

МАТЕМАТИКА



АЛГЕБРА ВА АСОСҲОИ АНАЛИЗ ГЕОМЕТРИЯ ҚИСМИ II

Китоби дарсӣ барои хонандагони синфҳои 10-и
муассисаҳои таълими умумӣ
Нашри-1.

Вазорати таълими халқи Республикаи Ўзбекистон тасдиқ кардааст

ТОШКАНД
2017

UO'K 51(075.3)

КВК 22.1

М 54

Муаллифони қисми алгебра ва асосҳои анализ:

М.А. Мирзоаҳмедов, Ш.Н.Исмоилов, А.Қ. Амонов.

Муаллифи қисми геометрия:

Б.Қ.Ҳайдаров

Такриздихандаҳо:

Б. Қ. Бешимов—мудири кафедраи геометрия ва топологияи Донишгоҳи миллии Ўзбекистон ба номи Мрзо Улуғбек, доктори улуми физика - математика;

М.Д.Пардаева – чонишини директори Маркази таълими республика.


Д.Е.Давлетов. мудири кафедраи методикаи омӯзиши математикаи – ДДОТ ба номи Низомӣ, номзади улуми физика - математика ;


Ғ.М.Раҳимов – муаллими литсейи назди ТИҚХММИ номзади улуми физика - математика, дотсент;

А.А. Акмалов – Проректори ДБТИХТХ шаҳри Тошканд, номзади улуми педагогика, дотсент.

Ишораҳои дар қисми китоби дарсии "Алгебра ва асосҳои анализ" корфармуда ва талқини онҳо

 – Ҳалли масъала (исботкунӣ) шуруъ мешавад

 – ҳал кардани масъала (исботкунӣ) тамом шуд

 – корҳои назоратӣ ва машқҳои тест (санҷиш)

 – савол ва супоришҳо

 – Маълумоти асосӣ

 – Машқҳои мураккабтар

Аз ҳисоби маблағи Бунёди мақсадноки китоби республика чоп шудааст.

ISBN 978-9943-5056-7-4

© Тамоми ҳуқуқҳо ҳимоя шудааст.

© ҚММ "EXTREMUM PRESS", 2017.

БОБИ III



ФУНКСИЯҲОИ ЭЛЕМЕНТАРӢ ВА МУОДИЛАҲО

47-49

МУНОСИБАТҲО ВА ТАБДИЛДИҲИҲО. ФУНКЦИЯ

Дар чадвали поён миқдори маблағҳое, ки мувофиқи гузашти вақт дар истоғи автомобилҳои аэропорти шаҳри Нью Йорк супоридан лозим аст

Вақт (t)	Нарх
0 – 1 соат	\$5,00
1 – 2 соат	\$9,00
2 – 3 соат	\$11,00
3 – 6 соат	\$13,00
6 – 9 соат	\$18,00
9 – 12 соат	\$22,00
12 – 24 соат	\$28,00

оварда шудааст:

Равшан аст, ки нархи маблағи супоридашаванда ба бардавомии вақт бевосита вобаста аст. Ба ин чадвал нигоҳ карда ба саволи зерин ҷавоб гӯем:

Айнан барои як соат истодани автомашина чӣ қадар пул сарф мешавад?

5 доллари ИМА, 9 доллари ИМА ёки 11 доллари ИМА?

Барои ба вазъиятҳои номувофиқ наафтодан ва барои ба муаммо равшанӣ

Вақт (t)	Нарх
$0 < t \leq 1$ соат	\$5,00
$1 < t \leq 2$ соат	\$9,00
$2 < t \leq 3$ соат	\$11,00
$3 < t \leq 6$ соат	\$13,00
$6 < t \leq 9$ соат	\$18,00
$9 < t \leq 12$ соат	\$22,00
$12 < t \leq 24$ соат	\$28,00

андохтан мо маълумоти дар чадвал бударо ба намуди график меорем.

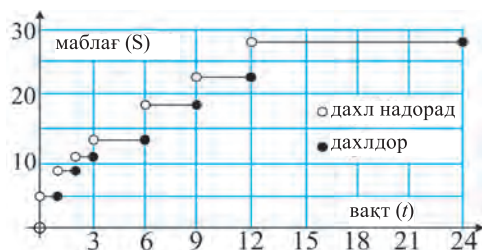
Навишти "2-3 соат" дар чадвал "вақти аз 2 соат зиёд, аммо аз 3 соат зиёд не", яъне интервали $2 < t \leq 3$ гуфта фаҳмида мешавад. Он гоҳ чадвали зеринро ҳосил мекунем:

Дар забони математика чадвали мазкур муносибати байни ду тағйирёбандаи

(вақт ва миқдори маблағи супоридашаванда) мисол шуда метавонад.

Муносибатро ба сифати маҷмӯи ҷуфти бо тартиб гирифташуда маънидод кардан мумкин, масалан, $\{(1, 5), (-2, 3), (4, 3), (1, 6)\}$.

Дар истоғи автомашинаҳо ба вақти t -и интервали $0 < t \leq 24$ нигоҳ карда, тағйирёбии маблағи супоридашаванда ба тарзи зерин тасвир карда мешавад:



Маҷмӯи қимматҳои тағйирёбандаи тири горизонталӣ қабул карда, *соҳаи муайянии муносибат* номида мешавад.

Масалан, маҷмӯи, $\{t|0 < t \leq 24\}$ соҳаи муайянии муносибати байни вақти боло ва миқдори маблағи пардохтшаванда, маҷмӯи $\{-2, 1, 4\}$ бошад, соҳаи муайянии муносибати $\{(1, 5), (-2, 3), (4, 3), (1, 6)\}$ мешавад.

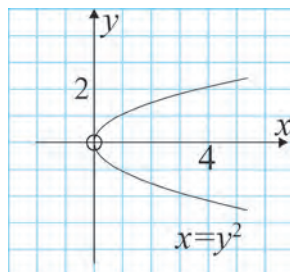
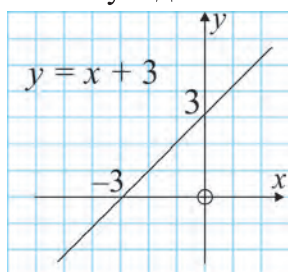
Маҷмӯи қимматҳои тағйирёбандаи тири вертикалӣ қабул карда, маҷмӯи қимматҳои муносибат номида мешавад.

Масалан, маҷмӯи $\{5, 9, 11, 13, 18, 22, 28\}$ муносибати байни *вақт* ва *миқдори* маблағи супоридашаванда, маҷмӯи $\{3, 5, 6\}$ бошад соҳаи қимматҳои муносибати $\{(1, 5), (-2, 3), (4, 3), (1, 6)\}$ мешавад.

Акнун ба муносибат таърифи аниқтар диҳем. Маҷмӯи нуқтаҳои дар ҳамвори координатаҳои Декарт додашуда **муносибат** номида мешавад. Аксар вақт муносибат дар намуди муодилаҳое, ки **тағйирёбандаҳои x, y** иштирок мекунад дода мешавад.

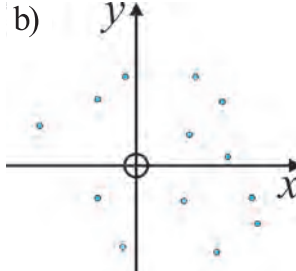
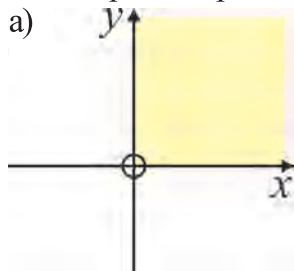
Масалан, ҳар яке аз муодилаҳои $y=x+3$, $x=y^2$ муносибатро муайян мекунад.

Ҳар яке аз ин муодилаҳо дар ҳамвори координатаҳои Декарт маҷмӯи нуқтаҳоро ҳосил мекунад.



Баъзе муносибатҳоро бо ёрии муодила навишта намешавад.

Масалан, маҷмӯи нуқтаҳои шарт $x > 0, y > 0$ -ро қаноаткунонандаи (x, y) (чоряки якуми ҳамвори координати расми- *a*) ёки маҷмӯи нуқтаҳои расми



b -ро бо ёрии муодила навиштан мумкин нест.

Агар дар муносибат ду нуқтаи гуногуни координатаи якумаш баробар мавҷуд набошад, ин муносибат **табдилдихӣ**, ёки **функсия** номида мешавад.

Пас, функсия хели махсуси муносибат будааст.

Ду тарзи санҷидани функсия будани муносибати додашударо меорем.

Тарзи алгебравӣ

Ин тарз агар муносибат бо ёрии муодила дода шуда бошад истифода мешавад. Агар дар вақти ба муодила қимматҳои ихтиёрии x ва y -ро гузоштан, барои ҳар як қиммати x қиммати ягонаи y ҳосил шавад, ин хел муносибат функсия мешавад. Масалан, агар ба муносибати бо ёрии муодилаи $y = 3x - 2$ додашуда қиммати ихтиёрии x -ро гузорем, қиммати ягонаи y ҳосил мешавад. Пас, муносибати бо ёрии ин муодила муайяншуда функсия мешавад.

Лекин муносибати бо ёрии муодилаи $x = y^2$ муайян карда шуда функсия намешавад, чунки, масалан, қиммати $x = 4$ -ро гузорем ду қиммати $y = \pm 2$ ҳосил мешавад.

Тарзи графикӣ

Бигузур муносибат дар системаи координатаҳои Декарт дар намуди маҷмӯъ дода шуда бошад. Агар мо ҳамаи хатҳои рости вертикалии мумкин бударо кашем, адади нуқтаи буриши ихтиёрии ин хатҳои рости бо муносибат аз якто зиёд нашавад, он гоҳ ин муносибат функсия мешавад. Баръакс, агар адади нуқтаҳои буриши қим кадом хати рости вертикалӣ бо муносибати додашуда аз якто зиёд бошад, он гоҳ муносибат функсия намешавад.

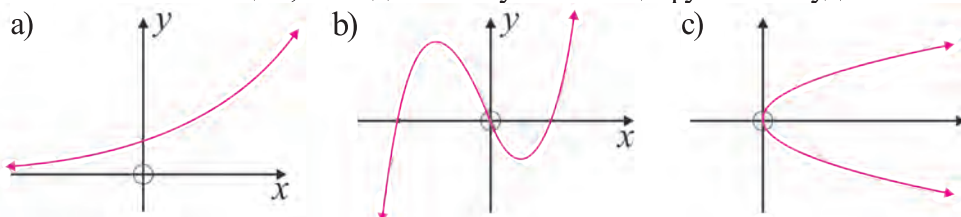
Дар ин ҷо мо, дар поён будаҳоро ба тарзи шартӣ қабул мекунем:

■ Агар дар хат доирачаи хурди ранги сафед дошта қайд карда шуда бошад, $(-\bigcirc-)$, ин хел нуқта ба хат тааллуқ надорад.

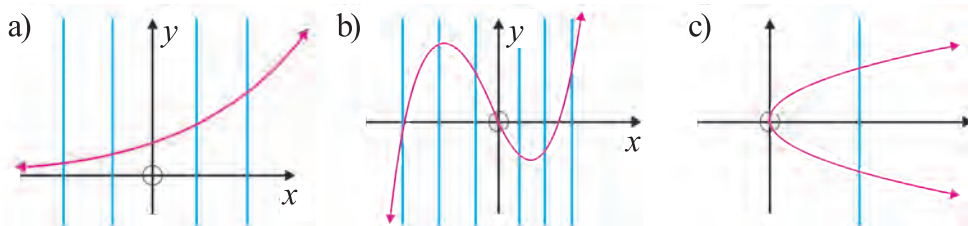
■ Агар дар хат доирачаи хурдакаки сиёҳ қайд шуда бошад, $(-\bullet-)$, ин нуқта ба хат тааллуқ дорад.

■ Хати тирии \longrightarrow (стрелка) дар ҳамон самт онро беохир давом додан мумкин буданаширо мефаҳмонад.

Мисоли 1. Месанҷем, ки кадоме аз муносибатҳо функсия шуда метавонад:



△ Хатҳои рости вертикалиро кашада, ба хулосаи зерин меорем:



Ҳар яке аз муносибатҳои а) ва б) функция шуда метавонанд (чунки хати рости ихтиёрии вертикал бо y фақат дар як нуқта бурида мешавад), муносибати с) бошад функция нест, чунки он бо хати рости вертикалӣ дар ду нуқта бурида мешавад. ▲

Бигузур асбоби ҳисобкунӣ аз рӯи алгоритми зерин кор кунад:

қадами-1. Ягон адад дохил шуда истодааст.

қадами-2. Адади дохилгардида ба 2 зарб шуда истодааст.

қадами-3. Ба натиҷа адади 3 зам шуда истодааст.

Масалан, агар ба асбоб адади 4-ро дохил кунанд, дар натиҷа адади $4 \cdot 2 + 3 = 11$ ҳосил мешавад.

Айнан, агар ба асбоб адади (-4) дохил карда шавад дар натиҷа адади $2 \cdot (-4) + 3 = -5$ ҳосил мешавад.

Дар ҳолати умумӣ агар ба асбоб адади x дохил гардад дар натиҷа адади ягонаи $2x + 3$ ҳосил мешавад.

Дида истодаем ки, агар ба асбоб ҳар гуна адади x дохил кунем қиммати ягонаи адади $2x + 3$ ҳосил мешавад.

Пас, алгоритме, ки асбоб кор мекунад функцияро муайян мекунад.

Ин ҳолат ба монанди $f: x \mapsto 2x + 3$, $f(x) = 2x + 3$ ёки $y = 2x + 3$ навишта мешавад.

Агар $f(x) = 2x + 3$ бошад, қиммати ба адади -4 мувофиқи он ба монанди $f(-4) = 2(-4) + 3 = -5$ ёфта мешавад.

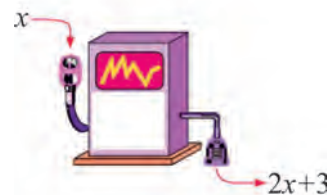
Дар ҳолати умумӣ, қиммати функцияи, $f(x)$ - дар x -и додашуда меғӯянд ва ин муносибат ба монанди $y = f(x)$ навишта мешавад.

Мисоли 2. Агар $f: x \mapsto 2x^2 - 3x$ бошад, қимматҳои: а) $f(5)$; б) $f(-4)$ -ро ёбед.

▲ Дар муносибати $f(x) = 2x^2 - 3x$ ададҳои $x = 5$ ва $x = -4$ ро гузошта қимматҳои мувофиқро меёбем: а) $f(5) = 2 \cdot 5^2 - 3 \cdot 5 = 2 \cdot 25 - 15 = 35$; б) $f(-4) = 2 \cdot (-4)^2 - 3 \cdot (-4) = 2 \cdot 16 + 12 = 44$. ▲

Мисоли 3. Агар $f(x) = 5 - x - x^2$ бошад, қимматҳои: а) $f(-x)$; б) $f(x+2)$ -ро ёбед ва натиҷаҳоро содда гардонед.

▲ Ба функцияи $f(x) = 5 - x - x^2$ ба ҷойи x қимматҳои $-x$ ва $x+2$ ро гузошта, қимматҳои ба онҳо мувофиқро меёбем:



a) $f(-x) = 5 - (-x) - (-x)^2 = 5 + x - x^2$;

b) $f(x+2) = 5 - (x+2) - (x+2)^2 = 5 - x - 2 - (x^2 + 4x + 4) = 3 - x - x^2 - 4x - 4 = -x^2 - 5x - 1$. ▲

Савол ва супоришҳо



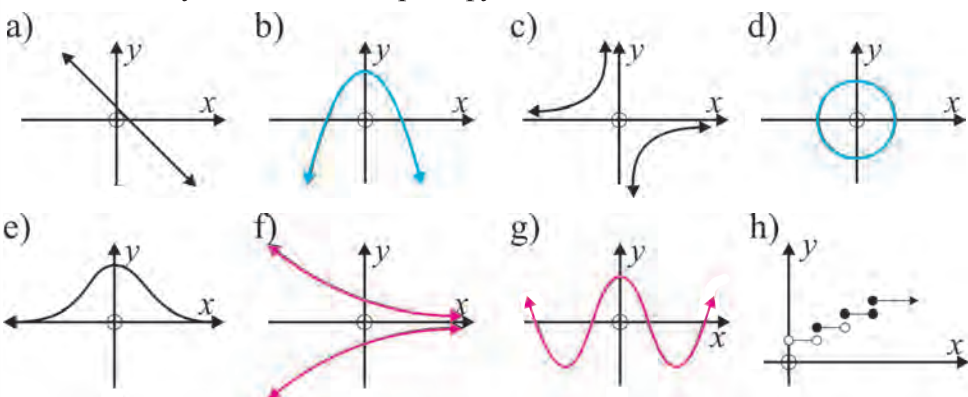
1. Ба муносибат мисолҳо биёред.
2. Ба инъикос, ёки функция таъриф диҳед.
3. Соҳаи муайянии функцияро фаҳмонед.
4. Соҳаи қимматҳои функцияро фаҳмонед.

Машқҳо

73. Кадоме аз муносибатҳои зерин функция мешавад?

- | | |
|---|--|
| a) $\{(1, 3), (2, 3), (3, 5), (4, 6)\}$; | d) $\{(7, 6), (5, 6), (3, 6), (-4, 6)\}$; |
| b) $\{(1, 3), (3, 2), (1, 7), (-1, 4)\}$; | e) $\{(0, 0), (1, 0), (3, 0), (5, 0)\}$; |
| c) $\{(2, -1), (2, 0), (2, 3), (2, 11)\}$; | f) $\{(0, 0), (0, -2), (0, 2), (0, 4)\}$? |

74. Кадоме аз муносибатҳои зерин функция мешавад?



75. Ҳар гуна хати рост ки дар ҳамвории координатаҳои Декарт ҷой гирифтааст, функция мешавад? Ҷавобатонро асоснок кунед.

76. Оё муносибате, ки бо ёрии муодилаи $x^2 + y^2 = 9$ дода шудааст функция мешавад?

77. Агар $f: x \mapsto 3x + 2$ бошад, қимматҳои зеринро ёбед.

- A) $f(0)$; B) $f(2)$; C) $f(-1)$; D) $f(-5)$; E) $f\left(-\frac{1}{3}\right)$.

78. Агар $f: x \mapsto 3x - x^2 + 2$ бошад, қимматҳои зеринро ёбед.

- A) $f(0)$; B) $f(3)$; C) $f(-3)$; D) $f(-7)$; E) $f\left(\frac{2}{3}\right)$.

79. Агар $g: x \mapsto x - \frac{4}{x}$ бошад, қимматҳои зеринро ёбед:

- A) $g(1)$; B) $g(4)$; C) $g(-1)$; D) $g(-4)$; E) $g\left(-\frac{1}{2}\right)$.

80. Агар $f(x)=7-3x$ бошад, қимматҳои зеринро ёбед ва натиҷаро содда гардонед.
 а) $f(a)$; | б) $f(-a)$; | в) $f(a+3)$; | д) $f(b-1)$; | е) $f(x+2)$; | ф) $f(x+h)$.
81. Агар $F(x)=2x^2+3x-1$ бошад, қимматҳои зеринро ёбед ва натиҷаро содда гардонед.
 а) $F(x+4)$; | б) $F(2-x)$; | в) $F(-x)$; | д) $F(x^2)$; | е) $F(x^2-1)$; | ф) $F(x+h)$.
82. Барои функсияи: $G(x) = \frac{2x+3}{x-4}$
 а) I $G(2)$ II $G(0)$ III $G\left(-\frac{1}{2}\right)$ -хоро ёбед;
 б) Барои кадом x -ҳо $G(x)$ маънуд нест?
 в) $G(x+2)$ ро ёбед ва содда гардонед;
 д) Дар кадом қиммати x қиммати $G(x)=-3$ мешавад ёбед.
83. Бигузур функсия бо ҳарфи f дода шуда бошад. Дар байни маъноҳои ишораҳои f ва $f(x)$ чӣ гуна фарқ ҳаст?
84. Баъди t соли қорӣ нархи асбоби нусхабардор аз рӯи қонунияти $V(t)=9650-860t$ тағйир меёбад.
 а) $V(4)$ -ро ёбед ва маънои онро шарҳ диҳед;
 б) Ҳангоми $V(t)=5780$ будан t ро ёбед. Ҳолатро фаҳмонед;
 в) Асбоб бо кадом нарх харид шудааст?
85. Графики се функсияи гуногунро кашед, ки дар як ҳамвори координатӣ $f(2)=1, f(5)=3$ -ро буррад.
86. Функсияи хаттии $f(x)=ax+b$ ро ёбед, ки барои он $f(2)=1$ ва $f(-3)=11$ бошад.
87. Агар $f(x) = ax + \frac{b}{x}$, $f(1)=1$, $f(2)=5$ бошад, a, b -хоро ёбед.
88. Функсияи квадратии $T(x)=ax^2+bx+c$ ро ёбед, ки барои он $T(0)=-4$, $T(1)=-2$, $T(2)=6$ бошад.
89. Агар $f(x)=2^x$ бошад, баробарии, $f(a)f(b) = f(a+b)$ -ро исбот кунед.

50-51

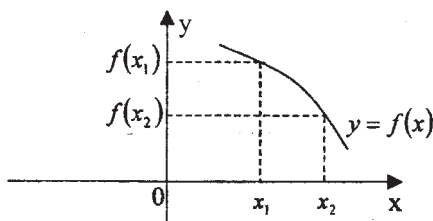
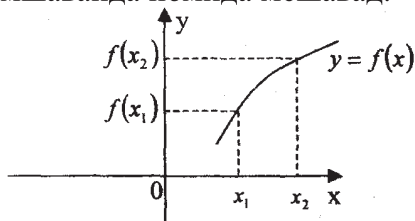
МОНОТОНИИ ФУНКЦИЯҲОИ ЭЛЕМЕНТАРӢ, МАФҲУМ ДАР БОРАИ ҚИММАТҲОИ КАЛОНТАРИН ВА ХУРДТАРИН

Монотонии функсия

Агар барои ҳамаи $x_1, x_2 \in I$ -ҳо ки $x_1 < x_2$ -ро қаноат мекунонад нобаробарии $f(x_1) < f(x_2)$ чой дошта бошад, функсияи $y=f(x)$ дар интервали I афзуншаванда номида мешавад.

Агар барои ҳамаи $x_1, x_2 \in I$ -ҳо ки $x_1 < x_2$ -ро қаноат мекунонад нобаробарии $f(x_2) > f(x_1)$ чой дошта бошад, функсияи $y=f(x)$ дар интервали I

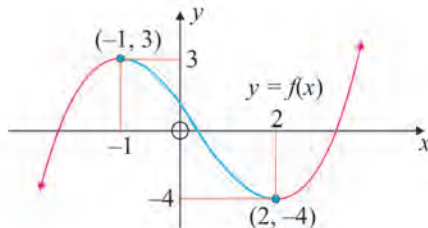
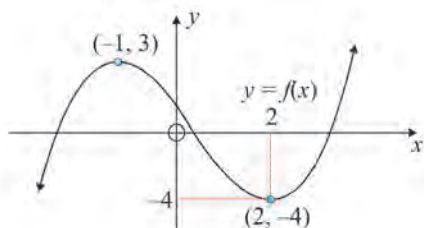
камшаванда номида мешавад.



Агар функция афзуншаванда бошад, ҳангоми қад-қади график аз чап ба рост ҳаракат қардан, ординатаҳо меафзояд; агар функция камшаванда бошад, ординатаҳо кам мешавад.



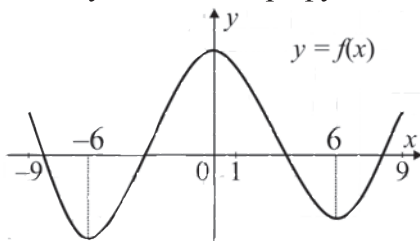
Мисоли 1. Интервалҳои афзоиш ва камшавии функцияҳо ро ёбед:



▲ Агар функция афзуншаванда бошад, ҳангоми қад-қади график аз чап ба рост ҳаракат қардан, ординатаҳо меафзояд (дар график бо ранги сурх чудо қарда шудааст). Пас функция дар интервали $x \leq -1$ ва $x \geq 2$ меафзояд. Ҷавобро дар намуди $(-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$ ҳам навиштан мумкин аст. Айнан ҳамин тавр, агар функция камшаванда бошад, ҳангоми қад-қади график аз чап ба рост ҳаракат қардан, ординатаҳо кам мешавад (дар график бо ранги сабз чудо қарда шудааст). Пас функция дар интервали $-1 \leq x \leq 2$ кам мешавад. ▲

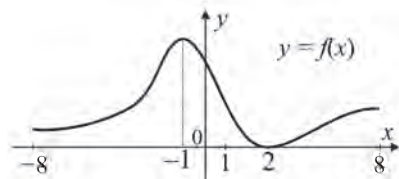
Мисоли 2. Функция дар қадом интервалҳо меафзояд?

▲ Ин функция дар интервали $[-9; 9]$ дода шудааст. Агар функция афзуншаванда бошад, ҳангоми қад-қади график аз чап ба рост ҳаракат қардан, ординатаҳо меафзояд. Пас функция дар интервали $[-6; 0]$ ва $[6; 9]$ меафзояд. Ҷавобро дар намуди $[-6; 0] \cup [6; 9]$ ҳам навиштан мумкин аст. ▲



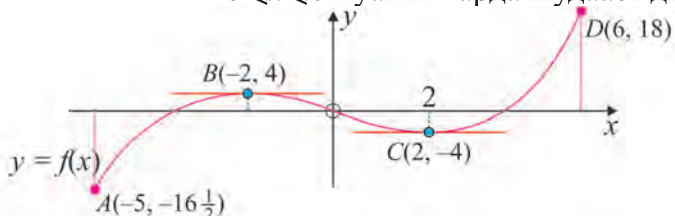
Мисоли 3. Функция дар кадом интервал кам мешавад?

△ Агар функция камшаванда бошад, хангоми қад-қади график аз чап ба рост ҳаракат кардан, ординатаҳо кам мешавад. Пас функция дар интервали $[-1; 2]$ кам мешавад. ▲




Дар бораи қимматҳои калонтарин ва хурдтарини функция маълумот медиҳем.


Графики функцияро ки дар интервали $-5 \leq x \leq 6$ муайян карда шудааст дида мебароем.



Ординатаи нуқтаи A аз ординатаҳои нуқтаҳои дигари хурд буданаш ин нуқтаро нуқтаи **минимуми глобалӣ** меноманд. Қиммати ба он мувофиқи функция **қиммати хурдтарини** функция номида мешавад. Дар мисоли мо қиммати хурдтарини функция ба $-16,5$ баробар аст.

Монанди ин, азбаски ординатаи нуқтаи D аз ординатаҳои нуқтаҳои дигари калон аст ин нуқтаро нуқтаи D **максимуми глобалӣ** меноманд. Қиммати ба он мувофиқи функция **қиммати калонтарини** функция номида мешавад. Дар мисоли мо қиммати калонтарини функция ба 18 баробар аст.

Акнун ба нуқтаи B эътибор диҳем. Маҷмӯи нуқтаҳои график, ки ба B наздик аст, ба шакли  соҳиб аст. Нуқтаи ба ин хосият соҳиббуда нуқтаи **максимуми локалӣ** номида мешавад

Айнан ҳамин тавр, маҷмӯи нуқтаҳои график, ки ба нуқтаи C наздик аст, ба шакли  соҳиб аст.



Нуқтаи ба ин хосият соҳиб буда, нуқтаи **минимуми локалӣ** номида мешавад.

Ба функцияҳои мисол мебиёрем, ки онҳо фақат минимуми локалӣ ва максимуми локалӣ доранд:

Савол ва супоришҳо



1. Дар интервал ба функцияи афзуншаванда таръиф диҳед;
2. Дар интервал ба функцияи камшаванда таръиф диҳед;



3. Ба нақша нигоҳ карда афзуншавии функцияро чӣ тавр муайян мекунад?

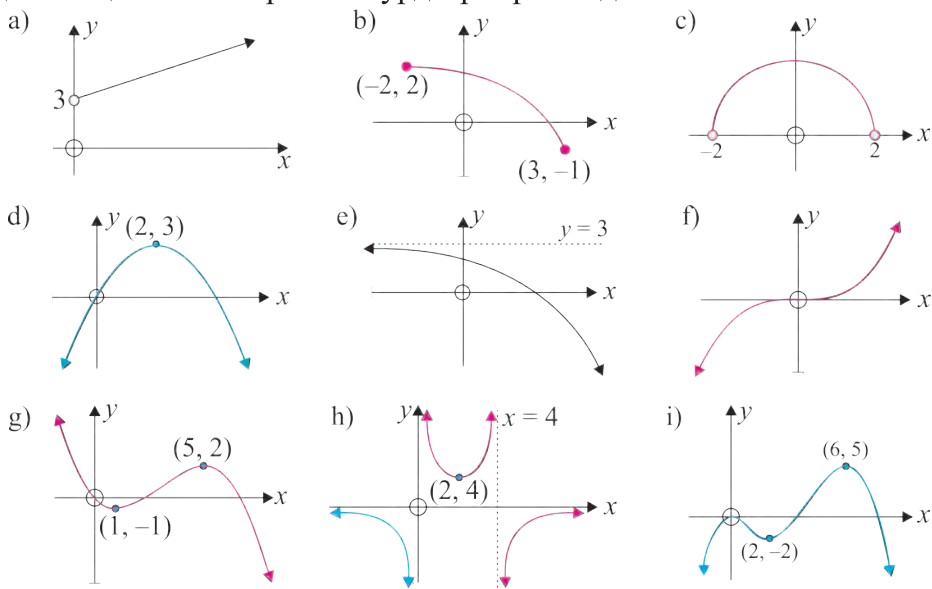
4. Ба нақша нигоҳ карда, камшавии функцияро чӣ тавр муайян мекунад?

Машқҳо

90. Барои функция интервалҳои зеринро муайян кунед :

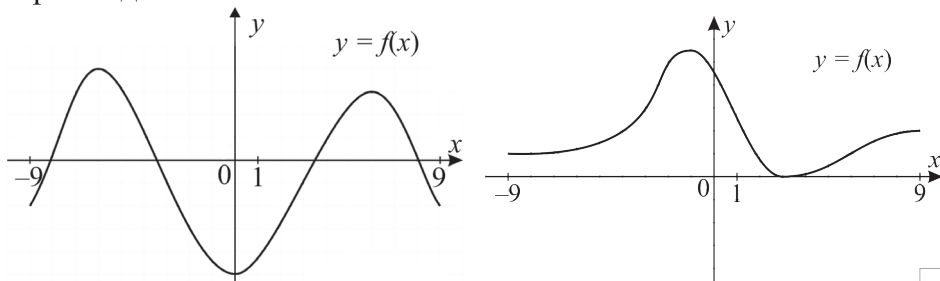
- 1) афзуншавӣ; 2) камшавӣ .

Агар мумкин бошад, барои онҳо максимум ва минимуми локалӣ, қимматҳои калонтарин ва хурдтаринро ёбед



91. Функцияи дар интервали $[-9; 9]$ додашуда дар кадом интервал меафзояд? Дар кадом интервал кам мешавад?

Максимум ва минимуми локалӣ, қимматҳои калонтарин ва хурдтарини онро ёбед



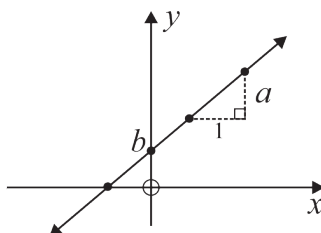
52-54

МОДЕЛҲОИ ХАТТӢ ВА КВАДРАТӢ

Функсияи хаттӣ

Функсияи намуди $f(x)=ax+b$ дошта, хаттӣ номида мешавад, дар ин ҷо x, y – тағйирёбандаҳо, a, b – ададҳои додашуда, $a \neq 0$.

Графики функсияи хаттӣ дар ҳамвории координати хати рост буда, дар ин ҷо адади a коэффитсиенти кунҷӣ номида мешавад.



Дар поён мо татбиқи функсияи хаттиро мебиёрем.

Мисоли 1. Нархи ба иҷора гирифтани корти теннис бо формулаи $C(h)=5h+8$ (доллари ИМА) муайян карда шудааст, дар ин ҷо h – вақти иҷора (дар соатҳо). Барои 4 соат ва 10 соат чӣ қадар маблағ сарф мешавад?

△ Аз формулаи $C(h)=5h+8$ истифода карда, $C(4)=5 \cdot 4+8=20+8=28$ ва $C(10)=5 \cdot 10+8=50+8=58$ буданаширо меёбем. Пас, барои 4 соат 28 доллари ИМА, барои 10 соат бошад 58 доллари ИМА сарф мешавад. ▲

Мисоли 2. Дар шаҳри Нью Йорк таксӣ барои истода гирифтани мусофир 3 доллару 30 сенти ИМА, барои ҳар як километр бошад 1 доллару 75 сенти ИМА мегирад.

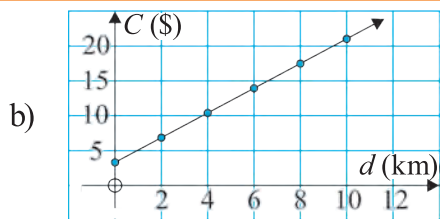
Ҷадвалро ба дафтарадон кӯчонед ва онро пурра кунед:

d – масофа (км)	0	2	4	6	8	10
C – маблағ (\$)						

- а) Алоқамандии байни C ва d ро дар намуди график ифода кунед;
- б) Формулаи функсияи дар намуди алгебравии $C(d)$ додашударо нависед;
- д) Барои 9, 4 км роҳ рафтани чӣ қадар маблағ сарф мешавад?

△ а) Ба 3,3 доллари ИМА $2 \cdot 1,75+3,30$ -ро пайдарпай зам карда катакхоро пур мекунем:

d – масофа (км)	0	2	4	6	8	10
C – маблағ (\$)	3,30	6,80	10,30	13,80	17,30	20,80



Ин-функсияи хаттӣ.

с) коэффитсиенти кунҷиро меёбем:

$$a = \frac{20,80 - 17,30}{10 - 8} = 1,75.$$

Пас, $C(d)=1,75d+3,3$.

д) $C(9,4)=1,75 \cdot 9,4+3,3=19,75$.

Пас, 19,75 доллари ИМА сарф мешавад. ▲

Функцияи квадратӣ

Функцияи намуди $y=ax^2+bx+c$ дошта функцияи квадратӣ номида мешавад, дар ин ҷо x, y – тағйирёбандаҳо, a, b, c – ададҳои додашуда, $a \neq 0$.

Қимматҳои функцияи $y=2x^2+4x-5$ –ро дар нуқтаҳои а) $x=0$; б) $x=3$ меёбем.

а) $x=0$ бошад. Дар ин ҳолат $y=2 \cdot 0^2+4 \cdot 0-5=0+0-5=-5$.

б) $x=3$ бошад. Дар ин ҳолат $y=2 \cdot 3^2+4 \cdot 3-5=18+12-5=25$.

Мисоли 3. Ҳангоми партофтани санг баъди t сония баландии \bar{y} нисбат ба замин бо ёрии функцияи $h(t)=-5t^2+30t+2$ аниқ карда мешавад.

а) Ҳангоми $t=3$ будан санг аз замин дар кадом баландӣ мешавад?

б) Санг аз кадом баландӣ истода боло партофта шуд?

с) Дар кадом вақт баландии санг 27 метр мешавад?

△ а) $h(3)=-5 \cdot 3^2+30 \cdot 3+2=-45+90+2=47$. Пас, санги партофташуда баъди $t=3$ сония дар баландии 47 метр мешавад.

б) Азбаски санг ҳангоми $t=0$ партофта шуданаш, $h(0)=-5 \cdot 0^2+30 \cdot 0+2=2$.

Пас, санг аз баландии 2 метр боло партофта шудааст.

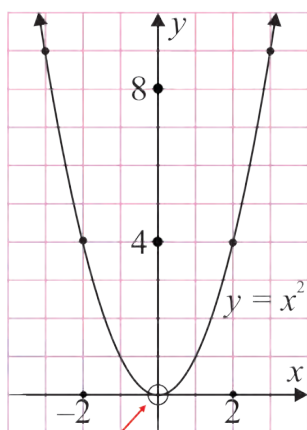
с) Агар санг аз замин дар баландии 27 метр бошад, $h(t)=27$ мешавад, яъне $-5t^2+30t+2=27$. Ин муодиларо ҳал мекунем: $-5t^2+30t-25=0$, $t^2-6t+5=0$, $t_1=1$, $t_2=5$. Пас, санг дар баландии 27 метр баъди 1 сония (ҳангоми ба боло бардоштан) ва баъди 5 сония (ба поён фуromaда) мешавад. ▲

Графики функцияи квадратӣ

Функцияи $f(x)=x^2$ –ро дида мебароем. Дар баъзе нуқтаҳо ҷадвали қимматҳои \bar{y} ро месозем:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9

Ин нуқтаҳои дар ҷадвал будаи (x, y) –ро дар ҳамвории координатӣ сохта, онҳоро бо хати ҳамвор пайваस्त карда, ин графикро ҳосил мекунем:



Шакли ҳосилшуда **парабола** номида мешавад. Мебинем, ки шохаҳои парабола ба боло равона буда, он хати қачи нисбат ба тири ордината симметрӣ мебошад.

Нуқтаи $(0, 0)$ қуллаи параболаи $y=x^2$ номида мешавад.

Мисоли 4. Графики функцияи квадратии $y=x^2-2x-5$ –ро созед

△ Як нуқтаи функция, мисол қимати нуқтаи $x=-3$ –ро меёбем: $f(-3)=(-3)^2-2(-3)-5=9+6-5=10$.

Қемати дар чандин нуқта будаи функцияро ёфта,

чадвал месозем:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	10	3	-2	-5	-6	-5	-2

Нуктаҳои (x, y) -ро дар ҳамвории координата сохта, онҳоро бо хати мувофиқ пайваста, графики функцияи додашударо ҳосил мекунем:

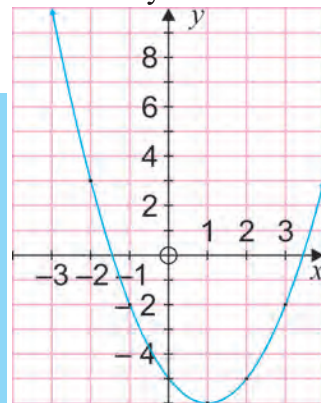
Графики ҳосилшуда ҳам дар шакли парабола аст. Сохтори он ҳам ба боло равно шудааст. ▲

Нуктаи буриши параболаи ихтиёрии $y=ax^2+bx+c$ –ро бо тири ординатаҳои Oy меёбем:

$$x=0, y=a\cdot 0^2+b\cdot 0+c=0+0+c=c.$$

Пас, парабола бо тири ординатаҳо дар нуктаи $(0, c)$ бурида мешавад.

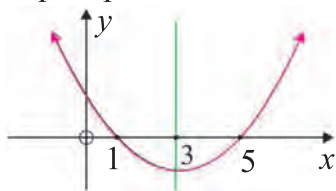
Барои ёфтани нуктаи буриши параболаи $y=ax^2+bx+c$ бо тири абсиссаҳо ёфтани ҳалли муодилаи квадратии $ax^2+bx+c=0$ кифоя аст.



Масалан, нуктаҳои буриши параболаи $y=x^2-2x-15$ –ро бо тири абсиссаҳо меёбем. $x^2-2x-15=0$ гуфта, ин муодилаи квадратиро ҳал мекунем. Ҳалли он $x=-3$ ва $x=5$ мешавад. Пас, параболаи $y=x^2-2x-15$ бо тири абсиссаҳо дар нуктаҳои $(-3, 0)$, $(5, 0)$ бурида мешавад.

Барои параболаи $y=ax^2+bx+c$ хати рости вертикалии намуди $x=h$ тири симметрияи он мешавад.

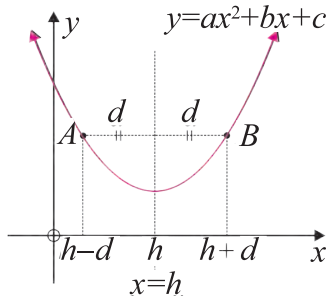
Агар параболаи $y=ax^2+bx+c$ бо тири абсиссаҳо бурида шавад, адади h ба миёнаи арифметикии абсиссаҳои нуктаҳои буриши парабола бо тири Ox баробар мешавад.



Мисоли 5. Тири симметрияи параболаи дар расм бударо ёбед.

▲ Агар парабола бо тири абсиссаҳо дар нуктаҳои $(1, 0)$ ва $(5, 0)$ бурида шавад, $x = \frac{5+1}{2} = 3$ – тири симметрия мешавад. ▲

Агар параболаи $y=ax^2+bx+c$ бо тири абсиссаҳо бурида нашавад, адади h –ро ба тарзи дигар ҳам ёфтан мумкин аст.





Дида мешавад ки нуктаҳои A, B –и абсиссаҳо яшон $h-d$ ва $h+d$ буда, ба ординатаҳои якхела соҳиб аст, яъне $f(h-d)=f(h+d)$, пас нуктаҳои A ва B нуктаҳои нисбат ба тири $x=h$ симметрӣ мебошанд.

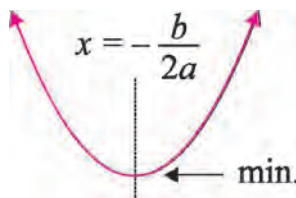
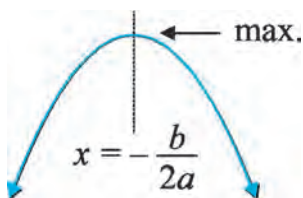
Аз ин шарт истифода бурда дар баробарии поён

h –ро меёбем:

$a(h-d)^2+b(h-d)+c=a(h+d)^2+b(h+d)+c$ ёки $a(h^2-2hd+d^2)+bh-bd=a(h^2-2hd+d^2)+bh+bd$, ёки $-4ahd=2bd$, Пас, тири симметрия $h=\frac{-b}{2a}$ будааст.

Хулоса. Тири симметрияи параболаи $y=ax^2+bx+c$ дар намуди $x=\frac{-b}{2a}$ мешавад. Нуқтаи парабола, ки худ ба худ симметрӣ аст қуллаи парабола номида мешавад. Координатаҳои қуллаи парабола $x=\frac{-b}{2a}$, $y=y(\frac{-b}{2a})$. Тири парабола аз нуқтаи $(-\frac{b}{2a}, 0)$ ба тири Oy параллел шуда мегузарад. Азбаски қуллаи парабола мутааллиқи тири симметрӣ аст, ба абсиссаи он баробар аст.

Аён аст, ки $a < 0$ бошад шакли прабола  барин мешавад ва нўги он $y=a x^2+bx+c$ нуқтаи максимуми функцияи квадратӣ $a > 0$ бошад шакли прабола  барин бошад, қуллаи он минимуми функцияи квадратӣ мешавад.



Мисоли 6. Тири симетрии параболаро ёбед: $y=3x^2+4x-5$

$\triangle y=3x^2+4x-5$ барои $a=3$, $b=4$.

Пас, $x=\frac{-b}{2a}=\frac{-4}{2 \cdot 3}=-\frac{2}{3}$, яъне $x=-\frac{2}{3}$ – тири симетрӣ. \blacktriangle

Мисоли 7. Қуллаи параболаро ёбед: $f(x)=x^2+6x+4$

$\triangle a=1$, $b=6$. $x=\frac{-b}{2a}=\frac{-6}{2 \cdot 1}=-3$.

Пас, абсиссаи қуллаи парабола $x=-3$, ординатааш бошад:

$$y=f(-3)=(-3)^2+6(-3)+4=9-18+4=-5.$$

Бинобар ин, қуллаи парабола ба координатаҳои $(-3, -5)$ соҳиб аст. \blacktriangle

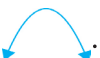
Мисоли 8. Варзишгар тўбро ба боло партофт, баъди вақти t сония баландии тўб $H(t)=30t-5t^2$ метр мешавад, $t \geq 0$.

а) ба нуқтаи баландтарин тўб дар чанд сония мерасад?

б) нуқтаи баландтарин аз замин дар кадом баландӣ мешавад?

с) тўб баъди чанд сония ба замин меафтад?

\triangle а) барои $H(t)=30t-5t^2$, $a < 0$, $a=-5$. Бинобарин ин парабола дар шакли зерин

мешавад:  $t=\frac{-b}{2a}=\frac{-30}{2 \cdot (-5)}=3$ сония ба максимум мерасад.

Яъне тўб ба нуқтаи аз ҳама баландтарин баъди 3 сония бардошта мешавад.

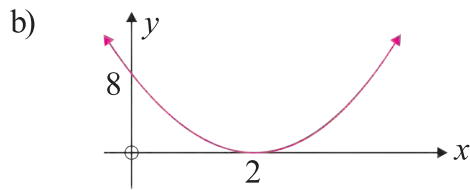
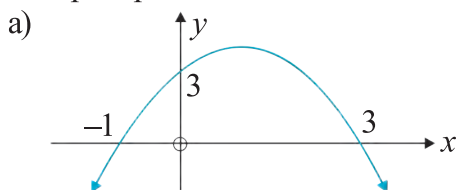
б) баландии максималиро меёбем: $H(3)=30 \cdot 3 - 5 \cdot 3^2 = 90 - 45 = 45$, яъне нуқтаи баландтарин аз замин дар баландии 45 метр мешавад.

с) $H(t)=0$ бошад, тўб ба замин меафтад. Ин муодиларо ҳал мекунем $30t - 5t^2 = 0$, $5t^2 - 30t = 0$, $5t(t-6) = 0$. Аз ин ҷо $t_1 = 0$ ё $t_2 = 6$.

Пас, баъди 6 сония тўб дар замин мешавад. ▲

Дар поён мо ба шакли парабола нигоҳ карда, мисолҳои ёфтани формулаи функцияи квадратиро мебинем.

Мисоли 9. Ба параболаи додашуда нигоҳ карда, формулаи функцияи квадратиро нависед:

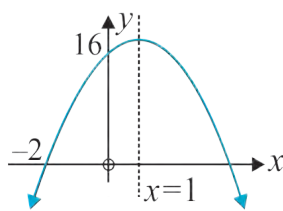


▲ а) шохаҳои парабола ба поён нигарон аст, он бо тири абсиссаҳо дар нуқтаҳои -1 ва 3 бурида мешавад. Бинобар ин дар $y = a(x+1)(x-3)$, $a < 0$. $x=0$ аз шarti $y=3$, $a = -1$ -ро меёбем.

Пас, функцияи квадратӣ бо формулаи $y = -(x+1)(x-3) = -x^2 + 2x + 3$ ифода карда мешавад.

б) шохаҳои парабола ба боло нигарон аст, он ба тири абсиссаҳо дар нуқтаи $x=2$ расанда мешавад. Бинобар ин дар $y = a(x-2)^2$, $a > 0$. $x=0$ аз шarti $y=8$, $a=2$ -ро меёбем.

Пас, функцияи квадратӣ бо формулаи $y = 2(x-2)^2$ дода мешавад. ▲



Мисоли 10. Ба параболаи додашуда нигоҳ карда, формулаи функцияи квадратиро нависед.

▲ Азбаски $x=1$ -тири симметрия аст, бо тири абсисса нуқтаи буриши дуҷум $x=4$ мешавад. Пас, $y = a(x+2)(x-4)$. Аз ин ҷо $x=0$, $y=16$. Бинобар ин $16 = a(0+2)(0-4)$. Аз ин ҷо $a = -2$ ёки $y = -2(x+2) \cdot (x-4) = -2x^2 + 4x + 16$. ▲

Савол ва супоришҳо.



1. Функцияи хаттӣ чист?
2. Коэффитсиенти кунҷии функцияи хаттӣ чист?
3. Функцияи квадратӣ чист?
4. Қуллаи функцияи квадратӣ чӣ хел ёфта мешавад?
5. Кай функцияи квадратӣ ба максимум соҳиб мешавад?
6. Кай функцияи квадратӣ ба минимум соҳиб мешавад?

Машқҳо

92. Дар натиҷаи кӯҳнашавӣ нархи автомашина баъди t сол аз рӯйи конунияи $V(t)=25000-3000t$ евро тағйир меёбад.

- а) қиммати $V(0)$ ро ёбед. Маънои ин қимматро фаҳмонед;
 б) қиммати $V(3)$ ро ёбед. Маънои ин қимматро фаҳмонед;
 с) ба қиммати $V(t)=10000$ баъди чанд сол ноил мешавад?

93. Дар ИМА даъват кардани устои барқ \$60 ва \bar{y} барои ҳар як соати хизмат \$45 мегирад.

- а) $t=0, 1, 2, 3, 4, 5$ будан чадвали мувофиқро созед. Ҳаққи хизмат C ба вақти t чӣ хел алоқаманд буданаширо ба тарзи графикӣ ифода кунед.
 б) формулаи функцияи $C(t)$ (намуди алгебравӣ)—ро нависед.
 с) барои $6\frac{1}{2}$ соат чӣ қадар маблағ пардохт мешавад?

94. Систерна бо оби 265 литр пур карда шудааст. Аз он дар ҳар як дақиқа 11 литр об гирифта шуда истодааст.

- а) чадвале, ки ҳангоми $t=0, 1, 2, 3, 4, 5$ шудан ҳаҷми V -и оби чорӣ шуда истода ба вақти t (дақиқа) чӣ хел алоқаманд буданаширо ифода мекунад, созед.
 б) алоқамандии $V(t)$ —ро дар намуди графикӣ ифода кунед;
 в) формулаи функцияи (намуди алгебравии) $V(t)$ —ро нависед.
 с) баъди 15 дақиқа дар систерна чӣ қадар об менамояд?
 д) систерна баъди чанд вақт холӣ мешавад?

95. Оё дар поён будаҳо функцияи квадратӣ мешаванд:

- а) $y=2x^2-4x+10$; в) $y=-2x^2$; е) $3y+2x^2-7=0$;
 б) $y=15x-8$; д) $y=\frac{1}{3}x^2+6$; ф) $y=15x^3+2x-16$?

96. Оё ҷуфти (x, y) -и бо функцияи квадрати $y=ax^2+bx+c$ ифодагардида дар муносибат мешавад.

- а) $f(x)=6x^2-10$, $(0, 4)$; д) $y=-7x^2+9x+11$, $(-1, -6)$;
 б) $y=2x^2-5x-3$, $(4, 9)$; е) $f(x)=3x^2-11x+20$, $(2, -10)$;
 в) $y=-4x^2+6x$, $(-\frac{1}{2}, -4)$; ф) $f(x)=-3x^2+x+6$, $(\frac{1}{3}, 4)$?

97. Барои функцияи квадрати $y=ax^2+bx+c$ ба қиммати додашудаи y қиммати мувофиқи x —ро ёбед.

- а) $y=x^2+6x+10$, $y=1$; в) $y=x^2-5x+1$, $y=-3$;
 б) $y=x^2+5x+8$, $y=2$; д) $y=3x^2$, $y=-3$.

98. Чисми моддӣ бо суръати 80 м/с ба боло партофта шудааст. Баландии он нисбат ба замин дар t сония бо ёрии функцияи $h(t)=80t-5t^2$ муайян мешавад.

- а) баъди 1 сония, 3 сония, 4 сония баландии чисмро ёбед;
 б) дар кадом вақт баландии чисм 140 метр мешавад? 0 метр чӣ?

Ба ҷавобҳо ҳолатҳои мувофиқро фаҳмонед.

99. Даромади тадбиркори истехсолкунандаи маҳсулот аз рӯйи формулаи зерин ҳисоб карда мешавад:

$$P(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 36x - 40 \text{ (ҳазор сӯм), дар ин ҷо } x \text{ — адади маҳсулот.}$$

а) тадбиркор ҳангоми истехсоли 0 та маҳсулот, 20 та маҳсулот ба чӣ қадар даромад соҳиб мешавад?

б) тадбиркор барои гирифтани 270 ҳазор сӯм даромад чандто маҳсулот истехсол мекунад?

100. Қимматҳои ба $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ мувофиқи функцияҳоро ёбед. Натиҷаҳоро дар намуди ҷадвал диҳед ва графикҳоро созед.

- | | | |
|-------------------------|-------------------------------|-------------------------|
| а) $y = x^2 + 2x - 2$; | д) $f(x) = -x^2 + x + 2$; | г) $y = x^2 - 5x + 6$; |
| б) $y = x^2 - 3$; | е) $y = x^2 - 4x + 4$; | ҳ) $y = x^2 + x + 1$; |
| с) $y = x^2 - 2x$; | ф) $f(x) = -2x^2 + 3x + 10$; | и) $y = -x^2 + x - 1$. |

101. Ин графикҳо дар кадом шакл мешаванд?

Нуктаи бурриши тирӣ ординатаҳои параболоҳоро ёбед.

- | | | |
|--------------------------|------------------------------|------------------------------|
| а) $y = x^2 + 2x + 3$; | д) $f(x) = 3x^2 - 10x + 1$; | г) $y = 8 - x - 2x^2$; |
| б) $y = 2x^2 + 5x - 1$; | е) $y = 3x^2 + 5$; | ҳ) $f(x) = 2x^2 - x^2 - 5$; |
| с) $y = -x^2 - 3x - 4$; | ф) $y = 4x^2 - x$; | и) $y = 6x^2 + 2 - 5x$. |

102. Графикҳои функцияҳо бо тирӣ ординатаҳо дар кадом нуктаҳо бурида мешавад?

- | | | |
|-----------------------|------------------------|------------------------|
| а) $y = (x+1)(x+3)$; | д) $y = (2x+5)(3-x)$; | г) $y = (x-1)(x-6)$; |
| б) $y = (x-2)(x+3)$; | е) $y = x(x-4)$; | ҳ) $y = -(x+2)(x+4)$; |
| с) $y = (x-7)^2$; | ф) $y = -(x+4)(x-5)$; | и) $y = -(x-3)(x-4)$? |

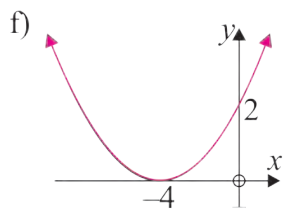
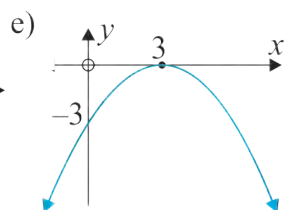
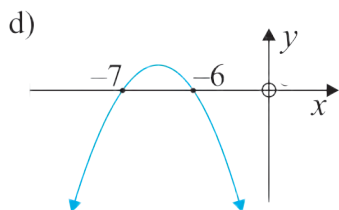
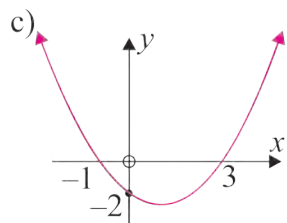
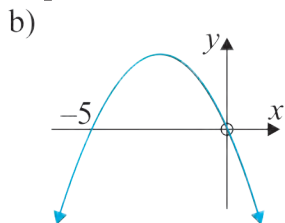
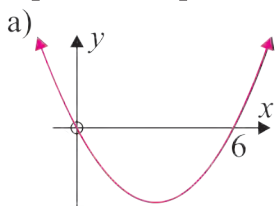
103. Нуктаҳои буриши параболаро бо тирӣ абсисса ёбед.

- | | | | |
|------------------------|---------------------------|----------------------------|--------------------------|
| а) $y = x^2 - x - 6$; | д) $y = 3x - x^2$; | г) $y = -x^2 - 4x + 21$; | ж) $y = -2x^2 + x - 5$; |
| б) $y = x^2 - 16$; | е) $y = x^2 - 12x + 36$; | ҳ) $y = 2x^2 - 20x + 50$; | к) $y = -6x^2 + x + 5$; |
| с) $y = x^2 + 5$; | ф) $y = x^2 + x - 7$; | и) $y = 2x^2 - 7x - 15$; | л) $y = 3x^2 + x - 1$. |

104. Нуктаҳои буриши параболаро бо тирҳои координатӣ ёбед:

- | | | | |
|------------------------|---------------------------|---------------------------|----------------------------|
| а) $y = x^2 + x - 2$; | д) $y = x^2 + x + 4$; | г) $y = -x^2 - 7x$; | ж) $y = -x^2 + 2x - 9$; |
| б) $y = (x+3)^2$; | е) $y = 3x^2 - 3x - 36$; | ҳ) $y = -2x^2 + 3x + 7$; | к) $y = 4x^2 - 4x - 3$; |
| с) $y = (x+5)(x-2)$; | ф) $y = -x^2 - 8x - 16$; | и) $y = 2x^2 - 18$; | л) $y = 6x^2 - 11x - 10$. |

105. Тири симметрияи параболаро ёбед:



106. Тири симметрияи параболаро ёбед:

a) $y = (x-2)(x-6)$;

d) $y = (x-3)(x-8)$;

b) $y = x(x+4)$;

e) $y = 2(x-5)^2$;

c) $y = -(x+3)(x-5)$;

f) $y = 3(x+2)^2$.

107. Тири симметрияи параболаро ёбед:

a) $y = x^2 + 6x + 2$;

f) $y = -5x^2 + 7x$;

b) $y = x^2 - 8x - 1$;

g) $f(x) = x^2 - 6x + 9$;

c) $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$;

h) $y = 10x - 3x^2$;

d) $y = -x^2 + 3x - 7$;

i) $y = \frac{1}{8}x^2 + x - 1$.

e) $y = 2x^2 - 5$;

108. Куллаи параболаро ёбед:

a) $y = x^2 - 4x + 7$;

f) $y = -3x^2 + 6x - 4$;

b) $y = x^2 + 2x + 5$;

g) $y = x^2 - x - 1$;

c) $f(x) = -x^2 + 6x - 1$;

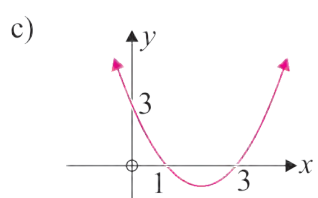
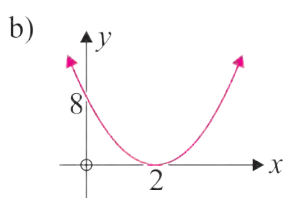
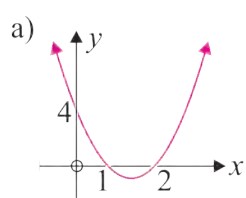
h) $y = -2x^2 + 3x - 2$;

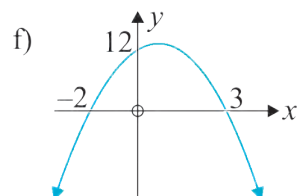
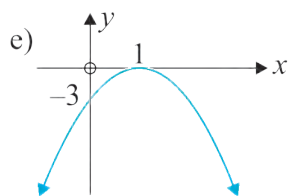
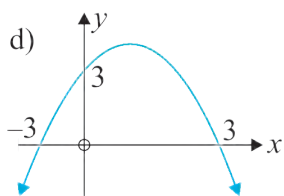
d) $y = x^2 + 3$;

i) $y = -\frac{1}{4}x^2 + 3x - 2$.

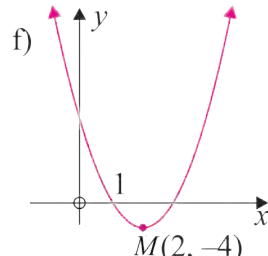
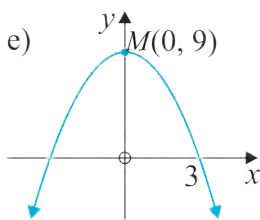
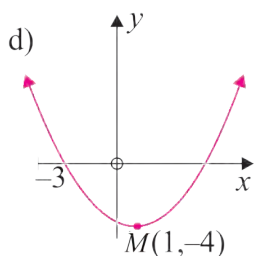
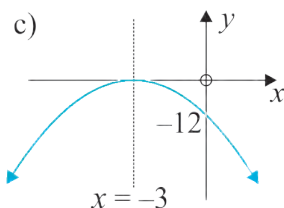
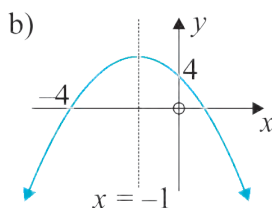
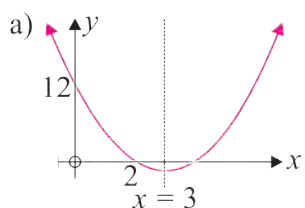
e) $f(x) = 2x^2 + 12x$;

109. Ба парабела нигоҳ карда, формулаи функцияи квадрати мувофиқро ёбед:





110. Ба параболо нигоҳ карда, функцияи квадратиро ёбед:



111. Дилшод барои аз қаъри баҳр гирифтани гавҳар худро ба об партофт. Баъди t сония \bar{y} дар чуқурии $H(t) = -4t^2 + 4t + 3$ метр мешавад, $t \geq 0$.

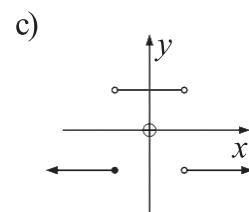
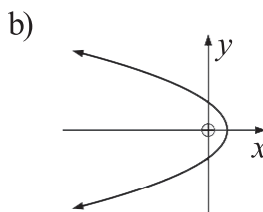
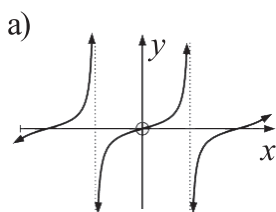
- гавҳарҳо дар кадом чуқури чой гирифтаанд?
- одам барои гирифтани гавҳар чӣ қадар вақт сарф мекунад?
- одам худро аз кадом баландӣ ба об партофт?

112. Ҷасмина барои дӯхтани курта фармоиш қабул кард. Агар дар як рӯз x -то курта дӯзад, \bar{y} даромади $P(x) = -x^2 + 20x$ доллари ИМА мегирад.

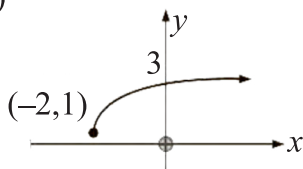
- барои он ки даромади калонтарин гирад \bar{y} бояд чанд курта курта дӯзад?
- даромади калонтарин ба чанд доллар баробар аст?

Намунаи кори санҷишӣ

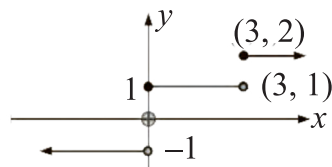
1. Кадоме аз муносибатҳои поён функцияҳо ҳастанд?



d)



e)

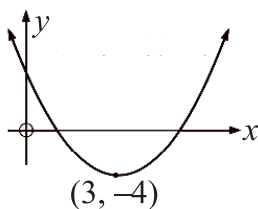


2. Кадоме аз маҷмӯи ҷуфтҳои ба тартиб андохташуда табиладхӣ мешавад? Ҷавобатонро асоснок кунед.

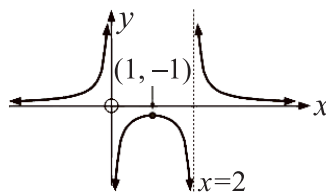
- a) $\{(1, 2), (-1, 2), (0, 5), (2, -7)\}$; b) $\{(0, 1), (1, 3), (2, 5), (0, 7)\}$;
 c) $\{(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4)\}$.

3. Соҳаи муайянӣ ва маҷмӯи қимматҳои функсияҳои дар намуди графикӣ додашударо ёбед:

a)

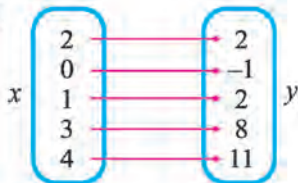


b)

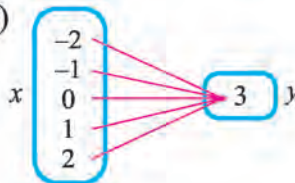


4. Диограммаи зерин $y=f(x)$ аксгардониро медиҳад:

a)



b)



1) $y=f(x)$ соҳаи муайянкунии аксгардонӣ ва дастҷамъиро нависед.

2) $y=f(x)$ аксгардонӣ дар системаи ҳамвории координатаҳо чӣ тавр тасвир мешавад?

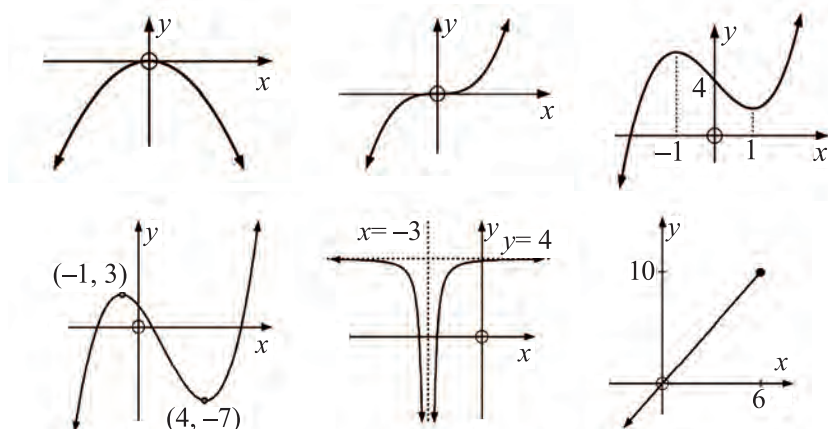
3) Барои $y=f(x)$ ифодаи муайянро нависед.

5. Барои функсияи $f(x)=2x-x^2$

- a) $f(2)$; b) $f(-3)$; c) $f(-\frac{1}{2})$ қиммати калонтаринро ёбед.

6. барои функсияи $g(x)=x^2-3x$ ифодаҳоро содда кунед а) $g(x+1)$;
 б) $g(x^2-2)$

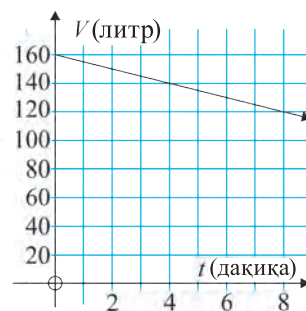
7. Интервалҳои афзуншавӣ ва камшавии функцияҳои дар намуди графיקӣ додашударо ёбед:



8. Барои функцияҳои: а) $f(x)=2x+1$; б) $f(x)=-3x+2$;
 с) $f(x)=x^2$; д) $f(x)=-x^3$

- 1) нуқтаҳои буриши функцияҳоро бо тирҳояшон ёбед;
- 2) максимуми локалӣ, минимуми локалӣ, ё нуқтаҳои қачмавҷуд бошад, координатаҳои онҳоро ёбед;
- 3) графיקи тахминии функцияро кашед.

9. Дар графיקи поён дар вақти t -и дар дақиқаҳо ифодашуда ҳаҷми V -и нефти аз систерна ҷорӣшаванда тасвир шудааст.



1) формулаи алоқамандии ҳаҷми нефти ҷоришудаи стода, аз вақтро ёбед.

2) дар 15 дақиқа чӣ қадар нефт ҷорӣ мешавад?

3) 50 литр нефт дар чанд дақиқа ҷорӣ мешавад?

4) баъди чанд вақт систерна холи мешавад?



10. Санг аз сатҳи баҳр аз баландии 60 метр ба боло партофта шуд. Агар баъди t сония нисбат ба сатҳи баҳр баландии санг ба $H(t)=-5t^2+20t+60$ баробар шавад:

1) баъди чанд сония баландии санг қалонтарин мешавад?

2) нисбат ба сатҳи баҳр баландии санг ба чанд баробар аст?

3) баъди чанд сония санг ба об меафтад?

11. Фермер майдони пахлӯ ба пахлӯи якхеларо, ки гандум кошта шудааст, бо девори дарозиаш 2000 метр ихота кард.



- 1) майдони умумӣ бо ёрии x чӣ хел ифода мешавад?
- 2) майдони умумии калонтарини ду сахро ба чанд баробар шуданаш мумкин аст?
- 3) масоҳати ин хел сахроҳоро муайян кунед.

55

ЧАРАЁНҲОИ ДАВРӢ ВА НАЗОРАТИ ОНҲО

Чараёнҳои даврӣ дар табиат ва техника васеъ паҳн шудааст. Ба онҳо мисолҳо биёрем:

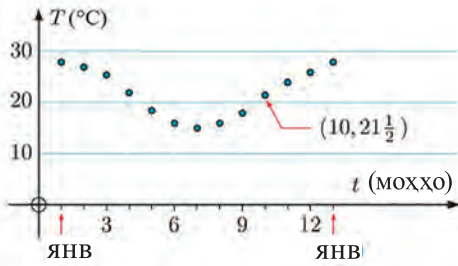
- Тағйирёбии обу ҳаво нисбат ба фаслҳои сол;
- Тағйирёбии миёнаи ҳарорат;
- Бардавомии рӯз ва шаб;
- Чуқуриии об дар соҳили пахлӯи укёнус;
- Адади ҳайвонҳо;
- Тағйирёбии фаъолияти офтоб;
- Лаппишҳои даврӣ дар механика, электротехника.

Дар ин чараёнҳо бо гузашти вақти муайян такроршавии ҳолатҳо назорат мешавад. Онҳоро ба вазъият нигоҳ карда, даври **лаппишқунанда ё сиклӣ** меноманд.

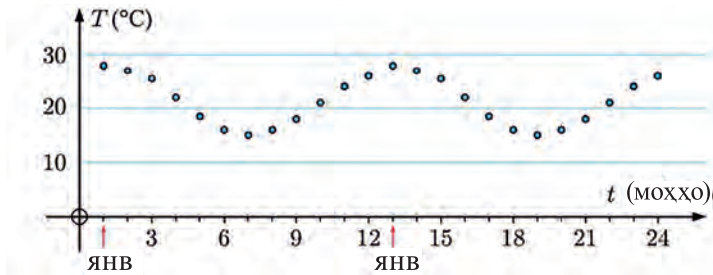
Масалан, чадвали тағйирёбии максималии моҳонаи ҳароратро дар шаҳри Кейптауни Африкаи Ҷанубӣ дида мебароем:

Моҳ	Ян	Фев	Мар	Апр	Май	Июн	Июл	Авг	Сен	Окт	Ноя	Дек
Темп (0°C)	28	27	$25\frac{1}{2}$	22	$18\frac{1}{2}$	16	15	16	18	$21\frac{1}{2}$	24	26

Ин маълумотро ба намуди графикӣ ифода мекунем. Барои ин тири ордината ҳароратҳоро, тири абссиса бошад рақамҳои тартибии моҳ (масалан, феврал $t=2$)ро мефаҳмонад. Дар ин график дар моҳи январ ба ҳисоби миёна ҳарорат 28°C дар назар дошта шудааст. Такроршавии ин қиммат дар ҳар 12 моҳ, яъне дар моҳҳои январи ҳар сол табиист.



Барои моҳҳои дигар низ инро давом дода, графикаи тағйирёбии миёнаи ҳарорати тақрибан аксунамандаро кашидан мумкин аст:



Агар функцияи $y=f(t)$ дар моҳи t ҳарорати миёнаро ифода кунад, қонуниятҳои монанди $f(0)=f(12)=f(24)=\dots$, $f(1)=f(13)=f(25)=\dots$ ва ҳ.к., дар ҳолати умумӣ барои t -и ихтиёрӣ $f(t+12)$ шуданаш дар назар аст.

Дар ин вақт 12 моҳ муддатеро, ки такроршавӣ дида мешавад **давр** меномем.

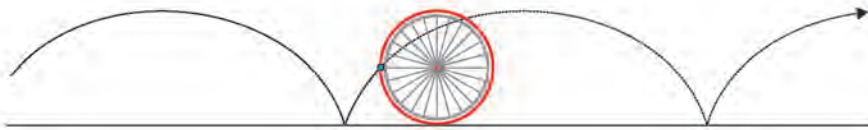
Агар барои функцияи $f(x)$ -и дар маҷмӯи X муайяншуда, x -и ихтиёрӣ баробарии $f(x+T)=f(x)$ ро қаноаткунондаи $T>0$ мавҷуд бошад, $f(x)$ функцияи даврӣ номида мешавад, дар ин ҷо $x+T \in X$.

Равшан аст, ки агар $f(x+T)=f(x)$ бошад, он гоҳ $f(x)=f(x+T)=f(x+2T)=\dots$

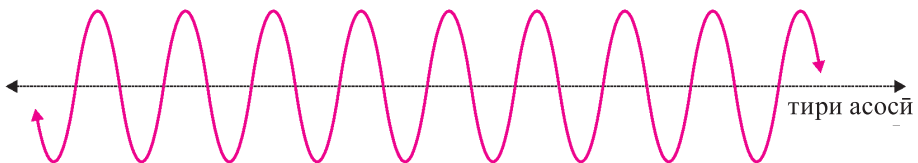
Қиммати хурдтарини чунин ададҳои $T>0$ -ро **даври функция** меномем.

Агар ғилдирак қад-қади хати рост чарх зада, ҳаракат кунад, нуқтаи дар он аниқ қайдшуда, аз рӯйи хати қачи **сиклоид** номида шаванда, даврӣ ҳаракат мекунад.

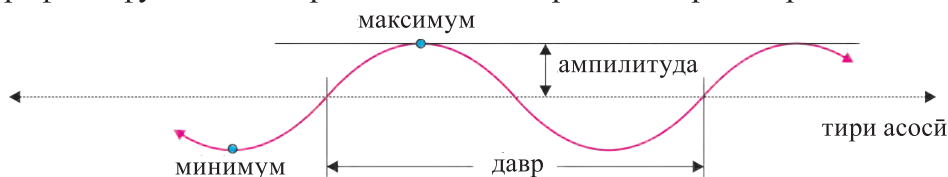
Гуфтан лозим аст, ки сиклоида ба муодилаи намуди $y=f(x)$ дороро нест.



Графикаи функцияҳои даврӣ дар шакли зерин мешаванд:



Муодилаи тири асосӣ ба таври зерин муайян мешавад: $y = \frac{\max + \min}{2}$ дар ин чо \max – қиммати калонтарини функция, \min бошад қиммати хурдтарин. Графики функцияи даврӣ ба қисмҳои таркибии зерин доро аст:



Амплитуда масофаи байни максимум ва тири функция (ёки тир ва минимум) буда, у чунин муайян карда мешавад: $\text{amplituda} = \frac{\max - \min}{2}$.



Савол ва супоришҳо

1. Ба чараёни даврӣ мисол биёред.
2. Ба даври функция таъриф диҳед.
3. Амплитудайи функцияи даврӣ чи хел ҳисоб карда мешавад?
4. Чӣ будани сиклоидаро фаҳмонед.
5. Кай функцияи квадратӣ ба максимум (минимум) соҳиб аст?

Машқҳо

113. Барои ҳар як ҳолат маълумотро ба намуди графикӣ тасвир кунед ва дар бораи даврӣ будан ё даврӣ набудани онҳо хулоса бароред.

a)	x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	y	0	1	1,4	1	0	-1	-1,4	-1	0	1	1,4	1	0

b)	x	0	1	2	3	4
	y	4	1	0	1	4

c)	x	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5
	y	0	1,9	3,5	4,5	4,7	4,3	3,4	2,4

d)	x	0	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12
	y	0	4,7	3,4	1,7	2,1	5,2	8,9	10,9	10,2	8,4	10,4

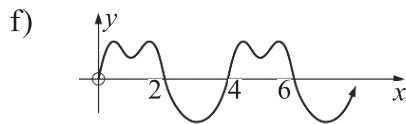
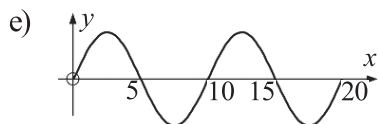
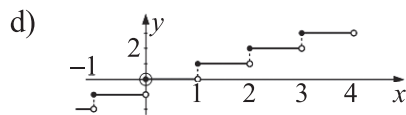
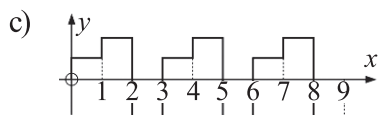
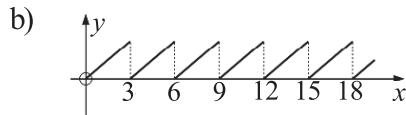
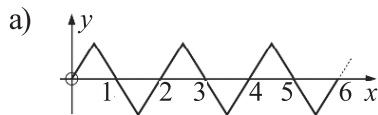
114. Агар дар чадвали зерин ғилдирак чарх зада, қад-қад хати рост ҳаракат кунед, дар он бузургиҳое оварда шудаанд, ки он ҳаракати нуқтаи қайдшударо ифода мекунад.

Масофа (см)	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200
Баландӣ (см)	0	6	23	42	57	64	59	43	23	7	1
Масофа (см)	220	240	260	280	300	320	340	360	380	400	
Баландӣ (см)	5	27	40	55	63	60	44	24	9	3	

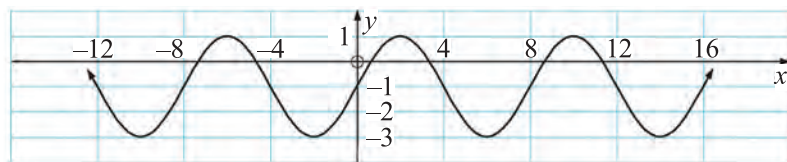
а) аз масофа вобаста будани баландиро ба тарзи графיקӣ ифода кунед

б) оё ин ҷараён даврӣ аст? Агар даврӣ бошад, муодилаи тир, максимуми функсия, давр ва амплитудаашро ёбед.

115. Кадоме аз инҳо ҷараёни давриро ифода мекунад?



116.



Барои функсияи даврии додашуда:

- a) амплитударо ёбед;
- b) даврашро ёбед;
- c) нуқтаи якуми максимумро ёбед;
- d) масофаи байни ду максимумро аниқ кунед;
- e) муодилаи тир асосиро тартиб диҳед.

56-58

ФУНКСИЯҲОИ $y=\sin x$, $y=\cos x$ ВА БО ЁРИИ ОНҲО МОДЕЛОНИДАН

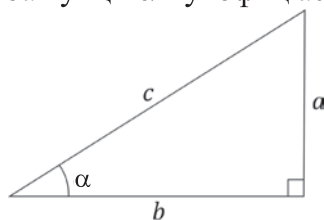
Дар секунҷаи росткунҷа a , b – катетҳо, c – гипотенуза бошад, бо α кунҷе, ки муқобили катети a мебошад ишора мекунем (нигаред ба расми 1) Дар курси геометрия синус ва косинуси кунҷи α бо ёрии муодилаи зерин дароварда мешавад.

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}.$$

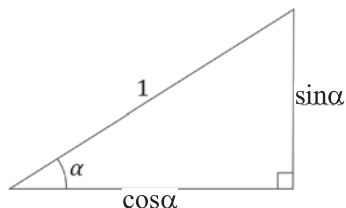
Агар гипотенузaro 1 гуфта гирем, расми 1 намуди зеринро мегирад (нигаред ба расми 2).

Дар ҳамворӣ системаи координатахоро дохил карда, дар он давраи

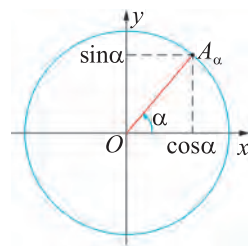
радиусаш ба 1 баробари воҳидиро дида мебароем ва дар ин давра нуктае ки ба кунчи α мувофиқ аст қайд мекунем (расми 3).



Расми 1



Расми 2

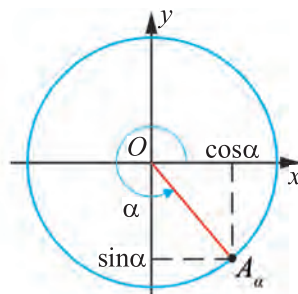
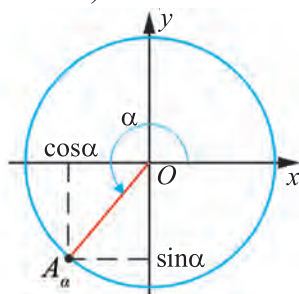
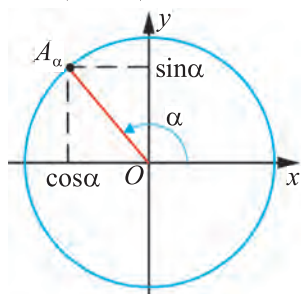


Расми 3

Синуси кунчи α гуфта ординатаи нуктаи A_α ро меноманд ки он дар натиҷаи нуктаи $(1;0)$ -ро дар атрофи ибтидои координатаҳо ба кунчи α чарх занонидан ҳосил мешавад ($\sin\alpha$ ишора карда мешавад).

Айнан ҳамин тавр, косинуси кунчи α гуфта абссисаи нуктаи $(1; 0)$ -ро меноманд, ки он дар натиҷаи нуктаи $(1;0)$ -ро дар атрофи ибтидои координатаҳо ба кунчи α чарх занонидан ҳосил мешавад ($\cos\alpha$ ишора карда мешавад).

Агар нуктаи ба кунчи α мувофиқ дар чоряки дигар хобад, ба чунин шаклҳо соҳиб мешавем (расми 4):



Расми 4.

Мувофиқи теоремаи Пифагор, айнияти асосии тригонометрии, $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ – ҷой дорад, дар ин ҷо $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$. Кунҷҳои (камони) дар тригонометрия дида бароянда дар градусҳо, ёки радианҳо чен карда мешаванд.

Нисбати дарозии камони ба кунчи марказии α мувофиқ нисбати радиуси ҳамон камон ченаки радианин ҳамон кунҷ номида мешавад.

Ченаки радианин кунчи дар градусҳо додашудаи α ба $\frac{\pi}{180^\circ} \alpha$ баробар аст.

Ҷадвали ченакҳои радианин кунҷҳои бисёртар вохӯрандари меорем:

Градус	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Радиан	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

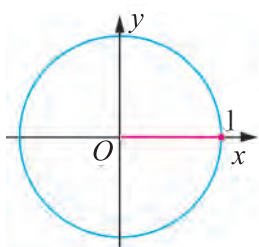
Баъзе қимати синус ва косинуси кунчи α -ро меёбем.

1. $\alpha=0^\circ$ бошад (расми 5). Дар ин ҳол абсиссаи нуқтаи мувофиқ ба 1 ординатааш ба 0 баробар, пас $\sin 0^\circ=0$, $\cos 0^\circ=1$.

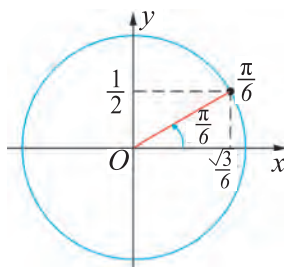
2. $\alpha=\pi/6=30^\circ$ бошад (расми 6). Аз сабаби дар секунҷаи росткунҷа, муқобили кунҷи 30° ба нисф баробар гардидани катет нисбати гипотенузаҳо $\sin \frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ мешавад. Мувофиқи аёнияти асосии

тригонометрӣ $\cos \frac{\pi}{6}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

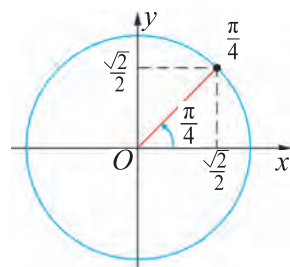
3. $\alpha=\pi/4=45^\circ$ бошад (расми 7). Дар ин ҳол паҳлӯи баробари кунҷи секунҷа ҳосил мешавад. Дар чунин секунҷаҳо синус ва косинуси кунҷи α баробаранд. Онҳоро x мегӯем Айнияти асосии тригонометр $x^2+x^2=1$, яъни $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ мешавад. Пас, $\cos \frac{\pi}{4}=\sin \frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$



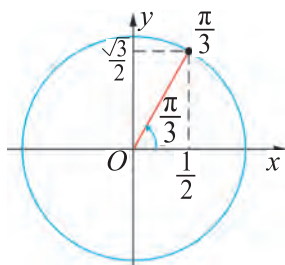
Расми 5



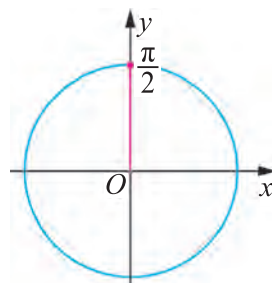
Расми 6



Расми 7



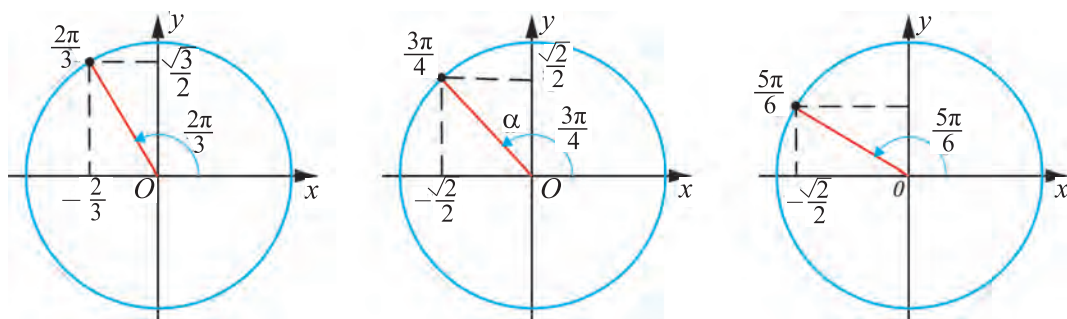
Расми 8



Расми 9

4. $\alpha=\pi/3=60^\circ$ бошад (расми 8). Дар ин ҳол мисли $\alpha=\frac{\pi}{6}$ мулоҳиза намуда, ба баробарии, $\cos \frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$, $\sin \frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ соҳиб мешавем.

5. $\alpha=\pi/2=90^\circ$ бошад (расми 9). Дар ин ҳол абсиссаи нуқтаи мувофиқ ба 0 ва ординатааш ба 1 баробар аст. Пас, $\cos \frac{\pi}{2}=0$, $\sin \frac{\pi}{2}=1$.



Расми 10

6. Дар ҳолати $\frac{2\pi}{3} = 120^\circ$, $\frac{3\pi}{4} = 135^\circ$, $\frac{5\pi}{6} = 150^\circ$ будан мебинем(расми10).

$\frac{2\pi}{3}$ барои нуқтаи $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$. Дар он ҳол ин нуқта $\frac{\pi}{3}$ ба нуқтаи Oy тири

нисбатан симметрӣ мешавад. Пас, $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, $\sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\frac{3\pi}{4}$ барои нуқтаи $\frac{3\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4}$. Дар ин ҳол ин нуқта $\frac{\pi}{4}$ ба нуқтаи Oy тири

нисбатан симметрӣ мешавад. Пас, $\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

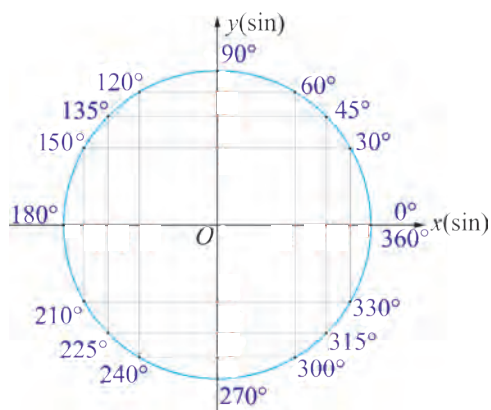
$\frac{5\pi}{6}$ барои нуқтаи $\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$. Дар ин нуқта $\frac{\pi}{6}$ ба нуқтаи Oy тири нисбатан

симметрӣ мешавад. Пас, $\cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

7. Ҳангоми $\alpha = \pi = 180^\circ$ будан, $\cos \pi = -1$, $\sin \pi = 0$ буданаширо исбот кардан ва расми мувофиқ кашиданро ба хонандаҳо ҳавола мекунем.

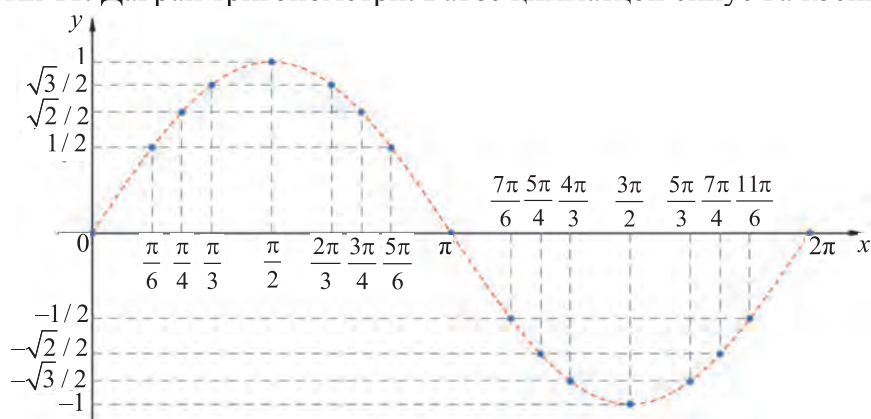
Дар боло мо дар интервали $[0; \pi]$ барои баъзе кунҷҳо қимматҳои синус ва косинусро муайян кардем. Ба ҳар яки ин кунҷҳо π -ро зам карда, барои кунҷҳои интервалӣ, $[\pi; 2\pi]$ низ қимматҳои синус ва косинусро муайян кардан мумкин аст. Натиҷаҳо дар расми 11, ки давраи тригонометрӣ номгӯ шудааст, ифода мекунем:

Аз қимматҳои боло истифода бурда, графикаи функцияҳои $y = \sin x$, $y = -\cos x$ -ро кашидан мумкин. Барои ин дар тири абсиссаҳо қимматҳои кунҷи α -ро, дар тири ординатаҳо бошад қимматҳои мувофиқи синусро гирифта, нуқтаҳои ҳосилшударо қайд мекунем. Баъдан нуқтаҳои қайд кардашударо бо хати ҳамвор пайваст карда, дар интервали $[0; 2\pi]$ графикаи функцияи $y = \sin x$ (расми 12)-ро, ҳосил мекунем. Графикаи функцияи $y = \cos x$ (расми 13) ҳам монанди ин сохта мешавад.

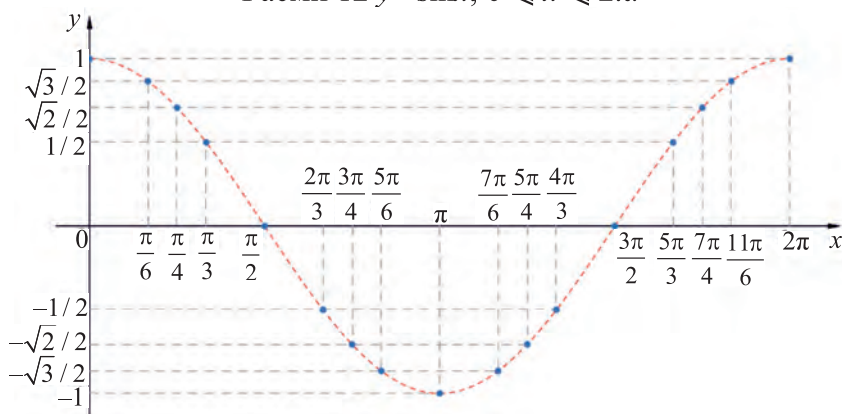


$30^\circ = \frac{\pi}{6};$	$45^\circ = \frac{\pi}{4};$	$60^\circ = \frac{\pi}{6};$
$90^\circ = \frac{\pi}{2};$	$120^\circ = \frac{2\pi}{3};$	$135^\circ = \frac{3\pi}{6};$
$180^\circ = \pi;$	$210^\circ = \frac{7\pi}{6};$	$225^\circ = \frac{5\pi}{4};$
$240^\circ = \frac{4\pi}{3};$	$270^\circ = \frac{3\pi}{2};$	$300^\circ = \frac{5\pi}{3};$
$315^\circ = \frac{7\pi}{4};$	$330^\circ = \frac{11\pi}{6};$	

Расми 11. Давраи тригонометрий. Баъзе қимматҳои синус ва косинус.

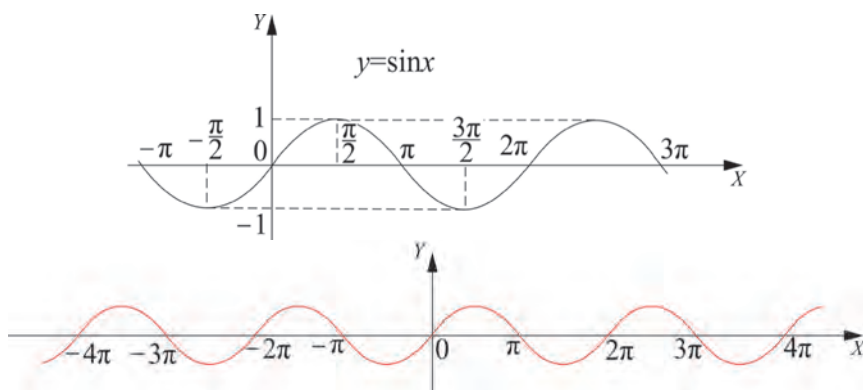


Расми 12 $y = \sin x, 0 \leq x \leq 2\pi$.

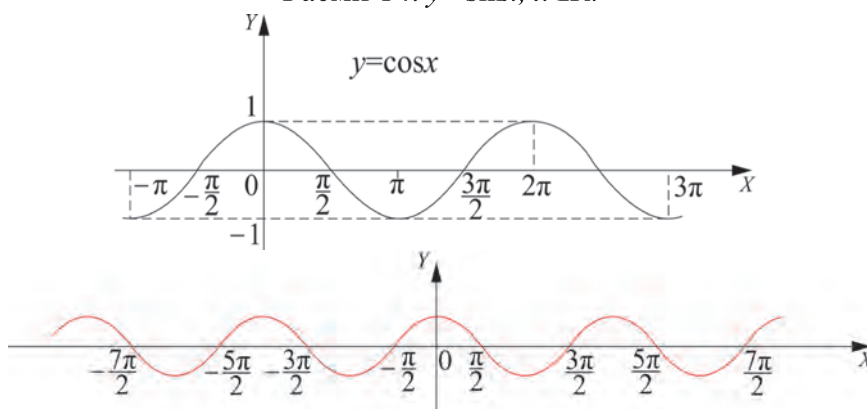


Расми 13. $y = \cos x, 0 \leq x \leq 2\pi$.

Ин графикҳоро ба тарзи даврӣ давом дода, графики функцияҳои $y = \sin x$, $y = \cos x$ -ро ҳосил мекунем (расмҳои 14 ва 15).



Расми 14. $y = \sin x, x \in \mathbb{R}$.



Расми 15. $y = \cos x, x \in \mathbb{R}$.

Баъди хондани графикҳо ба хулосаи зерин меоём: даври функсияҳои $y = \sin x$ ($y = \cos x$) ба 2π , амплитудааш ба 1, қиммати калонтаринаш ба 1, қиммати хурдтаринаш бошад ба -1 баробар аст.

Баъзе мулоҳизаҳое, ки дар татбиқҳо дар бораи функсияҳои $y = a \sin x$ ва $y = \sin bx$, $b \neq 0$ васеъ воমেҳӯранд мебиёрем.

Амплитудайи функсияи $y = a \sin x$ ба $|a|$ баробар. Графики он дар натиҷаи графики функсияи $y = \sin x$ -ро ҳангоми $|a| > 1$ будан аз рӯйи тири ординатаҳо кашидашавӣ, ҳангоми $|a| < 1$ будан бошад фишурдан ҳосил мешавад. Даври функсияи $y = \sin bx$ ба $\frac{360^\circ}{|b|}$ баробар аст.

Графики ин функсия аз графики функсияи $y = \sin x$ ҳангоми $0 < |b| < 1$ шудан аз рӯйи тири абсиссаҳо кашидашавӣ, ҳангоми $|b| > 1$ шудан фишурдашавӣ ҳосил мешавад.

Графики функсияи намуди $y = \sin x + c$ аз графики функсияи $y = \sin x$ дар натиҷаи ба c воҳид параллел кӯчонидан ҳосил мешавад ва дар ин ҷо тири асосии функсияи $y = \sin x + c$ ба муодилаи $y = c$ дорост.

Дар боло будаҳоро ба назар гирифта, графики функсияи намуди $y = a\sin bx + c$ доштаро ҳосил кардан мумкин аст.

Масалан, функсияи $y = 2\sin 3x + 1$ -ро дида мебароем.

Графики ин функсия аз графики функсияи $y = \sin x$ ба таври зерин ҳосил мешавад:

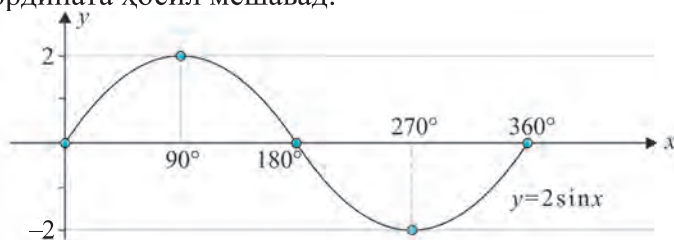
1. Амплитударо ба 2 зарб карда $y = 2\sin x$ -ро ҳосил мекунем
2. Даврро ба 3 тақсим карда, $y = 2\sin 3x$ -ро ҳосил мекунем
3. Ба 1 воҳиди додашуда параллел мекуҷонем. $y = 2\sin 3x + 1$ ба муодилаи $y = 1$ соҳиб аст.

4. Дар натиҷа графики функсияи $y = 2\sin 3x + 1$ -ро ҳосил мекунем.

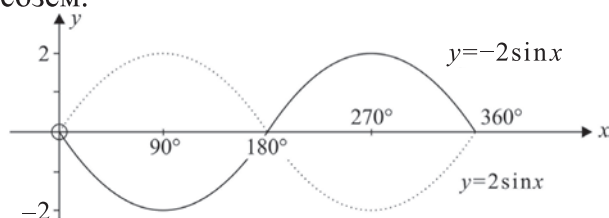
Мулоҳизаҳои ба ин монандро дар бораи функсияи $y = \cos x$ ҳам овардан мумкин.

Мисоли 1. Графикҳои функсияҳои $y = 2\sin x$, $y = -2\sin x$, $y = \sin 2x$ -ро созед, $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$.

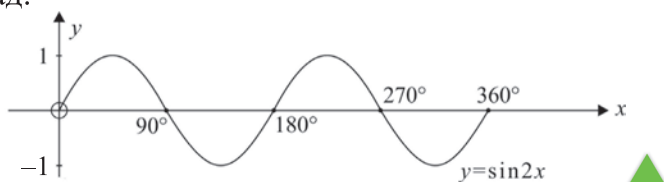
△ Аввал графики функсияи $y = 2\sin x$ -ро месозем. Амплитудай ин функсия ба 2 баробар ва графики он дар натиҷаи кашидашавии графики функсияи $y = \sin x$ аз рӯйи тири ордината ҳосил мешавад:



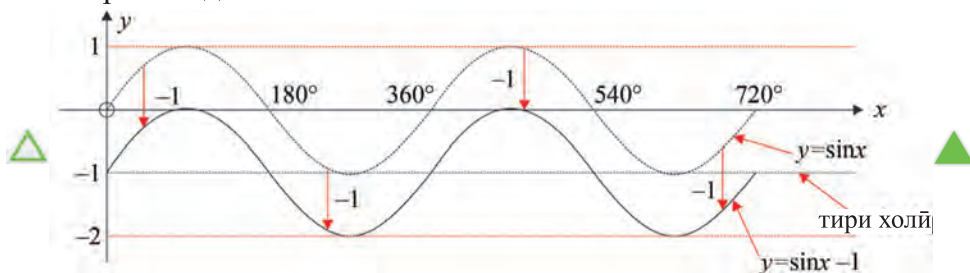
Графики функсияи $y = -2\sin x$ ба графики функсияи $y = 2\sin x$ нисбат ба тири абсиссаҳо симметрӣ аст. Аз ин истифода бурда, графики функсияи $y = -2\sin x$ -ро месозем.



Даври функсияи $y = \sin 2x$ ба $\frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$ баробар аст. Графикҳои ин функсия чунин мешавад:

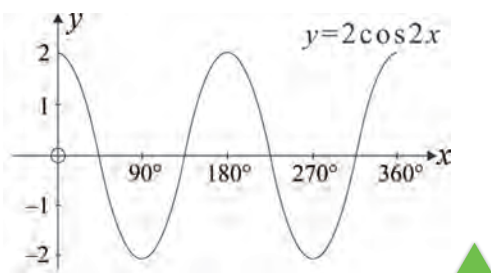


Мисоли 2. Ҳангоми $0^\circ \leq x \leq 720^\circ$ будан графикаи функцияҳои $y = \sin x$ ва $y = \sin x - 1$ -ро созед.



Мисоли 3. Дар порчаи $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$ графикаи функцияи $y = 2\cos 2x$ -ро месозем.

$a=2$. Пас, амплитудаи функция ба $|2|=2$ баробар, азбаски $b=2$ аст даври функция ба $\frac{360^\circ}{|b|} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$ баробар аст. Аз ин ҷо ба графика зерин соҳиб мешавем:



Саволҳо ва супоришҳо

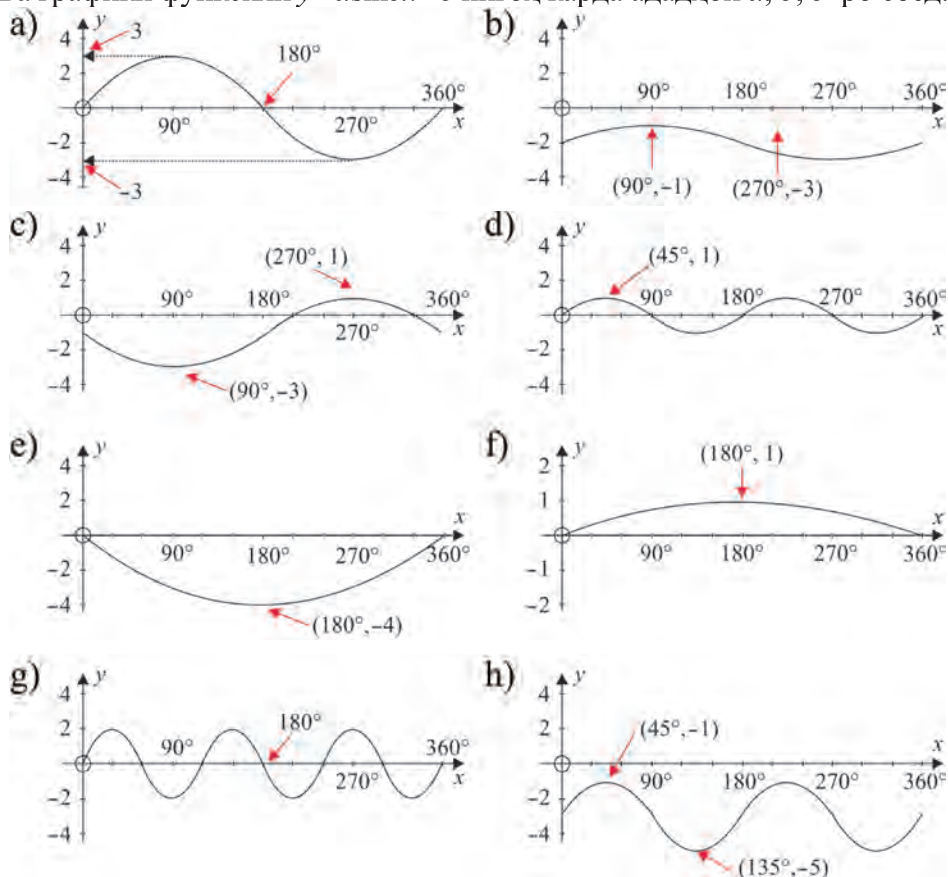


1. Дар доираи воҳидӣ ба синуси кунҷ таъриф диҳед.
2. Дар доираи воҳидӣ ба косинуси кунҷ таъриф диҳед.
3. Барои кунҷи 30° синус ва косинусро ҳисоб кунед.
4. Графикаи функцияи $y = \sin x$ -ро кашед.
5. Графикаи функцияи $y = \cos x$ -ро кашед.

Машқҳо

- 117.** Графикҳоро дар порчаи $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$ созед:
- a) $y = 3\sin x$; b) $y = -3\sin x$; c) $y = \frac{3}{2}\sin x$; d) $y = -\frac{3}{2}\sin x$.
- 118.** Графикро дар порчаи $0^\circ \leq x \leq 540^\circ$ созед:
- a) $y = \sin 3x$; b) $y = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$; c) $y = \sin(-2x)$; d) $y = -\sin\frac{x}{3}$.
- 119.** Даври функцияро муайян кунед:
- a) $y = \sin 4x$; b) $y = \sin(-4x)$; c) $y = \sin\left(\frac{x}{3}\right)$; d) $y = \sin(0,6x)$.
- 120.** Агар барои $y = \sin bx$, $b > 0$ даври функция ба
- a) 90° ; b) 120° ; c) 2160° ; d) 720°
баробар бошад, b -ро ёбед.

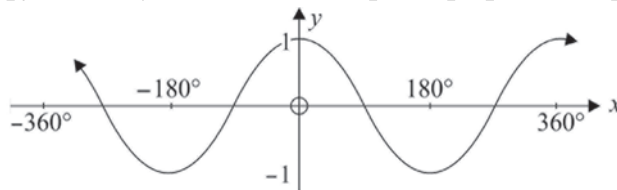
121. Ба графики функцияи $y = a \sin bx + c$ нигоҳ карда ададҳои a , b , c -ро ёбед:



122. Графикҳоро дар порчаи $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$ созед:

- a) $y = \sin x + 1$; b) $y = \sin x - 2$; c) $y = 1 - \sin x$;
 d) $y = 2 \sin x - 1$; e) $y = \sin 3x + 1$; f) $y = 1 - \sin 2x$.

123. Ба графики функцияи $y = \cos x$ нигоҳ карда, графики ин функцияҳоро созед:



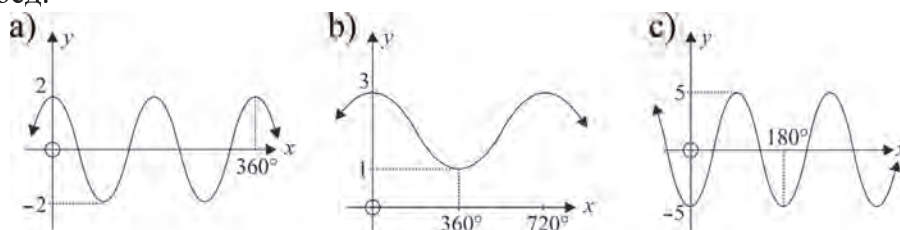
- a) $y = \cos x + 2$; b) $y = \cos x - 1$; c) $y = \frac{2}{3} \cos x$;
 d) $y = \frac{3}{2} \cos x$; e) $y = -\cos x$; f) $y = \cos 2x$;
 g) $y = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$; h) $y = 3 \cos 2x$.

124 Даври функцияро муайян кунед:

a) $y = \cos 3x$; b) $y = \cos\left(\frac{x}{3}\right)$; c) $y = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$; d) $y = \cos 4x$.

125. Бигузур функцияи $y = a \cos bx + c$ дода шуда бошад. Маънои геометрии ададҳои a, b, c -ро муайян кунед.

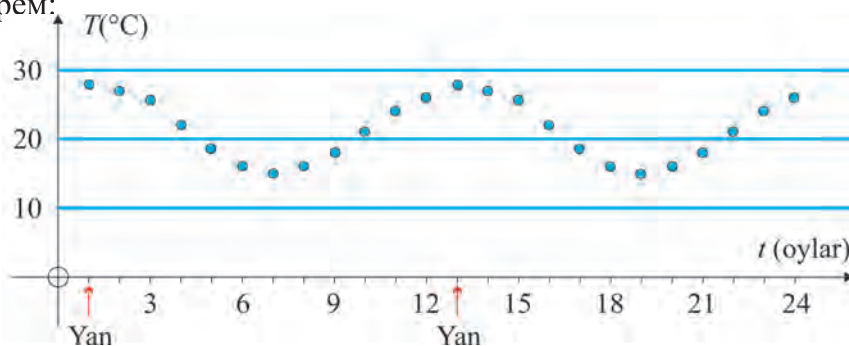
126. Ба графики функцияи $y = a \cos bx + c$ нигоҳ карда ададҳои a, b, c -ро ёбед.



Мисоли 4. Дар поён чадвали тағйирёбии максималии ҳарорати моҳонаи обу ҳавои шаҳри Кейптауни Африкаи Ҷанубӣ дода шудааст:

Оу	Yan	Fev	Mar	Apr	May	Iyun	Iyul	Avg	Sen	Okt	Noy	Dek
$T(^{\circ}\text{C})$	28	27	$25\frac{1}{2}$	22	$18\frac{1}{2}$	16	15	16	18	$21\frac{1}{2}$	24	26

Графике, ки тағйирёбии максималии ҳароратро тахминан акс мекунад, мебиёрем:



Модели ин чараён дар намуди $T = a \cos bt + c$ гуфта фарз карда a, b, c -хоро параметрал меёбем. Азбаски давр 12 моҳ аст

$$\frac{360^{\circ}}{|b|} = 12, \text{ яъне } b = \frac{360^{\circ}}{12} = 30^{\circ}.$$

Амплитударо ҳисоб мекунем: $\frac{\max - \min}{2} \approx \frac{28 - 15}{2} = 6,5$. Аз ин чо $a \approx 6,5$.

Азбаски тири асосӣ дар байни қимматҳои хатҳои рости максималӣ ва минималӣ ҷой гирифтааст $c \approx \frac{28 + 15}{2} \approx 21,5$.

Пас, модели математикии бо гузашти вақт тағйирёбии моҳонаи ҳарорат функцияи $T \approx 6,5 \cos 30t + 21,5$ мебошад.

Машқҳо

127. Дар базаи Қутбии Антарктида ҳарорати миёна дар мобайни 30 сол ба таври зерин буданаш маълум:

Т а р т и б и р а қ а м и и моҳ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Ҳ а р о р а т (°C)	0	-4	-10	-15	-16	-17	-18	-19	-17	-13	-6	-1

Модели математикии тағйирёбии миёнаи ҳароратро созед.

128. Ҳангоми санчиши чараёни бардошташавии оби баҳр то соҳилҳо ва фуруҳамии он аз соҳилҳо чунин муайян карда шуд: 1) фарқи байни чуқурии аз ҳама калон ва аз ҳама хурди об 14 метр. 2) чуқурии об ба қимматҳои аз ҳама калонтарин ба ҳисоби миёна дар ҳар як 12,4 соат соҳиб мешавад. 3) Модели математикии тағйирёбии чуқурии обро нисбат ба вақт созед ва онро ба таври графикӣ ифода кунед.

129. Дар чархи велосипед нури ранги зардро инъикоскунанда ҷойгир карда шудааст. Ҳангоми шабона дар роҳи ҳамвор ҳаракат кардан велосипед ба навор гирифта шуд. Дар асоси видеотасвир тағйирёбии баландии нур инъикоскунанда нисбат ба роҳ бо гузашти вақт муайян гардида, чадвал ба таври зерин пур шуд:

Вақт(t, s)	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
Баландӣ (H, sm)	19	17	38	62	68	50	24	15	31

- а) аз функцияи синус истифода бурда, модели математикии чараёнро созед.
- б) намуди графикии чараёнро биёред.
- с) радиуси чархро ёбед.
- д) велосипед бо чӣ гуна суръат ҳаракат карда истодааст?

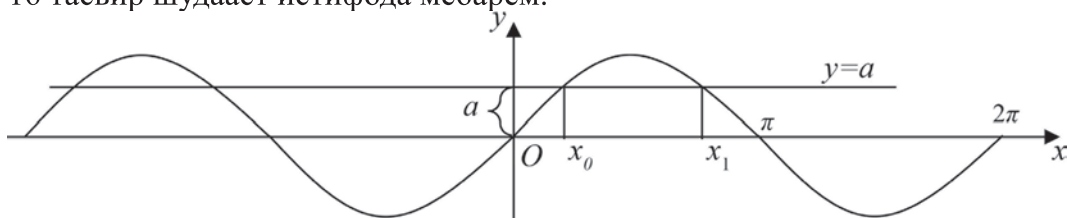
59-61 МУОДИЛАҲОИ СОДАТАРИНИ ТРИГОНОМЕТРӢ

Муодилаи $\sin x = a$

Ба мо маълум аст, ки, $-1 \leq \sin x \leq 1$, бинобар ин ҳангоми $|a| > 1$ ин муодила ҳал надорад. Барои ёфтани ҳалли муодила дар интервали $-1 \leq a \leq 1$ таърифи зеринро дохил мекунем.

Аркинсуни адади $a \in [-1; 1]$ гуфта адади $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ ки синусаш ба a баробар аст меноманд: агар $\sin x = a$ ва $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ бошад, $\arcsin a = x$.

Барои ҳал кардани муодила аз графики функцияи $y = \sin x$, ки дар расми 16 тасвир шудааст истифода мебарем.



Расми 16.

Аз график мебинем, ки ҳангоми, $a \in [-1; 1]$ будан функцияи $y = a$ дар интервали $[0; 2\pi]$ графики функцияи $y = \sin x$ ро дар нуқтаҳое ки абсиссаҳояш x_0 ва $x_1 = \pi - x_0$ мебаррад. Ин ду нуқта ро бо ёрии як формула навиштан мумкин:

$$x = (-1)^n \arcsin a, \text{ дар ин ҷо } n = 0, 1.$$

Аз даврӣ будани функцияи $y = \sin x$ истифода бурда, барои ҳал кардани муодила ин формуларо ҳосил мекунем:

$$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in Z. \quad (1)$$

Мисоли 1. Ҳисоб кунед: 1) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\arcsin \left(-\frac{1}{2}\right)$.

△ Азбаски мувофиқи таъриф $-1 \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \leq 1, \frac{\pi}{3} \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ ва $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ аст $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$. мешавад. Монанди ин, $\arcsin(-\frac{1}{2}) = -\arcsin \frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6}$ мешавад. ▲

Мисоли 2. Муодиларо ҳал кунед: $\sin x = \frac{1}{2}$.

△ Мувофиқи формула ҳалли муодила

$$x = (-1)^k \arcsin \frac{1}{2} + \pi k = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z \text{ мешавад. } \blacktriangle$$

Мисоли 3. Муодиларо ҳал кунед: $\sin \left(\frac{\pi}{12} - \frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

△ Азбаски функцияи $y = \sin x$ тоқ аст $\sin \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ мешавад.

Формулаи (1)-ро истифода бурда, баробарии, $\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12} = (-1)^k \arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \pi k, k \in Z$ -ро ҳосил мекунем.

Азбаски $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$ аст, ҳалҳои $\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12} = (-1)^k \left(-\frac{\pi}{4}\right) + \pi k$

$\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12} = (-1)^k \left(-\frac{\pi}{4}\right) + \pi k$ yoki $x = \frac{\pi}{6} + (-1)^{k+1} \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$ -ро ҳосил мекунем. ▲

Ҳалҳои муҳими муодилаи $\sin x = a$ -ро мебиёрем:

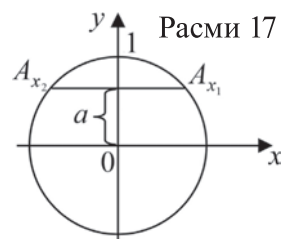
Ҳангоми $a=1$ будан $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$; ҳангоми $a=-1$ будан $x = \frac{3}{2}\pi + 2\pi k, k \in Z$; Агар $a=0$ бошад $x = \pi k, k \in Z$.

Мисоли 4. Муодиларо ҳал кунед: $\sin\left(\frac{\pi}{10} - \frac{x}{2}\right) = 0$.

▲ Ҳангоми $a=0$ будан $-\frac{\pi}{10} + \frac{x}{2} = \pi k, \frac{x}{2} = \pi k + \frac{\pi}{10}$, яъне ҳалҳои $x = \frac{\pi}{5} + 2\pi k, k \in Z$ -ро меёбем. ▲

$\sin x = a$ -ро дар доираи воҳидӣ фаҳмонидан осон аст, мувофиқи таърифи $\sin x$ қиммати он дар доираи воҳидӣ ординатаи нуқтаи A_x мебошад. Ҳангоми $|a| < 1$ будан ин ҳел нуқтаҳо 2-то, яъне A_{x_1} ва A_{x_2} мешавад.

Ҳангоми $a = \pm 1$ будан 1-то мешавад (расми 17).



Муодилаи $\cos x = a$

Азбаски $-1 \leq \cos x \leq 1$ аст, ин муодила ҳангоми $|a| > 1$ будан ҳал надорад.

Барои ёфтани ҳалли ин муодила дар интервали $-1 \leq a \leq 1$ таърифи зеринро мебиёрем.

Арккосинуси адади $a \in [-1; 1]$ гуфта, адади $x \in [0; \pi]$ косинусаш ба a баробарро меноманд: агар $\cos x = a$ ва $x \in [0; \pi]$ бошад, $\arccos a = x$.

Мувофиқи таъриф, дар интервали, $[0; \pi]$ муодилаи $\cos x = a$ ба як решаи $x = \arccos a$ соҳиб буда, азбаски $y = \cos x$ функцияи чуфт аст, дар интервали $[-\pi; 0]$ низ ба ҳалли ягонаи $x = -\arccos a$ соҳиб аст. Даври функция 2π . Он гоҳ барои ҳал кардани муодилаи $\cos x = a$ -ро ҳал кардан формулаи. $x = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in Z$ (2) -ро ҳосил мекунем.

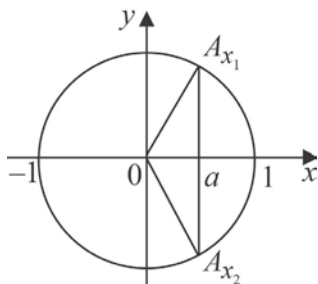
Мисоли 5. Ҳисоб кунед: 1) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

▲ Мувофиқи таъриф, азбаски $-1 \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \leq 1, \frac{\pi}{6} \in [0; \pi]$ ва $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ аст, $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$ мешавад. Дар асл $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$ мешавад. ▲

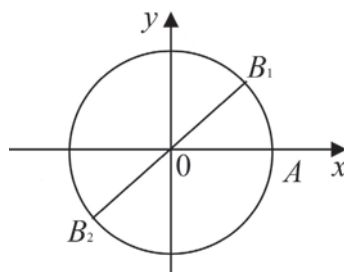
Мисоли 6. Муодиларо ҳал кунед: $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

△ Мувофиқи формулаи (2) ҳалли муодила $x = \pm \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi k, k \in Z$,
 аммо $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$.

Пас, ҳалл дар намуди зерин мешавад: $x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$ ▲



Расми 18.



Расми 19.

Ҳалли муодилаи $\cos x = a$ -ро дар доираи воҳидӣ мефаҳмонем (расми 18). Мувофиқи таърифи функцияи $\cos x$ қиммати он дар доираи воҳиди абсциссаи нуқтаи A_x мебошад. Ҳангоми $|a| < 1$ будан, ин ҳел нуқтаҳо 2-то, яъне A_{x_1} ва A_{x_2} мешавад. Ҳангоми $a=1$ ва $a=-1$ будан бошад 1-то мешавад.

Ҳалҳои ҳолатҳои муҳими муодилаи $\cos x = a$ -ро мебиёрем:

Ҳангоми $a=1$ будан $x = 2\pi k, k \in Z$; ҳангоми $a=-1$ будан $x = \pi + 2\pi k, k \in Z$;

ҳангоми $a=0$ будан $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$ мешавад.

Мисоли 7. Муодиларо ҳал кунед: $\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$.

△ Аз формулаи ҳалли муодилаи $\cos x = 0$ баробарии $3x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k$ -ро ҳосил мекунем. Аз ин ҷо $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{3}, k \in Z$. ▲

Муодилаи $\operatorname{tg} x = a$

Барои ҳал кардани ин муодила таърифи зеринро дохил мекунем. Арктангенс адади $a \in R$ *зӯфта*, тангенс ба a баробари адади $x \in (-\pi/2; \pi/2)$ -ро мегӯянд: агар $\operatorname{tg} x = a$ ва $x \in (-\pi/2; \pi/2)$ бошад, $\operatorname{arctg} a = x$ мешавад.

Азбаски $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ аст, пас $\operatorname{tg} x$ ба нисбати ординатаи нуқтаи $B(x; y)$ бар абсциссааш баробар аст (расми 19). Яъне, ин нуқта нуқтаи буриши хати рости $\frac{y}{x} = a$ ва доираи воҳидӣ мебошад. Мувофиқи расми 19 ин ҳел нуқтаҳо 2-то: нуқтаҳои B_1 ва B_2 . Бинобар ин ҳалли муодила чунин мешавад:
 $x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in Z. (3)$

Мисоли 8. Ҳисоб кунед: 1) $\arctg 1$; 2) $\arctg(-\sqrt{3})$.

△ 1) Азбаски $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$ ва $\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ аст $\arctg 1 = \frac{\pi}{4}$;

2) Азбаски $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$ ва $-\frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ аст $\arctg(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$. ▲

Мисоли 9. Муодиларо ҳал кунед: $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}$.

△ Мувофиқи (3), ҳалҳои муодила чунин мешаванд:

Азбаски $x - \frac{\pi}{6} = \arctg(-\sqrt{3}) + \pi n$ $\arctg(-\sqrt{3}) = -\arctg(\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$ аст ҳалҳои

муодила $x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} + \pi n$, ёки $x = -\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$. ▲

Барои муодилаҳои соддатарин чадвали зеринро мебиёрем:

Муодила	Ҳалли онҳо	Баъзе хусусиятҳо
$\sin x = a$	$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in Z.$	$\arcsin(-a) = -\arcsin a, a \leq 1.$
$\cos x = a$	$x = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in Z.$	$\arccos(-a) = \pi - \arccos a, a \leq 1.$
$\operatorname{tg} x = a$	$x = \arctg a + \pi k, k \in Z.$	$\arctg(-a) = -\arctg a, a \in R.$

Хосиятҳое. ки дар сутуни сеюм оварда шудаанд, имконияти ёфтани қимматҳои арксинуси (арккосинуси, арктангенси) ададҳои манфиро бо ёрии қимматҳои арксинуси ададҳои мусбат медиҳад. Масалан:

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\pi}{4},$$

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6},$$

$$\arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\arctg \frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{\pi}{6}.$$

Мисоли 10. Муодиларо ҳал кунед: $\cos(10x + \frac{\pi}{8}) = \frac{1}{2}$.

△ Ишоракунии $10x + \frac{\pi}{8} = z$ -ро дохил карда, муодилаи $\cos z = \frac{1}{2}$ -ро ҳосил

мекунем. Аз ин ҷо мувофиқи формулаи (2) соҳиб мешавем $z = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$

яъне $10x + \frac{\pi}{8} = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ ёки $x = \frac{1}{10} \left(-\frac{\pi}{8} \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right), k \in Z$. ▲

Муодилаҳои намуди $\sin x = \sin a$, $\cos x = \cos b$, $\operatorname{tg} x = \operatorname{tgc}$

Ҳалли ин намуд муодилаҳо, мувофиқан чунин мешаванд:

$$x = (-1)^k a + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad x = \pm b + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x = c + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (4)$$

Мисоли 11. Муодиларо ҳал кунед: $\cos(3x - 40^\circ) = \cos(2x + 60^\circ)$.

△ Мувофиқи формулаи (4), муодилаи $3x - 40^\circ = \pm(2x + 60^\circ) + 360^\circ n$, $n \in \mathbb{Z}$ -ро ҳосил мекунем. Аз ин чо номаълум x ёфта мешавад:

$$3x - 40^\circ = 2x + 60^\circ + 360^\circ n \Leftrightarrow x = 100^\circ + 360^\circ n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$3x - 40^\circ = -2x - 60^\circ + 360^\circ n, \quad 5x = -20^\circ + 360^\circ n \Leftrightarrow x = -4^\circ + 72^\circ n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad \blacktriangle$$

Мисоли 12. Муодиларо ҳал кунед: $\sin^2 x + 3\sin x + 2 = 0$.

△ Ишоракунии $\sin x = z$ -ро дохил карда, муодилаи квадратии $z^2 + 3z + 2 = 0$ -ро ҳосил мекунем. Ин муодилаҳоро ҳал карда $z_1 = -2$, $z_2 = -1$ ёфта мешавад. Мувофиқи ишоракуни муодилаҳои $\sin z = -2$ ва $\sin x = -1$ -ро ҳосил мекунем. $\sin z = -2$ ҳал надорад. Муодилаи $\sin x = -1$ ба ҳалли $x = 270^\circ + 360^\circ k$, $k \in \mathbb{Z}$ соҳиб аст. Пас, ҳалли муодила $x = 270^\circ + 360^\circ k$, $k \in \mathbb{Z}$ мешавад. ▲

Савол ва супоришҳо

1. Муодилаи $\sin x = a$ чӣ хел ҳал карда мешавад? Бо мисолҳо фаҳмонед.
2. Муодилаи $\cos x = a$ чӣ хел ҳал карда мешавад? Мисол биёред.
3. Муодилаи $\operatorname{tg} x = a$ чӣ хел ҳал карда мешавад? Бо мисолҳо фаҳмонед.
4. Ба адади $\arcsin a$ таъриф диҳед. Бо мисолҳо фаҳмонед.
5. Ба адади $\arccos a$ таъриф диҳед. Бо мисолҳо фаҳмонед.
6. Ба адади $\operatorname{arctg} a$ таъриф диҳед. Бо мисолҳо фаҳмонед.



Машқҳо

130. Ҳисоб кунед (130–141):

1) $\arcsin 0$; 2) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\arcsin \frac{1}{2}$; 4) $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$.

131. 1) $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$; 2) $\arcsin \left(-\frac{1}{2} \right)$; 3) $\arcsin 1$; 4) $\arcsin (-1)$.

132. 1) $\arccos 0$; 2) $\arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$; 3) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\arccos (-1)$.

133. 1) $\arccos \left(-\frac{1}{2} \right)$; 2) $\arccos \frac{1}{2}$; 4) $\arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$.

- 134.** 1) $\arctg 1$; | 2) $\arctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; | 3) $\arctg\frac{1}{\sqrt{3}}$; | 4) $3\arctg(-\sqrt{3})$.
- 135.** 1) $\arctg 0$; | 2) $\arctg(-\sqrt{3})$; | 3) $\arctg(-1)$; | 4) $7\arctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.
- 136.** 1) $\arcsin 1 + \arcsin(-1)$; 2) $2\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + 4\arcsin\frac{1}{2}$.
- 137.** 1) $4\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} - 2\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 2) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
- 138.** 1) $2\arccos 1 + 3\arccos 0$; 2) $6\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} - 3\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$.
- 139.** 1) $2\arccos(-1) - 3\arccos 0$; | 2) $2\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 4\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
- 140.** 1) $3\arctg\sqrt{3} + 3\arccos\frac{1}{2}$; 2) $3\arctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 2\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
- 141.** 1) $2\arctg 1 + 3\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$; 2) $5\arctg(-\sqrt{3}) - 3\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
- 142.** Маъно доштан ё надоштани ифодахоро муайян кунед (**142–143**):
1) $\arccos(\sqrt{8}-3)$; | 2) $\arcsin(2-\sqrt{15})$; | 3) $\arccos(3-\sqrt{18})$.
- 143.** 1) $\tg(2\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2})$; | 2) $\arcsin(\sqrt{6}-2)$; | 3) $\tg(3\arccos\frac{1}{2})$.
- 144.** Муодиларо ҳал кунед (**144–161**):
1) $\sin x = -\frac{1}{2}$; 2) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\sin 2x = \frac{1}{2}$.
- 145.** 1) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\sin x = 1$; 3) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- 146.** 1) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\cos 2x = -1$; 4) $\cos 3x = 1$.
- 147.** 1) $\cos x = \frac{1}{2}$; 2) $\cos x = -1$; 3) $\cos 5x = -\frac{1}{2}$; 4) $\cos 3x = -1$.

148. 1) $\operatorname{tg}x = -\sqrt{3}$; 2) $\operatorname{tg}x = 1$; 3) $\operatorname{tg}9x = -1$; 4) $\operatorname{tg}3x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

149. 1) $\operatorname{tg}x = 0$; 2) $\operatorname{tg}x = 2$; 3) $\operatorname{tg}6x = -3$; 4) $\operatorname{tg}5x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

150. 1) $2 \cos x + 1 = 0$; 2) $2 \cos x - \sqrt{3} = 0$; 3) $2 \cos x - \sqrt{2} = 0$.

151. 1) $\sqrt{2} \sin x - 1 = 0$; 2) $2 \sin x + \sqrt{3} = 0$; 3) $2 \sin x + \sqrt{2} = 0$.

152. 1) $\sin\left(-\frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\operatorname{tg}4x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; 3) $\cos(-3x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

153. 1) $2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{3} \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = 1$; 3) $2 \cos\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$.

154. 1) $\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = -1$; 2) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{3}\right) = 1$; 3) $2 \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2}\right) = \sqrt{3}$.

155. 1) $2 \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2}\right) = \sqrt{3}$; 2) $2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = \sqrt{2}$; 3) $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$.

156. 1) $(2 \sin x + \sqrt{2})(\sin 4x + 1) = 0$; 2) $(2 - \cos x)(1 + 3 \cos x) = 0$.

157. 1) $2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$; 2) $4 \cos^2 x - 8 \cos x - 3 = 0$;

3) $2 \sin^2 x - \sin x - 6 = 0$; 4) $2 \cos^2 x - \cos x - 6 = 0$.

158. 1) $2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$; 2) $4 \cos^2 x - 8 \cos x - 3 = 0$;

3) $2 \sin^2 x - \sin x - 6 = 0$; 4) $2 \cos^2 x - \cos x - 6 = 0$.

159. 1) $2 \cos^2 x - \sin x + 1 = 0$; 2) $\operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x - 4 = 0$;

3) $4 \sin^2 x - \cos x - 1 = 0$; 4) $\operatorname{tg} x - \sqrt{3} \operatorname{tg} x + 1 = \sqrt{3}$.

160. 1) $\cos x = \cos 2x$; 2) $\operatorname{tg}2x = \operatorname{tg}3x$; 3) $\sin 7x = \sin 3x$; 4) $\cos 4x = \cos 5x$.

161. 1) $\sin 4x = \sin x$; 2) $\sin 2x = \cos 3x$; 3) $\operatorname{tg}10x = \operatorname{tg}8x$; 4) $\sin 5x = \sin 7x$.

62-64

НОБАРОБАРИҲОИ СОДДАТАРИНИ ТРИГОНОМЕТРӢ

Нобаробариҳои намуди $a_1 < \sin x < b_1$, $a_2 < \cos x < b_2$, $a_3 < \operatorname{tg}x < b_3$ нобаробариҳои соддатарини тригонометрӣ номида мешаванд. Дар ин чо

$a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$ – ададҳои ҳақиқии додашуда.

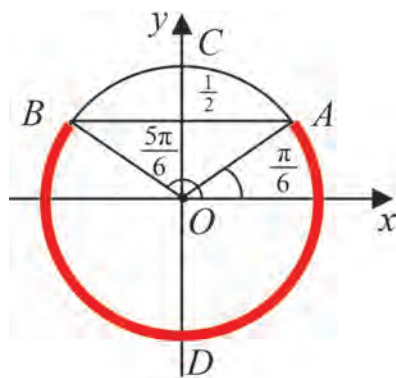
Ҳангоми ин намуд нобаробарихоро ҳал кардан, аз доираи воҳидӣ ва графики функция истифода кардан мувофиқ аст.

Мисоли 1. Нобаробарии $\sin x \leq 0,5$ -ро дар порчаи $[0, 2\pi]$ ҳал кунед.

△ Доираи воҳидиро дида мебароем.

Дар ин доира нуқтаҳое ки ординатааш ба 0,5 баробар ва аз он хурдро меёбем. Аз расми 20 равшан аст, ки ҳамаи нуқтаҳои камони BDA шарти болоро қаноат мекунонад. Бинобар ин маҷмӯи ададҳои x , $\left[0; \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}; 2\pi\right]$ ҳалли нобаробарӣ мешавад.

Ҷавоб: $x \in \left[0; \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}; 2\pi\right]$ ▲

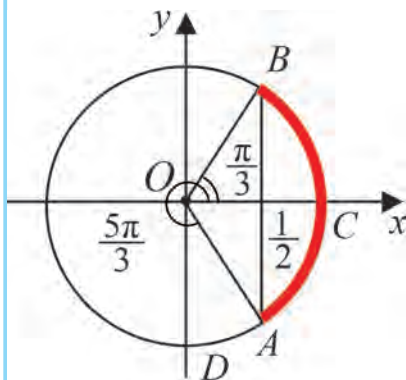


Расми 20

Мисоли 2. Нобаробарии $\cos x > \frac{1}{2}$ -ро дар порчаи $[0, 2\pi]$ ҳал кунед.

△ Дар доираи воҳиди нуқтаҳои абсиссаҳояш ба $\frac{1}{2}$ баробар ва аз он калонро меёбем. Аз расми 21 дида мешавад, ки ҳамаи нуқтаҳои камони ACB шарти болоро қаноат мекунонад. Бинобар ин маҷмӯи ададҳои x $\left[0; \frac{\pi}{3}\right] \cup \left(\frac{5\pi}{3}; 2\pi\right)$ ҳалли нобаробарӣ мешавад.

Ҷавоб: $x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right] \cup \left(\frac{5\pi}{3}; 2\pi\right)$ ▲



Расми 21.

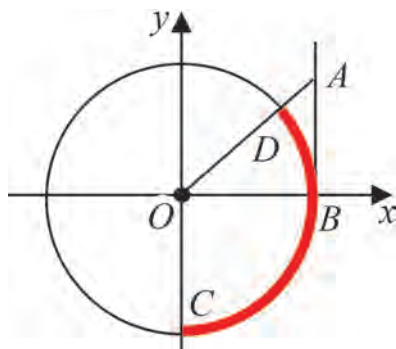
Мисоли 3. Нобаробарии $\operatorname{tg} x \leq 1$ -ро дар интервали $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ ҳал кунед.

△ Аз нуқтаи B -и доираи воҳиди хати рости AB -и ба тири OY параллелро мегузаронем (расми 22).

Он гоҳ нуқтаи A -ро чунон интихоб мекунем ки $OB=AB$ шавад. $\triangle AOB$ секунҷаи баробарпахлӯ ва росткунҷа аст. Бигузор D нуқтаи буриши гипотенузаи OA бо давра бошад.

Аз расм дида мешавад, ки ҳамаи нуқтаҳои камони DBC нобаробарии додашударо қаноат мекунонад.

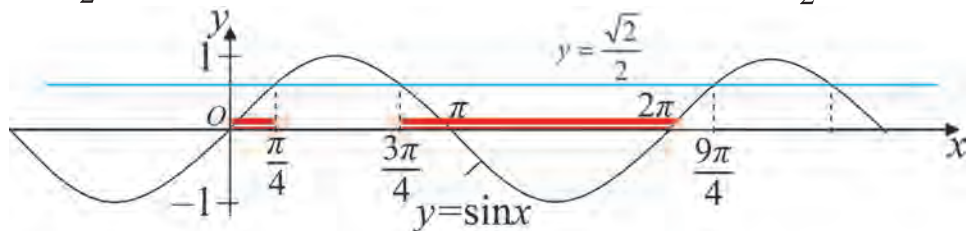
Ҷавоб: $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right]$. ▲



Расми 22.

Мисоли 4. Нобаробариро ҳал кунед: $\sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

▲ Дар як системаи координатаҳо графикҳои функсияҳои $y = \sin x$ ва $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ -ро кашада (расми 23), ҳалли муодилаи, $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ -ро дар порчаи



Расми 23

$[0; 2\pi]$ меёбем. Аз расм дида мешавад, ки ҳалли нобаробарии $\sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$

дар порчаи $[0; 2\pi]$ интервалҳои $\left[0; \frac{\pi}{4}\right)$ ва $\left(\frac{3\pi}{4}; 2\pi\right]$ мешавад. Аз даври

будани функсия маҷмӯи $\left[2\pi n; \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; 2\pi(n+1)\right]$, $n \in \mathbb{Z}$ -и x

ҳалли нобаробарӣ аст. ▲

Мисоли 5. Нобаробариро ҳал кунед: $-2\cos x \geq 1$.

▲ Аввал дар як системаи координатаҳо графикҳои функсияҳои $y = \cos x$ ва $y = -\frac{1}{2}$ -ро мекашем. Баъдан ҳалли муодилаи $\cos x = -\frac{1}{2}$ -ро дар порчаи

$[0; 2\pi]$, ки $\frac{2\pi}{3}$ ва $\frac{4\pi}{3}$ мебошад, меёбем. Пас, ҳалҳои нобаробарӣ аз порчаҳои

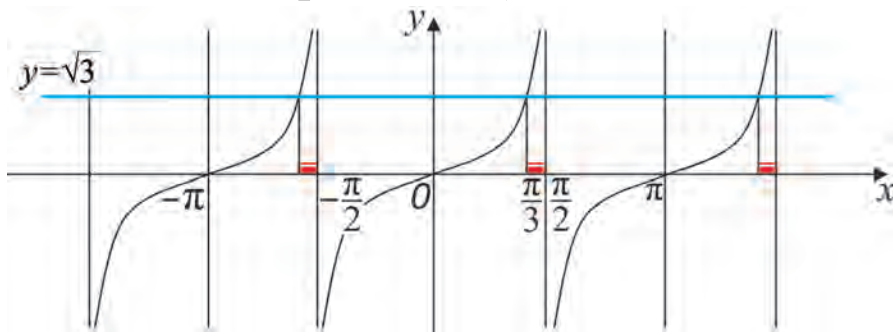
$$\left[\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{4\pi}{3} + 2\pi n \right], n \in Z \text{ иборат будааст. } \blacktriangle$$

Мисоли 6. Нобаробарино ҳал кунед: $\operatorname{tg} x \geq \sqrt{3}$.

\triangle Графики функцияҳои $y = \operatorname{tg} x$ ва $y = \sqrt{3}$ -ро дар як системаи координатаҳо мекашем (расми 24). Баъдан ҳалли муодилаи $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ -ро дар порчаи $[0; \pi]$ меёбем.

Ҳалли ин муодила $x = \frac{\pi}{3}$. Бинобар ин маҷмӯи ҳалли нобаробарӣ дар порчаи $[0; \pi]$ интервали $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2} \right)$ мебошад. Аз он ки даври функцияи $y = \operatorname{tg} x$ ба π баробар аст, истифода бурда, ҳамаи ҳалҳои нобаробарино меёбем:

$$\left[\frac{\pi}{3} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n \right), n \in Z. \blacktriangle$$



Расми 24.

Савол ва супоришҳо



Нобаробариҳои $\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} x > -1$ чӣ хел ҳал карда мешавад?

Машқҳо

162. Нобаробарино дар интервали додашуда ҳал кунед:

- 1) $\sin x > \frac{1}{2}, x \in [0; \pi];$
- 2) $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}, x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right];$
- 3) $\operatorname{tg} x > -\sqrt{3}, x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right);$
- 4) $\cos x > \frac{1}{2}, x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right];$

5) $\sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}, x \in [-\pi; 0];$

6) $\operatorname{tg} x < \frac{1}{\sqrt{3}}, x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right);$

7) $\cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2}, x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right];$

8) $\cos 2x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right].$

163. Нобаробари ро ҳал кунед (**163–169**):

1) $\sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2};$ 2) $\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2};$ 3) $\operatorname{tg} x < -\frac{1}{\sqrt{3}};$ 4) $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}.$

164. 1) $\sin x > \frac{1}{2};$ 2) $\operatorname{tg} x > -1;$ 3) $\cos x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2};$ 4) $\cos x \leq \frac{1}{2}.$

165. 1) $\sin 3x < \frac{1}{2};$ 2) $\sin \frac{x}{4} < -\frac{\sqrt{3}}{2};$ 3) $\cos \frac{x}{2} > \frac{\sqrt{3}}{2};$ 4) $\operatorname{tg} 3x > 1.$

166. 1) $2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \leq \sqrt{2};$ 2) $\sqrt{2} \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \geq 1;$ 3) $2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) > \sqrt{3}.$

167. 1) $\sin 2x \cos \frac{\pi}{3} - \cos 2x \sin \frac{\pi}{3} \leq \frac{\sqrt{3}}{2};$ 2) $2 \sin 2x \cos 2x \geq \frac{1}{2}.$

168. 1) $\sin \frac{\pi}{4} \cos 3x + \cos \frac{\pi}{4} \sin 3x < \frac{\sqrt{2}}{2};$ 2) $\cos \frac{\pi}{4} \cos 2x - \sin 2x \sin \frac{\pi}{4} < -\frac{\sqrt{3}}{2}.$

169. 1) $\cos\left(\frac{x}{2} + 1\right) \geq \frac{1}{2};$ 2) $\sin\left(\frac{x}{4} - 2\right) < \frac{\sqrt{2}}{2};$ 3) $\cos\left(1 - \frac{x}{3}\right) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}.$

Намунаи корҳои назоратӣ

Муодилаҳоро ҳал кунед (**1–4**):

1. $\sin 3x = 0.$

2. $4 \cos 6x = -2\sqrt{3}.$

3. $5 \cdot \operatorname{tg} 4x = 3.$

4. $5 \operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x - 1 = 0.$



Нобаробариҳоро дар интервали $x \in [0; \pi]$ ҳал кунед (**5–6**):

5. $\sin x > \frac{1}{2}.$

6. $\operatorname{tg} x \leq -1.$

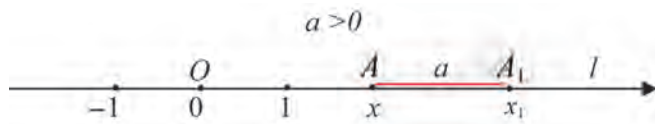
68

ҶОЙИВАЗКУНИИ ГРАФИКҲО

Кўчиш

Тири ададӣ l ва нуқтаи O ҳисоби ибтидоии он бошад (расми 25), ҳар як нуқтаи ихтиёрии l ро ба воҳиди a кўчонед. Агар $a > 0$ бошад, кўчиш дар самти мусбат (ба самти тир) мешавад. Агар $a < 0$ бошад, кўчиш ба самти муқобил мешавад, ҳангоми $a = 0$ будан нуқтаҳо аз ҷойи худ намекуҷанд.

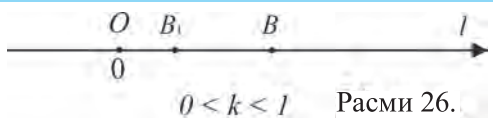
Агар ҳангоми нуқтаи $A=A(x)$ -и координатааш x -ро ба воҳиди а кўчонида. ба нуқтаи $A_1(x_1)$ гузарад, координатаи нуқтаи A_1 аз рўйи формулаи $x_1=x+a$ ёфта мешавад. Нуқтаи A акси (прообраз) нуқтаи A_1 , A_1 бошад нусхаи (образи) нуқтаи A номида мешавад.



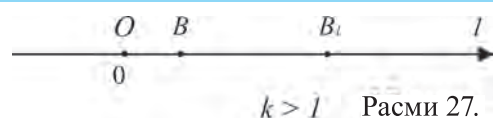
Расми 25.

Кашиш

Нуқтаи $B(x)$ дар хати рости l k -маротиба аз ибтидои координатаҳо дуртар карда шуда (ёки ба O наздик карда шуда) ба нуқтаи $B_1(x)$ гузаронида. координатаи нуқтаи B_1 аз рўи формулаи $x = kx$ ҳисоб карда мешавад. Агар $k > 0$ бошад, нуқтаҳои B_1 ва B дар як тарафи нуқтаи O , агар $k < 0$ бошад, нуқтаҳои B_1 ва B дар тарафҳои гуногуни нуқтаи O қой мегиранд. Агар $|k| < 1$ бошад, (расми 26) порчаи $x=OB$ *буриш* k маротиба кўтоҳ мешавад; агар $|k| > 1$ бошад, (расми 27) порчаи k -маротиба дароз мешавад; ҳангоми $k=1$ нуқтаҳои B ва B_1 болоиҳам меафтанд, ҳангоми $k=-1$ будан онҳо нисбат ба нуқтаи O симметрӣ қойгир мешаванд.



Расми 26.

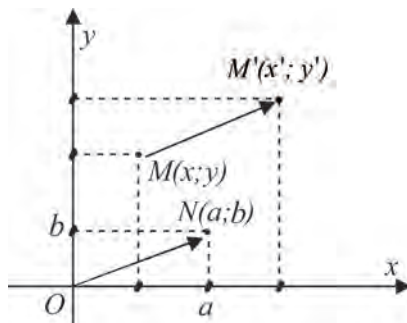


Расми 27.

Параллелкўчонӣ

Ҳангоми параллелкўчонӣ ҳамаи нуқтаҳои ҳамвории координатии xOy дар як хел самт ба як хел масофа мекўчад (расми 28). Чунончи, агар ибтидои координата $O(0;0)$ ба нуқтаи $N(a;b)$ кўчонида шуда бошад, нуқтаи $M(x;y)$ ба нуқтаи $M'(x^1;y^1)$ мекўчад. Барои координатаҳои нуқтаи $M'(x^1;y^1)$ формулаи зерин қойи дорад:

$$x^1=x+a, y^1=y+b.$$



Расми 28.

Ивазкунии графики функция

Қойивазкуниҳои боло (кўчиш, кашиш, параллелкўчонӣ) бо ёрии графики функцияи $y=f(x)$ имконияти кашидани графики функцияҳои $y=f(x-a)+b$, $y = m \cdot f\left(\frac{x}{k}\right)$ (дар ин ҷо a, b, m, k – ададҳои доимӣ ва $m \neq 0, k \neq 0$)-ро медиҳад.

Масалан, барои кашидани графики функцияи $y=f(x-a)+b$ бо ёрии

графики функцияи $y=f(x)$ ҳар як нуктаи графикаи функцияи $y=f(x)$ -ро ба a воҳид ба тарафи рост кўчонида баъдан ба b воҳид ба боло бардошта мешавад, яъне мувофиқи вектори $(a;b)$ параллел кўчонида мешавад.

Барои кашидани графикаи функцияи $y = m \cdot f\left(\frac{x}{k}\right)$ бо ёрии графикаи функцияи $y=f(x)$ абсиссаи ҳар як нуктаи графикаи $y=f(x)$ қад-қади Ox k маротиба фишурда мешавад (агар $k>0$ бошад, ба тарафи рост, $k<0$ бошад ба тарафи чап) ва ординатааш қад-қади тири Oy ба m воҳид кашида мешавад ($m>0$ бошад ба боло, $m<0$ бошад ба поён).

Мисоли 1. Бо ёрии графикаи функцияи $y=3x$ графикаи функцияи $y=3(x-1)+4$ -ро кашед.

△ Барои кашидани графикаи функцияи $y=3(x-1)+4$ графикаи функцияи $y=3x$ -ро мувофиқи вектори $(1;4)$ параллел кўчонидан лозим аст. ▲

Мисоли 2. Бо ёрии графикаи функцияи $y=-2x+4$ графикаи функцияи $y=-2(x+3)+5$ -ро кашед.

△ Барои кашидани графикаи функцияи $y=-2(x+3)+5$ графикаи функцияи $y=-2x+4$ -ро мувофиқи вектори $(3;1)$ параллел кўчонидан лозим аст. ▲

Мисоли 3. Аз графикаи функцияи параболаи $y=x^2$ истифода бурда, графикаи функцияи $y=2-(x+3)^2$ -ро кашед.

△ Барои кашидани графикаи функцияи $y=2-(x+3)^2$ аввал графикаи функцияи $y=x^2$ ба 3 воҳид ба чап ва нисбат ба тири Ox симметрий кўчонида мешавад. Баъдан графикаи ҳосилшуда мувофиқи тири Oy ба 2 воҳид боло бардошта мешавад. ▲

Мисоли 4. Бо ёрии графикаи функцияи $y=\sin x$ графикаи функцияи $y=\sin 2x$ -ро кашед.

△ Барои кашидани графикаи функцияи $y=\sin 2x$ кашидан абсиссаи ҳар як нуктаи графикаи функцияи $y=\sin x$ қад қади тири Ox ду маротиба ба рост фишурда мешавад. ▲

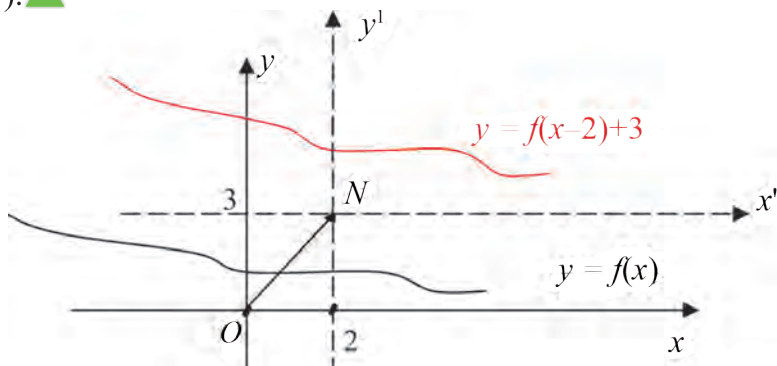
Мисоли 5. Бо ёрии графикаи функцияи $y=\cos x$ графикаи функцияи $y = -2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ -ро кашед.

△ Барои кашидани графикаи функцияи $y = -2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ ёки $y = -2 \cos 2\left(x - \frac{\pi}{8}\right)$ аввал графикаи функцияи $y=\cos x$ ба $\frac{\pi}{8}$ ба тарафи рост кўчонида шуда, баъдан абсиссааш ба тарафи рост 2 маротиба фишурда шуда, ординатааш ба боло 2 маротиба кашида мешавад. Баъдан графикаи

охирин нисбат ба тири Ox симметрий кўчонида мешавад. ▲

Мисоли 6. Бо ёрии графикаи функцияи $y=f(x)$ графикаи функцияи $y=f(x-2)+3$, -ро кашед.

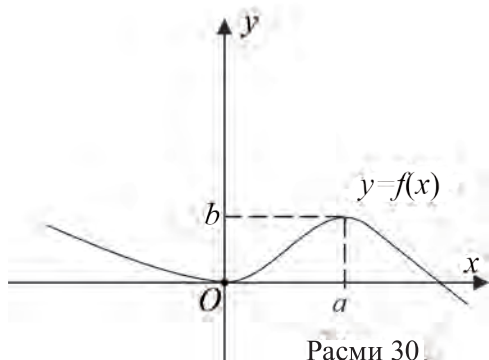
△ Барои кашидани графикаи функцияи $y=f(x-2)+3$ ҳар як нуктаи графикаи функцияи $y=f(x)$ мувофиқи вектори $(2;3)$ параллел кўчонидан лозим аст (расми 29). ▲



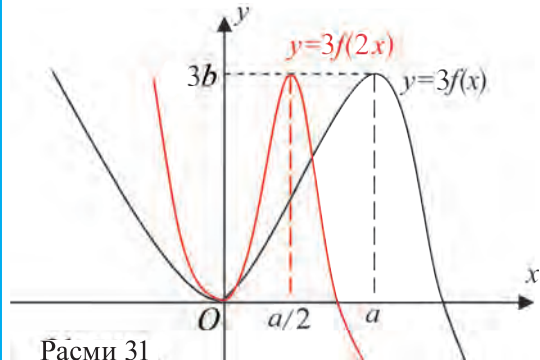
Расми 29.

Мисоли 7. Бо ёрии графикаи функцияи $y=f(x)$ (расми 30) графикаи функцияи $y=3f(2x)$ -ро кашед (ҳолати $m=3, k=\frac{1}{2}$).

△ Графикаи функцияи $y=f(x)$ қад қад тири Ox ба тарафи рост 2 маротиба фишурда мешавад ва қад қад тири Oy ба боло 3 маротиба кашаида мешавад. ▲



Расми 30.



Расми 31.

Савол ва супоришҳо

1. Кўчонидан чист? Кашаиш чист? Параллелкўчоний чӣ? Мисолҳо биёред.



2. Бо ёрии графикаи функцияи $y=\sin x$ графикаи функцияи $y=-\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ -ро кашед.

Машқҳо

170. Бо ёрии графики функцияи $y=f(x)=x^2-2x+3$ графики функцияҳои додашударо кашед.

1) $y = f(x) + 1$; 2) $y = 3f(x)$; 3) $y = 3f(x) - 2$;

4) $y = f(x-1) + 1$; 5) $y = 2f(x+1) + 1$; 6) $y = f\left(\frac{x}{2}\right)$;

7) $y = \frac{1}{2}f(2x)$; 8) $y = f(2x) - 3$; 9) $y = 2f(2x) - 5$.

171. Бо ёрии графики функцияи $y=f(x)=x^2-5x+6$ графики функцияҳои додашударо кашед.

1) $y = f(x-1)$; | 2) $y = f\left(\frac{x}{3}\right)$; | 3) $y = f(2x)$; | 4) $y = 3f\left(\frac{x}{3}\right) + 1$;

5) $y = -f(x)$; | 6) $y = 2f(x) - 3$; | 7) $y = -f(-x)$; | 8) $y = 2f(x+1) + 5$.

172. Бо ёрии графики функцияи $y=\cos x$ графики функцияҳои додашударо кашед.

1) $y = \cos x - 1$; | 2) $y = 2 \cos x + 1$;

3) $y = -\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; | 4) $y = 3\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

69-70

ГРАФИКҲОИ ФУНКСИЯҲОИ СОДАТАРИНЕ, КИ ДАР НАМУДИ ПАРАМЕТРӢ ДОДА ШУДААНД

Бигузур координатаҳои нуктаи (x, y) аз параметри t алоқаманд бошад: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$. Ҳангоми дар ягон интервали T тағйир ёфтани t маҷмӯи нуктаҳои $(\varphi(t), \psi(t))$ чӣ хел мешаванд. Ин маҷмӯро графики функцияи дар намуди параметрӣ додашуда меномем.

Мисоли 1. Координатаҳои нуктаи моддӣ дар намуди параметри $\begin{cases} x = 3t + 1, \\ y = 5t + 8 \end{cases}$ дода шудааст. Дар давоми ҳаракати худ хати кашидаи (траектория) ин нуктаи моддиро ёбед.

△ Аз муодилаҳо параметри t -ро меёбем: $t = \frac{x-1}{3}$ ва $t = \frac{y-8}{5}$.

Аз ифодаҳои ҳосилшуда ба муодилаи $\frac{x-1}{3} = \frac{y-8}{5}$ меоем. Аз ин ҷо $5x-5=3y-24$ ёки $5x-3y+19=0$. Ин муодилаи хати рост аст. Пас, функцияи

чусташуда истода $3y=5x+19$ ёки $y=\frac{5}{3}x+\frac{19}{3}$ будааст.

Ҷавоб: $y=\frac{5}{3}x+\frac{19}{3}$. ▲

Мисоли 2. Графики функцияи дар намуди параметрӣ додашуда

$$\begin{cases} x=3+5\sin t, \\ y=-7+5\cos t \end{cases}$$
 чӣ хел хат мешавад?

▲ Аз баробарихои додашуда $\sin t = \frac{x-3}{5}$, $\cos t = \frac{y+7}{5}$ буданашро меёбем.

Аз айнияти $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ истифода бурда, ба муодилаи $\left(\frac{x-3}{5}\right)^2 + \left(\frac{y+7}{5}\right)^2 = 1$ меоем. Аз ин ҷо $(x-3)^2 + (y+7)^2 = 25$. Ин муодилаи давраи марказаш дар нуқтаи $(3; -7)$ ва радиусаш $r=5$ мебошад. ▲

Мисоли 3. Агар координатаҳои нуқтаи моддӣ аз рӯи қонунияи $x=7t^2+1$ ва $y=3t$ тағйир ёбад, алоқамандии байни x ва y ро муайян кунед, $t \geq 0$.

▲ Аз қонуниятҳои додашуда t -ро муайян мекунем: $t = \sqrt{\frac{x-1}{7}}$, $t = \frac{y}{3}$.

ин ифодаҳо муодилаи зеринро соҳиб мешавем: $\frac{y}{3} = \sqrt{\frac{x-1}{7}}$ Аз ин дар охир

функцияи $y = 3\sqrt{\frac{x-1}{7}}$ -ро меёбем. Пас, функцияи $y = 3\sqrt{\frac{x-1}{7}}$ дар чустучӯ будааст. ▲

Мисоли 4. Графики функцияи дар намуди параметрӣ додашуда $\begin{cases} x=4\sin t, \\ y=3\cos t \end{cases}$ чӣ хел хат мешавад, дар ин ҷо $0 \leq t \leq 2\pi$?

▲ Аз баробарихои додашуда $\sin t = \frac{x}{4}$ ва $\cos t = \frac{y}{3}$ буданашро меёбем.

Аз айнияти $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ истифода бурда муодилаи $\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$ ёки $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ -ро ҳосил мекунем. Маҷмӯи нуқтаҳои бо ин муодила додашуда, ки марказаш ба ибтидои координата ва нимтирҳояш ба $a=4$, $b=3$ баробар аст **эллипс** номида мешавад. ▲



Савол ва супоришҳо

|| Ба функцияҳои намуди параметрӣ дошта мисолҳо биёред.

Машқҳо

173. Координатаҳои нуқтаи моддӣ дар намуди параметрӣ дода шудааст. Формулаи хатӣ дар давоми ҳаракати худ кашидаи (траекторияи нуқтаи моддӣ) ин нуқтаи моддиро ёбед. Расми мувофиқ кашед:

$$1) \begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = 4t + 8; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = 6t + 4, \\ y = 9t + 3; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x = 4t + 9, \\ y = 7t + 18; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x = 12t + 11, \\ y = 15t + 18. \end{cases}$$

174. Координатаҳои нуқтаи моддӣ дар намуди параметрӣ дода шудааст. Алоқамандии байни координатаҳои x ва y -ро муайян кунед:

$$1) \begin{cases} x = 17t^2 + 1, \\ y = 13t; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = 27t^2 + 21, \\ y = 23t; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x = 37t^2 + 31, \\ y = 33t; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x = 47t^2 + 41, \\ y = 43t. \end{cases}$$

175. Графики функцияи дар намуди параметрӣ додашуда аз чӣ хел хат иборат мешавад? Расми мувофиқро кашед:

$$1) \begin{cases} x = 7 \sin t, \\ y = 7 \cos t, \\ 0 \leq t \leq 2\pi; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos t, \\ 0 \leq t \leq 2\pi; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x = 5 \sin t, \\ y = 5 \cos t, \\ 0 \leq t \leq 2\pi; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x = 9 \sin t, \\ y = 9 \cos t, \\ 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

176. Графики функцияи дар намуди параметрӣ додашуда аз чӣ хел хат иборат мешавад? Расми мувофиқро кашед:

$$1) \begin{cases} x = 6 \sin t + 3, \\ y = 6 \cos t + 7, \\ 0 \leq t \leq 2\pi; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = 3 \sin t, \\ y = 3 \cos t - 1, \\ 0 \leq t \leq 2\pi; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x = 2 \sin t - 3, \\ y = 2 \cos t + 7, \\ 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

71

ФУНКСИЯИ НИШОНДИҲАНДАГӢ ВА ГРАФИКИ ОН

Дарача ва хосиятҳои он

Дарачаи нишондиҳандаи адади ҳақиқӣ ба хосиятҳои зерин соҳиб аст ($a > 0, a \neq 1$):

$$1) a^x \cdot a^y = a^{x+y}; \quad 2) a^x : a^y = a^{x-y}; \quad 3) (a^x)^y = a^{xy};$$

$$4) (a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x; \quad 5) \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x};$$

6) агар $0 < a < b$ ва $x > 0$ бошад, $a^x < b^x$; 7) агар $0 < a < b$ ва $x < 0$ бошад, $a^x > b^x$;

8) агар $x < y$ ва $a > 1$ бошад, $a^x < a^y$; 9) агар $x < y$ ва $0 < a < 1$ бошад, $a^x > a^y$

мешавад.

Мисоли 1. Муқоиса кунед: $2^{-\sqrt{3}}$ ва $3^{-\sqrt{3}}$.

△ Мувофиқи хосияти 7 азбаски $0 < 2 < 3$ ва $-\sqrt{3} < 0$ аст $2^{-\sqrt{3}} > 3^{-\sqrt{3}}$.

мешавад. ▲

Мисоли 2. Муқоиса кунед $\left(\frac{1}{2}\right)^{0,2}$ ва $\left(\frac{1}{2}\right)^{0,3}$.

△ Мувофиқи хосияти 9 азбаски $0,2 < 0,3$ аст $0 < \frac{1}{2} < 1$ мешавад. $\left(\frac{1}{2}\right)^{0,2} > \left(\frac{1}{2}\right)^{0,3}$. ▲

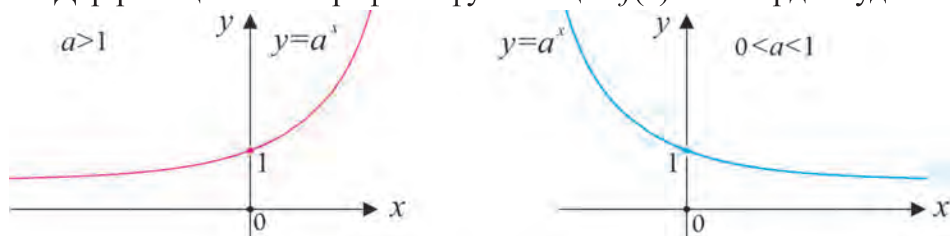
Функцияи нишондиҳандагӣ ва хосиятҳои он

Функцияи намуди $f(x)=a^x$, $a>0$, $a\neq 1$ функцияи нишондиҳандаги номида мешавад.

Ин хели функцияҳо ба хосиятҳои зерин соҳиб аст:

- 1) Соҳаи муайяниаш аз интервали $(-\infty; +\infty)$;
- 2) Соҳаи қимматҳояш аз интервали $(0; +\infty)$ иборат;
- 3) Барои ҳамаи $a(a>0, a\neq 1)$ -ҳо $a^0=1$;
- 4) Агар $a>1$ бошад, функция афзуншаванда;
- 5) Агар $0<a<1$ бошад, функция камшаванда мебошад.

Дар расмҳои поён графикаи функцияҳои $f(x)=a^x$ оварда шудааст.



Савол ва супоришҳо



1. Хосиятҳои дараҷаи нишондиҳандагии адади ҳақиқиро гӯед. Мисолҳо биёред.
2. Хосиятҳои функцияи нишондиҳандагиро гӯед.

Машқҳо

177. Ҳисоб кунед:

1) $\left(\left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$; 2) $9^{\sqrt{3}} : 3^{2\sqrt{3}}$ 3) $\left(2^{\sqrt[3]{4}}\right)^{\sqrt[3]{2}}$; 4) $4^{6\sqrt{2}-1} \cdot 16^{1-3\sqrt{2}}$.

178. Муқоиса кунед (178–179):

1) $2^{-\sqrt{3}}$ ва 1; 2) $4^{-\sqrt{6}}$ ва $\left(\frac{1}{2}\right)^4$; 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{5}}$ ва 1.

179.

1) $-3^{\sqrt{2}}$ ва 1; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\sqrt{2}}$ ва $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\sqrt{2}}$; 3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$ ва $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$.

180. Афзуншаванда ёки камшаванда будани функцияҳоро муайян кунед (180–182):

1) $y = 4^x$; 2) $y = -3^x$; 3) $y = 5^x - 2$; 4) $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$.

181.

1) $y = \sqrt{3}^x$; 2) $y = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x$; 3) $y = \left(\frac{\pi}{3}\right)^x$; 4) $y = (\sqrt{3}-1)^x$.

182.

1) $y = (\sqrt{3}-1)^{-x}$; 2) $y = (\sqrt{10}-2)^x$; 3) $y = (\pi-\sqrt{2})^x - 3$.

72-74

НОБАРОБАРИҲОИ НИШОНДИҲАНДАГИИ БЕВОСИТА ҲАЛШАВАНДА

Нобарибариҳои намуди $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, $a > 0$, $a \neq 1$

Нобаробарии $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, $a > 0$, $a \neq 1$ ба нобаробарии нишондиҳандагӣ мисол шуда метавонад. Ин нобаробарӣ ҳангоми $a > 1$ будан ба нобаробарии $f(x) > g(x)$ ҳангоми $0 < a < 1$ ба нобаробарии $f(x) < g(x)$ баробарқувва аст.

Мисоли 1. Нобаробариҳо ҳал кунед: $3^{x+5} > 3^{2-5x}$.

△ Азбаски $a=3 > 1$ аст нобаробарии додашуда ба нобаробарии $x+5 > 2-5x$ баробарқувва аст. Аз ин ҷо $6x > -3$ ёки $x > -0,5$ буданаширо меёбем. Пас, ҳалли нобаробарӣ аз интервали $(-0,5; \infty)$ иборат аст. Ҷавоб: $x \in (-0,5; \infty)$. ▲

Мисоли 2. Нобаробариҳо ҳал кунед: $2 \cdot 3^{x+2} - 2 \cdot 3^{x+1} - 5 \cdot 3^x < 63$.

△ 3^x -ро аз қавс берун мебарорем: $3^x(2 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3 - 5 \cdot 1) < 63$. Баъди содда гардонидан нобаробарии $3^x < 9$ -ро ҳосил мекунем. Аз ин ҷо $x < 2$.

Ҷавоб: $x \in (-\infty; 2)$. ▲

Мисоли 3. Нобаробариҳо ҳал кунед: $8^{5x^2-46} \geq 8^{2(x^2+1)}$.

△ Ин нобаробарӣ ҳангоми $a=8 > 1$ будан ба нобаробарии $5x^2-46 \geq 2(x^2+1)$ баробарқувва аст. Ин нобаробариҳо ҳал мекунем: $3x^2 \geq 48$, аз ин ҷо $x^2 \geq 16$. Пас, ҳалли нобаробарии додашуда $x \in (-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$ мешавад. ▲

Ҳангоми $a^x < b$ будан, ҳал надоштани нобаробарии ($a > 0$, $a \neq 1$) $b < 0$ ва ҳангоми $a^x > b$ будан, ҳалли нобаробарии $b < 0$ аз интервали $(-\infty; +\infty)$ иборат буданаши равшан аст.

Мисоли 4. Нобаробариҳо ҳал кунед: $4^x + 2^x - 6 \geq 0$.

△ Ивазкунии $2^x = t$ -ро амалӣ гардонидан, нобаробарии квадратии $t^2 + t - 6 \geq 0$ -ро ҳосил мекунем. Аз ин ҷо $t \leq -3$, $t \geq 2$ буданаширо меёбем. Аз он ба нобаробариҳои $2^x \geq 2$ ва $2^x \leq -3$ -ро соҳиб мешавем. Аз нобаробарии 1-ҳалли $x \geq 1$ -ро меёбем, нобаробарии 2-бошад ҳал надорад. Пас, ҳалли нобаробарии додашуда аз интервали $[1; +\infty)$ иборат аст. Ҷавоб: $x \in [1; +\infty)$. ▲



Савол ва супоришҳо

Дар бораи нобаробариҳои $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, $a > 0$, $a \neq 1$ маълумот диҳед. Мисолҳо биёред.

Машқҳо

183. Нобаробариҳо ҳал кунед: (183–184):

- | | | | |
|-------------------------------|----------------------------|--|------------------------------|
| 1) $4^{3x+5} \leq 4^{3-5x}$; | 2) $7^{4x+5} < 7^{9-5x}$; | 3) $6^{x+5} > 6^{3x}$; | 4) $8^{x+5} \leq 8^{2-5x}$; |
| 5) $11^x < 11^{2+5x}$; | 6) $2^{x-5} > 2^{25x}$; | 7) $2 \cdot 2^{x+2} - 3 \cdot 2^{x+1} - 5 \cdot 2^x \leq -6$; | |

- 8) $3 \cdot 5^{x+3} - 5^{x+2} - 2 \cdot 5^{x+1} < 68$; 9) $2 \cdot 4^{x+2} + 4^{x+1} - 5 \cdot 4^x \leq 31$;
 10) $2 \cdot 7^{x+2} - 2 \cdot 7^{x+1} - 14 \cdot 7^x < 10$. 11) $13^{x^2+46} \leq 13^{x^2+25x}$;
 12) $3^{x^2-4x} < 3^{2(x^2-15)}$; 13) $7^{2x^2-4} \leq 7^{3(x^2-x)}$.
 184. 1) $9^x + 3^x - 6 \leq 84$; 2) $25^x + 5^x - 30 > 0$;
 3) $5 \cdot 4^x + 2^x - 6 \leq 0$; 4) $9^x + 3^x - 12 > 0$.

Намунаҳои корҳои санҷишӣ

1. 1. Графики функцияи намуди $\begin{cases} x = 7 \sin 5t \\ y = 7 \cos 5t \end{cases}$ -ро созед.
 2. 2. Хосиятҳои функцияи $y = 11^{x+7}$ -ро нависед.
 Нобаробариро ҳал кунед: (3–5):
 3. $6^{x^2-7x-1} < 6^7$. 4. $\left(\frac{1}{2}\right)^{17x} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{54-x}$. 5. $0, 7^{-3x} \leq 1$.

75-78

МАЪЛУМОТ ДАР БОРАИ ЛОГАРИФМ. ФУНКСИЯИ ЛОГАРИФМӢ. МУОДИЛА ВА НОБАРОБАРИҲОИ ЛОГАРИФМИИ СОДДАТАРИН

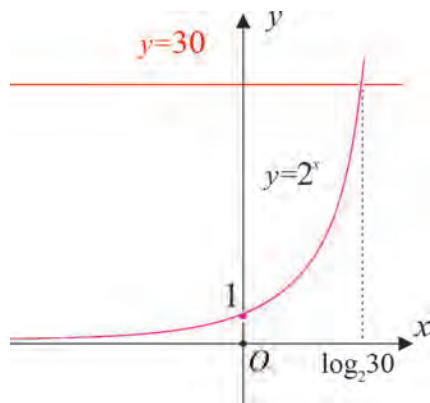
Маълумот дар бораи логарифм

Решаи муодилаи $2x = 32$ ба $x=5$ баробар, аммо решаи муодилаи $2x=30$ чӣ хел ёфта мешавад? Барои ҳал кардани чунин муодилаҳо мавҳуми логарифмро дохил мекунам. Муодилаи $2x=30$ ба решаи ягона соҳиб аст. Онро аз расми 32 дидан мумкин.

Ин реша логарифми адади 30 нисбат ба асоси 2 номида мешавад ва монанди $\log_2 30$ ишора карда мешавад. Пас, решаи муодилаи $2x=30$ адади $x=\log_2 30$ мебошад.

Таърифи зеринро мебиёрем:

Логарифми адади мусбати b нисбат ба асоси a гуфта, нишондихандаи дараҷаеро меноманд, ки барои ҳосил кардани адади b асос a -ро ба он бардоштан лозим аст, мегӯянд ва бо $\log_a b$ ишора мекунам. Асоси $a > 0$ ва $a \neq 1$ бояд шартро қаноат кунонад.



Расми 32

Масалан, \log_3 чунки $9=3^2$. Монанди ин, $\log_2 \frac{1}{8} = -3$; $\log_5 5=1$; $\log_7 1=0$.

Мисоли 1. Ҳисоб кунед: $\log_3 81$.

△ Мувофиқи таърифи логарифм, азбаски $3^4=81$ аст $\log_3 81=4$. ▲

Хосиятҳои логарифм

- Айнияти асоси логарифм: агар $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$ бошад, баробарии $a^{\log_a b} = b$ ҷой дорад;
- Агар $a>0$, $a\neq 1$ бошад, $\log_a 1=0$; $\log_a a=1$; мешавад;
- Агар $a>0$, $a\neq 1$ ва $x>0$, $y>0$ бошад, $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ мешавад;
- Агар $a>0$, $a\neq 1$ ва $x>0$, $y>0$ бошад, $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ мешавад;
- Агар $a>0$, $a\neq 1$, $x>0$ бошад, $\log_a x^n = n \cdot \log_a x$ мешавад;
- формулаи аз як асос (ба асоси нав) ба асоси дигар гӯзаштан: агар $a>0$, $a\neq 1$, $x>0$, $b>0$, $b\neq 1$ бошад, $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ мешавад;
- Агар $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, $b\neq 1$ бошад, $\log_a b \cdot \log_b a = 1$ мешавад.

Ишоракуниҳои $\log_{10} x = \lg x$ ва $\log_e x = \ln x$ ($e=2,718281\dots$) қабул карда шудааст.

Дар ин ҷо $\lg x$ логарифми даҳии x , $\ln x$ бошад, логарифми натуралии x номида мешавад. Функцияи $f(x)=\log_a x$ дар ин ҷо x -аргумент, $a>0$, $a\neq 1$) a функцияи логарифмии асоси a номида мешавад.

Хосиятҳои функцияҳои логарифмӣ:

- Соҳаи муайяниаш интервали $(0; +\infty)$
- Маҷмӯи қимматҳояш $\mathbb{R}=(-\infty; +\infty)$;
- Нол: яъне $x=1$, $\log_a 1=0$.
- Агар $a>1$ бошад, функцияи логарифми дар $(0; +\infty)$ афзуншаванда;
- Агар $0<a<1$ бошад, функцияи логарифмӣ дар $(0; +\infty)$ камшаванда.

Мисоли 2. Муқоиса кунед: $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$ ва 0 .

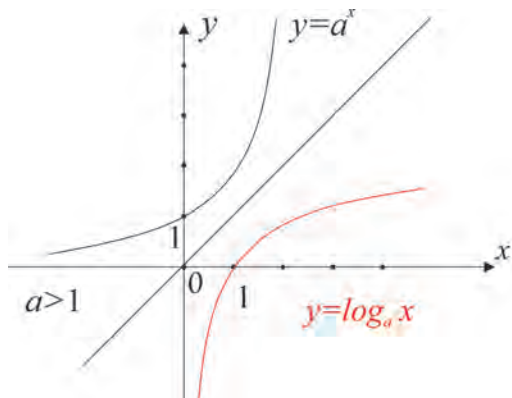
△ $\log_{\frac{1}{2}} 1 = 0$, асосаш $a = \frac{1}{2}$, яъне функция камшаванда аз $0 < \frac{1}{2} < 1$ ва $0 < \frac{1}{3} < 1$ буданаш $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} > \log_{\frac{1}{2}} 1$ мешавад. Пас, $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} > 0$ аст. ▲

Мисоли 3. Соҳаи муайянии функцияро ёбед: $f(x) = \log_2 \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 1}$.

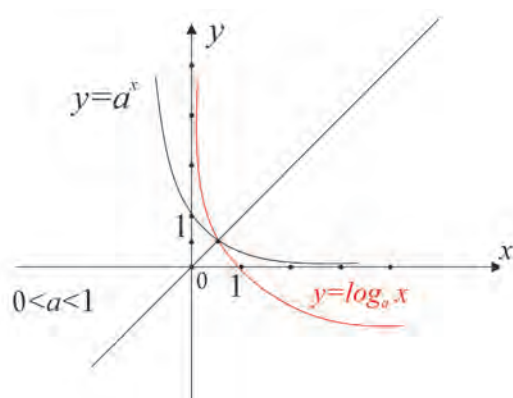
△ Соҳаи муайянии ин функцияи логарифмӣ аз маҷмӯи ҳамаи қимматҳои x , ки нобаробарии $\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 1} > 0$ -ро қаноат мекунонад иборат аст. Ин

нобаробариро ҳал карда, соҳаи муайянии функсия аз $x \in (1; 2) \cup (3; +\infty)$ буданашро меёбем. ▲

Дар расмҳои 33 ва 34 дар якҷоягӣ графикҳои функсияҳои $y=a^x$ ва $y=\log_a x$ (барои ҳолатҳои $a > 1$ ва $0 < a < 1$) тасвир карда шудаанд.



Расми 33



Расми 34

Мисоли 4. Муқоиса кунед: $\log_3 2 + \log_3 8$ ва $\log_3(2 + 8)$.

▲ Аз хосиятҳои логарифм истифода мебарем: $\log_3 2 + \log_3 8 = \log_3(2 \cdot 8) = \log_3 16$
 $\log_3(2 + 8) = \log_3 10$. Азбаски асоси логарифм $3 > 1$ пас $\log_3 16 > \log_3 10$.
 Аз ин ҷо: $\log_3 2 + \log_3 8 > \log_3(2 + 8)$. ▲

Мисоли 5. Ҳисоб кунед: $A = 4^{\log_8 125} + 27^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log_3 4}$

▲ Аз хосиятҳои логарифм истифода мебарем: $\frac{1}{2} \log_3 4 = \log_3 2$;

$$\log_8 125 = \frac{\log_2 125}{\log_2 8} = \frac{3 \log_2 5}{3} = \log_2 5; \quad 4^{\log_8 125} = 4^{\log_2 5} = 2^{2 \log_2 5} = 2^{\log_2 25} = 25.$$

$$\text{Ҳамчунин: } 27^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log_3 4} = 27^{\frac{1}{2} - \log_3 2} = 27^{\frac{1}{2}} \cdot 27^{-\log_3 2} =$$

$$= 3 \cdot 3^{-3 \log_3 2} = 3 \cdot 3^{\log_3 \frac{1}{8}} = 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{8}. \quad \text{Пас: } A = 25 + \frac{3}{8} = 25 \frac{3}{8}. \quad \blacktriangle$$

Мисоли 6. Ҳисоб кунед: $\frac{\lg 54 + \lg \frac{1}{2}}{\lg 72 - \lg 8}$.

▲ Аз хосиятҳои логарифм истифода мебарем:

$$\lg 54 + \lg \frac{1}{2} = \lg\left(54 \cdot \frac{1}{2}\right) = \lg 27 = \lg 3^3 = 3 \lg 3,$$

$$\lg 72 - \lg 8 = \lg \frac{72}{8} = \lg 9 = \lg 3^2 = 2 \lg 3.$$

Он гоҳ: $\frac{\lg 54 + \lg \frac{1}{2}}{\lg 72 - \lg 8} = \frac{3 \lg 3}{2 \lg 3} = \frac{3}{2}$. *Ҷавоб:* $\frac{3}{2}$. ▲

Муодилаҳои соддатарини логарифмӣ

Муодилаи намуди $\log_a x = b$ ($a > 0$, $a \neq 1$, b – адади ҳақиқӣ) –ро муодилаи соддатарини логарифмӣ гуфта мешавад. Ҳалли ягонаи ин муодила: $x = a^b$.

Мисоли 7. Муодиларо ҳал кунед: $\log_3 x = \frac{1}{2}$.

▲ Мувофиқи таърифи логарифм, ҳалли он $x = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$. *Ҷавоб:* $x = \sqrt{3}$. ▲

Мисоли 8. Муодиларо ҳал кунед: $\log_x 16 = 2$.

▲ Мувофиқи таърифи логарифм, $x^2 = 16$ ва $x > 0$, $x \neq 1$ Пас, ҳалли муодила $x = 4$ будааст.

Ҷавоб: $x = 4$. ▲

Мисоли 9. Муодиларо ҳал кунед:

$$\log_2(x^2 - 5x + 10) = 4.$$

▲ Мувофиқи таърифи логарифм, муодилаи $x^2 - 5x + 10 = 2^4$ –ро ҳосил мекунем. Муодилаи квадратиро ҳал карда решаҳои $x_1 = -1$, $x_2 = 6$ –ро меёбем. Пас, ҳалли муодила $\{-1; 6\}$ будааст. *Ҷавоб:* $x = -1$, $x = 6$. ▲

Мисоли 10. Муодиларо ҳал кунед: $\lg(2x - 3) = \lg(x - 1)$.

▲ Мувофиқи таърифи логарифм, $2x - 3 > 0$, $x > 1$ буданаш лозим. Соҳаи муайянии ин функция аз интервали $x > \frac{3}{2}$ иборат аст. Мувофиқи хосияти логарифм, ба муодилаи $2x - 3 = x - 1$ меоем, аз ин ҷо $x = 2$. Ин реша ба соҳаи муайяни тааллуқ дорад. *Ҷавоб:* $x = 2$. ▲

Мисоли 11. Муодиларо ҳал кунед: $\log_x(x + 2) = 2$.

▲ Соҳаи муайянии муодиларо меёбем: $x + 2 > 0$, $x > 0$, $x \neq 1$, яъне дар маҷмӯи $(0, 1) \cup (1; \infty)$ муодила муайян шудааст. Мувофиқи таърифи логарифм, муодилаи $x + 2 = x^2$ –ро ҳосил мекунем. Ин муодилаи квадратиро ҳал карда решаҳои $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ –ро меёбем. Аз ин решаҳо фақат $x = 2$ ба соҳаи муайяни мутааллиқ аст. Бинобар ин x ҳалли муодила мешавад. *Ҷавоб:* $x = 2$. ▲

Мисоли 12. Муодиларо ҳал кунед: $\log_3^2 x - 5 \log_3 x + 6 = 0$.

▲ Ишоракунии $t = \log_3 x$ –ро дохил карда, муодилаи квадратии $t^2 - 5t + 6 = 0$ –ро ҳосил мекунем. Онро ҳал карда, решаҳои $t = 2$ ва $t = 3$ –ро меёбем. Решаҳои ёфташударо ба $t = \log_3 x$ гузошта, баробариҳои $\log_3 x = 2$ ва $\log_3 x = 3$ –ро соҳиб мешавем. Ҳалли ин муодилаҳо, мувофиқан ба $x = 9$ ва $x = 27$ баробар аст. ▲

Нобаробарии соддатарини логарифмӣ

Нобаробарии намуди $\log_a x > b$ ($a > 0$, $a \neq 1$, b – адади хақиқӣ)-ро нобаробарии соддатарини логарифмӣ гуфтан мумкин аст.

Мисоли 13. Нобаробарио ҳал кунед: $\log_{\frac{1}{2}}(3-x) > -3$.

△ Бояд $3-x > 0$ бошад. Аз он ки $-3 = \log_{\frac{1}{2}} 8$ аст, пас $\log_{\frac{1}{2}}(3-x) > \log_{\frac{1}{2}} 8$ мешавад. Азбаски асос $a = \frac{1}{2} < 1$ аст, функцияи логарифмӣ камшаванда аст, пас $3-x < 8$ ва $0 < 3-x < 8$ мешавад. Аз ин ҷо ба нобаробариҳои $-3 < -x < 5$ ёки $-5 < x < 3$ меоем. **Ҷавоб:** $x \in (-5; 3)$. ▲

Мисоли 14. Нобаробарио ҳал кунед $\lg(x+1) < \lg(2x-3)$.

△ Аз хосиятҳои функцияи логарифмӣ нобаробариҳои зеринро ноил мешавем:

$$\begin{cases} x+1 < 2x-3, \\ x+1 > 0, \\ 2x-3 > 0 \end{cases} \quad \text{ёки} \quad \begin{cases} x > 4, \\ x > -1, \\ x > \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Ҳалли ин система аз интервали $(4; +\infty)$ иборат. **Ҷавоб:** $x \in (4; +\infty)$. ▲

Мисоли 15. Нобаробарио ҳал кунед $\log_{\frac{1}{2}}^2 x - 9 \leq 0$.

△ Мувофиқи таърифи функцияи логарифмӣ, бояд $x > 0$ бошад. Ишораи $t = \log_{\frac{1}{2}} x$ -ро дохил мекунем. Он гоҳ нобаробарии $t^2 - 9 \leq 0$ -ро ҳосил мекунем. Ин нобаробарио ҳал карда, ба нобаробариҳои $-3 \leq t \leq 3$, яъне $-3 \leq \log_{\frac{1}{2}} x \leq 3$ ноил мешавем. Азбаски $-3 = \log_{\frac{1}{2}} 8$; $3 = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}$ аст, пас $\log_{\frac{1}{2}} 8 \leq \log_{\frac{1}{2}} x \leq \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}$ мешавад. Азбаски асос $a = \frac{1}{2} < 1$ аст, функцияи $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ камшаванда ва бояд, $\frac{1}{8} \leq x \leq 8$ шавад. **Ҷавоб:** $x \in [\frac{1}{8}; 8]$. ▲

Савол ва супоришҳо



1. Ба логарифм таъриф диҳед. Мисол биёред.
2. Хосиятҳои логарифмро гӯед. Дар мисолҳо фаҳмонед.
3. Хосиятҳои функцияҳои логарифмиро гӯед.
4. Муодилаи соддатарини логарифмӣ чист ва он чӣ хел ҳал карда мешавад?
5. Нобаробарии соддатарини логарифмӣ чист ва он чӣ хел ҳал карда мешавад? Мисол биёред.

Машқҳо

185. Ҳисоб кунед:

1) $\log_5 125$; | 2) $\log_{\frac{1}{3}} 9$; | 3) $\log_5 0,04$; | 4) $\log_{0,1} 1000$; | 5) $\log_3 \frac{1}{27}$.

186. Муқоиса кунед:

1) $\log_2 3$ ва $\log_2 5$; | 2) $\frac{\log_2 3}{\log_2 5}$ ва $\log_5 4$; | 3) $\log_{\frac{1}{2}} 3$ ва $\log_{\frac{1}{2}} 5$;

4) $\log_2 3$ ва 1 ; | 5) $\log_3 2 + \log_3 5$ ва $\log_3 (2+5)$; | 6) $\log_7 \frac{1}{2}$ ва 0 .

187. Ҳисоб кунед:

1) $1,5^{\log_{1,5} 2}$; | 2) $e^{\ln 5}$; | 3) $2^{3 \log_2 5}$; | 4) $3^{2 + \log_3 5}$; | 5) $7^{-2 \log_7 6}$;

6) $3^{3 - \log_3 54}$; | 7) $\log_6 2 + \log_6 18$; | 8) $\lg 25 + \lg 4$; | 9) $\log_3 \frac{5}{9} + \log_3 \frac{1}{5}$;

10) $\frac{\lg 2 + \lg 162}{2 \lg 3 + \lg 2}$; | 11) $\log_4 7 - \log_4 \frac{7}{16}$; | 12) $\frac{\ln 64}{\ln 4}$.

188. Соҳаи муайяни функсияҳоро ёбед:

1) $y = \log_3 (2x - 5)$; | 2) $y = \log_7 (x^2 - 2x - 3)$; | 3) $y = \log_5 (4 - x^2)$.

4) $y = \log_2 (x^2 - 2x + 1)$; | 5) $y = \log_{\sqrt{2}} (3 - x)$; | 6) $y = \log_2 \frac{x-1}{x+2}$.

189. Графики функсияро кашед:

1) $y = \log_2 x$; | 2) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$; | 3) $y = \log_4 (x - 1)$; | 4) $y = -\log_3 x$.

190. Муодилоҳо ҳал кунед:

1) $\log_2 x = -5$; | 2) $\log_{\sqrt{3}} x = 0$; | 3) $\log_{\frac{1}{2}} x = -2$; | 4) $\log_x 128 = 7$;

5) $\log_9 x = \frac{1}{2}$; | 6) $\log_{\sqrt{x}} 27 = 3$; | 7) $\log_3 x = 5$;

8) $\log_2 (x - 5) = \log_2 (4x + 1)$; | 9) $\log_{\frac{1}{2}} x = -2$; | 10) $\log_5 (3 - 2x) = \log_{\frac{1}{5}} x$;

11) $\log_{\frac{1}{3}} (3x - 6) = -2$; | 12) $\log_2 (x + 1) + \log_2 (8 - x) = 3$; | 13) $\log_x 5 = 2$;

14) $\lg(x^2 + x - 10) - \lg(x - 3) = 1$; | 15) $\log_7^2 x - \log_7 x = 2$;

16) $5^{4-x} = 6$; | 17) $\log_x 3 + \log_3 x = 2$; | 18) $5^{x^2} = 6$; | 19) $5^{x^2} = \frac{1}{2}$;
 20) $\lg(x^2 - 6x + 19) = 1$; | 21) $\log_5(5^x - 4) = 1 - x$; | 22) $\lg(x^2 - 21) = 2$.

191. Нобаробариро ҳал кунед:

1) $\log_8 x > 2$; | 2) $\log_3^2 x - 3 > 2 \cdot \log_3 x$; | 3) $\log_8 x < 2$; | 4) $\log_{\frac{1}{2}} x > 1$;
 5) $\lg(3 - 2x) > 1$; | 6) $2^{x+1} < 3$; | 7) $\log_3(2x - 4) < \log_3(x + 1)$; | 8) $2^{|x+1|} > 3$.

79-81

МОДЕЛГАРДОНӢ БО ӢРИИ ФУНКСИЯҲОИ НИШОНДИҲАНДАГӢ ВА ЛОГАРИФМИ.

Мисоли 1. Баъди гузаштани вақти муайян бактерия (якчанд соат, ёки, якчанд дақиқа) ба ду тақсим мешавад ва адади бактерияҳо дучанд меафзояд. Баъди гузаштани вақти навбатӣ ду бактерияи мазкур низ ба ду тақсим мешавад ва миқдори популатсия (адади умумии бактерияҳо) боз ду маротиба меафзояд; акнун, адади бактерияҳо чорто мешаванд. Дар шароитҳои қулай ин ҷараёни афзуншавӣ (ресурсҳои зарурӣ барои популатсия: ҷой, хӯроқа, об, энергия ва ҳоказоҳо) такрор шудан мегирад.

Фарз мекунем, ки даставвал 10 миллион бактерия мавҷуд буда, баъди як соат ба ду тақсим шудани ин намуди бактерияҳо маълум мешавад. Чадвали зерин баъди гузаштани вақти $t=1,2,3,4$ соат чӣ тавр тағйирёбии миқдори популатсия b -ро ифода мекунад:

t (соат)	0	1	2	3	4
b_t (миллион)	10	20	40	80	160

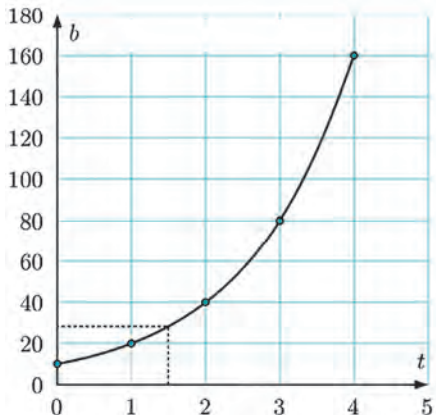
Ҳамчунин, ҳамаи бактерияҳо ҳам дар ҳар соат дар як вақт ба таври синхронӣ ба ду тақсим нашуданашон маълум. Дар ин ҳолат ҳангоми адади бӯтун набудани t (масалан, $t = 1\frac{1}{2}$) масъалаи ёфтани миқдори популатсияи бактерияҳо истодааст.

- Пайдарпаии b_1, b_2, \dots чӣ гуна пайдарпай аст?
- Дар системаи координатаҳои росткунҷаи ҳамворӣ аз рӯи чадвал нуқтаҳои мувофиқро қайд карда, баъдан нуқтаҳои ҳосилшударо бо хати ростии ҳамвор пайваст кунед.
- Баъди гузаштани вақти $t = 1\frac{1}{2}$ популатсияи бактерияҳо чӣ гуна мешавад?
- Дар вақти ихтиёрии t бо ёрии чӣ гуна функсия тағйирёбии популатсияи

бактерияхоро моделоронидан мумкин аст?

△ Пайдарпаии ададҳои дар катори дуум будаи b_1, b_2, \dots прогрессияи геометрии махраҷаш ба 2 баробар буданаш аён аст. Намуди умумии он чунин мешавад: $b_t = 20 \cdot 2^{t-1}$, дар ин ҷо $t=1, 2, 3, 4$.

Дар системаи координатаҳои росткунҷаи ҳамворӣ аз рӯйи чадвал нуқтаҳои мувофиқро қайд карда, баъдан нуқтаҳои ҳосилшударо бо хати рости ҳамвор пайваस्त мекунем:



Баъди гузаштани $t = 1\frac{1}{2}$ соат популятсия

бактерияҳо тақрибан ба 28 миллион баробар буданашро диданамон мумкин. Ба графикаи функсияи нишондиҳанда монанд будани шакли хати қачи ҳосилшуда дида мешавад. Ин функсияро $b(t)$ гуфта ишора карда, (дар ин ҷо $t \geq 0$), навишта метавонем: $b(t) = 20 \cdot 2^{t-1} = 10 \cdot 2^t$. ▲

Дар ҳолати умумӣ миқдори бо қонунияи $b(t) = b_0 a^t$ тағйирёбанда (дар ин ҷо $b_0 > 0, a > 1, t \geq 0$) миқдори экспонентсиал афзуншаванда номида мешавад.

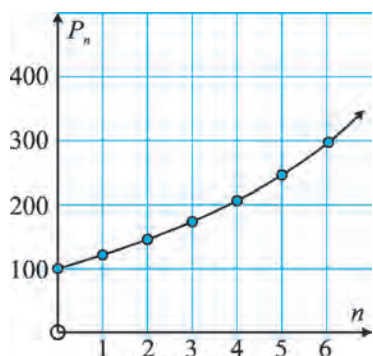
Ба ҳулосаи зерин соҳиб мешавем:

Агар афзуншавии миқдории популятсия ба адади ибтидоии (аввалаи) он пропорционал бошад, ин ҳел популятсия экспонентсиал меафзояд.

Одатан ибораи “афзуншавии экспонентсиалӣ” кадом як қараёни бошиддат, беист афзуншавандаро ифода мекунад. Масалан, популятсияи чонварон, дар матбуот афзуншавии бошиддати аҳолии ягон мамлакат чунин таъриф дода мешавад.

Мисоли 2. Мувофиқи маълумоти хизмати эпидемиологӣ миқдори популятсияи мушҳо дар шароити мусоид дар ҳар ҳафта ба 20% меафзудааст. Сараввал 100 то муш бошанд муайян кунед, ки миқдори популятсияи онҳо аз рӯйи кадом қонуният меафзояд.

△ Агар бо P_n дар n ҳафта миқдори популятсияро ишора кунем, ба ҳолати зерин соҳиб мешавем: $P_0 = 100$ (миқдори ибтидоӣ), $P_1 = P_0 \cdot 1,2 = 100 \cdot 1,2$, $P_2 = P_1 \cdot 1,2 = 100 \cdot (1,2)^2$, $P_3 = P_2 \cdot 1,2 = 100 \cdot (1,2)^3$, ва ҳоказо. Миқдори популятсия дар n ҳафта $P_n = 100 \cdot (1,2)^n$ мешавад. ▲



Аз калкулятор истифода карда, қимматҳои мувофиқро ҳисоб кунем, ба графикаи зерин соҳиб мешавем:

Дида мешавад, ки дар 6 ҳафта миқдори популятсия тақрибан 3 маротиба меафзудааст.

Мисоли 3. Ҳангоми тадқиқот олими энтомолог зараррасонии популятсияи малаҳхоро дар саҳроҳои хоҷагии қишлоқ муайян кард, ки масоҳати майдонҳои зарардида аз рӯи қонунияти $A_n = 1000 \cdot 2^{0,2n}$ (гектар) тағйир меёбад, дар ин ҷо n адади ҳафтаҳо.

а) сараввал ба чӣ қадар майдон зарар расид?

б) дар I) 5, II) 10 ҳафта ба чӣ қадар майдон зарар расид?

с) аз калкулятор истифода бурда, дар 12 ҳафта ба чӣ қадар майдон зарар расонида мешавад, ёбед.

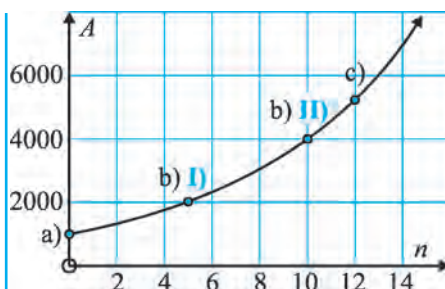
д) графикаи қонунияти алоқамандии масоҳати майдони зарардидаро аз адади ҳафтаҳо кашед.

△ а) $A_0 = 1000 \cdot 2^{0,2 \cdot 0} = 1000$ (гектар). Пас, сараввал ба майдони 1000 га зарар расонида шудааст.

б) I) $A_3 = 1000 \cdot 2^{0,2 \cdot 5} = 2000$ масоҳати майдони зарардида ба 2000 (га) баробар.

II) $A_{10} = 1000 \cdot 2^{0,2 \cdot 10} = 4000$ масоҳати майдони зарардида ба 4000 (га) баробар.

с) $A_{12} = 1000 \cdot 2^{0,2 \cdot 12} = 1000 \cdot 2^{2,4} \approx 5280$ масоҳати майдони зарардида тақрибан ба 5280 (га) баробар. ▲



Мисоли-4. Дар натиҷаи таҷзияи радиоактивӣ моддаи радиоактивии массааш 20 грамм ҳар сол ба 5% кам мешавад. Агар W_n гуфта массаи моддаро дар n сол ишора кунем, ба баробарии зерин соҳиб мешавем.

$$W_0 = 20 \text{ g};$$

$$W_1 = W_0 \cdot 0,95 = 20 \cdot 0,95 \text{ g};$$

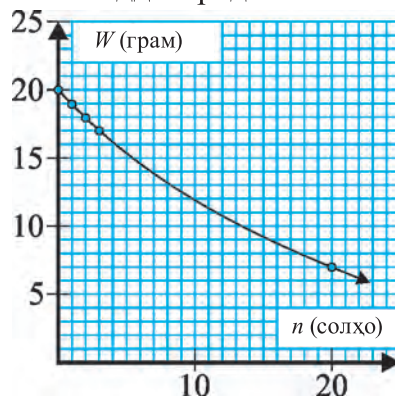
$$W_2 = W_1 \cdot 0,95 = 20 \cdot (0,95)^2 \text{ g};$$

$$W_3 = W_2 \cdot 0,95 = 20 \cdot (0,95)^3 \text{ g};$$

$$W_{20} = 20 \cdot (0,95)^{20} \approx 7,2 \text{ g};$$

$$W_{100} = 20 \cdot (0,95)^{100} \approx 0,1 \text{ g}$$

$$\text{Аз ин ҷо } W_n = 20 \cdot (0,95)^n.$$



Миқдори бо қонунияи $b(t) = b_0 a^t$ тағйирёбанда (дар ин ҷо $b_0 > 0$, $0 < a < 1$, $t \geq 0$) миқдори экспонентсиал камшаванда номида мешавад.

Мисоли 5. Доруи истеъмолшуда бо оҳистагӣ дар бадани бемор паҳн

шуда, баъди t соат миқдори (дозаи) боқимондаи он аз рӯйи қонунияи $D(t)=120 \cdot (0,9)^t$ тағйир меёбад.

а) баъди $t=0, 4, 12, 24$ соат гузаштан $D(t)$ ро ёбед.

б) сараввал ба бадани инсон чӣ қадар доза дохил карда шудааст?

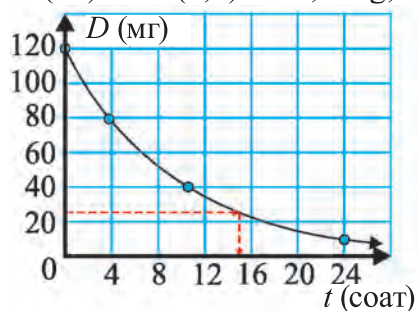
с) аз маълумоти а) истифода бурда, графикаи $D(t)$ ро тасвир кунед, дар ин ҷо $t \geq 0$.

д) аз график истифода бурда, баҳо диҳед, ки миқдори доруи 25 мг дар бадани инсон чанд вақт мемунад.

△ а) $D(t)=120 \cdot (0,9)^t$ mg

$$D(0)=120 \cdot (0,9)^0=120 \text{ mg};$$

$$D(12)=120 \cdot (0,9)^{12} \approx 33,9 \text{ mg};$$



$$D(4)=120 \cdot (0,9)^4 \approx 78,7 \text{ mg};$$

$$D(24)=120 \cdot (0,9)^{24} \approx 9,57 \text{ mg};$$

б) аз сабаби $D(0) = 120$ будан, сараввал 120 мг дору дохил шудааст.

с) аз ҳамон график истифода бурда, аз 120 мг доруи ба бадани инсон дохилшуда, тахмин баъди 15 соат боқӣ мондани 25 мг доруро аниқ мекунем. ▲

Мисоли 6. Дар натиҷаи таҷзияи радиоактивӣ массаи моддаи радиоактивӣ аз

рӯйи қонунияи $W_t=W_0 \cdot 2^{-0,001t}$ грамм тағйир меёбад, дар ин ҷо t солҳо.

а) сараввал модда ба чӣ қадар масса соҳиб будааст?

б) баъди 20 сол чанд фоизи модда мемунад?

△ Ҳангоми $t=0$ будан $W_t=W_0 \cdot 2^0=W_0$ мешавад. Пас, массаи аввалаи модда W_0 будааст. Ҳангоми $t=200$ будан $W_{200}=W_0 \cdot 2^{-0,001 \cdot 200}=W_0 \cdot 2^{-0,2} \approx W_0 \cdot 0,8706$. Пас, баъди гузаштани 200 сол тахминан 87,1 фоизи модда мемунад. ▲

Мисоли 7. Аз сатҳи баҳр баъди ба баландии h км бардошта шуданамон, фишори атмосфера аз рӯйи қонунияи $p = 76 \cdot 2,7^{-\frac{h}{8}}$ (см сутуни симобӣ) тағйир меёфтааст. Дар баландии 5,6 км фишори атмосфера чӣ хел мешавад?

Мисоли 8. Баландӣ аз сатҳи баҳр бо ёрии формулаи $h = \frac{8000}{0,4343} \lg \frac{p_0}{p}$ ҳисоб

карда мешавад, дар ин ҷо $p_0=760$ мм сутуни симоб –фишори атмосфераи сатҳи баҳр, p бошад фишори атмосфера дар баландии h (м). Ҳангоми ба кӯҳ баромадан ба 304 (мм сутуни симоб) баробар шудани фишорро кӯҳнавардон муайян карданд. Кӯҳнавардон ба кадом баландӣ баромаданд?

$$h = \frac{8000}{0,4343} \lg \frac{760}{304} \approx 7330,2 \text{ м.}$$

Мисоли 9. Массай моддаи радиоактивӣ бо гузашти вақт аз рӯйи қонунияти $m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ кам мешавад, дар ин ҷо массаи вақти ибтидоӣ m_0 ба массаи дар вақти t , T -коэффисиенти суръати таҷзияи радиоактивӣ (вақти нимтаҷзия).

Агар дар вақти додашуда массаи моддаи боқимонда m -ро донем, дар чанд сол кам шудани массаи m_0 то m -ро меёбем:

$$t = -T \log_2 \left(\frac{m(t)}{m_0} \right).$$

Гуфтан ҷоиз аст, ки ин ҳел муносибатҳо дар тадқиқотҳои таърихӣ ҳам истифода мешаванд.

Мисоли 10. Бо гузаштани вақт кам шудани адади калимаҳои луғати забони табиӣ аз рӯйи қонунияти $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$ ба назар мерасад, дар ин ҷо N_0 –адади калимаҳои ибтидоӣ, $N(t)$ -адади калимаҳои дар вақти t (ҳазорсолаҳо) боздошташуда, λ – коэффисиенти калимаҳои дар забон боздошташударо ифодакунанда.

Агар дар вақти додашуда, миқдори $N(t)$ -адади калимаҳои боқимондаро донем, дар чанд сол ҳаҷми калимаҳо аз N_0 то $N(t)$ - кам шуданашро меёбем

$$t = -\frac{1}{\lambda} \cdot \ln \left(\frac{N(t)}{N_0} \right).$$

Масъалаи 11. Сараввал аҳолии шаҳр а нафар буда, агар дар ҳар сол адади аҳоли ба 10% афзояд, формулаеро, ки баъди x сол чӣ қадар шудани аҳолиро муайян мекунад ёбед.

△ Мувофиқи формулаи фоизи мураккаб, адади аҳолии шаҳр баъди x сол $y = a \cdot \left(\frac{100+10}{100}\right)^x = a \cdot (1,1)^x$ мешавад: Пас, бо ёрии формулаи $y = a \cdot (1,1)^x$ ҳангоми дода шудани a адади аҳолиро баъди x сол муайян кардан, мумкин мешавад. Аз рӯйи $a = 1\,000\,000$ ва адади солҳо x чадвали муайянкунандаи адади аҳолиро мебиёрем:

x	y	x	y
1	1 100 000	11	2 853 117
2	1 210 000	12	3 138 428
3	1 331 000	13	3 452 271
4	1 464 100	14	3 797 498
5	1 610 510	15	4 177 248
6	1 771 561	16	4 594 973
7	1 948 717	17	5 054 470
8	2 143 589	18	5 559 917
9	2 357 948	19	6 115 909
10	2 593 742	20	6 727 500

Мувофиқи чадвал адади аҳоли баъди 5 сол 1 610 510, баъди 10 сол 2 593 742, баъди 20 сол 6 727 500 нафар мешудааст. ▲

Масъалаи 12. Сараввал аҳолии шаҳр a нафар буда, шумораи аҳоли соли ба 2% кам мешавад, формулаи чӣ қадар шудани аҳолиро баъди x сол муайян мекунад ёбед.

▲ Мувофиқи формулаи мураккаби фоиз шумораи аҳолии шаҳр баъди x сол $y = a \cdot \left(\frac{100-2}{100}\right)^x = a \cdot 0,98^x$ мешавад. Пас, бо ёрии формулаи $y = a \cdot 0,98^x$ ҳангоми дода шудани a шумораи аҳолиро баъди x сол муайян кардан мумкин. Чадвале, ки шумораи аҳолиро ҳангоми $a=2000000$ ва миқдори солҳо x будан муайян мекунад, мебиёрем:

Мувофиқи чадвал шумораи аҳоли баъди 5 сол 1 807 842, баъди 10 сол 1 634 146, баъди 20 сол 1 335 216 нафар мешудааст. ▲

x	y	x	y
1	1 960 000	11	1 601 463
2	1 920 800	12	1 569 433
3	1 882 384	13	1 538 045
4	1 844 736	14	1 507 284
5	1 807 842	15	1 477 138
6	1 771 685	16	1 447 595
7	1 736 251	17	1 418 644
8	1 701 526	18	1 390 271
9	1 667 496	19	1 362 465
10	1 634 146	20	1 335 216

Масъалаи 13. Сараввал аҳолии шаҳр a нафар буд. Агар шумораи аҳоли соли ба 10% афзояд, формулаи баъди x сол чӣ қадар шудани аҳоли ва баъди чанд сол k маротиба афзудани онро муайян мекунадро ёбед.

▲ Маълум аст, ки, $y = a \cdot 1,1^x$ ва аз шарти масъала $y = k \cdot a$ буданаширо ба ҳисоб гирифта формулаи $k = 1,1^x$ ёки $x = \log_{1,1} k$ ёфта мешавад. Дар поён чадвале, ки барои афзудани адади аҳоли ба k маротиба адади солҳои лозимбударо муайян мекунад, оварда шудааст:

k	y	k	y	k	y
1	0	6	19	11	25
2	7	7	20	12	26
3	12	8	22	13	27
4	15	9	23	14	28
5	17	10	24	15	28

Аз чадвал маълум аст, ки барои 2 маротиба афзудани шумораи аҳоли 7 сол; барои 5 маротиба афзудан 17 сол; 10 маротиба афзудан 24 сол лозим аст. ▲

Масъалаи 14. Сараввал шумораи аҳолии шаҳр a нафар буда, соли ба 2% кам шавад, формулае, ки баъди x сол чӣ қадар шудани аҳоли ва баъди чанд сол k маротиба камшавии онро муайян мекунад, ёбед.

▲ Маълум аст, ки $y = a \cdot 0,98^x$ ва аз шarti масъала $y = \frac{a}{k}$ ба назар гирифта формулаи $1/k = 0,98^x$ ёки $x = \log_{0,98}(1/k)$ ро ёфтан мумкин. Дар поён чадвале, ки барои кам шудани адади аҳоли ба k маротиба миқдори солҳои лозимбударо муайян мекунад, оварда шудааст.

k	$1/k$	x	k	$1/k$	x
1	1	0	11	0,090909	119
2	0,5	34	12	0,083333	123
3	0,333333	54	13	0,076923	127
4	0,25	69	14	0,071429	131
5	0,2	80	15	0,066667	134
6	0,166667	89	16	0,0625	137
7	0,142857	96	17	0,058824	140
8	0,125	103	18	0,055556	143
9	0,111111	109	19	0,052632	146
10	0,1	114	20	0,05	148

Аз чадвал маълум аст, ки барои 2 маротиба кам шудани шумораи аҳоли 34 сол; 5 маротиба кам шудани шумораи аҳоли 80 сол; 10 маротиба кам шудани шумораи аҳоли 114 сол лозим аст; ▲

Масъалаи 15. Соли 1935 сейсмологи америқой Ч. Рихтер барои тавсиф кардани зилзила шкалаҳои магнитудаҳои 1-9,5 балларо таклиф карда буд. Дар ин вақт ҳангоми зилзила энергияи лапиши сеймикии пайдошаванда бо бузургие, ки интенсивӣ номида мешавад баҳо дода мешавад. Дар шкалаи Рихтер магнитудаи R -и зилзилаи интенсивиаш I бо ёрии формулаи $R = \lg I$ ёфта мешудааст.

Соли 1966 дар Тошканд зилзилаи магнитудааш ба 5,2, соли 2010 дар Гаитӣ магнитудааш ба 7 баробар рӯй додааст. Ин зилзилаҳоро аз рӯи интенсивӣ муқоиса мекунем.

▲ Зилзилаи Гаитӣ: $7 = \lg I_1$, аз ин чо $I_1 = 10^7 = 10\ 000\ 000$;

Зилзилаи Тошканд: $5,2 = \lg I_2$, аз ин чо $I_2 = 10^{5,2} \approx 158\ 489,3$;

Аз ин чо $\frac{I_1}{I_2} \approx 63,1$. Пас, дар Гаитӣ нисбат ба Тошканд тақрибан 63 маротиба зилзилаи пурқувваттар рӯй додааст. ▲



Савол ва супоришҳо

1. Ба модели нишондиҳандагӣ мисол биёред;
2. Ба модели логарифмӣ мисол биёред.

Машқҳо

- 192.** 192. Агар коркарди замини наздиҳавлигӣ гузаронида нашавад, баъди t рӯз алафҳои бегона масоҳати майдони $A(t)=3 \cdot 2^{0,1t}$ (кв.м)-ро мепӯшонад, ба растаниҳои фойданок зарар мерасонад.
- а) сараввал ба чӣ қадар майдон зарар расид?
 - б) дар **I)** 2, **II)** 10, **III)** 30, рӯз ба чӣ қадар майдон зарар мерасад?
 - с) аз маълумоти дар *a)*, *b)* гирифташуда истифода бурда, графики қонунияти вобастагии масоҳати майдони зарардидаро аз адади рӯзҳо кашед.
- 193.** Бо мақсади беҳ кардани аҳволи экологии соҳилҳои Орол экологҳо дар лоиҳаи афзуннамоии популятсияи ҳайвонҳои ноёб, 25 ҷуфти ҳайвонро бисёр қаданианд. Мувофиқи тадқиқотҳо, дар шароитҳои додашуда миқдори популятсияи ин ҳайвонҳо аз рӯйи қонунияти $P_n = P_0 \cdot 1,23^n$ тағйир меёбад, дар ин ҷо P_n адади ҳайвонҳо дар n сол.
- а) адади P_0 чиро мефаҳмонад?
 - б) баъди **I)** 2, **II)** 5, **III)** 10 ба чӣ гуна популятсия соҳиб мешавем?
 - с) аз маълумоти дар *a)*, *b)* гирифташуда истифода карда, графики қонунияти вобастагии миқдори популятсияро аз адади солҳо, кашед.
- 194.** Суръати реаксияи химиявӣ аз рӯйи қонунияти $V_t = V_0 \cdot 2^{0,05t}$ тағйир меёфтааст, дар ин ҷо t (°C) – температура.
- Дар температураи а) 0 °C; б) 20 °C суръати реаксия чӣ гуна мешавад?
- с) Суръати реаксия дар температураи 20 C° нисбат ба суръати реаксия дар температураи 0 C° чанд фоиз меафзояд?
 - д) Қиммати $\left(\frac{V_{50} - V_{20}}{V_{20}} \right) \cdot 100\%$ ро ҳисоб кунед ва маънидод кунед.
- 195.** Дар ҳазираи паҳлӯи нимҳазираи Аляска соли 2017 6 ҷуфт хирсро сар доданд. Аввал дар ин ҳазира хирсҳо набуданд. Агар популятсияи хирсҳо аз рӯйи қонунияти $Bt = B_0 \cdot 2^{0,18t}$ (дар ин ҷо t -солҳо) тағйир ёбад, аз воситаҳои ҳисобкунӣ истифода бурда, ба саволҳои зерин ҷавоб диҳед:
- а) адади B_0 чиро мефаҳмонад? *Он* ба чанд баробар аст?
 - б) дар соли 2037 ба кадом популятсия соҳиб мешавем?
 - с) адади хирсҳо дар соли 2037 нисбат ба адади хирсҳо дар соли 2027 чанд фоиз меафзояд?

- 196.** Дар натиҷаи таҷзияи радиоактивӣ массаи моддаи радиоактивӣ аз рӯи қонунияти $W(t)=250 \cdot (0,998)^t$ (г) тағйир меёбад, дар ин ҷо t -солҳо.
- аввал модда ба кадом масса соҳиб буд?
 - баъди **I)** 400, **II)** 800, **III)** 1200, сол чанд граммӣ модда мемонад?
 - аз маълумоти боло истифода бурда, графики $W(t)$ -ро тасвир кунед.
 - Аз график истифода бурда, муайян кунед, ки қай ба микдори 125 мг модда мемонад.
- 197.** Ҳангоми хунук кардани оби ҷӯш ҳарорати T -и он аз рӯи қонунияти $T(t)=100 \cdot 2^{-0,02t}$ °C тағйир меёфтааст, дар ин ҷо t -дақиқаҳо.
- аввал ҳарорат чӣ хел буд?
 - баъди **I)** 15, **II)** 20, дақиқа ҳарорат ба чанд баробар мешавад?
 - аз маълумоти боло истифода бурда, графики $T(t)$ -ро тасвир кунед.
 - аз график истифода бурда, муайян кунед, ки баъди 78 дақиқа ҳарорат ба чанд баробар мешавад?
- 198.** Қувваи ҷараёни занҷири электрикӣ аз рӯи қонунияти $I_t=0,6 \cdot 2^{-5t}$ (А) тағйир меёфтааст, дар ин ҷо t -сонияҳо.
- сараввал қувваи ҷараён чӣ хел буд?
 - баъди **I)** 0,1, **II)** 0,5 **III)** 1 сония қувваи ҷараён ба чанд баробар мешавад?
 - аз маълумоти боло истифода бурда, графики I_t -ро тасвир кунед.
- 199.** Дар баҳр рӯшноӣ нисбат ба чуқурии d метр аз рӯи қонунияти $L(-d)=L_0 \cdot (0,9954)^d$ (кандела) тағйир меёфтааст.
- дар қай баҳр рӯшноӣ чӣ гуна будааст?
 - рӯшноӣ дар чуқурии 1000 метр ба чанд фоиз кам мешавад?
- 200.** Баъди 2 соат популятсияи 8-то бактерия то 100-то афзуд. Дар чунин шароит қай популятсия ба 500-то мерасад?
- 201.** Мувофиқи маълумоти ширкати алоқаи мобилӣ, адади аз хидмати ширкати алоқаи мобилӣ истифодабарандаҳо бо ёрии формулаи $N(t)=100000e^{0,09t}$ ифода мешавад, дар ин ҷо t -моҳҳо. Агар имрӯз адади истифодабарандаҳо 3 млн бошад, ширкат қорро қай сар кардааст?
- 202.** Ҳангоми аз печи микромавҷи гирифтани хӯрока, y аз рӯи қонунияти $T(t)=80e^{-0,12t}$ хунук мешудааст, дар ин ҷо t -дақиқаҳо. Агар ҳозир ҳарорати хона 22° C бошад, баъди чанд дақиқа хӯрока то ин ҳарорат хунук мешавад?
- 203.** Баландии радифи сунъӣ бо гузашти вақти t (солҳо) аз рӯи қонунияти $H(t)=30000e^{-0,2t}$ тағйир меёфтааст.
- баъди 2 сол чӣ қадар шудани баландиро ҳисоб кунед.

b) агар радиф дар баландии 320 км бошад, у дар қабатҳои болоии атмосфера месўзад. То ин лаҳза чанд вақт мегузарад?

МАШҚҲО ДОИР БА БОБИ III

204. Муодилаҳоро ҳал кунед (**204–205**):

a) $x^4 - 1 = 0$; b) $5x^4 - 3x^3 - 4x^2 - 3x + 5 = 0$; c) $3x^4 - 4x^3 - 7x^2 - 4x + 5 = 0$.

205. a) $(x-3)(x+14)(x-15) = 0$;

b) $(4x+11)(3x-5) = 0$;

c) $x^4 - 15x^2 - 16 = 0$;

d) $x^4 + 24x^2 - 25 = 0$.

Нобаробарихоро ҳал кунед (**206–208**):

206. a) $(2-x)(3x+1)(2x-3) > 0$;

b) $(3x-2)(x-3)^3(x+1)^3(x+2)^4 > 0$.

207. a) $x^4 + 8x^3 + 12x^2 \geq 0$;

b) $(16-x^2)(x^2+4)(x^2+x+1)(x^2-x-1) \leq 0$.

208. a) $\frac{x^4 - 2x^2 - 8}{x^2 + x - 1} < 0$; b) $\frac{3x-2}{2x-3} < 3$; c) $\frac{7x-4}{x+2} \geq 1$; d) $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+3} < \frac{3}{x+2}$.

209. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

a)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 113, \\ xy = 56; \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x^2 y + xy^2 = 84, \\ x^3 + y^3 = 91; \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x^2 + 9xy + 2y^2 = 12, \\ 2x^2 + 3xy - 4y^2 = 1; \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} x^2 - 2xy + 3y^2 = 2, \\ x^2 + xy + y^2 = 3. \end{cases}$$

Системаи нобаробарихоро ҳал кунед (**210–211**):

210. a)
$$\begin{cases} \frac{3x+5}{7} + \frac{10-3x}{5} > \frac{2x+7}{3} - 7\frac{3}{21}, \\ \frac{7x}{3} - \frac{11(x+1)}{6} > \frac{3x-1}{3} - \frac{13-x}{2}; \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \frac{2x-11}{4} + \frac{19-2x}{2} < 2x, \\ \frac{2x+15}{9} > \frac{x-1}{5} + \frac{x}{3}. \end{cases}$$

211. a)
$$\begin{cases} 2x^2 + 2 < 5x, \\ x^2 \geq x; \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x^2 - 16 \leq 0, \\ -x^2 + 16 \geq 0; \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} \frac{(x+2)(x^2-3x+8)}{x^2-9} \leq 0, \\ \frac{1-x^2}{x^2+2x-8} \geq 0. \end{cases}$$

212. Муодилаи иррационалиро ҳал кунед:

a) $\sqrt{8x+1} + \sqrt{3x-5} = \sqrt{7x+4} + \sqrt{2x-2}$;

b) $\sqrt{2x+3} + \sqrt{3x+2} - \sqrt{2x+5} = \sqrt{3x}$;

c) $\frac{\sqrt{3+2x}}{2x^2-x-1} > 0$; d) $\sqrt{x-2} - \sqrt{x-3} > -\sqrt{x-5}$.

213. Ададҳоро муқоиса кунед (**213–215**):

a) $4, 2^{-\sqrt{2}}$ ва 1 ;

b) $0, 2^{\frac{3}{5}}$ ва $0, 2^{-\frac{3}{5}}$;

c) $(0, 4)^{-\frac{\sqrt{5}}{2}}$ ва 1 .

214. a) $4^{0,5}$ ва $4^{\frac{\sqrt{3}}{3}}$; b) $\sqrt{3}^{0,2}$ ва $3^{0,2}$; c) $2^{\frac{3}{4}}$ ва $8^{\frac{4}{9}}$.

215. a) $2^{-\sqrt{3}}$ ва $2^{-\sqrt{5}}$; b) $7^{-0,3}$ ва $7^{-\frac{1}{3}}$; c) $(\frac{1}{3})^{\sqrt{5}}$ ва $3^{-\sqrt{3}}$.

216. Соҳаи муайяни функцияро ёбед:

a) $y = 5^{\sqrt{x^2-1}}$; b) $y = \frac{1}{3^x + 1}$; c) $y = \frac{1}{3^{x^2-9}}$; d) $y = 3^{2-x}$.

217. Соҳаи қимматҳои функцияро ёбед:

a) $y = 2^{-|x|}$; b) $y = 3 + 4^{x+1}$; c) $y = -6^x$; d) $y = 5^{|x|} + 1$.

218. Муодилаҳоро ҳал кунед (**218–219**):

a) $8^x = 2^{\frac{1}{5}}$; b) $121^x - 7 \cdot 11^x = 5 \cdot 11^x - 11$; c) $0,5^{x^2+x-3,5} = 2\sqrt{2}$.

219. a) $6^{2x} - 5^{2x-1} = 6^{2x-1} + 5^{2x}$; b) $4^{x+3} + 4^x = 130$; c) $125^x + 20^x = 2^{3x+1}$.

220. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

a) $\begin{cases} x + y = 5, \\ 5^{y-x^2} = 0,2; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3^{x-1} = 2^y, \\ 0,1^{2x-y} = 0,01; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5^{x-y} = 25, \\ 3^{x+y} = 27. \end{cases}$

221. Нобаробарихоро ҳал кунед:

a) $4^x \leq 3^x$; b) $16^x - 7 \cdot 4^x - 8 < 0$; c) $4^x \cdot 5^{1-x} < \frac{25}{4}$; d) $6^{\frac{x-3}{x+8}} \geq 1$.

222. Ададҳоро муқоиса кунед:

a) $\log_3 2$ ва 2 ; b) $\log_3 5$ ва $2 \cdot \log_3 2$; c) $\log_2 5$ ва $\log_5 2$;
d) $\log_{0,2} 5$ ва $\log_{0,2} 6$; e) $\log_4 3$ ва $\log_3 4$; f) $\lg 18,8$ ва $\lg 6\pi$.

223. Соҳаи муайяни функцияро ёбед:

a) $y = \log_2(2x + 7)$; b) $y = \log_{\frac{1}{3}}(4 - x^2)$; c) $y = \log_5(-8x)$; d) $y = \lg \frac{x-3}{x+8}$.

224. Муодиларо ҳал кунед:

a) $\lg(x-9) + \lg(2x-1) = 2$; b) $\log_2 \sqrt{x-3} + \log_2 \sqrt{x+3} = 2$.

225. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед (**225–226**):

a) $\begin{cases} 5^{x-y} = 1, \\ 2^{\log_2(x+y)} = 6; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \lg x + \lg y = 4, \\ \lg x - \lg y = 6; \end{cases}$ c) $\begin{cases} \log_{17}(3^x + 2^y) = 1, \\ 3^{x+1} - 4 \cdot 2^y = -5; \end{cases}$

226. a) $\begin{cases} 2^x \cdot 5^y = 40, \\ 5^x \cdot 2^y = 250; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \log_2 x + 5^{\log_5 y} = 4, \\ x^y = 16; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3^x \cdot 3^y = 81, \\ 3^x - 3^y = 24. \end{cases}$

227. Нобаробарихоро ҳал кунед:

- a) $\log_3(x^2 + x + 1) \geq 1$; b) $\log_2(x^2 + x - 6) - \log_2(x + 3) \leq 1$;
 c) $\lg^2 x < \lg x^5 - 6$; d) $\log_3(4^x - 5 \cdot 2^x + 13) > 2$; e) $5^{x+7} > 2$.

228. Графики функцияро кашед:

- a) $y = 1,5 \sin(2x - 1)$; b) $y = 2 \cos(2x - \frac{\pi}{3})$; c) $y = \log_3(1-x)$.

229. Муқоиса кунед:

- a) $\arcsin(-\frac{1}{2})$ ва $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\arccos \frac{1}{2}$ ва $\operatorname{arctg}(-1)$;
 c) $\operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{3}$ ва $\operatorname{arctg} 1$; d) $\arccos(-\frac{1}{2})$ ва $\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2})$.

230. Ҳисоб кунед:

- a) $2 \arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + \operatorname{arctg}(-1) + \arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$;
 b) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + \arcsin 1$;

231. Муодиларо ҳал кунед (**231–233**):

- a) $2 \cos^2 x + 5 \sin x - 4 = 0$; b) $3 \sin^2 2x + 7 \cos^2 x - 3 = 0$; c) $4 \operatorname{tg}^2 x - 5 \operatorname{tg} x + 1 = 0$.

232. a) $3 \sin^2 x + 7 \sin x - 10 = 0$; b) $2 \cos^2 x - 5 \cos x + 3 = 0$; c) $\sin 6x = \sin 3x$.

233. a) $\cos 7x = \cos 2x$; b) $\operatorname{tg} 8x = \operatorname{tg} 11x$.

234. Нобаробарихоро ҳал кунед (**234–235**):

- a) $\sin x > -\frac{1}{2}$; b) $\cos 2x \leq \frac{1}{2}$; c) $\operatorname{tg} 3x \geq 1$; d) $\sin 2x \leq \frac{1}{2}$.

235. a) $\sin 4x \leq \frac{1}{2}$; b) $\cos 10x \geq 0$; c) $\operatorname{tg} 9x \leq \sqrt{3}$; d) $\cos(2x - \frac{\pi}{4}) \leq 0$.

Супоришҳои тестӣ барои назорат

1. Муодиларо ҳал кунед: $\sin 6x = 0$.



A) $x = \frac{\pi}{6}n, n \in Z$;

B) $x = \frac{\pi}{5}n, n \in Z$;

C) $x = \frac{\pi}{4}n, n \in Z$;

D) $x = \frac{\pi}{3}n, n \in Z$.

2. Муодиларо ҳал қунед: $\cos 2x=0$.
 A) $x = 2\pi n, n \in Z$; B) $x = \pi n, n \in Z$;
 C) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, n \in Z$; D) $x = \frac{\pi}{3}n, n \in Z$.
3. Муодиларо ҳал қунед: $\operatorname{tg} 4x = \sqrt{3}$.
 A) $x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{4}, n \in Z$; B) $x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi n}{4}, n \in Z$;
 C) $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{4}, n \in Z$; D) $x = \frac{\pi n}{4}, n \in Z$.
4. Нобаробарио ҳал қунед: $\sin 2x > 3$.
 A) $x = \pi n, n \in Z$; B) \emptyset ; C) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$; D) $x = 2\pi n, n \in Z$.
5. Нобаробарио ҳал қунед: $\cos 2x < 3$.
 A) $(-\infty; +\infty)$; B) \emptyset ; C) $(-\infty; 0)$; D) $(0; +\infty)$.
6. Соҳаи муайянии функцияро ёбед: $y = 12^x$.
 A) $(-\infty; +\infty)$; B) $(0; +\infty)$; C) $(-\infty; 0)$; D) \emptyset .
7. Соҳаи муайянии функцияро ёбед: $y = \log_2(3-x)$.
 A) $(3; +\infty)$; B) $[3; +\infty)$; C) $(-\infty; 3)$; D) $(-\infty; 3]$.
8. Ҳисоб қунед: $\arcsin \frac{1}{2}$.
 A) $\frac{\pi}{2}$; B) π ; C) $\frac{\pi}{4}$; D) $\frac{\pi}{6}$.
9. Ҳисоб қунед: $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$.
 A) $\frac{\pi}{3}$; B) $\frac{\pi}{2}$; C) $\frac{\pi}{6}$; D) $\frac{\pi}{4}$.
10. Ҳисоб қунед: $\operatorname{arctg} 1$.
 A) $\frac{\pi}{3}$; B) $\frac{\pi}{2}$; C) $\frac{\pi}{6}$; D) $\frac{\pi}{4}$.

БОБИ IV



АДАДҲОИ КОМПЛЕКСӢ

86-87 АДАДҲОИ КОМПЛЕКСӢ ВА АМАЛҲО АЗ РӢӢИ ОНҲО. ТАСВИР КАРДАНИ АДАДҲОИ КОМПЛЕКСӢ

Ададҳои комплексӣ

Таълимот дар бораи ададҳои комплексӣ дар илму фан, махсусан, дар математика мавқеи муҳим дорад. Ин соҳа, ки бо суръати бузург тараққӣ карда истодааст, дар техника, ҳамчунин, дар бисёр соҳаҳои истеҳсоли фаровон истифода мешавад. Баъзе маълумоте, ки дар бораи ин ададҳо мавҷуд ҳастанд, мебиёрем. Аз мисоли хосаи зерин сар мекунем.

Ҳангоми ҳал кардани муодилаи $x^2+4=0$ “ададҳои” $x_1=2\sqrt{-1}$ ва $x_2=-2\sqrt{-1}$ ҳосил мешаванд. Дар байни ададҳои ҳақиқӣ ин ҳел “ададҳо” мавҷуд нест. Барои аз чунин ҳолат ҳалосӣ ёфтани зарурати $\sqrt{-1}$ ро адад гуфта қабул кардан пайдо мешавад.

Ин адади нав ченаки ҳеч як бузургии ҳаққониро, ёки тағйирёбии онро ифода намекунад. Бо ин сабаб $\sqrt{-1}$ ро воҳиди мавҳум (хаёли, дар ҳақиқат мавҷуд набуда) гуфта номгӯ кардан ва махсус ишора кардан қабул карда шудааст: $\sqrt{-1}=i$. Барои воҳиди мавҳум баробарии $i^2=-1$ ҷой дорад.

Ифодаи намуди $a+bi$ -ро дида мебароем. Дар ин ҷо a ва b ададҳои ҳақиқии ихтиёрӣ i бошад воҳиди мавҳум аст.

Азбаски ифодаи $a+bi$ аз адади ҳақиқии a ва адади мавҳуми bi иборат аст. онро адади комплекси гуфта қабул мекунем.

Ифодаи $a+bi$ шакли алгебравии адади комплексӣ номида мешавад.

Ба ҷои $a+bi$ -ро “шакли алгебравии адади комплексӣ” гуфтан кӯтоҳакак “адади комплексӣ” меномем. Ададҳои комплексиро бо як ҳарф ишора кардан мувофиқ аст. Масалан, $a+biz$ -ро бо $z=a+bi$ ишора мекунем. Қисми ҳақиқии a -и адади комплекси $\text{Re}(z)$ -ро ба монанди (аз забони франсузи *reel-*

le-ҳақиқӣ), қисми мавҳум b -ро бошад, ба монанди $\text{Im}(z)$ (аз забони франсузӣ *imaginaire*-мавҳум) ишора кардан қабул шудааст: $a=\text{Re}(z)$, $b=\text{Im}(z)$.

Агар барои адади комплексӣ $z=a+bi$ $b=0$ бошад, адади ҳақиқӣ $z=a$ ҳосил мешавад. Пас, маҷмӯи ададҳои ҳақиқӣ R тахтмаҷмӯи маҷмӯи ададҳои комплексӣ C мешавад: $R \subset C$.

Мисоли 1. Қисмҳои ҳақиқӣ ва мавҳуми ададҳои комплексӣ $z_1=1+2i$, $z_2=2-i$, $z_3=2,1$, $z_4=2i$, $z_5=0$ -ро ёбед.

△ Мувофиқи таърифи қисмҳои ҳақиқӣ ва мавҳуми ададҳои комплексӣ, меёбем:

$$\text{Re}(z_1)=1; \text{Re}(z_2)=2; \text{Re}(z_3)=2,1; \text{Re}(z_4)=0; \text{Re}(z_5)=0;$$

$$\text{Im}(z_1)=2; \text{Im}(z_2)=-1; \text{Im}(z_3)=0; \text{Im}(z_4)=2; \text{Im}(z_5)=0. \blacktriangle$$

Барои ададҳои комплексӣ муносибатҳои “<”, “>” муайян карда нашудааст, лекин маҷмӯи ададҳои комплексӣ баробар дохил карда мешавад.

Ададҳои комплексӣ, ки мувофиқан қисмҳои ҳақиқӣ ва мавҳумашон баробар аст, ададҳои комплексӣ баробар номида мешавад.

Масалан, барои ададҳои комплексӣ, $z_1=1,5+\frac{4}{5}i$ ва $z_2=\frac{3}{2}+0,8i$ $\text{Re}(z_1)=\text{Re}(z_2)=1,5$; $\text{Im}(z_1)=\text{Im}(z_2)=0,8$. Пас, $z_1=z_2$.

Ададҳои комплексӣ, ки аз якдигар фақат бо ишораи қисми мавҳумашон фарқ мекунанд, ададҳои комплексӣ ҳамроҳшуда номида мешаванд. Барои адади комплексӣ $z=a+bi$ адади комплексӣ ҳамроҳшуда ба намуди $\bar{z}=a-bi$ навишта мешавад.

Масалан, $6+7i$ ва $6-7i$ -ҳо ададҳои комплексӣ ҳамроҳшуда мебошанд: $6+7i=6-7i$. Монанди ин ба адади \bar{z} адади ҳамроҳшуда $\bar{\bar{z}}=z$ мешавад.

Масалан, $\overline{6+7i}=6-7i=6+7i$. Ба адади ҳақиқӣ a адади ҳамроҳшуда: $\bar{a}=\overline{a+0\cdot i}=a-0\cdot i=a$. $\overline{bi}=-bi$ мебошад. Чунки $\overline{0+bi}=0-bi=-bi$.

Амалҳои арифметикӣ дар болои ададҳои комплексӣ

Амалҳои арифметикӣ дар болои ададҳои комплексӣ ба таври зерин муайян карда мешавад:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i; \tag{1}$$

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i; \tag{2}$$

$$(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i; \tag{3}$$

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i. \tag{4}$$

Истифодаи бевоситаи баробариҳои (1) ва (2) душвор нест. Амали зарби ададҳои комплексӣ $i^2=-1$ буданашро ба эътибор гирифта, чун зарби бисёраъзогиҳо иҷро кардан мумкин аст.

Мисоли 2. Суммаро ёбед: $(3+7i)+(-5+4i)$.

△ Барои суммаро ёфтан аз формулаи (1) истифода мебарем:

$$(3+7i)+(-5+4i)=(3+(-5))+(7+4)i=-2+11i. \blacktriangle$$

Мисоли 3. Фарқро ёбед: $(13-7i)-(-5+4i)$.

△ Барои фарқро ёфтан аз формулаи (2) истифода мебарем:

$$(13-7i)-(-5+4i)=(13-(-5))+(-7-4)i=18-11i. \blacktriangle$$

Мисоли 4. Ҳосили зарбро ёбед: $(2-i)\cdot\left(\frac{3}{4}+2i\right)$.

△ Барои ёфтани ҳосили зарб қафсҳоро мекушоем. $i^2=-1$

$$(2-i)\cdot\left(\frac{3}{4}+2i\right)=2\cdot\frac{3}{4}+2\cdot 2i-i\cdot\frac{3}{4}-2i^2=\frac{3}{2}+4i-\frac{3}{4}i+2=\frac{7}{2}+\frac{13}{4}i. \blacktriangle$$

Барои ҳисоб кардани ҳосили тақсими $\frac{a+bi}{c+di}$, сурат ва махраҷи онро ба “ҳамроҳшудаи” махраҷаш $c-di$ зарб карда, амалҳои лозимаро иҷро кардан лозим аст.

Мисоли 5. Амали тақсимро иҷро кунед: $\frac{2-i}{-3+2i}$.

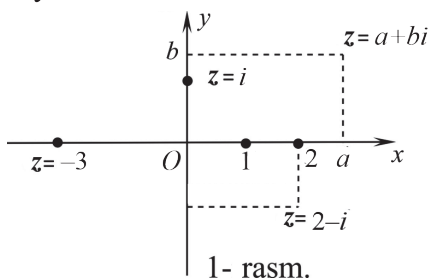
$$\triangle \frac{2-i}{-3+2i}=\frac{(2-i)(-3-2i)}{(-3+2i)(-3-2i)}=\frac{-6-4i+3i-2}{(-3)^2-(2i)^2}=\frac{-8-i}{13}=\frac{-8}{13}-\frac{1}{13}i. \blacktriangle$$

Ададҳои комплексии z , w , ки баробарии $z+w=0$ -ро қаноат мекунонад, байни якдигар муқобил номида мешаванд. Адади ба адади комплексии z муқобилро бо $-z$ ишора кардан қабул карда шудааст. Адади комплексии ягонаи ба адади комплексии $z=a+bi$ муқобил мавҷуд аст ва ин адад аз адади комплексии $-z=-a-bi$ иборат аст.

Ададҳои комплексии z ва w , ки баробарии $zw=1$ -ро қаноат мекунонад, байни якдигар баръакс номида мешаванд. Ба адади $z=0$ адади баръакс мавҷуд нест. Барои ҳар гуна адади комплексии $z\neq 0$ адади комплексии баръакс мавҷуд аст. Ин адад аз адади $\frac{1}{z}$ иборат аст.

Тасвири адади комплексӣ дар ҳамворӣ

Фарз мекунем, ки дар ҳамвори координатаҳои росткунҷаи Декарт дода шуда бошад. Он гоҳ ба адади комплексии $z=a+bi$ дар ҳамвории нуқтаи

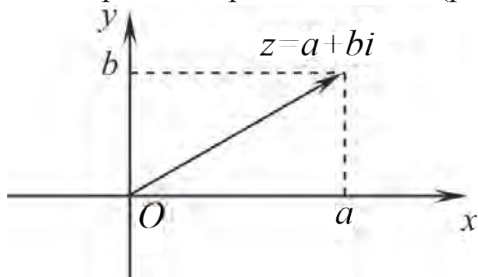


1- rasm.

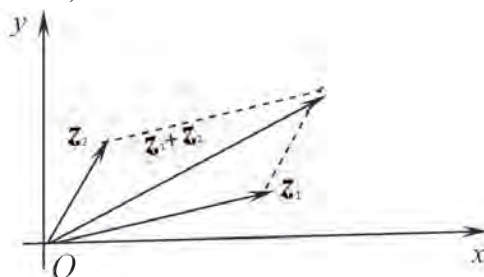
координатаҳояш $(a; b)$ мувофиқ меояд.

Ҳангоми бо ин тарз тасвир кардани адади комплексии $a+0i$ нуқтаи координатааш $(a; 0)$, ба адади комплексии $0+bi$ бошад, нуқтаи координатааш $(0; b)$ мувофиқ меояд. Бинобар ин ҳам тири x -ро тири ҳақиқӣ ва тири y -ро тири мавҳум меноманд (расми 1).

Ададҳои комплексии $a+bi$ -ро дар ҳамворӣ бо вектори координатаҳояш a ва b низ тасвир кардан мумкин аст (расми 2). Ин бошад ҳангоми чамъ кардани ададҳои комплексӣ имконияти истифодаи чамъи векторҳоро бо қоидаи параллелограмм медиҳад (расми 3).



Расми 2



Расми 3

Савол ва супоришҳо

1. Воҳиди мавҳум чист? Барои чӣ ба дохил кардани он эҳтиёҷ пайдо шуд?
2. Намуди алгебравии адади комплексиро нависед, мисолҳо биёред.
3. Ду ададҳои комплексӣ кай баробар мешаванд? Мисол биёред.
4. Сумма, фарқ, ҳосили зарб ва ҳосили тақсими ду адади комплексӣ чӣ хел муайян мешавад? Дар мисолҳо фаҳмонед.
5. Ададҳои комплексии муқобил чист?
6. Адади комплексии ҳамроҳшуда чист?
7. Адади комплексии баръакс чист? Мисолҳо биёред.
8. Тасвири вектории адади комплексӣ чист? Мисолҳо биёред.



Машқҳо

1. Даҳони қисмҳои ҳақиқӣ ва мавҳуми адади комплексиро гӯед:

- | | | |
|-----------------------|-----------------------------|--------------------|
| 1) $z = -3 + 7i$; | 2) $z = 4 - \frac{1}{2}i$; | 3) $z = -2 - 5i$; |
| 4) $z = -5,7 + 5i$; | 5) $z = 5i$; | 6) $z = 9$; |
| 7) $z = -7 + 3i$; | 8) $z = 8 - \frac{1}{2}i$; | 9) $z = -5 - 6i$; |
| 10) $z = -5,7 - 5i$; | 11) $z = -5i$; | 12) $z = 90$. |

2. Адади комплексиро дар намуди алгебрави нависед:

- | | |
|--|--|
| 1) $\operatorname{Re}(z) = 4, \operatorname{Im}(z) = -5$; | 2) $\operatorname{Re}(z) = -2, \operatorname{Im}(z) = 3$; |
| 3) $\operatorname{Re}(z) = 0, \operatorname{Im}(z) = 8$; | 4) $\operatorname{Re}(z) = 7, \operatorname{Im}(z) = 0$; |
| 5) $\operatorname{Re}(z) = 6, \operatorname{Im}(z) = -7$; | 6) $\operatorname{Re}(z) = -3, \operatorname{Im}(z) = 4$; |

- 7) $\operatorname{Re}(z) = 0, \operatorname{Im}(z) = 9;$ 8) $\operatorname{Re}(z) = 2, \operatorname{Im}(z) = 0;$
 9) $\operatorname{Re}(z) = 12, \operatorname{Im}(z) = 20.$

3. Адади комплекси баробарро нишон диҳед (**3–4**):

1) $2 - 4i;$ | 2) $2 + 3i;$ | 3) $\frac{2}{3} + i;$ | 4) $\sqrt{121} - 7i;$ | 5) $33 + 44i;$ | 6) $\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{27}i.$

4. 1) $4 - 3i;$ | 2) $1 + 3i;$ | 3) $\frac{1}{3} + i;$ | 4) $\sqrt{16} - \sqrt{9}i;$ | 5) $3 + 4i;$ | 6) $\sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{64}i.$

5. Адади ҳамроҳшудаи z , адади \bar{z} -ро ёбед (**5–6**):

1) $z = 5 - 3i;$ | 2) $z = -5 + 3i;$ | 3) $z = 1 - i;$ | 4) $z = 2 + 3i;$ | 5) $z = -7 - i.$

6. 1) $z = 7, 2;$ | 2) $z = 6i;$ | 3) $z = \sqrt{16} - \sqrt{9}i;$ | 4) $z = -2i + (-7 + 3i).$

7. Суммаро ёбед (**7–8**):

1) $(-5 + 3i) + (2 - i);$ | 2) $(-3) + (3 - 4i);$ | 3) $(2 + 5i) + (-2 - 5i);$ | 4) $(-4i) + (3.6 - 3i).$

8. 1) $(8 - 3i) + (8 + 3i);$ | 2) $(-7 + 5i) + (7 - 5i);$ | 3) $9i + (3 - 8i);$ | 4) $-17i + (-9 + 16i).$

9. Фарқро ёбед (**9–10**):

1) $(3 + 4i) - (4 + 2i);$ 2) $(4 - 6i) - (3 + 2i);$ 3) $(2 + 4i) - (-4 + 2i).$

10. 1) $(5 + 4i) - (5 - 4i);$ 2) $7 - (8 + 5i);$ 3) $7i - (6i + 3).$

11. Ҳосили зарбро ёбед (**11–12**):

1) $(4 + 6i)(3 + 4i);$ 2) $(5 + 8i)(3 - 2i);$ 3) $(6 - 4i)(3 - 6i).$

12. 1) $(-3 + 2i)(8 - 4i);$ 2) $\left(\frac{1}{3} - i\right)\left(\frac{1}{2} + i\right);$ 3) $\left(\frac{5}{7} + 4i\right)\left(\frac{7}{5} - 2i\right).$

13. Ҳосили тақсимро ёбед (**13–14**):

1) $\frac{2 + 2i}{1 - 2i};$ | 2) $\frac{4 - 5i}{3 + 2i};$ | 3) $\frac{3 + 4i}{3 - 4i};$ | 4) $\frac{2 + 3i}{4 - 3i};$ | 5) $\frac{4 - 5i}{3 + 2i}.$

14. 1) $\frac{4 - 5i}{-2 + 3i};$ | 2) $\frac{3}{5 - 2i};$ | 3) $\frac{5 - 2i}{3};$ | 4) $\frac{7i}{13 - i};$ | 5) $\frac{7 + 4i}{5 - 6i}.$

15. Амалҳоро иҷро кунед (**15–16**):

1) $\frac{(3 - 4i)(4 - 3i)}{2 + i};$ | 2) $\frac{(4 - i)(3 + 2i)}{3 - 2i};$ | 3) $\frac{5 - 2i}{(2 + i)(1 - i)}.$

16. 1) $\frac{3 - 2i}{(1 + i)(3 - i)};$ | 2) $\frac{3}{2 - 3i} + \frac{3}{2 + 3i};$ | 3) $\frac{2}{1 + i} + \frac{5}{2 + i}.$

17. Ададҳои комплекси дар ҳамворӣ тасвир кунед (**17–18**):

1) $z = 3 + 4i;$ | 2) $z = 3 - 4i;$ | 3) $z = -3 + 4i;$ | 4) $z = -3 - 4i;$ | 5) $z = 2i.$

18. 1) $z=4-2i$; 2) $z=5+3i$; 3) $z = \frac{2+i}{2-i}$; 4) $z=(2-i)(1+i)$; 5) $z=(2+i)(2-i)$.

88

АДАДҲОИ КОМПЛЕКСИИ НАМУДИ

$r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ва $r \cdot e^{i\varphi}$ ($r > 0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$)

Дар ин мавзӯи намудҳои тригонометрӣ ва нишондиҳандаи ададҳои комплексиро меомӯзем.

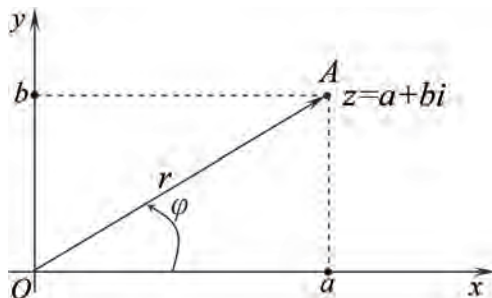
Ададҳои комплексии намуди тригонометрӣ дошта

Дар ҳамворӣ системаи координатаҳои росткунҷаи Декарт дода шуда бошад.

Ба адади комплексии $z=a+bi$ нуқтаи A -и координатааш $(a; b)$ мувофиқ гузашта шуда бошад. Ибтидои координатаҳо нуқтаи O ва нуқтаи A -ро пайваст карда вектори \overline{OA} -ро ҳосил мекунем (расми 4).

Масофаи $r=OA$ аз нуқтаи O то нуқтаи A модули адади комплексӣ, кунҷи байни самти мусбати тири абсиссаҳо ва вектори \overline{OA} (φ) аргументи адади комплексӣ номида мешавад.

Равшан аст, ки $0 \leq r < +\infty$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos \varphi = \frac{a}{r}$, $\sin \varphi = \frac{b}{r}$.



Расми 4

Намуди $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ -и ададҳои комплексӣ, шакли тригонометрӣ ва намуди $z = r \cdot e^{i\varphi}$ бошад шакли нишондиҳандагии он номида мешавад. Барои аз шакли тригонометрӣ ба шакли алгебравӣ гузаштани адади комплексӣ аз формулаи зерин истифода мебаранд: $a = r \cos \varphi$, $b = r \sin \varphi$.

Мисоли 1. Ададҳои комплексиро дар шакли тригонометрӣ нависед:

- 1) i ; 2) $-2i$; 3) $-1 - i$.

△ 1) $z = i = 0 + 1 \cdot i$, $a = 0$, $b = 1$, $r = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$, $\cos \varphi = \frac{0}{1} = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Пас, $i = 1 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$, $i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$.

2) Азбаски $r=2$, $\varphi = \frac{3\pi}{2}$, пас $-2i = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$;

3) $z = -1 - i$, $a = -1$, $b = -1$, $r = \sqrt{2}$, $\cos\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\varphi = \frac{5\pi}{4}$.

Пас, $-1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$. ▲

Мисоли 2. Ададҳои комплексиро дар шакли нишондиҳандагӣ нависед:

- 1) i ; 2) $-2i$; 3) $-1 - i$.

▲ Аз ҳисобкуниҳои мисоли 1 истифода мебарем:

$$i = e^{\frac{\pi}{2}i}, \quad -2i = 2e^{\frac{3\pi}{2}i}, \quad -1 - i = \sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4}i}. \quad \blacktriangle$$

Савол ва супоришҳо



1. Модули ададҳои комплексӣ чист? Он чӣ хел ҳисоб карда мешавад?
2. Аргументи адади комплексӣ чист? Мисол биёред.
3. Шакли тригонометрии адади комплексиро фаҳмонед.
4. Шакли нишондиҳандагӣ адади комплексиро фаҳмонед.
5. Формулаи машҳури Эйлерро исбот кунед: $e^{i\pi} = -1$.

Машқҳо

19. Модули адади комплексиро ёбед (19–20):

1) $z = -2 + 3i$; 2) $z = -2 + 3i$; 3) $z = 1 + \sqrt{3}i$; 4) $z = \sqrt{8} - i$.

20.

1) $z = 6 - 8i$; 2) $z = 2 + 2\sqrt{3}i$; 3) $z = \sqrt{3} + i$; 4) $z = 2i$.

21. Аргументи адади комплексиро ёбед (21–22):

1) $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$; 2) $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$; 3) $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$; 4) $z = 2\sqrt{2}i$.

22.

1) $z = 5$; 2) $z = -2i$; 3) $z = \frac{\sqrt{33}}{2} - \frac{\sqrt{11}}{2}i$.

23.

Адади комплексиро дар шакли тригонометрӣ ва нишондиҳандагӣ нависед (23–24):

1) $z = -2 - 2i$; 2) $z = 2 - 2i$; 3) $z = \sqrt{3} - i$; 4) $z = 1 - \sqrt{3}i$.

24.

1) $z = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$; 2) $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$; 3) $z = \frac{\sqrt{33}}{2} - \frac{\sqrt{11}}{2}i$; 4) $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.

Зарб кардани адади комплексии дар шакли тригонометрӣ додашуда

Барои зарб кардани ададҳои комплексии дар шакли тригонометрии $z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ додашуда формулаи зерин мувофиқ аст:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \quad (1)$$

Барои тақсим кардани ададҳои комплексии дар шакли тригонометрии z_1 ва z_2 додашуда бошад, формулаи зерин мувофиқ аст:

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{r_2}{r_1} [\cos(\varphi_2 - \varphi_1) + i \sin(\varphi_2 - \varphi_1)] r_1 \neq 0. \quad (2)$$

Мисоли 1. Ададҳои комплексии

$$z_1 = 3(\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ) \text{ ва } z_2 = 2(\cos 35^\circ + i \sin 35^\circ) \text{ -ро зарб кунед.}$$

△ Мувофиқи қоидаи боло, ҳосили зарбро меёбем:

$$z_1 \cdot z_2 = 3 \cdot 2(\cos(20^\circ + 35^\circ) + i \sin(20^\circ + 35^\circ)) = 6(\cos 55^\circ + i \sin 55^\circ). \quad \blacktriangle$$

Мисоли 2. Ададҳои комплексии

$$z_1 = 2(\cos 140^\circ + i \sin 140^\circ), z_2 = 3(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ) \text{ ва } z_3 = 5(\cos 70^\circ + i \sin 70^\circ) \text{ -ро зарб кунед.}$$

△ Мувофиқи қоидаи боло, ҳосили зарбро меёбем:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 &= 2 \cdot 3 \cdot 5 [\cos(140^\circ + 150^\circ + 70^\circ) + i \sin(140^\circ + 150^\circ + 70^\circ)] = 30 \cos 360^\circ \\ &= 30(\cos 360^\circ + i \sin 360^\circ) = 30. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Мисоли 3. Ҳосили тақсими ададҳои комплексии

$$z_1 = 6(\cos 50^\circ + i \sin 50^\circ) \text{ ва } z_2 = 2(\cos 25^\circ + i \sin 25^\circ) \text{ -ро ёбед.}$$

△ Мувофиқи қоидаи тақсимшавӣ:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{6}{2} [\cos(50^\circ - 25^\circ) + i \sin(50^\circ - 25^\circ)] = 3(\cos 25^\circ + i \sin 25^\circ). \quad \blacktriangle$$

Ба дараҷаи натуралӣ бардоштан

Барои ба квадрат бардоштани адади комплексии $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ аз формулаи (1) зарби ададҳои комплексӣ истифода мебарем:

$$z^2 = r^2 (\cos \varphi + i \sin \varphi)^2 = r^2 (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi).$$

$$\text{Монанди ин, } z^3 = [r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^3 = r^3 (\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi). \quad (3)$$

Умуман, формулаи $z^n = [r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$ ҷой дорад, дар ин ҷо $n \in \mathbb{N}$.

Мисоли 4. Адади комплексии $z = 3(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)$ -ро ба куб бардоред:

△ Мувофиқи формулаи (3):

$$z^3 = 27(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ) = \frac{27}{2}(\sqrt{2} + i\sqrt{2}) = \frac{27}{\sqrt{2}}(1+i). \blacktriangle$$

Мисоли-5. Дараҷаи 10-уми адади комплексии $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ -ро ёбед.

\triangle Аввал модуль ва аргументи адади додасударо ёфта, онро дар намуди тригонометрий навишта мегирем: $r = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$, $z = 1 \cdot (\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$

аз ин ҷо $z^{10} = (\cos 600^\circ + i \sin 600^\circ) = \cos 240^\circ + i \sin 240^\circ = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i. \blacktriangle$

Савол ва супоришҳо



1. Ададҳои комплексии намуди тригонометрий дошта чӣ хел зарб карда мешавад? Маънидод кунед ва гӯед.

2. Ададҳои комплексии намуди тригонометрий дошта чӣ хел тақсим карда мешавад? Маънидод кунед ва гӯед.

3. Ададҳои комплексии намуди тригонометрий дошта чӣ хел ба дараҷа бардошта мешавад?

Машқҳо

27. Ададҳои комплексиро зарб кунед (27–28):

1) $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$ ва $z_2 = \frac{1}{2}(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$;

2) $z_1 = \frac{1}{3}(\cos \frac{\pi}{9} + i \sin \frac{\pi}{9})$ ва $z_2 = 3(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$.

28. 1) $z_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12})$ ва $z_2 = \sqrt{3}(\cos \pi + i \sin \pi)$;

2) $z_1 = 2(\cos \frac{\pi}{18} + i \sin \frac{\pi}{18})$ ва $z_2 = \frac{1}{2}(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$.

29. Ададҳои комплексиро тақсим кунед (29–30):

1) $z_1 = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8})$ ро ба $z_2 = 2(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12})$

2) $z_1 = 8(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$ ро ба $z_2 = 4(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$

30. 1) $z_1 = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}$ ро ба $z_2 = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$ га;

2) $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3})$ ро ба $z_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3})$

31. Ададҳои комплексиро ба дараҷа бардоред (31–32):

1) $(3(\cos \frac{\pi}{15} + i \sin \frac{\pi}{15}))^5$; 2) $(\sqrt{3}(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}))^6$; 3) $(\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}))^7$.

32. 1) $(4(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}))^4$; | 2) $(\cos \frac{\pi}{15} + i \sin \frac{\pi}{15})^{10}$; | 3) $(\cos \frac{\pi}{22} + i \sin \frac{\pi}{22})^{11}$.

33. Амалхоро ичро кунед (33–34):

1) $\frac{(1+i)^5 (\sqrt{2}-i)^4}{(1-i)(1+\sqrt{2}i)^4}$; | 2) $\frac{(1-i)^4 (\sqrt{2}+i)^3}{(1+i)^4}$; | 3) $\frac{(1+i)^{15}}{(1-i)^{10} - (1+i)^{10} \cdot i}$.

34. 1) $\frac{2+5i}{2-5i} + \frac{2-5i}{2+5i}$; | 2) $\frac{12+5i}{6-8i} + \frac{(2-i)^2}{1-2i}$; | 3) $\frac{3-4i}{3+4i} + \frac{5+6i}{5-6i}$.

91

АЗ АДАДИ КОМПЛЕКСИ БАРОВАРДАНИ РЕШАИ КВАДРАТӢ

Барои аз адади комплексии намуди $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ решаи квадратӣ баровардан модули ин ададро x , аргументашро y гуфта баробарии зеринро менависем:

$$\sqrt{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = x(\cos y + i \sin y).$$

Ҳар ду қисми баробариро ба квадрат бардошта, аз $r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = x^2(\cos 2y + i \sin 2y)$ ҳамчунин $x^2=r$, $2y = \varphi + 2\pi n$ буданаш муносибатҳои $x = \sqrt{r}$, $y = \frac{\varphi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ ро меёбем. Пас, барои решаи квадратии адади комплексии z формулаи

$$\beta = \sqrt{r} \left[\cos \frac{\varphi + 2\pi n}{2} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi n}{2} \right]$$

ҷой дорад. Ба n қимматҳои $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ро гузошта решаҳои гуногунро меёбем. Ҳангоми санҷиш фақат 2 то қимматҳои гуногун мавҷуд буданаш

маълум мешавад, яъне $n=0$ $\beta_1 = \sqrt{r} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right)$, (1)

$$n=1 \quad \beta_2 = \sqrt{r} \left[\cos \left(\frac{\varphi}{2} + \pi \right) + i \sin \left(\frac{\varphi}{2} + \pi \right) \right]. \quad (2)$$

Мисоли 1. Аз адади комплексии $z = 9(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$ решаи квадратӣ бароред.

△ Мувофиқи формулаи боло, решаи квадратиро ҳисоб мекунем:

$$\sqrt{z} = 3 \left[\cos(30^\circ + 180^\circ n) + i \sin(30^\circ + 180^\circ n) \right].$$

Дар ин формула барои $n=0$ решаи квадратии $\sqrt{z} = 3(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ) = \frac{3}{2}(\sqrt{3} + i)$

ва барои $n=1$ решаи квадратии $\sqrt{z} = 3(\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ) = -\frac{3}{2}(\sqrt{3} + i)$ ёфт мешавад. ▲

Ҳангоми аз адади комплекси баровардани решаи кубӣ аз формулаи зерин

истифода мебаранд:

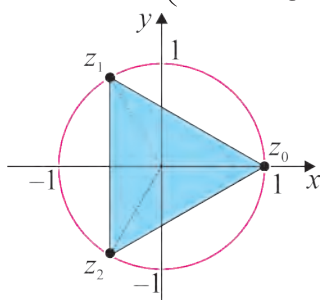
$$z_n = \sqrt[3]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = x(\cos y + i \sin y) = \sqrt[3]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 360^\circ n}{3} + i \sin \frac{\varphi + 360^\circ n}{3} \right), n=0, 1, 2.$$

Ин ададҳои ёфташуда дар системаи координатаҳои Декарт аз қуллаҳои секунҷаи мунтазама, ки ба давраи радиусаш ба $\sqrt[3]{r}$ баробар, марказаш дар ибтидои координатаҳо хобанда иборат аст.

Мисоли 2. Решаи кубии адади комплексии $z=1$ ро ёбед ва дар нақша нишон диҳед.

△ Ҳангоми модули ин адад ба $r=1$ ва аргументаш $\varphi=0^\circ$ будан,

$$z_n = \sqrt[3]{1} = 1 \cdot \left(\cos \frac{0^\circ + 360^\circ n}{3} + i \sin \frac{0^\circ + 360^\circ n}{3} \right), n=0, 1, 2.$$



Расми 5.

Аз ин ҷо: барои $n=0$ $z_0=1 \cdot (\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)=1$,

барои $n=1$ $z_1=1 \cdot (\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)=-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$,

барои $n=2$ $z_2=1 \cdot (\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ)=-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
мешавад.

Аз қуллаҳои секунҷаи мунтазам иборат будани ин ададҳоро аз расми 5 диданамон мумкин.

Ҳангоми аз адади комплексӣ баровардани решаи дараҷаи 4-ум аз формулаи зерин истифода мебаранд:

$$z_n = \sqrt[4]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[4]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 360^\circ n}{4} + i \sin \frac{\varphi + 360^\circ n}{4} \right), n=0, 1, 2, 3.$$

Мисоли 3. Аз адади комплексии $z=i$ решаи дараҷаи 4-умро бароред.

△ Азбаски модули ин адад ба $r=1$, аргументаш $\varphi=90^\circ$ аст,

$$z_n = \sqrt[4]{1(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)} = 1 \cdot \left(\cos \frac{90^\circ + 360^\circ n}{4} + i \sin \frac{90^\circ + 360^\circ n}{4} \right).$$

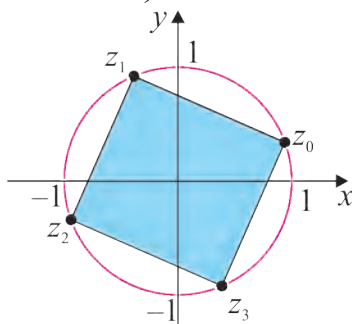
Аз ин ҷо: ҳангоми $n=0$ $z_0=\cos 22,5^\circ + i \sin 22,5^\circ$,

ҳангоми $n=1$ $z_1=\cos 112,5^\circ + i \sin 112,5^\circ$,

ҳангоми $n=2$ $z_2=\cos 202,5^\circ + i \sin 202,5^\circ$,

ҳангоми $n=3$ $z_3=\cos 292,5^\circ + i \sin 292,5^\circ$.

Ин ададҳо аз қуллаҳои квадрате, ки ба давраи радиусаш ба 1 баробар ва марказаш дар ибтидои координатаҳо хобанда дарун қашида иборат мебошад (расми 6).



Расми 6.



Савол ва супоришҳо

1. Решаи квадратӣ аз адади комплексӣ бо ёрии кадом формула ёфта мешавад?
2. Формулаи Муавр чист? Онро маънидод кунед ва гӯед.

Машқҳо

35. Аз адади комплекси решаи квадратӣ бароред (35–36):

- | | |
|--|--|
| 1) $z = 25 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{\pi}{3} \right);$ | 2) $z = \frac{1}{4} \left(\cos \frac{\pi}{18} + i \cdot \sin \frac{\pi}{18} \right);$ |
| 3) $z = \cos \frac{\pi}{5} + i \cdot \sin \frac{\pi}{5};$ | 4) $z = \cos \frac{3\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{3\pi}{4};$ |
| 5) $z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{30} + i \cdot \sin \frac{\pi}{30} \right);$ | 6) $z = \frac{1}{49} \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \cdot \sin \frac{\pi}{8} \right);$ |
| 7) $z = \cos \frac{\pi}{10} + i \cdot \sin \frac{\pi}{10};$ | 8) $z = \cos \frac{3\pi}{2} + i \cdot \sin \frac{3\pi}{2};$ |

36.

- | | |
|--|---|
| 1) $z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{\pi}{3} \right);$ | 2) $z = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \cdot \sin \frac{\pi}{8} \right);$ |
| 3) $z = \cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{\pi}{4};$ | 4) $z = \cos \frac{3\pi}{2} + i \cdot \sin \frac{3\pi}{2};$ |
| 5) $z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \cdot \sin \frac{\pi}{2} \right);$ | 6) $z = \frac{16}{9} \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \cdot \sin \frac{\pi}{8} \right);$ |
| 7) $z = 5 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{\pi}{4} \right);$ | 8) $z = \cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{\pi}{4}.$ |

МАШҚҲО ДОИР БА БОБИ IV

37. Ҳисоб кунед:

- | | |
|---|----------------------------------|
| 1) $(3 + 4i)(2 - 5i) + (3 - 4i)(2 + 5i);$ | 2) $(1 + 3i)^3 - (4 + i^5);$ |
| 3) $\frac{(1 - 2i)^2}{1 + 3i};$ | 4) $5 - 7i + 8i^2 - 9i^3 + i^4.$ |

38. Дар намуи алгебравӣ нависед:

- | | | |
|---|--|-----------------------------------|
| 1) $z = \left(\frac{1 - \sqrt{3}i}{3i} \right)^2;$ | 2) $z = \frac{12 - 13i}{8 + 6i} + \frac{(1 + 2i)^2}{i + 3};$ | 3) $\frac{4i}{(\sqrt{3} - i)^2}.$ |
|---|--|-----------------------------------|

39. Ҳисоб кунед (39–42):

1) $(1+i)^{10}$; 2) $(1-i)^4(-2\sqrt{3}+2i)^3$; 3) $(1+i)^{2018} \cdot (1-i)^{2018}$;

4) $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^8$; 5) $\frac{2\sqrt{3}-2i}{(-1+i)(\sqrt{2}+\sqrt{6}i)}$; 6) $\left(\frac{\sqrt{2}-i}{1+i}\right)^{10}$.

40.

1) $z = \frac{(2+i)^2}{3-4i}$; 2) $z = \frac{(1+2i)^3}{2i} - 3i^{10}$; 3) $z = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^5$;

4) $z = \frac{3+2i}{1+4i} - i^7$; 5) $\frac{(4-i)}{3+4i}$; 6) $\frac{2-3i}{1-4i}$.

41.

1) $\frac{2+5i}{2-5i} + \frac{2-5i}{2+5i}$; 2) $\frac{12+5i}{6-8i} + \frac{(2-i)^2}{1-2i}$;

3) $(2-3i)^3 - (2+3i)^3$; 4) $\frac{(4+3i)(2+3i)^2}{6+8i}$;

5) $\frac{33+5i}{2-5i} + \frac{2-5i}{2+5i}$; 6) $\frac{12-5i}{6-8i} + \frac{(2+i)^2}{1-2i}$.

42.

1) $(2-2i) \cdot 2\sqrt{3}(\cos 70^\circ + i \sin 70^\circ)$; 2) $\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) \cdot (\sqrt{3}-3i)$.

43. Таксимро ичро кунед:

1) $5(\cos 100^\circ + i \sin 100^\circ) : \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$; 2) $(6+6i) : 3(\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ)$.

44. Ба дараҷа бардоред.

1) $(1-\sqrt{3}i)^3$; 2) $\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)^4$; 3) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}i\right)^6$;

4) $(1-\sqrt{3}i)^5$; 5) $\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)^{10}$; 6) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}i\right)^{10}$.

45. Решаи квадратиро ҳисоб кунед:

1) $\sqrt{-27i}$; 2) $\sqrt{6-6\sqrt{3}i}$; 3) $\sqrt{8+8\sqrt{3}i}$; 4) $\sqrt{-256}$.

46. Баробариро санчед:

$$1) \left[\frac{-\sqrt{3}+i}{2} \right]^5 + \left[\frac{-\sqrt{3}-i}{2} \right]^5 = \sqrt{3};$$

$$2) \frac{(\sin 26^\circ + i \cos 154^\circ) \cdot (\sin 27^\circ + i \cos 153^\circ)^3}{\sin 17^\circ - i \cos 17^\circ} = -1.$$

47. Решаи кубиро ҳисоб кунед:

$$1) \sqrt[3]{1+i}; \quad 2) \sqrt[3]{-i}; \quad 3) \sqrt[3]{8}; \quad 4) \sqrt[3]{1-i}; \quad 5) \sqrt[3]{-8}.$$

48. Решаи дараҷаи 4-умро бароред:

$$1) \sqrt[4]{-1}; \quad 2) \sqrt[4]{16}; \quad 3) \sqrt[4]{1+i}; \quad 4) \sqrt[4]{1-i}; \quad 5) \sqrt[4]{-16}.$$

Намунаҳои қорҳои назоратӣ

1. Ҳисоб кунед: $(35-7i) \cdot (4-6i)$.

2. Таксимро иҷро кунед: $\frac{8-i}{40+3i}$.

3. Зарб кунед: $3(\cos 5^\circ + i \sin 5^\circ) \cdot 8(\cos 3^\circ + i \sin 3^\circ)$.

4. Ба дараҷа бардоред: $(3(\cos 4^\circ + i \sin 4^\circ))^6$

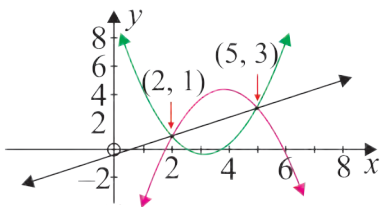
5. Аз решаи квадратӣ бароред: $\sqrt{64i}$.

ҶАВОБҲО

Боби III

73. а) азбаски ҳамаи абсиссаҳои x гуногун ҳастанд ин функсия мешавад. б) азбаски абсиссаи x дар ду нукта як хел қиммат мегирад, ин функсия намешавад. в) азбаски ҳамаи нуктаҳо дар абсиссаи x як хел мебошанд ин функсия намешавад. д) азбаски ҳамаи абсиссаҳои x гуногун ҳастанд ин функсия мешавад. е) азбаски ҳамаи абсиссаҳои x гуногун ҳастанд ин функсия мешавад. ф) азбаски ҳамаи нуктаҳо дар абсиссаи x як хел мебошанд ин функсия намешавад. 74. а) функсия; б) функсия; в) функсия; д) функсия нест; е) функсия; ф) функсия нест; г) функсия; ҳ) функсия нест; 75. Не, ҳар гуна хати ростии вертикалӣ функсия намешавад. 76. Не, $y = \pm\sqrt{9-x^2}$. 77. а) 2; б) 8; в) -1; д) -13; е) 1. 78. а) 2; б) 2; в) -16; д) -68; е) $\frac{32}{9}$. 79. а) -3; б) 3; в) 3; д) -3; е) $\frac{15}{2}$. 80. а) $7-3a$; б) $7+3a$; в) $-3a-2$; д) $10-3b$; е) $1-3x$; ф) $7-3x-3h$. 81. а) $2x^2+19x+43$; б) $2x^2-11x+13$; в) $2x^2-3x-1$; д) $2x^4+3x^2-1$; е) $2x^4-x^2-2$; ф) $2x^2+4hx+2h^2+3x+3h-1$. 82. а) I) $-\frac{7}{2}$; II) $-\frac{3}{4}$; III) $-\frac{4}{9}$; б) $x=4$. 84. $V(4)=6210$. нархи асбоб баъди 4 сол. Баъди $t=4,5$ сол нархи асбоб 5780 мешавад. Нархи аввали асбоб ба 9650 баробар.

85.

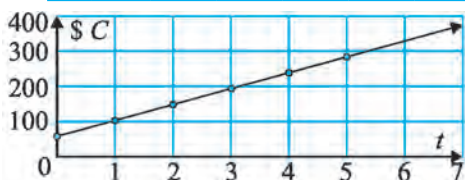


86. $f(x) = -2x + 5$. 87. $a = 3, b = -2$. 88. $a = 3, b = -1, c = -4$. 90. a) I) $x > 0$; б) II) $-2 \leq x \leq 3$; в) I) $-2 < x \leq 0$; II) $0 \leq x < 2$; д) I) $x \leq 2$; II) $x \geq 2$; е) II) $x \in \mathbb{R}$; ф) I) $x \in \mathbb{R}$; г) I) $1 \leq x \leq 5$; II) $x \leq 1, x \geq 5$; х) I) $2 \leq x < 4, x > 4$; II) $x < 0, 0 < x \leq 2$; и) I) $x \leq 0, 2 \leq x \leq 6$; II) $0 \leq x < 2, x \geq 6$. 92. а) $V(0) = 25000$ евро. Ин нархи ибтидоии

автомашина. б) $V(3) = 16\ 000$. Ин нархи автомашина баъди 3 сол; в) $t = 5$.

93. а)

t	0	1	2	3	4	5
C	60	105	150	195	240	285



б) $C = 60 + 45t$; в) \$ 352,50.

94. а)

t	0	1	2	3	4	5
V	265	254	243	232	221	210

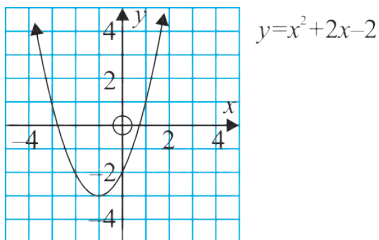


в) $V(t) = 265 - 11t$; д) I) 100 l.

95. а) ха; б) не; в) ха; д) ха; е) ха; ф) не. 96. а) не; б) ха; в) ха; д) ха; е) не; ф) не. 97. а) $x = -3$; б) $x = -2$ ёки -3 ; в) $x = 1$ ёки 4 ; д) ба ҳалли ҳақиқӣ доро нест. 98. а) I) 75 м; II) 195; III) 275 м; б) I) $t = 2$ с ё $t = 14$ с; II) $t = 0$ с ё $t = 16$ с. 99. а) 40 ҳазор, 480 ҳазор; б) 10 то ё 62 то.

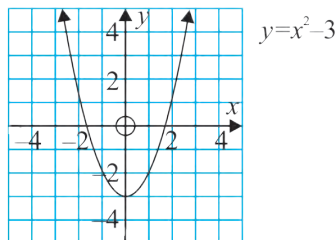
100. а)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	1	-2	-3	-2	1	6	13



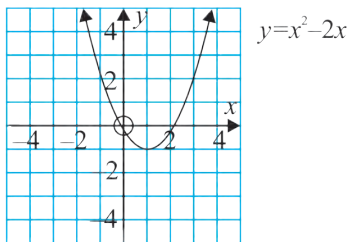
б)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	6	1	-2	-3	-2	1	6



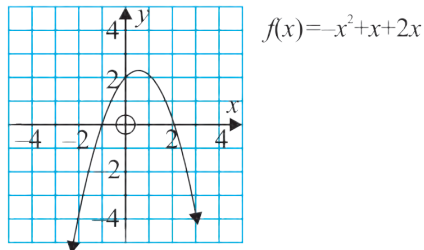
в)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	15	8	3	0	-1	0	3



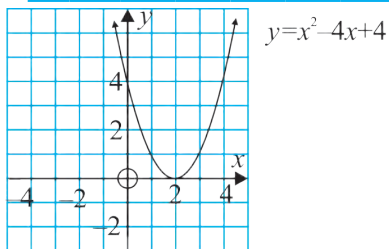
д)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-10	-4	0	2	2	0	-4



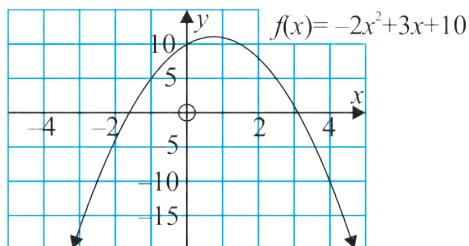
e)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	25	16	9	4	1	0	1



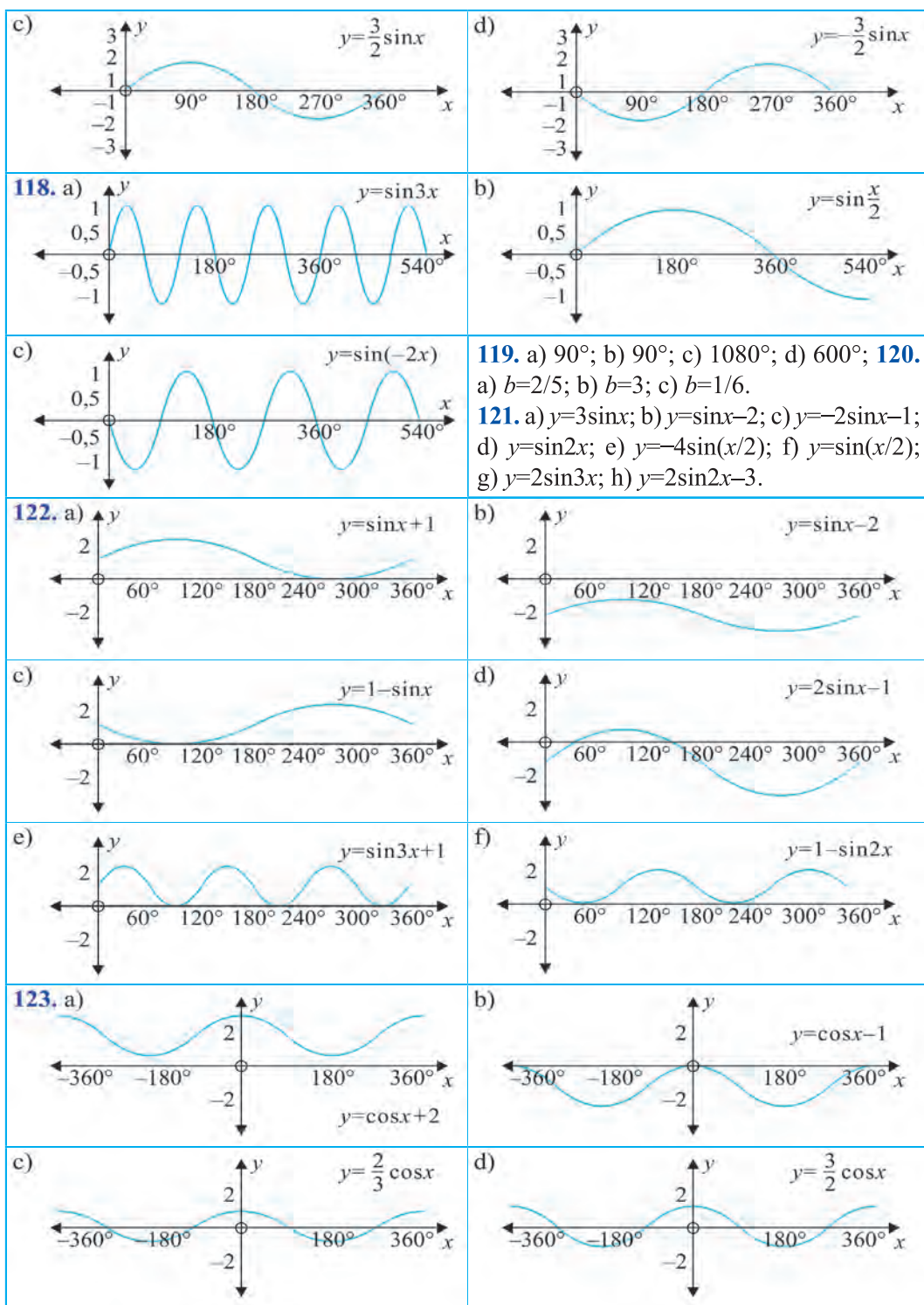
f)

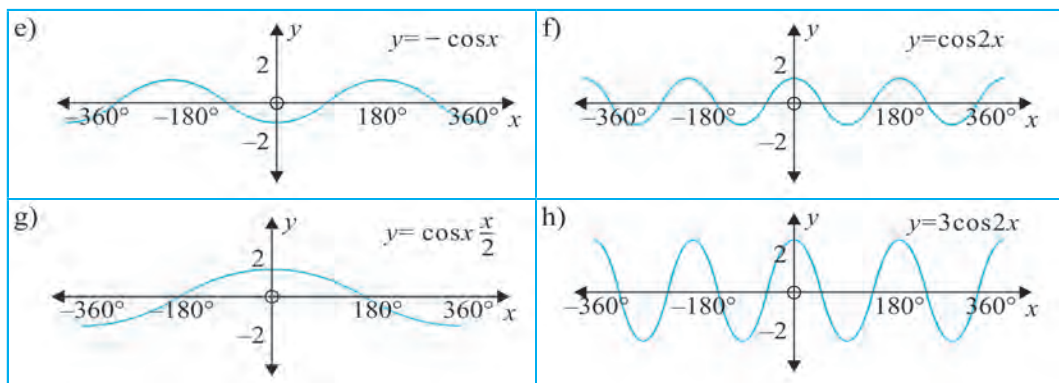
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-17	-4	5	10	11	8	1



101. a) 3; b) -1; c) -4; d) 1; e) 5; f) 0; g) 8; h) -5; i) 2. 102. a) 3; b) -6; c) 49; d) 15; e) 0; f) 20.
 105. a) $x=3$; b) $x=-5/2$; c) $x=1$; d) $x=-4$; e) $x=3$; f) $x=-4$. 106. a) $x=4$; b) $x=-2$; c) $x=1$;
 d) $x=11/2$; e) $x=5$; f) $x=-2$. 107. a) $x=-3$; b) $x=4$; c) $x=-5/4$; d) $x=3/2$; e) $x=0$; f) $x=7/10$; g)
 $x=3$; h) $x=5/3$; i) $x=-4$. 108. a) (2, 3); b) (-1, 4); c) (3, 8); d) (0, 3); e) (-3, -18); f) (1, -1); g)
 (1/2, -5/4); h) (3/4, -7/8); i) (6, 7). 109. a) $y=2(x-1)(x-2)$; b) $y=2(x-2)^2$; c) $y=(x-1)(x-3)$; d)
 $y=-(x-3)(x+1)$; e) $y=3(x-1)^2$; f) $y=-2(x+2)(x-3)$. 110. a) $y=3/2(x-2)(x-4)$; b) $y=-1/2(x+4)$
 $(x-2)$; c) $y=-4/3(x+3)^2$; d) $y=1/4(x+3)(x-5)$; e) $y=-(x+3)(x-3)$; f) $y=4(x-1)(x-3)$. 111. a) 3м;
 b) 0,5с; c) 4м.

<p>113. a) даврї;</p>	<p>b) даврї нест;</p>
<p>c) даврї нест;</p>	<p>d) даврї нест;</p>
<p>114. a) баландї (см)</p> <p>масофа (см)</p>	<p>b) муодилаи тири максимуми амплитудаи даврї мувофиқан ба $y=32$; 64 см; 20 см; 32 см баробар.</p> <p>115. a) даврї; b) даврї; c) даврї; d) даврї нест; e) даврї; f) даврї.</p> <p>116. a) 2; b) 8; c) (2,1); d) 8; e) $y=-1$;</p>
<p>117. a)</p> <p>$y = 3\sin x$</p>	<p>b)</p> <p>$y = -3\sin x$</p>





124. a) 120° ; b) 1080° ; c) 720° . 126. a) $y=2\cos 2x$; b) $y=\cos(x/2)+2$; c) $y=-5x\cos 2x$. 127.

$T=9,5\cos(30t)-9,5$. 130. 1) 0; 2) $\frac{\pi}{3}$; 3) $\frac{\pi}{6}$; 4) $-\frac{\pi}{3}$. 131. 1) $-\frac{\pi}{4}$; 2) $-\frac{\pi}{6}$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) $-\frac{\pi}{2}$

. 132. 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{5\pi}{6}$; 3) $\frac{\pi}{4}$; 4) π . 136. 1) 0; 2) $\frac{4\pi}{3}$. 138. 1) $\frac{3\pi}{2}$; 2) $-\pi$. 140. 1) 2π ; 2) $\frac{3\pi}{2}$.

142. 1) маъно дорад; 2) маъно надорад; 3) маъно надорад.

144. 1) $x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + n\pi, n \in Z$.

146. 1) $x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2n\pi, n \in Z$.

148. 1) $x = -\frac{\pi}{3} + n\pi, n \in Z$.

150. 1) $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2n\pi, n \in Z$.

151. 1) $x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + n\pi, n \in Z$.

152. 2) $x = -\frac{\pi}{24} + \frac{n\pi}{4}, n \in Z$.

153. 1) $x_1 = k\pi, x_2 = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z$.

156. 1) $x_1 = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{4} + n\pi, x_2 = -\frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2}, n \in Z$.

157. 1) $x_1 = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi, x_2 = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi, n \in Z$.

158. 2) $x = \pm \arccos(1 - \frac{\sqrt{7}}{2}) + 2n\pi, n \in Z$. 159. 2) $x_1 = -\frac{\pi}{4} + n\pi,$

$x_2 = \arccos 4 + n\pi, n \in Z$. 160. 1) $x = \frac{2n\pi}{3}, n \in Z$; 3) $x_1 = \frac{n\pi}{2},$

$x_2 = \frac{\pi}{10} + \frac{n\pi}{5}, n \in Z$. 162. 1) $(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6})$; 2) $(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4})$; 3) $(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2})$.

163. 1) $[\frac{\pi}{4} + 2n\pi; \frac{3\pi}{4} + 2n\pi], n \in Z$; 2) $(\frac{3\pi}{4} + 2n\pi; \frac{5\pi}{4} + 2n\pi), n \in Z$;

3) $\left(-\frac{\pi}{2} + n\pi; -\frac{\pi}{4} + n\pi\right), n \in Z$. **167.** 1) $\left[-\frac{\pi}{2} + n\pi; \frac{\pi}{3} + n\pi\right], n \in Z$. **173.** 1) $y=2x+6$.

174. 1) $y = 13 \cdot \sqrt{\frac{x-1}{17}}$. **175.** 1) $x^2+y^2=49$, давра. **176.** 1) $(x-3)^2+(y-7)^2=36$, давра.

177. 1) 3; 2) 1; 3) 4; 4) 4. **178.** 1) калон; 2) хурд. **180.** 1) соҳаи муайяни: $(-\infty; +\infty)$, соҳаи қимматҳо: $(0; +\infty)$, дар интервали. $(-\infty; +\infty)$. **181.** 1) меафзояд;

2) кам мешавад; 3) меафзояд. **183.** 1) $(-\infty; 1]$; 2) $\left(-\infty; \frac{4}{9}\right)$; 7) $[1; +\infty]$; 12)

$(-\infty; -2 - \sqrt{34}) \cup (-2 + \sqrt{34}; +\infty)$. **184.** 1) $(-\infty; 2]$. **185.** 1) 3; 2) -2; 3) -2; 4) -3;

5) -3. **186.** 1) калон; 2) калон; 3) хурд. **187.** 1) 2; 2) 5; 3) 125; 4) 45; 5) $\frac{1}{36}$; 9)

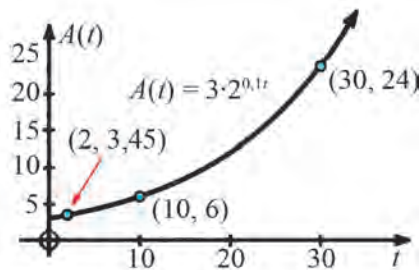
-2. **188.** 1) $(2,5; +\infty)$; 2) $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$; 3) $(-2; 2)$. **190.** 1) $\frac{1}{32}$; 2) 1; 3) 4; 4) 2;

8) -2; 10) 0,5 ва 1; 15) $\frac{1}{7}$ ва 49. **191.** 1) $(64; +\infty)$; 2) $\left(0; \frac{1}{3}\right) \cup (27; +\infty)$; 7) $(2; 5)$.

192. а) 3 м^2 ;

б) **I)** $3,45 \text{ м}^2$; **II)** 6 м^2 ; **III)** 24 м^2 ;

с)

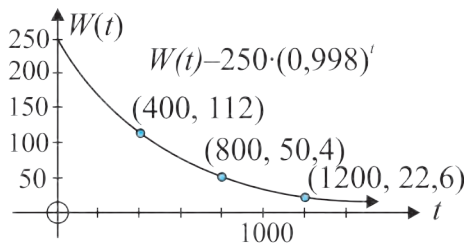


194. а) V_0 ; б) $2V_0$; с) 100%; д) аз 183 фоиз мегузарад.

195. а) 250g;

б) **I)** 112g; **II)** 50,4g; **III)** 22,6g;

с)

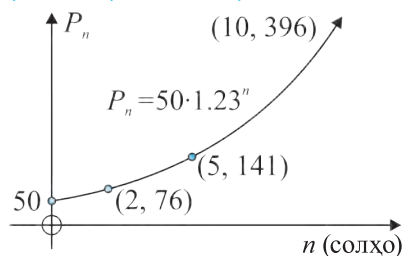


д) ≈ 346 .

193. а) 50;

б) **I)** 76; **II)** 141; **III)** 396;

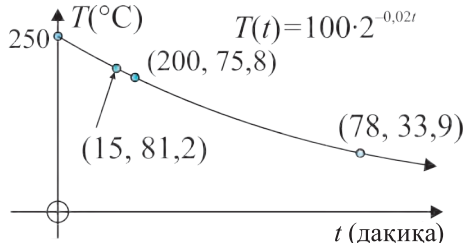
с)



197. а) 100°C ;

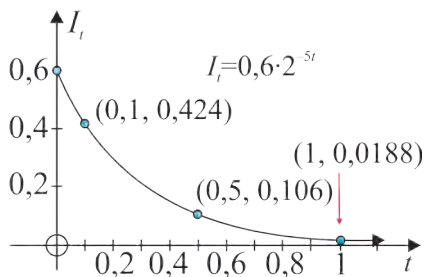
б) **I)** $81,2^\circ\text{C}$; **II)** $75,8^\circ\text{C}$; **III)** $33,9^\circ\text{C}$;

с)



198. а) 0,6 ампер;
 б) I) 0,424 ампер; II) 0,106 ампер;
 III) 0,0188 ампер;

с)



209. а) $\{(7;8);(8;7);(-7;-8);+8;-7\}$. 212. а) 3; б) 2. 213. а) хурд; б) хурд. 216. а) $(-\infty;-1] \cup [1;+\infty)$; б) $(-\infty;+\infty)$. 217. а) $(0;1]$; б) $(3;+\infty)$; с) $(-\infty;0)$. 218. а) $\frac{1}{15}$; б) 0 ва 1; с) 1 ва -2. 219. с) 0. 220. а) $\{(2;3);(-3;8)\}$. 221. а) $(-\infty;0]$; б) $(-\infty;1,5)$. 222. а) хурд; б) калон. 223. а) $(-3,5; +\infty)$; б) $(-2;2)$. 224. а) $2\sqrt{5}$. 225. б) $(100000;0,1)$. 226. а) $(3;1)$. 227. а) $(-\infty;-2] \cup [1;+\infty)$. 229. а) хурд; б) калон. 230. а) $-\frac{2\pi}{3}$ 231. с) $x_1 = \frac{\pi}{4} + n\pi, x_2 = \arccos \frac{1}{4} + n\pi, n \in Z$. 234. а) $\left(-\frac{\pi}{6} + 2n\pi; \frac{7\pi}{6} + 2n\pi\right), n \in Z$. 235. с) $\left(-\frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{9}; \frac{\pi}{27} + \frac{n\pi}{9}\right), n \in Z$.

199. а) L_0 ; б) 99%. 200. Тахминан 3 соату 15 дак. 201. 37,8 мох. 202. 10,8 дақиқа.

203. 22,7 сол. 204. б) 1. 205. а) $\{-14; 3; 15\}$; с) $\{-4;4\}$. 206. а)

$$\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; 2\right).$$

207. а) $(-\infty; -6] \cup [-2; +\infty)$.

$$208. а) \left(-2; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right);$$

$$с) (-\infty; -2) \cup [1; +\infty).$$

209. а) $\{(7;8);(8;7);(-7;-8);+8;-7\}$. 212. а) 3; б) 2. 213. а) хурд; б) хурд. 216. а) $(-\infty;-1] \cup [1;+\infty)$; б) $(-\infty;+\infty)$. 217. а) $(0;1]$; б) $(3;+\infty)$; с) $(-\infty;0)$. 218. а) $\frac{1}{15}$; б) 0 ва 1; с) 1 ва -2. 219. с) 0. 220. а) $\{(2;3);(-3;8)\}$. 221. а) $(-\infty;0]$; б) $(-\infty;1,5)$. 222. а) хурд; б) калон. 223. а) $(-3,5; +\infty)$; б) $(-2;2)$. 224. а) $2\sqrt{5}$. 225. б) $(100000;0,1)$. 226. а) $(3;1)$. 227. а) $(-\infty;-2] \cup [1;+\infty)$. 229. а) хурд; б) калон. 230. а) $-\frac{2\pi}{3}$ 231.

$$с) x_1 = \frac{\pi}{4} + n\pi, x_2 = \arccos \frac{1}{4} + n\pi, n \in Z. 234. а) \left(-\frac{\pi}{6} + 2n\pi; \frac{7\pi}{6} + 2n\pi\right), n \in Z.$$

$$235. с) \left(-\frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{9}; \frac{\pi}{27} + \frac{n\pi}{9}\right), n \in Z.$$

Боби IV

1. 7) $\text{Re}(z)=-7, \text{Im}(z)=3$; 8) $\text{Re}(z)=8, \text{Im}(z)=5$; 9) $\text{Re}(z)=-0,5, \text{Im}(z)=-6$; 10) $\text{Re}(z)=-5,7, \text{Im}(z)=-5$; 11) $\text{Re}(z)=0, \text{Im}(z)=-5$; 12) $\text{Re}(z)=90, \text{Im}(z)=0$.

6. 1) $\bar{z}=7,2$; 3) $\bar{z}=4+3i$. 8. 1) 16; 3) $3+i$. 10. 1) $8i$; 2) $-1-5i$; 3) $-3+i$. 12. 2) $1\frac{1}{6} - \frac{1}{6}i$.

14. 1) $-\frac{23}{13} - \frac{2}{13}i$; 3) $\frac{5}{3} - \frac{2}{3}i$. 16. 2) $\frac{12}{13}$. 20. 1) 10; 2) 4; 3) 2; 4) 2. 22. 1) 0; 2) $\frac{3\pi}{2}$

3) $\frac{11\pi}{6}$. 24. 1) $2\left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{7\pi}{4}\right)$ ва $2 \cdot e^{\frac{7\pi i}{4}}$. 28. 1) $z_1 \cdot z_2 = \cos \frac{13\pi}{12} + i \cdot \sin \frac{13\pi}{12}$.

30. 1) $\cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{\pi}{4}$. 32. 2) $\cos \frac{2\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{2\pi}{3}$. 34. 1) $-\frac{42}{29}$; 2) $-18i$. 36. 1)

$$z_0 = \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{\pi}{6}\right), z_1 = \sqrt{2}\left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{7\pi}{6}\right).$$

Адабиётҳои истифодашуда ва тавсиягардида

1. Ш.А. Алимов, О.Р. Холмухамедов, М.А. Мирзоаҳмедов *Алгебра ва асосҳои анализ китоби дарсӣ барои синфҳои 10*. Тошканд: “О‘қитувчи”, 2004.
2. *Mal Coad and others. Mathematics for the international students. Mathematical Studies SL 2nd edition. Naese and Harris publications. 2010.*
3. Э. Сайдаматов и др. *Алгебра и основы математического анализа. часть 1*, Ташкент: “О‘қитувчи”, 2016.
4. *A.U. Abduhamidov va boshqalar. Algebra va matematik analiz asoslari, 1- qism, Toshkent: “O‘qituvchi”, 2012.*
5. *Н.П. Филичева. Уравнения и системы уравнений: Учебно-методическое пособие. “Рязань”. 2009.*
6. *М.И. Исроилов. Ҳисоблаш методлари. Тошкент: “Ўқитувчи” 1988.*
7. *Г.К. Муравин. Алгебра и начала анализа. Учебник для 10 класса. Москва, “Дрофа”, 2006.*
8. *Алгебра. Учебное пособие для 9–10 классов. Под ред. Н.Я. Виленкина. Москва, “Просвещение”, 2004.*
9. <http://www.ams.org/mathweb/> – Internetda matematika (ingliz tilida).
10. “Математика в школе” jurnali.
11. *Fizika, matematika va informatika. Ilmiy-uslubiy jurnal (2001- yildan boshlab chiqa boshlagan).*
12. *М.А. Mirzaahmedov, Sh.N. Ismailov Matematikadan qiziqarli va olimpiada masalalari. I qism, Toshkent, “Turon-Iqbol”, 2016.*
13. *Matematikadan qo‘llanma, I va II qismlar. O‘qituvchilar uchun qo‘llanma. Prof. T.A. Azlarov tahriri ostida. Toshkent, “O‘qituvchi”, 1979.*
14. *М.А. Mirzaahmedov, D.A. Sotiboldiyev. O‘quvchilarni matematik olimpiadalarga tayyorlash. Toshkent, “O‘qituvchi”, 1993.*
15. <http://www.uzedu.uz> – Портали ахбор ва таълими Вазорати таълими халқ.
16. <http://www.eduportal.uz> – Портали ахбор ва таълими Маркази мултимедия.
17. <http://www.problems.ru> – Сохтори чуствучӯи масъалаҳои математика (заб. русӣ).
18. <http://matholymp.zn.uz> – Озмунҳои математика дар Ўзбекистон ва дунё.

МУНДАРИЧА

Боби III. ФУНКСИЯҲОИ ЭЛЕМЕНТАРӢ ВА МУОДИЛАҲО

Дарсҳои 47–49. Муносибатҳо ва табдилдиҳиҳо. Функция.....	3
Дарсҳои 50–51. Монотонии функцияҳои элементарӣ, иафхум дар бораи қиматҳои калонтарин ва хурдтарин.....	8
Дарсҳои 52–54. Моделҳои хаттӣ ва квадратӣ	12
Дарси 55. Чараёнҳои даврӣ ва назорати онҳо	23
Дарсҳои 56–58. Функцияҳои $y=\sin x$, $y=\cos x$ ва бо ёрии онҳо моделонидан	26
Дарсҳои 59–6. Муодилаҳои соддатарини тригонометрӣ	36
Дарсҳои 62–64. Нобаробариҳои соддатарини тригонометрӣ	43
Дарси 68. Қойивазкунии графикҳо	47
Дарсҳои 69–70. Графикҳои функцияҳои соддатарине, ки дар намуди параметрӣ дода шудаанд	51
Дарси 71. Функцияи нишондиҳандагӣ ва графики он	53
Дарсҳои 72–74. Нобаробариҳои нишондиҳандагии бевосита ҳалшаванда	55
Дарсҳои 75–78. Маълумот дар бораи логарифм. Функцияи логарифмӣ. Муодила ва нобаробарии логарифмии соддатарин.....	56
Дарсҳои 79–81. Моделгардонӣ бо ёрии функцияҳои нишондиҳандагӣ ва логарифмӣ	62

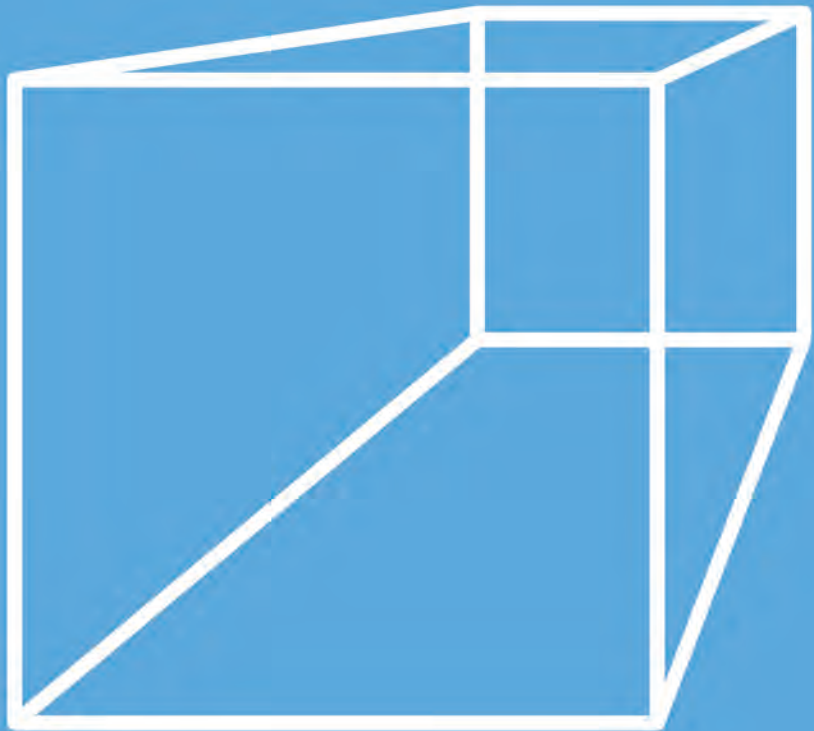
Боби IV. АДАДҲОИ КОМПЛЕКСӢ

Дарсҳои 86–87. Ададҳои комплексӣ ва амалҳо аз рӯи онҳо. Тасвир кардани ададҳои комплексӣ	75
Дарси 88. Ададҳои комплексии намуди $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ ва $r \cdot e^{i\varphi}$ ($r > 0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$)	80
Дарсҳои 89-90. Ҳосили зарб ва тақсими ададҳои комплексии дар шакли тригонометрӣ додашуда.....	82
Дарси 91. Аз ададди комплексӣ баровардани решаи квадратӣ.....	84
Чавобҳо	88
Адабиётҳои истифодашуда ва тавсиягардида.....	95

МАТЕМАТИКА



ГЕОМЕТРИЯ



Синфи 10

Дар қисми стереометрияи геометрияи синфи 10 ба омӯхтани сохтори хусусияти шаклҳои геометрияи ғазовӣ машғул мешавем. Дар ин китоби дарсӣ масъалаҳои шаклҳои асосии ғазовӣ, бисёртарафҳо, ҷисмҳои ҳалқашакл, хусусиятҳои асосии онҳо, ҳамвориҳою хатҳои рости дар ғазо паралел ва перпендикуляр ва инчунин махсусияти онҳо ҷой гирифтаанд.

Дар ин китоби дарсӣ материалҳо бо забони сода ва раван ифода гардидааст. Ҳамаи мавзӯҳо ва нишондидҳо бо мисолҳои ҳаёти инъикос ёфтааст. Пас аз ҳар мавзӯ мисолу масъалаҳо, саволҳо, исботҳо оварда шудааст, ки барои фикрронии эҷодии донишомӯзон ва аз худ кардани мустақилгариҳои дарсҳо ёрӣ мерасонад.

Ин китоби дарсӣ барои донишомӯзони синфи 10-уми мактабҳои таълими миёнаи умумӣ буда, онҳое ки геометрияро мустақилона омӯхтан мехоҳанд, метавонанд аз он истифода баранд.

МУНДАРИҶА

Қисми IV. Паралелии хатҳои рости ва ҳамвориҳо дар ғазо

10. Байни якдигар ҷойгиршавии хатҳои рости дар ғазо	99
11. Байни якдигар ҷойгиршавии хатҳои рости ва ҳамвориҳо дар ғазо	106
12. Байни ҳам ҷойгиршавии ҳамвориҳо дар ғазо	108
13. Проексияи параллелӣ дар ғазо	114
14. Машқи амалӣ ва татбиқ	116

Қисми V. Перпендикулярӣ хатҳои рости ва ҳамвориҳои перпендикуляр дар ғазо

15. Хати рости ва ҳамвориҳои перпендикуляр дар ғазо	119
16. Перпендикуляр, моил ва масофа дар ғазо	124
17. Теорема дар бораи се перпендикуляр	128
18. Перпендикулярӣ ҳамвориҳо дар ғазо	132
19. Проексияи ортогоналӣ дар ғазо ва истифодаи он дар техника	137
20. Машқи амалӣ ва татбиқ	139

Ишораҳои дар қисми китоби дарсии “Геометрия” истифодашуда ва талқини онҳо:

 – Тавсифи теорема

 – Анҷоми исботи теорема

 – Тавсифи аксиома

 – Татбиқи амалӣ

 – Саволҳо оиди мавзӯ

 – Лавҳаҳои таърихӣ

 – Машқҳои фаъолнамоӣ

 – сарчархҳои геометрӣ



ҚИСМИ IV

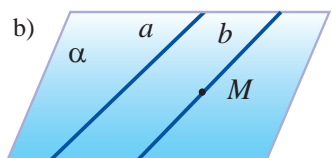
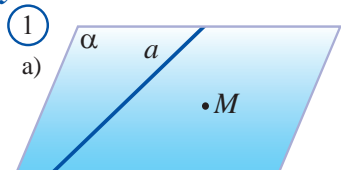
ПАРАЛЛЕЛИИ ХАТҲОИ РОСТ ВА ҲАМВОРИҲО ДАР ФАЗО

10 БАЙНИ ЯКДИГАР ЧӨЙГИРШАВИИ ХАТҲОИ РОСТ ДАР ФАЗО

Агар дар фазо ду хати рости a ва b дар як ҳамворӣ хобанд ва якдигарро набуранд, хатҳои рости параллел номида мешаванд. Параллелии хатҳои рости a ва b ба тарзи $a \parallel b$ навишта мешавад.

Аз нуқтаи дар ҳамворӣ додашуда ба хати рости додашуда хати рости ягонаи параллелро гузаронидан мумкин аст. Ин хосият дар фазо ҳам ҷой дорад:

Теоремаи 4.1. *Дар фазо ба хати рости додашуда аз нуқтаи ба ин хати рости тааллуқ надошта, хати рости ягонаи параллелро гузаронидан мумкин аст.*



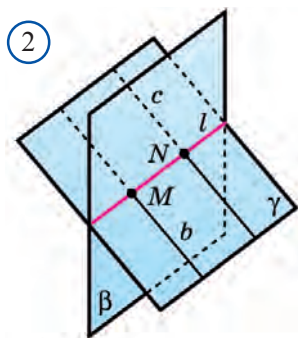
Исбот: Бигузур a – хати рости додашуда ва нуқтаи M – нуқтаи дар ин хати рости нахобанда бошад (расми 1.а). Мувофиқи теоремаи исбот кардашудаи 2.1, хати рости a – хати рости додашуда ва аз нуқтаи дар он нахобандаи M ҳамвории ягонаи α -ро гузаронидан мумкин.

Дар ҳамвории α бошад аз нуқтаи M ба хати рости додашудаи a – хати рости ягонаи параллели b –ро гузаронидан мумкин (расми 1.б).

Айнан ҳамин хати рости b хати рости ягонаи ҷуста истодаамон мебошад. \square

Агар аз ду хати рости параллели ҳамворӣ якеаш хати рости сеюмиро бурида гузарад, дуюми онҳо низ ин хати ростро бурида мегузарад. Хосияти ба ин монанд дар фазо ҳам ҷой дорад:

Теоремаи - 4.2. *Дар фазо агар яке аз хатҳои рости параллел ҳамвориро бурида гузарад, дуоми он низ ҳамвориро бурида мегузарад.*



2) **Исбот:** Хатҳои рости параллели b ва c додашуда буда, аз онҳо хати рости b ҳамвори β ро дар нуктаи M бурида гузарад (расми 2.а)

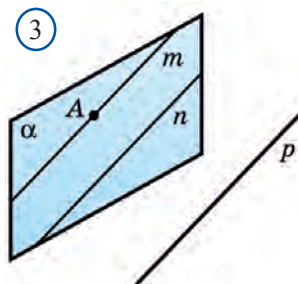
Азбаски хатҳои рости b ва c параллеланд онҳо дар як ҳамворӣ меҳобанд. Бигузур ин ҳамвори γ бошад.

Барои ҳамвориҳои β ва γ нуктаи M нуктаи умумӣ мебошад. Он гоҳ мувофиқи аксиомаи $S3$, ин ҳамвориҳо аз рӯи як хати рости l бурида мешаванд. Ин хати рости l дар ҳамвори γ меҳобад ва хати рости b -ро дар нуктаи M бурида мегузарад.

Бинобар ин, ин хати рости ба хати рости b параллел хати рости c ро низ дар нуктаи N бурида мегузарад. Азбаски хати рости l дар ҳамвори β низ меҳобад нуктаи N ба ҳамвори β низ мутааллиқ мешавад. Пас, нуктаи N барои ҳамвориҳои β ва γ нуктаи умумӣ мешавад. Акнун нишон медиҳем, ки хати рости c бо ҳамвори β дигар нуктаи умумӣ надорад. Баръаксашро фарз мекунем. Бугузур, хати рости c бо ҳамвори β боз нуктаи умумии дигари K -ро дорост. Он гоҳ мувофиқи аксиомаи $S2$, хати рости c дар ҳамвори β меҳобад. Он гоҳ хати рости c барои ҳамвориҳои β ва γ хати рости умумӣ мешавад. Лекин, хати рости l – чунин хати рости менамояд. Аз ин ҷо болои ҳам афтидани хатҳои c ва l бармеояд. Ин тавр шуданаш мумкин нест. Чунки хати рости b ба хати рости c параллел ва хати рости l -ро бурида мегузарад. Зиддияти ба вучуд омада, нодуруст будани фарзонаро нишон медиҳад.

Аз планиметрия ба шумо маълум аст, ки агар ҳар яке аз ду хати рости ба сеюм параллел, байни худ параллел мешаванд. Ин хосият дар фазо ҳам ҷой дошта, ўро аломати параллелии хатҳои рости меноманд.

Теоремаи- 4.3. *Ду хати рости ба хати рости сеюм параллел байни ҳам параллеланд.*



3) **Исбот:** Бигузур, хатҳои рости m ва n ба хати рости p параллел бошанд. Дар як ҳамворӣ ҳобидани хатҳои рости m ва n ва байни якдигар брида нашуданашон, яъне параллел буданашонро нишон медиҳем.

Дар хати рости m нуктаи A -ро мегирем, аз ин нукта ва хати рости n ҳамвори α -ро мегузaronем. Дар ҳамвори α ҳобидани хати рости m -ро исбот мекунем.

Бигузур, ин тавр набошад. Азбаски хати рости m бо ҳамвори α нуктаи умумӣ дорад, у ҳамвориро бурида мегузарад. Он гоҳ мувофиқи теоремаи 4.2, ин ҳамвориро ба хати рости m хати рости параллели

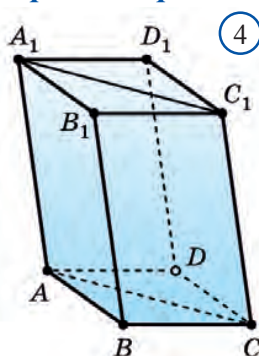
p ҳам, хати рости ба хати рости p параллели n ҳам бурида мегузарад. Лекин, ин хел шуданаш мумкин нест, чунки хати рости n дар ҳамвори α мехобад.

Пас, хатҳои рости m ва n дар ҳамвори α мехобанд.

Акнун бурида наshawандагии ин хатҳои ростро исбот мекунем. Боз ҳам баръаксашро фарз мекунем. Бигузур, хатҳои рости m ва n дар ким кадом нуқтаи B бурида шаванд. Он гоҳ аз нуқтаи B дуто хати рости m ва n -и ба хати рости p параллел мегузарад. Мувофиқи теоремаи 4.1 ин тавр шуданаш мумкин нест. \square

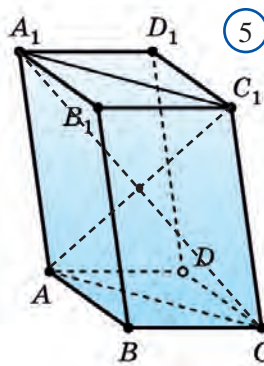
Акнун хосиятҳои зерини параллелепипедро исбот мекунем.

Хосияти 1. Дар параллелепипеди $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (расм 4) чоркунҷаи аз диагоналҳои асос ва аз диагоналҳои паҳлӯи сохтанидаи $ACC_1 A_1$ аз параллелограмм иборат аст.



④ Дарҳақиқат, мувофиқи таърифи параллелепипед тарафҳои $ABB_1 A_1$ ва $BCC_1 B_1$, аз параллелограмм иборат аст. Тарафҳои муқобили ин параллелограммҳо байни худ баробар мешаванд. Махсусан, $AB = A_1 B_1$ ва $BC = B_1 C_1$.

Мувофиқи таърифи параллелепипед, $AA_1 \parallel BB_1$ ва $BB_1 \parallel CC_1$. Он гоҳ мувофиқи теоремаи 4.2, $AA_1 \parallel CC_1$ ва $AA_1 = CC_1$ мешавад. Пас, чоркунҷаи $ACC_1 A_1$ параллелограмм аст.



⑤ **Хосияти 2.** Дар параллелепипеди $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (расми 4) тарафҳои муқобил байни ҳам баробар.

Мувофиқи хосияти боло, $AC_1 C A_1$ – параллелограмм ва $AC = A_1 C_1$. Он гоҳ секунҷаҳои ABC ва $A_1 B_1 C_1$ аз рӯи се тараф баробар буда, кунҷҳои ABC ва $A_1 B_1 C_1$ ҳам байни якдигар баробаранд. Дар натиҷа, параллелограммҳои $ABCD$ ва $A_1 B_1 C_1 D_1$ ҳам байни якдигар баробар мешавад.

Баробарии дигар тарафҳои муқобил низ монанди ин исбот карда мешаванд.

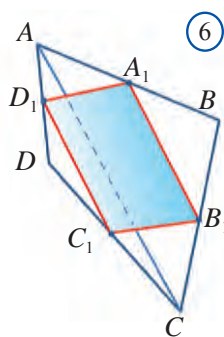
Хосияти 3. Ҳамаи диагоналҳои параллелепипед дар як нуқта бурида мешавад ва дар ин нуқта ба ду қисми баробар тақсим мешавад. (расми 5).

Мувофиқи хосияти 1, $ACC_1 A_1$ параллелограмм. Он гоҳ диагоналҳои ин параллелограмм $A_1 C$ ва AC_1 дар як нуқта бурида мешавад ва дар нуқтаи бурриш ба ду қисми баробар тақсим мешавад.

Буридашавӣ ва дар ин нуқта ба ду қисми баробар тақсимшавии

диагоналҳои боқимонда монанди ин исбот карда мешаванд.

Порчаҳои (нурҳои) дар як хати рост ёки дар хатҳои рости параллел



⑥ хобанда *порчаҳои (нурҳои) параллел* номида мешаванд.

Масъала. Исбот кунед, ки миёнаҳои тарафҳои чоркунҷаи фазой, ки қуллаҳоиаш дар як ҳамворӣ намоҳобанд, қуллаҳои параллелограмм мешаванд.

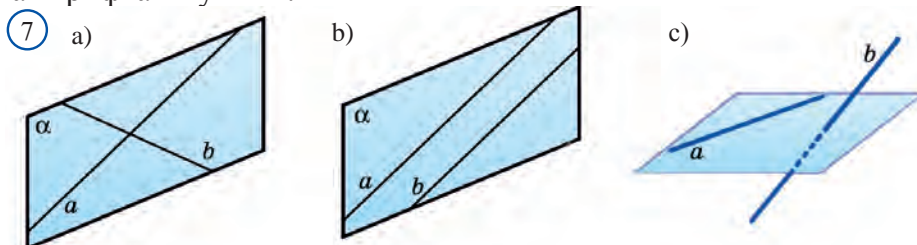
Исбот. Бигузур $ABCD$ – чоркунҷаи фазои ва A_1, B_1, C_1, D_1 – миёнаҳои тарафҳои чоркунҷа бошад (расми 6). Он гоҳ, порчаи A_1B_1 хати миёнаи ба тарафи AC -и секунҷаи ABC параллел, C_1D_1 бошад хати миёнаи ба тарафи AC -и секунҷаи ACD параллел мешавад.

Мувофиқи теоремаи 4.3, хатҳои рости A_1B_1 ва C_1D_1 параллел мешаванд. Пас, онҳо дар як ҳамворӣ меҳобанд.

Параллелии хатҳои рости A_1D_1 ва B_1C_1 ҳам айнан исбот карда мешаванд.

Ҳамин тавр, чоркунҷаи $A_1B_1C_1D_1$ дар як ҳамворӣ меҳобад ва тарафҳои муқобили он параллеланд. Пас, он параллелограмм аст.

Агар дар фазо ду хати рост байни якдигар бурида шаванд, ёки параллел бошанд, онҳо дар як ҳамворӣ меҳобанд (расмиҳои 7.а ва 7.б). Дар фазо хатҳои рости дар як ҳамворӣ намоҳобанда хатҳои рости чилликӣ номида мешаванд (расми 7.с). Мувофиқи аломати зерини хатҳои рости чилликӣ онҳоро шинохта гирифтани мумкин:



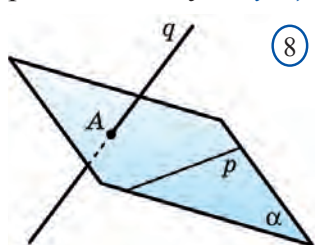
Теоремаи-4.4. Агар аз ду хати рост якеаш дар ягон ҳамворӣ хобад, дуюмиаш ин ҳамвориро дар нуқтае, ки дар хати ростии якум намоҳобад бурида гузарад, он гоҳ ин хатҳои рост чилликӣ мешаванд.

Исбот. Бигузур, хати ростии p дар ҳамвории α хобад. Хати ростии q бошад ин ҳамвориро дар нуқтаи A -и ба хати ростии p тааллуқ надошта бурида гузарад (расми 8). Исбот мекунем, ки хатҳои ростии p ва q хатҳои ростии чилликӣ мебошанд.

Баръаксашро фарз мекунем: Бигузур хатҳои ростии p ва q дар ягон ҳамвории β хобанд. Он гоҳ ба ҳамвории β хати ростии p ва нуқтаи A мутааллиқ мешаванд. Дар навбати худ нуқтаи A ба хати ростии q ҳам тааллуқ дорад.

Пас, ҳамвориҳои α ва β болоиҳам меафтанд. Дар натиҷа, мувофиқи шарт хати рости q -и ба ҳамвориҳои a тааллуқ надошта, мутааллиқ шуд. Зиддияти ҳосилшуда нодуруст будани фарзамонро нишон медиҳад. \square

Кунчи хурдтарини аз ду кунҷҳои ҳамсоия дар натиҷаи буриши ду хати рост ҳосилшуда *кунҷи байни ду хати рост* номида мешавад.



8

Кунҷи байни хатҳои рости чиллиқӣ гуфта, кунҷи байни хатҳои рости ба ин хатҳои рост параллели буридашавандаро меноманд (расми 9).

Дар амал барои ёфтани кунҷи байни хатҳои рости чиллиқии a ва b (расми 10)

1) ягон нуқтаи A интиҳоб карда мешавад; 2) аз нуқтаи A ба хатҳои рости чиллиқӣ хатҳои рости параллели a_1 ва b_1 гузаронида мешавад; 3) кунҷи байни ин хатҳои рост чен карда мешавад.

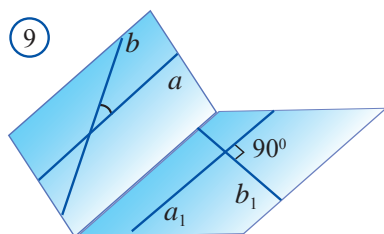
Дар бораи натиҷаи ин алгоритм аз нуқтаи A вобаста набудани он фикр карда бинед.

Хатҳои рости кунҷи байнашон ба 90° баробар *хатҳои рости перпендикуляр* номида мешаванд. Кунҷи байни хатҳои рости параллел ба 0° баробар аст.



Савол ва машқҳои оиди мавзӯ

9



1. Чӣ хел хосиятҳои хатҳои рости параллелро медонед?

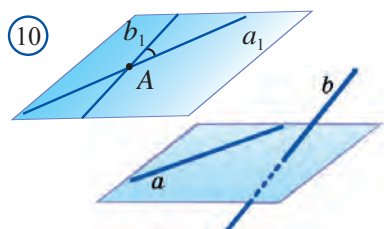
2. Аломати параллелии хатҳои ростро гӯед.

3. Аломати чиллиқӣ будани хатҳои ростро гӯед.

4. Кунҷи байни хатҳои рост чӣ тавр муайян карда мешавад?

5. Оё хатҳои рости чиллиқӣ параллел мешаванд?

10



4.1. Ҷуфтҳои теғаҳои параллелӣ а) параллелолипеди $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$; б) призмаи $ABC A_1 B_1 C_1$ муайян карда шаванд.

4.2. Дар чӣ гуна пирамидаҳо теғаҳои параллел мешаванд?

4.3. Маълум аст, ки агар дар ҳамворӣ хати рост яке аз хатҳои рости параллелро бурида гузарад, дуюмашро ҳам бурида мегузарад. Оё ин хосият дар фазо ҳам ҷой дорад?

4.4. Тасдиқи дурустро ёбед:

а) дар фазо аз нуқтаи дар хати рост нахобанда хатҳои рости бисёро гузаронидан мумкин аст, ки ба он параллел бошад; б) хатҳои рости ба хати рости сеюм параллел байни худ бурида мешаванд; с) агар ду хати рост дар

хамворӣ хобанд, онҳо бурида мешаванд; d) аз хати рост ва нуқтаи дар он нахобанда дуто хамвории гуногун гузаронидан мумкин аст; e) аз нуқтаи фазо, ки дар хамворӣ намехобад, адади беохири хатҳои рости ин хамвориро бурранда гузаронидан мумкин аст.

4.5. Аз порчаи AB , ки нуқтаи A дар хамвории a мехобад нуқтаи C интиҳоб карда шудааст. Хатҳои рости параллели аз нуқтаҳои B ва C гузаронидашуда хамвории a дар нуқтаҳои B_1 ва C_1 бурида мегузарад. Агар а) нуқтаи C миёнаҷои порчаи B , ва $BB_1 = 14$ см; б) $AC : CB = 3 : 2$ ва $BB_1 = 50$ см бошад, дарозии порчаи CC_1 –ро ёбед.

4.6. Параллелограмми $MNOP$ ва трапетсияи $MNEK$ -и асосаш EK ки дар як хамворӣ намехобанд дода шудааст.

а) байни якдигар ҷойгиршавии хатҳои рости PO ва EK – ро муайян кунед.

б) асосҳои трапетсия ба $MN = 45$ см, $EK = 55$ см баробар буда, ба он давраи дарунӣ кашидан мумкин аст. Периметри трапетсияро ёбед.

4.7. Хатҳои рости a ва b дар як хамворӣ мехобанд. Байни якдигар ҷойгиршавии ин хатҳои ростро нишон диҳед.

A) a ва b параллел; B) a ва b бурида мешаванд; C) a ва b бурида намешаванд; D) a ва b чилликӣ; E) a ва b параллел нест.

4.8. Хатҳои рости a ва b ба хати рости c параллел. Хатҳои рости a ва b байни якдигар чӣ тавр ҷойгир шуданашон мумкин?

4.9. Дар расми 11 хамвориҳои α ва β аз рӯи хати рости b бурида мешавад. Агар $a//b$, хатҳои рости c ва b параллел набоянд, хатҳои рости a ва c байни якдигар чӣ тавр ҷойгир шуданашон мумкин?

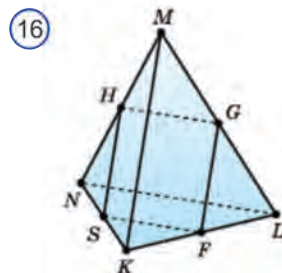
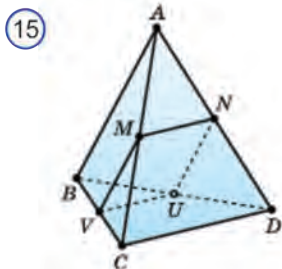
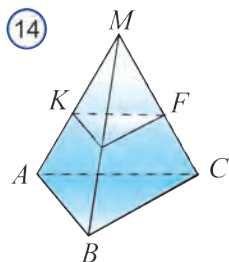
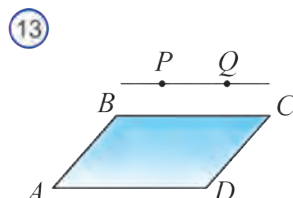
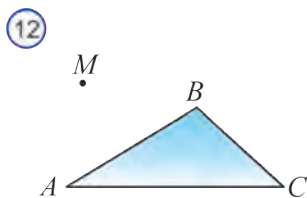
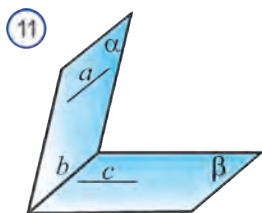
4.10. Дар расми 12 нуқтаи M дар соҳаи берунаи секунҷаи ABC мехобад. Хатҳои рости ба хатҳои рости MA , MC , MB чилликӣ бударо муайян кунед.

4.11. Дар расми 13 хати рости PQ дар соҳаи берунаи чоркунҷаи $ABCD$ мехобад ва ба BC параллел. а) PQ ва AB ; б) PQ ва CD ; с) PQ ва AD чӣ гуна хати ростанд?

4.12. Дар расми 14 нуқтаи M дар соҳаи берунаи секунҷаи ABC мехобад. Миёнаҷоии порчаҳои MA , MB , MC мувофиқан бо нуқтаҳои K , F , P қайд карда шудаанд. Кадоме аз хатҳои рости 1) KP ; 2) PF ; 3) KF ; 4) KM ; 5) PM ; 6) FM ; 7) AB ; 8) BC ; 9) AC байни якдигар параллеланд?

4.13. Нуқтаҳои M , N , U , V мувофиқан миёнаҷоии тарафҳои AC , AD , BD ва BC пирамидаи $ABCD$ (расми 15). Агар $AB = 20$ см, $CD = 30$ см бошад, периметри чоркунҷаи $MNUV$ -ро ёбед.

4.14. Нуқтаҳои H , G , F , S дар пирамидаи секунҷаи $KLMN$ мувофиқан миёнаҷоии тегаҳои MN , ML , LK ва KN (расми 16). Агар $LK = 18$ мм, $MN =$



= 22 мм бошад, периметри чоркунҷаи $HGFS$ - ро ёбед.

4.15. Исроҳот кунад, ки аз хати рост дуто ҳамворию гуногун гузаронидан мумкин аст.

4.16. Чор нуқтаи дар як ҳамворӣ нахобанда дода шуда аст. Чандто ҳамворию аз ҳар сеюи онҳо гузарандаро гузаронидан мумкин?

4.17. Нуқтаҳои A, B, C дар ҳар яке ду ҳамворию додасуда мехобанд. Исроҳот кунад, ки ин нуқтаҳо дар як ҳамворӣ мехобанд.

4.18. Ду ҳамворию ки қад қад хати рости a бурида мешаванд дода шуда аст. Хати рости b дар яке аз онҳо мехобад ва дуомиашро бурида мегузарад. Исроҳот кунад, ки хатҳои рости a ва b бурида мешаванд.

4.19. Аз се ҳамворию ҳар дутояш байни якдигар бурида мешаванд. Агардуто аз хатҳои рости буриши ҳамворию дар ягон нуқта бурида шаванд, исроҳот кунад, ки хати буриши сеюмиаш ҳам аз ин нуқта мегузарад.

4.20. Исроҳот кунад, ки агар диагоналҳои чоркунҷа бурида шаванд, он гоҳ куллаҳои у дар як ҳамворӣ мехобад.

4.21. Нуқтаҳои K, Z, M, N мувофиқан миёнаҳои порчаҳои SA, AC, BC, SB -и пирамидаи секунҷагии $SABC$ мехобад. Агар теғаҳои паҳлӯии пирамида b , тарафи асос ба a баробар бошад, периметри чоркунҷаи $KZMN$ -ро ёбед.

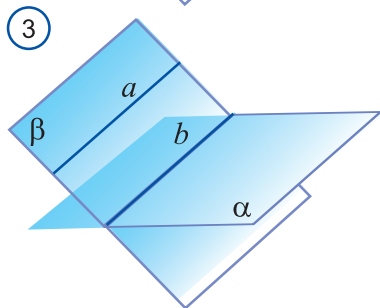
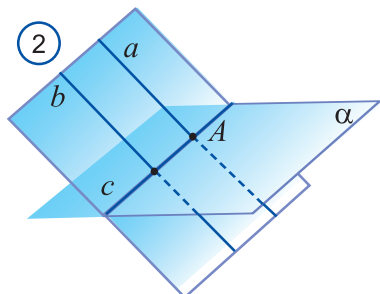
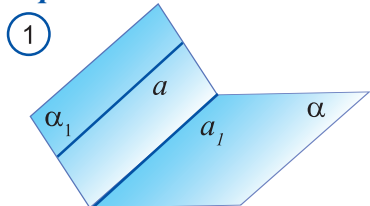
4.22. Хатҳои рости XU ва VT параллел, хатҳои рости XY ва VT бошад чилликӣ. Агар: а) $\angle YXU = 40^\circ$; б) $\angle YXU = 135^\circ$; в) $\angle YXU = 90^\circ$ бошад, кунҷи байни хатҳои рости XY ва VT – ро ёбед.

4.23. Хати рости l ба тарафи BC – и параллелограми $ABCD$ параллел ва дар ҳамворию он нахобад. Исроҳот кунад, ки хатҳои рости l ва CD чилликӣ мехобанд. Агар яке аз кунҷҳои пирамида. а) 58° ; б) 133° бошад, кунҷи байни хатҳои рости l ва CD - ро ёбед.

11 БАЙНИ ЯҚДИГАР ҚОЙГИРШАВИИ ХАТҲОИ РОСТ ВА ҲАМВОРИҲО ДАР ФАЗО

Агар хати рост ва ҳамворӣ бурида нашаванд, *хати рост ва ҳамворӣ параллел* номида мешавад. Параллелии хати рост ва ҳамворӣ аз рӯйи аломати зерин муайян карда мешавад.

Теорема 4.5. *Агар хати рости дар ҳамворӣ нахобанда ба ягон хати рости ин ҳамворӣ параллел бошад, ин хати рост ба ҳуди ҳамворӣ ҳам параллел мешавад*



Исбот. Бигузур, α - ҳамворӣ, a – хати рости дар он нахобанда, a_1 бошад хати рости дар ҳамвории α хобанда ва ба хати рости a параллел бошад.

Аз хатҳои рости a ва a_1 ҳамвории α -ро мегузаронем (расми 1).

Равшан аст, ки ҳамвориҳои, α ва α_1 аз рӯйи хати рости a_1 бурида мешаванд.

Агар хати рости a ҳамвории α -ро бурида гузарад, он гоҳ нуқтаи буриш ба хати рости a_1 мутааллиқ мешавад. Аммо илочи ин нест, чунки хатҳои рости a ва a_1 байни яқдигар параллеланд. Ҳамин тавр, хати рости, a ҳамвории α ро бурида гузашта наметавонад. Пас, хати рости a - ба ҳамвории α - параллел аст. \square

Масъала. Исбот кунед, ки агар ҳамворӣ яке аз ду хатҳои рости параллелро бурида гузарад, он гоҳ дуомиашро ҳам бурида мегузарад.

Исбот. a ва b – ду хати рости параллел, α бошад ҳамвории хати рости a ро дар нуқтаи A бурида гузаранда мешавад (расми 2). Аз хатҳои рости a ва b ҳамворӣ мегузаронем. Он ҳамворӣ

α - ро аз рӯйи ягон хати рости c мебурад. Хати рости c хати рости a – ро дар нуқтаи A бурида мегузарад.

Пас хати рости ба он параллели b –ро ҳам бурида мегузарад. Азбаски хати рости c дар ҳамвории α меҳобад ҳамвории α хати рости b – ро ҳам бурида мегузарад.

Теорема 4.6. *Агар як ҳамворӣ аз хати рости ба ҳамвории дуюм параллел гузарад, хати рости буриши ин ҳамвориҳо ҳам ба хати рости додашуда параллел мешавад.*

Исбот. Агар хати рости a ба ҳамвори α - параллел ва дар ҳамвори β хошад, хати рости b бошад хати буриши ҳамвориҳои α ва β бошад (расми 3). Дар ин ҳолат, хатҳои рости a ва b дар ҳамвори β мебошад ва байни яқдигар бурида намешаванд. Дар ҳолати баръакс, хати рости a ҳамвори β – ро бурида мегузашт. Пас, хатҳои рости a ва b параллел мебошанд. \square

? Савол ва машқҳо оиди мавзӯ

1. Дар фазо хати рост ва ҳамворӣ байни яқдигар чӣ тавр ҷойгир шудани мумкин?
2. Хати рост ва ҳамворӣ кай параллел мешаванд?
3. Аломати параллелии хати рост ва ҳамвориро гуед.
4. Дар фазо чӣ ҳел хосиятҳои байни ҳам ҷойгиршавии хати рост ва ҳамвориҳоро медонед?

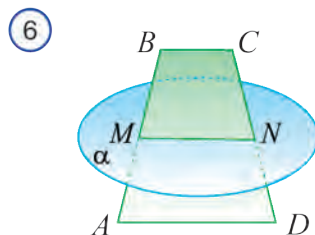
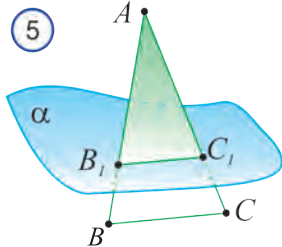
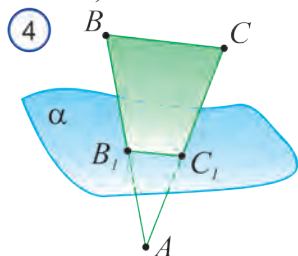
4.24. а) дар куби $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$; б) дар призмаи шашкунҷаи мунтаззами $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ теғҳо ва тарафҳои ба яқдигар параллелро муайян кунед.

4.25. Тасдиқи дурустро интиҳоб кунед: а) аз нуқтаи дар хати рост нахобандаи фазо хатҳои рости ба ин хати рост параллели бисёро гузаронидан мумкин; б) хатҳои рости ба хати рости сеюм параллел дар як нуқта бурида мешавад; в) агар ду нуқтаҳои хати рост ба ҳамворӣ мутааллиқ бошад, хати рост ҳамвориро бурида мегузарад; д) аз хати рост ва нуқтаи дар он нахобанда дуто ҳамвори гуногун гузаронидан мумкин; е) дар фазо аз нуқтаи дар ҳамворӣ нахобанда хатҳои рости бисёри ҳамвори додашударо буррандаро гузарондан мумкин.

4.26. Нуқтаҳои A ва C дар ҳамвори α мебошад. Нуқтаҳои B ва D дар ҳамвори β мебошад.

Аз хатҳои рости AC , CD , BD , AB , BC ва AD кадомаш ҳамвори β -ро бурида мегузарад?

4.27. Секунҷаи ABC ҳамвори α -ро дар нуқтаҳои B ва C бурида мегузарад (расми 4).



Агар $AB_1 : BB_1 = 2 : 3$, $BC = 15$ см, $BC // B_1 C_1$ бошад, дарозии порчаи $B_1 C_1$

–ро ёбед.

4.28. Ҳамвории α тарафҳои AB ва AC - и секунҷаи ABC – ро дар нуктаҳои B_1 ва C_1 бурида мегузарад (расми 5). Агар $AB_1 : BB_1 = 3 : 1$, $BC = 12$ см, $BC // \alpha$ бошад, дарозии порчаи B_1C_1 -ро ёбед.

4.29. Ҳамвории α ба асоси AD -и трапетсияи $ABCD$ параллел ва тарафҳои паҳлӯяшро дар нуктаҳои M ва N бурида мегузарад (расми 6). Агар $AD = 17$ см, $BC = 9$ см бошад, дарозии порчаи MN –ро ёбед..

4.30. Ба ҳамворӣ аз нуктаи дар он нахобанда чандто хати рости параллел гузаронидан мумкин аст?

4.31. Хати рости a ба ҳамвории α параллел. Тасдиқоти дурустро ёбед.

а) хати рости a танҳо ба як хати рости ҳамвории α параллел мешавад;
 б) хати рости a ба ғайр аз як хати рости ҳамвории α ба дигарҳояш чилликӣ мешавад; с) дар ҳамвории α ба хати рости a хатҳои рости бисёри параллел ва чилликӣ ёфт мешавад; д) дар ҳамвории α фақат якто хати рости ба хати рости a параллел ва аз нуктаи ихтиёрии ин ҳамворӣ гузаранда мавҷуд аст.

4.32. Нуктаҳои A, B, C, D дар як ҳамворӣ намехобанд. Нуктаҳои M, N, K, Z мувофиқан миёнаҳои порчаҳои AD, BD, BC, AC мебошанд. Агар $CD = AB$ бошад, исбот кунед, ки хатҳои рости MK ва NZ перпендикуляр мебошанд.

4.33. Тарафҳои AB ва BC -и параллелограмми $ABCD$ ҳамвории α -ро бурида мегузарад. Исбот кунед, ки хатҳои рости AD ва DC ҳам ҳамвории α -ро бурида мегузаранд.

4.34. Секунҷаҳои ABC ва ABD дар як ҳамворӣ намехобанд. Исбот кунед, ки хати рости ихтиёрии ба хати рости CD параллел ҳамвории ин секунҷаҳоро бурида мегузаранд.

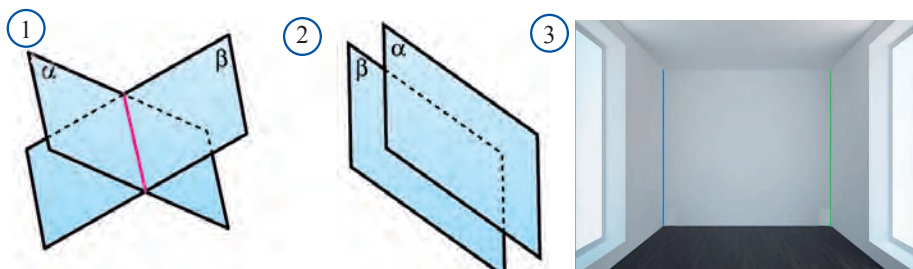
4.35. Исбот кунед, ки хатҳои рости ду хати рости буррандаи додашударо бурида гузаранда дар як ҳамворӣ мехобанд.



12 БАЙНИ ҲАМ ҚОЙГИРШАВИИ ҲАМВОРИҶО ДАР ФАЗО

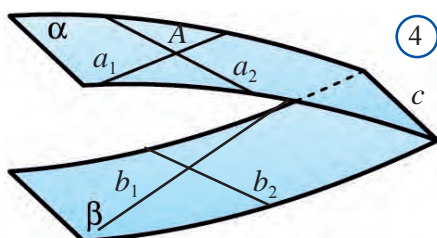
Ду ҳамворӣ, ёки ба нуктаи умумӣ соҳиб аст, ёки ба нуктаи умумӣ соҳиб нашуданаш мумкин. Дар ҳолати яқум мувофиқи аксиомаи $S3$ ин ҳамворӣ ба хати рости умумӣ ҳам соҳиб мешавад, яъне қад-қади хати рост бурида мешаванд (расми 1). Дар ҳолати дуҷум ҳамвориҷо бурида намешаванд (расми 2).

Ҳамвориҷои буриданашаванда *ҳамвориҷои параллел* номида мешаванд. Дар бораи ҳамвориҷои параллел фарш ва шифти хона, деворҳои муқобилро тасаввур кардан мумкин (расми 3).

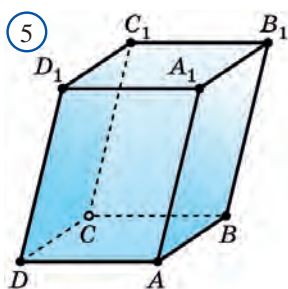


Параллелии ду ҳамворӣ аз рӯйи аломати зерин муайян карда мешавад.

Теоремаи 4.7. *Агар ду хати рости буррандаи як ҳамворӣ мувофиқан ба ду хати рости ҳамвориҳои дуҷум параллел бошанд, ин ҳамвориҳо параллел мешаванд.*



Исбот. Агар α ва β – ҳамвориҳои додашуда, a ва b – хатҳои рости дар ҳамвориҳои α хобанда ва дар нуқтаи A буридашаванда, a_1 ва b_1 бошад дар ҳамвориҳои β хобанда ва мувофиқан ба хатҳои рости a ва b параллел (расми 4). Фарз мекунем, ки ҳамвориҳои α ва β ҳамвориҳои байни ҳам параллел на-



бошанд, яъне қад қади ким қадом хати рости c бурида шаванд. Он гоҳ мувофиқи теоремаи 3.6, хатҳои рости a_1 ва a_2 мувофиқан ба хатҳои рости b_1 ва b_2 параллел буда, ба ҳамвориҳои β ҳам параллел мешавад. Бинобар ин, онҳо хати рости c -и дар ин ҳамвори хобандаро ҳам бурида намегузарад.

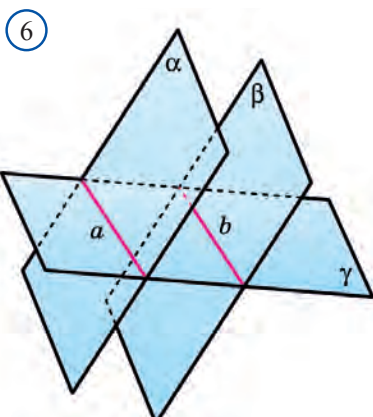
Ҳамин тавр, аз нуқтаи A -и дар ҳамвориҳои α хобида дуто хати рости ба хати рости c параллели: a_1 ва a_2 гузашта истодааст. Мувофиқи аксиомаи параллелӣ, ин тавр шуданаш мумкин нест. Зиддият нодуруст будани фарзамонро нишон дода истодааст. \square

Аз ин теорема истифода бурда, параллел будани тарафҳои паҳлӯи параллелоипедро (расми 5) мустақилона исбот кунед.

Теоремаи 4.8. *Хатҳои рости бурриши ду ҳамвориҳои параллел бо ҳамвориҳои сеюм байни якдигар параллел мешаванд*

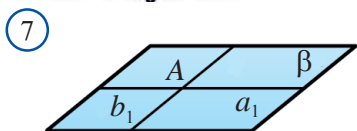
Исбот. Агар, ҳамвориҳои параллели α ва β ҳамвориҳои γ ро мувофиқан аз рӯйи хатҳои рости a ва b бурида гузаранд (расми 6). Исбот мекунем, ки хатҳои рости a ва b параллел мебошанд.

Фарз мекунем, ки хатҳои рости a ва b дар ягон нуқтаи Q бурида шаванд. Он гоҳ нуқтаи Q дар ҳамвориҳои α меҳобад, чунки хати рости a дар ҳамвориҳои

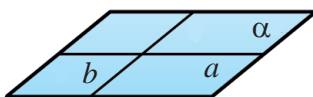


α меҳобад. Монанди ин, нуқтаи Q дар ҳамвори β меҳобад, чунки хати рости b дар ҳамвори β меҳобад. Дар натижа, ҳамвориҳои α ва β ба нуқтаи умумии Q соҳиб шуда истодааст. Мувофиқи шарт илочи ин тавр шуданаш нест. Зиддият нодуруст будани фарзамонро нишон дода истодааст. \square

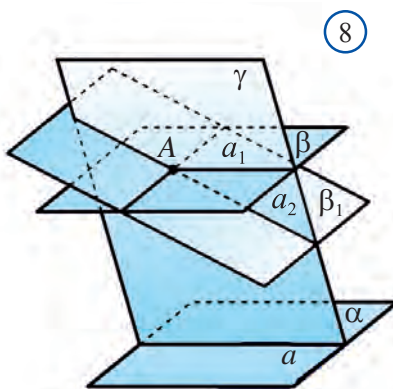
Теоремаи 4.9. *Аз нуқтаи берунии ҳамвориҳои додашуда ҳамвориҳои ягонаи параллел гузаронидан мумкин аст.*



Исбот. Дар ҳамвориҳои додашудаи α дуто хати рости буррандаи a, b –ро мегузаронем. Аз нуқтаи додашудаи A ба онҳо хати рости a_1, b_1 –ро мегузаронем (расми 7).



Аз хатҳои рости a_1, b_1 ҳамвориҳои β ро мегузаронем. Мувофиқи теоремаи 3.7 ин ҳамворӣ, ба ҳамвориҳои α параллел буда, ҳамвориҳои ҷусташуда мебошад.



Акнун ягонагии ин ҳамвориҳоро нишон медиҳем. Фарз мекунем, ки боз як ҳамвори ба ҳамвориҳои α параллели β_1 мавҷуд бошад (расми 8). Ҳамвори аз нуқтаи A ва хати рости a гузарандаи γ ро мегузаронем. Ин ҳамвори ҳамвориҳои β ро қад-қади хати рости a_1 , ҳамвориҳои β_1 ро қад-қади хати рости a_2 бурида мегузарад.

Мувофиқи теоремаи 3.6 хатҳои рости a_1, a_2 ба хати рости a параллел мешавад. Лекин ин тавр шуданаш мумкин нест, чунки

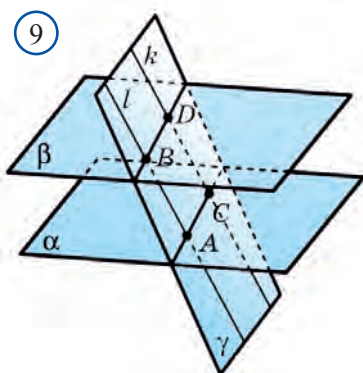
дар ҳамворӣ аз нуқтаи дар он нахобанда фақат якто хати рости параллел гузаронидан мумкин аст.

Зиддият нодуруст будани фарзамонро нишон дода истодааст. \square

Теоремаи 4.10. *Ду ҳамвори ба ҳамвориҳои сеюм параллел байни якдигар параллел мешаванд.*

Ин теоремаро мустақилона исбот кунед.

Теоремаи-4.11. *Порчаи хатҳои рости параллели дар байни ҳамвориҳои параллел ҷойгирифта баробаранд.*



Исбот. Агар ҳамвориҳои α ва β аз хатҳои рости k ва l порчаҳои AC ва BD -ро ҷудо кунад (расми 9). Баробарии ин порчаҳоро нишон медиҳем.

Ҳамвориҳои γ аз хатҳои рости k ва l гузаранда ҳамвориҳои параллелро қад-қад хатҳои рости AC ва BD бурида мегузарад. Дар натиҷа, ба чоркунҷаи $ABCD$ -и тарафҳои муқобилаш параллел, яъне ба параллелограмм соҳиб мешавем. Тарафҳои муқобили параллелограмм байни якдигар баробар мешавад. Хусусан, $AB = CD$. \square

Теорема-4.12. Порчаҳои хатҳои рости ихтиёрии дар байни се ҳамвориҳои параллел ҷойгиршуда байни худ пропорционал мешаванд.

Ин теоремаро низ мустақилона исбот кунед.

Саволҳо ва машқҳо оиди мавзӯ

1. Дар фазо ҳамвориҳо чи хел ҷойгир шуданашон мумкин?
2. Ҳамвориҳои параллел гуфта чӣ хел ҳамвориҳоро меноманд?
3. Аломати параллели ҳамвориҳоро гӯед.
4. Кадом хосиятҳои ҷойгиршавии ҳамвориҳо дар фазоро медонед?
5. Параллел будани тарафҳои паҳлӯи параллелепедро асоснок кунед.

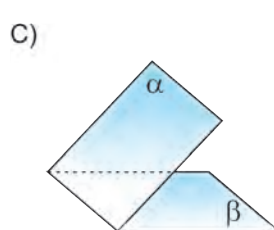
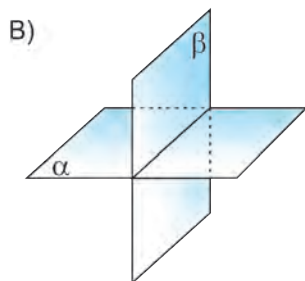
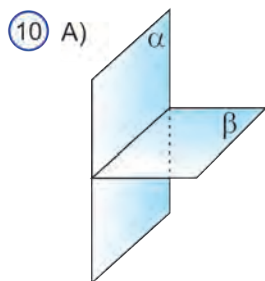
4.36. а) параллелепеди $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$; б) призмаи $ABCA_1 B_1 C_1$ ро муайян кунед.

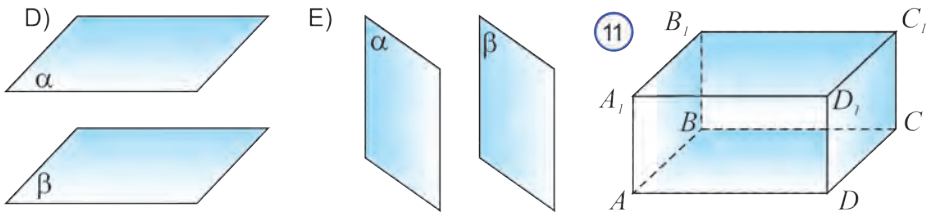
4.37. Ҳамвориҳои α ва β , ки ба ягон нуқтаи умумӣ соҳиб нест, байни якдигар чӣ хел ҷойгир мешаванд?

4.38. α ва β ҳамвориҳои параллел. a ва b хатҳои рости. ки дар ҳамвориҳои α меҳобад, хатҳои рости c ва d бошад дар ҳамвориҳои β меҳобад.

Аз тасдиқоти зерин кадомихояш дуруст аст?

- 1) $a \parallel b$; 2) $c \parallel b$; 3) $b \parallel b$; 4) $b \parallel a$; 5) $c \parallel a$; 6) $d \parallel b$; 7) $a \parallel a$; 8) $d \parallel a$.





4.39. Сето расмеро нишон диҳед, ки дар онҳо ду ҳамвории буранда тасвир шудааст (расми 10).

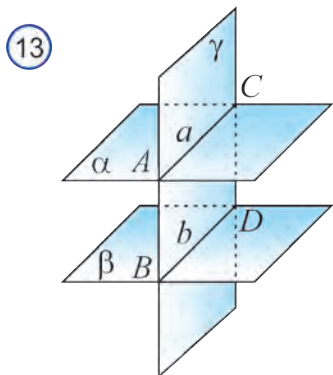
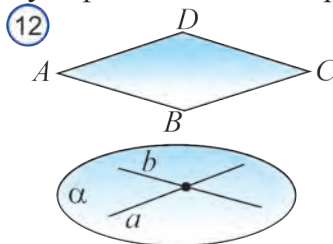
4.40. Ҳамворихои α ва β параллел. Аз нуқтае, ки ба ягонтои онҳо тааллуқ надорад ҳамвории γ гузаронида шудааст. Тасдиқоти дурустро нишон диҳед. а) ҳамвории γ ҳамвории ягонаи ба ҳамвории α параллел мебошад; б) ҳамвории γ ҳамвории ягонаи ҳамвории β ро буранда аст; с) ҳамвории γ β ҳамвории ягонаи параллел мебошад; д) ҳамвории γ ягона ҳамвории α ро бурида гузаранда; е) ҳамвории γ ҳамвории ягонаи ҳам ба α ҳам ба β параллел мебошад.

4.41. Дар расми 11 параллелепипеди росткунҷаи $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ тасвир карда шудааст.

Байни якдигар ҷойгиршавии ҳамворихои зеринро муайян кунед:

а) $A_1 B_1 C_1 D_1$ ва $B_1 A_1 A B$; б) $A D D_1 A_1$ ва $A B C D$; с) $A B B_1 A_1$ ва $C_1 D_1 D C$; д) $B A D C$ ва $A B B_1 A_1$; е) $C C_1 B_1 B$ ва $A D D_1 A_1$

4.42. Порчаҳои AB , BC тарафҳои параллелограми $ABCD$ буда, онҳо мувофиқан ба хатҳои рости a ва b параллеланд (расми 12). Хатҳои рости a ва b байни ҳам бурида мешавад ва ба ҳамвории α тааллуқ дорад. Дар фазо байни якдигар ҷойгиршавии ҳамворихои $ABCD$ ва α -ро муайян кунед.



4.43. Хатҳои рости чилликии a ва b дода шудааст. Чанто ҳамвории аз хати рости a гузаранда ва ба ҳамвории β параллел бударо гузаронидан мумкин аст?

4.44. Хати буриши ду ҳамворихои α ва β ба ҳамвории сеюми γ параллел. Дар фазо байни якдигар ҷойгиршавии ҳамворихои α ва β -ро муайян кунед.

4.45. Ҳамвории γ ки аз рӯйи хатҳои рости параллели AB ва CD гузаронида шудааст ҳамворихои параллели α ва β -ро мувофиқан қад қад хатҳои рости AC ва BD бурида мегузарад (расми 13). Агар $BD = 15$ см бошад, дарозии порчаи AC ро ёбед.

4.46. Исбот кунед, ки чуфти ягонаи ҳамвориҳои параллелӣ аз ду хати рости чилликии ихтиёрӣ гузаронда иборат аст.

4.47. Ҳамвориҳои α ва β параллеланд. Хати рости ихтиёрии дар ҳамвори α хобанда ба ҳамвори β параллел буданаширо исбот кунед.

4.48. Нуқтаи O миёнаҳои порчаҳои дар як ҳамворӣ нахобандаи AA_1, BB_1, CC_1 мебошад. Исбот кунед, ки ҳамвориҳои ABC ва $A_1B_1C_1$ параллел аст.

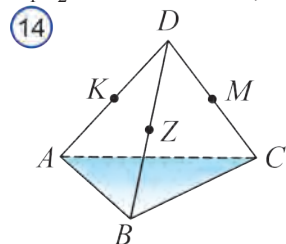
4.49. Параллелограмми $ABCD$ ва ҳамвори онро набуранда додашудааст. Аз қуллаҳои A, B, C, D –и параллелограмми $ABCD$ мувофиқан хатҳои рости параллели ҳамвориро дар нуқтаҳои A_1, B_1, C_1, D_1 бурида гузаранда гузаронида шудааст. Агар $AA_1 = 4$ м, $BB_1 = 3$ м ва $CC_1 = 1$ м бошад, дарозии порчаи DD_1 –ро ёбед.

4.50. Ду ҳамвори параллел дода шудаанд. Аз нуқтаҳои A ва B -и як ҳамворӣ хатҳои рости параллели ҳамвори дуюмро дар нуқтаҳои A_1 ва B_1 бурранда гузаронида шудааст.

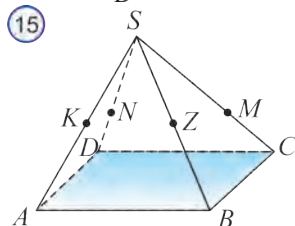
Агар $AB = a$ бошад, дарозии порчаи A_1B_1 -ро ёбед.

4.51. Ҳамвориҳои α ва β параллеланд. Аз нуқтаҳои M ва N -и ҳамвори α хатҳои рости параллели ҳамвори β –ро дар нуқтаҳои K ва L бурранда гузаронида шудааст. Исбот кунед, ки $MNLK$ параллелограмм аст. Агар $ML = 14$ см, $NK = 8$ см ва $MK : MN = 9 : 7$ бошад, периметри чоркунҷаи $MNLK$ -ро ёбед.

4.52. Нурҳои OF ва OP ҳамвориҳои параллели α ва β - ро мувофиқан дар нуқтаҳои F_1, P_1, F_2, P_2 бурида мегузарад. Агар $F_1P_1 = 3$ см, $F_2P_2 = 5$ см ва $P_1P_2 = 4$ см бошад, дарозии порчаи OP_1 ёфта шавад.



4.53. Нурҳои OA ва OB ҳамвориҳои параллели α ва β –ро мувофиқан дар нуқтаҳои A_1, B_1, A_2, B_2 б рӯи мегузарад. Агар $OA_1 = 16$ см, $A_1A_2 = 24$ см ва $A_2B_2 = 50$ см бошад, дарозии порчаи A_1B_1 –ро ёбед.



4.54. Нуқтаи D ба ҳамвори секунҷаи ABC тааллуқ надорад (расми 14). Нуқтаҳои K, M, Z мувофиқан миёнаҳои порчаҳои DA, DB ва DC мебошад. Ҷойгиршавии байни якдигарии ҳамвориҳои ABC ва KZM –ро муайян кунед.

4.55. Нуқтаи S ба ҳамвори параллелограмми $ABCD$ мутааллиқ нест (расми 15). Нуқтаҳои K, Z, M, N мувофиқан ба порчаҳои SA, SB, SC ва SD тааллуқ дорад. Агар $SK = AK, SZ = BZ, SM : MC = 2 : 1, SN : ND = 2 : 1$ бошад, байни якдигар ҷойгиршавии ҳамвориҳои $ABCD$ ва $KZMN$ –ро муайян кунед.

13 ПРОЕКЦИЯИ ПАРАЛЛЕЛИ ДАР ФАЗО

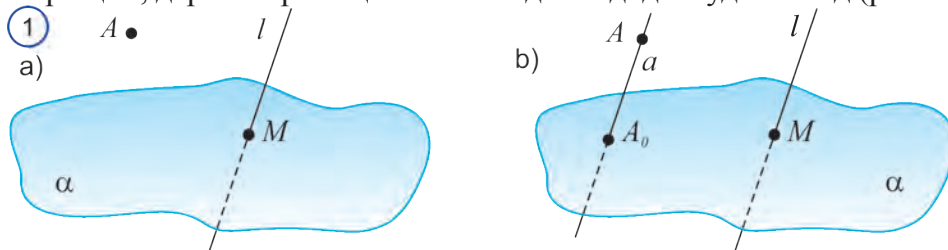
Шаклҳои фазо дар ҳамворӣ бо усулҳои гуногун тасвир карда мешаванд. Дар поён бо онҳо шинос мешавем.

Ба ҳамвори проексиякунии параллелии шакли фазоӣ гуфта чунин инъикоскуниро меноманд, ки дар он ҳар як нуқтаи шакл қад-қади хатҳои росте ба самти проексиякунии додашуда параллел ба ҳамворӣ кӯчонида мешавад.

Проексиякунии параллелиро ба сояи ягон чизи бо ёрии нуқтаҳои равшани дар девор, ёки фарш ҳосилкардари қиёс додан мумкин.

Ҳамин тавр, ҳангоми проексиякунии параллели ягон шакл ва ҳамворие, ки ҳамвори проексиякунӣ номгӯ мешавад, ҳамчунин ягон хати росте, ки самти проексиякунӣ номида мешавад, интиҳоб карда мешавад. Албатта, ин хати рост ба ҳамвори проексия бурида шуданаш лозим.

Гӯемки, ҳамвори иштиёрии α ва хати росте проексиякунии l ва нуқтаи дар ҳамворӣ ҳам, дар хати рост ҳам нахобандаи A дода шуда бошад (расми 1.а).



Аз нуқтаи A ба ҳамвори α хати росте ба хати росте l параллел бударо мегузаронем.

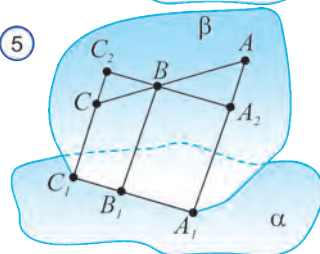
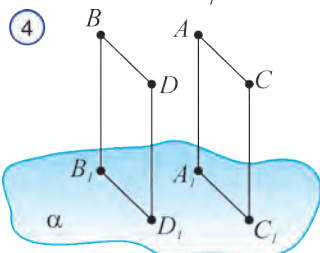
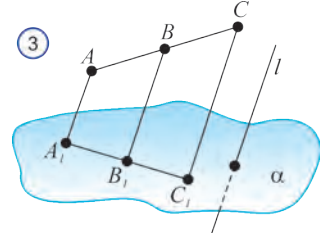
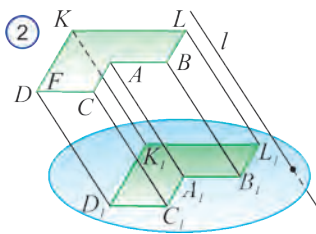
Ин хати рост ҳамвори α ро дар нуқтаи A_0 бурида мегузарад (расми 1.б).

Нуқтаи ёфташудаи A_0 *проексияи параллелии* нуқтаи A ба ҳамвори α номида мешавад.

Бигузур, ягон шакли F -ро ба ҳамвори α ба самти l проексияи параллели кардан лозим бошад. Барои ин нуқтаи иштиёрии шакли F -ро мегирем, аз он хати росте ба l параллел мегузаронем ва нуқтаи буриши онро ба ҳамвори α қайд мекунем. Ин хел нуқтаҳо дар ҳамвори α шакли номаълуми F_1 -ро ҳосил мекунам. Айнаи ҳамин шакли F_1 дар ҳамвори α проексияи параллелии инро α шакли F мешавад.

Дар расми – 2 проексияи шакли F ба ҳамвори α шакли F_1 тасвир шудааст. Хосиятҳои зерини проексиякунии параллелиро мебиёрем. Онҳоро мустақилона исбот карда бинед.

Дар проексиякунии параллели: нуқта ба нуқта, порча ба порча, хати рост ба



хати рост мегузарад.

Проексияи хатҳои рости параллел, параллел мешавад ёки болоиҳам меафтанд. Хосиятҳои зеринро исбот кунем.

Хосияти 1. Проексияи хати рости порча ҳам аз порчаҳо иборат мешавад.

Дарҳақиқат, хатҳои рости ҳаммаи нуқтаҳои порчаи AC -ро ба ҳамвории α проексиякунанда дар ҳамворие, ки қад-қади хати рости A_1C_1 бурида мегузарад, меҳобанд. (расми 3). Аз порчаи AC нуқтаи ихтиёрии B дар порчаи A_1C_1 ба нуқтаи B_1 мегузарад. \square

Хосияти 2. Проексияи порчаҳои параллели шакл ҳам аз порчаҳои параллел иборат мешавад.

Дарҳақиқат, AC ва BD порчаҳои параллели ягон шакл бошад (расми 4). Проексияҳои онҳо порчаҳои A_1C_1 ва B_1D_1 ҳам параллел мешаванд, чунки онҳоро хангоми ду ҳамвории параллелро бо ҳамвории α буридан ҳосил кардем.

Хосияти 3. Нисбати дарозии порчаҳои дар як хати рост ёки дар хатҳои рости параллел ҳобида ба нисбати проексияҳои дарозии худ баробар аст.

Дарҳақиқат, дар расми 5 хатҳои рости AC ва A_1C_1 дар ҳамвории β меҳобанд. Аз нуқтаи B -и порчаи AC хати рости A_2C_2 ки ба A_1C_1 параллел аст мегузаронем.

Секунҷаҳои ҳосилшудаи $BA A_2$ ва BCC_2 монанд мешаванд. Аз монандии секунҷаҳо ва аз баробарии $A_1B_1=A_2B$ ва $B_1C_1=BC_2$ ба нисбати коэффицентҳо карда истодаи $AB:BC=A_1B_1:B_1C_1$ соҳиб мешавем.

Ҳамин тавр, дар проексиякунии параллели дарозии порчаҳои дар хати рост, ёки хатҳои рости параллел хобанда нигоҳ дошта мешудааст.

Махсусан, проексияи миёнаҷои порча ба миёнаҷои порча мегузарад.

? Саволҳо ва машқҳои оиди мавзӯ

1. Проексиякунии параллели шакли фазоро ба ҳамворӣ гуфта чӣ ҳел инъикоскуниро меӯянд?
2. Проексияи параллели нуқта ба ҳамвории чӣ ҳел ёфта мешавад?
3. Ҳамвории проексияи параллели ва самти проексиякунӣ гуфта чиро меӯянд?

4. Кадом хосиятҳои проексияи параллелиро медонед?

5. Аз проексияи параллелӣ дар қуҷо истифода бурдан мумкин?

4.56. Оё дар проексиякунии параллелӣ проексияи порча а) порча; б) нуқта; с) ду нуқта; д) нур; е) хати рост шуданаш мумкин аст?

4.57. Оё дар проексиякунии параллели проексияи квадрат а) квадрат; б) параллелограмм; с) ромб; д) чоркунҷаи росткунҷа; е) трапетсия; ф) порча шуданаш мумкин аст?

4.58. Агар секунҷаи дар яке аз ҳамвориҳои параллел хобида ба ҳамвори дуюм параллел проексия мешавад, исбот кунед, ки масоҳати он тағйир намеёбад.

4.59. Оё проексияи параллелограмм трапетсия мешавад? Чавобатонро асоснок кунед.

4.60. Оё проексияи параллелии секунҷаи мунтазам, секунҷаи мунтазам мешавад?

4.61. Оё проексияи параллелии секунҷаи росткунҷа, секунҷаи росткунҷа мешавад?

4.62. Проексияи параллелии секунҷаи ABC аз секунҷаи $A_1B_1C_1$ иборат. Дар ин проексиякуни а) медианаи; б) баландии; с) биссектрисаи секунҷаи ABC мувофиқан ба а) медианаи; б) баландии; с) биссектрисаи секунҷаи $A_1B_1C_1$ мегузарад?

4.63. Проексияи параллелии секунҷаи ABC аз секунҷаи $A_1B_1C_1$ иборат аст. Агар $\angle A = 30^\circ$, $BC = 20$ см бошад, $\angle A_1 = 30^\circ$, $B_1C_1 = 20$ см мешавад?

4.64. Проексияи параллелии порчаи AB аз порчаи A_1B_1 иборат аст. Проексияи нуқтаи C -и аз порчаи AB гирифташуда бошад нуқтаи C_1 аст. $AB=48$ см, $A_1B_1=36$ см. Агар дарозии порчаи AC а) 24 см; б) 12 см; с) 8 см; д) 32 см; е) 36 см бошад, дарозии порчаи A_1C_1 -ро ёбед.

14 МАШҚИ АМАЛӢ ВА ТАТБИҚ

4.65. а) ду хати рост; б) хати рост ва ҳамворӣ; с) ду ҳамворӣ ба чанд нуқтаи умумӣ соҳиб шуданаш мумкин?

4.66. а) ду хати рост; б) хати рост ва ҳамворӣ; с) ду ҳамворӣ; д) се ҳамворӣ ба нуқтаи ягонаи умумӣ соҳиб шуда метавонад?

4.67. Чор нуқта дар як ҳамворӣ намехоба; а) аз онҳо сетояш дар як хати рост хобиданаш мумкин аст? б) Аз рӯйи онҳо чандто ҳамворӣ гузаронидан мумкин аст?

4.68. Хатҳои рости m ва n бурида мешавад, хати рости d бошад ба хати рости n параллел аст. Хатҳои рости m ва d байни якдигар чӣ хел ҷойгир

шуданашон мумкин?

4.69. Аз қуллаи C -и секунҷаи ABC гузаранда ва ба тарафи AB параллел чандто ҳамвориҳо гузаронидан мумкин аст?

4.70. Параллелограммҳои $ABCD$ ва $ABKZ$ дар ҳамвориҳои гуногун меҳобанд. Хатҳои рости параллелро нишон диҳед.

А) DA ва KB ; В) CD ва KZ ; С) BC ва AZ ; D) DA ва ZA ; E) CB ва KB .

4.71. Нуқтаҳои A ва C ба ҳамвори α , нуқтаҳои B ва D ба ҳамвори β тааллуқ дорад. Қадоме аз хатҳои рости AC , CD , BD , AB , BC , AD ҳамвори β -ро бурида мегузарад?

4.72. Порчаҳои AB , AC , KB , KD ҳамвори α -ро бурида мегузарад. Қадоме аз хатҳои рости AK , AD , BD , KC , CD ҳамвори α -ро бурида мегузарад?

4.73. Хатҳои рости дар як ҳамворӣ наҳобандаи AB , AC ва AD ҳамвори α -ро дар нуқтаҳои B , C_1 ва D_1 бурида мегузарад. Агар нуқтаҳои B_1 , C_1 ва D_1 пайдарҳам пайваст карда шаванд, чӣ гуна шакл пайдо мешавад?

4.74. Аз қуллаҳо ва миёнаҳои порчаи MN -и ҳамвори α -ро набуранда хатҳои рости параллел гузаронида шудааст. Агар ин хатҳои рости ҳамвори α -ро мувофиқан дар нуқтаҳои M_1 , N_1 , ва K_1 бурида гузарад ва $KK_1 = 9$ см, $NN_1 = 15$ см бошад, дарозии порчаи MM_1 -ро ёбед.

4.75. Аз нуқтаҳои P ва Z -и ҳамвори α аз он ба берун порчаҳои параллели дарозихояшон $PK = 6$ см ва $ZM = 9$ см фуруварда шудааст. Хати рости MK ҳамвори α -ро дар нуқтаи O бурида мегузарад. Агар $MK = 6$ см бошад, дарозии порчаи MO -ро ёбед.

4.76. Ҳангоми проексиякунии параллелӣ аз параллелограмм квадрат ҳосил шуданаш мумкин аст?

4.77. Проексияи параллелии секунҷа дода шудааст. Проексияи медианаҳои ин секунҷа чӣ хел сохта мешавад?

4.78. Секунҷаи MNZ ва параллелограмми $MNPS$ (BC - асос) дар як ҳамворӣ наҳобанд. Нуқтаҳои Q ва R миёнаҳои порчаҳои CB ва DA , M ва N бошад миёнаҳои порчаҳои DP ва CZ . Параллел будани хатҳои рости MN ва QR -ро исбот кунед.

4.79. Қадоме аз тарафҳои а) AA_1D_1D ; б) BB_1C_1C ; в) $ABCD$; д) DD_1C_1C ; е) $B_1C_1D_1A_1$; ф) ADD_1A_1 -и куби $ABCD A_1B_1C_1D_1$ (расми 6) ба хати рости A_1B_1 параллел мешавад?

4.80. Секунҷаи PRT дода шудааст. Ба хати рости PT ҳамвори параллели α тарафи PR -ро дар нуқтаи S , тарафи RT -ро дар нуқтаи Q бурида мегузарад (расми 7). Агар $SR = 7$ см, $SQ = 3$ см ва $SP = 35$ см бошад, тарафи PT -ро ёбед.

4.81. Ҳамвори α ба асоси AD -и трапетсияи $ABCD$ параллел буда,

тарафҳои AB ва CD -ро дар нуқтаҳои M ва N бурида мегузарад (расми 8).
 $AD = 20$ см, $MN = 16$ см.

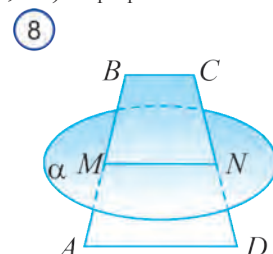
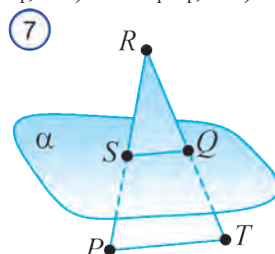
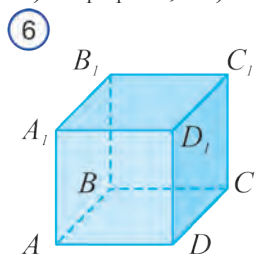
Агар нуқтаи M миёнаи порчаи AB ва $AB=8$ см бошад, периметри трапетсияро ёбед.

4.82. Аз нуқтаҳои P ва Z -и ҳамвории α аз он ба берун порчаҳои параллели дарозихояшон $PK = 6$ см ва $ZM = 9$ см фуруварда шудааст. Хати рости MK ҳамвории α -ро дар нуқтаи O бурида мегузарад. Агар $MK = 6$ см бошад, дарозии порчаи MO -ро ёбед.

4.83. Тарафи AB -и чоркунҷаи росткунҷаи $ABCD$ ба ҳамвории α параллел, тарафи AD бошад ба ин ҳамвори параллел нест. Дар фазо байни якдигар ҷойгиршавии ҳамвориҳои $ABCD$ ва α -ро муайян кунед.

4.84. Дар параллелепеди росткунҷаи $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ кадоме аз тарафҳои дар поён додашудаи он ба қуллаи A ва тарафи $ABCD$ параллел мешавад?

- A) $D_1 A_1 AD$; B) $D_1 A_1 B_1 C_1$; C) $ABB_1 A_1$; D) $D_1 C_1 CD$; E) $D_1 A_1 BD$?



4.85. Ду диагоналҳои ромб ба ҳамвории α параллел. Дар фазо байни якдигар ҷойгиршавии ҳамвории ромб ва ҳамвории α -ро муайян кунед.

4.86. Нуқтаи D дар ҳамвории секунҷаи ABC намехобад. Нуқтаҳои K, Z ва M мувофиқан миёнаҷоҳои порчаҳои DA, DB , ва DC . Дар фазо байни якдигар ҷойгиршавии ҳамвориҳои ABC ва KZM -ро муайян кунед.

Татбиқҳо ва ҳосил кардани компетенсияи амалӣ

1. Тирҳои вагонҳои роҳи оҳан нисбат ба якдигар чи ҳел ҷой гирифтаанд?
2. Тирҳои вагонҳои роҳи оҳан нисбат ба релсҳо чи гуна ҷой гирифтаанд?
3. Аз гирду атроф нисбати хатҳои ростии параллел ва чилликӣ мисолҳо биёред.
4. Барои чӣ кашакҳои мизи навишт дар баъзе ҳолатҳо ҳамвор кушода намешаванд?
5. Барои чӣ поршени насос дар даруни он ҳамвор ҳаракат мекунад?
6. Бо ёрии ченаки дӯзандагӣ, ё калтаки дароз параллелии хатчӯбҳои дар атрофи фарши дахлез задаро чӣ ҳел санчида мешавад?
7. Ҳамаи тарафҳои тахта (брус)-и аз чӯб тарошидашуда, шакли чоркунҷаи росткунҷаро дорад. Онро якпахлӯ, қад қади тегаҳояш ва чӣ ҳел арра накунад, дар ҳама буришҳо параллелограмм ҳосил мешавад. Инро исбот кунед.

ҚИСМИ V



ПЕРПЕНДИКУЛЯРИИ ХАТҲОИ РОСТ ВА ҲАМВОРИҲО ДАР ФАЗО

15

ХАТИ РОСТ ВА ҲАМВОРИИ ПЕРПЕНДИКУЛЯР ДАР ФАЗО

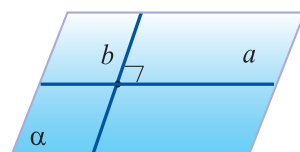
Ёдовар мешавем, ки агар дар фазо кунчи байни ду хати рост ба 90° баробар бошад, онҳо байни худ *хатҳои рости перпендикуляр* меноманд. Хатҳои рости перпендикуляр буранда ва чилликӣ мешавад. Дар расми 1 хатҳои рости перпендикуляри a ва b бурранда, хатҳои рости перпендикуляри b ва c бошад чилликӣ мебошанд. Перпендикулярии хатҳои рости a ва b ба тарзи $a \perp b$ навишта мешавад.

Хати росте, ки ба хати рости ихтиёрии ҳамворӣ перпендикуляр аст, хати рости ба ҳамворӣ перпендикуляр номида мешавад (расми 2).

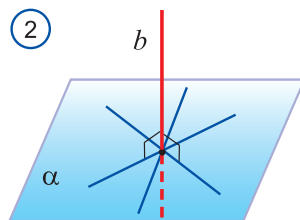
Перпендикулярии ҳамвории α ва хати рости b ба тарзи $b \perp \alpha$ навишта мешавад.

Аз атроф мисолҳои бисёри шаклҳои байни худ перпендикулярро овардан мумкин. Одатан деворҳо ва сутунҳои хона, манораҳо ва симчӯбҳо нисбат ба замин рост, яъне перпендикуляр сохта мешаванд. Чевони хона, миз ва яхдон ҳам нисбат ба замин рост ҷойгир карда мешаванд (расми 3).

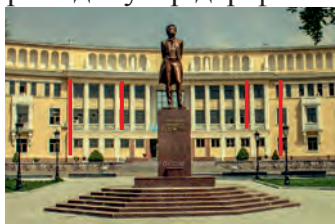
Акнун дар бораи баъзе хосиятҳои хатҳои рости перпендикуляр дар фазо истода мегузарем.



2

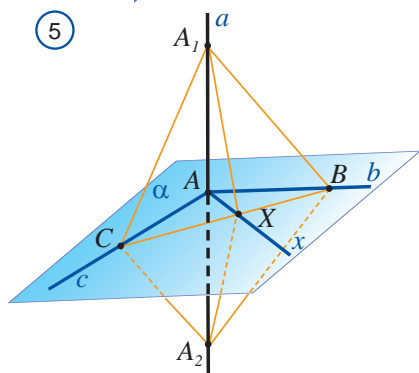
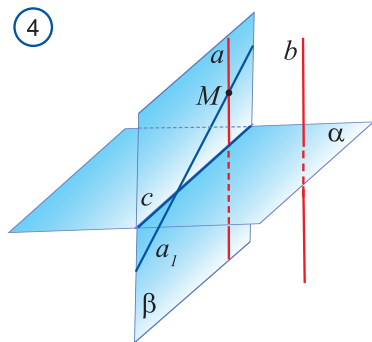


3



Агар хати рости a дар ҳамвори α хобад, ё ба он параллел бошад, он гоҳ ба хати рости a -и дар ҳамвори α хобанда хати рости b -и параллел ҳам ёфт мешавад. Бинобар ин, хати рости ба ҳамвори перпендикуляр, албатта ин ҳамвориро бурида мегузарад. Тасдиқи баръакс ҳам ҷой дорад.

Теоремаи 5.1. *Агар ду хати рост ба ҳамворӣ перпендикуляр бошад, онҳо байни якдигар параллел мешаванд.*



Исбот: Бигузор хатҳои рости a ва b ба ҳамвори α перпендикуляр бошанд (расми 4). Исбот мекунем, ки ин хатҳои рост байни якдигар параллеланд.

Аз ягон нуқтаи M -и хати рости a ба хати рости b хати рости параллели a_1 ро мегузаронем. Он гоҳ, $a_1 \perp \alpha$ мешавад.

Нишон медиҳем, ки хатҳои рости a ва a_1 болои ҳам меафтанд. Агар ин тавр нашавад, хатҳои рости a ва a_1 болои ҳам намеафтанд. Он гоҳ аз нуқтаи M -и ҳамворие ки дар он хатҳои рости a ва a_1 меҳобанд ба хати рости c -и хати буриши ҳамвориҳои α ва β дуто хати рости перпендикуляри a ва a_1 мегузарад. Ин тавр шуданаш мумкин нест. Зиддияти ҳосилшуда нодуруст будани фарзамонро нишон медиҳад.

Пас, хатҳои рости a ва b байни якдигар параллеланд.

Акнун аломати перпендикулярӣ хати рост

ва ҳамвориро мебиёрем.

Теоремаи 5.2. *Агар хати рост ба ду хати рости бурандаи дар ҳамворӣ хобанда перпендикуляр бошад, он ба ҳамворӣ ҳам перпендикуляр мешавад.*

Исбот: Бигузор хати рости a ба ду хати рости дар ҳамвори α хобандаи b ва c перпендикуляр бошад. Хати рости a аз нуқтаи буриши хатҳои рости b ва c нуқтаи A мегузарад. Исбот мекунем, ки хати рости a ба ҳамвори α перпендикуляр мебошад.

Аз нуқтаи A -и ҳамвори α хати рости ихтиёрии x -ро мегузаронем ва ба хати рости a перпендикуляр будани x -ро нишон медиҳем.

Дар ҳамвори α хати рости x -и хатҳои рости аз нуқтаи A нагузарандаи b , c ва x -ро брандаро мегузаронем. Бигузор ин нуқтаҳои буриш мувофиқан нуқтаҳои B , C ва X бошанд.

Дар хати рости a дар тарафҳои гуногуни нуқтаи A порчаҳои AA_1 ва AA_2 –ро мегузorem. Секунҷаҳои ҳосилшудаи A_1BA_2 ва A_1CA_2 баробар мешаванд (инро мустақилона асоснок кунед). Аз ин ҷо баробар будани секунҷаҳои A_1BC ва A_2BC бармеояд (инро мустақилона асоснок кунед). Дар навбати худ, аз ин ҷо баробар будани кунҷҳои A_1BX ва A_2BX ва ниҳоят баробар будани секунҷаҳои A_1BX ва A_2BX ҳам бармеояд (инро ҳам мустақилона асоснок кунед).

Хусусан, $A_1X = A_2X$ мешавад. Он гоҳ секунҷаи A_1XA_2 баробарпахлӯ мешавад. Бинобар ин, медианаи XA -и баландии \bar{y} ҳам мешавад. Ин бошад дар навбати худ, перпендикуляр будани хати рости x -ро ба хати рости a нишон медиҳад.

Пас, хати рости a ба ҳамвори α перпендикуляр аст.

Аз ин теорема ба сифати натиҷа хосиятҳои зерин бармеоянд, онҳоро мустақилона асоснок кунед.

Теорема 5.3. *Агар хати рост ба яке аз дуто ҳамвориҳо перпендикуляр бошад, ба дуюмиаш ҳам перпендикуляр мешавад.*

Теорема 5.4. *Агар дуто ҳамвори ба якто хати рост перпендикуляр бошад, онҳо параллел мешаванд.*

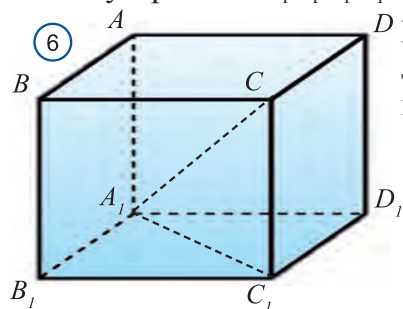
Дар поён барои мустақилона исбот кардан хосиятҳои, ки ҳамчу "теоремаҳои мавҷудият ва ягонагӣ" қабул шудааст, меорем.

Теорема 5.5. *Аз нуқтаи ихтиёрии фазо, ба хати рости додашуда ягона ҳамвори перпендикуляр гузаронидан мумкин аст.*

Теорема 5.6. *Аз нуқтаи ихтиёрии фазо, ба ҳамвори додашуда хати рости ягонаи перпендикулярро гузаронидан мумкин аст.*

Натиҷа (теоремаи умумигардонидашудаи Пифагор). *Квадрати диагонали параллелепипеди росткунҷа ба суммаи квадратҳои се ченаки он баробар аст.*

Бигузор $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеди росткунҷа бошад (расми 6). Ба



рои он ки теғаи CC_1 ба тарафи $A_1B_1C_1D_1$ перпендикуляр аст A_1C_1C секунҷаи росткунҷа мешавад. Он гоҳ мувофиқи теоремаи Пифагор,

$$A_1C^2 = CC_1^2 + A_1C_1^2 \quad (1).$$

$A_1D_1C_1$ ҳам секунҷаи росткунҷа. Боз ҳам мувофиқи теоремаи Пифагор,

$$A_1C_1^2 = A_1D_1^2 + D_1C_1^2 \quad (2).$$

Он гоҳ, мувофиқи (1) ва (2): $A_1C^2 = CC_1^2 +$

$$A_1C_1^2 = CC_1^2 + A_1D_1^2 + D_1C_1^2.$$

Азбаски $A_1D_1 = B_1C_1$ аст, пас $A_1C^2 = CC_1^2 + B_1C_1^2 + D_1C_1^2$. \square



Савол ва машқҳо оиди мавзӯ



1. Дар фазо чӣ хел хатҳои рост байни якдигар перпендикуляр мешаванд?
2. Оё хатҳои рости чилликӣ перпендикуляр шуда метавонанд?
3. Дар расми 7 кадом шахр тасвир шудааст? Дар он шумо чӣ хел хатҳои рост ва ҳамвориҳоро мебинед? Аз расм ба хатҳои рости параллел, перпендикуляр ва чилликӣ мисолҳо биёред.
4. Чӣ хел хати рост ба ҳамворӣ перпендикуляр мешавад?
5. Хосиятҳои хатҳои рости ба як ҳамворӣ перпендикуляр бударо гӯед.
6. Аломати перпендикулярӣ хатҳои рост ва ҳамвориҳоро гӯед.
7. Хосияти ба яке аз ҳамвориҳои параллел перпендикуляр будани хати ростро гӯед.
8. Хосияти ба як хати рост ҳамвориҳои перпендикуляр бударо гӯед.
9. Теоремаи умумигардониданишудаи Пифагор дар бораи чист?

5.1. Порчай SB ба ҳамвории параллелограмми $ABCD$ перпендикуляр аст (расми 8). Хатҳои рости ба порчай SB перпендикуляр бударо гӯед.

5.2. Хати номуайянии рости l ба тарафҳои AB ва AC -и секунҷаи ABC перпендикуляр аст. Қойгиршавии хати рости l ва ҳамвории секунҷаи ABC -ро муайян кунед.

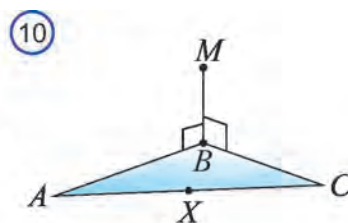
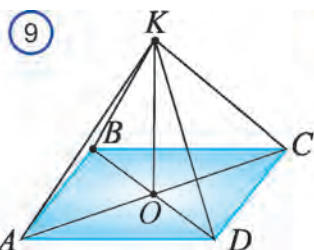
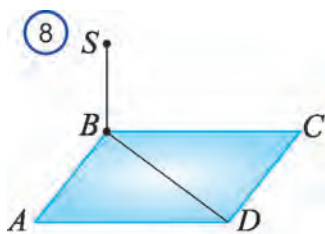
а) хати рости l ва ҳамвории ABC –ро бурида мегузарад, лекин ба он перпендикуляр нест. б) ба хати рости l ва ҳамвории ABC тааллуқ дорад; с) ба хати рости l ва ҳамвории ABC перпендикуляр; д) ба хати рости l ва ҳамвории ABC параллел.

5.3. Хати рости KO ба ҳамвории параллелограмми $ABCD$ перпендикуляр (расми 9). Ба хати рости KO хати рости перпендикулярро муайян кунед.

5.4. Хати рости MB ба тарафҳои AB ва BC -и секунҷаи ABC перпендикуляр (расми 10). Агар нуқтаи X нуқтаи ихтиёрии тарафи AC бошад, тири секунҷаи MBX –ро муайян кунед.

5.5. Дар параллелолипеди росткунҷаи $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ перпендикуляр будани буриши диагоналии $AA_1 C_1 C$ ва $BB_1 D_1 D$ -ро исбот кунед.

5.6. Тарафҳои чоркунҷаи $ABCD$ мувофиқан ба тарафҳои чоркунҷаи росткунҷаи $A_1 B_1 C_1 D_1$. Чоркунҷаи росткунҷа будани $ABCD$ –ро исбот кунед.



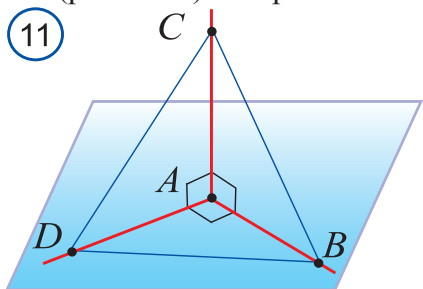
5.7. Ҳамвори α ба хати рости m , хати рости m ба хати рости n параллел. Ба хати рости n перпендикуляр будани ҳамвори α исбот кунед.

5.8. Хати росте, ки дар он асоси AB -и трапетсияи $ABCD$ меҳобад ба ҳамвори α перпендикуляр аст. Исбот кунед, ки хати рости асоси CD хобидаи ин трапетсия ҳам ба ҳамвори α перпендикуляр аст.

5.9. Исбот кунед, ки аз нуқтаи ихтиёрии хати рости фазо ба он хати рости перпендикуляр гузаронидан мумкин аст.

5.10. Исбот кунед, ки аз нуқтаи ихтиёрии хати рости фазо ба он дуто хати рости гуногуни перпендикуляр гузаронидан мумкин аст.

5.11. Хатҳои рости AB, AC, AD чуфт-чуфт байни якдигар перпендикуляр аст (расми 11). Агар



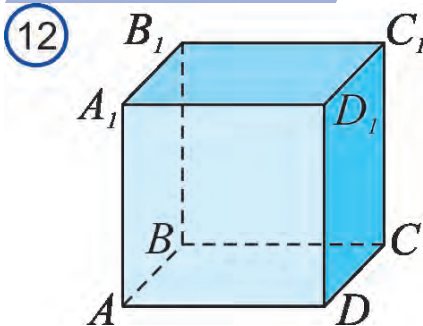
- 1) $AB = 3$ см, $BC = 7$ см, $AD = 1,5$ см;
- 2) $BD = 9$ см, $BC = 16$ см, $AD = 5$ см;
- 3) $AB = b$ см, $BC = a$ см, $AD = d$ см;
- 4) $BD = c$ см, $BC = a$ см, $AD = d$ см бошад, дарозии порчаи CD –ро ёбед.

5.12. Аз қуллаи A -и чоркунҷаи росткунҷаи $ABCD$ ба ҳамвори он хати рости перпендикуляри AK гузаронида шудааст. Аз нуқтаи K масофа то қуллаҳои боқимондаи чоркунҷа 6 м, 7 м, 9 м. Масофаи AK -ро ёбед.

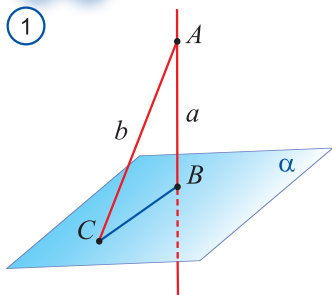
5.13. Аз нуқтаҳои A ва B хатҳои рости ба ҳамвори α перпендикуляр ва хатҳои рости онро мувофиқан дар нуқтаҳои C ва D буранда гузаронида шудааст. Агар $AC = 3$ м, $BD = 2$ м ва $CD = 2,4$ м бошад ва порчаи AB ҳамвори α ро бурида нагузарад, масофаи байни нуқтаҳои

A ва B –ро ёбед.

5.14. Теғайи кубу дар расми 12 тасвир кардашуда а) 4 см; б) 8 см бошад, периметри секунҷаи AB_1C ва масоҳати секунҷаи DAC_1 –ро ёбед.



16 ПЕРПЕНДИКУЛЯР, МОИЛ ВА МАСОФА ДАР ФАЗО



Порчаи BC -проекция моил дар ҳамворӣ, нуқтаи B - асоси перпендикуляр, нуқтаи C - асоси моил номида мешавад.

Секунҷаи ABC росткунҷа ва дар он AB катет, азбаски дар он AC гипотенуза аст, ҳама вақт $AB < AC$ мешавад.

Пас, дарозии перпендикуляри аз ягон нуқта ба ҳамворӣ фурувардашуда аз дарозии моили ихтиёрии аз ҳамон нуқта фурувардашуда хурд мешавад.



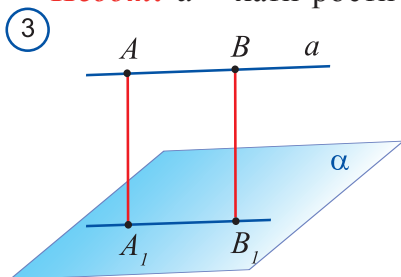
Масофаи аз нуқта то ҳамворӣ гуфта, дарозии перпендикуляри аз нуқта ба ҳамворӣ фурувардашударо меноманд.

Ҳангоми дарозии манораи соати шаҳри Тошкандро 30 м гуфтан, дарозии перпендикуляри аз қуллаи манора ба ҳамвории асос фурувардашударо мефаҳманд (расми 2).

Теоремаи- 5.7. *Агар хати рост ба ҳамворӣ параллел бошад, он гоҳ ҳамаи нуқтаҳои он аз ҳамворӣ дар масофаи баробар мешаванд.*

Исбот: a – хати рости додашуда ва α – ҳамвории додашуда бошад (расми 3). Дар хати рости a ду нуқтаи A ва B -ро мегирем. Аз онҳо ба ҳамвории α перпендикуляр мефарорем. Асоси ин перпендикуляр мувофиқан нуқтаҳои A_1 ва B_1 бошад. Он гоҳ масофаҳо аз нуқтаҳои A ва B то ҳамвории α мувофиқан порчаҳои AA_1 ва BB_1 мешаванд. Мувофиқи теоремаи 3.6 порчаҳои AA_1 ва BB_1 параллел мешаванд.

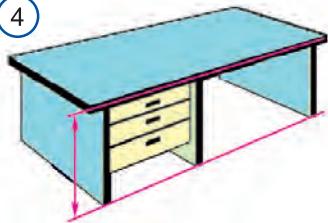
Пас, онҳо дар як ҳамворӣ меҳобанд. Ин ҳамворӣ ҳамвории α –ро қад қади хати рости A_1B_1 брида мегузарад. Хати рости a ба хати рости A_1B_1 параллел



мешавад, чунки он ҳамвори α -ро бурида намегузарад.

Ҳамин тавр, дар чоркунҷаи ABA_1B_1 тарафҳои муқобил параллел. Пас, \bar{y} параллелограмм аст. Дар ин параллелограмм $AA_1 = BB_1$.

④ *Масофа аз хати рост то ҳамвори ба он параллел* гуфта, масофаи аз нуқтаи ихтиёрии хати рост то ҳамворӣ бударо меноманд.

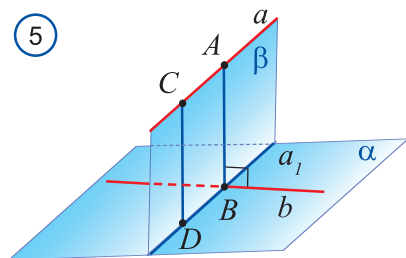


Масофа аз ду нуқтаҳои ихтиёрии ҳамворӣ то ҳамвори ба он параллел як хел мешаванд. Ин хосият монанди исботи теоремаи пештара исбот карда мешавад.

Масофаи байни ду ҳамвори параллел гуфта, масофа аз нуқтаи ихтиёрии як ҳамворӣ то ҳамвори дигар бударо меноманд. Баландии столи дар расми 4 тасвир кардашуда ба масофаи байни ҳамвориҳои фарш ва стол баробар мешавад.

Теоремаи 5.8. *Ду хати рости чилликӣ ба перпендикуляри ягонаи умумӣ соҳиб аст.*

Исбот: a ва b хатҳои рости чилликӣ бошанд (расми 5). Дар ин хатҳои



⑤ рост мумкин будани интиҳоби чунин нуқтаҳои A ва B –ро нишон медиҳем, ки хати рости AB ҳам ба a , ҳам ба b перпендикуляр мешавад. Бигузур ҳамвори α аз хати рости b гузаранда ва ба хати рости a параллел бошад. Дар хати рости a нуқтаи C –ро мегирем ва аз он ба ҳамвори α перпендикуляри CD -ро мефарорем. Аз хатҳои рости бурандаи a ва CD ҳамвори β ро мегузаронем. Бигузур хати рости a хати буриши ҳамвориҳои α ва β бошад. Барои он ки $a_1 \parallel a$ аст хатҳои рости a_1 ва b дар нуқтаи номаълум B бурида мешавад. Аз нуқтаи B -и дар ҳамвори β хобанда, ба хати рости a перпендикуляри BA -ро мефурорем.

Дар натиҷа, ҳар ду хати рости AB ва CD дар ҳамвори β меҳобанд ва ба хати рости a перпендикуляр мешаванд. Бинобар ин, $AB \parallel CD$ ва $AB \perp a$ мешавад.

Пас, $AB \perp a$ ва $AB \perp b$ мешавад. AB хати рости чустаамон буда, он ба ҳар ду хати рости чилликӣ ҳам перпендикуляр мешавад.

Ягонагии перпендикуляри умумиро мустақилона исбот кунед. \square

Масофаи байни ду хати рости чилликӣ гуфта, дарозии перпендикуляри умумии онҳоро мегӯянд.

Аз теоремаи боло хосияти зерин бармеояд:

Масофаи байни ду хати рости чилликии a ва b (расми 6) –ба масофа аз

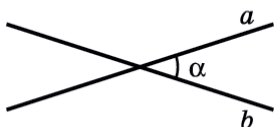
нуқтаи ихтиёри хати рости a , то ҳамворие, ки дар он хати рости b меҳобад ва ба хати рости a параллел аст баробар мешавад.

Факту рақамҳои болоро ба асос гирифта, акнун мо дар фазо байни якдигар ҷойгиршавии ду хати ростро бо ёрии ададҳо тавсиф доданамон мумкин.

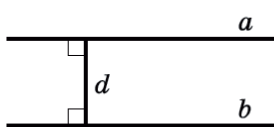
Агар дар фазо ду хати рост байни якдигар:

- бурида шаванд – кунҷи байни онҳо α (расми 7.а),
- параллел бошад – масофаи байни онҳо d (расми 7.б),
- ҷилликӣ бошад – кунҷи байни онҳо α ва масофа d (расми 7.с)-ро байни якдигар ҷойгиршавии мазкур хатҳои рост ададан тавсиф мекунад.

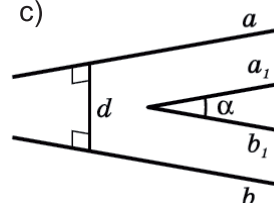
7) а)



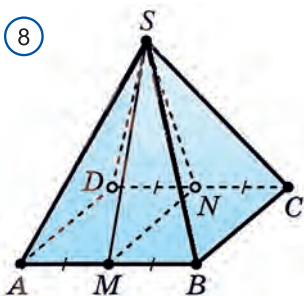
б)



с)



8)



Масъала. Ҳамаи теғаҳои пирамидаи чоркунҷаи $SABCD$ ба a баробар. Масофаи байни теғаҳои AB ва SC ёфта шавад (расми-8).

Ҳалл: Мувофиқи теоремаи-4.8, дар теғаҳои AB ва SC чунин нуқтаҳои X ва Y мавҷуд аст, ки хати рости XY ба ҳар ду теғаҳои AB ва SC ҳам перпендикуляр мешавад. Монанди ин, хати рости XY , ба ҳамвории хати рости SC ҳобида ва ба хати рости AB параллел буда ҳам перпендикуляр мешавад.

Агар ҳамвории α аз нуқтаи S гузаранда ва ба хати рости AB перпендикуляр буда бошад. Ин ҳамвори аз миёнаҷоҳои теғаҳои AB ва CD аз нуқтаҳои M ва N мегузарад. Он гоҳ $XY \parallel \alpha$ ва проексияи порчаи XY дар ҳамвории α ба порчаи XY баробар мешавад.

Акнун ба қадом нуқтаҳо проексияшавии нуқтаҳои X ва Y –ро дар ҳамвории α муайян мекунем. Азбаски $AB \perp \alpha$ аст ҳамаи нуқтаҳои теғаи AB ба нуқтаи M проексия мешавад. Пас, нуқтаи X ба нуқтаи M проексия мешавад.

Азбаски нуқтаҳои S ва C мувофиқан ба нуқтаҳои S ва N проексия мешавад, порчаи SC ба порчаи SN мегузарад. Азбаски хати рости SN дар ҳамвории ба хати рости AB параллел меҳобад, проексияи порчаи кофтуков шуда истодаи XY , аз перпендикуляри аз нуқтаи M ба хати рости SN фуруварда шуда иборат аст. Дарозии ин перпендикуляр d -ро, аз масоҳати секунҷаи баробарпахлӯи SMN , ки асосаш ба a ва тарафи пахлӯиаш ба $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

баробар аст меёбем.

Аз як тараф масоҳати ин секунча ба : $\frac{a}{2} \frac{a\sqrt{2}}{2}$ баробар.

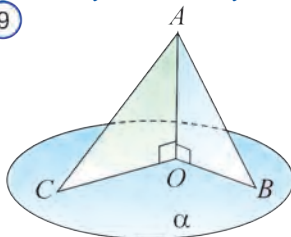
Аз тарафи дигар ба $\frac{1}{2} \frac{a\sqrt{3}}{2} d$ баробар. Аз ин баробарии $d = \frac{a\sqrt{6}}{3}$



Саволҳо ва машқҳо оиди мавзӯ

1. Ба перпендикуляр ва моили ба ҳамворӣ фаровардашуда таъриф диҳед.
2. Проексияи моил дар ҳамворӣ гуфта чиро меноманд?
3. Масофа аз нуқта то ҳамворӣ чӣ хел муайян карда мешавад?
4. Масофаи байни хати рост ва ҳамвори ба ҳамвори додашуда параллел чӣ хел ёфта мешавад?
5. Масофаи байни ду ҳамвори параллел чӣ хел муайян карда мешавад?
6. Масофаи байни ду хати рости чилликӣ чӣ хел муайян карда мешавад?
7. Дар фазо байни якдигар ҷойгиршавии ду хати ростро кадом бузургихои ададӣ муайян мекунад?

9



5.15. Нуқтаҳои A, B, Q мутааллиқи ҳамвори α , нуқтаи M бошад ба он тааллуқ нест ва $MQ \perp \alpha$. Кадоме аз порчаҳои MA, AQ, MQ, BQ, MB а) перпендикуляр; б) моил; с) проексияи моил буданаширо муайян кунед.

5.16. Аз нуқтаи A ба ҳамвори a моилҳои AB ва AC ва перпендикуляри AO фуруварда шудааст (расми 9).

Агар $AB = 2,5$ см, $AC = 3$ см бошад, проексияҳои моилҳоро байни якдигар муқоиса кунед.

5.17. Аз нуқта ба ҳамвори дуто моил фуруварда шудааст (расми 9). Агар яке аз моилҳо аз дуомиаш 26 см дарозтар, проексияҳояшон бошад 12 см ва 40 см бошад, дарозии ин моилҳоро ёбед.

5.18. Аз маркази давраи ба секунча берун кашидашуда ба ҳамвори секунча хати рости перпендикуляр гузаронида шудааст. Исбот кунед, ки ҳар як нуқтаи ин хати рост аз қуллаҳои секунча дар дуриҳои баробар меҳобанд.

5.19. Ба ҳамвори квадрати $ABCD$ ки масоҳаташ ба а) 21 см^2 ; б) 96 см^2 ; с) 44 см^2 ; д) 69 см^2 ; е) 156 см^2 перпендикуляри DM -и дарозияш 10 см буда фуруварда шуда аст. Дарозии моили MA –ро ёбед.

5.20. Аз қуллаи кунчи тези секунчаи ABC ки дар он C кунчи рост аст, ба ҳамвори секунча хати рости перпендикуляри AD гузаронида шудааст. Агар $AC = c$, $BC = b$ ва $AD = c$ бошад, масофа аз нуқтаи D то қуллаҳои B ва C –ро ёбед.

5.21. Нуги болоии сутунҳои вертикал ки аз якдигар дар масофаи 3,4 м ҷойгир шудаанд, бо шохпул пайваस्त карда шудаанд. Агар баландии сутунҳо

5,8 м ва 3,9 м бошад, дарозии шохпулро ёбед.

5.22. Сими телефони дарозиаш 15 м ба симчӯб аз сатҳи замин дар баландии 8 м баста шудааст ва ба боми хонаи баландошӯнаи баландиаш аз баландии он 20 м баландтар маҳкам кашида шудааст. Масофаи байни хона ва сутунро ёбед.

5.23. Дарозии перпендикуляри аз нуқтаи P ба ҳамвори фурувардашудаи PQ ба 1, дарозии моилҳои PA ва PB бошад ба 2 баробар. Нуқтаи C миёнаҷои порчаи AB . Агар

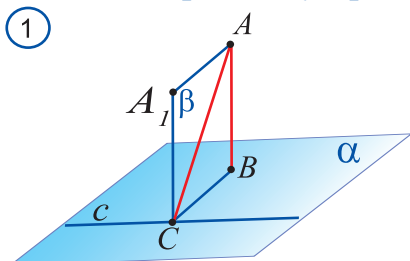
а) $\angle APB = 90^\circ$; б) $\angle APB = \beta$ бошад, дарозии порчаи QC -ро ёбед.

5.24. Аз қуллаи кунҷи кунди B -и параллелограмми $ABCD$ порчаи перпендикуляри BH рост карда шудааст. Агар $AH = 5$ см, $HD = HC = 8,5$ см, $AC = 1,5\sqrt{33}$ бошад, тарафҳои параллелограммро ёбед.

5.25. Нуқтаи M аз ҳар як қуллаи секунҷаи мунтазами ABC -и тарафҳояш 60 см дар масофаи 40 см ҷой гирифтааст. Масофа аз ҳамвори секунҷаи ABC то нуқтаи M ёфта шавад.

17 ТЕОРЕМА ДАР БОРАИ СЕ ПЕРПЕНДИКУЛЯР

Теоремаи-5.9. Агар хати рости аз асоси моили ба ҳамворӣ фурувардашуда гузаранда ба проексияи моил перпендикуляр бошад, он гоҳ ба худӣ моил ҳам перпендикуляр мешавад.



Исбот: Агар порчаи AB перпендикуляри ба ҳамвори α фурувардашуда, порчаи AC моил бошад.

Хати рости c хати рости дар ҳамвори α хобанда, аз нуқтаи C гузаранда ва ба проексияи моил перпендикуляр бошад (расми 1). Хати рости ба AB параллели A_1C -ро мегузaronем.

Ин хати рост ба ҳамвори α перпендикуляр мешавад.

Аз хатҳои рости AB ва AC_1 ҳамвори β -ро мегузaronем. Хати рости c ба хати рости CA_1 перпендикуляр мешавад. Мувофиқи шарт, он ба хати рости CB ҳам перпендикуляр буд. Он гоҳ хати рости c ба ҳамвори β ҳам перпендикуляр мешавад.

Пас, хати рости c ба моили дар ҳамвори β хобандаи AC ҳам перпендикуляр мешавад. \square

Азбаски дар теоремаи мазкур сухан дар бораи се перпендикуляр меравад он номи "Теорема дар бораи се перпендикуляр"-ро гирифтааст. Теоремаи ба ин теорема баръакс ҳам ҷой дорад. Онро мустақилона исбот кунед.

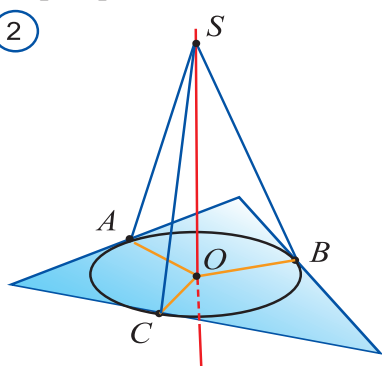
Теорема 5.10. *Агар хати рости аз асоси моили ба ҳамвори фурувардашуда гузаранда ба моил перпендикуляр бошад, он гоҳ он ба проексияи моил ҳам перпендикуляр мешавад.*

Масъалаи 1. Аз маркази давраи ба секунча дарун кашидашуда ба ҳамвории секунча хати рости перпендикуляр гузаронида шудааст (расми 2). Иббот кунед, ки нуқтаи ихтиёрии ин хати рост аз тарафҳои секунча дар масофаи баробар меҳобанд.

Исбот: Агар A, B, C – нуқтаҳои буриши тарафҳои секунча бо давра, O – маркази давра, S бошад нуқтаи ихтиёрии перпендикуляр бошад.

Азбаски OA ба тарафи секунча перпендикуляр аст, мувофиқи теорема дар бораи се перпендикуляр, OA ҳам ба ин тараф перпендикуляр мешавад. Он гоҳ SAO секунчаи росткунча мешавад. Дар ин секунча мувофиқи теоремаи Пифагор,

②



$$SA = \sqrt{AO^2 + OS^2} = \sqrt{r^2 + OS^2},$$

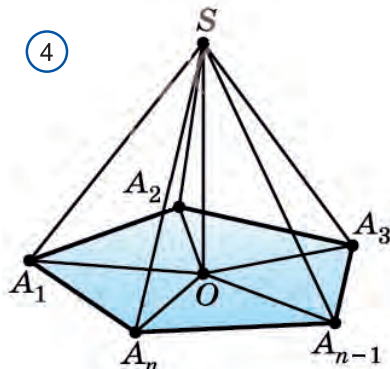
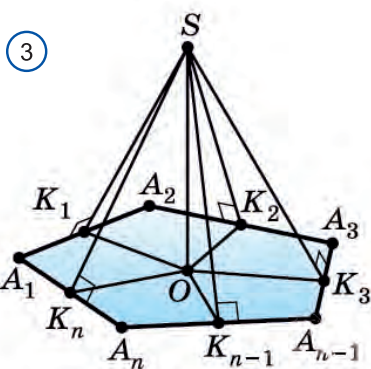
Дар ин чо r – радиуси давра.

Монанди ин, аз секунчаи росткунчаи $SBO = \sqrt{r^2 + OS^2}$ ва аз секунчаи росткунчаи SCO бошад $SC = \sqrt{r^2 + OS^2}$ буданаширо меёбем.

Пас, $SA = SB = SC$. \square

Дар асоси расмҳои дар боло овардашудаи 3, 4 ба монанди масъалаи 1 ва барои бисёркунҷаи ихтиёрӣ ҳолатҳои умумиро барои мустақилона исбот кардан мебиёрем.

Масъалаи 2. Нуқтаи фазо аз тарафҳои бисёркунча дар масофаҳои баробар чойгиршуда буда, аз он ба ҳамвории бисёркунча перпендикуляр фуруварда шудааст. Иббот кунед, ки асоси ин перпендикуляр бо маркази



давраи ба бисёркунча дарун кашидашуда болоиҳам меафтад (расми 3).

Масъалаи 3. Нуқтаи фазо аз қуллаҳои бисёркунча дар масофаи баробар

чойгир буда, аз он ба ҳамвори бисёркунча перпендикуляр фуруварда шудааст. Иббот кунед, ки асоси ин перпендикуляр бо маркази давраи ба бисёркунча берун кашидашуда болоиҳам меафтад (расми 4).

Масъалаи 4. Ба ҳамвори секунҷаи ABC аз нуқтаи A –и он перпендикуляр бароварда шудааст (расми 5). Агар $AB = 13$, $BC = 20$, $AC = 11$ ва $AD = 36$ бошад, масофа аз нуқтаи D то хати рости BC –ро ёбед.

Ҳалл: Масофаи номаълум ба дарозии перпендикуляри аз нуқтаи D ба тарафи BC фурувардашуда баробар мешавад. Барои фаровардани ин порча асоси дар тарафи BC будаи онро ёфтан лозим аст. Барои ин аз қуллаи A -и секунҷаи ABC ба тарафи BC баландии AO –ро мефурорем: $AO \perp BC$.

Он гоҳ мувофиқи теорема дар бораи се перпендикуляр, $BC \perp DO$ мешавад. Пас, DO чуствамон будааст.

Акнун дарозии порчаи DO –ро меёбем. Барои ин, аввал масоҳати секунҷаи ABC –ро аз формулаи Герон истифода бурда меёбем:

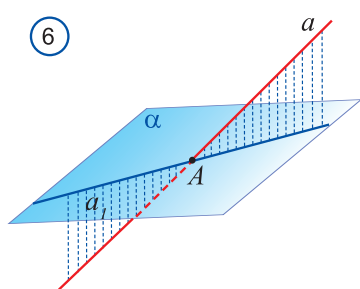
$$p = (a + b + c) : 2 = (20 + 11 + 13) : 2 = 22;$$

$$S = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)} = \sqrt{22 \cdot (22 - 20) \cdot (22 - 11) \cdot (22 - 13)} = 66.$$

$$DO = 2S / a = (2 \cdot 66) : 20 = 6,6.$$

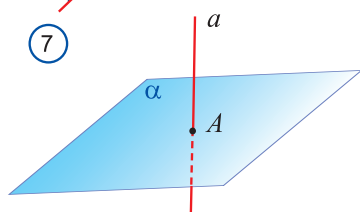
Дар секунҷаи росткунҷаи ADO , мувофиқи теоремаи Пифагор

$$DO = \sqrt{AD^2 + AO^2} = \sqrt{36^2 + 6,6^2} = 36,6.$$



Агар хати рости a , ки ҳамвори α -ро бурида мегузарад ва ба он перпендикуляр нест дода шуда бошад (расми 6). Аз ҳар як нуқтаи хати рости a перпендикулярҳо мефурорем. Асосҳои ин перпендикуляр хати рости a_1 –ро ташкил мекунад.

Хати рости a_1 **проекцияи** хати рости a дар ҳамвори α номида мешавад.



Кунҷи байни хати рости a ва ҳамвори α гуфта, кунҷи байни хати рост ва проексияи он дар ҳамвориро меноманд.

Агар хати рост ба ҳамворӣ перпендикуляр бошад (расми 7), кунҷи байни он ва ҳамворӣ ба 90° , агар параллел бошад, кунҷи байни он ва

ҳамворӣ ба 0° баробар аст.

Савол ва машқҳо оиди мавзӯ

1. Теорема дар бораи се перпендикулярро шарҳ диҳед. Барои чӣ он чунин номида шудааст?
2. Теоремаи ба теорема дар бораи се перпендикуляр баръаксро гӯед ва эзоҳ диҳед.
3. Кунчи байни хати рост ва ҳамворӣ чӣ хел муайян карда мешавад?
4. Кунчи байни ҳамворӣ ва хати рости ба он перпендикуляр чанд градус?

5.26. Нуқтаи A дар масофаи a аз қуллаҳои секунҷаи баробартарафи тарафаш ба a баробар мехобад. Масофа аз нуқтаи A то ҳамвории секунҷа ёфта шавад.

5.27. Аз нуқтаи S -и ба ҳамвори тааллуқнадошта ба он сето моили баробари SA , SB , SC ва перпендикуляр SO гузаронида шудааст. Асоси O -и перпендикуляр маркази давраи берункашидашудаи секунҷаи ABC буданаширо исбот кунед.

5.28. Тарафҳои секунҷаи баробартараф ба 3 м баробар аст. Масофа аз нуқтаи аз ҳар як қуллаи секунҷа дар масофаи 2 м хобанда то ҳамвории секунҷаро ёбед.

5.29. Дар секунҷаи баробарпахлӯ асос ва баландӣ ба 4 м баробар аст. Нуқтаи додашуда аз ҳамвории секунҷа дар масофаи 6 м ва аз қуллаҳои он дар як хел масофа мехобад. Ин масофаро ёбед.

5.30. Аз нуқтаи A масофа то қуллаҳои квадрат ба a баробар аст. Агар тарафи квадрат ба b баробар бошад, масофа аз нуқтаи A то ҳамвории квадрат ёфта шавад.

5.31. Қойи геометрии моилҳои дарозии додашуда ва аз нуқтаи додашуда ба ҳамвори фурувардашударо ёбед.

5.32. Аз нуқтаи додашуда ба ҳамворӣ дуто моили дарозиҳояшон 10 см ва 17 см гузаронида шудааст. Фарқи проексияи ин моилҳо ба 9 см баробар аст. Проексияҳои моилҳоро ёбед.

5.33. Аз нуқта ба ҳамворӣ ду моил гузаронида шудааст. Агар 1) яке аз онҳо аз дуомиаш 26 см дарозтар, проексияҳои моилҳо 12 см ва 40 см бошад; 2) дарозиҳои моилҳо дар нисбати 1 : 2 буда, проексияҳои онҳо ба 1 см ва 7 см баробар бошад, дарозии моилҳоро ёбед.

5.34. Аз нуқтаи A -е ки аз ҳамвории α дар масофаи d мехобад дуто моили AB ва AC , ки бо ҳамворӣ кунчи 30° -ро ташкил мекунад фуруварда шудааст. Проексияҳои онҳо ба ҳамвории α байни якдигар кунчи 120° ташкил мекунад. Дарозии порчаи BC -ро ёбед.

5.35. Агар яке аз катетҳои секунҷаи росткунҷа мутааллиқи ҳамворӣ, дуюмиаш бошад бо он кунҷи 45° -ро ташкил кунад, исбот кунед, ки гипотенуза бо ин ҳамворӣ кунҷи 30° ташкил мекунад.

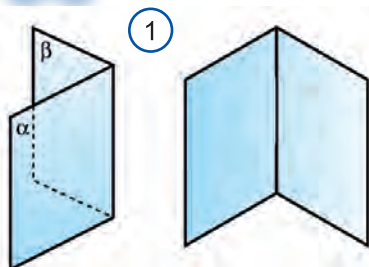
5.36. Моили a бо ҳамвории α кунҷи 45° ташкил мекунад, хати рости b –и ҳамворӣ бошад, бо проексияи моил кунҷи 45° ташкил мекунад. Исбот кунед, ки кунҷи байни хатҳои рости a ва b ба 30° баробар аст.

5.37. Нуқтаи P аз ҳар як қуллаи квадрати $ABCD$ -и тарафаш a дар масофаи a меҳобад. Кунҷи байни ҳамвории квадрат ва хати рости AP ёфта шавад.

5.38. Ҳамаи тегаҳои пирамидаи секунҷа байни якдигар баробаранд. Кунҷи байни қуллаи пирамида ва тарафери, ки ин қулла тааллуқ надорад, ёбед.

5.39. Ченакҳои параллелепипеди росткунҷа ба a , b ва c баробар аст. Масофаи байни диагонали параллелепипед ва диагонали тарафҳои онро ёбед.

18 ПЕРПЕНДИКУЛЯРИИ ҲАМВОРИҲО ДАР ФАЗО



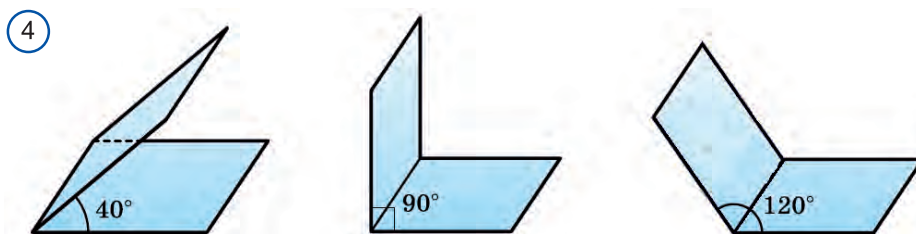
Шакли геометрие, ки аз ду нимҳамворӣ ва аз хати рости умумии ба онҳо ҳамсарҳад иборат аст *кунҷи дутарафа* номида мешавад (расми 1). Нимҳамворихо *тарафҳои* кунҷи дутарафа, хати рости сарҳади онҳо бошад *тегаи* кунҷи дутарафа номида мешавад.

Дар бораи кунҷи дутарафа аз атроф маводҳои зерин тасаввурот медиҳад (расми 2): китоб, ноутбук, дари кушода ва боми иморат.

Аз нуқтаи ихтиёрии қуллаи кунҷи дутарафа нурҳои дар тарафҳои \bar{u} хобанда ва ба ин тега перпендикуляр бударо мебарорем. Кунҷи ин нурҳо ҳосилкарда *кунҷи хаттии* кунҷи дутарафа номида мешавад (расми 3).

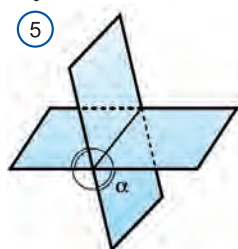
Аз таъриф дида мешавад, ки кунҷи хаттии кунҷи дутарафа бо нуқтаи дар қулла интиҳобшуда муайян мегардад ва хеле беохир мешавад.





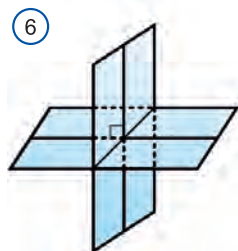
Агар чунин бошад, бузургии кунчи хаттии кунчи дутарафа ба нуқтаи дар кулла интихобшуда алоқаманд нест, яъне ҳамаи онҳо баробар мешаванд.

Бузургии кунчи дутарафа бо бузургии кунчи хаттии он муайян карда мешавад. Аз кунҷҳои тез, рост, кунд ва кушод иборат будани кунҷҳои хаттӣ нигоҳ карда, кунҷҳои дутарафа ҳам мувофиқан ба кунҷҳои дутарафаи тез, рост, кунд ва кушод ҷудо мешаванд. Дар расми 4 кунҷҳои дутарафа тасвир шудаанд.



Ду ҳамворию буранда фазои бутунро ба чор кунчи дутарафаи ба куллаи умумӣ соҳиб буда ҷудо мекунад (расми 5). Агар яке аз ин кунҷҳои дутарафа ба α баробар бошад, аз онҳо қиммати боз яктоаш ба α баробар мешавад. Ду қиммати боқимонда бошад, ба $180^\circ - \alpha$ баробар мешавад.

Дар байни кунҷҳои дутарафаи мазкур аз 90° хурдаш ҳам мешавад. Қиммати ин кунҷро ҳамчун кунчи байни ҳамвориҳои буранда мегирем.



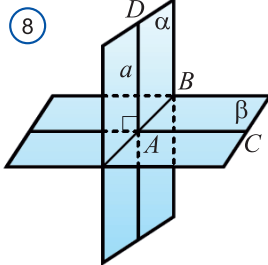
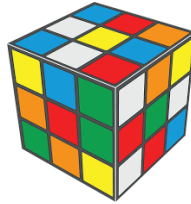
Агар яке аз кунҷҳои дутарафа рост, яъне ба 90° баробар бошад, сетои боқимондаш ҳам кунчи рост мешавад (расми 6). Ҳамвориҳои тахти кунчи рост буридашаванда ҳамвориҳои перпендикуляр номида мешавад.

Ба ҳамвориҳои перпендикуляр аз гирду атроф ба сифати мисол фарши хона ва деворҳо, деворҳои ба куллаи умуми соҳиббудаи хона, тарафҳои куби ба куллаи умуми соҳиббудаи Рубик ва сатҳи замин ва деворҳои хона ҳамчунин деворҳои ба якдигар пайваस्तшударо ба сифати мисол овардан мумкин (расми 7).

Перпендикулярӣ ҳамвориҳои α ва β монанди перпендикулярӣ хатҳои рост бо ёрии ишораи "⊥", ба тарзи $\alpha \perp \beta$ навишта мешавад.

Акнун дар бораи хосиятҳои ҳамвориҳои перпендикуляр истода мегузарем. Теоремаи поён аломати перпендикулярӣ ҳамвориҳо номида мешавад.

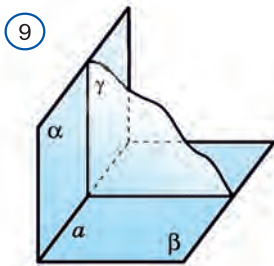
Теорема 5.11. Агар яке аз ҳамвориҳо аз хати рости ба дуюмиаш перпендикуляр гузарад, ин хел ҳамвориҳо байни якдигар перпендикуляр мешаванд.



Исбот: Агар ҳамвориҳои α ва β дода шавад, ҳамвори α аз хати рости a -и ба ҳамвори β перпендикуляр гузарад (расми 8). Нуқтаи буриши ҳамвори β ва хати рости a нуқтаи A бошад. Исбот мекунем, ки $\alpha \perp \beta$.

Ҳамвориҳои α ва β аз рӯи хати рости AB бурида шуда истодаанд. Он гоҳ, $AB \perp a$ мешавад, чунки мувофиқи шарт $b \perp a$. Хати рости AC , ки дар ҳамвори β меҳобад ва ба хати рости AB перпендикуляр аст мегузаронем. Дар натиҷа, кунҷи ҳосилшудаи DAC - кунҷи хаттии кунҷи дутарафа мешавад. Мувофиқи шарт, $a \perp b$. Он гоҳ, DAC кунҷи рост. Пас, $\alpha \perp \beta$. \square

Аз ин теорема натиҷаи зерин бармеояд.

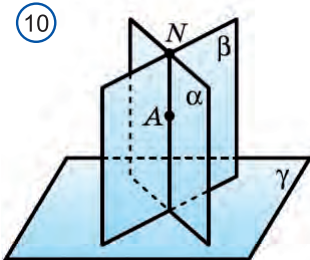


Натиҷа. Агар ҳамвориҳо ба хати буриши ду ҳамворӣ перпендикуляр бошад, он ба ҳар як ҳамворӣ перпендикуляр мешавад (расми 9).

Теоремаи ба теоремаи 4.11 баръакс ҳам чой дорад. Онро бе исбот мебиёрем.

Теоремаи 5.12. Агар аз нуқтаи яке аз ду ҳамвориҳои перпендикуляр хати рости перпендикуляр гузаронида шавад, ин хати рост дар ҳамвори β яқум меҳобад.

Натиҷа. Агар ду ҳамвори перпендикуляр ба ҳамвори сеюм перпендикуляр бошад, хати буриши онҳо ҳам ба он ҳамворӣ перпендикуляр мешавад (расми 10).



Масъалаи 1. Нуқтаи M миёнаҳои қуллаи дар асоси пирамидаи мунтазामी $QABC$ бошад (расми 11).

Исбот кунед, ки ҳамвори QCM ба ҳамвори асоси пирамида ABC перпендикуляр аст.

Исбот. Азбаски порчаи AB асоси секунҷаҳои баробарпахлӯи AQB ва ACB мебошад медианаҳои ин секунҷаҳо ба QM ва CM ҳам перпендикуляр мешавад. Ҳамчунин, порчаи AB ба ҳамвори QCM ҳам перпендикуляр

мешавад. Он гоҳ мувофиқи теоремаи 4.12, ҳамвориҳои ABC ба ҳамвориҳои QCM перпендикуляр мешавад.

Масъалаи 2. Кунчи AQB -и қуллаи пирамидаи мунтазаи $QABC$ ба a баробар. Кунчи дутарафаи дар қуллаи паҳлӯ будаи онро ёбед (расми 12).

Ҳалл. Агар нуқтаи N миёнаи тегаи AC , AK бошад, перпендикуляри аз нуқтаи A ба қуллаи BQ фурувардашуда бошад.

Аз баробарии секунҷаҳои ABQ ва CBQ , $CK \perp BQ$ мешавад. Бинобар ин, кунчи AKC кунчи хаттии кунчи дутарафаи BQ мешавад.

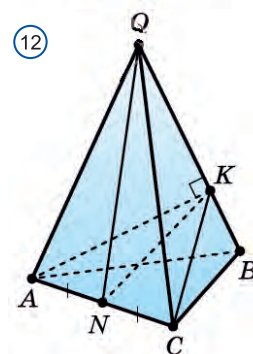
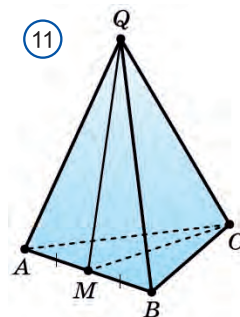
Аз секунҷаҳои росткунҷаи AKQ ва ANQ

$AK = a \sin \alpha$, $AN = aQ \sin(\alpha/2)$ буданаширо меёбем.

Аз секунҷаи росткунҷаи AKN бошад:

ба $\sin\left(\frac{\angle AKC}{2}\right) = \frac{AN}{AK} = \frac{1}{2\cos(\alpha/2)}$ сохиб мешавем.

Аз ин ҷо, $\angle AKC = 2 \arcsin \frac{1}{2\cos(\alpha/2)}$. \square



? Саволҳо ва машқҳо оиди мавзӯ

1. Кунчи дутарафаи гуфта чиро мегӯянд?
2. Чӣ хел кунҷро кунчи байни ҳамвориҳо мегӯянд?
3. Ҳамвориҳои таҳти кунчи рост буридашаванда чи хел номгӯ мешаванд?
4. Аломати перпендикулярӣ ҳамвориҳоро гӯед.
5. Хосиятҳои ҳамвориҳои перпендикулярро гӯед ва шарҳ диҳед.

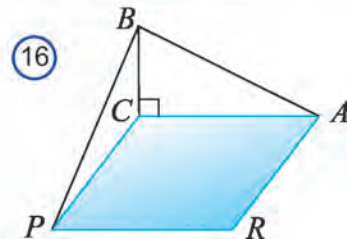
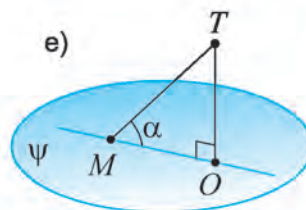
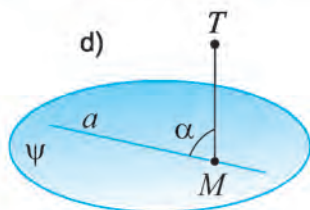
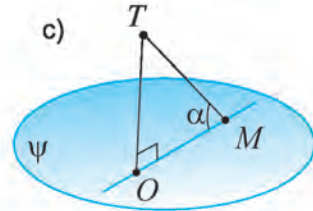
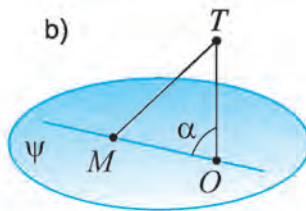
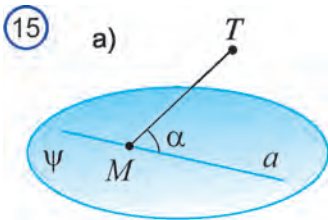
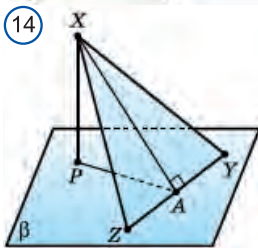
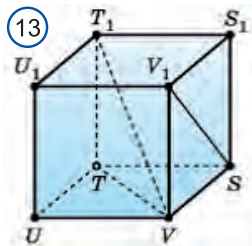
5.40. Дар а) параллелепипеди росткунҷаи $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$; ва дар б) призмаи рости $ABCA_1 B_1 C_1$ тарафҳои перпендикулярро муайян кунед ва кунҷҳои дутарафаи росташонро гӯед.

5.41. Дар куби $STUVS_1 T_1 U_1 V_1$ (расми 13) а) кунчи TVT_1 ; б) кунчи $T_1 ST$ кунчи хаттии кунчи дутарафаи $T_1 SVT$ мешавад? Қиммати кунчи дутарафаи $V_1 UTS$ -ро ёбед.

5.42. Дар ду кунчи дутарафаи як тарафашон умумӣ, тарафҳои боқимонда дар якҷоягӣ ҳамвориро ташкил мекунад. Исбот кунед, ки суммаи ин кунҷҳои дутарафа ба 180° баробар аст.

5.43. Тарафи YZ -и секунҷаи XYZ дар ҳамвориҳои β мехобад. Аз қуллаи X баландии XA ва ба ҳамвориҳои β перпендикуляри XP фуруварда шудааст (расми 14). Исбот кунед, ки кунчи XAP кунчи хаттии кунчи дутарафаи $XYZP$ мешавад.

5.44. Дар пирамидаи секунҷаи $ABCD$ қуллаи CD ба ҳамвориҳои ABC

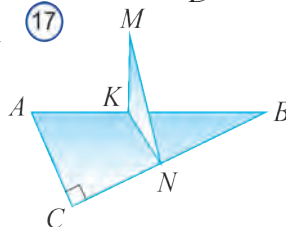
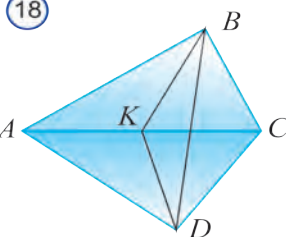


масофаи 15 см хобида маълум бошад, ин масофа то нуктаи дуюмӣ ёфта мешавад.

5.49. Ҳамвориҳои секунҷаи росткунҷаи ABC ($\angle C = 90^\circ$) ва квадрати $ACPR$ байни якдигар перпендикуляр (расми 15). Тарафи квадрат 6 см, гипотенузаи секунҷа 10 см. Дарозии порчаи BP -ро ёбед.

5.50. Порчаи MK ба ҳамвориҳои секунҷаи росткунҷаи ABC ($\angle C = 90^\circ$) перпендикуляр (расми 16). $KN \parallel AC$, $AK = KB$, $AC = 12$ см, $MK = 8$ см бошад, дарозии порчаи MN -ро ёбед.

5.51. Ҳамвориҳои секунҷаи баробарпахлӯи ABC ва ADC перпендикуляр (расми 17). AC асоси умумии онҳо. Порчаи BK медианаи секунҷаи ABC .



$BK = 8$ см, $DK = 15$ см бошад, дарозии порчаи BD –ро ёбед.

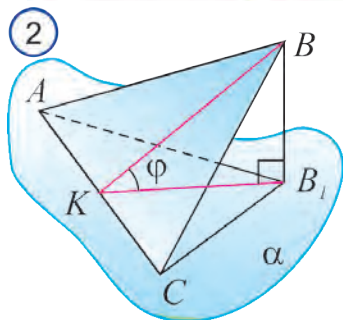
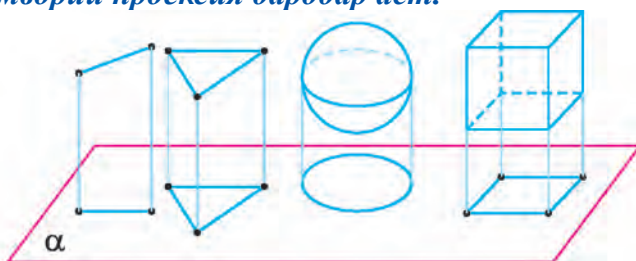
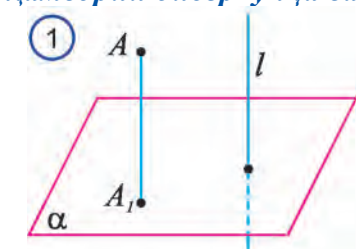
19 ПРОЕКЦИЯИ ОРТОГОНАЛӢ ДАР ФАЗО ВА ИСИФОДАИ ОН ДАР ТЕХНИКА

Агар самти проексия l ба ҳамворию проексиякунанда α перпендикуляр бошад, ин ҳел проексиякунӣ проексиякунӣ ортогоналӣ номида мешавад.

Шакли ҳангоми проексиякунӣ ортогоналӣ ҳосилшударо проексияи ортогоналии шакли додашуда, ё кӯтоҳақак проексияи он мегӯянд.

Ҳаммаи хосиятҳои проексиякунӣ параллелӣ дар проексиякунӣ ортогоналӣ ҳам ҷой дорад. Дар поён хосияте, ки фақат ба проексиякунӣ ортогоналӣ мансуб буда, муҳим аст исбот мекунем.

Теоремаи 5.15. *Масоҳати проексияи ортогоналии бисёркунҷа ба ҳамворӣ, ба ҳосили зарби масоҳати бисёркунҷа бар косинуси кунҷи байни ҳамворию бисёркунҷа ва ҳамворию проексия баробар аст.*



Исбот: 1. Аввал барои секунҷа ва ягон тарафи он проексияи ҳамвориро дида мебароем.

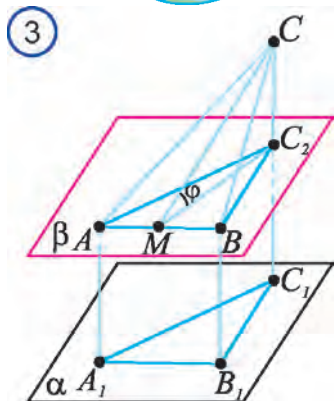
Агар, проексияи секунҷаи ABC дар ҳамворию α секунҷаи AB_1C бошад.

Баландии BK -и секунҷаи ABC –ро мефарорем. Мувофиқи теорема дар бораи се перпендикуляр, порчаи B_1K баландии секунҷаи KBB_1 мешавад.

Кунҷи BKB_1 аз кунҷи байни ҳамворию секунҷа ва ҳамворию проексия j иборат мешавад. Дар секунҷаи BKB_1 : $BK = KB \cos \varphi$.

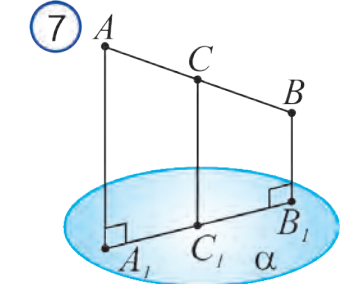
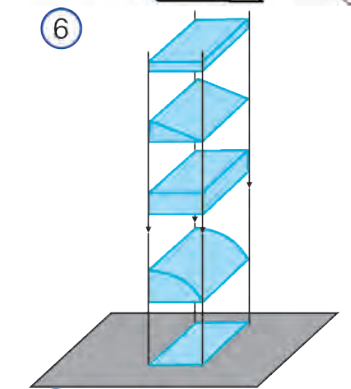
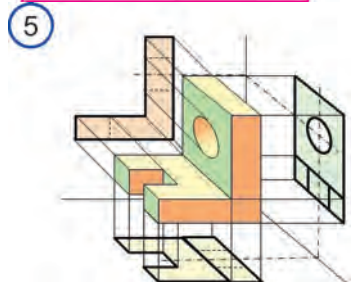
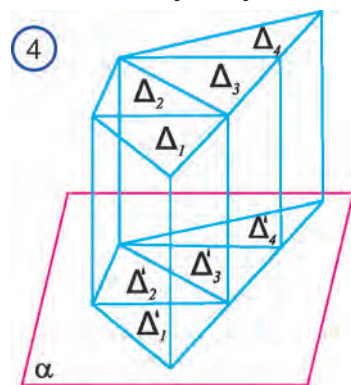
$$\text{Он гоҳ, } S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot KB, S_{AB_1C} = \frac{1}{2} AC \cdot KB_1.$$

Аз инҳо, $S_{AB_1C} = S_{ABC} \cdot \cos \varphi$ ро ҳосил мекунем. Дар ҳолати 1 теорема исбот шуд. 2. Ба ҷойи ҳамворию α ягон ҳамворию ба он параллел будаи β -ро гирифтани ҳам теорема ҷой дорад (расми 3). Ин аз хосияти проексиякунӣ параллелӣ исбот карда мешавад. 3. Акнун ба ҳолати умумӣ, ҳолати бисёркунҷа меоём (расми 4). Дар ин ҳолат теорема,



бо роҳи бо ёрии диагоналҳо бисёркунчаро ба секунҷаҳо тақсим кардан ба ҳолати махсуси дар боло дидашуда, исбот карда мешавад. \square

Аз проексияи ортогоналӣ дар нақшакашиҳои техникӣ дар лоихагардонии деталҳои гуногун истифода мебаранд. Нақшаҳои деталҳои гуногуни



машинаҳо ба якто, дуто ёки се то ҳамвориҳои байни якдигар перпендикуляр бо роҳи проексияи ортогоналӣ ҳосил карда мешавад (расми 5). Ин проексияҳо нисбати кадом самт проексия шуданашон проексияҳои вертикалӣ (рост), горизонталӣ ва фронталӣ номида мешаванд.

? Саволҳо ва масъалаҳои оиди мавзӯ

1. *Проексияи ортогоналӣ дуфта чиро меноманд?*
2. *Ҳосиятҳои проексияи ортогоналиро шумored.*
3. *Аз проексияи ортогоналӣ дар техника чӣ хел истифода мебаранд?*
4. *Ҳосияти ба як хати рост перпендикуляр будани ҳамвориҳо гӯед.*
5. *Теоремаи умумигардонидашудаи Пифагор дар бораи чист?*
6. *Оё духати рости ба ҳамвориҳои сеюм перпендикуляр байни ҳам параллел мешаванд?*
7. *Оё ҳамвориҳои ба ҳамвориҳои дуоум перпендикуляр ва хати рост байни ҳам параллел мешаванд?*
8. *Аз хати рости додашуда ба ҳамвориҳои додашуда чандто ҳамвориҳои перпендикуляр гузаронидан мумкин?*
9. *Ҳамвориҳои a ба ҳамвориҳои b перпендикуляр аст. Ҳар гуна хати росте, ки дар ҳамвориҳои a меҳобад, ба ҳамвориҳои b перпендикуляр мешавад?*
10. *Ҳамвориҳои дуоуми аз порчаи моили ҳамвориҳои якум гузаранда ба якумаш перпендикуляр мешавад?*
11. *Оё дар параллелепипеди росткунҷа тарафҳои буридашаванда байни якдигар перпендикуляр мешаванд?*

5.52. Оё проексияи ортогоналии трапетсия а) квадрат; б) порча; в) чоркунҷаи росткунҷа; д) параллелограмм; е) трапетсия шуданаш мумкин аст?

5.53. Ба расми 6 нигоҳ карда, шаклҳои геометрии проексияи ортогоналиаш чоркунҷаи росткунҷаро гӯед

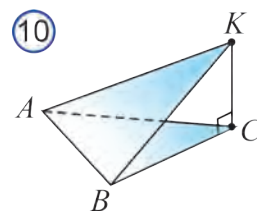
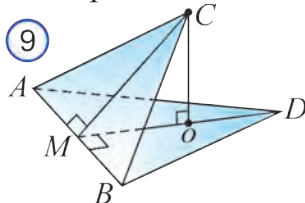
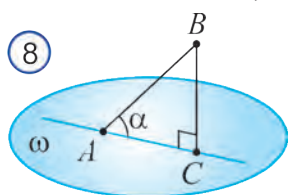
5.54. Порчаи $A_1 B_1$ проексияи ортогоналии порчаи AB дар ҳамвори α (расми 7). Агар $AB = 20$ см, $AC = 10$ см, $A_1 B_1 = 12$ см бошад, дарозии порчаи $B_1 C_1$ –ро ёбед.

5.55. Проексияи ортогоналии порчаи AB -и дарозиаш 5 см ба ҳамвори ω аз порчаи AC -и дарозиаш 3 см иборат аст (расми 8). Косинуси кунҷи моилии порчаи AB ба ҳамвори ω ёфта шавад.

5.56. Агар масофа аз хати рости AB то нуқтаи C (расми 9) нисбат ба масофа аз нуқтаи C то ҳамвори ABD ду маротиба калон бошад, кунҷи байни ҳамвориҳои ABC ва ABD –ро ёбед.

5.57. Масоҳати секунҷаи ABC ба 18 см² баробар. $KC \perp (ABC)$. Агар кунҷи байни ҳамвориҳои секунҷаҳои ABK ва ABC а) $a = 30^\circ$; б) $a = 45^\circ$; в) $a = 60^\circ$ бошад, масоҳати секунҷаи ABK –ро ёбед.

5.58. Кунҷи байни ҳамвориҳои секунҷаҳои ABC ва ABD ба 60° баробар. Агар $AB = 4\sqrt{3}$ бошад, дарозии CD -ро ёбед.



5.59. Проексияи ортогоналии секунҷаи масоҳаташ ба 48 см² баробар аз секунҷаи тарафҳояш 14 см, 16 см ва 6 см буда иборат аст. Кунҷи байни ҳамвори ин секунҷа ва ҳамвори проексия ёфта шавад.

5.60. Проексияи ортогоналии секунҷаи масоҳаташ ба 12 см² баробар аз секунҷаи тарафҳояш 13 см, 14 см ва 15 см буда иборат аст. Кунҷи байни ҳамвори ин секунҷа ва ҳамвори проексия ёфта шавад.

20 МАШҚИ АМАЛӢ ВА ТАТБИҚ

Татбиқҳо ва пайдо кардани компетенсияҳо

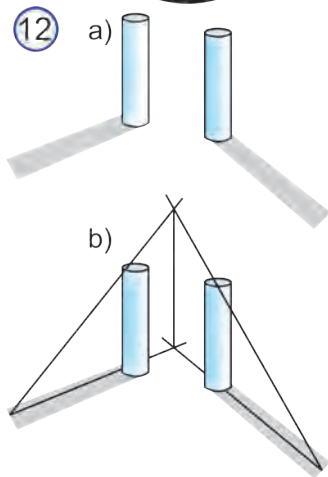
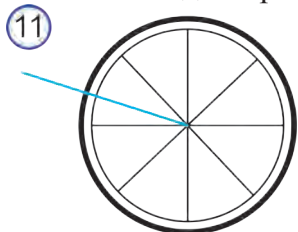
1. Ба фарш перпендикулярӣ хати пайвасти хонаи ду ҳамсоҷро чӣ тавр бо ёрии ченкуниҳо санҷидан мумкин?

2. Бо ёрии асбоби дарози ченкунӣ-рулетка рост будани сутунро чӣ хел санҷидан мумкин?

3. Перпендикулярӣ ҳамвори тири ғилдирак ва ҳамвори дар он чарх зада истодаро чӣ хел санҷидан мумкин?

4. Аз чӣ сабаб зимистон ғафсии яхҳои аз бом овезонро ба ҳисоб нагирифта, байни якдигар параллел гуфтан мумкин?

5. Хонанда кори амалӣ иҷро карда истодааст. Барои дониستاني нисбат ба Замин рост будани якчанд сутун фақат якто-яшро санҷид. Рост будани сутунҳои боқимондари ба таври зерин санҷид: \bar{y} баландии ҳамаи сутунҳоро, масофаҳои байни асосҳои поёнӣ ва қуллаҳои болоиро чен карда, қарор қабул кард. Оё \bar{y} ин корро дуруст иҷро кард?



6. Аз кадом сабаб дари хона хоҳ кушода бошад, хоҳ пӯшида ҳар доим нисбат ба фарш перпендикуляр мешавад?

7. Барои мисоли перпендикулярӣ хати рост ба ҳамворӣ, ҷойгиршавии ҳамворие, ки дар он симҳои ғилдирак мехобад ва тири ғилдиракро овардан мумкин (расми 11). Тир ба ҳар як сими ғилдирак перпендикуляр аст. Дар давоми ҳаракат симҳои ғилдирак дар ҳар як нуқтаи ҳамвории доираи аз порчаҳои буридашаванда иборат ҳосил мекунад. Агар тир горизонталӣ ҷой гирифта бошад, ғилдирак дар кадом ҳамворӣ чарх мезанад? Чаро?

Нишондод: ба тири ғилдирак перпендикуляр, ҳамвории перпендикуляр мешавад.

8. Машқи ба баландӣ чаҳидан иҷро шуда истодааст. Барои гузоштани ҷӯби монеа аз куби теғааш 25 м ва аз параллелепипеди росткунҷаи ченакҳояш 25x25x50 истифода бурда истодаанд. 1) машқи ба баландии 125 см; 2) 150 см; 3) 175 см чаҳиданро чӣ хел ташкил кардан мумкин аст?

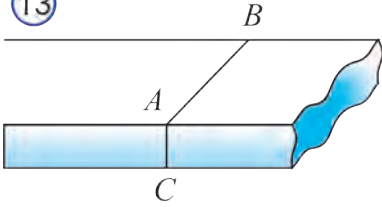
9. Дар расми 12 ду сутуни вертикалӣ ва сояҳои онҳо тасвир карда шудааст. Аз ин маълумот истифода бурда, нуқтаи ҷой гирифтаи манбаи равшани (ҷароғ) ва проексияи онро ба ҳамвории горизонтали ёбед ва ба саволҳои зерин ҷавоб диҳед. а) оё вертикал будани сутунҳо аҳамият дорад?

д) горизонтал будани ҳамвории фаромадани соя аҳамият дорад?

с) ё ҳамаи маълумоти дар расм додашуда муҳиманд?

Ҳалл: Дар расми 12 созиши лозима оварда шудаанд. Ҳангоми муайян кардани ҷойи манбаи равшани самти сутунҳо аҳамият надорад, лекин вертикал будани онҳо муҳим ҳисобида мешавад. Агар сутунҳо вертикалӣ ва соя ба ҳамвории горизонталӣ фурумада бошад, барои ҳал кардани масъала

13



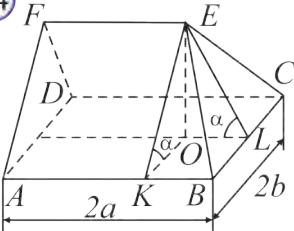
соия як сутуни дар расм буда ва самти соия аз сутуни дуюм фуромадаро донистан кифоя (расми-13.б).

10. Ба болои мизи доиравӣ дастархони шакли квадрат доштаи тарафаш ба a баробар андохта шудааст. Маркази доира бо маркази квадрат болоиҳам меафтанд. Куллаҳои дастархон нисбат ба миёнаҷои тарафҳои он ба фарш чӣ қадар наздик аст? Ҷавоб: $a(2-1)/2 = 0,207 a$.

11. Рост будани деворҳо бо ёрии шоқул (риштаи ба як нӯғаш санг баста) санҷида мешавад. Агар риштаи шоқул ба девор чӣ қадар часпида истад, ба қарори ҳамон қадар рост будани девор меоём. Ин қарор чӣ қадар дуруст? Ин усули санҷиш бо чӣ асоснок карда мешавад?

12. Барои сатҳи арракунӣ ба ҳамаи қуллаҳои тахтаи аррашуда перпендикуляр буданаширо таъмин кардан (расми 14) дар сатҳи тахта хатҳои арракуниро чӣ хел қайд кардан даркор?

14



13. Барои санҷидани перпендикулярӣ деворҳои хонаи ҳамсоя аз теоремаи Пифагор чӣ хел истифода бурдан мумкин аст?

14. Барои санҷидани рост будани сутун, аз ду нуқтаи бо асоси сутун дар як хати рост наҳобанда менигарем. Чунин усули санҷишро асоснок кунед.

Нишондод: Аз аломати перпендикулярӣ хати рост ва ҳамворӣ истифода баред.

15. Дар нуқтаи дастнорас сутуни баланд гузошта шудааст. Бо ёрии шоқул рост будани сутунро чӣ хел санҷидан мумкин?

Нишондод: Бо ягон хати рости вертикал дар як ҳамворӣ ҳобидани сутунро ва боз бо як хати рости вертикалӣ дар як ҳамворӣ (дигар) ҳобиданаширо нишон додан кифоя мешавад. Шоқулро чунон ба наздамон мегузорем, ки ҳангоми қуллаҳои болои он ва сутун ҳамчунин чашимамон дар як хати рост хоб рафтанд, риштаи шоқул ва сутун дар як хати рост хобад. Ин усул бо чунин асоснок карда мешавад: 1) бояд сутуни вертикал бо хати рости вертикалӣ дар як ҳамворӣ хобад; 2) агар ду хати рости параллел дар ду ҳамвории буранда хобанд, ин хатҳои рост ба хати буриши ҳамвориҳо ҳам параллел мешаванд.

16. Ду оинаи вертикал чойгирашуда дода шудааст. Нури горизоталии ба сатҳи яке аз ин оинаҳо параллел буда, аз оинаи дуюм ба сатҳи оинаи якум аз

рўйи хати рости перпендикуляр буда мегардад. Кунчи байни оинахоро ёбед.

Нишондод: *Аз қонуни бозгашти равшани истифода баред. Ҷавоб; 45°.*

17. Нури горизонталӣ аз ду оинаи вертикал ҷойгиршуда баргашта истодааст. Сараввал нур ба сатҳи оинаи якум параллел бошад, дар натиҷаи ду маротиба инъикос шудан ба ҳамвории оинаи дуюм параллел шуда мемонад. Кунчи байни оинахоро ёбед.

Ҷавоб: 60° .

18. Платформаи пӯлодии квадратшакл, ки ғафсиаш 5 м, масоҳаташ 4 м^2 аст, аз чор қуллааш бо сими троти горизонтал овехта шудааст. Дарозии ҳар як сими троти 2 м. Кунчи моилии сими тротиро нисбат ба платформа ёбед. Оё баки цилиндршакл, ки баландиаш 0,9 м, диаметри асосаш 0,6 м аст, ба ин платформа ҷойгир карда мешавад?

Ҷавоб: 45° , бакро ҷойгир карда мешавад.

19. Об ба асоси боми аз чор тарафаш ҷоришаванда ортогонал проексия карда шудааст. Искот кунед, ки проексияи қуллаҳои бом биссектрисаи кунчи асоси бом, ки шакли чоркунҷаи росткунҷа дорад, мешавад.

20. Барои хонае, ки асосаш аз чоркунҷаи росткунҷаи $ABCD$ иборат аст, боми борон аз чор тарафаш ҷоришаванда сохтан даркор (расми 14). $AB = 2a$ м, $BC = 2b$ м. Ҳамаи тарафҳои бом бо ҳамвории асос кунчи α -ро ташкил мекунад. Барои пӯшонидани ин бом чӣ қадар тунука даркор мешавад. Дар ин ҷо онро ба ҳисоб гиред, ки тунукаи ба миқдори k фоизи масоҳати сатҳи бом исроф мешавад. *Ҷавоб:* $4ab(1 + 0,01k) / \cos \alpha$.

21. Борон дар ҳавои бешамол "нишебӣ" борида истодааст. Бо ёрии порчаи фанерӣ шакли чоркунҷаи росткунҷа дошта моилии боронро нисбат ба ҳамвории горизонт чӣ хел муайян кардан мумкин аст? Нақшаи мансубро кашед.

Нишондод: *Порчаи фанерро чунон ҷойгир кардан даркор, ки ҳамвории он ба траекторияи ҳаракати чакраҳои борон ва ба ҳамвории муайянкардаи проексияи онҳо ба ҳамвории горизонталӣ тахминан перпендикуляр шавад. Ҳамин вақт, дар ҳамвории горизонталӣ чоркунҷаи росткунҷаи борон на-афтаанда ҳосил мешавад. Баъди ин дарозиҳои порчаҳои мансуб чен карда мешаванд ва тангенс кунчи байни онҳо ёфта мешавад.*

22. Болои кати бачагонаи масоҳаташ ба S_1 , дарозияш ба n баробар бударо бо ду болопӯши шакли чоркунҷаи росткунҷаи якхела пӯшонидан даркор. Масоҳати ҳар як парда ба S_2 , дарозияш бошад ба дарозии кат баробар аст. Канори болоии ҳар ду парда дар болои кат параллел ҷойгир шудааст ва ба сими дарозияш ба дарозии кат баробар маҳкам карда шудааст.

Аз кат дар кадом баланди чойгир шудани симро ёбед.

Масъаларо дар шартҳои адабии зерин ҳал кунед: $n = 1$ м 20 см, $S_1 = 6000$ см², $S_2 = 7800$ см².

Нақшаи мансубро кашед. Нишондод: $\sqrt{4S_2^2 - S_1^2} / 2n$.

Ҷавоб: 0,5 м.

23. Ба ҳонае, ки асосаш аз чоркунҷаи росткунҷаи $ABCD$ иборат аст, боме ки борон аз чор тарафаш чорӣ мешавад сохтан даркор (расми 14). $AB = 18$ м, $BC = 12$ м. Ҳамаи тарафҳои бом бо ҳамвори асос кунҷи 40° -а ташкил мекунад. Агар барои пӯшонидани 1 м² масоҳат 15 дона черепитса сарф шавад, барои пӯшонидани ин бом чанд дона черепитса лозим мешавад?

24. Бо ёрии қалами шашкунча китоби кушода тимсоли кунҷҳои байни хатҳои рост, байни хати рост ва ҳамворӣ ва байни ҳамвориҳоро нишон диҳед.

25. Аз боми дар расми 14 тасвиршудаи ба ду тири симметрия соҳиб дар кадом самт чорӣ шудани оби боронро муайян кунед.

26. Барои муайян кардани баландии манорае, ки ба назди асосаш рафта намешавад чӣ хел ченкуниҳоро амалӣ кардан лозим аст?

27. Барои ёфтани масофа то биное ки ба наздаш рафта намешавад, лекин баландиаш маълум аст, чӣ гуна ченкуниҳоро амалӣ кардан лозим аст?

28. Барои чӣ дар нисфирӯзи сояҳо нест мешаванд?

29. Ба болои дарахт набаромада баландии онро чӣ хел муайян кардан мумкин аст?

Ҷавобҳо ва нишондодҳо

4.5. а) 7 см; б) 30 см; **4.6.** б) 200 мм; **4.13.** 50 см; **4.14.** 40 мм; **4.21.** а + б; **4.22.** а) 400; б) 450; с) 900; **4.23.** а) 580; б) 470; **4.50.** 32 см; **4.51.** 6 см; **4.52.** 20 см; **5.11.** 1) 6,5 см; 2) 15 см; 3) $\sqrt{2a^2 - b^2 + d^2}$; 3) $\sqrt{2a^2 - c^2 + 2d^2}$; **5.12.** 2 м; **5.17.** 15 см ва 41 см; **5.20.** $BD = \sqrt{2a^2 + b^2 + c^2}$; $CD = \sqrt{a^2 + c^2}$; **5.21.** 3,9 м; **5.22.** 9 м; **5.23.** а) $\sqrt{2}/2$; б) $\sqrt{(5 + 3 \cos b)}/2$; **5.24.** 3 см; 7,5 см; **5.25.** 20 см; **5.34.** 3d; **5.37.** 45° ; **5.38.** $\arccos \sqrt{3}/3$; **5.44.** 90° ; **5.46.** 60° ;

M.A. Mirzaahmedov, Sh.N. Ismailov, A.Q. Amanov, B.Q. Haydarov

MATEMATIKA 10
ALGEBRA VA ANALIZ ASOSLARI
GEOMETRIYA
II QISM

О‘рта та’лим муассасаларининг 10-синфи о‘қувчилари uchun darslik
1- nashr
(*Tojik tilida*)

Тарчимон:	К. Ҳакимов
Муҳаррир:	А. Исмоилов
Муҳаррири техникӣ:	К. Мадияров
Саҳифабанди компютерӣ:	Ф. Қудратиллоев

Литсензияи Нашриёт АИ № 277. 15.07.2015
Ба чоп рухсат дода шуд 14.08.2017. Андозаи 70×100^{1/16}
Гарнитурани «TimesNewRoman» .
Љузъи чопӣ 9,0. Љузъи нашрӣ 9,0.
Адади нашр нусха
Макети оригиналӣ дар ҚММ «Extremum-press»
тайёр карда шуд. 100053, ш.Тошканд.
кўчаи Боғи шамол, 3. Тел: 234-44-05
Дар чопхонаи Хонаи эҷодии табъу нашри «О‘қитувчи»-и
Агентии матбуот ва ахбори Ўзбекистон. чоп шуд.
100206, ш.Тошканд, даҳаи Юнусобод,
кўчаи Янгишаҳр, хонаи 1.
Супориши № .