чем 5 коровам, то сколько сена в день скармливают каждой лошади и каждой корове?

100. Разделите число 126 на три части так, чтобы при делении первой части на вторую или второй части на третью получилось 1 и 18 в остатке.

101. Для работы было нанято несколько рабочих. Если бы их было больше на 5, они бы закончили эту работу на 4 дня раньше. Если бы рабочих было на 10 меньше, то они закончили бы работу на 20 дней позже. Сколько рабочих было нанято и сколько дней они работали?

102. В две ёмкости налили воды. Чтобы уровень воды в обеих ёмкостях был одинаковым, из первой ёмкости во вторую перелили столько воды, сколько её было во второй ёмкости, затем из второй в первую перелили столько, сколько её осталось в первой, и, наконец, из первой во вторую столько воды, сколько её осталось во второй. После этого в каждой ёмкости стало 64 л воды. Сколько воды было в каждом сосуде первоначально?

103. В трёхзначном числе цифра, стоящая в разряде десятков, есть среднее арифметическое цифр в разряде сотен и единиц. Результат деления искомого числа на сумму его цифр равен 48. Если из этого числа вычесть 198, то получится число, записанное этими цифрами, но в обратном порядке. Найдите это число.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

- Сколько целых значений числа n , превращающих дробь $\frac{n^2 - n + 3}{n + 1}$ в целое число?
- Вычислите.
 - $\left(\frac{1}{6} - 1\frac{1}{15} + \frac{1}{10}\right) : 0,6 + 0,4$
 - $-1\frac{3}{4} \cdot 6,5 \cdot \left(-\frac{4}{7}\right) - 3,75$
 - $\frac{0,64 \cdot 0,45 - 0,45}{1,05 - 1\frac{1}{2}}$
 - $\left(3\frac{17}{36} - 5\frac{7}{12}\right) : \frac{2}{9} - \frac{3}{26} \cdot 4\frac{1}{3}$
- Вычислите.
 - $3,2(62) - 1,(15)$
 - $(0,(6) - 0,(45)) \cdot 0,(33)$
- Вычислите.
 - $6,4 \cdot 4,1 + 3,6 \cdot 2,2 + 6,4 \cdot 2,2 + 3,6 \cdot 4,1$
 - $0,85 \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot 0,85 - \frac{1}{6} \cdot 0,65 - 0,65 \cdot \frac{1}{3}$
- Вычислите.
 - $(|4 - 4 \cdot |3 - 6 \cdot |8||) - (|4 - |3 - 8| - 7|)$
 - $\frac{|4 - 5 \cdot |4 - 6| + 4 \cdot 3 - 6|}{|3 - 4 \cdot |7 - 5||}$
- Расположите числа по убыванию: $a = 2,(4)$; $b = 2,5 - 0,25$ и $c = 1,2 : 0,5$
- Расположите числа по убыванию: $m = 0,22(23)$; $n = 0,2(223)$; $l = 0,222(3)$
- Расположите числа по убыванию: $a = 3,(6)$; $b = 3,91 - 0,25$ и $c = 4,68 : 1,3$
- Прочтите выражение. Назовите основание и показатель степени.
 - 6^4
 - $(1,2)^7$
 - a^{10}
 - $(3c)^2$
- Какой операцией можно заменить произведение? Выполните замену.
 - $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$
 - $0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2$
 - $(-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5)$
- Сколько множителей в выражении? Запишите их в виде произведения.
 - 8^4
 - 11^6
 - $(-3)^7$
 - $(3,2)^{10}$
- Запишите в виде степени с основанием 10.
 - 100
 - 100 000
 - 1 000 000
 - 100 000 0000
- Запишите в виде степени с основанием a .
 - $a \cdot a \cdot a \cdot a$
 - $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$
 - $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$
- Сравните выражения.
 - 0 и -1^4
 - 1 и $(-1)^5$
 - -2^6 и 2^6
 - $(-4)^4$ и 4^4

15. Найдите значение выражения.

1) $3 \cdot 2^3$ 2) $5^3 \cdot \frac{1}{5}$ 3) $9 \cdot \left(1\frac{1}{3}\right)^2$ 4) $100 \cdot 0,1^3$

16. Найдите значение выражения $100a^2$ при данных значениях a .

1) $a = 1$ 2) $a = 3$ 3) $a = -0,1$ 4) $a = \frac{1}{5}$

17. Воспользовавшись свойством степени, запишите в виде степени с одним основанием.

1) $6^5 \cdot 6^3$ 2) $10^4 \cdot 10^5$ 3) $5^m \cdot 5^5$ 4) $c^n \cdot c^{10}$

18. Каким свойством можно воспользоваться, чтобы записать выражение в виде степени с одним основанием?

1) $8^{11} : 8^5$ 2) $6^9 : 6$ 3) $a^5 : a^2$ 4) $x^{12} : x^8$

19. Вычислите.

1) $\frac{5^4}{5^3}$ 2) $\frac{0,1^7}{0,1^5}$ 3) $\frac{4^5 \cdot 4^6}{4^8}$ 4) $\frac{3^{12}}{3^2 \cdot 3^6}$

20. Сравните выражения.

1) $2^3 \cdot 2^4$ и $(2^2)^2$ 2) $7^5 \cdot 7^4$ и $7 \cdot (7^2)^4$ 3) $(-2^2)^2$ и $(-2^2)^3$

21. Вычислите.

1) $\left(-1\frac{1}{3}\right)^3$ 2) $\left(1\frac{1}{2}\right)^3$ 3) $\frac{100^5}{(80+20)^{10}} \cdot 50^5$ 4) $\frac{1000^{10}}{(700-200)^{12}} \cdot 500^2$

22. Заполните таблицу.

a	4	0,7	1,75	$-\frac{3}{4}$	0	-0,25	0,2	$1\frac{1}{4}$
$4a-1$								

23. Найдите числовое значение выражения $a = 2,4$; $b = 3,6$; $h = 1,6$ при $S = \frac{h}{2}(a+b)$.

24. Найдите числовое значение выражения $a = 12,5$; $h = 6,4$ при $S = \frac{1}{2}ah$.

25. Какие числа могут обозначать буквы в приведённых ниже выражениях?

- | | |
|--|----------------------------------|
| 1) Перемена длится n минут; | 2) В классе y учеников; |
| 3) В 7 классе обучают x учебным предметам; | 4) В одном месяце k дней; |
| 5) Одна неделя содержит a дней; | 6) В одном часе n минут; |
| 7) Урок длится t минут; | 8) Один год состоит из k дней; |
| 9) Один год состоит из t месяцев; | 10) В автомобиле n колес. |

26. Перемножьте многочлены.

- | | |
|-----------------|-------------------|
| 1) $(x-7)(x+7)$ | 2) $(x+5)(x-5)$ |
| 3) $(8-a)(8+a)$ | 4) $(10-c)(c+10)$ |

27. Запишите в виде многочлена.

- | | |
|-------------------|-------------------|
| 1) $(4a-1)(4a+1)$ | 2) $(2a+b)(b-2a)$ |
| 3) $(3-5c)(5c+3)$ | 4) $(7-2m)(2m+7)$ |

28. Вынесите общий множитель за скобки.

- | | | | |
|------------|--------------|-------------|--------------|
| 1) $3x+3y$ | 2) $-8x+12y$ | 3) $15a-5b$ | 4) $14a+28b$ |
|------------|--------------|-------------|--------------|

29. Вынесите общий множитель за скобки.

- | | | | |
|--------------|-------------|-------------------|-------------------|
| 1) $6xa+6bx$ | 2) c^2-cd | 3) $15ax^2+3a^2x$ | 4) $-a^3b^2-a^2b$ |
|--------------|-------------|-------------------|-------------------|

30. Умножьте на кратность.

- | | |
|--------------------|--------------------|
| 1) $(a+b)x+(a+b)y$ | 2) $6(m+n)-x(m+n)$ |
| 3) $2p(n-k)-(n-k)$ | 4) $2d(k-t)-(t-k)$ |

31. Умножьте на кратность.

- | | |
|---------------------|----------------------|
| 1) $b(c+d)+(3c+3d)$ | 2) $(7a-7b)+(ad-bd)$ |
| 3) $(mn+mk)-(n+k)$ | 4) $(ac-ap)+(3p-3c)$ |

32. Умножьте на кратность.

- | | |
|-------------------|------------------------|
| 1) $3x(y+z)+y+z$ | 2) $3tk-kn+5(3t-n)$ |
| 3) $6(x-y)-dx+dy$ | 4) $10n-16m-(5xn-8xm)$ |

33. Умножьте на кратность.

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| 1) $8ax+16ay-3bx-6by$ | 2) $14ax-7ay-8bx+4by$ |
| 3) $2x^2+x+2xy+y$ | 4) $bt-t^2+bc-ct$ |

34. Вычислите с помощью формулы разности квадратов.

- | | |
|----------------|---------------------|
| 1) 59^2-41^2 | 2) $111,3^2-11,3^2$ |
|----------------|---------------------|

35. Представьте в виде произведения множителей, используя формулу разности квадратов.

- | | |
|-------------------|--------------------|
| 1) $(a-b)^2-a^2$ | 2) $n^2-(m+n)^2$ |
| 3) $(x+y)^2-4x^2$ | 4) $9c^2-(5b-c)^2$ |

36. Вычислите по формулам сокращённого умножения. $\frac{3,6^2-2 \cdot 3,6 \cdot 0,4+0,4^2}{1,4^2-1,8^2}$

37. Запишите произведение в стандартном виде: $(x^2 + y^2)(x + y)(x - y)$

38. Покажите, что равенство верно: $(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)(x^4 + 16) = x^8 - 256$

39. Найдите ошибку.

1) $(n + m)(m - n) = n^2 - m^2$

2) $(x - y)(x + y) = x^2 + y^2$

40. Вычислите.

1) $\frac{53^2 + 2 \cdot 53 \cdot 47 + 47^2}{76^2 - 2 \cdot 76 \cdot 51 + 51^2}$

2) $\frac{2,9^2 + 2 \cdot 2,9 \cdot 2,1 + 2,1^2}{2,6^2 - 2 \cdot 2,4^2}$

3) $5 \cdot \frac{5}{9} - \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{9} - \frac{1}{3} \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$

6) $97 \cdot 2,2 + 2,6^2 - 0,4^2$

41. Вычислите.

1) $1005 \cdot 995$

2) $108 \cdot 92$

3) $0,94 \cdot 1,06$

4) $1,09 \cdot 0,91$

5) $10 \frac{1}{7} \cdot 9 \frac{6}{7}$

6) $99 \frac{7}{9} \cdot 100 \frac{2}{9}$

42. Упростите.

1) $\left(\frac{2}{1-x^2} - \frac{2}{(x-1)^2} \right) \cdot (1-x)^2 - \frac{4}{1+x}$

2) $a^2 b^2 \left(\frac{1}{(a+b)^2} \cdot \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) + \frac{2}{(a+b)^3} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \right)$

43. Сократите дробь.

1) $\frac{x^2 - x + 1}{x^4 + x^2 + 1}$

2) $\frac{n^2 - 7n + 6}{n^2 - 1}$

3) $\frac{x^6 - x^4}{x^3 + x^2}$

44. Найдите неизвестное.

1) $2 : x = 1 \frac{2}{3} : 2 \frac{6}{7}$

2) $3 \frac{3}{5} : 2 \frac{7}{10} = 3 \frac{3}{4} : x$

3) $5 \frac{5}{8} : 7 \frac{1}{2} = x : 6 \frac{2}{5}$

45. Выполните действия.

1) $\frac{9a}{(3-a)^2} - 1 : \left(\frac{a}{a-3} + \frac{12a^2 - 9a}{27 - a^3} + \frac{9}{a^2 + 3a + 9} \right)$

$$2) \left(\frac{c+5}{5c-1} + \frac{c+5}{c+1} \right) : \frac{c^2+5c}{1-5c} + \frac{c^2+5}{c+1}$$

$$3) \left(\frac{x+5}{x^2+81} + \frac{x+7}{x^2-18x+81} \right) : \left(\frac{x+3}{x-9} \right)^2 + \frac{7+x}{9+x}$$

$$4) \frac{3x+10}{x+4} + \left(\frac{x-4}{x+6} \right)^2 \cdot \left(\frac{x+21}{16-8x+x^2} - \frac{x+3}{16-x^2} \right)$$

46. Решите уравнения.

$$1) 420 : (160 - 1000 : x) = 12$$

$$2) (360 + x) \cdot 1002 = 731\,460$$

$$3) x : 2,0(6) = 0,2(7) : 0,4(09)$$

$$4) 2,8x - 3(2x - 1) = 2,8 - 3,19x$$

$$5) 0,9(4x - 2) = 0,5(3x - 4) + 4,4$$

$$6) 6,4(2 - 3x) = 6(0,8x - 1) + 6,8$$

47. Ответьте на вопросы:

1) При каком значении x значение выражения $2(3-5x)$ на 1 меньше, чем значение $4(1-x)$?

2) При каком значении x значение выражения $-3(2x+1)$ на 20 больше значения выражения $8x+5$?

3) При каком значении x значение выражения $5x+7$ в 3 раза меньше значения выражения $61-10x$?

4) При каком значении x значение выражения $8-x$ в 2 раза больше значения выражения $7-x$?

48. Решите уравнения.

$$1) 5x + 3(x-1) = 6x + 11$$

$$2) 6 + (2-4x) + 5 = 3(1-3x)$$

$$3) 3x - 5(2-x) = 54$$

$$4) 0,5(2x-1) - (0,5-0,2x) + 1 = 0$$

$$5) 8(x-7) - 3(2x+9) = 15$$

$$6) 0,15(x-4) = 9,5 - 0,3(x-1)$$

$$7) 0,6 - 0,5(x-1) = x + 0,5$$

$$8) 3(3x-1) + 2 = 5(1-2x) - 1$$

$$9) 3x(2x-1) - 6x = (7-x) = 90$$

$$10) 1,5(3+2x) = 3x(x+1) - 30$$

$$11) 5x(12x-7) - 4x(15x-11) = 30 - 29x$$

$$12) 24x - 6x(13x-9) = -13 - 13x(6x-1)$$

$$13) 3(-2x+1) - 2(x+13) = 7x - 4(1-x)$$

$$14) -4(5-2x) + 3(x-4) = 6(2-x) - 5x$$

$$15) 3x(4x-1) - 2x(6x-5) = 9x - 8(3+x)$$

$$16) 15x + 6x(2-3x) = 9x(5-2x) - 36$$

49. Решите дробно-рациональные уравнения.

1) $\frac{x}{4} + \frac{x}{3} = 14$

2) $2x + 3 = \frac{2x}{5}$

3) $\frac{x}{2} - \frac{x}{8} = 5$

4) $\frac{4x}{9} + 1 = \frac{5x}{12}$

5) $\frac{2y}{3} - \frac{4y}{5} = 7$

6) $\frac{5a}{12} - \frac{a}{8} = \frac{1}{3}$

7) $\frac{x}{4} = x - 1$

8) $\frac{5m}{9} + \frac{m}{3} + 4 = 0$

9) $\frac{3c}{14} + \frac{c}{2} = \frac{2}{7}$

10) $\frac{6x-5}{7} = \frac{2x-1}{3} + 2$

11) $\frac{4x-11}{15} + \frac{13-7x}{20} = 2$

12) $\frac{5-x}{2} + \frac{3x-1}{5} = 4$

13) $\frac{5x-7}{12} - \frac{x-5}{8} = 5$

14) $\frac{x}{4} - \frac{3-2x}{5} = 0$

15) $\frac{3x+5}{5} - \frac{x+1}{3} = 1$

16) $\frac{2x-1}{6} - \frac{x+1}{3} = x$

17) $\frac{12-x}{4} - \frac{2-x}{3} = \frac{x}{6}$

18) $\frac{6x-1}{15} - \frac{x}{5} = \frac{2x}{3}$

19) $1 - \frac{x-3}{2} = \frac{2-x}{3} + 4$

20) $\frac{2x+1}{4} + 3 = \frac{x}{6} - \frac{6-x}{12}$

21) $\frac{x+13}{10} - \frac{2x}{5} = \frac{3-x}{15} + \frac{x}{2}$

- 50.** Периметр треугольника равен 44 см. Одна сторона на 4 см меньше другой и в 2 раза длиннее третьей стороны. Найдите стороны треугольника.
- 51.** Компания хочет арендовать три земельных участка общей площадью 166 м². Площадь первого из них в 1,5 раза больше второго и на 6 м² меньше третьего. Найдите площади каждого участка земли.
- 52.** Трое друзей собирали яблоки в саду. Первый собрал четверть всех яблок, второй – половину всех яблок, а третий – 17 яблок. Сколько всего яблок было собрано?
- 53.** К 190 г солевого раствора добавляли 10 г соли. После этого количество соли в нём увеличилось на 4,5%. Сколько соли было в растворе до этого?
- 54.** Если число, которое я задумал, составляет половину от половины, какое число я задумал?
- 55.** Количество книг на двух полках равно 80, причём на одной на 16 книг больше, чем на другой. Сколько книг на каждой полке?
- 56.** Когда переднее колесо трактора делает оборот 4 раза, заднее колесо оборачивается 1 раз. Скажите, если заднее колесо трактора проходит 1000 метров, то сколько метров проходит переднее колесо?

57. За ручку, перо и циркуль было выплачено 630 сумов. Если известно, что ручка в 4 раза дороже карандаша и дешевле циркуля на 170 сумов, то какова цена карандаша?
58. Найдите два числа, если их разность равна 36, а одно из них в 4 раза больше другого.
59. Одно из двух натуральных чисел больше другого на 6. Их сумма равна 38. Найдите эти числа.
60. Разность квадратов двух последовательных натуральных чисел равна 49. Найдите меньшее из этих чисел.
61. Если сумма 4-х последовательных натуральных чисел равна 50, найдите наименьшее из них.
62. Я задумал число. Если я разделю его на 2 и вычту 2, в результате получится то же число. Какое число я задумал?
63. Найдите массу кролика, если кошка и кролик вместе весят 7 kg, собака и кошка 10 kg, а собака и кролик 11 kg.
64. Функция задаётся формулой $y = 5x - 1$. Найдите значение функции, если значение аргумента равно -1 .
65. Функция задаётся формулой $y = 4x - 3$. Найдите значение функции, если значение аргумента равно 1.
66. Функция задаётся формулой $y = -5x + 3$. Найдите значение функции, если значение аргумента равно -2 .
67. Функция задаётся формулой $y = 5x - 1$. Если значение функции равно -6 , найдите значение аргумента.
68. Функция задаётся формулой $y = 2x - 3$. Если значение функции равно -7 , найдите значение аргумента.
69. Функция задаётся формулой $y = -4x - 5$. Если значение функции равно -9 , найдите значение аргумента.
70. За какое время моторная лодка пройдет x km, если она движется прямолинейно со скоростью 12 km/h? Если мы обозначим время через y , выразите y через x .
71. За какое время моторная лодка пройдет x km, если она движется прямолинейно со скоростью 10 km/h? Если мы обозначим время через y , выразите y через x .
72. За какое время моторная лодка пройдет x km, если она движется прямолинейно со скоростью 8 km/h? Если мы обозначим время через y , выразите y через x .
73. Функция задается формулой $y = -3x + 4$. Запишите координаты 6 точек, принадлежащих этой функции.

74. Функция задаётся формулой $y = -2x + 7$. Напишите координаты 5 точек, принадлежащих этой функции.
75. Функция задаётся формулой $y = 3x + 1$. Напишите координаты 4 точек, принадлежащих этой функции.
76. Функция задаётся формулой $y = -3x + 24$. Напишите координаты точки пересечения этой функции с осью Ox .
77. Функция задаётся формулой $y = x + 4$. Напишите координаты точки пересечения этой функции с осью Ox .
78. Функция задаётся формулой $y = 5x + 10$. Напишите координаты точки пересечения этой функции с осью Ox .
79. Функция задаётся формулой $y = 6x + b$. Найдите b , если известно, что эта функция проходит через точку $K(2; 1)$. Проходит ли эта функция через точку $A(1; -5)$?
80. Функция задаётся формулой $y = 9x + b$. Найдите b , если известно, что эта функция проходит через точку $K(1; 3)$. Проходит ли эта функция через точку $A(2; 4)$?
81. Функция задаётся формулой $y = 10x + b$. Найдите b , если известно, что эта функция проходит через точку $K(2; 10)$. Проходит ли эта функция через точку $A(10; 1)$?
82. Найдите k , если график функции $y = kx + 7$ проходит через точку $P(1; 4)$. Проходит ли эта функция через точку $A(4; 1)$?
83. Найдите k , если график функции $y = kx + 4$ проходит через точку $P(2; -2)$. Проходит ли эта функция через точку $A(2; 4)$?
84. Найдите k , если график функции $y = kx - 2$ проходит через точку $P(-3; 4)$. Проходит ли эта функция через точку $A(1; -4)$?
85. Принадлежат ли графику функции $y = 5x + 4$ точки $A(1; 9)$; $B(2; -6)$; $C(3; 19)$?
86. Принадлежат ли графику функции $y = -2x + 3$ точки $A(1; 1)$; $B(2; 1)$; $C(4; -5)$?
87. Принадлежат ли графику функции $y = 6x - 8$ точки $A(2; 4)$; $B(2; -6)$; $C(4; 16)$?
88. Найдите k , если при $x = 1$ значение функции $y = kx + 1$ равно 18.
89. Найдите k , если при $x = 4$ значение функции $y = kx - 2$ равно 18.
90. Найдите k , если при $x = 1$ значение функции $y = kx + 8$ равно 18.
91. Постройте графики функций $y = 5x + 4$ и $y = 5x - 4$ в одной системе координат.
92. Постройте графики функций $y = 5x + 4$ и $y = -5x + 4$ в одной системе координат.
93. Постройте графики функций $y = 2x + 4$ и $y = x + 2$ в одной системе координат.

94. Через какие координатные четверти проходит график функции $y = -2x + 3$?
95. Через какие координатные четверти проходит график функции $y = 2x + 3$?
96. Через какие координатные четверти проходит график функции $y = -2x - 3$?
97. Через какие координатные четверти проходит график функции $y = 2x - 3$?
98. Найдите значение a , если при $x = 2$ функции $y = -2x - 3$ и $y = ax + 5$ принимают равные значения.
99. Найдите значение a , если при $x = 2$ функции $y = 3x - 3$ и $y = ax + 5$ принимают равные значения.
100. Найдите значение a , если при $x = 3$ функции $y = -4x - 7$ и $y = ax - 1$ принимают равные значения.
101. Найдите значение a , если при $x = 3$ функции $y = -4x - 7$ и $y = 2x - b$ принимают равные значения.
102. Найдите значение b , если при $x = 5$ функции $y = x - 5$ и $y = 3x - b$ принимают одинаковые значения.
103. Найдите значение b , если при $x = 2$ функции $y = 6x - 7$ и $y = 2x - b$ принимают одинаковые значения.
104. Люди, находящиеся в точках $A(-1; 3)$, $B(3; 7)$ и $C(2; -4)$, одновременно услышали звук грома. Определите координаты точки, где произошел гром.
105. Постройте графики функций в одной системе координат.
106. Найдите x .
- 1) $\begin{cases} 3x - 4y = 3 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x + 4y = 11 \\ 5x - 2y = 1 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$
107. Если пара $(x; y)$ решение системы $\begin{cases} 3x - 2y = -8 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$, найдите значение выражения $y - x$.
108. Если пара $(x; y)$ решение системы $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$, найдите значение выражения $x + y$.
109. Если пара $(x; y)$ решение системы $\begin{cases} 2x + y - 8 = 0 \\ 3x + 4y - 7 = 0 \end{cases}$, найдите значение выражения $xу$.
110. Если пара $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 4x - y = -2 \end{cases}$, найдите значение выражения $y^2 - x^2$.
111. Если пара $\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$, найдите значение выражения $x^2 + y^2$.

112. Если пара $\begin{cases} 6x - 2y - 6 = 0 \\ 5x - y - 17 = 0 \end{cases}$, найдите значение выражения $y - x$.
113. В какой четверти располагается график функции $y = kx + b$, если $k > 0$ и $b < 0$?
114. В какой четверти располагается график функции $y = kx + b$, если $k < 0$ и $b > 0$?
115. В какой четверти располагается график функции $y = kx + b$, если $k < 0$ и $b < 0$?
116. В какой четверти располагается график функции $y = kx + b$, если $k > 0$ и $b > 0$?
117. У продавца есть 10 гирь разного веса. Вес гирь увеличивается на 1 грамм, 2 грамма, 3 грамма соответственно, при этом последняя гиря весит 10 граммов. С их помощью определите:
- сколькими способами продавец может взять две из них, чтобы их общий вес был нечётен?
 - сколькими способами продавец может взять 3 гири, чтобы их общий вес делился на 3?
 - сколькими способами продавец может получить 24 грамма этих гирь?
118. Курьер должен каждый день доставлять 4 пиццы 4 постоянным клиентам по разным адресам. Чтобы не скучать, курьер решил каждый день менять порядок доставки пиццы этим клиентам, то есть ни в какие два дня последовательность доставки не должна быть одинаковой. Сколько дней максимум он может действовать по этому правилу?
119. У продавца есть гири весом 1 kg, 3 kg, 5 kg, 7 kg и 9 kg. Какой вес он сможет измерить с их помощью на весах? (При этом не допускается класть какую-либо гирю на ту чашу весов, куда кладется продукт.)
120. Сколько положительных целых чисел, меньших 100, удовлетворяют следующему условию:
- делится и на 2, и на 3;
 - делится на 2, но не на 3;
 - делится на 3, но не делится на 2;
 - делится или на 3, или на 2;
 - не делится ни на 2, ни на 3?

ЗАДАНИЯ МЕЖДУНАРОДНОЙ ПРОГРАММЫ ПО ОЦЕНКЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ДОСТИЖЕНИЙ УЧАЩИХСЯ

1. В специальном автомате можно купить круглую жевательную резинку 7 разных цветов. За то время, пока Лайло наблюдала, люди купили из автомата 306 жевательных резинок, и 23 из них были синими. Какова вероятность того, что следующая жевательная резинка, купленная в этом автомате, будет синей? Запишите ответ в виде обыкновенной дроби.

2. Найдите значения x и y , удовлетворяющие уравнениям

$$3x + y = 13$$

$$5x - y = 27$$

3. Джамиля построила график функции:

- График представляет собой прямую линию.
- График пересекает ось Oy в точке $(0; 3)$.

Графиком какой из перечисленных функций он может быть?

A) $y = x^2 + 3$

B) $y = 3x + 1$

C) $y = 3x^2 - 1$

D) $y = x + 3$

4. Приведена формула для расчёта температуры воздуха (t °C) на высоте y метров над уровнем моря при температуре x °C на уровне моря. Если температура на уровне моря 21 °C, то какая температура на вершине горы на высоте 2000 м?

$$t = x - \frac{6,5}{100} y$$

5. Какая пара чисел $(x; y)$ удовлетворяет уравнению $3x + 4y = 24$?

A) $(0; 8)$

B) $(3; 4)$

C) $(4; 3)$

D) $(6; 0)$

6. Для каждого высказывания выберите «верно» или «не верно».

Высказывание	Верно	Не верно
Число 8^{16} в 8 раз больше числа 8^{15}		
Число 8^{10} в 10 раз больше числа 8		

7. Найдите значение выражения $(-5)^{43} + (-1)^{43} + 5^{43}$.

A) -1

B) 1

C) 0

D) 5

8. Найдите последнюю цифру числа 7^{190} ?

A) 1

B) 3

C) 7

D) 9

9. Какое из выражений ближе к значению выражения $\frac{7,21 \cdot 3,86}{10,09}$?

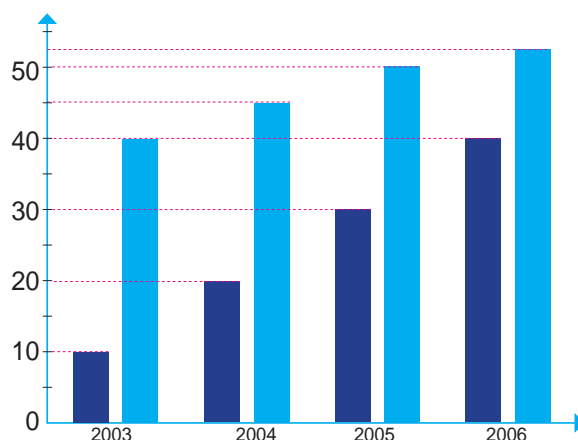
A) $\frac{7 \cdot 3}{10}$

B) $\frac{7 \cdot 4}{10}$

C) $\frac{7 \cdot 3}{11}$

D) $\frac{7 \cdot 4}{11}$

10. Чему равна сумма трёх последовательных чисел, второе из которых равно $2n$?
- A) $6n + 3$ B) $6n$ C) $6n - 1$ D) $6n - 3$
11. В мероприятии принимают участие m мальчиков и n девочек. Каждый принёс по 2 шара. Какое из следующих выражений представляет собой общее количество шаров?
- A) $2(m + n)$ B) $2 + (m + n)$ C) $2m + 2$ D) $m + 2n$
12. На графике представлена диаграмма продаж двух видов питьевой воды (виноградной и лимонной) за 4 года. Если в ближайшие 10 лет объём продаж не изменился, то в каком году объём продаж виноградного напитка сравняется с объёмом продаж лимонного напитка? Объясните результат задания, построив график функции.



13. Какая запись определяет выражение $xu + 1$?
- а) Прибавьте к 1 u , затем умножьте на x .
- б) Умножьте x и u на 1.
- в) Сложите x и u , затем прибавьте 1.
- г) Умножьте x и u , затем прибавьте 1.
14. В таблице указана длина тени куста разной высоты в 10 часов утра. Какова длина тени куста высотой 50 cm в 10 часов утра?
- A) 36 cm B) 38 cm C) 40 cm D) 42 cm

Высота куста (cm)	Длина тени (cm)
20	16
40	32
60	48
80	64

15. Компания «Реал Бургер» имеет 5 ресторанов. Количество сотрудников в этих пяти ресторанах составляет 12, 18, 19, 21 и 30 человек соответственно.
- Найдите среднее арифметическое количества сотрудников в пяти ресторанах.
 - Найдите медиану числа сотрудников в пяти ресторанах.
 - Если количество сотрудников в ресторане с 30 сотрудниками увеличить до 50, как это повлияет на среднее арифметическое и медиану выше?

16. $x + y = 12$ и $2x + 5y = 36$. Найдите значения x и y .

а) $x = 2, y = 10$ б) $x = 4, y = 8$ в) $x = 6, y = 6$ г) $x = 8, y = 4$

17. Какие из выражений равны выражению $4(3 + x)$?

а) $12 + x$ б) $7 + x$ в) $12 + 4x$ г) $12x$

18. Выразите значение выражения $256 \cdot 4096$ в виде степени числа 4, используя приведённую ниже таблицу.

4^1	4^2	4^3	4^4	4^5	4^6
4	16	64	256	1024	4096

а) 4^{10} б) 4^{11} в) 4^{12} г) 4^{13}

19. В специальном оборудовании имеется 100 конфет, при повороте ручки которого выпадает 1 конфета. Конфеты в нём синие, розовые, жёлтые и зелёные, каждая в равных количествах и перемешаны. Максуд повернул ручку оборудования и получил одну розовую конфету. Настала очередь Мурада вращать ручку. Каково правильное утверждение о вероятности Мурада получить розовую конфету?

- а) Он точно получит розовую конфету.
- б) Это более вероятно, чем Максуд получит розовую конфету.
- в) Вероятность этого такая же, как вероятность того, что Максуд получит розовую конфету.
- г) Это менее вероятно, чем Максуд получит розовые конфеты.

20. Из 400 выпускников школы 50 планируют поступать в университеты, 100 – в политехнические техникумы, 150 – бизнес-колледжи, остальные – работать. Покажите соответствующие доли этих студентов в круговой диаграмме. Проставьте на диаграмме соответствующие символы.

21. Таксомоторная компания взимает с таксиста в обязательном порядке 2,5 тысячи сумов за каждую поездку и 0,2 тысячи сумов за каждый пройденный километр. Какое из следующих выражений представляет стоимость такси, проехавшего n километров?

а) $2,5 + 0,2n$ б) $2,5 \cdot 0,2n$ в) $0,2 \cdot (25 + n)$ г) $0,2 \cdot 2,5 + n$

22. Длина доски 40 см. Она была разделена на 3 части. Длина части следующая (в см):

$2x - 5$ $x + 7$ $x + 6$

Найдите длину самой длинной части.

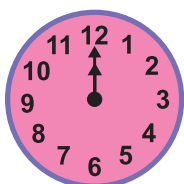
23. Ученики хотят отправиться на экскурсию в музей. Обед на весь класс стоит 150 000 сумов. Входной билет для каждого ученика составляет 15 000 сумов. В классе x учеников. Общая стоимость экскурсии k тысяч сумов. Напишите формулу для вычисления значения k .

24. Верны или не верны следующие утверждения для любого натурального числа n ?

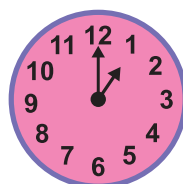
	Верно	Не верно
$n + 4 = 4 + n$		
$n - 5 = 5 - n$		
$n \cdot 6 = 6 \cdot n$		
$n : 7 = 7 : n$		

25. Ганс (Берлин, Германия) и Марк (Сидней, Австралия) постоянно общаются друг с другом посредством сети Интернет. Для разговора они должны быть одновременно подключены к Интернету. Чтобы определить правильное время, Марк изучил временные шкалы в различных частях мира и получил следующую информацию:

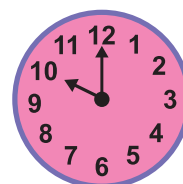
Время в Берлине	Время в Сиднее
3:25	
	20:30
13:00	
	3:00



Гринвич 24:00



Берлин 1:00



Сидней 10:00

Задание 1. Определите время в городах в таблице и заполните её.

Задание 2. Поговорите с учителями географии и физики (интервью), соберите информацию из Интернета, заполните таблицу и обоснуйте свои ответы.

По Гринвичу	Самарканд, Узбекистан	Санкт-Петербург, Россия	Нью-Йорк, США	Сеул, Корея
24:00				
	16:00			
		2:30		
			13:50	
				20:15

ЛОГИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

- Сумма двузначного числа и этого же числа, записанного в обратном порядке, даёт квадрат натурального числа. Найдите все такие числа.
- Внутри квадратного пруда в 1 м от его сторон разбит небольшой сад. У нас есть 2 доски по 1 м. Как с помощью этих досок попасть в сад?
- Дядя Аслиддин провёл в селе свой 90-дневный отпуск. При этом он строго следовал следующим правилам: каждый второй день ходил купаться, каждый третий день ходил покупать продукты в магазине, а каждый пятый день работал в саду. В первый день дядя Аслиддин сделал всю работу сразу и очень устал. Сколько дней в отпуске:
 - «приятных» (сегодня он только купался);
 - «скучных» (ничего не делал);
 - «тяжёлых» (день, когда должен был сделать три дела)?
- Сколько натуральных чисел меньше 200, в записи которых есть и цифра 1, и цифра 2?
 - Сколько существует натуральных чисел меньше миллиона, в которых присутствуют все три цифры числа 1, 2 и 3?
- Мурад пробежал 9 641 м в гонке на 10 km. Потом он прошел 3 456 dm и 12 340 mm. Потом он устал и остановился. Сколько ещё сантиметров до финиша осталось пробежать Мураду?
- Джамиля, Комила, Лейла и Максуд сидят за столиком в вагоне. Двое из них сидят по ходу движения, а двое других сидят против движения поезда. Двое из них сидят у окна, а двое других сидят на скамейке у коридора. Насколько мне известно:
 - Джамиля сидит по диагонали напротив Лейлы;
 - Максуд сидит лицом по ходу движения;
 - Камила сидит на месте рядом с Джамилей.
 Что из перечисленного я ещё могу узнать?
 - Лейла сидит против движения.
 - Лейла сидит на месте у окна.
 - Камила сидит на месте возле коридора.
 - Джамиля сидит напротив Максуда.
- Клиника работает с 9:00 до 17:00. На каждый визит пациента отводится 15 минут, каждому врачу предоставляется 30-минутный перерыв на обед. Если в клинике работают 4 врача, сколько пациентов можно принять за один день?
- Сакине дали 30 вопросов для домашнего задания по математике. На решение каждого из первых 20 вопросов уходит 3-5 минут, последних 10 вопросов 5-10 минут. Сакина начинает свою домашнюю работу в 19:00 и делает 15-минутный перерыв каждые 30 минут. Она всегда заканчивает любой вопрос, над которым работает, за 30 минут, а затем делает перерыв. В какое самое раннее время она может закончить свою домашнюю работу?



9. У продавца есть 10 гирь разного веса. Вес гирь увеличивается на 1 грамм, 2 грамма, 3 грамма соответственно, при этом последняя гиря весит 10 грамм. С их помощью определите:
- Сколькими способами продавец может взять две из них, чтобы их общий вес был чётным?
 - Сколькими способами продавец может взять 5 гирь, чтобы их общий вес делился на 5?
 - Сколькими способами продавец может получить 20 граммов этих гирь?
10. Разность неизвестного числа с 20 равна разнице этого числа с 32. Какое это число?
11. У Барно одинаковое количество кошек и цыплят. Когда Барно сосчитала ноги питомцев, их оказалось 48. Сколько цыплят у Барно?
12. Малика и Рано изготовили бумажных птичек для украшения ёлки, и количество украшений, сделанных Маликой, на 8 больше, чем у Рано. Если девочки изготовили всего 26 украшений, найдите количество украшений, сделанных Рано.
13. У продавца есть гири весом 1 kg, 5 kg, 10 kg и 20 kg. Какой вес он сможет измерить с их помощью на весах? (При этом не допускается класть какую-либо гирю на ту чашу весов, где кладётся продукт.)
14. Какое из приведённых ниже предложений верно?
Лобар проехала 6 km до дома своей тёти. Спидометр велосипеда показывал, что всю дорогу она ехала со скоростью 18 km/h.
- Лобар потребовалось 20 минут, чтобы добраться до дома своей тёти.
 - Лобар потребовалось 30 минут, чтобы добраться до дома своей тёти.
 - Лобар потратила 3 часа, чтобы добраться до дома своей тёти.
 - Невозможно узнать, сколько времени потребовалось Лобар, чтобы добраться до дома своей тёти.
15. Дилбар отправилась на берег реки, которая находится в 4 km от её дома. Ей потребовалось 9 минут, чтобы добраться до реки. На обратном пути домой она решила пройти по короткому трёхкилометровую маршруту. Домой она пришла по короткому маршруту за 6 минут. С какой средней скоростью Дилбар шла к реке и обратно?
16. Из дома в школу я дохожу за 30 минут. Мой младший брат идёт 40 минут. Если младший брат выйдет раньше меня на 5 минут, за сколько минут я его догоню?
17. Мальчик собрал яблоки и отдал половину всех яблок и половину яблока первому встретившемуся ему другу, второму другу половину оставшихся яблок и половину яблока, а третьему другу половину оставшихся яблок и половину яблока. После этого он сам съел оставшиеся 3 яблока. Сколько яблок сорвал мальчик и сколько яблок дал каждому другу?
18. Дети играли в викторину. За правильный ответ начисляется 2 ореха. 3 ореха будут вычтены за неправильный ответ. После 15 игр 1 мальчик не выиграл и не проиграл. Сколько правильных и сколько неправильных ответов дал этот мальчик?
19. Если из заданного трёхзначного числа вычесть 7, то разность будет делиться на 7. Если мы вычтем 8, разность будет делиться на 8. Если вычесть 9, то разность будет делиться на 9. Найдите заданное число.

20. Если цена всех товаров уменьшится на 20%, на сколько процентов увеличится покупательная способность населения?
21. У 12 человек было 12 тысяч сумов. У каждого мужчины по 2000 сумов, у каждой женщины по 500 сумов, у каждого ребёнка по 250 сумов. Сколько детей было среди этих 12 человек?
22. 55% свежесобранного винограда составляет вода. Влажность изюма 15%. Сколько винограда нужно для приготовления 10 kg изюма?
23. Одно из чисел a , b и c положительное, одно отрицательное и одно равно 0. При этом имеет место равенство $|a| = b^2 (b - c)$. Какие из данных чисел могут быть положительными?
24. Поезд длиной 450 m проезжает по мосту за 45 секунд, мимо семафора — за 15 секунд. Найдите скорость и длину поезда.
25. Пассажиры трамвая вышли на второй остановке, и половина мест в вагоне пустовала. Если после этой остановки количество пассажиров увеличилось на 8% и известно, что в трамвай помещается не более 70 человек, сколько человек вышло на второй остановке?
26. Морская вода содержит 5% соли. Сколько литров пресной воды нужно добавить к 40 литрам морской воды, чтобы количество соли в полученной воде составило 2%?
27. Цена на картофель выросла на 20% из-за непогоды. Вскоре после этого его цена была снижена на 20%. Конечная цена картофеля ниже или выше начальной цены? На сколько процентов?
28. Два ученика отправились одновременно из одного дома в одну и ту же школу. Один из них делает шаг на 20% короче, чем другой, но этот ученик за то же время делает на 20% больше шагов, чем другой. Кто из учеников придёт в школу первым?
29. Стоимость входного билета на стадион – 200 сумов. После снижения стоимости билета количество пассажиров увеличилось на 25%, а выручка увеличилась на 12,5%. Сколько сумов стоил билет после скидки?
30. Автомобиль ехал из города в кишлак со скоростью 50 km/h, а обратно со скоростью 30 km/h. Найдите его среднюю скорость на всём пути.
31. Два грузовика отправились из пункта А в пункт В одновременно. Первый грузовик половину времени, затраченного на весь путь, ехал со скоростью 50 km/h, и со скоростью 40 km/h остальное время. Второй грузовик проехал первую половину пути со скоростью 40 km/h, а вторую половину со скоростью 50 km/h. Какая машина доедет до пункта В первой?

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕРМИНЫ

	Термин	Словарное значение и комментарии
1	Арифметика	Происходит от греческого слова «арифмос», означает «искусство чисел».
2	Алгебра	Это европейское произношение слова «аль-джабр» в произведении аль-Хорезми «Аль-джабр ва аль-мукабала».
3	:	Определение знака деления с помощью двоеточия ввел в науку немецкий учёный Лейбниц в XVI веке.
4	Коэффициент	Происходит от латинского слова «coefficient», значит «помощник». Этот термин был введён Франсуа Виетом в конце XVI века.
5	«Положительно» и «отрицательно»	Али Кушчи использовал его в 1425 году в своём произведении под названием «Хисаб Рисола» («Китобул Мухаммадия»).
6	Натуральный	Происходит от латинского слова «натуральный», означает «настоящий или естественный».
7	Параллельно	Происходит от греческого слова «parallelas», в переводе это означает «бок о бок».
8	Перпендикуляр	Происходит от латинского слова «perpendicularities» и означает «вертикально».
9	+ и -	Термины «плюс» (лат. plus — больше) и «минус» (лат. minus — меньше) были написаны Фибоначчи в 1202 г. Они фигурируют в произведении «Зибер Абаси».
10	Процент	Происходит от латинского слова «percentum», что означает «сотня».
11	Пропорция	Это сочетание латинских слов «pro» и «portia», что в переводе означает «два».
12	Симметрия	Представляет собой сочетание греческих слов «sym» и «metrio».
13	Система	Происходит от греческого слова «systhema» и в переводе означает «состоящий из частей, объединённый в целое».
14	Формула	Происходит от латинского слова «formula» и означает «известный закон».
15	Функция	Происходит от латинского слова «funcilo», что в переводе означает «быть, выполняться». Лейбниц ввёл этот термин в науку в 1673 году.
16	Десятичная дробь	Ввёл Джамшид Коши в своём произведении «Арифметика Калити» («Мифтахул-Хисоб»), написанном в 1427 году.
17	Десятичная дробь	Запись десятичных дробей в их нынешнем виде была введена в науку французским математиком Виетом в XVI веке.
18	()	Скобки были введены в математику в первой половине XVII века.
19	Вертикаль	Происходит от латинского слова «vertucalus» и в переводе с означает «стоя».
20	Градус	Происходит от латинского слова «gradus», означающего «степень» или «этап».

O'quv nashri

ALGEBRA

*Umumiy o'rta ta'lim maktablarining 7-sinfi uchun darslik
(Rus tilida)*

*Редактор Вераника Пак
Художественный редактор Сарвар Фармонов
Технический редактор Акмаль Сулейманов
Художник Бехзод Зуфаров
Дизайнер Алимардон Акилов
Компьютерная верстка Ильхом Болтаев
Корректор Людмила Ким*

Печать разрешена 09.09.2022 г. Формат 60x84 1/8.
Шрифт Times New Roman. Кегль 12. Печать офсетная.
Усл.-печ. л. 22,32. Уч.-изд. л. 14,91.
Тираж 000 000 экз. Заказ № 0000.

Таблица, показывающая состояние арендованного учебника

№	Имя и фамилия ученика	Учебный год	Состояние учебника на начало года	Подпись классного руководителя	Состояние учебника на конец года	Подпись классного руководителя
1.						
2.						
3.						
4.						
5.						
6.						

В связи с сдачей учебника в аренду и возвратом в конце учебного года указанная выше таблица заполняется классными руководителями на основании следующих критериев оценки:

Новый	Состояние учебника при первом использовании.
Хорошее	Обложка целая, не отделена от основной части учебника. Все страницы в наличии, не порваны, на страницах нет записей и помарок.
Удовлетворительное	Обложка помята, слегка испачкана, края стерты, есть отрыв от основного корпуса учебника, но удовлетворительно восстановлен. Вырванные страницы восстановлены, некоторые страницы исчерчены.
Неудовлетворительное	Обложка порвана, на ней начерчено, оторвана от корпуса, либо полностью отсутствует, либо плохо склеена. Страницы порваны, некоторые отсутствуют, исчерчены. Учебник восстановлению не подлежит.