GEOMETRIYA

10

Umumiy o‘rta ta’lim maktablarining
10-sinfi uchun darslik

O‘zbekiston Respublikasi Xalq ta’limi
vazirligi nashrga tavsiya etgan

Yangi nashr

Toshkent – 2022

UO‘K 514(075.3)
KBK 22.151ya72
G 35

Tuzuvchilar:

Boxodir Xaydarov
Nargiza Tashtemirova
Isak Asrorov

Taqrizchilar:

Z. R. Babayeva – Sirdaryo viloyati Guliston shahridagi 11-umumiy o‘rta ta’lim maktabining matematika fani o‘qituvchisi.

M. X. Usmanov – Namangan viloyati xalq ta’limi boshqarmasi tasarrufidagi 3-IDUMI matematika fani o‘qituvchisi.

A. K. Alibekova – Toshkent shahri Shayxontohur tumanidagi 180-IDUM matematika fani o‘qituvchisi.

Geometriya 10-sinf [Matn]: darslik / B. Xaydarov, N. Tashtemirova, I. Asrorov − Toshkent: Respublika ta’lim markazi, 2022. − 192 b.

O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasi V. I. Romanovskiy nomidagi matematika instituti xulosasi asosida takomillashtirildi.

Original maket va dizayn konsepsiyasi
Respublika ta’lim markazi tomonidan ishlandi.

Respublika maqsadli kitob jamg‘armasi mablag‘lari hisobidan chop etildi.

UNICEFning O‘zbekistondagi vakolatxonasi bilan hamkorlikda tayyorlandi.

ISBN 978-9943-8453-2-9

SO'ZBOSHI

Aziz o'quvchilar! Siz geometriyaning bo'limi – stereometriya kursini o'rganishni boshlayapsiz. Stereometriya fazoviy geometrik shakllarning xossalarini o'rganishga bag'ishlangan. 10-sinfda stereometriya aksiomalari va ularning natijalari, fazodagi to'g'ri chiziqlar va tekisliklarning parallelligi va perpendikulyarligi bilan tanishasiz.

Keltirilgan nazariy materiallar imkon qadar sodda va ravon tilda ifoda etilgan. Barcha mavzu va tushunchalarning mohiyati turli hayotiy misollar orqali ochib berilgan. Har bir mavzudan so'ng berilgan savollar, isbotlashga, hisoblashga va yasashga doir ko'plab masala va misollar o'quvchini ijodiy fikrlashga undaydi, o'zlashtirilgan bilimlarni chuqurlashtirishga va mustahkamlab borishga yordam beradi. Darslik o'ziga xos dizayni va dars materialini ko'rgazmali qilib taqdim etishi bilan ajralib turadi. Unda keltirilgan rasm va chizmalar dars materiallarini yaxshiroq uqib olishga xizmat qiladi.

O'rganilgan geometrik tushunchalar va xossalar sizda hayotiy muammolarni hal qilish va amaliyotda qo'llash qobiliyatini rivojlantiradi. Stereometriya bo'yicha o'zlashtirilgan bilim va ko'nikmalar kundalik hayotda, ko'plab kasb egalari va mutaxassislar – me'morlar, quruvchilar, dizaynerlar, tokarlar va boshqalarning kasbiy faoliyatida zarur ekaniga amin bo'lasiz.

Barcha materiallar boblarga, boblar esa mavzularga bo'lingan. Har bir mavzuda nazariy materiallar va vazifalar mavjud. Nazariyani o'rganayotganda qalin harf bilan ajratilgan matnga alohida e'tibor bering. Bu eng muhim ta'rif va xossalardir. Muammolarni hal qilishda ularni tushunish, eslash va qo'llay bilish kerak. Mavzular matnida ba'zi muammolarni hal qilish va masalalarni yechish namunalarini ham topasiz.

Har bir mavzudan keyin berilgan savollar mavzu materiali qanday o'zlashtirilganini tekshirishga va uni takrorlashga yordam beradi. Har bir bo'lim oxirida nazorat savollari va test topshiriqlari berilgan bo'lib, ular yordamida bo'lim mavzulari qanday o'zlashtirilganini tekshirish mumkin. Darslikdagi savol va topshiriqlar uchta qiyinchilik darajasiga ega. Mavzu oxiridagi savollar va ba'zi doira (°) bilan belgilangan masalalar dastlabki qiyinchilik darajasida bo'lib, ular nazariy materialni yaxshi tushunganiga ishonchi komil bo'lmaganlar uchun tayyorgarlik mashqlari hisoblanadi. Hech qanday belgisizlari o'rtacha qiyinchilikdagi vazifalar va mashqlardir. Ularni hal qilishni o'rganib, yetarli darajadagi akademik yutuqlarni ishonchli tarzda namoyish eta olasiz. Yulduzcha (*) bilan yuqori murakkablikdagi vazifalar belgilangan. Agar siz ularni darhol hal qila olmasangiz, tashvishlanmang, lekin sabrli va qat'iyatli bo'ling. Qiyin vazifani hal qilish quvonchi siz uchun mukofot bo'ladi. Javoblardagi ko'rsatmalar ushbu vazifalarning ba'zilarini yechish yo'llarini topishga yordam beradi.

Fan, xususan, geometriyani o'qitishdan ko'zlangan muhim natija o'quvchilarning tegishli kompetensiyalar – bilim va ko'nikmalarga asoslangan ta'lim va hayotda muvaffaqiyatli harakat qilish malakalarini egallashlaridan iborat. Darslikda keltirilgan topshiriq va mashqlar ana shu maqsadni amalga oshirishga qaratilgan.

Mualliflar

DARSLIKDAN FOYDALANISH BO‘YICHA TAVSIYALAR

Darslikdan stereometriyani muvaffaqiyatli o‘rganish uchun quyidagilarga rioya etishni tavsiya qilamiz:

- *har bir fazoviy jismni o‘rganishni uning modelini yasashdan boshlash va ularning xossalarini shu modellar asosida o‘rganish;*
- *fazoviy jismlarni daftarda tasvirlashga alohida e’tibor qaratish;*
- *ko‘proq hayotiy, kundalik turmushdan olingan masalalarni yechish, ya’ni kompetensiyalarni shakllantirishga e’tibor berish;*
- *bora-bora rasmli masalalardan matnli masalalarga o‘tish;*
- *darsda turli predmetlar, ro‘zg‘or buyumlariga fazoviy jism modeli sifatida qarab, ularning xossalarini o‘rganishga doir masalalarni ko‘proq yechish;*
- *turli xossalar va formulalarning isbotidan ko‘ra ularning mohiyati va tatbiq etilishiga ko‘proq to‘xtalish.*

DARSLIKDA ISHLATILGAN BELGILAR VA ULARNING TALQINI:

– geometrik tushuncha ta’rifi.

– teorema tavsifi.

– aksioma tavsifi.

– mavzu bo‘yicha savollar.

– faollashtiruvchi mashg‘ulot.

– masala yechish namunasi.

– amaliy mashq va tatbiq.

– geometrik tadqiqot.

– tarixiy lavhalar.

– geometrik boshqotirmalar.

– multimedia ilovalari.

– elektron resurslar.

MUNDARIJA

I BOB
PLANIMETRIYANI TIZIMLI TAKRORLASH

II BOB
STEREOMETRIYAGA KIRISH

III BOB
FAZODA TO‘G‘RI CHIZIQ VA TEKISLIKLARNING PARALLELLIGI

IV BOB

FAZODA TO‘G‘RI CHIZIQ VA TEKISLIKLARNING PERPENDIKULYARLIGI

V BOB

TAKRORLASH

10-SINF “GEOMETRIYA” DARSLIGI UCHUN TA’LIMIY O‘YINLAR

10-SINF “GEOMETRIYA” DARSLIGI UCHUN VIDEODARSLAR

I BOB

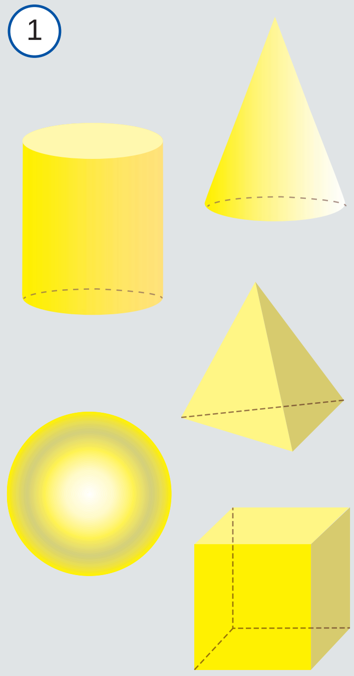
PLANIMETRIYANI TIZIMLI TAKRORLASH

Bu bobni o‘rganish natijasida siz 7–9-sinflarda geometriyaning planimetriya bo‘limi bo‘yicha shakllantirgan quyidagi bilim va ko‘nikmalaringizni mustahkamlab olasiz:

- geometriyaning mantiqiy (aksiomatik) tuzilishi bilan tanishasiz;
- planimetriyaning asosini tashkil qilgan aksiomalar tizimini bilib olasiz;
- geometriyani mustaqil fan sifatida asoslashga katta hissa qo‘shgan olimlar bilan tanishasiz;
- geometriya tarixiga oid ma’lumotlar bilan tanishasiz;
- geometrik masalalar yechishning analitik, sintetik, to‘g‘ri va teskari, algebraik, yuzlar, vektorlar, koordinatalar hamda geometrik almashtirishlar usullari bilan tanishasiz;
- yuqoridagi usullar asosida planimetriyaga doir masalalarni yechasiz.

1 GEOMETRIYANING MANTIQIY TUZILISHI

1



Geometriya real hayotdagi predmetlarning miqdoriy ko‘rsatkichlari va fazoviy shakllarini o‘rganadigan fandir. Narsalarning boshqa xossalarini boshqa fanlar o‘rganadi. Agar biror narsa o‘rganilayotganda uning faqat fazoviy shakli va o‘lchamlari hisobga olinsa, unda *geometrik shakl* deb ataluvchi abstrakt obyektga ega bo‘lamiz.

“Geometriya” yunoncha so‘z bo‘lib, “yer o‘lchash” degan ma’noni bildiradi. Maktabda o‘rganiladigan geometriya qadimgi yunon olimi Yevklid nomi bilan *Yevklid geometriyasi* deb ataladi. Geometriya ikki qismdan: *planimetriya va stereometriyadan* iborat. *Planimetriya* – tekislikdagi, *stereometriya* esa fazodagi geometrik shakllarning xossalarini o‘rganadi *(1-rasm)*.

Geometrik shakllarni bir-biridan farqlash uchun ularning xususiyatlari tavsiflanadi, ya’ni ularga *ta’rif* beriladi. Lekin hamma shakllarga ham ta’rif berib bo‘lmaydi. Ularning dastlabki bir nechtasini ta’rifsiz qabul qilishga majburmiz. Ularni ta’riflanmaydigan, *boshlang‘ich (asosiy) geometrik shakllar* deb olamiz.

Geometriyaning mantiqan qurilishi quyidagi tartibda amalga oshiriladi:

1. Avval asosiy (boshlang‘ich) geometrik shakllar ta’rifsiz qabul qilinadi.
2. Asosiy geometrik shakllarning asosiy xossalari isbotsiz qabul qilinadi.
3. Boshqa geometrik shakllar asosiy shakllar va ularning xossalariga tayanib ta’riflanadi hamda ularning xossalari ungacha ma’lum xossalarga tayanib isbotlanadi.

Fanning bunday tuzilishi *aksiomatik tuzilish* deb nomlanadi. *Aksioma* deb to‘g‘riligi isbotsiz qabul qilinadigan xossaga aytiladi.

Shu chog‘gacha biz o‘rgangan planimetriyaning asosiy shakllari nuqta, to‘g‘ri chiziq va tekislik edi. Ularni ta’rifsiz qabul qildik. Kesma, nur, uchburchak va boshqa geometrik shakllarga esa ta’rif berdik. Shuningdek, quyidagi xossalarni (tasdiqlarni) isbotsiz aksioma sifatida qabul qildik:

I. Tegishlilik aksiomalari guruhi:

1.1.Tekislikda qanday to‘g‘ri chiziq olinmasin, unda bu to‘g‘ri chiziqqa tegishli bo‘lgan nuqtalar ham, tegishli bo‘lmagan nuqtalar ham mavjud.

1.2. Har qanday ikki nuqtadan faqat bitta to‘g‘ri chiziq o‘tadi.

Geometriya asoslari misrliklarga miloddan avvalgi 3-ming yillik boshlarida ma’lum bo‘lgan. O‘sha davrlarda, piramidalar qurilishi qizg‘in pallada bo‘lganida, ular bu bilimlarni faol qo‘llaganlar. Olimlarning aniqlashicha, qadimgi misrlik muhandislar teng masofagagi 12 ta tugun bilan ajratilgan, uchta qoziqqa tortilgan arqon to‘g‘ri burchak hosil qilishini bilishgan. Ular, shuningdek, qishloq xo‘jaligi ekinlarini ekish uchun Nil tekisligining hududlarini belgilab, geometrik bilimlarni qo‘llashgan.

II. Tartib aksiomalari guruhi:

2.1. Bir to‘g‘ri chiziqda olingan istalgan uchta nuqtaning faqat bittasi qolgan ikkitasining orasida yotadi.

2.2. Har bir to‘g‘ri chiziq tekislikni ikki bo‘lakka – ikkita yarimtekislikka ajratadi.

III. O‘lchash aksiomalari guruhi:

3.1. Har qanday kesma noldan farqli tayin uzunlikka ega bo‘lib, u musbat son bilan ifodalanadi. Kesma uzunligi uning ixtiyoriy nuqtasi ajratgan bo‘laklari uzunliklarining yig‘indisiga teng.

3.2. Har qanday burchak tayin gradus o‘lchoviga ega bo‘lib, uning qiymati musbat son bilan ifodalanadi. Yoyiq burchakning gradus o‘lchovi 180° ga teng. Burchakning gradus o‘lchovi burchak tomonlari orasidan o‘tuvchi ixtiyoriy nur ajratgan burchaklar gradus o‘lchovlarining yig‘indisiga teng.

IV. Teng shaklni qo‘yish aksiomalari guruhi:

4.1.Ixtiyoriy nurga uning uchidan boshlab, berilgan kesmaga teng yagona kesmani qo‘yish mumkin.

4.2. Ixtiyoriy nurdan tayin yarimtekislikka berilgan, yoyiq bo‘lmagan burchakka teng yagona burchakni qo‘yish mumkin.

4.3. Har qanday uchburchak uchun unga teng uchburchak mavjud va uni nurdan tayin yarimtekislikka yagona tarzda qo‘yish mumkin.

V. Parallellik aksiomasi:

5.1. Tekislikda to‘g‘ri chiziqdan tashqarida olingan nuqtadan bu to‘g‘ri chiziqqa faqat bitta parallel to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin.

Biror tasdiqning to‘g‘riligini mantiqiy mulohazalar yordamida keltirib chiqarish *isbot* deb ataladi. To‘g‘riligi isbotlash yo‘li bilan asoslanadigan tasdiq esa *teorema* deb ataladi. Teorema odatda *shart* va *xulosa* qismlardan iborat bo‘ladi. Teoremaning birinchi – shart qismida nimalar berilgani bayon qilinadi. Ikkinchi – xulosa qismida esa nimani isbotlash lozimligi ifodalanadi.

Teoremani isbotlash – uning shartidan foydalanib bungacha isbotlangan va qabul qilingan xossalarga tayanib, mulohaza yuritib, xulosa qismida ifodalangan jumlaning to‘g‘riligini keltirib chiqarish. Teoremaning shart va xulosa qismlarini aniqlashtirib olish teoremani oydinlashtiradi, uni tushunish va isbotlash jarayonini yengillashtiradi.

Geometriya matematikaning muhim bo‘limidir. Uning kelib chiqishi bir necha ming yillarga borib taqaladi va birinchi navbatda hunarmandchilik, madaniyat, san’at, inson mehnati va atrofdagi dunyoni kuzatishning rivojlanishi bilan bog‘liq. Buni geometrik shakllarning nomlari ham tasdiqlaydi. Masalan, *trapetsiya* atamasining nomi yunoncha “trapesiya” (kursi) so‘zidan, *konus* yunoncha “konos” (qarag‘ay konusi) so‘zidan kelib chiqqan.

Yevklid (eramizdan avvalgi 356-300-yillar)

Geometriyani o'rgangan eng mashhur olimlardan biri Yevkliddir. Uning sharafiga ushbu fanning klassik sohasi "Yevklid geometriyasi" deb nomlanadi. Uning o'zi 465 ta teoremani isbotlagan. Hozirgacha bu rekord hech kim tomonidan yangilanmagan.

Yunon olimi *Aflotun* geometriyada ajoyib bir qonuniyatni payqagan: avval oʻrganilgan, toʻgʻriligi isbotlangan xossalardan mantiqiy fikrlash, mushohada yuritish orqali yangi xossalarni keltirib chiqarsa boʻlar ekan. Bunday ajoyib imkoniyatdan foydalanib qolgan xossalar teoremalar koʻrinishida ifodalanadi va aksiomalar hamda bu paytgacha toʻgʻriligi isbotlangan xossalarga asoslanib mantiqiy mulohazalar yuritish orqali isbotlanadi.

Mulohaza yuritish jarayonida isbotlanmagan xossalardan (garchi ularning toʻgʻriligi ochiq-oydin koʻrinib turgan boʻlsa ham) foydalanish taqiqlanadi.

Shunday qilib, geometriyani bir bino deb qaraydigan boʻlsak, boshlangʻich tushunchalar va aksiomalar uning poydevorini tashkil qiladi. Bu poydevor ustiga terilgan “gʻishtlar” taʼriflangan yangi tushunchalar va teoremalar koʻrinishida isbotlangan xossalardan iborat boʻladi.

Geometriyani mustaqil fan sifatida asoslashga qadimgi yunon olimlari katta hissa qoʻshishgan. Masalan, *Gippokrat* geometriya asoslari haqidagi dastlabki tasavvurlarini bayon etgan. Bu soha boʻyicha asosiy ishlarni buyuk yunon olimi Yevklid amalga oshirgan. Uning asosiy asari – “Negizlar” planimetriya, stereometriya va sonlar nazariyasining baʼzi masalalarini, shuningdek, algebra, nisbatlar umumiy nazariyasi, yuz va hajmlarni hisoblash usuli hamda limitlar nazariyasi elementlarini oʻz ichiga oladi. “Negizlar” da Yevklid qadimgi yunon matematikasining barcha yutuqlarini jamladi va uning rivoji uchun asos yaratdi.

“Negizlar” 13 kitobdan iborat boʻlib, bu asar eramizdan avvalgi V–IV asrlar yunon matematiklari asarlarining qayta ishlanmasidan iborat. Birinchi kitobda 23 ta taʼrif, 5 ta postulat va 9 ta aksioma berilgan. Asarda toʻgʻri toʻrtburchak, kvadrat va aylanaga toʻgʻri taʼriflar berilgan. Nuqta va chiziqqa quyidagicha taʼriflar berilgan: “Nuqta qismlarga ega boʻlmagan narsadir”; “Chiziq eni yoʻq uzunlikdir”.

“Negizlar”da 9 ta aksioma – isbotsiz qabul qilinadigan mulohazalar bayon etilgan. Geometrik yasashlarni amalga oshirish mumkinligini bayon etuvchi matematik mulohazalar (postulat)dan quyidagi beshtasi bayon qilingan:

I. Har qanday ikki nuqtadan faqat bitta toʻgʻri chiziq oʻtkazish mumkin.

II. To'g'ri chiziq kesmasini cheksiz davom ettirish mumkin.

III. Har qanday markazdan ixtiyoriy radiusda aylana yasash mumkin.

IV. Hamma to'g'ri burchaklar o'zaro teng.

V. Bir tekislikda yotgan ikki to'g'ri chiziqni uchinchi to'g'ri chiziq kesib, bir tomonli ichki burchaklar hosil qilsa va burchaklar ikki to'g'ri burchakdan kichik bo'lsa, mazkur to'g'ri chiziqlar davom ettirilganda ular yig'indisi ikki to'g'ri burchakdan kichik burchaklar tomonida kesishadi.

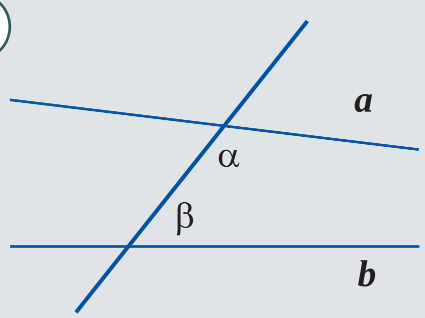
Mazkur asar ulkan va uzoq shuhratga ega bo'ldi. Ayniqsa, V postulat katta ilmiy munozaralarga sabab bo'ldi. Uni quyidagicha qayta tavsiflash mumkin: aytaylik, a va b to'g'ri chiziqlarni kesuvchi kesib o'tganda hosil bo'lgan ichki bir tomonli burchaklar α va β bo'lsin *(2-rasm)*. U holda, agar $\alpha + \beta < 180°$ bo'lsa, a va b to'g'ri chiziqlar shu burchaklar yotgan tomonda kesishadi.

Ko'rib turganingizdek, u yuqoridagi qisqa va ravshan tavsiflangan 4 ta postulatlarga o'xshamaydi. U ko'proq teoremaga o'xshab ketadi. Xuddi shu sabab uni postulat emas, teorema deb qarab, isbotlamoqchi bo'lganlar juda ko'p bo'lgan. Postulatni isbotlash yo'lida unga teng kuchli bir qator mulohazalar paydo bo'lgan. Masalan, ingliz matematigi *Yan Pleyfer*ning (1748–1819) *parallellik aksiomasi* shular jumlasidandir: tekislikda to'g'ri chiziqdan tashqarida olingan nuqtadan bu to'g'ri chiziqqa faqat bitta parallel to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin.

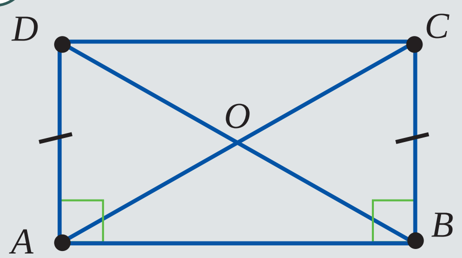
Matematik, shoir, astronom va faylasuf *Umar Xayyom* ham bu masala bilan shug'ullangan. Xayyom "Yevklid kitobining kirish qismidagi qiyinchiliklarga sharhlar" nomli asarida V postulatga to'xtalgan. U Yevklidning postulati teorema ekanini isbotlash uchun pastki asosidagi ikki burchagi to'g'ri va yon tomonlari teng bo'lgan to'rtburchakni qaragan *(3-rasm)*. Bu to'rtburchakning pastki ikki burchagi to'g'ri bo'lsa, yuqoridagi ikki burchagi ham to'g'ri bo'lishi lozim degan xulosaga kelgan. Umar Xayyom: "Bitta to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lgan ikki to'g'ri chiziq to'g'ri chiziqning ikkala tomonida ham kesisha olmaydi-ku", – deydi. Bu bilan Umar Xayyom V postulat masalasiga oydinlik kiritishiga bir qadam qolgan. Umar Xayyomning bu ishlaridan bexabar italiyalik matematik J. Sakkeri (1667–1733) ham V postulat bilan shug'ullanib, yuqoridagi to'rtburchakka murojaat qilgan. Geometriya asoslariga

Umar Xayyom (1048–1131)

2



3



N. I. Lobachevskiy (1792–1856)

Miloddan avvalgi V asrda geometriyaning rivojlanishida hal qiluvchi burilish yuz bergan. U Milet shahrida tug'ilib, ijod qilgan Fales nomi bilan bog'liq. Asli savdogar bo'lgan Fales bo'sh vaqtlarida matematika bilan shug'ullangan va matematika tarixidagi eng katta kashfiyotni amalga oshirgan: u ko'plab geometrik qonuniyatlarni tajriba bilan emas, balki fikrlash (isbot) bilan ham olish mumkinligini aniqladi. U shunga asoslanib, qator teoremalarni isbotlagan. Miloddan avvalgi III asrga kelib geometriya o'z aksiomalari (dastlabki xossalari) ga ega bo'lgan va boshqa barcha xossalar (teoremalar) isbot yordamida o'rnatiladigan fanga aylangan. Falesning fikriga ko'ra, Yevdoks, Yevklid va Arximed geometriyaning rivojlanishiga katta hissa qo'shgan.

bu to'g'ri to'rtburchak *Xayyom-Sakkeri to'rtburchagi* nomi bilan kirgan.

Bu muammoni rus matematigi *Nikolay Ivanovich Lobachevskiy* (1792–1856) hal qildi va noyevklid geometriyasini yaratdi. Lobachevskiy birinchi marta Yevklidning V postulati geometriyaning boshqa aksiomalariga bog'liq emasligini isbotladi. Bu geometriya Yevklid geometriyasidan tamoman farq qilar edi. Lekin u mantiqiy qarama-qarshilikka (ziddiyat) duch kelishi lozim edi, chunki ikkita geometriyaning bir vaqtda mavjud bo'lishi mumkin emas edi. Shunga qaramay, Lobachevskiy yangi natijalar keltirib chiqaraverdi, ular mantiqiy qarama-qarshiliklarga uchramadi. Yangi geometriya va Yevklid geometriyasida birinchi to'rtta guruh aksiomalar ustma-ust tushadi. Bu aksiomalar guruhlari va ularning natijalari *absolyut geometriya* deb atala boshladi.

Lekin noyevklid (Lobachevskiy) geometriyasi Yevklid geometriyasidan jiddiy farq qiladi. Masalan, Lobachevskiy geometriyasida uchburchak ichki burchaklarining yig'indisi π dan kichik, unda o'xshash yoki teng bo'lmagan uchburchaklar mavjud emas; berilgan to'g'ri chiziqdan bir xil uzoqlashgan nuqtalar to'plami to'g'ri chiziq emas, balki egri chiziq hisoblanadi va hokazo.

Noyevklid geometriyasini yaratishga venger matematigi *Yanosh Boyyai* (1802–1860) va nemis matematigi *Karl Fridrix Gauss* (1777–1855) katta hissa qo'shdi. Shuningdek, italyan matematigi *Eujenio Beltrami* (1835–1900) va nemis matematigi *Bernhard Riman* (1826–1866) yangi geometriya tavsifi bo'yicha katta ishlar qildi.

Yevklid boshlab bergan aksiomatika ma'lum ma'noda nemis matematigi *David Hilbert* (1862–1943) va rus matematigi *Veniamin Fyodorovich Kagan* (1859–1953) ishlarida oxiriga yetkazildi.

Mavzuga doir savol va topshiriqlar

1. *Geometriya aksiomalari sistemasini bayon etgan Yevklid haqida nimalarni bilasiz?*
2. *Yevklidning "Negizlar" asari haqida gapirib bering.*
3. *Ta'rif nima? Tekislikda qaysi shakllar asosiy (boshlang'ich) shakllar sifatida ta'rifsiz qabul qilingan?*
4. *Teorema va aksioma bir-biridan nimasi bilan farq qiladi?*
5. *Planimetriya aksiomalarini sanang va sharhlang.*
6. *Geometriya fani qanday tuzilgan?*
7. *Yevklidning V postulati nima haqida va uni nima uchun isbotlashga uringanlar?*
8. *V postulatni isbotlashga uringan olimlar va ularning ishlari haqida gapirib bering.*
9. *Lobachevskiy yangi geometriyaning yaratilishiga qanday hissa qo'shgan?*
10. *Noyevklid geometriyasini yaratgan olimlar va ularning ishlari haqida gapirib bering.*

Amaliy mashq va tatbiqlar

1.1. Maktab geometriya kursida quyidagi geometrik shakllarning qaysilari ta'rifsiz qabul qilingan (asosiy) va qaysilariga ta'rif berilgan?

a) nuqta b) burchak c) tekislik
d) kesma e) nur f) to'g'ri chiziq
g) uchburchak h) o'tkir burchak

1.2. Maktab geometriya kursida geometrik shakllarning quyidagi xossalaridan qaysilari aksioma (ya'ni isbotsiz qabul qilingan) va qaysilari teorema (ya'ni ularning to'g'riligi isbotlab ko'rsatilishi shart) sifatida keltirilgan?

a) Har qanday ikki nuqtadan faqat bitta to'g'ri chiziq o'tadi.

b) Qo'shni burchaklar yig'indisi 180º ga teng.

c) Uchburchak ichki burchaklari yig'indisi 180º ga teng.

d) Parallelogrammning diagonallari kesishish nuqtasida teng ikkiga bo'linadi.

e) Bir to'g'ri chiziqda olingan istalgan uchta nuqtaning faqat bittasi qolgan ikkitasining orasida yotadi.

f) Tekislikda to'g'ri chiziqdan tashqarida olingan nuqtadan bu to'g'ri chiziqqa faqat bitta parallel to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin.

1.3. Quyidagi jumlalarni o'qing. Jumla to'g'ri bo'lsa, "+", noto'g'ri bo'lsa, "–" belgisini yonidagi katakka yozing.

1	Planimetriya tekislikdagi, stereometriya esa fazodagi geometrik shakllarning xossalarini oʻrganadi.	
2	Boshlangʻich (asosiy) geometrik shakllar taʼrifsiz qabul qilinadi.	
3	Tekislikda toʻgʻri chiziqdan tashqarida olingan nuqtadan bu toʻgʻri chiziqqa istalgancha parallel toʻgʻri chiziq oʻtkazish mumkin.	
4	Yevklid oʻzining “Negizlar” asarida geometriyaga oid barcha yutuqlarini jamlab, uning rivojiga ulkan hissa qoʻshgan.	

1.4. Geometriya fani rivojiga kim qanday hissa qoʻshgan? Quyidagi jadvalning birinchi ustunida keltirilgan olimlar nomlariga ikkinchi ustundagi taʼriflardan mosini tanlab, qoʻying.

Umar Xayyom	Noyevklid geometriyasini yaratgan.
N. I. Lobachevskiy	Yevklidning V postulatiga aniqlik kiritish boʻyicha tadqiqotlar olib borgan.
Bernhard Riman	Geometriyani fan sifatida tavsiflagan.
Yevklid	Noyevklid geometriyasini tavsiflashda katta ishlar qilgan.

1.5. Quyidagi tasdiqlarning qaysi birini V postulat sifatida Yevklid tavsiflagan? Ularning qaysilari bu postulatga teng kuchli hisoblanadi?

A. Bir tekislikda yotgan ikki toʻgʻri chiziqni uchinchi toʻgʻri chiziq kesib, bir tomonli ichki burchaklar hosil qilsa va burchaklar yigʻindisi ikki toʻgʻri burchakdan kichik boʻlsa, mazkur toʻgʻri chiziqlar davom ettirilganda, ular yigʻindisi ikki toʻgʻri burchakdan kichik burchaklar tomonida kesishadi.

B. a va b toʻgʻri chiziqlarni kesuvchi kesib oʻtganda hosil boʻlgan ichki bir tomonli α va β burchaklar uchun $\alpha + \beta < 180^0$ boʻlsa, u holda berilgan toʻgʻri chiziqlar shu burchaklar yotgan tomonda kesishadi.

C. Tekislikda toʻgʻri chiziqdan tashqarida olingan nuqtadan bu toʻgʻri chiziqqa faqat bitta parallel toʻgʻri chiziq oʻtkazish mumkin.

D. Har qanday ikki nuqtadan faqat bitta toʻgʻri chiziq oʻtkazish mumkin.

1.6*. “Xayyom-Sakkeri toʻrtburchagi”, yaʼni pastki asosidagi ikki burchagi toʻgʻri va yon tomonlari teng boʻlgan toʻrtburchak *(3-rasm)* berilgan. Bu toʻrtburchakning yuqoridagi ikki burchagi ham toʻgʻri boʻlishini parallellik aksiomasidan foydalanmasdan isbotlashga urinib koʻring. Buning iloji bormi? Nega?

2 GEOMETRIK MASALALAR VA ULARNI YECHISH USULLARI

Yuqorida ta’kidlaganimizdek, geometriyaning eng ajoyib xususiyati bu avval o‘rganilgan, to‘g‘riligi isbotlangan xossalardan mantiqiy fikrlash, mushohada yuritish orqali yangi xossalarni keltirib chiqarish mumkinligidir. Bunday ajoyib imkoniyatdan foydalanib boshqa xossalar teoremalar yoki masalalar ko‘rinishida ifodalangan va aksiomalar hamda shu paytgacha to‘g‘riligi isbotlangan xossalarga asoslanib mantiqiy mulohazalar yuritish orqali isbotlangan. Shu zaylda matematik yoki geometrik masalalar vujudga kelgan.

Matematik masalada nimalardir (shartlar) berilgan bo‘ladi. Ulardan foydalanib nimanidir topish (hisoblash) yoki isbotlash, yoki yasash talab qilinadi. Qo‘yilgan talabni bajarish masalani yechishni bildiradi.

Geometrik masalalar qo‘yilgan talabga ko‘ra hisoblashga, isbotlashga, tadqiq qilishga va yasashga doir masalalarga bo‘linadi.

Matematik masalani yechish uchun quruq nazariyani bilish yetarli emas. Masala yechish ko‘nikmasiga va tajribasiga ham ega bo‘lish talab qilinadi. Bunday ko‘nikmaga sodda masalalardan boshlash va borgan sari murakkabroq masalalarni yechish orqali erishiladi. Shuningdek, masalalarni yechishning turli xil usullari bor bo‘lib, ularni faqat ko‘p masala yechish orqali o‘zlashtirish mumkin. Har bir usul muayyan turkumga tegishli masalalarni yechish uchun qo‘llanadi. Qancha ko‘p usul o‘zlashtirilsa, shuncha masala yechish ko‘nikmasi shakllanadi.

Quyida geometrik masalalarni yechishning ba’zi muhim usullari ustida to‘xtalamiz.

Masala yechish usullari tuzilishiga ko‘ra sintetik, analitik, teskarisidan faraz qilish va hokazo turlarga bo‘linadi. Matematik apparatning qo‘llanishiga ko‘ra esa algebraik, vektorli, koordinatali, yuzlar usuli, o‘xshashlik usuli, geometrik almashtirishlar kabi turlarga bo‘linadi.

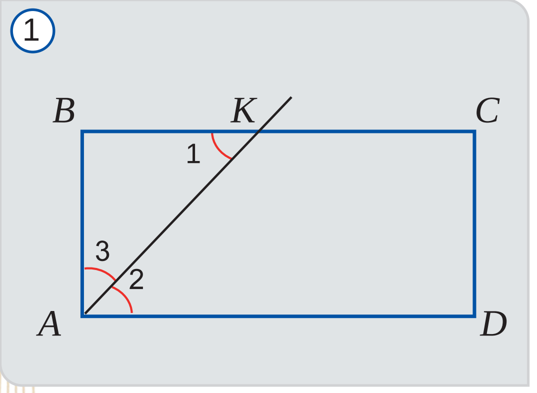
Sintetik usulda masala shartida berilganlardan foydalanib mulohaza yuritish orqali mantiqiy fikrlar zanjiri hosil qilinadi. Mulohazalar zanjirining eng oxirgi bo‘lagi masala talabi bilan ustma-ust tushguncha davom ettiriladi.

1-misol. To‘g‘ri to‘rtburchak burchagining bissektrisasi uning tomonini 7 cm va 9 cm uzunlikdagi kesmalarga bo‘ladi *(1-rasm).* To‘g‘ri to‘rtburchak perimetrini toping.

Yechish. Aytaylik $ABCD$ – to‘g‘ri to‘rtburchak, AK

Aksiomatik qurilish jihatidan har xil geometriyalar mavjud va ularning hammasida ham uchburchak ichki burchaklarining yig‘indisi 180° ga teng emas. Lobachevskiy geometriyasida uchburchak ichki burchaklarining yig‘indisi 180° dan kichik, Riman geometriyasida esa 180° dan katta.

bissektrisa, $K \in BC$, $BK = 7$ cm, $KC = 9$ cm (yoki $BK = 9$ cm, $KC = 7$ cm) bo'lsin.



1. $BC \parallel AD$ va AK kesuvchi bo'lgani uchun:

$$\angle 1 = \angle 2 \qquad (1)$$

bo'ladi, chunki bu burchaklar ichki almashinuvchi burchaklardir.

2. AK – bissektrisa: $\angle 2 = \angle 3$ (2)

3. Unda (1) va (2) ga ko'ra, $\angle 1 = \angle 3$;

4. U holda ABK teng yonli uchburchak va $AB = BK$

5. Bu natijadan foydalanib hisoblashlarni amalga oshiramiz:

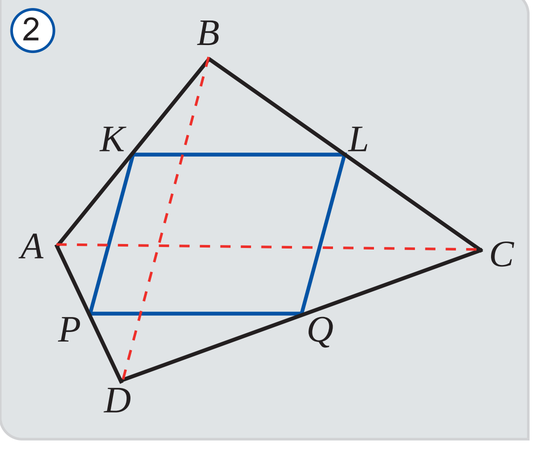
1-holda: $AB = BK = 7$ cm.

$P = 2\cdot(AB + BC) = 2\cdot(7 + 16) = 46$ (cm).

2-holda: $AB = BK = 9$ cm.

$P = 2\cdot(AB + BC) = 2\cdot(9 + 16) = 50$ (cm).

Bu masala tayanch masalalar qatoriga kiradi, chunki ko'pgina masalalar xuddi shu g'oya atrofida quriladi. Parallelogramm va trapetsiya burchagining bissektrisasi bu shakllar tekisligidan teng yonli uchburchak kesib oladi. Bunday tayanch faktlarni doim yodda tutish kerak. Ular boshqa masalalarni yechayotganda juda qo'l keladi.



Analitik usulda teorema (masala)ning xulosa qismidan kelib chiqib, oldindan ma'lum tasdiqlardan foydalanib mulohaza yuritish orqali mantiqiy fikrlar zanjiri hosil qilinadi. Mulohazalar zanjirining eng oxirgi bo'lagi masala shartining natijasi ekanini aniqlaguncha davom ettiriladi.

2-misol. Ixtiyoriy to'rtburchak tomonlarining o'rtalari parallelogrammning uchlari bo'lishini isbotlang.

Isbot. Aytaylik, $ABCD$ – to'rtburchak *(2-rasm)*, $AK = KB$, $BL = LC$, $CQ = QD$, $AP = PD$ bo'lsin.

To'rtburchakning AC va BD diagonallarini o'tkazamiz:

1. $\triangle ABC$ da KL – o'rta chiziq: $KL \parallel AC$ (1).
2. $\triangle ADC$ da PQ – o'rta chiziq: $AC \parallel PQ$ (2).
3. (1) va (2) dan: $KL \parallel PQ$ (3).
4. Yuqoridagiga o'xshash: $KP \parallel LQ$ (4).
5. (3) va (4) dan: $KLQP$ – parallelogramm.

Yuqorida ko'rilgan sintetik va analitik usullar *to'g'ri usullar* deb ham ataladi. Masalani to'g'ri usullar bilan yechayotganda avval masala mazmuni tahlil qilinadi. Tahlil natijasiga ko'ra usul tanlanadi. Shundan so'ng rasm ko'rinishida masalani yechish modeli (chizmasi) tuziladi va chizma ustida mulohaza yuritiladi. Shu tariqa mulohazalar yuritib, masalaning shartidan uning xulosa qismiga qarab borilaveradi.

Masala yechishning teskari usuli ham mavjud. U bilan ko'p marta duch kelganmiz. U *teskarisini faraz qilib isbotlash usuli* deb ataladi. Bu usulni qo'llash algoritmini keltiramiz.

Teskarisini faraz qilib isbotlash usulini qo'llash algoritmi

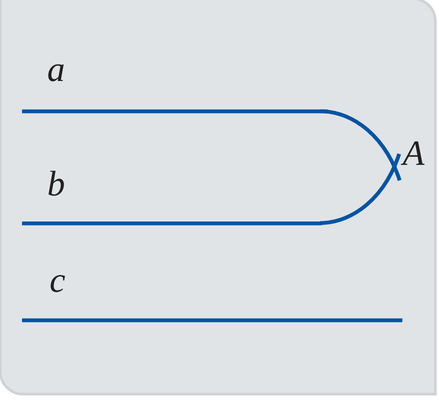
Teorema (to'g'ri tasdiq)	***Agar A o'rinli bo'lsa, B o'rinli bo'ladi.*** (A va B qandaydir fikrlar)
Isbot.	
Teskarisini faraz qilamiz:	Teoremada keltirilgan tasdiqning teskarisini faraz qilamiz, ya'ni teoremaning sharti bajarilsin-u, lekin xulosasi o'rinli bo'lmasin: ***Agar A o'rinli bo'lsa, B o'rinli bo'lmaydi.***
Mulohaza yuritamiz:	To'g'riligi oldin isbotlangan teorema yoki qabul qilingan aksiomalarga tayanib mantiqiy mulohaza yuritamiz.
Ziddiyatga kelamiz:	To'g'riligi oldin isbotlangan teorema yoki qabul qilingan aksiomalarning biriga zid bo'lgan tasdiqqa duch kelib qolamiz.
Xulosa chiqaramiz:	Demak, farazimiz noto'g'ri, ya'ni berilgan teorema to'g'ri ekan.
Teorema isbotlandi.	

3-misol. Agar ikki to'g'ri chiziqning har biri uchinchi to'g'ri chiziqqa parallel bo'lsa, ular o'zaro parallel bo'ladi.

Aytaylik, a va b to'g'ri chiziqlar berilgan bo'lib, ularning har biri uchinchi – c to'g'ri chiziqqa parallel bo'lsin. Teoremani teskarisini faraz qilish usuli bilan isbotlaymiz.

Isbot. Teskarisini faraz qilamiz: a va b to'g'ri chiziqning har biri uchinchi – c to'g'ri chiziqqa parallel bo'lsin-u, ular o'zaro parallel bo'lmasin, ya'ni biror A nuqtada kesishsin (*3-rasmga qarang*).

3



Unda A nuqtadan c to'g'ri chiziqqa ikkita – a va b parallel to'g'ri chiziqlar o'tmoqda. Bu parallellik aksiomasiga zid. Ziddiyat farazimizning noto'g'ri ekanini ko'rsatadi. Ya'ni a va b to'g'ri chiziqning har biri uchinchi – c to'g'ri chiziqqa parallel bo'lsa, ular o'zaro parallel bo'ladi.

Teorema isbotlandi.

Mazkur usul quyidagi mantiq qonuniga asoslangan: bir-biriga zid ikki tasdiqning faqat bittasi rost, ikkinchisi esa yolg'on bo'ladi, uchinchi holat bo'lishi mumkin emas.

Endi geometrik masalalarni yechishning boshqa usullariga to'xtalamiz.

Yevklid geometriyasida berilgan to‘g‘ri chiziqda yotmaydigan har qanday nuqta orqali faqat bitta to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin. Ammo Lobachevskiyning geometriyasida kamida ikkitasini o‘tkazish mumkin.

Algebraik usul

Geometrik masalani algebraik usul bilan yechayotganda quyidagi algoritm asosida ish ko‘rish maqsadga muvofiq bo‘ladi:

1) masala mazmunini tahlil qilish va uning chizma modelini qurish;

2) noma’lumni harflar bilan belgilash;

3) masala shartini ifodalovchi tenglama yoki tenglamalar sistemasini tuzish;

4) tuzilgan tenglama yoki tenglamalar sistemasini yechish;

5) topilgan yechimni tahlil qilish;

6) javobni yozish.

4-misol. To‘g‘ri burchakli uchburchakning perimetri 36 *cm* ga teng. Gipotenuzaning katetga nisbati 5 : 3. Uchburchak tomonlarini toping.

Aytaylik, $\triangle ABC$ berilgan bo‘lib, unda $\angle C = 90°$, $P = 36$ *cm*, $AB : AC = 5 : 3$ bo‘lsin.

Yechish. Proporsionallik koeffitsiyentini k bilan belgilaymiz.

Unda: $AB = 5k$, $AC = 3k$.

Pifagor teoremasiga ko‘ra: $AB^2 = AC^2 + BC^2$ yoki $25k^2 = 9k^2 + BC^2$.

Bundan $BC = \sqrt{25k^2 - 9k^2} = 4k$.

Shartga ko‘ra:

$P = 36$ *cm*; $AB + AC + BC + P$; $5k + 3k + 4k = 36$; $k = 3$;
$AB = 5k = 15$ (*cm*), $AC = 3k = 9$ (*cm*), $BC = 4k = 12$ (*cm*).

Javob: 15 *cm*, 9 *cm*, 12 *cm*.

Yuzlar usuli

Ba’zi geometrik masalalarni yechishda yuzlarni hisoblash formulalaridan foydalanish kutilgan natijani tezda beradi. Bu holatda topish talab qilingan noma’lum, masaladagi yordamchi shakllarning yuzlarini tenglashtirish natijasida hosil qilingan tenglamadan topiladi. Buni quyidagi misolda namoyish qilamiz.

5-misol. Uchburchakning tomonlari 13 *cm*, 14 *cm* va 15 *cm*. Uzunligi 14 ga teng tomonga tushirilgan balandlikni toping.

Yechish. Aytaylik, $\triangle ABC$ berilgan bo‘lib, unda $a < b$ va $b < c$, ya’ni $a = 13$ *cm*, $b = 14$ *cm*, $c = 15$ *cm* hamda h_b – izlanayotgan balandlik bo‘lsin.

Geron formulasiga ko‘ra: $S_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 3 \cdot 7 \cdot 4 = 84$ (cm^2)

Boshqa formula bo‘yicha: $S_\Delta = \frac{1}{2} b h_b$ ga egamiz.

Unda $\frac{1}{2}bh_b = 84$ yoki $h_b = \frac{84}{2b} = \frac{84}{2 \cdot 14} = 12$,

$h_b = 12$ (cm).

Javob: 12 cm.

Vektorlar usuli

Geometrik masalani vektorlar usuli bilan yechish uchun quyidagi algoritm asosida ish ko‘rish maqsadga muvofiq bo‘ladi.

1) Masalani vektorlar tiliga o‘girish, ya’ni masaladagi ba’zi kattaliklarga vektor sifatida qarab, ularga doir vektorli tenglamalar tuzish;

2) Vektorlarning ma’lum xossalaridan foydalanib vektorli tenglamalarning shaklini almashtirish va noma’lumni topish;

3) Vektorlar tilidan geometriya tiliga qaytish;

4) Javobni yozish.

Vektor usuli bilan quyidagi geometrik masalalarni yechish maqsadga muvofiq bo‘ladi:

a) to‘g‘ri chiziqlar (kesmalar)ning parallelligini aniqlash (isbotlash):

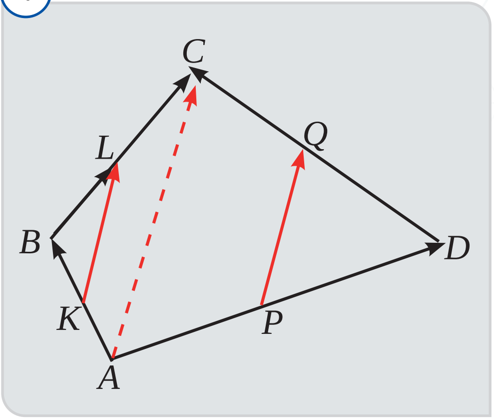
b) kesmalarni berilgan nisbatda bo‘lish;

c) uchta nuqtaning bitta to‘g‘ri chiziqda yotishini ko‘rsatish;

d) to‘rtburchakning parallelogramm (romb, trapetsiya, kvadrat, to‘g‘ri to‘rtburchak) ekanini ko‘rsatish.

6-misol. Qavariq to‘rtburchakning tomonlari o‘rtalari parallelogramm uchlari bo‘lishini isbotlang.

4



Aytaylik, $ABCD$ to‘rtburchak berilgan bo‘lib, unda $AK = KB$, $BL = LC$, $CQ = QD$, $AP = PD$ bo‘lsin *(4-rasm)*.

Isbot. 1. Berilgan kesmalarni mos ravishda AB, AC, BC, DC, AD, KL, PQ, BL, KB vektorlar bilan almashtirib, masalani vektor tiliga o‘tkazamiz.

2. Vektorlarni qo‘shishning uchburchak qoidasidan foydalanamiz:

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}, \ \overline{KB} + \overline{BL} = \overline{KL}, \ \overline{KB} = \frac{1}{2}\overline{AB}$$

va $\overline{BL} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ ekanidan foydalanib

$$\overline{KL} = \frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{BC}) = \frac{1}{2}\overline{AC}.$$

Shunga o‘xshash $\overline{PQ} = \frac{1}{2}\overline{AC}$ bo‘ladi.

3. $KL = PQ$, ya’ni bu vektorlar bir xil yo‘nalgan va uzunliklari teng. Bu $KLQP$ to‘rtburchak parallelogramm ekanini anglatadi.

Koordinatalar usuli

Geometrik masalani koordinatalar usuli bilan yechayotganda quyidagi algoritm asosida ish ko‘rish maqsadga muvofiq bo‘ladi:

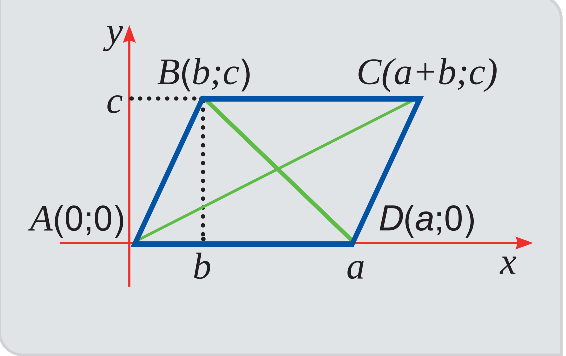
1) masala mazmunini tahlil qilish va uni koordinatalar tiliga o‘girish;
2) ifodalarning shaklini almashtirish va qiymatini hisoblash;
3) natijani geometriya tiliga o‘girish;
4) javobni yozish.

Koordinatalar usuli bilan quyidagi geometrik masalalarni yechish maqsadga muvofiq bo‘ladi: a) nuqtalarning geometrik o‘rnini topish; b) geometrik shakllarning chiziqli elementlari orasidagi bog‘lanishlarni isbotlash.

Koordinatalar usuli bilan masala yechayotganda koordinatalar boshini to‘g‘ri tanlash muhimdir. Berilgan shaklni koordinatalar tekisligiga shunday joylashtirish kerakki, imkoni boricha nuqtalarning koordinatalari nolga yoki bir xil songa teng bo‘lsin.

7-misol. Diagonallari teng parallelogrammning to‘g‘ri to‘rtburchak bo‘lishini isbotlang.

5



Isbot. Koordinatalar sistemasini shunday tanlaymizki, parallelogrammning uchlari quyidagi koordinatalarga ega bo‘lsin *(5-rasmga qarang)*:

$A(0;0)$, $B(b;c)$, $C(a+b;c)$, $D(a;0)$,

bu yerda $a > 0,\ b \geq 0,\ c > 0$.

A, B, C, D nuqtalar orasidagi masofalarni ularning koordinatalari orqali ifodalaymiz:

$$AC = \sqrt{(a+b-0)^2 + (c-0)^2}$$

$$BD = \sqrt{(a-b)^2 + (0-c)^2}$$

$$\sqrt{(a+b-0)^2 + (c-0)^2} = \sqrt{(a-b)^2 + (0-c)^2}$$

$$(a+b-0)^2 + (c-0)^2 = (a-b)^2 + (0-c)^2$$

Bundan $4ab = 0$.

Lekin $a > 0$, unda $b = 0$. Bu esa o‘z navbatida $B(b;c)$ nuqta Oy o‘qida yotishini anglatadi. Shuning uchun BAD to‘g‘ri burchak bo‘ladi.

Bundan $ABCD$ parallelogramm to‘g‘ri to‘rtburchak ekani kelib chiqadi.

Geometrik almashtirishlar usuli

Geometrik almashtirishlar usuliga burish, simmetrik akslantirishlar, parallel ko‘chirish va gomotetiya kabi almashtirishlarga asoslangan usullar kiradi. Geometrik almashtirishlar yordamida masalalarni yechish jarayonida berilgan geometrik shakllar bilan bir qatorda yangi, qo‘llangan geometrik almashtirish yordamida hosil qilingan shakllarga ham qaraladi. Yangi shakllarning xossalari aniqlanadi va berilgan shaklga o‘tkaziladi. Shundan so‘ng masalani yechish yo‘li topiladi. Yuqorida keltirilgan geometrik shakllarning xossalariga asoslanadigan barcha usullar bitta umumiy nom bilan *geometrik usullar* deb aytiladi.

Muhim eslatma!

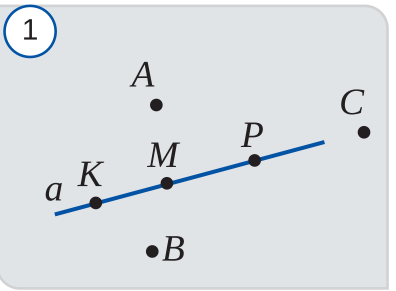
Bu bo‘limdagi materiallar planimetriyani takrorlash uchun keltirilgan. Takrorlash uchun masalalar keragidan ortiq berilmoqda. Ularning barchasini sinfda ko‘rishning imkoni bo‘lmasligi mumkin. Shuning uchun ularni mustaqil yechib chiqishni maslahat beramiz. Bu 10-sinfda geometriyani o‘rganishni muvaffaqiyatli davom ettirishingizga zamin yaratadi.

Mavzuga doir savollar

1. *Matematik masala deganda nimani tushunasiz?*
2. *Geometrik masalaning qanday turlarini bilasiz?*
3. *Masala yechishning qanday usullarini bilasiz?*
4. *Geometrik masalani yechishning sintetik, analitik usullari haqida gapirib bering.*
5. *Masala yechishning to‘g‘ri va teskari usullari haqida nima bilasiz?*
6. *Teskarisidan faraz qilib isbotlash usulining mohiyati nimada?*
7. *Geometrik masalani algebraik usulda yechish algoritmini tushuntirib bering.*
8. *Geometrik masalani vektor usulida yechish algoritmini tushuntirib bering.*
9. *Vektor usuli bilan odatda qanday masalalar yechiladi?*
10. *Geometrik masalani koordinatalar usuli bilan yechish algoritmini tushuntirib bering.*
11. *Koordinatalar usuli bilan odatda qanday masalalar yechiladi?*
12. *Geometrik almashtirishlar usulini tushuntirib bering.*

Mashhur olim va ixtirochi Arximed geometriyani dunyodagi eng muhim fan deb hisoblagan. Geometriya dunyoning barcha qoidalarini tushuntirib bera oladi, deb ishongan va o‘zining geometrik bilimlari tufayli o‘z davridan oldinroq bo‘lgan ko‘plab mexanizmlarni ixtiro qilgan.

Amaliy mashqlar



2.1. 1-rasmdan foydalanib to‘g‘ri matematik tasdiqni toping.

A) $A \in a$ B) $K \notin a$ C) $C \in a$ D) $M \notin a$

2.2. Bitta to‘g‘ri chiziqda A, B, C nuqtalar shunday tanlanganki, AB = 2,7 dm, BC = 1,3 dm, AC = 1,3 dm. Bitta nuqtaning qolgan ikkitasi orasida yotishi haqidagi to‘g‘ri tasdiqni aniqlang.

A) $A \in BC$ B) $B \in AC$ C) $C \in AB$ D) $C \notin AB$.

2.3. AC kesma BC kesmadan uch marta uzun. Bu munosabat ko‘rsatilgan ikkita bandni aniqlang.

A) $AC = 3BC$ B) $3AC = BC$ C) $AC + BC = 4AC$ D) $BC = \frac{1}{3}AC$

2.4. AC kesma BC kesmadan 2 cm ga qisqa. Shu munosabat ko‘rsatilgan ikkita bandni aniqlang.

A) $AC - BC = 3\ cm$; B) $BC - AC = 2\ cm$

C) $AC - 2\ cm = BC$; D) $AC + 2\ cm = BC$

2.5. A, B, C nuqtalarning qaysi biri qolgan ikkitasining orasida yotadi?

A) $AC = 3$, $AB = 8$, $BC = 5$ D) $AC = 9\ mm$, $BC = 21\ mm$, $AB = 12\ mm$

B) $AC=7$, $BC = 12$, $AB= 19$ E) $AC = 21\ m$, $BC = 37\ m$, $AB = 16\ m$

C) $AC=27\ m$, $BC=5\ m$, $AB=22\ m$ F) $BC=18\ dm$, $AC=33\ dm$, $AB=15\ dm$

2.6. AB kesmani O nuqta uzunligi 18 cm va 14 cm bo‘lgan bo‘laklarga bo‘ladi. Agar K va M nuqtalar AO va BO kesmalarning o‘rtasi bo‘lsa, KM kesma uzunligini toping.

2.7. Uzunligi 48 dm bo‘lgan kesmada O nuqta belgilangan. Agar $AO : BO = 3 : 5$ bo‘lsa, AO va BO kesmalarning uzunliklarini toping.

2.8. A, B, C, M nuqtalar bitta to‘g‘ri chiziqda yotadi va $AC = 12\ m$, $CB = 5\ m$, M esa AC kesmaning o‘rtasi. MB kesma uzunligini toping.

2.9. $\angle KOC = 153^\circ$. OM nur burchak tomonlari orasidan o‘tadi. Agar $\angle KOM = 2MOC$ bo‘lsa, KOM va MOC burchaklarni toping.

2.10*. Uzunligi 75 cm bo‘lgan AB kesmada M va K nuqtalar belgilangan. Bunda $N \in AK$, $K \in NB$. Shuningdek, AN kesma NK kesmadan 5 cm uzun, KB esa AN dan 2 marta uzun. Hosil bo‘lgan 5 ta kesma uzunliklarini toping.

2.11*. Burchak tomonlari orasidan o‘tgan nur uni ikkita burchakka ajratadi. Bu burchaklar bissektrisalari orasidagi burchak berilgan burchakdan 2 marta kichik ekanini isbotlang.

2.12*. a, b, c va d to‘g‘ri chiziqlar berilgan. Ularning har uchtasi bitta nuqtada kesishadi. Barcha to‘g‘ri chiziqlarning bitta nuqtadan o‘tishini isbotlang.

2.13. Ikki to‘g‘ri chiziqning kesishishidan to‘rtta burchak hosil bo‘ldi *(2-rasm)*. Quyida keltirilgan jadvalda har bir shart (A-E) ga undan kelib chiquvchi xulosa (1–5) ni mos qo‘ying.

A) $\angle 1 = \angle 3$ 1) $\angle 3 = \angle 4 = 90^\circ$

B) $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$ 2) $\angle 1 = \angle 2 = \angle 4 = 90^\circ$

C) $\angle 1 = \angle 2 + 90^\circ$ 3) $\angle 1$ va $\angle 4$ – qo‘shni

D) $\angle 2 + \angle 4 = 260^\circ$ 4) $\angle 1$ va $\angle 3$ – o‘tkir

E) $\angle 3 = 90^\circ$. 5) $\angle 2$ va $\angle 4$ – vertikal

A	
B	
C	
D	
E	

2.14. Quyida ba'zi burchaklarning gradus o'lchovlari (1–7) berilgan. Ulardan qaysi juftlari qo'shni bo'lishi mumkinligini aniqlang.

1) 18° 2) 72° 3) 128° 4) 62° 5) 28° 6) 108° 7) 38°

A) 1 va 2 B) 2 va 6 C) 3 va 4 D) 1 va 7 E) 2 va 5

2.15. Agar 3-rasmda $\angle 1 = \angle 7$ bo'lsa, to'g'ri tasdiqni toping.

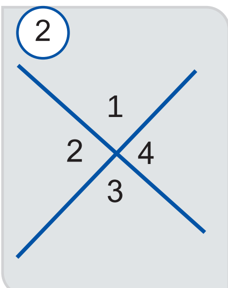
A) $a \parallel b$; *B)* $a \perp b$; *C)* a va b kesishmaydi;

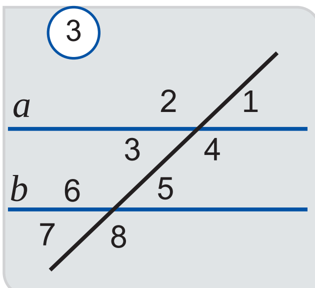
2.16. Agar 4-rasmda $CD \parallel AB$, $\angle 1 = \angle 2$ va $\angle 2 = 72^\circ$ bo'lsa, $\angle 3 = ?$

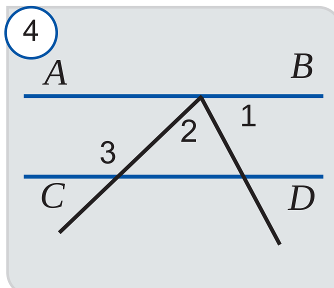
A) 72° B) 144° C) 108° D) 36° E) 124°

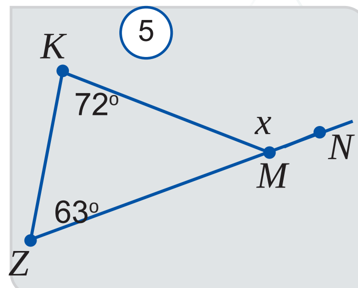
2.17. Agar teng yonli uchburchak burchaklari 3:4:3 nisbatda bo'lsa, uning uchining bissektrisasi va yon tomoni orasidagi burchakni toping.

A) 18° B) 36° C) 72° D) 60° E) 30°









2.18. 5-rasmda tasvirlangan KMZ uchburchak burchagiga tashqi bo'lgan KMN burchakning gradus o'lchovini toping.

A) 135° B) 108° C) 45° D) 125° E) 117°

2.19. Noto'g'ri tengliklarni aniqlang *(6-rasm).*

A) $\triangle ABO = \triangle OCD$ B) $BA = CD$ C) $\angle AOB = \angle DOC$

D) $\angle BAO = \angle DCO$ E) $\angle BAO = \angle CDO$

2.20. 7-rasmdagi BOC uchburchak burchaklarini toping.

A) $48^\circ, 48^\circ, 84^\circ$ B) $24^\circ, 132^\circ, 24^\circ$

C) $132^\circ, 48^\circ, 48^\circ$ D) $42^\circ, 90^\circ, 48^\circ$ E) $48^\circ, 32^\circ, 20^\circ$

2.21. Har bir oltiburchakning perimetri (A–E) ga unga tashqi chizilgan aylana radiusi (1–5) dan mosini qo'ying va jadvalni to'ldiring.

A) *P = 42 cm* 1) *R = 2 cm*

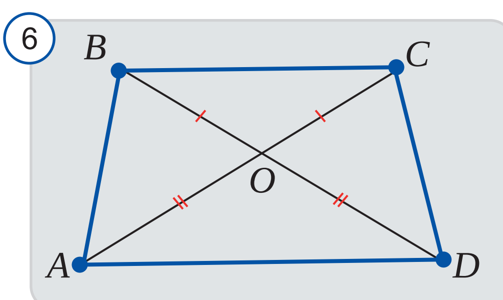
B) *P = 12 cm* 2) *R = 8 cm*

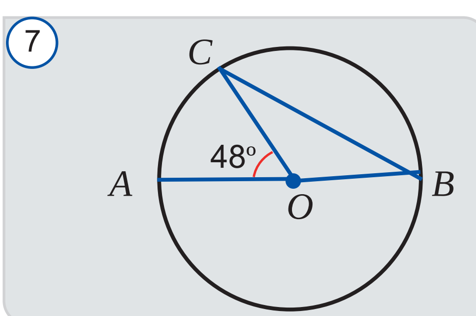
C) *P = 84 cm* 3) *R = 6 cm*

D) *P = 48 cm* 4) *R = 14 cm*

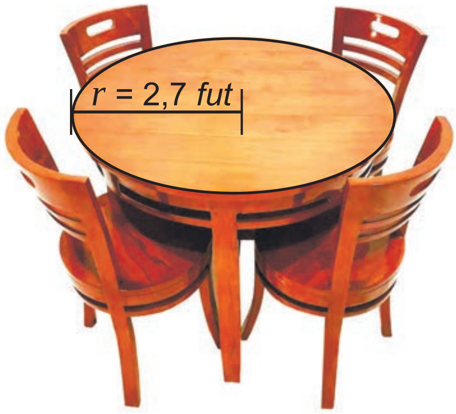
E) *P = 36 cm* 5) *R = 7 cm*

A	
B	
C	
D	
E	

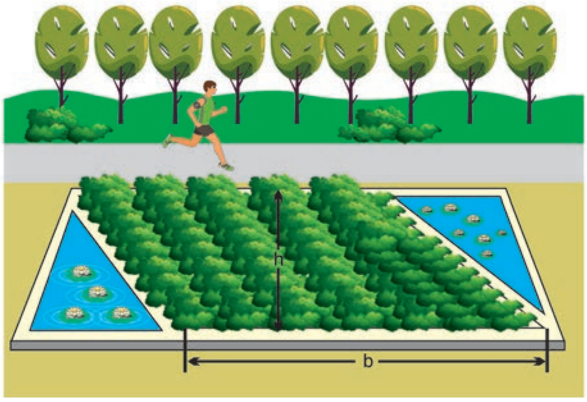




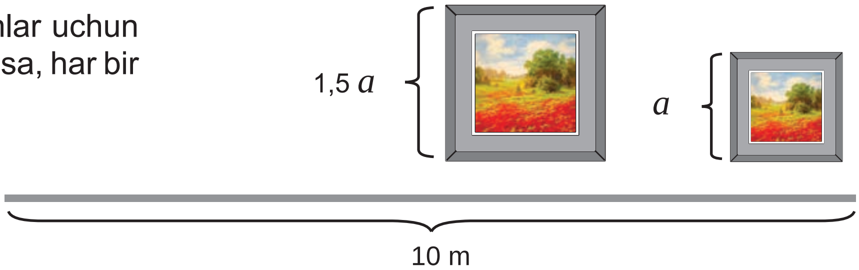
2.22. Doira shaklidagi stol sirtining yuzini toping (1 *fut* = 30,48 *cm*).



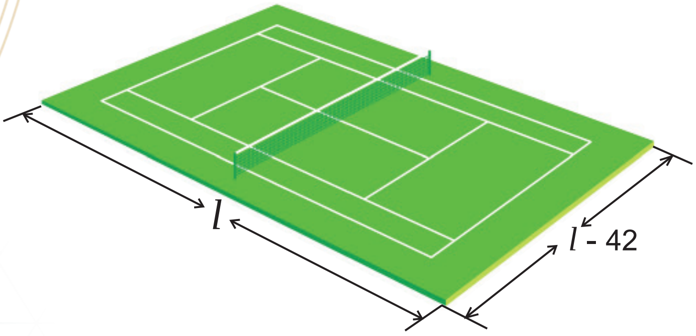
2.23. Agar $h = 3\ m$ va $b = 6\ m$ bo'lsa, rasmdagi gulzor yuzini toping.

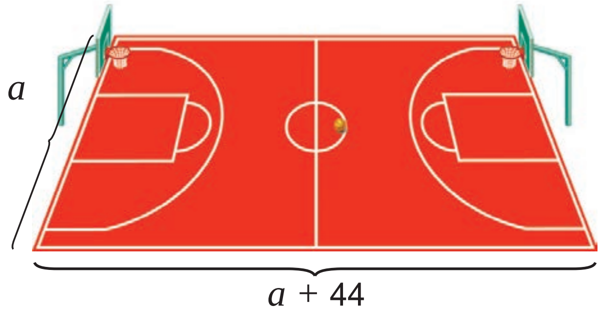


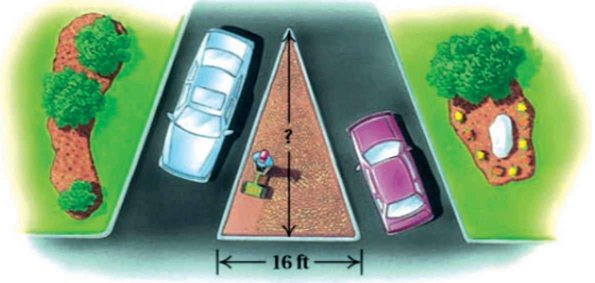
2.24. Kvadrat shaklidagi romlar uchun 10 *m* reyka ishlatilgan bo'lsa, har bir rom o'lchamlarini toping.



2.25. Basketbol maydonining perimetri 288 *fut*, bo'yi esa enidan 44 *fut* uzun bo'lsa, maydon o'lchamlarini metrlarda toping (1 *fut* = 30,48 *cm*).

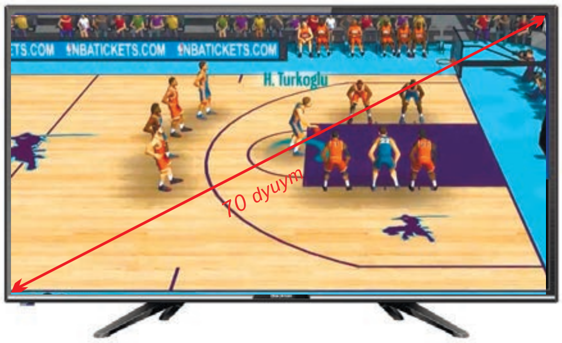






2.26. Tennis kortining perimetri 288 *fut*, bo'yi esa enidan 42 *fut* uzun bo'lsa, maydon o'lchamlarini metrlarda toping. (1 *fut* = 30,48 *cm*).

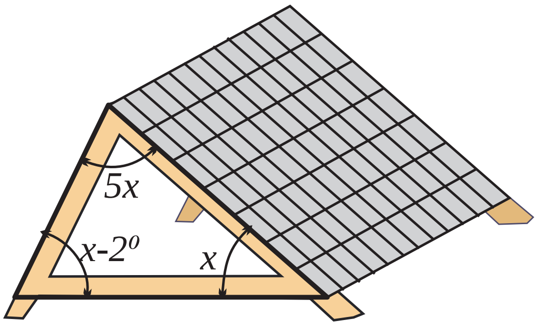
2.27. Avtomobillar to'xtash joyidagi teng yonli uchburchak shaklidagi maydonchaning yuzi 288 *fut*^{2} va asosi 16 *fut* bo'lsa, uning balandligini toping (1 *fut* = 30,48 *cm*).



2.28. Rasmdagi HD televizori ekranining bo'yi va eni uzunligi nisbati 16 : 9 kabi bo'ladi. Diagonali 70 dyuym bo'lgan HD televizori o'lchamlarini *cm* larda toping (1 *dyuym* = 2,54 *cm*).

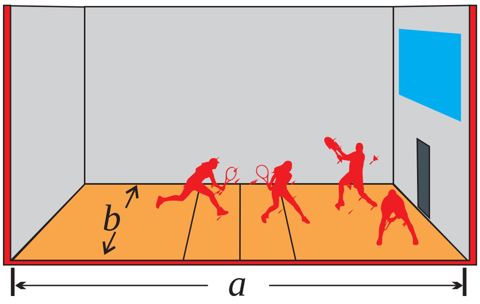
2.29. Rasmlardagi tom burchaklarini toping.

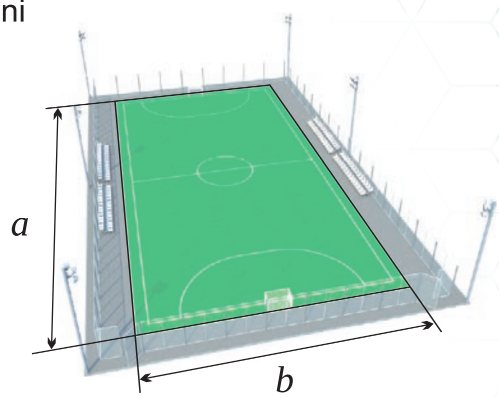
a)



b)

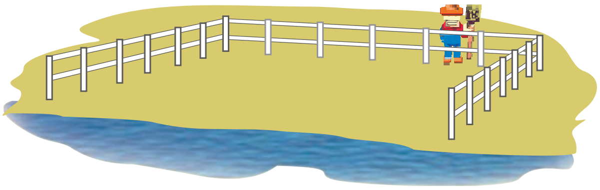
2.30. Yopiq sport maydonining perimetri 120 *fut*, bo'yi esa enidan ikki marta uzun bo'lsa, maydon o'lchamlarini metrlarda toping (1 *fut* = 30,48 *cm*).





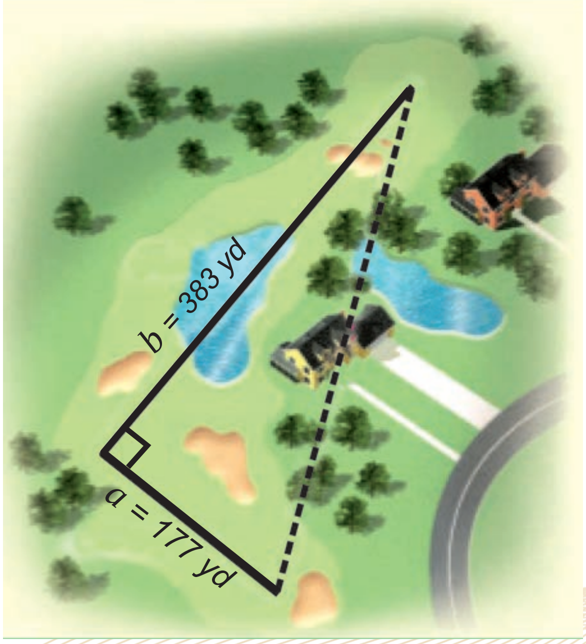
2.31. Futbol maydonining perimetri 340 *m*, bo'yi esa enidan 50 *m* uzun bo'lsa, maydon o'lchamlarini toping.

2.32. Fermer daryo bo'yida to'g'ri to'rtburchak shaklidagi maydonni panjara bilan o'rab olmoqchi. 100 *m* uzunlikdagi panjara bilan qanday o'lchamdagi eng katta yuzli maydonni o'rab olish mumkin?

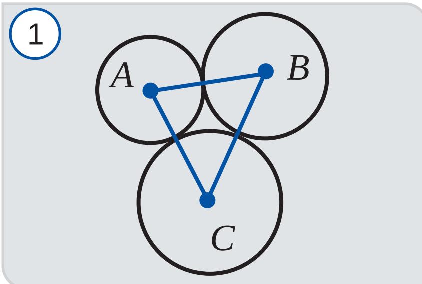


2.33. Doira shaklidagi ikkita gulzor yuzlari yig'indisi $90\pi\ m^2$, ayirmasi $72\pi\ m^2$. Har bir gulzorning radiuslarini toping.

2.34. Golf maydonchasi tarhi berilgan. Agar o'yinchi birinchi zarbda to'pni a masofaga, birinchi zarb yo'nalishiga perpendikulyar ikkinchi zarbda b masofaga uzoqlashtirgan bo'lsa, golf to'pi boshlang'ich holatidan qancha masofaga borib tushgan?



3 BOBNI TAKRORLASHGA DOIR AMALIY MASHQLAR

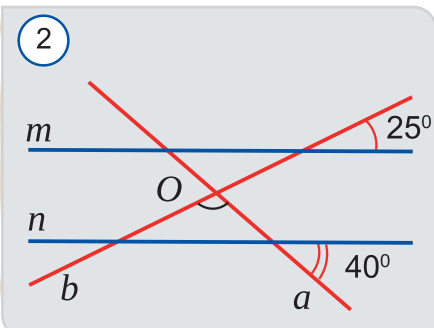


3.1. Uchburchakning uchlari, radiuslari 6 *cm*, 7 *cm* va 8 *cm* bo‘lgan va jufti-jufti bilan urinadigan uchta aylana markazlarida yotibdi (*1-rasm*). Bu uchburchakning perimetrini toping.

A) 28 *cm* B) 29 *cm* C) 27 *cm* D) 42 *cm* E) 21 *cm*

3.2. Kvadratning tomoni *20* ga teng. Bu kvadratga ichki chizilgan aylana radiusini toping.

A) 20 B) $10\sqrt{2}$ C) 10 D) $5\sqrt{2}$ E) 5



3.3. Trapetsiyaning bitta asosi ikkinchisidan 8 *cm* ga uzun, o‘rta chizig‘i esa 10 *cm* ga teng. Trapetsiyaning kichik asosini toping.

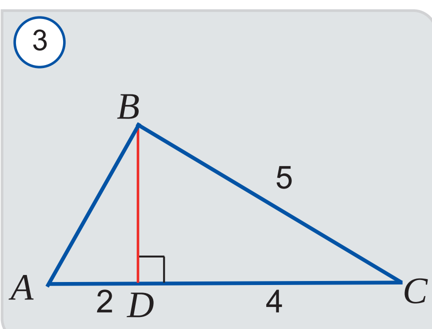
A) 2 *cm* B) 4 *cm* C) 6 *cm* D) 8 *cm* E) 10 *cm*

3.4. Diagonallari 10 *m* va 36 *m* bo‘lgan rombning yuzini toping.

A) 90 m^2 B) 92 m^2 C) 180 m^2 D) *184* m^2 E) *36* m^2

3.5. 2-rasmdagi m va n to‘g‘ri chiziqlar o‘zaro parallel bo‘lsa, a va b to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

A) 50^o B) 80^o C) 100^o D) 65^o E) 115^o

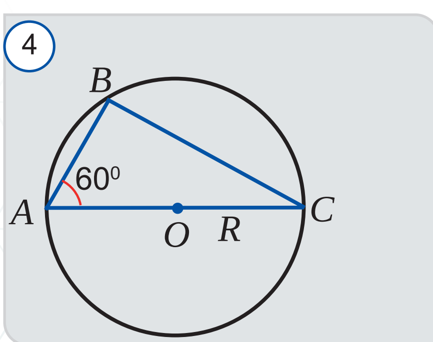


3.6. 3-rasmdagi uchburchak yuzini toping.

A) 6 B) 9 C) 12 D) 24 E) 30

3.7. 4-rasmdagi R radiusli aylanaga ichki chizilgan ABC uchburchakning BC tomonini toping.

A) R B) $R\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $R\sqrt{2}$ D) $R\sqrt{3}$ E) $R\frac{\sqrt{3}}{2}$



3.8. Yuzi 9π cm^2 bo‘lgan doirani o‘rab turgan aylana uzunligini toping.

A) *3π cm* B) 9π *cm* C) 12π *cm* D) *18π cm* E) *6π cm*

3.9. Tomoni 6 *cm* ga teng bo‘lgan kvadratga ichki chizilgan doira yuzini toping.

A) *9π* cm^2 B) *144π* cm^2 C) *36π* cm^2 D) *72π* cm^2 E) *18π* cm^2

3.10. Kvadratga ichki chizilgan aylana radiusi 5 ga teng. Kvadrat diagonalini toping.

A) $5\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) $5\sqrt{2}$ C) $5\frac{\sqrt{2}}{4}$ D) 10 E) $20\sqrt{3}$

3.11. Ichki burchaklari yig‘indisi 1800^o bo‘lgan muntazam ko‘pburchakning tomonlari sonini toping.

A) *12* B) *14* C) *16* D) 18 E) *20*

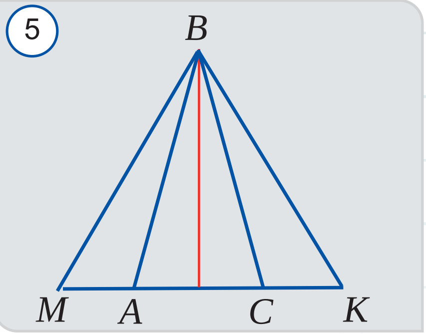
3.12. Diagonallari 24 *cm* va 18 *cm* bo‘lgan rombning perimetrini toping.

A) *120 cm* B) *60 cm* C) *84 cm* D) 108 *cm* E) *144 cm*

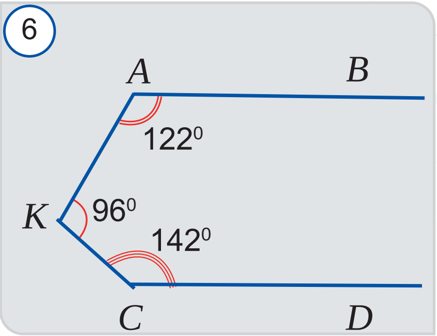
3.13. Parallelogrammning perimetri 48 dm bo‘lib, bir tomoni ikkinchisidan 8 dm ga uzun. Parallelogrammning kichik tomonini toping.

A) 8 dm B) 16 dm C) 6 dm D) 12 dm E) 10 dm

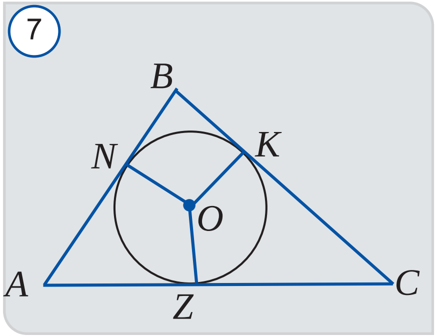
3.14. 5-rasmdagi ABC teng yonli uchburchak tashqarisida ikkita teng ABM va CBK burchaklar qurildi. Bu burchaklar tomonlari AC tomonni mos ravishda M va K nuqtalarda kesib o‘tdi. MBC va KBA uchburchaklar tengligini isbotlang.



3.15. 6-rasmda tasvirlangan AB va CD to‘g‘ri chiziqlarning o‘zaro joylashuvini aniqlang. Javobingizni asoslang.



3.16. 7-rasmdagi ABC uchburchakka aylana ichki chizilgan. Aylananing N va Z urinish nuqtalari uchburchakning AB va AC tomonlarini ayirmasi mos ravishda 3 cm va 4 cm bo‘lgan kesmalarga ajratadi ($AN > NB$, $AZ > ZC$). Agar uchburchakning perimetri 28 cm bo‘lsa, uning tomonlarini toping.



3.17. Teng tomonli uchburchakka radiusi $3\sqrt{3}$ bo‘lgan aylana tashqi chizilgan. Ichki chizilgan aylana radiusini toping.

3.18. Asosidagi burchagi 30° bo‘lgan teng yonli trapetsiyaga aylana tashqi chizilgan. Trapetsiyaning balandligi 7 cm ga teng bo‘lsa, uning o‘rta chizig‘ini toping.

3.19. Asosidagi tashqi burchagi 150° bo‘lgan teng yonli trapetsiya aylanaga tashqi chizilgan. Trapetsiyaning o‘rta chizig‘i $16\sqrt{3}$ ga teng bo‘lsa, uning balandligini toping.

3.20. Asosi 16 cm va bu asosga tushirilgan balandligi 15 cm bo‘lgan teng yonli uchburchakning yon tomonini toping.

3.21. ABC uchburchakning AO balandligi uning BC tomonini BO va OC kesmalarga ajratadi. Agar $AB = 10\sqrt{2}$ cm, $AC = 26$ cm va $\angle B = 45^\circ$ bo‘lsa, OC kesma uzunligini toping.

3.22. Rombning tomoni 10 cm, diagonallaridan biri 12 cm. Rombga ichki chizilgan aylana radiusini toping.

3.23. Radiusi 15 cm bo‘lgan aylanaga uning markazidan 12 cm uzoqlikda bo‘lgan vatar o‘tkazilgan. Bu vatar uzunligini toping.

3.24. Aylanada ikkita kesishuvchi vatar o‘tkazilgan. Ulardan biri kesishish nuqtasi bilan teng ikkiga, ikkinchisi esa uzunliklari 5 cm va 20 cm bo‘lgan kesmalarga bo‘linadi. Har bir vatar uzunligini toping.

3.25. Aylanadan tashqarida yotgan nuqtadan unga urinma va kesuvchi o‘tkazilgan. Agar urinma o‘zining tashqi bo‘lagidan 5 cm uzun, kesuvchining ichki bo‘lagidan 5 cm qisqa bo‘lsa, uning uzunligini toping.

3.26. Aylanadan tashqarida yotgan nuqtadan unga urinma va kesuvchi o‘tkazilgan. Agar urinma va kesuvchining uzunliklari yig‘indisi 15 cm, kesuvchining tashqi bo‘lagi urinmadan 2 cm qisqa bo‘lsa, urinma va kesuvchi uzunliklarini toping.

3.27. To‘g‘ri burchakli uchburchakka ichki chizilgan aylananing urinish nuqtasi gipotenuzani uzunliklari 6 cm va 9 cm bo‘lgan kesmalarga bo‘ladi. Bu uchburchakning yuzini toping.

3.28. To‘g‘ri burchakli trapetsiyaning kichik asosi 8 cm, kichik yon tomoni esa 6 $\sqrt{3}$ cm ga teng. Agar trapetsiya burchaklaridan biri 120° bo‘lsa, uning yuzini toping.

3.29. Asoslari 40 cm va 14 cm, balandligi esa 39 cm bo‘lgan trapetsiyaga aylana tashqi chizilgan. Aylana radiusini toping.

3.30. Trapetsiyaning diagonallari 20 cm va 15 cm, balandligi 12 cm. Trapetsiyaning yuzini toping.

3.31. Rombning katta diagonali 24 cm, ichki chizilgan aylana radiusi 6 cm. Rombning yuzini toping.

3.32. Uchburchakning tomonlari 17 cm, 25 cm, 28 cm. Markazi katta tomon o‘rtasida bo‘lgan doira aylanasi uning qolgan ikki tomoniga urinadi. Doira yuzini toping.

3.33. Tomonlari 6 cm va 4 cm, diagonallari orasidagi burchagi 60° ga teng bo‘lgan parallelogramm yuzini toping.

3.34. Ikki parallel to‘g‘ri chiziqni uchinchi to‘g‘ri chiziq bilan kesganda hosil bo‘lgan burchaklarning uchtasi yig‘indisi 240° ga teng. Hosil bo‘lgan qo‘shni burchaklarning kattasining kichigiga nisbatini foizlarda ifodalang.

3.35. Ikki parallel to‘g‘ri chiziqni uchinchi to‘g‘ri chiziq bilan kesganda hosil bo‘lgan burchaklardan biri ikkinchisidan 3 marta katta bo‘lsa, ikkita o‘tkir burchaklarning yig‘indisini toping.

3.36. Aylanada yotgan nuqtadan o‘tkazilgan, bir-biriga perpendikulyar ikkita vatar uzunligi 8 cm va 15 cm. Aylana radiusini toping.

3.37. Aylanada yotgan nuqtadan o‘tkazilgan ikki vatar orasidagi burchak 30°. Aylana radiusi 5 cm bo‘lsa, vatarlar oxirlarini tutashtiruvchi kesma uzunligini toping.

3.38. Aylananing 6 cm li vatari uning markazidan 4 cm uzoqlikda joylashgan. Aylana uzunligini toping.

3.39. Aylanaga tashqi chizilgan trapetsiyaning yon tomonlari nisbati 7 : 9 ga teng, o‘rta chizig‘i 32 cm. Trapetsiyaning yon tomonlarini toping.

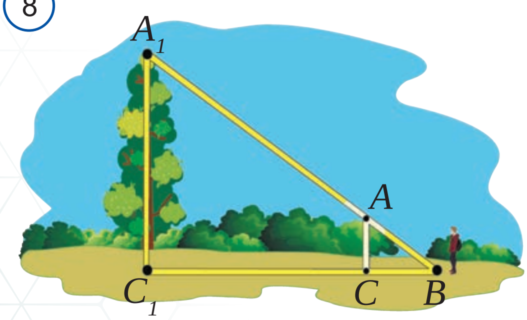
3.40. Radiusi 4 cm bo‘lgan aylanaga trapetsiya ichki chizilgan. Trapetsiyaning diagonali o‘tkir burchagi bissektrisasi bilan 30° burchak tashkil qiladi. Trapetsiyaning balandligini toping.

3.41. ABC uchburchakda $\angle A = 45^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $BC = 3\sqrt{6}$ cm bo‘lsa, AC tomonni toping.

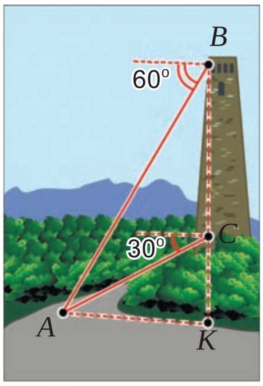
3.42. 8-rasmda tayoq yordamida daraxtning balandligini topish jarayoni tasvirlangan. Uni izohlang.

3.43. Qirda balandligi 70 m bo‘lgan minora joylashgan (*9-rasm*). Minora B uchidan pastdagi A predmet gorizontga nisbatan 60° li, minoraning asosidagi C nuqtadan esa 30° li burchak ostida ko‘rinadi. Qirning balandligini toping.

8



9



Matematik masalalar xazinasi

Ma’lumki, keyingi paytlarda axborot-kommunikatsiya texnologiyalari juda tez rivojlanmoqda va jadal sur’atlar bilan ta’lim tizimiga ham kirib bormoqda. Hozir internet tarmog‘iga shunchalik ko‘p axborot manbalari joylashtirilganki, bu xazinadan foydalanish har bir yosh avlod uchun juda zarur va foydali. Internetdan siz o‘zbek, rus, ingliz va boshqa tillarda matematika olamidagi eng oxirgi yangiliklar, elektron kutubxonalar omborida saqlanayotgan ko‘plab elektron darsliklarni, raqamli resurslarni topishingiz mumkin. Shuningdek, turli-tuman nazariy materiallar, uslubiy tavsiyalar, son-sanoqsiz masalalar, misollar va ularning yechimlari, turli davlatlarda o‘tkazilayotgan matematik ko‘rik-tanlov va olimpiadalar to‘g‘risidagi ma’lumotlar va ularda taqdim etilgan qiziqarli matematik masalalar va ularning yechimlari bilan tanishishingiz mumkin.

Elektron shakllar

Videodarslar

Quyida bir qator manbalarning manzillari berilmoqda. Ulardan geometriyaga oid o‘zingizni qiziqtirgan turli ma’lumotlarni topishni, matematikani mustaqil o‘rganish imkoniyatlaridan foydalanishni tavsiya etamiz:

1. http://www.uzedu.uz – Xalq ta’limi vazirligining rasmiy sayti, axborot ta’lim portali.
2. http://www.ziyonet.uz – “Ziyonet” ta’lim portali.
3. http://dr.rtm.uz – yangi darsliklar, o‘qituvchilar uchun uslubiy qo‘llanmalarning elektron shakllari, taqdimotlar, multimedia ilovalari, videodarslar va raqamli resurslar platformasi
4. http://www.maktab.uz – 1–11-sinflar uchun onlayn maktab, maktab o‘quv dasturi bo‘yicha videodarslar va boshqa materiallar platformasi.
5. http://www.stesting.uz – o‘quvchilar uchun “Xalqaro baholash tadqiqotlariga tayyorlanish” elektron platformasi (o‘zbek tilida).
6. http://www.masofa.uz – A. Avloniy nomidagi milliy-tadqiqot institutining masofadan o‘qitish portali.

Taqdimotlar

Testlar

Topshiriqlar

Qo'shimcha materiallar

7. http://www.onlinedu.uz – A. Avloniy nomidagi milliy-tadqiqot institutining "Uzluksiz kasbiy ta'lim" elektron platformasi.
8. http://www.skillgrover.com.uz – Finlandiyaning matematikani o'rganish va o'quvchilar bilimlarini baholash platformasi (o'zbek tilida).
9. http://www.khanakademy.org – "Xon akademiyasi" masofaviy ta'lim sayti (ingliz tilida).
10. http://www.xanakademiyasi.uz – matematika, informatika, kimyo, fizika, iqtisodiyot, biologiya va astronomiya kabi fanlar bo'yicha videodarslar platformasi (o'zbek tilida).
11. http://www.school.edu.ru – umumta'lim portali (rus tilida).
12. http://www.problems.ru/ – matematikadan masalalar izlash tizimi (rus tilida).
13. http://geometry.net/ – algebra va geometriyadan o'quv materiallari (ingliz tilida).
14. http://mathproblem.narod.ru/ – matematik to'garaklar va olimpiadalar (rus tilida).
15. http://www.ixl.com – matematikani masofadan o'qitish portali (ingliz tilida).
16. http://www.mathkang.ru – "Kenguru" xalqaro matematik tanlovi sayti (rus tilida).
17. http://www.olimpia.uz – "Kenguru" xalqaro matematik tanlovi sayti (o'zbek tilida).
18. http://www.brilliant.org – matematikadan masofaviy ta'lim sayti (ingliz tilida).
19. http://www.geogebra.org – geometriya va algebra fanlari bo'yicha dinamik ("jonli") chizmalar yaratish imkoniyatini beradigan bepul dastur.
20. http://www.yaklass.ru – maktab o'quvchilari va o'qituvchilar uchun onlayn ta'lim platformasi.
21. www.schulen-ans-netz.de – Germaniya "Internet-Maktab" sayti (nemis tilida).
22. www.studienkreis.de – Germaniya o'quv to'garaklari sayti (nemis tilida).
23. www.educasource.education.fr – Fransiya ta'lim sayti (fransuz tilida).
24. www.educmath.inrp.fr – Fransiya matematika ta'limi raqamli resurslari (fransuz tilida).
25. http://mat-game.narod.ru/ – matematik gimnastika. Matematik masalalar va boshqotirmalar (rus tilida).

II BOB

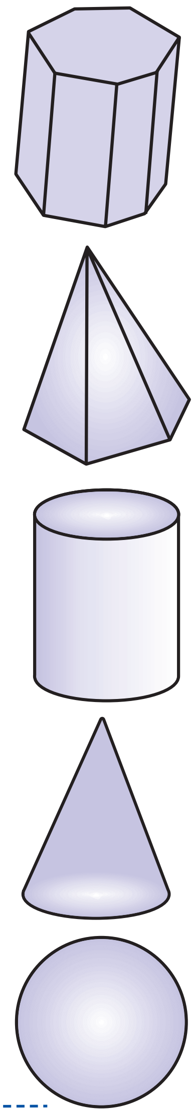
STEREOMETRIYAGA KIRISH

Bu bobni o‘rganish natijasida quyidagi bilim va ko‘nikmalarga ega bo‘lasiz:

- stereometriya aksiomalarini bilish va ulardan foydalana olish;
- stereometriya aksiomalaridan kelib chiquvchi natijalarni bilish va ularni qo‘llay olish;
- fazodagi ayqash, parallel va kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlar ta’rifini bilish va chizmada tasvirlash;
- to‘g‘ri chiziqning tekislikka parallelligi ta’rifini bilish;
- kesishuvchi va parallel tekisliklar haqida tushunchaga ega bo‘lish;
- fazoviy jismlar, ko‘pyoqlar – prizma, parallelepiped, kub, piramida haqida boshlang‘ich tushunchalarga ega bo‘lish, tekislikda tasvirlay olish, ularni chizmada ko‘rsatish va sirtini topishga doir masalalarni yechish;
- ko‘pyoqlarning sodda kesimlarini “izlar” va parallel ko‘chirish usullaridan foydalanib yasash;
- o‘rganilgan tushunchalar, faktlar va metodlarni notanish yoki hayotiy vaziyatlarda qo‘llay olish.

4 STEREOMETRIYANING ASOSIY TUSHUNCHALARI

1



Ma'lumki, geometrik shakllar tekislikda to'liq yotgan yoki yotmaganiga qarab *yassi* va *fazoviy shakllarga* ajratiladi. Shu chog'gacha geometriya darslarida asosan yassi geometrik shakllarning xossalarini o'rgandik. 9-sinf oxirida esa ba'zi fazoviy shakllar: prizma, piramida, silindr, konus va sharning *(1-rasm)* xossalarini qarab chiqqan edik.

Geometriyaning planimetriya bo'limi yassi geometrik shakllarni, *stereometriya* bo'limi esa fazoviy geometrik shakllarning (yoki jismlarning) xossalarini o'rganadi. *Stereometriya* so'zi grekchadan olingan bo'lib, *stereos* – "fazoviy", *metreo* – "o'lchayman" degan ma'noni anglatadi.

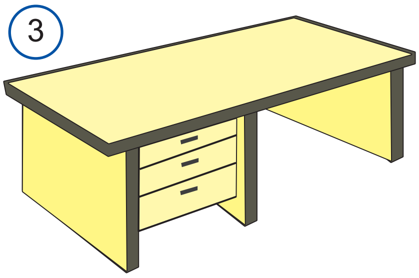
2-rasmda tasvirlangan narsalar fazoviy jismlarning timsoli sifatida ular haqida tasavvur beradi. Tevarak-atrofimizdagi barcha predmetlar uch o'lchamli bo'lib, ularning shakli qaysidir fazoviy geometrik jismga o'xshab ketadi.

Fazodagi asosiy geometrik shakllar *nuqta, to'g'ri chiziq* va *tekislikdir*. Ular stereometriyaning asosiy tushunchalari bo'lib, ularga ta'rif berilmaydi.

Nuqtaga o'lchamlari hisobga olinmasa ham bo'ladigan mayda predmetlar timsoli sifatida, to'g'ri chiziqqa esa tarang tortilgan ip yoki maktab doskasi qirrasi timsoli sifatida qarash mumkin. Nuqtalar katta lotin harflari – A, B, C ... bilan, to'g'ri chiziqlar esa kichik lotin harflari – a, b, c ... bilan belgilanadi.

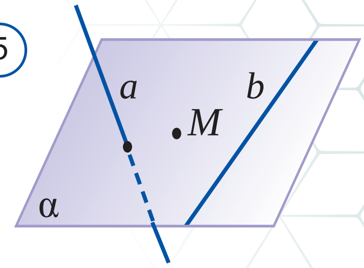
2

3



4

5



Tekislikni stol usti kabi tekis sirt deb tasavvur qilishimiz mumkin *(3-rasm)*. Tekislik ham to‘g‘ri chiziq kabi cheksizdir. Rasmda tekislikning faqat bir qisminigina tasvirlaymiz. Lekin uni hamma tomonga cheksiz davom etgan deb tasavvur qilamiz va odatda chizmada parallelogramm shaklida tasvirlaymiz *(4-rasm).*

Stereometriyada ishlatiladigan ba’zi belgilashlar

Tekisliklarni α, β, γ... – yunon harflari bilan belgilaymiz.

Fazoda tekislik, to‘g‘ri chiziq va nuqtalar 5-rasmdagidek tasvirlanadi.

Fazoda nuqta tekislikka tegishli bo‘lmasligi *(6a-rasm)* yoki tegishli bo‘lishi *(6b-rasm)* mumkin.

M nuqta α tekislikka tegishli bo‘lgan holda α tekislik M nuqtadan o‘tadi, deb ham aytiladi va $M \in \alpha$ tarzda belgilanadi.

M nuqta α tekislikka tegishli bo‘lmasa, $M \notin \alpha$ tarzda belgilanadi.

Shuningdek, fazoda to‘g‘ri chiziq tekislikka tegishli bo‘lishi yoki tegishli bo‘lmasligi ham mumkin.

a to‘g‘ri chiziqning hamma nuqtalari α tekislikka tegishli bo‘lsa *(7a-rasm)*, a to‘g‘ri chiziq α tekislikda yotadi yoki α tekislik a to‘g‘ri chiziq orqali o‘tadi, deb aytiladi va $a \subset \alpha$ tarzda belgilanadi.

a to‘g‘ri chiziq α tekislikka tegishli bo‘lmasa, $a \not\subset \alpha$ tarzda belgilanadi.

a to‘g‘ri chiziqning faqat bitta nuqtasi α tekislikka tegishli bo‘lsa *(7b-rasm)*, a to‘g‘ri chiziq α tekislikni kesib o‘tadi, deb aytiladi va bu $\alpha \cap a = M$ tarzda yoziladi.

Agar α va β tekisliklarning umumiy nuqtalari a to‘g‘ri chiziqni tashkil qilsa *(8-rasm)*, bu ikki tekislik a to‘g‘ri chiziq bo‘ylab kesishadi, deymiz va buni $\alpha \cap \beta = a$ tarzida yozamiz.

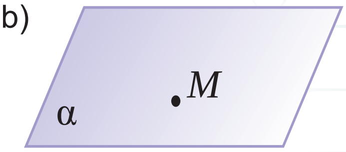
Agar α va β tekisliklarning umumiy nuqtalari bo‘lmasa *(9-rasm)*, bu Ikki tekislik o‘zaro kesishmaydi, deymiz va buni $\alpha \cap \beta = \varnothing$ tarzida yozamiz.

6

a)

$M \notin \alpha$

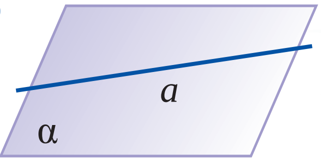
b)



$M \in \alpha$

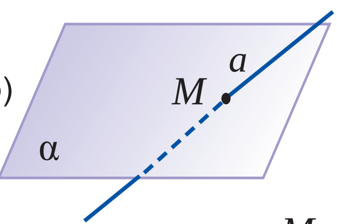
7

a)



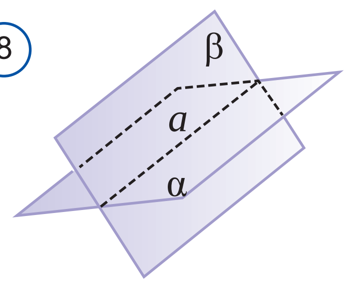
$a \subset \alpha$

b)



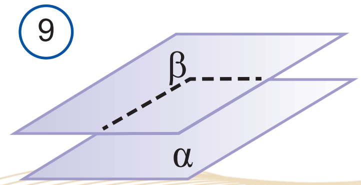
$a \not\subset \alpha, \quad \alpha \cap a = M$

8



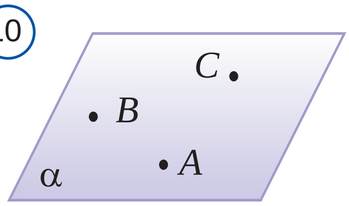
$\alpha \cap \beta = a$

9

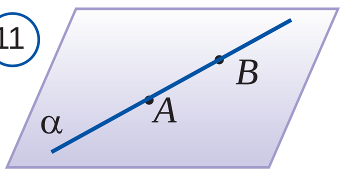


$\alpha \cap \beta = \varnothing$

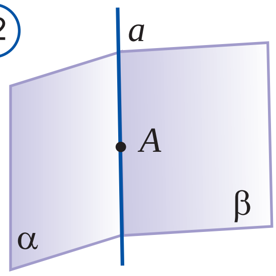
10



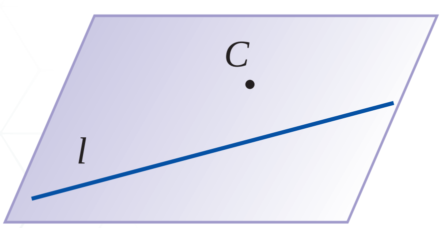
11



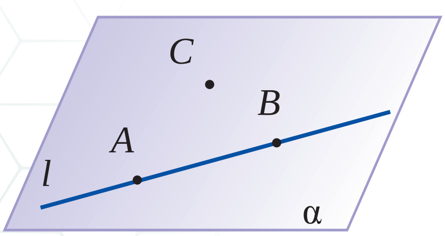
12



13 a)



b)



Stereometriya aksiomalari

Planimetriyadagi kabi stereometriyada ham ba'zi geometrik shakllarning xossalari isbotsiz qabul qilinadi. Fazoda tekisliklarning quyidagi xossalarini isbotsiz, S guruh aksiomalari sifatida qabul qilamiz:

S_1 *Agar uchta nuqta bir to‘g‘ri chiziqda yotmasa, u holda ular orqali yagona tekislik o‘tkazish mumkin (10-rasm).*

S_2 *Agar to‘g‘ri chiziqning ikki nuqtasi bitta tekislikda yotsa, u holda uning barcha nuqtalari shu tekislikda yotadi (11-rasm).*

S_3 *Agar ikki tekislik umumiy nuqtaga ega bo‘lsa, u holda bu tekisliklar shu nuqtadan o‘tuvchi umumiy to‘g‘ri chiziqqa ham ega bo‘ladi (12-rasm).*

Planimetriyada kiritilgan aksiomalar bilan birgalikda bu uchta aksioma stereometriyaning asosini tashkil qiladi. Planimetriyada biz qarayotgan barcha shakllar joylashadigan bitta tekislikka ega edik. Stereometriyada esa bunday tekisliklar cheksiz ko‘p bo‘lib, ularning barchasida planimetriya aksiomalari va planimetriyada isbotlangan barcha xossalar o‘rinli bo‘ladi, deb qaraladi. Shuningdek, stereometriya kursida planimetriya aksiomalariga stereometriya nuqtayi nazaridan qarashga to‘g‘ri keladi.

Stereometriya aksiomalaridan kelib chiquvchi natijalar

1-natija.* *To‘g‘ri chiziq va unda yotmaydigan nuqta orqali bitta va faqat bitta tekislik o‘tkazish mumkin.

Isbot. l – berilgan to‘g‘ri chiziq, C esa unda yotmagan nuqta bo‘lsin *(13a-rasm)*.

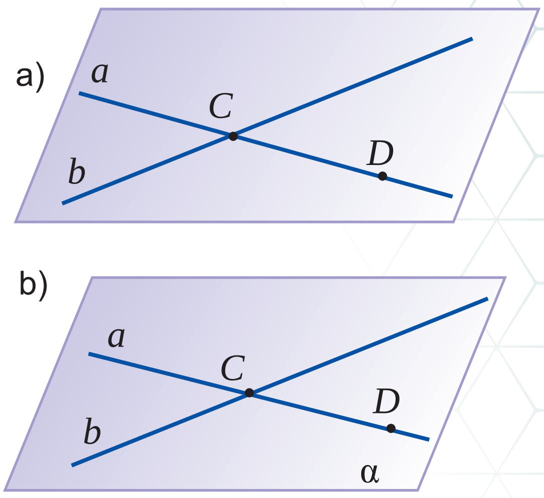
Avval teoremaning xulosa qismida aytilgan tekislikning mavjudligini ko‘rsatamiz. l to‘g‘ri chiziqda A va B nuqtalarni olamiz. Shartga ko‘ra, A, B va C nuqtalar bitta to‘g‘ri chiziqda yotmaydi. Unda S_1 aksiomaga ko‘ra, A, B va C nuqtalar orqali α tekislikni o‘tkazish mumkin *(13b-rasm)*. S_2 aksiomaga ko‘ra esa, α tekislik l to‘g‘ri chiziqdan o‘tadi.

Demak, α izlangan tekislik ekan.

Endi bu tekislikning yagonaligini ko‘rsatamiz.

Teskarisini faraz qilamiz: l – berilgan to‘g‘ri chiziq va unda yotmagan C nuqtadan yana bitta β tekislik o‘tkazish mumkin bo‘lsin. Unda β tekislik ham A, B va C nuqtalardan o‘tadi. Lekin S_1 aksiomaga ko‘ra, uchta nuqtadan faqat bitta tekislik o‘tkazish mumkin. Ziddiyat. Demak, farazimiz noto‘g‘ri. To‘g‘ri chiziq va unda yotmaydigan nuqta orqali bitta va faqat bitta tekislik o‘tkazish mumkin.

14



2-natija. Berilgan kesishuvchi ikkita to‘g‘ri chiziq orqali yagona tekislik o‘tkazish mumkin.

Isbot. Berilgan a va b to‘g‘ri chiziqlar C nuqtada kesishsin *(14a-rasm)*.

a to‘g‘ri chiziqda C nuqtadan tashqari yana bitta D nuqtani olamiz. U holda isbotlangan 1-natijaga ko‘ra, b to‘g‘ri chiziq va unda yotmagan D nuqta orqali yagona α tekislik o‘tadi *(14b-rasm)*. Bu tekislik a to‘g‘ri chiziqning C va D nuqtalaridan o‘tadi. Unda S_2 aksiomaga ko‘ra, α tekislik a to‘g‘ri chiziqdan ham o‘tadi.

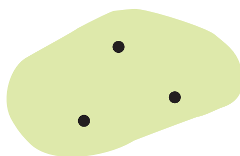
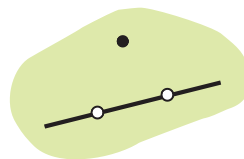
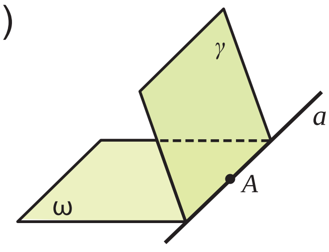
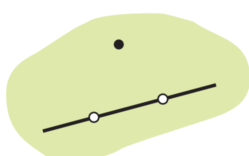
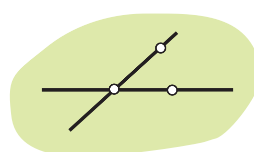
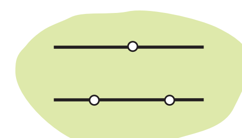
Demak, α tekislik berilgan kesishuvchi ikkita to‘g‘ri chiziq orqali o‘tadi. Bu tekislikning yagonaligini mustaqil isbotlang.

Mavzuga doir savollar

1. *Fazodagi asosiy geometrik shakllarni ayting. Ularni nimalarning timsoli sifatida olish mumkin?*
2. *Stereometriyaning S guruh aksiomalarini ayting va izohlang.*
3. *Stereometriyada planimetriya aksiomalari ham ishlaydimi? Planimetriya aksiomalariga stereometriya nuqtayi nazaridan qarash deganda nimani tushunasiz?*
4. *S_1 aksiomada uchta nuqtaning bir to‘g‘ri chiziqda yotmasligi ta’kidlangan. Bu talab shunchalik muhimmi? Uni olib tashlasa, aksioma o‘rinli bo‘ladimi? Nega?*
5. *Stereometriya aksiomalaridan kelib chiquvchi natijalarni izohlang.*

Amaliy mashq va tatbiq

4.1. Jadvalda 4-mavzuning asosiy tayanch ma'lumotlari keltirilgan. Ularni sinchiklab o'rganib chiqing va izohlang.

Stereometriya aksiomalari va ulardan kelib chiqadigan natijalar		
a)  S_1 **aksioma.** Bir to'g'ri chiziqda yotmagan uchta nuqta orqali bitta va faqat bitta tekislik o'tkazish mumkin.	b)  S_2 **aksioma.** Agar to'g'ri chiziqning ikki nuqtasi bitta tekislikda yotsa, u holda uning barcha nuqtalari shu tekislikda yotadi.	c)  S_3 **aksioma.** Agar ikki tekislik umumiy nuqtaga ega bo'lsa, u holda ular shu nuqtadan o'tuvchi umumiy to'g'ri chiziqqa ham ega bo'ladi.
 **1-natija.** To'g'ri chiziq va unda yotmagan nuqta orqali bitta va faqat bitta tekislik o'tkazish mumkin.	 **2-natija.** Kesishuvchi ikki to'g'ri chiziq orqali bitta va faqat bitta tekislik o'tkazish mumkin.	 **3-natija.** Parallel ikki to'g'ri chiziq orqali bitta va faqat bitta tekislik o'tkazish mumkin.

4.2. Quyidagi tasdiqlarga mos keladigan belgili ifodalarni toping.

Tasdiq		Ifoda
1. M nuqta α tekislikka tegishli.		$\alpha \cap \beta = \varnothing$
2. M nuqta α tekislikka tegishli emas.		$M \in \alpha$
3. a to'g'ri chiziq α tekislikda yotadi.		$M \notin \alpha$
4. a to'g'ri chiziq α tekislikda yotmaydi.		$a \subset \alpha$
5. α va β tekisliklar a to'g'ri chiziq bo'ylab kesishadi.		$\alpha \cap \beta = a$
6. α va β tekisliklar o'zaro kesishmaydi.		$a \not\subset \alpha$

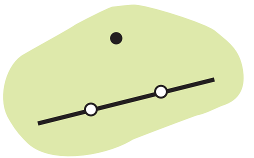
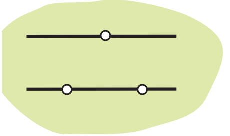
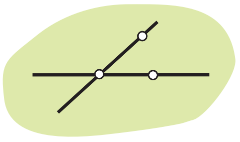
4.3. Sinfxona devorlarini tekisliklarning bo'laklari deb faraz qiling va quyidagilarni ko'rsating:

a) ikkita kesishuvchi to'g'ri chiziq;
b) ikkita kesishuvchi tekislik;
c) bir nuqtada kesishuvchi uchta to'g'ri chiziq;
d) ikkita kesishmaydigan tekislik;
e) ikkita kesishmaydigan to'g'ri chiziq;
f) uchta kesishadigan tekislik.

4.4. Quyidagi jumlalarni o‘qing. Jumla to‘g‘ri bo‘lsa “+”, noto‘g‘ri bo‘lsa “–” belgisini yonidagi katakka yozing.

1	Ikki tekislik faqat bitta umumiy nuqtaga ega bo‘lishi mumkin.	
2	Ikki tekislik faqat ikkita umumiy nuqtaga ega bo‘lishi mumkin.	
3	Ikki tekislik ikkita umumiy to‘g‘ri chiziqqa ega bo‘lishi mumkin.	
4	Berilgan kesishuvchi ikkita to‘g‘ri chiziq orqali yagona tekislik o‘tkazish mumkin.	
5	To‘g‘ri chiziq va unda yotmaydigan nuqta orqali bitta va faqat bitta tekislik o‘tkazish mumkin.	
6	Agar uchta nuqta bir to‘g‘ri chiziqda yotmasa, u holda ular orqali yagona tekislik o‘tkazish mumkin.	
7	Agar to‘g‘ri chiziqning ikki nuqtasi bitta tekislikda yotsa, u holda uning barcha nuqtalari shu tekislikda yotadi.	
8	Agar ikki tekislik umumiy nuqtaga ega bo‘lsa, u holda bu tekisliklar shu nuqtadan o‘tuvchi umumiy to‘g‘ri chiziqqa ham ega bo‘ladi.	

4.5. Quyidagi fazoviy shakllar xossalariga mos rasmni toping.

Xossalar		Rasmlar
To‘g‘ri chiziq va unda yotmagan nuqta orqali bitta va faqat bitta tekislik o‘tkazish mumkin.		
Kesishuvchi ikki to‘g‘ri chiziq orqali bitta va faqat bitta tekislik o‘tkazish mumkin.		
Parallel ikki to‘g‘ri chiziq orqali bitta va faqat bitta tekislik o‘tkazish mumkin.		

4.6. Fazoda ikki nuqtadan nechta to‘g‘ri chiziq o‘tishi mumkin?

4.7. Fazoda uchta nuqtadan nechta tekislik o‘tkazish mumkin?

4.8. Fazoda bitta to‘g‘ri chiziqdan nechta tekislik o‘tkazish mumkin?

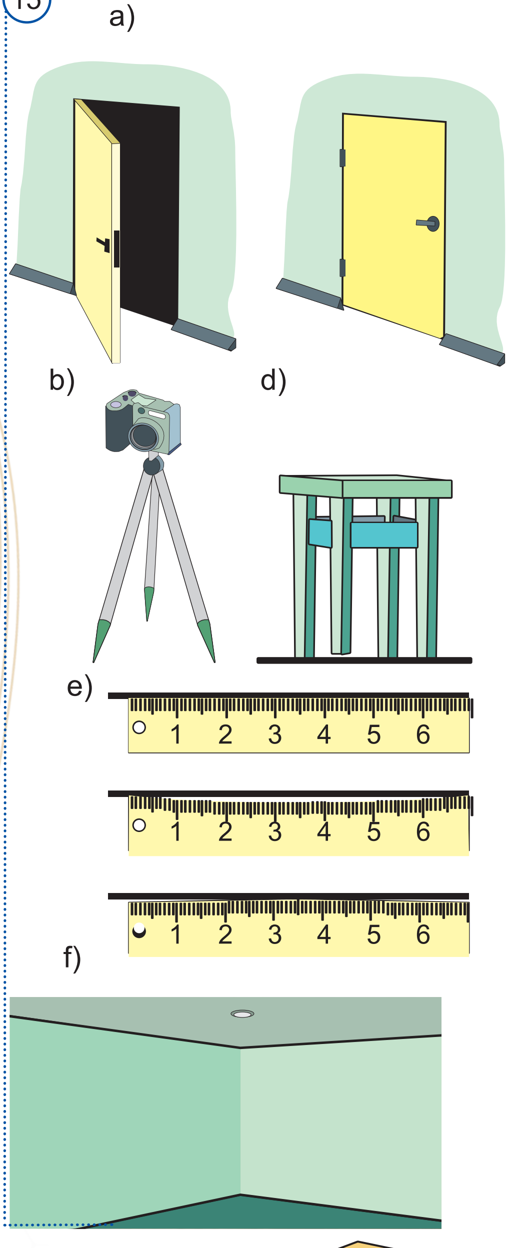
4.9. Fazoda uchta nuqta qanday joylashganda ulardan cheksiz ko‘p tekislik o‘tkazish mumkin?

4.10. Fazoda: a) ikki to‘g‘ri chiziq; b) to‘g‘ri chiziq va tekislik; c) ikki tekislik nechta umumiy nuqtaga ega bo‘lishi mumkin?

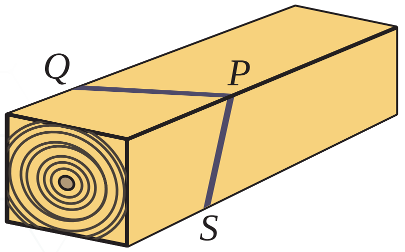
4.11. Fazoda: a) ikki to‘g‘ri chiziq; b) to‘g‘ri chiziq va tekislik; c) ikki tekislik; d) uchta tekislik yagona umumiy nuqtaga ega bo‘lishi mumkinmi?

4.12. Bir to‘g‘ri chiziqda yotuvchi uchta nuqtadan tekislik o‘tkazish mumkinligini isbotlang. Bunday tekisliklar soni nechta bo‘ladi?

15



16



17

4.13. A, B, C va D nuqtalar bitta tekislikda yotmaydi. AB va CD to‘g‘ri chiziqlarning kesishmasligini isbotlang.

4.14. Berilgan ikki to‘g‘ri chiziqning kesishgan nuqtasidan bu to‘g‘ri chiziqlar bilan bir tekislikda yotmaydigan to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkinmi? Javobingizni asoslang.

4.15. A, B, C nuqtalar ikkita turli tekislikning har birida yotadi. Bu nuqtalarning bir to‘g‘ri chiziqda yotishini isbotlang.

4.16. To‘g‘ri chiziq orqali ikkita turli tekislik o‘tishini isbotlang.

4.17. Turli: a) uchta; b) to‘rtta; c) beshta; d) n ta nuqta juftlaridan eng ko‘pi bilan nechta to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin?

4.18. Turli: a) uchta; b) to‘rtta; c) beshta; d) n ta nuqta uchligidan eng ko‘pi bilan nechta tekislik o‘tkazish mumkin?

Amaliy tatbiqlar

4.19. 15-rasmdagi holatlarni tushuntirishda qaysi aksiomalarga tayanish mumkin?

A) Nega ochiq eshik yelvizak paytida ochilib-yopilib harakatda bo‘ladi? Nega qulf ilinganda bunday harakat kuzatilmaydi?

B) Kamera oyoqlari nega uchta bo‘ladi?

C) Stul yerda mahkam turishi uchun uning oyoqlari qanday tekshiriladi?

D) Chizg‘ichning tekisligi qanday tekshiriladi?

E) Ikkita devor stereometriya aksiomalaridan kelib chiqadigan qaysi natijani tushuntirishda qo‘l keladi?

4.20. 16-rasmda duradgorning taxtani arralashdan oldin chizgan chiziqlari tasvirlangan. Uning bu ishini stereometriya aksiomalaridan kelib chiqadigan qaysi natija bilan izohlash mumkin?

4.21. 17-rasmda temirchining egri temirni tekislash jarayoni tasvirlangan. Temir oldin tekis joyga qo‘yilib, bolg‘a bilan urib tekislanadi. So‘ng aylantirilib, yana urib tekislanadi. Ikki bosqichdan iborat bu ishni stereometriya aksiomalaridan kelib chiqadigan qaysi natija bilan izohlash mumkin?

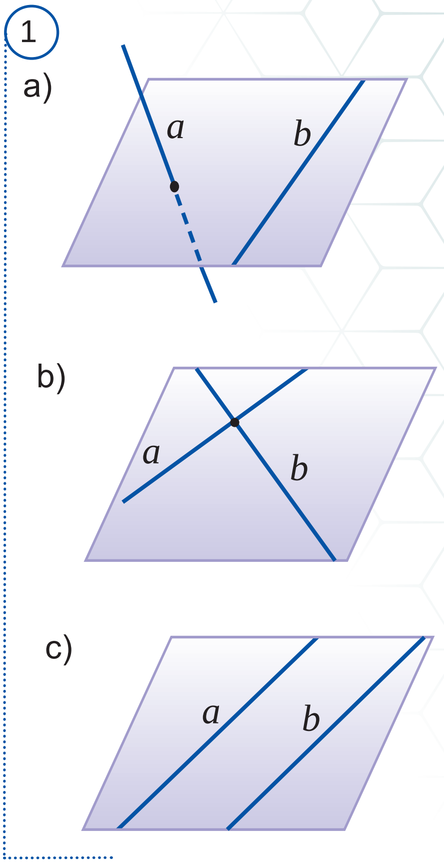
5 FAZODA TO‘G‘RI CHIZIQLAR VA TEKISLIKLAR

Fazoda to‘g‘ri chiziqlar

Fazoda ikki to‘g‘ri chiziq bir tekislikda yotishi yoki yotmasligi mumkin *(1-rasm)*. Fazoda bir tekislikda yotmaydigan ikki to‘g‘ri chiziq *ayqash to‘g‘ri chiziqlar* deyiladi *(1a-rasm)*.

Bitta tekislikda yotgan va faqat bitta umumiy nuqtaga ega bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlar *kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlar* deb ataladi *(1b-rasm)*.

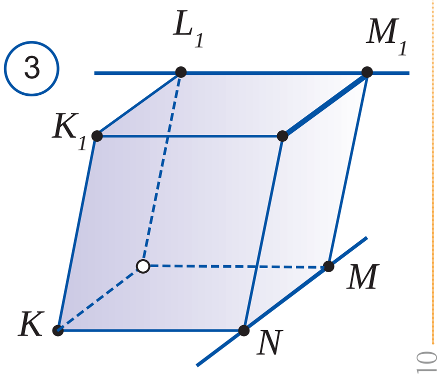
Bitta tekislikda yotgan va o‘zaro kesishmaydigan to‘g‘ri chiziqlar esa *parallel to‘g‘ri chiziqlar* deb ataladi *(1c-rasm)*.



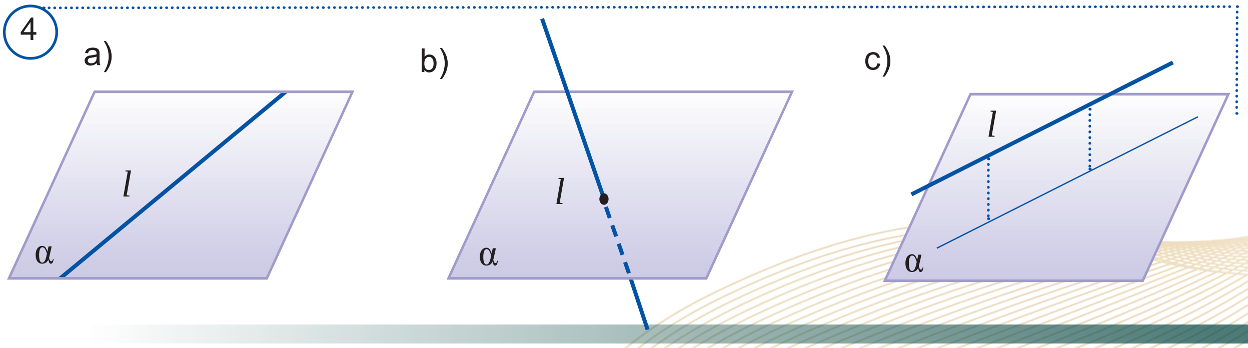
Ayqash to‘g‘ri chiziqlarga biri ko‘prikdan, ikkinchisi ko‘prik ostidan o‘tuvchi yo‘llarni misol sifatida keltirish mumkin *(2-rasm)*. Shuningdek, 3-rasmdagi parallelepipedning MN va L_1M_1 qirralari yotgan to‘g‘ri chiziqlar ham ayqash bo‘ladi.

Ayqash (parallel) to‘g‘ri chiziqlarda yotgan kesma va nurlarni ham ayqash (parallel) deb ataymiz.

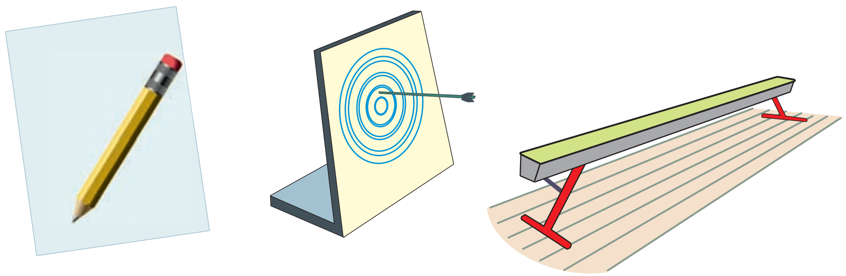
Fazoda to‘g‘ri chiziq va tekislik



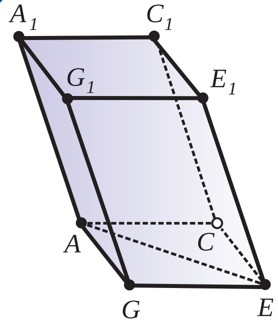
To‘g‘ri chiziq tekislikda yotishi *(4a-rasm)*, uni kesib o‘tishi *(4b-rasm)* yoki kesib o‘tmasligi, ya’ni umumiy nuqtaga ega bo‘lmasligi *(4c-rasm)* mumkin. Oxirgi holatda *to‘g‘ri chiziq tekislikka parallel* deb ataladi.



5 a) b) c)

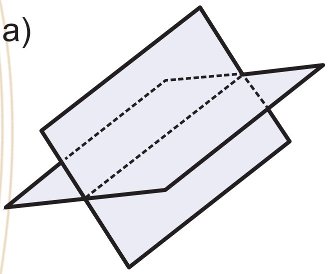


6

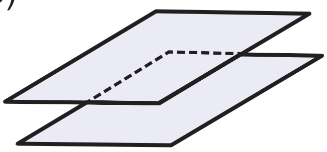


7

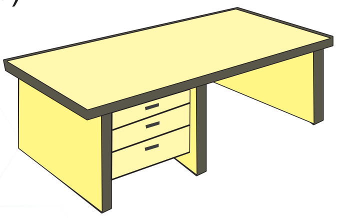
a)



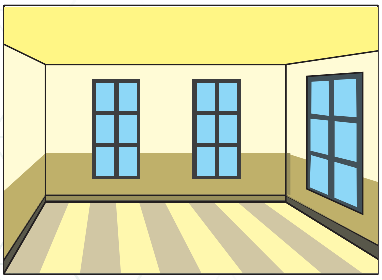
b)



c)



d)



Stol ustida yotgan qalam tekislikda yotgan to‘g‘ri chiziq haqida *(5a-rasm)*, nishonga qadalgan o‘q *(5b-rasm)* tekislikni kesib o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq haqida hamda polda turgan gimnastik yog‘och tekislikka parallel to‘g‘ri chiziq haqida *(5c-rasm)* tasavvur beradi.

6-rasmda tasvirlangan parallelepipedning $AGEC$ asosining diagonali AE yotgan to‘g‘ri chiziq asos tekisligida yotadi, AGA_1G_1 yoq yotgan tekislikni kesib o‘tadi hamda $A_1G_1E_1C_1$ yuqori asos tekisligiga parallel bo‘ladi.

Fazoda tekisliklar

Endi fazoda tekisliklarning o‘zaro joylashishiga oydinlik kiritaylik.

Fazoda tekisliklar biror to‘g‘ri chiziq bo‘ylab kesishishi *(7a-rasm)* yoki umumiy nuqtaga ega bo‘lmasligi mumkin *(7b-rasm)*. Shundan kelib chiqib, bu tekisliklar mos ravishda *kesishuvchi* yoki *parallel tekisliklar* deb ataladi.

7c-rasmda tasvirlangan stolning ustki sirti va yon yog‘i kesishuvchi tekisliklar haqida, xonaning poli va shifti esa *(7d-rasm)* parallel tekisliklar haqida tasavvur beradi.

Shuningdek, 6-rasmda tasvirlangan parallelepipedning qarama-qarshi bo‘lmagan yon yoqlari kesishuvchi tekisliklar haqida, pastki va ustki asoslari hamda qarama-qarshi yoqlari esa parallel tekisliklar haqida tasavvur beradi.

Parallellik belgisi – “// ” nafaqat parallel to‘g‘ri chiziqlarni, balki tekislikka parallel to‘g‘ri chiziqni va parallel tekisliklarni belgilashda ham ishlatiladi:

$$a \parallel b,\ a \parallel \alpha \text{ va } \alpha \parallel \beta.$$

Ba’zida tekisliklar bir to‘g‘ri chiziqda yotmagan uchta: A, B va C nuqtasi yordamida “ABC tekislik” tarzida ham belgilanadi.

Mavzuga doir savollar

1. Tekislikda yotuvchi qanday to‘g‘ri chiziqlar: a) kesishuvchi; b) parallel deb ataladi?
2. Qanday to‘g‘ri chiziqlar ayqash deb ataladi? Misollar keltiring.
3. Fazoda ikki to‘g‘ri chiziq qanday joylashishi mumkin?
4. Qanday to‘g‘ri chiziqlar: a) tekislikda yotuvchi; b) tekislikka parallel deb ataladi?
5. Fazoda to‘g‘ri chiziq va tekislik qanday joylashishi mumkin?
6. Fazoda qanday tekisliklar: a) kesishuvchi; b) parallel deb ataladi?
7. Fazoda ikki tekislik qanday joylashishi mumkin?

Amaliy mashq va tatbiq

5.1. Jadvallarda 5-bandning asosiy tayanch ma’lumotlari keltirilgan. Ularni sinchiklab o‘rganib chiqing va izohlang.

Shakllar	Fazoda to‘g‘ri chiziqlarning o‘zaro joylashuvi		
a va b to‘g‘ri chiziqlar	Bitta tekislikda yotadi	Bitta umumiy nuqtaga ega	Kesishuvchi: $a \otimes b$
		Umumiy nuqtaga ega emas	Parallel: $a \parallel b$
	Bitta tekislikda yotmaydi		Ayqash: $a \dot{-} b$

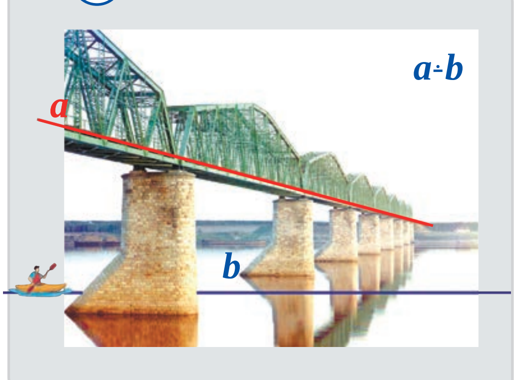
Shakllar	Fazoda to‘g‘ri chiziq va tekisliklarning o‘zaro joylashuvi		
a to‘g‘ri chiziq va α tekislik	a to‘g‘ri chiziq α tekislikda yotmaydi.	a to‘g‘ri chiziq α tekislik bilan bitta umumiy nuqtaga ega.	Kesishuvchi: $a \otimes \alpha$
		a to‘g‘ri chiziq α tekislik bilan bitta umumiy nuqtaga ega emas.	Parallel: $a \parallel \alpha$
	a to‘g‘ri chiziq α tekislikda yotadi.		$a \subset \alpha$

Shakllar	Fazoda to‘g‘ri chiziqlarning o‘zaro joylashuvi	
α va β tekisliklar	Umumiy nuqtaga ega.	Kesishuvchi: $\alpha \cap \beta = a$ to‘g‘ri chiziq
	Umumiy nuqtaga ega emas.	Parallel: $\alpha \parallel \beta$

5.2. 8-rasmda fazoda ayqash to‘g‘ri chiziqlar nimalar tasvirlayotganini aniqlang.

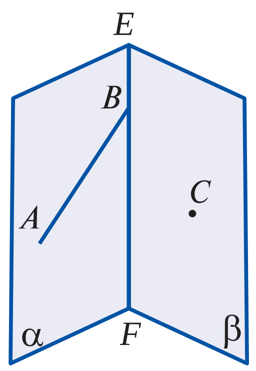
5.3. Kub modelida uning quyidagi elementlari juftlarini ko‘rsating:
a) bitta umumiy nuqtaga ega ikkita qirra;
b) umumiy nuqtaga ega bo‘lmagan ikkita qirra;
c) bitta tekislikda yotmaydigan ikkita qirra;
d) bitta umumiy nuqtaga ega qirra va yoq;
e) umumiy nuqtaga ega bo‘lmagan qirra va yoq;
f) yoq va unda yotgan qirra;
g) kesishmaydigan ikkita yoq;
h) kesishadigan ikkita yoq.

8



5.4. Quyidagi jadvaldagi ikki to‘g‘ri chiziqning xossalariga ko‘ra o‘zaro joylashishini moslang.

To‘g‘ri chiziqlarning xossalari	*O‘zaro joylashuvi*
Bitta tekislikda yotadi va umumiy nuqtaga ega emas.	Ayqash
Bitta tekislikda yotadi va umumiy nuqtaga ega.	Parallel
Bitta tekislikda yotmaydi.	Kesishuvchi

9


5.5. 9-rasmdagi α va β tekisliklar EF to‘g‘ri chiziq bo‘ylab kesishadi. AB to‘g‘ri chiziq α tekislikda yotadi. β tekislikda yotgan C nuqtadan shunday to‘g‘ri chiziq o‘tkazingki, u:

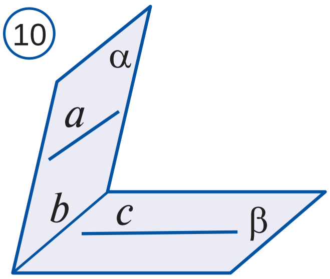
a) AB to‘g‘ri chiziqni kesib o‘tsin;

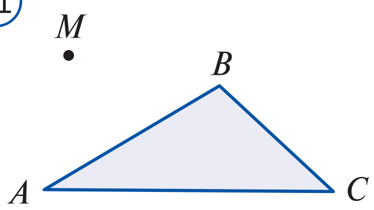
b) AB to‘g‘ri chiziq bilan ayqash bo‘lsin;

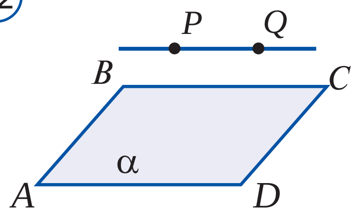
c) AB to‘g‘ri chiziq bilan parallel bo‘lsin.

5.6. $a \parallel b$ va $a \parallel \alpha$ ekani ma’lum. b to‘g‘ri chiziq va α tekislik o‘zaro qanday joylashgan bo‘lishi mumkin?

5.7. $\alpha \parallel \beta$, $a \subset \alpha$ va $b \subset \beta$ ekani ma’lum. a va b to‘g‘ri chiziqlar o‘zaro qanday joylashgan bo‘lishi mumkin?

10


11


12


5.8. 10-rasmda α va β tekisliklar b to‘g‘ri chiziq bo‘ylab kesishadi. Agar $a \parallel b$, c va b to‘g‘ri chiziqlar parallel bo‘lmasa, a va c to‘g‘ri chiziqlar o‘zaro qanday joylashishi mumkin?

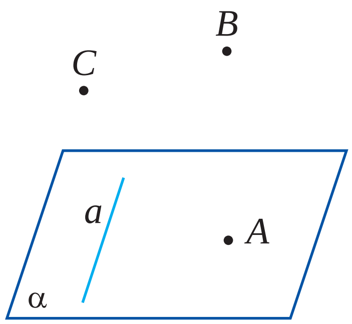
5.9. 11-rasmda M nuqta ABC uchburchak tashqi sohasida yotibdi. MA, MC, MB to‘g‘ri chiziqlarga ayqash to‘g‘ri chiziqlarni aniqlang.

5.10. 12-rasmda PQ to‘g‘ri chiziq $ABCD$ to‘rtburchakning tashqi sohasida yotadi va BC ga parallel: a) PQ va AB; b) PQ va CD; c) PQ va AD qanday to‘g‘ri chiziqlar?

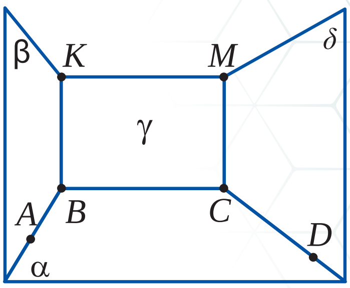
5.11. $ABCP$ uchburchakli piramida (tetraedr) berilgan. Quyidagi jadvalda keltirilgan to‘g‘ri chiziqlar o‘zaro qanday joylashadi? Mos katakka tegishli belgi (⊗ – kesishadi, ∸ – ayqash, // – parallel)ni qo‘ying.

	AB	BC	AC	PA	PB	PC
AB						
BC						
AC						
PA						
PB						
PC						

13



14



5.12. 13-rasmda a to‘g‘ri chiziq va A nuqta α tekislikka tegishli. C va B nuqtalar esa bu tekislikka tegishli emas. Quyidagilardan o‘tuvchi tekislik berilgan α tekislikdan farqli bo‘ladimi?

A) a to‘g‘ri chiziq va B nuqtadan;
B) a to‘g‘ri chiziq va C nuqtadan;
C) AB va AC to‘g‘ri chiziqdan;
D) AB va BC to‘g‘ri chiziqdan;

5.13. 14-rasmdagi ma’lumotlardan foydalanib jadvalni namunaga ko‘ra to‘ldiring:

Tekisliklar	α va β	α va γ	α va δ	β va γ	γ va δ
Umumiy nuqtalari	A va B				
Umumiy to‘g‘ri chiziq	AB				

5.14. Quyidagi jumlalarni o‘qing. Ularning har doim, ba’zida yoki hech qachon to‘g‘ri bo‘lish yoki bo‘lmasligini aniqlab, jadvalning mos katagiga “+” belgisini qo‘ying. Javobingizni asoslovchi misollar keltiring.

	Jumla	Har doim	Ba’zida	Hech qachon
1	Fazoda to‘g‘ri chiziq tekislikda yotmaydi.			
2	Ikki tekislik faqat bitta umumiy nuqtaga ega.			
3	Tekisliklar to‘g‘ri chiziq bo‘yicha kesishadi.			
4	Ikki tekislik faqat ikkita umumiy nuqtaga ega.			
5	Ikki tekislik ikkita umumiy to‘g‘ri chiziqqa ega.			
6	Kesishuvchi ikkita to‘g‘ri chiziq orqali yagona tekislik o‘tadi.			
7	To‘g‘ri chiziq va nuqta orqali bitta tekislik o‘tadi.			
8	Uchta nuqta orqali yagona tekislik o‘tadi.			
9	To‘g‘ri chiziqning bitta nuqtasi tekislikda yotsa, uning barcha nuqtalari ham shu tekislikda yotadi.			
10	Ikki tekislik umumiy nuqtaga ega bo‘lsa, ular ustma-ust tushadi.			

6 FAZOVIY GEOMETRIK SHAKLLAR. KO‘PYOQLAR

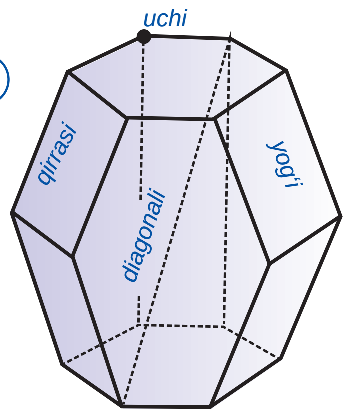
Quyi sinflarda qator fazoviy geometrik shakllar bilan tanishdik. Ularning ba’zilarini *fazoviy jismlar* deb ham atadik. Fazoviy jismlarni qandaydir moddiy jism egallagan borliqning bo‘lagi sifatida tasavvur qilish mumkin. Fazoviy jismni uning sirti chegaralab turadi.

Ko‘pyoq deb yassi ko‘pburchaklar bilan chegaralangan jismga aytiladi. Yassi ko‘pburchaklar *ko‘pyoqning yoqlari,* ko‘pburchaklarning uchlari *ko‘pyoqning uchlari,* tomonlari esa *ko‘pyoqning qirralari* deb ataladi. Bitta yoqqa tegishli bo‘lmagan uchlarni birlashtiruvchi kesma *ko‘pyoqning diagonali* deb ataladi *(1-rasm)*.

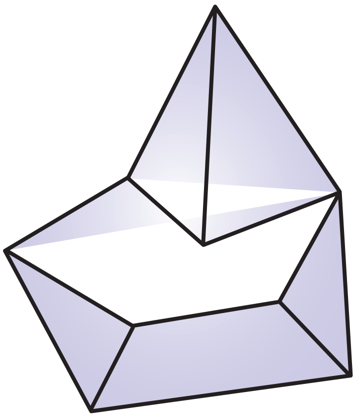
Ko‘pyoqning chegarasi uning *sirti* deb ataladi. Ko‘pyoqning sirti fazoni ikki qismga ajratadi. Ulardan cheksiz qismi *ko‘pyoqning tashqi sohasi,* chekli qismi esa *ko‘pyoqning ichki sohasi* deb ataladi.

Ko‘pyoq ixtiyoriy yog‘i yotgan tekislikning bir tomonida yotsa, bunday ko‘pyoqqa *qavariq ko‘pyoq* deyiladi.

1



2

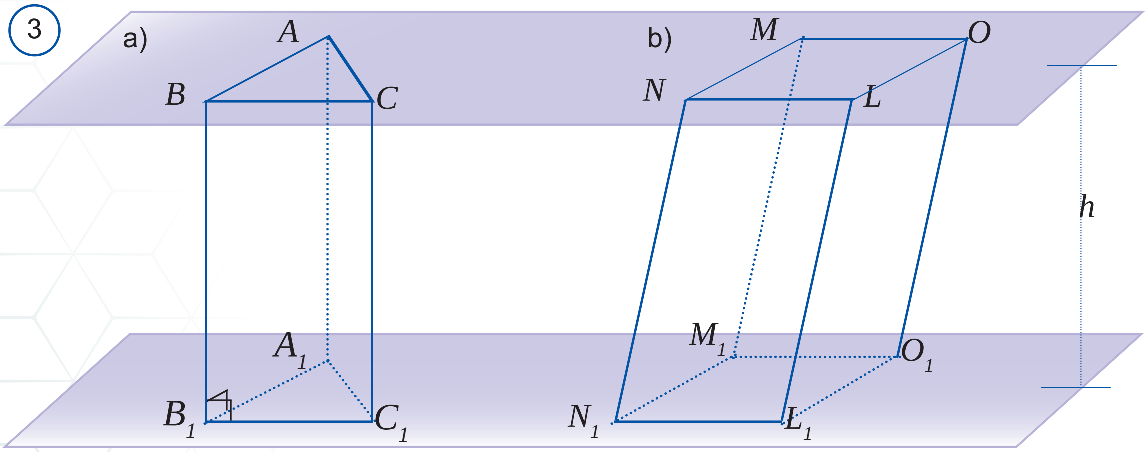


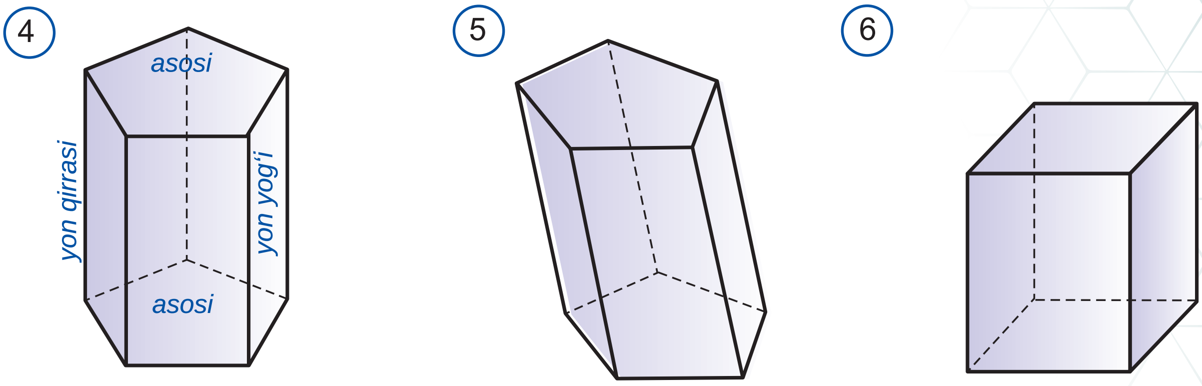
Masalan, kub – qavariq ko‘pyoqdir. 2-rasmda esa qavariq bo‘lmagan ko‘pyoq tasvirlangan. Kelgusida eng sodda qavariq ko‘pyoqlar – prizma va piramidalarni o‘rganamiz.

Prizma deb ikki yog‘i teng ko‘pburchakdan, qolgan yoqlari esa parallelogrammlardan iborat ko‘pyoqqa aytiladi *(3-rasm)*. Teng yoqlar prizmaning *asoslari*, parallelogrammlar esa uning *yon yoqlari* deb ataladi *(4-rasm)*.

Asosining tomonlari soniga qarab prizmalar *uchburchakli, to‘rtburchakli* va hokazo *n burchakli prizmalar* deb yuritiladi. 3a-rasmda uchburchakli $ABCA_1B_1C_1$ prizma, 3b-rasmda esa to‘rtburchakli $MNLOM_1N_1L_1O_1$ prizma tasvirlangan.

3





Yon yoqlari to‘g‘ri to‘rtburchaklardan iborat prizmaga *to‘g‘ri prizma* *(4-rasm)*, aks holda *og‘ma prizma* *(5-rasm)* deb ataladi.

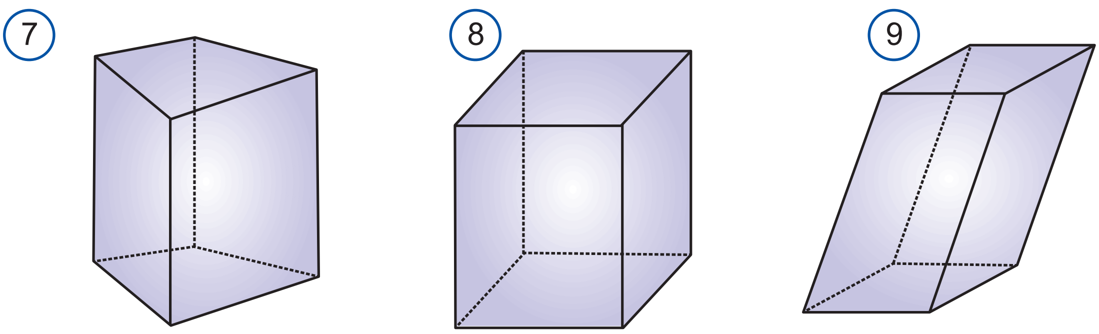
Asosi muntazam ko‘pburchakdan iborat to‘g‘ri prizma *muntazam prizma* deb ataladi *(6-rasm)*.

Asoslari parallelogrammdan iborat prizma *parallelepiped* deb nomlanadi *(7-rasm)*. Parallelepipedlar ham prizma kabi to‘g‘ri *(8-rasm)* va og‘ma *(9-rasm)* bo‘lishi mumkin. To‘g‘ri parallelepipedning yon yoqlari to‘g‘ri to‘rtburchaklardan iborat bo‘ladi.

Asosi to‘g‘ri to‘rtburchakdan iborat to‘g‘ri parallelepiped *to‘g‘ri burchakli parallelepiped* deb ataladi *(8-rasm)*. Ravshanki, to‘g‘ri burchakli parallelepipedning barcha yoqlari to‘g‘ri to‘rtburchaklardan iborat bo‘ladi.

To‘g‘ri burchakli parallelepipedning bitta uchidan chiquvchi uchta qirrasi uzunliklari uning *o‘lchamlari* deb aytiladi.

O‘lchamlari o‘zaro teng bo‘lgan to‘g‘ri burchakli parallelepiped *kub* deb nomlanadi. Ravshanki, kubning barcha yoqlari teng kvadratlardan iborat bo‘ladi.

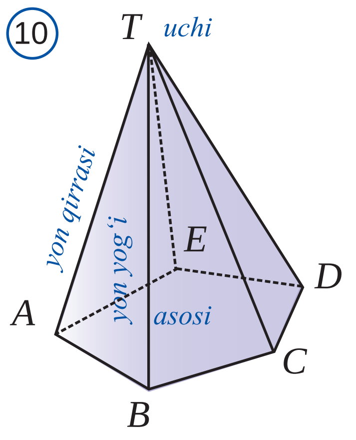


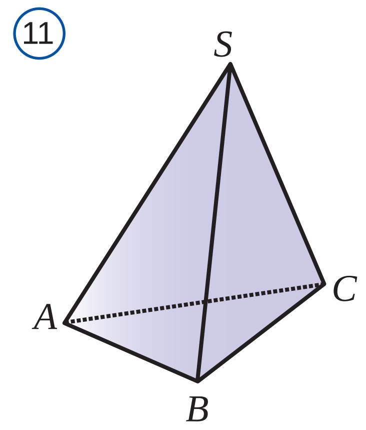
Piramida deb bir yog‘i ko‘pburchakdan, qolgan yoqlari esa bitta uchga ega uchburchaklardan iborat ko‘pyoqqa aytiladi. Ko‘pburchak piramidaning *asosi*, uchburchaklar esa uning *yon yoqlari* deb ataladi. 10-rasmda $TABCDE$ beshburchakli piramida tasvirlangan. $ABCDE$ beshburchak – piramidaning asosi, ATB, BTC, CTD, DTE va ETA uchburchaklar – uning yon yoqlari, T esa uning uchi.

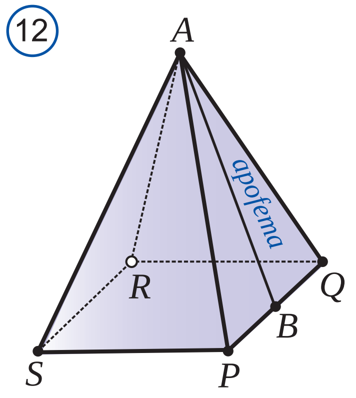
Asosining tomonlari soniga qarab piramidalar *uchburchakli, to‘rtburchakli* va hokazo *n burchakli piramidalar* deb yuritiladi. Uchburchakli piramida *tetraedr* deb ham ataladi.

11-rasmda uchburchakli, 12-rasmda esa to‘rtburchakli piramida tasvirlangan.

Muntazam piramida deb asosi muntazam ko‘pburchak va yon yoqlari o‘zaro teng bo‘lgan piramidaga aytiladi.

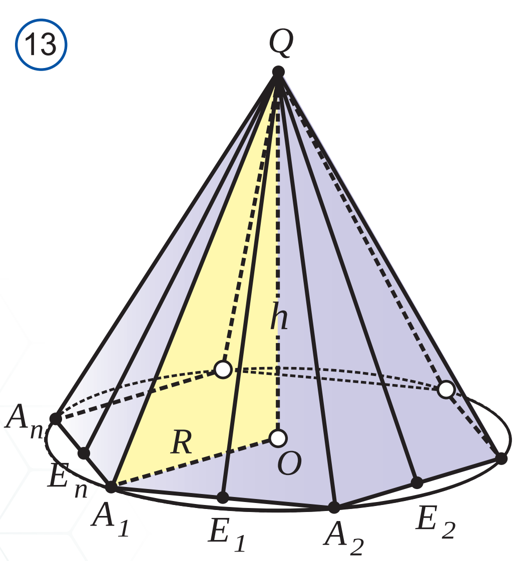






Muntazam piramida yon yog'ining piramida uchidan tushirilgan balandligi uning *apofemasi* deb yuritiladi. 12-rasmda $APQRS$ to'rtburchakli muntazam piramida tasvirlangan. Undagi AB kesma piramida apofemalaridan biridir.

2.1-teorema. ***Muntazam piramidaning: a) yon yoqlari; b) yon qirralari; c) apofemalari o'zaro teng.***



Isbot. Aytaylik, $QA_1A_2... A_n$ muntazam piramida, O esa piramida asosining markazi bo'lsin *(13-rasm)*.

1) OA_1, OA_2, ... OA_n kesmalar muntazam ko'pburchakka tashqi chizilgan aylana radiusidan iborat bo'lgani uchun o'zaro teng bo'ladi. To'g'ri burchakli QOA_1, QOA_2, ..., QOA_n uchburchaklarda ikkita katet o'zaro teng bo'lgani uchun ular teng bo'ladi. Unda ularning gipotenuzalari ham teng bo'ladi:

$$QA_1 = QA_2 = ... = QA_n.$$

2) $QA_1A_2... A_n$ muntazam piramidaning yon qirralari o'zaro teng bo'lgani uchun uning yon yoqlari teng yonli uchburchaklardan iborat bo'ladi. Bu uchburchaklarning asoslari muntazam ko'pburchakning tomoni bo'lgani uchun o'zaro teng bo'ladi.

Demak, muntazam piramidaning yon yoqlari uchta tomoni bo'yicha o'zaro teng.

3) Muntazam piramidaning yon yoqlari teng bo'lgani uchun ularning Q uchidan tushirilgan balandliklari ham o'zaro teng bo'ladi.

Demak, muntazam piramidaning apofemalari ham o'zaro teng.

2.2-teorema. ***Muntazam piramidaning yon sirti asosining yarim perimetri va apofemasi ko‘paytmasiga teng.***

Isbot. Aytaylik, $QA_1A_2... A_n$ muntazam piramida bo‘lsin *(13-rasm).* Piramidaning yon sirti uning yon yoqlari yuzlari yig‘indisiga teng. Uning yon yoqlari esa o‘zaro teng bo‘lgan teng yonli uchburchaklardan iborat. O‘z navbatida, bu uchburchaklarning balandliklari ham o‘zaro teng apofemalardan iborat: $QE_1 = QE_2 = ... = QE_n$.

Bulardan: $S = S_{A_1QA_2} + S_{A_2QA_3} + ... + S_{A_nQA_1} =$

$$= \frac{1}{2} A_1A_2 \cdot QE_1 + \frac{1}{2} A_2A_3 \cdot QE_2 + ... + \frac{1}{2} A_nA_1 \cdot QE_n =$$

$$= \frac{1}{2} (A_1A_2 + A_2A_3 + ... + A_nA_1)\, QE_1 = p \cdot a.$$

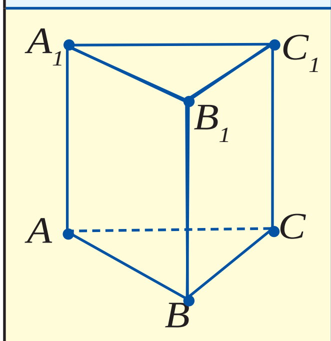
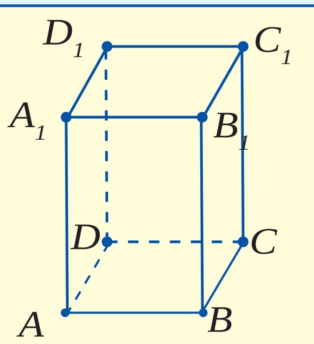
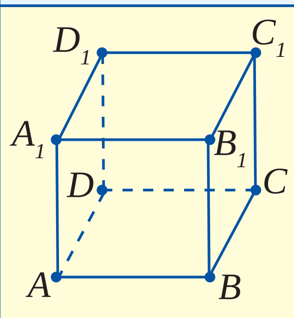
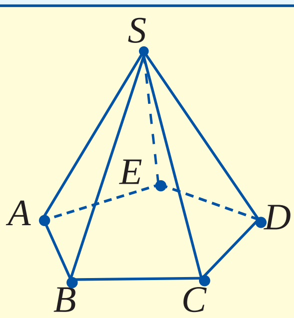
bu yerda p – piramida asosining yarim perimetri, a – piramida apofemasi.

Mavzu bo‘yicha savollar

1. *Qanday geometrik shakllar: a) yassi; b) fazoviy deb ataladi?*
2. *Fazoviy jism nima?*
3. *Qanday jism ko‘pyoq deb ataladi? Uning elementlariga ta’rif bering.*
4. *Qanday jism prizma deb ataladi? Uning elementlariga ta’rif bering.*
5. *Prizmaning qanday turlarini bilasiz?*
6. *To‘g‘ri burchakli parallelepipedga ta’rif bering.*
7. *Qanday jism piramida deb ataladi? Uning elementlariga ta’rif bering.*
8. *Piramidaning qanday turlarini bilasiz?*
9. *Muntazam piramidaning xossalarini ayting.*

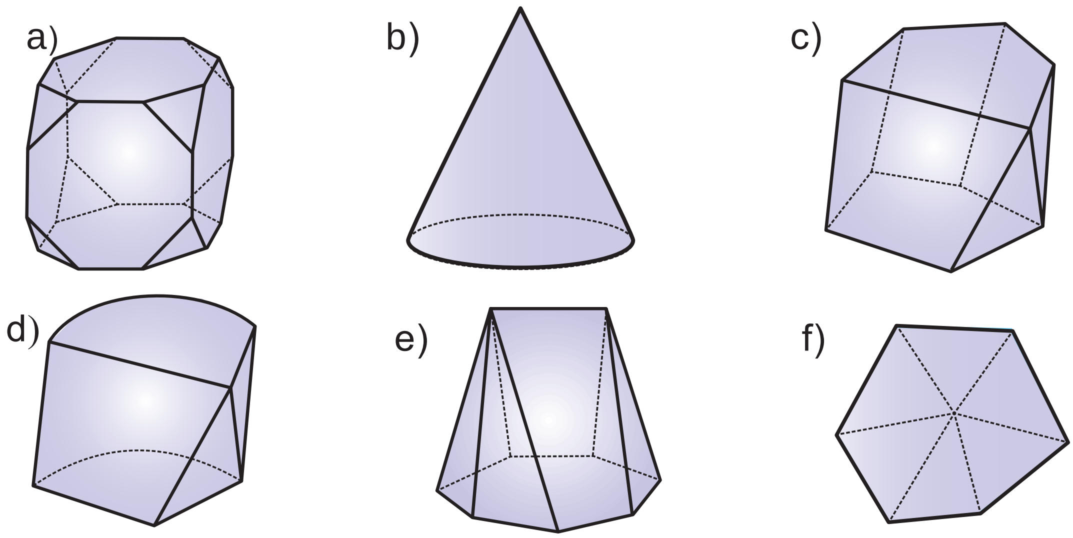
Amaliy mashq va tatbiq

6.1. Jadvalda 6-mavzuning asosiy tayanch ma’lumotlari keltirilgan. Ularni sinchiklab o‘rganib chiqing va izohlang.

Ko‘pyoqlar			
Prizma	**To‘g‘ri burchakli parallelepiped**	**Kub**	**Piramida**
			
Asoslari – ko‘pburchak, yoqlari – parallelogrammlar	Asoslari – to‘g‘ri to‘rtburchak, yoqlari – to‘g‘ri to‘rtburchaklar	Asoslari – kvadrat, yoqlari – kvadrat	Asosi – ko‘pburchak, yoqlari – uchburchak

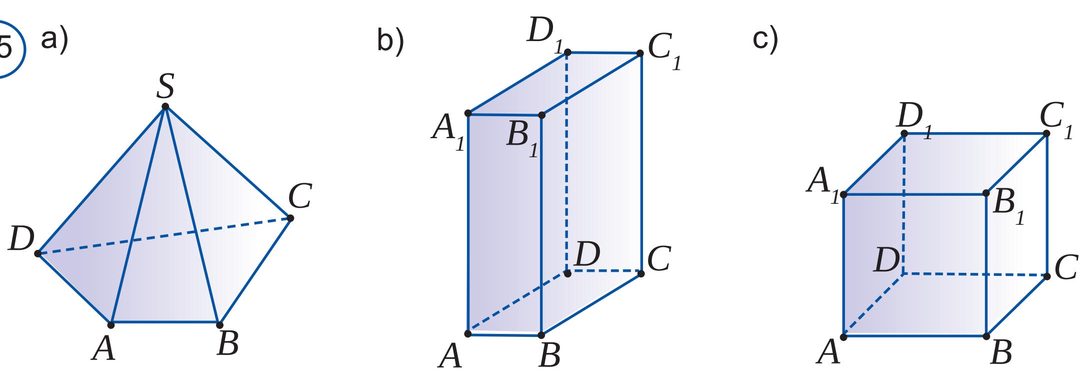
6.2. 14-rasmdagi fazoviy jismlarning qaysilari ko‘pyoq bo‘ladi?

14

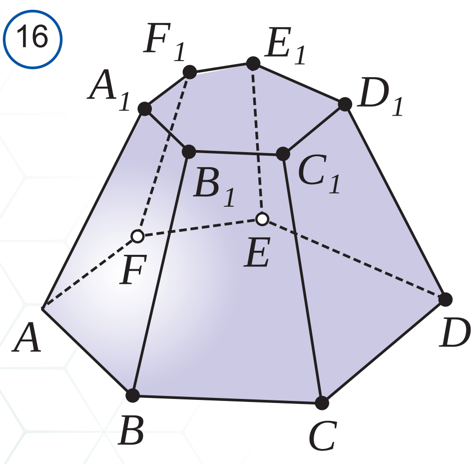


6.3. 15-rasmdagi fazoviy jismlarning qaysi biri: 1) kub; 2) piramida; 3) prizma?

15



16



6.4. 15a-rasmdagi piramidaning nechta uchi, qirrasi va yog‘i bor? Asosi qanday ko‘pburchakdan iborat? Yon yoqlari-chi?

6.5. 15b-rasmdagi prizmaning nechta uchi, qirrasi va yog‘i bor? Asoslari qanday ko‘pburchaklardan iborat? Yon yoqlari-chi?

6.6. 16-rasmda $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ ko‘pyoq tasvirlangan. Undagi:

a) CD qirra umumiy bo‘lgan yoqlarni;

b) DD_1 qirra umumiy bo‘lgan yoqlarni;

c) E uch umumiy bo‘lgan yoqlarni;

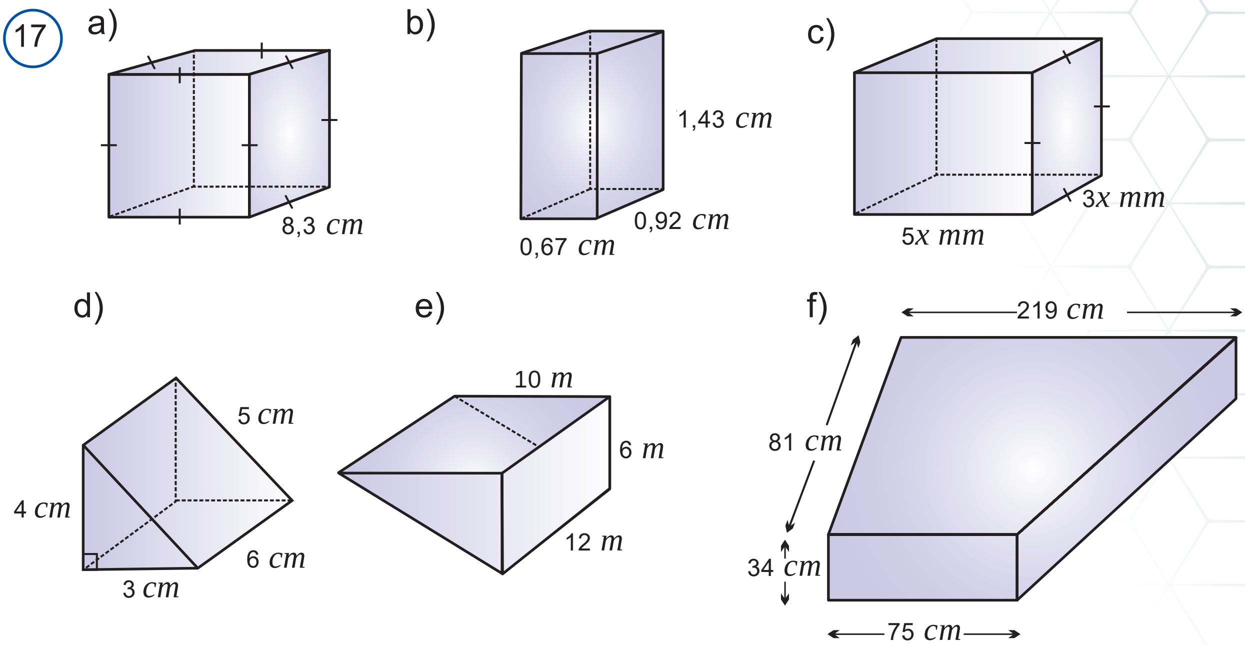
d) C_1 uch umumiy bo‘lgan yoqlarni;

e) A uch umumiy bo‘lgan qirralarni;

f) F_1 uch umumiy bo‘lgan qirralarni ayting.

6.7. Prizmaning: a) 9 ta; b) 16 ta uchi bo‘lishi mumkinmi?

17



6.8. Ixtiyoriy prizmaning uchlari soni juft bo'lishini asoslang.

6.9. Prizmaning: a) 14 ta; b) 15 ta qirrasi bo'lishi mumkinmi?

6.10. Ixtiyoriy prizmaning qirralari soni 3 ga karrali bo'lishini asoslang.

6.11. Prizmaning a) 10 ta uchi; b) 18 ta qirrasi; c) 8 ta yog'i bor bo'lsa, uning turini aniqlang.

6.12. Ixtiyoriy *n* burchakli prizmaning: a) uchlari; b) qirralari; c) yoqlari sonini hisoblash formulasini keltirib chiqaring.

6.13. Piramidaning: a) 3 ta; b) 7 ta uchi bo'lishi mumkinmi?

6.14. Piramidaning: a) 20 ta; b) 21 ta qirrasi bo'lishi mumkinmi?

6.15. Ixtiyoriy piramidaning qirralari soni juft bo'lishini asoslang.

6.16. Piramidaning: a) 6 ta uchi; b) 22 ta qirrasi; c) 10 ta yog'i bor bo'lsa, uning turini aniqlang.

6.17. Prizmaning: a) 9 ta; b) 16 ta yog'i bo'lishi mumkinmi?

6.18. 15 ta qirrasi bor prizmaning asosi qanday ko'pburchakdan iborat?

6.19. 32 ta qirrasi bor piramidaning asosi qanday ko'pburchakdan iborat?

6.20. Ixtiyoriy *n* burchakli piramidaning a) uchlari; b) qirralari; c) yoqlari sonini hisoblash formulasini keltirib chiqaring.

6.21. 17-rasmdagi ma'lumotlardan foydalanib ko'pyoqlarning to'la sirtini toping.

Fransiya imperatori Napoleon Bonapart juda o‘tkir va jonli fikrga ega bo‘lib, geometriyada zo‘r edi. U bu fanni harbiy ishlarda ham, boshqa jabhalarda ham muhim deb hisoblagan. Imperator hatto geometriyaga oid bir qancha jiddiy ilmiy ishlar ham yozgan. Uning sharafiga geometrik masalalardan biri keyinchalik "Napoleon masalasi" deb nomlangan.

6.22. To‘g‘ri prizmaning yon yoqlari to‘g‘ri to‘rtburchak ekanini isbotlang.

6.23. To‘g‘ri prizma yon sirti asosining perimetri va yon qirrasining ko‘paytmasiga teng ekanini isbotlang.

6.24. To‘g‘ri parallelepipedning asosi – diagonallari 10 m va 24 m bo‘lgan rombdan iborat. Agar parallelepipedning yon qirrasi 8 m bo‘lsa, uning to‘la sirtini toping.

6.25. To‘g‘ri burchakli parallelepipedning barcha yoqlari to‘g‘ri to‘rtburchak ekanini isbotlang.

6.26. Muntazam uchburchakli prizma asosining tomoni 6 cm, yon qirrasi esa 11 cm ga teng. Prizmaning to‘la sirtini toping.

6.27. Muntazam n burchakli prizma asosining tomoni a, yon qirrasi h ga teng. Agar: a) $n = 3$, $a = 5$, $h = 10$; b) $n = 4$, $a = 10$, $h = 30$; c) $n = 6$, $a = 18$, $h = 32$; d) $n = 5$, $a = 16$, $h = 25$ bo‘lsa, prizmaning yon sirti va to‘la sirtini toping.

6.28. Muntazam uchburchakli piramida apofemasi 15 ga, piramida uchini asos markazi bilan tutashtiruvchi kesma uzunligi 12 ga teng. Piramidaning: a) yon qirrasi va asosining tomonini; b) yon sirtini; c) to‘la sirtini toping.

6.29*. Piramida asosi tomonlari 8 va 10, kichik diagonali 6 ga teng bo‘lgan parallelogrammdan iborat. Piramida uchini asos diagonallari kesishish nuqtasi bilan tutashtiruvchi kesma uzunligi 4 ga teng va u bu diagonallarga perpendikulyar. Piramidaning: a) yon qirralarini; b) yon sirtini; c) to‘la sirtini toping.

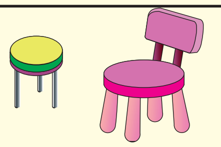
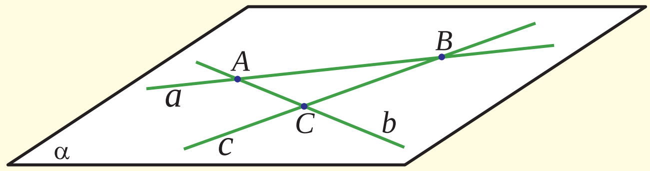
6.30*. Muntazam oltiburchakli piramida asosi tomoni 10 cm ga teng. Piramida uchini asos markazi bilan tutashtiruvchi kesma uzunligi $\sqrt{69}$ cmga teng. Piramidaning: a) yon qirrasi va apofemasini; b) yon sirtini; c) to‘la sirtini toping.

6.31. Muntazam oltiburchakli piramida yon sirtining yuzi 150 m^2 ga, apofemasi 8 m va yon qirrasi esa 10 m ga teng. Piramida asosining yuzini toping.

6.32. To‘g‘ri prizmaning asosi gipotenuzasi 5 cm, kateti 4 cm bo‘lgan to‘g‘ri burchakli uchburchakdir. Agar eng kichik katet yotgan yoq kvadrat bo‘lsa, prizmaning yon sirti yuzini toping.

O‘ZINGIZNI SINAB KO‘RING

1. Quyidagi jumlalarni o‘qing. Jumla to‘g‘ri bo‘lsa “+”, noto‘g‘ri bo‘lsa “–” belgisini yonidagi katakka qo‘ying.

A	A, B, C, D nuqtalar bir tekislikda yotmaydi. A, B, C va B, D, A nuqtalardan o‘tuvchi ikkita tekislik DB to‘g‘ri chiziq bo‘yicha kesishadi.	
B	Yerda 3 oyoqli kursi 4 oyoqli stulga qaraganda mustahkam turadi. 	
C	$ABCD$ to‘rtburchakning faqat uchta – A, B, C uchlari bitta tekislikda yotadi.	
D	Bitta to‘g‘ri chiziqda yotmagan uchta nuqtadan faqat va faqat bitta tekislik o‘tkazish mumkin	
E	A, B, C, D nuqtalar bitta tekislikda yotmaydi. U holda bu nuqtalarning ixtiyoriy uchtasi bitta to‘g‘ri chiziqda yotmaydi.	
F	Ikkita turli – a va b to‘g‘ri chiziqlar A nuqtada kesishadi. Bu to‘g‘ri chiziqlarni kesuvchi va A nuqtadan o‘tmaydigan to‘g‘ri chiziqlar bitta tekislikda yotadi. 	
G	Ikkita turli – α va β tekisliklar m to‘g‘ri chiziq bo‘ylab kesishadi. a to‘g‘ri chiziq α tekislikda, b to‘g‘ri chiziq β tekislikda yotadi. a va b to‘g‘ri chiziqlar A nuqtada kesishadi. U holda A nuqta m to‘g‘ri chiziqda yotadi.	
H	Ikkita turli tekisliklar faqat bitta umumiy nuqtaga ega bo‘lishi mumkin.	

2. Fazoda a to‘g‘ri chiziqda yotmaydigan O nuqtadan o‘tuvchi va bu to‘g‘ri chiziq bilan kesishmaydigan nechta to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin?

A) 3 ta *B*) cheksiz ko‘p *C*) hech qancha *D*) 1 ta *E*) 2 ta

3. Tushirib qoldirilgan so‘zni tanlab, gapni to‘ldiring:
Ikkita parallel tekislik fazoni ____________ qismga ajratadi.
A) 3 ta *B*) 4 ta *C*) 6 ta *D*) 2 ta

4. Stol ustida qo‘nib turgan uchta pashsha turli tomonlarga qarab uchib ketdi. Qachon ular yana bitta tekislikda joylashadi?

5. Fazoda hech bir uchtasi bitta tekislikda yotmaydigan to‘rtta parallel to‘g‘ri chiziq orqali eng ko‘pi bilan nechta tekislik o‘tkazish mumkin?

6. Fazoda hech bir uchtasi bitta tekislikda yotmaydigan, hech bir ikkitasi bitta to‘g‘ri chiziqda yotmaydigan, bitta umumiy uchga ega bo‘lgan oltita nur orqali eng ko‘pi bilan nechta tekislik o‘tkazish mumkin?

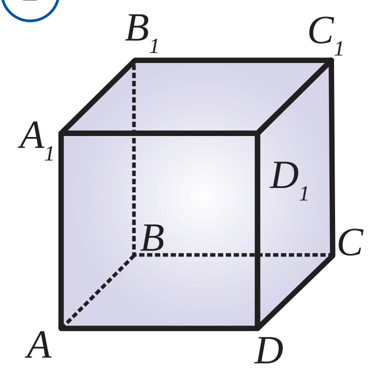
7. Fazoda hech bir to‘rttasi bitta tekislikda yotmaydigan, hech bir uchtasi bitta to‘g‘ri chiziqda yotmaydigan, oltita nuqta orqali eng ko‘pi bilan nechta tekislik o‘tkazish mumkin?

8. Prizmaning 14 ta uchi bor bo‘lsa, uning turini aniqlang.

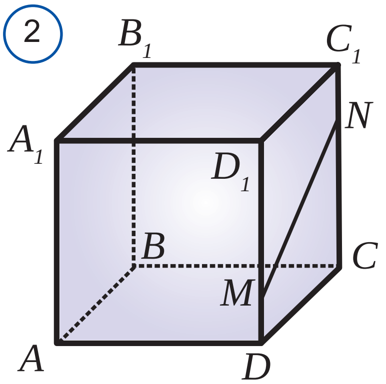
9. 27 ta qirrasi bor piramidaning asosi qanday ko‘pburchak?

10. Muntazam oltiburchakli piramida yon sirtining yuzi 120 m^2 ga, apofemasi esa 10 m ga teng. Piramida asosining yuzini toping.

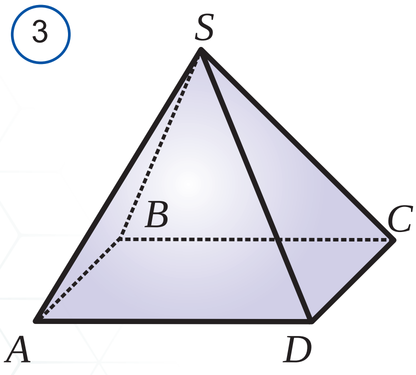
1



2



3



Qo'shimcha test va masalalar

1. Testlar

1. Qaysi mulohaza noto'g'ri?

A) Fazodagi har qanday uchta nuqtadan faqat va faqat bitta tekislik o'tadi.

B) Kesishuvchi ikkita to'g'ri chiziq orqali faqat va faqat bitta tekislik o'tadi.

C) Parallel ikkita to'g'ri chiziq orqali faqat va faqat bitta tekislik o'tadi.

2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – kub (*1-rasm*). ABC va DD_1C_1 tekisliklar ...

A) kesishadi

B) kesishmaydi

C) ustma-ust tushadi

3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – kub (*2-rasm*). MN to'g'ri chiziq qaysi tekislikni kesib o'tmaydi?

A) ABC

B) AA_1B_1

C) BB_1C_1

4. $SABCD$ – to'rtburchakli piramida (*3-rasm*). SD to'g'ri chiziq qaysi to'g'ri chiziqni kesib o'tmaydi?

A) BC

B) AD

C) SC

5. Ikkita har xil tekislik …

A) umumiy nuqtaga ega emas

B) umumiy to'g'ri chiziqqa ega emas

C) bitta to'g'ri chiziqda yotmaydigan uchta umumiy nuqtaga ega emas

6. m va k to'g'ri chiziqlar orqali bittadan ko'p tekislik o'tkazish mumkin. U holda m va k to'g'ri chiziqlar ...

A) kesishadi

B) parallel

C) ustma-ust tushadi

7. Nuqta a to'g'ri chiziqqa tegishli. Ular orqali ...

A) kamida bitta tekislik o'tkazish mumkin

B) faqat bitta tekislik o'tkazish mumkin

C) bittadan ortiq tekislik o'tkazish mumkin

8. A, B, C va D nuqtalar bir tekislikda yotmaydi. AB va CD to'g'ri chiziqlar haqida nima deyish mumkin?

A) kesishadi

B) parallel

C) ayqash

9. To‘g‘ri chiziqlar haqida qaysi mulohaza to‘g‘ri *(2-rasm)*?

A) BC va MN kesishadi.

B) BC va MN ayqash.

C) MN va DC kesishmaydi.

10. Ikki chiziqning o‘zaro parallelligini isbotlash uchun nimani aniqlash yetarli?

A) ularning kesishmasligini

B) ularning qandaydir to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyarligini

C) ularning kesishmasligi va bir tekislikda yotmasligini

11. Qaysi mulohaza noto‘g‘ri?

A) $a \parallel b,\ b \parallel c \rightarrow a \parallel c$

B) $a \parallel b,\ c \dot{-} a \rightarrow c \dot{-} b$

C) $a \dot{-} b,\ b \dot{-} c \rightarrow a \parallel c$

12. F nuqta $ABCD$ parallelogramm tekisligida yotmaydi. K nuqta DF kesmaning, N nuqta esa BF kesmaning o‘rtasi. U holda AK va CN to‘g‘ri chiziqlar...

A) ayqash

B) kesishadi

C) parallel

13. a to‘g‘ri chiziq α tekislikka parallel. Quyidagi mulohazalarning qaysi biri noto‘g‘ri?

A) a to‘g‘ri chiziq α tekislikda yotgan har qanday to‘g‘ri chiziqqa parallel.

B) a to‘g‘ri chiziq α tekislikda yotgan hech qaysi to‘g‘ri chiziqni kesib o‘tmaydi.

C) α tekislikda yotuvchi va a to‘g‘ri chiziqqa parallel to‘g‘ri chiziq mavjud.

14. Qaysi mulohaza noto‘g‘ri?

A) Agar tekislik boshqa tekislikka parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziqdan o‘tib, bu tekislikni kesib o‘tsa, u holda tekisliklarning kesishish chizig‘i berilgan chiziqqa parallel bo‘ladi.

B) Agar to‘g‘ri chiziq kesishuvchi ikkita tekislikka parallel bo‘lsa, u holda ularning kesishish chizig‘iga parallel bo‘ladi.

C) Bir tekislikka parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlar parallel.

15. $ABCD$ trapetsiyaning MN o‘rta chizig‘i α tekislikda yotadi. Trapetsiyaning A uchi bu tekislikka tegishli emas. U holda BC to‘g‘ri chiziq...

A) α tekislikda yotadi

B) α tekislikni kesib o‘tadi

C) α tekislikka parallel

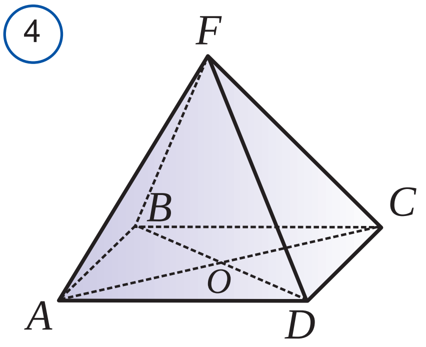
16. M nuqta a to‘g‘ri chiziqda yotmaydi. U holda qaysi mulohaza noto‘g‘ri?

A) M nuqta orqali a to‘g‘ri chiziqni kesib o‘tmaydigan faqat bitta to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin.

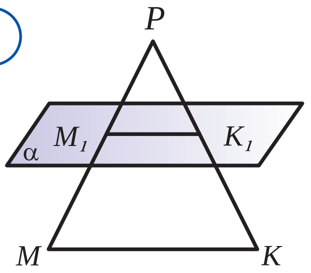
B) M nuqta orqali a to‘g‘ri chiziqqa parallel faqat bitta to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin.

C) M nuqta orqali a to‘g‘ri chiziqni kesib o‘tmaydigan cheksiz ko‘p to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin.

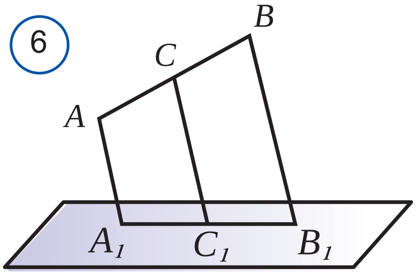
4



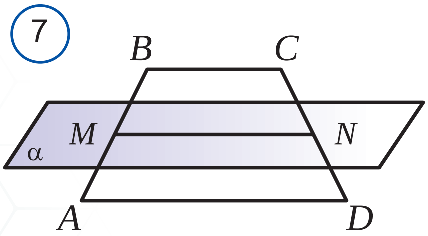
5



6



7



17. a to‘g‘ri chiziq α tekislikka parallel, b to‘g‘ri chiziq ham α tekislikka parallel. a va b to‘g‘ri chiziqlar haqida nima deyish mumkin?

A) parallel

B) kesishadi

C) ayqash

18. a to‘g‘ri chiziq bo‘ylab ikkita tekislik kesishadi. a va b to‘g‘ri chiziqlar ayqash va a, c to‘g‘ri chiziqlar parallel. b va c to‘g‘ri chiziqlar haqida nima deyish mumkin?

A) bu tekisliklardan birida yotadi;

B) berilgan turli tekisliklarda yotadi;

C) bu tekisliklar bilan kesishadi (javob ijobiy bo‘lsa, a va b to‘g‘ri chiziqlar o‘zaro joylashishini ko‘rsating).

2. Masalalar

1. A, B va C nuqtalar bitta to‘g‘ri chiziqda yotadi, D nuqta esa unda yotmaydi. Har uchta nuqtadan o‘tkazilgan tekisliklar soni nechta?

2. α va β tekisliklar m to‘g‘ri chiziq bo‘ylab kesishadi. A nuqta α tekislikda, B nuqta β tekislikda yotadi. Qaysi holatda AB to‘g‘ri chizig‘i β tekislikda yotadi?

3. Beshta tekislik chizilgan. Ularning har ikkitasi kesishadi. Juft-juft kesishadigan tekisliklarning kesishish chiziqlarining eng ko‘p soni nimaga teng?

4. $ABCD$ – parallelogramm (*4-rasm*). $F \notin ABC$. AFC va BFD tekisliklar qaysi to‘g‘ri chiziq bo‘ylab kesishadi?

5. MKP uchburchak berilgan (*5-rasm*). MK to‘g‘ri chiziqqa parallel tekislik MP tomonni M_1 nuqtada, PK tomonni K_1 nuqtada kesib o‘tadi. $MK = 18$ cm, $MP : M_1P = 12 : 5$. M_1K_1 kesmaning uzunligini toping.

6. AB kesma α tekislik bilan kesishmaydi (*6-rasm*). Kesmaning uchlari va uning o‘rtasi C nuqta orqali parallel to‘g‘ri chiziqlar o‘tkazilgan. Bu to‘g‘ri chiziqlar α tekislikni mos ravishda A_1, B_1 va C_1 nuqtalarida kesib o‘tadi. $AA_1 = 6$ cm, $CC_1 = 9$ cm. BB_1 kesmaning uzunligini toping.

7. $ABCD$ trapetsiya asoslariga parallel bo‘lgan tekislik AD va CD tomonlarini mos ravishda M va N nuqtalarda kesib o‘tadi (*7-rasm*).

1) $CN = ND$, $AD = 6$ cm, $BC = 4$ cm. MN kesmaning uzunligini toping.

2) α tekislikda yotgan va BC to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lgan har qanday to‘g‘ri chiziq AD to‘g‘ri chiziqqa parallel ekanini isbotlang.

3) M va N nuqtalar yon tomonlarning o‘rtalari. $BC = 8$, $MN = 12$ bo‘lsa, AD ni toping.

8. $ABCD$ piramidada M, H va P nuqtalar mos ravishda AD, DC va AB qirralarning o‘rtasi (*8-rasm*). $KH \parallel ABD$. $AC = 8$ cm, $BD = 10$ cm. $MHKP$ to‘rtburchakning perimetrini toping.

9. Ikki xil tekislikning bir to‘g‘ri chiziqda yotmaydigan uchta umumiy nuqtasi bo‘lishi mumkinmi?

10. a to‘g‘ri chiziq α tekislikda yotadi. β tekislik α tekislikni b to‘g‘ri chiziq bo‘ylab kesib o‘tadi. a to‘g‘ri chiziq esa β tekislikni B nuqtada kesib o‘tadi. B nuqta qayerda yotadi?

11. Bir tekislikda yotmaydigan a, b va c to‘g‘ri chiziqlar bitta nuqtadan o‘tadi. Bu chiziqlar jufti orqali nechta turli xil tekisliklarni o‘tkazish mumkin?

12. A, B nuqtalar va CD to‘g‘ri chiziq bir tekislikda yotmaydi. CD va AB to‘g‘ri chiziqlar o‘zaro qanday joylashgan?

13. Kvadratning ikki qo‘shni uchi va diagonallarining kesishish nuqtasi α tekislikda yotadi. Kvadratning qolgan ikkita uchi ham shu tekislikda yotishini isbotlang.

14. a va b to‘g‘ri chiziqlar ayqash. c to‘g‘ri chiziq b to‘g‘ri chiziqqa parallel. a va c to‘g‘ri chiziqlar kesishishi mumkinmi?

15. M nuqta $ABCD$ parallelogramm tekisligidan tashqarida joylashgan.

1) MAD va MBC uchburchaklarning o‘rta chiziqlari parallel ekanini isbotlang.

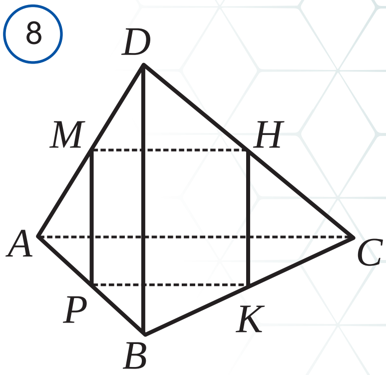
2) $ABCD$ parallelogrammning asosi 5 ga teng. Balandligi esa 4 ga teng va u tushirilgan tomonni ikkiga bo‘ladi. MAD va MBC uchburchaklarning o‘rta chiziqlarini toping.

16. α tekislik ABC uchburchakning AB va BC tomonlarini mos ravishda M va N nuqtalarda kesib o‘tadi. $BN : NC = 5 : 8$ va $MB : AB = 5 : 13$.

1) $AC \parallel \alpha$ ekanini isbotlang.

2) $AC = 26$ bo‘lsa, MN ni toping.

8



Abu Rayhon Beruniy – dunyo fani tarixida yorqin iz qoldirgan ulug‘ ensiklopedist olimlardan biri. Uning asarlarida geometriyaning barcha sohalari (planimetriya, stereometriya va nisbatlar nazariyasi)ga oid qimmatli ma’lumotlar o‘z aksini topgan. Masalan, "Yulduzshunoslik san’ati negizlarini tushuntirish kitobi"ning geometriya bo‘limida asosiy geometrik shakllar, ularning ta’riflari va xossalari, tekislikdagi shakllarning yuzalarini hisoblash yo‘llari hamda fazodagi jismlarning sirti va hajmini topishga oid qoidalar batafsil bayon etilgan. Abu Rayhon Beruniyning ushbu asari Sharq mamlakatlarida uzoq vaqt matematikadan darslik sifatida qo‘llanib kelgan.

“GeoGebra”ni qo‘llab

“GeoGebra” – matematikadan “jonli” chizmalar dasturi

GeoGebra – geometriya, algebra va boshqa fanlar bo‘yicha ta’limning turli darajalarida foydalanish uchun dinamik (“jonli“) chizmalar yaratish imkoniyatini beradigan bepul dastur hisoblanadi. U geometrik shakllar, algebraik ifodalar, jadvallar, grafiklar va statistika bilan ishlash uchun keng imkoniyatlarni taqdim etadi.

Ushbu dasturiy ta’minot 2002-yilda avstriyalik matematik Markus Hohenvarter tomonidan yaratilgan bo‘lib, hozirgi kunda undan millionlab kishilar foydalanib kelmoqda.

“GeoGebra” dasturining afzalliklari:

- bepul;
- ko‘p tilli interfeysga ega;
- grafik interfeysi sodda va foydalanishga qulay;
- turli xil operatsion tizimlarga (hatto planshet va smartfonlarga) o‘rnatish imkoniyati va onlayn versiyaning mavjudligi;
- foydalanuvchilar tomonidan materiallarni qo‘shish uchun ochiq baza mavjudligi.

“GeoGebra” dasturining qismlari vazifalari

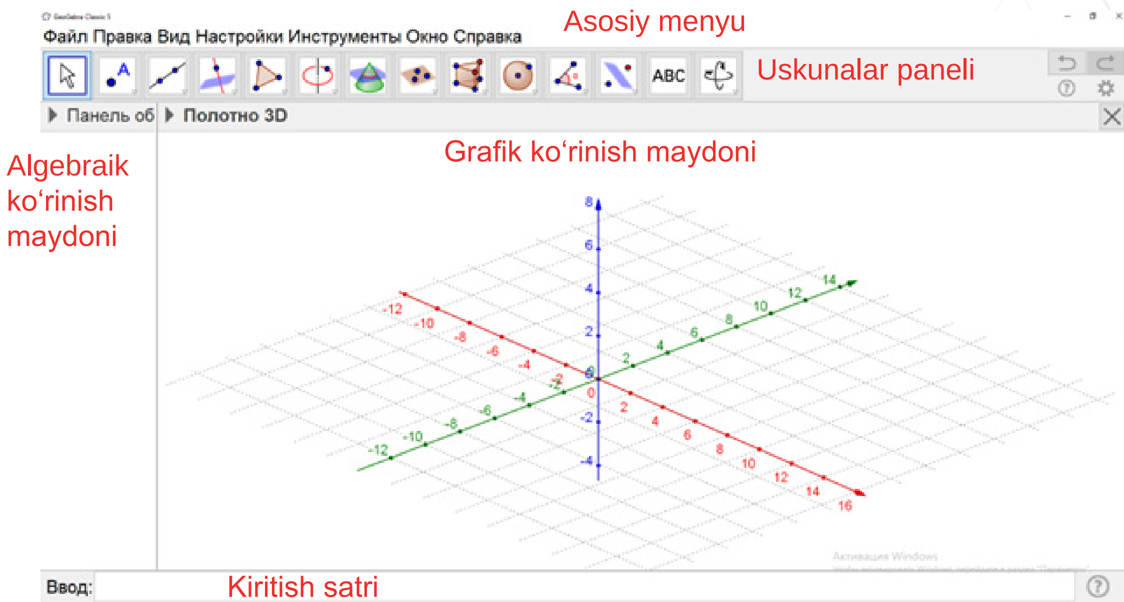
	Kalkulyatorlar to‘plami Funksiyalarni tekshirish, tenglamalarni yechish, geometrik shakllar va 3D obyektlarni qurish		**Geometriya** Turli geometrik shakllarni chizish va ularning shakllarini almashtirish
	3D kalkulyator Turli chizmalar, 3D (uch o‘lchovli) geometrik shakllar va obyektlarni chizish		**CAS kalkulyator** Turli tenglamalarni yechish, algebraik ifodalar shaklini almashtirish, hosila va integrallarni hisoblash
	Grafik kalkulyator Turli funksiyalar grafiklarini qurish, tenglamalarni tadqiq qilish va ma’lumotlarni tasvirlash		**Klassik GeoGebra** Geometriya, ma’lumotlarni tasvirlash, ehtimolliklar va turli kattaliklarni hisoblash

Amaliy topshiriq

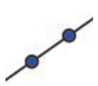
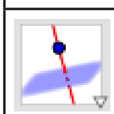
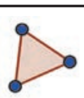
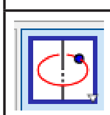
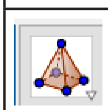
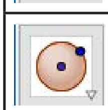
1. “GeoGebra” rasmiy vebsayti (http://www.geogebra.org/)dan “GeoGebra” haqida batafsil ma’lumot oling va uni kompyuter, planshet yoki smartfoningizga ushbu vebsaytdan yuklab oling.
2. “Youtube” kanalida (https://www.youtube.com/GeoGebraChannel) “GeoGebra”ni o‘rganish uchun videodarslar va undan foydalanishga oid misollarni ko‘zdan kechiring.
3. 3D kalkulyatorda yaratilgan sodda ishlarni o‘rganishga harakat qiling.

“GeoGebra” 3D kalkulyatori interfeysining ko‘rinishi

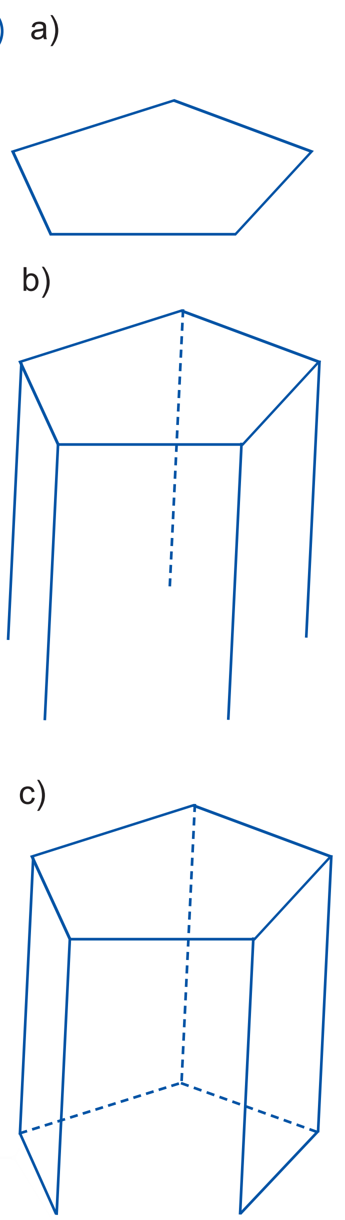
“GeoGebra” dasturi “3D kalkulyator” rejimiga o‘tkazilgandan so‘ng quyidagi ko‘rinishdagi oyna hosil bo‘ladi:



3D kalkulyatori panelidagi asosiy uskunalarning vazifalari

	**Перемещать** (Siljitish) – turli obyektlar (nuqta, to‘g‘ri chiziq, ko‘pburchak va boshqalar)ni siljitish. Bir vaqtning o‘zida bir nechta obyektlarni tanlash uchun Ctrl tugmachasini bosgan holda sichqoncha bilan ketma-ket belgilash kerak.
	**Точка** (Nuqta) – tekislikda nuqta yasash. Nuqta yasash uchun tekislikdagi joyni belgilash kerak.
	**Прямая** (To‘g‘ri chiziq) – tekislikda berilgan ikkita nuqta orqali to‘g‘ri chiziq yasash. Chizmada mavjud nuqtalarni tanlashingiz yoki sichqoncha yordamida nuqtalar o‘rnini belgilashingiz mumkin.
	**Перпендикулярная линия** (Perpendikulyar to‘g‘ri chiziq) – berilgan nuqta orqali to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar o‘tkazish. Perpendikulyar o‘tkazish uchun tekislikda perpendikulyar quriladigan chiziqni va chiziq o‘tadigan nuqtani ko‘rsatish kerak.
	**Многоугольник** (Ko‘pburchak) – tekislikda ixtiyoriy turdagi ko‘pburchakni yasash
	**Окружность по точке и оси** (O‘qi va nuqtasiga ko‘ra aylana) – berilgan o‘q va nuqtaga ko‘ra muayyan radiusli aylana yasash.
	**Плоскость через три точки** (Uch nuqta orqali tekislik) – berilgan uchta nuqta orqali tekislik o‘tkazish. Shuningdek, parallel va perpendikulyar tekisliklar ham o‘tkazish mumkin.
	**Пирамида** (Piramida) – berilgan nuqtalari orqali piramida, prizma, konus, silindr va kub kabi fazoviy jismlarni yasash.
	**Сфера по центру и точке** (markazi va nuqtasiga ko‘ra sfera) – markazi va sirtidagi berilgan nuqta orqali sfera yasash.

7 KO‘PYOQLARNI TASVIRLASH VA MODELINI YASHASH

1


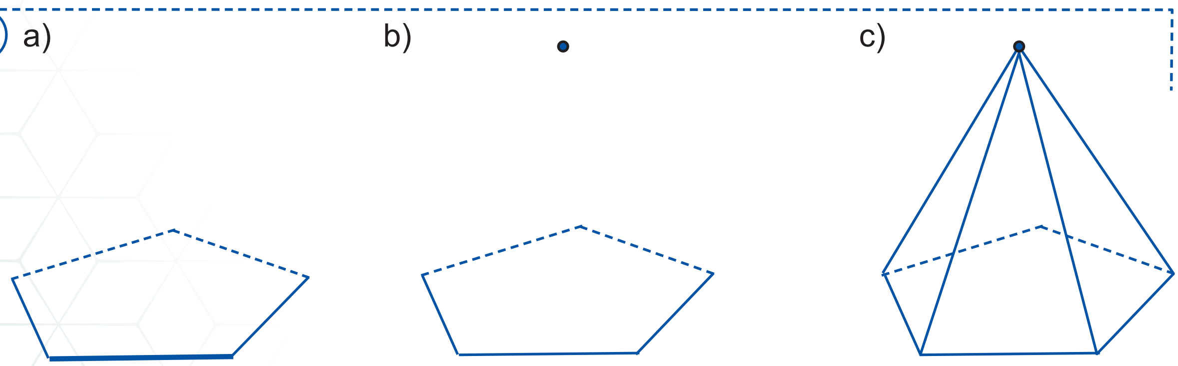
Ko‘pyoqlarni tekislikda tasvirlash

Geometrik masalalarni yechishda masala shartiga mos chizmani chizish juda muhim hisoblanadi. Ba’zida to‘g‘ri chizilgan chizma masalaning “yarim yechimi” bilan tenglashtiriladi. Stereometriyada masalaning chizmasini to‘g‘ri chizish nihoyatda muhim, o‘ta mas’uliyatli va ba’zida esa murakkab ish hisoblanadi. Chunki stereometrik shakllar uch o‘lchamli bo‘lib, ularni tekislikda, daftar sahifasida tasvirlash kerak bo‘ladi. Noto‘g‘ri chizilgan chizma noto‘g‘ri yechimga yoki boshi berk ko‘chaga boshlaydi.

Prizmani tasvirlash quyidagi tartibda olib boriladi *(1-rasm).* Oldin ko‘pburchak shaklidagi asoslaridan biri chiziladi. So‘ng uning har bir uchidan o‘zaro parallel va teng kesmalar, ya’ni prizmaning yasovchilari chiziladi. Kesmaning oxirlari mos ravishda tutashtirib chiqiladi. Bunda ikkinchi asos paydo bo‘ladi.

Chizmada prizmaning ko‘rinmaydigan qirralari uzuq chiziqlar bilan chiziladi.

Piramidani tasvirlash ham shunga o‘xshash tartibda olib boriladi *(2-rasm)*. Oldin ko‘pburchak shaklidagi asosi chiziladi. So‘ng piramida uchi belgilanib, bu nuqta asosining har bir uchi bilan tutashtirib chiqiladi. Chizmada piramidaning ko‘rinmaydigan qirralari uzuq chiziqlar bilan chiziladi.

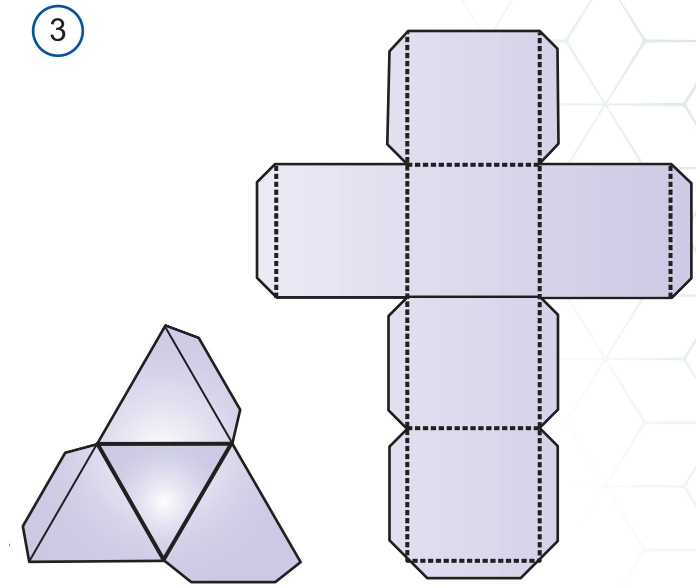
2


Fazoviy shakllarning modellarini yasash

Ko'pyoqni ba'zi qirralari bo'ylab qirqib, tekislikka yoyganda, ko'pyoqning barcha yoqlari shu tekislikka yotsa, bu yassi shakl ko'pyoqning *yoyilmasi* deb ataladi. 3-rasmda kub va uchburchakli piramidaning yoyilmasi tasvirlangan.

Ko'pyoq maketini yasash uchun oldin uning yoyilmasini qalin qog'ozga chizib, so'ng qaychi bilan qirqib, tegishli qirralarini yelimlab hosil qilish mumkin. Yelimlash qulay bo'lishi uchun yelimlanadigan qirralarda ma'lum qalinlikda hoshiyalar tashlab chiziladi va qirqiladi.

3

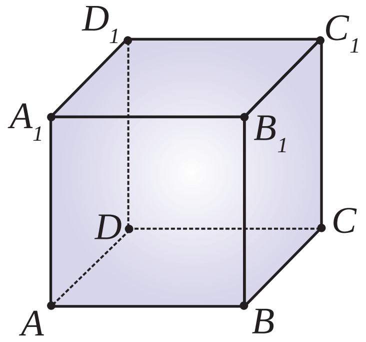


Amaliy mashq va tatbiq

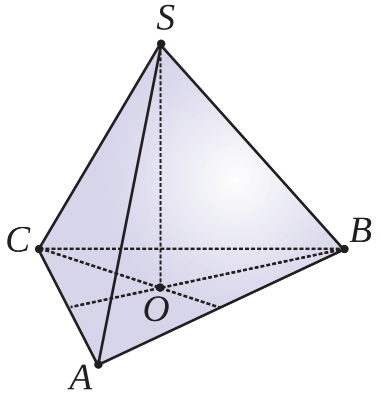
7.1. 4-rasmda keltirilgan fazoviy shakllarni daftar kataklaridan foydalanib chizing va turini ayting. Uzuq chiziqlarning ishlatilishiga e'tibor bering.

4

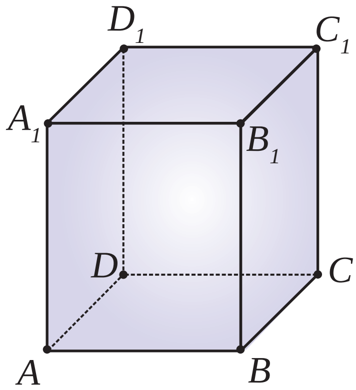
a)



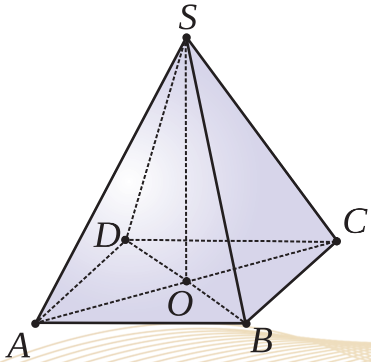
b)



c)

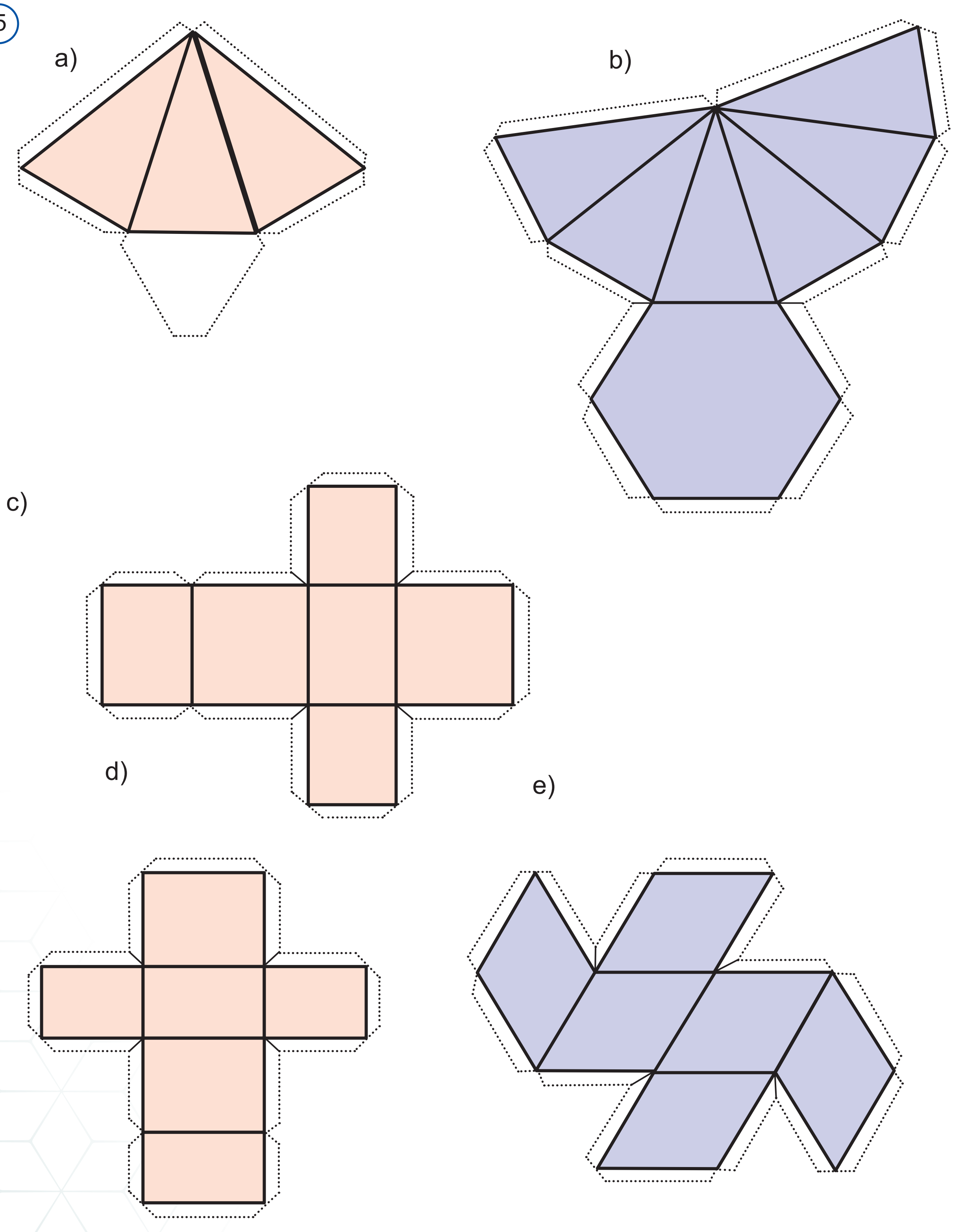


d)



7.2. Fazoviy jismlarni yaxshiroq tasavvur qilish uchun ularning modelidan foydalangan ma'qul. Fazoviy jismlarning modelini ularning yoyilmasidan foydalanib yasash mumkin (*5-rasm*). Ko'rib turganingizdek, fazoviy jismlarning yoyilmasi yassi geometrik shakllardan iborat. Quyidagi yoyilmalardan foydalanib to'g'ri burchakli parallelepiped, kub va piramidalar modelini yasang.

5



7.3. To‘g‘ri burchakli parallelepiped va muntazam to‘rtburchakli piramida yoyilmasini chizing.

7.4. 6-rasmdagi yoyilmalarning qaysilari kubning yoyilmasi bo‘ladi?

7.5. 7-rasmdagi yoyilmalarning qaysilari prizmalarning yoyilmasi bo‘ladi? Prizmalarning turini aniqlang.

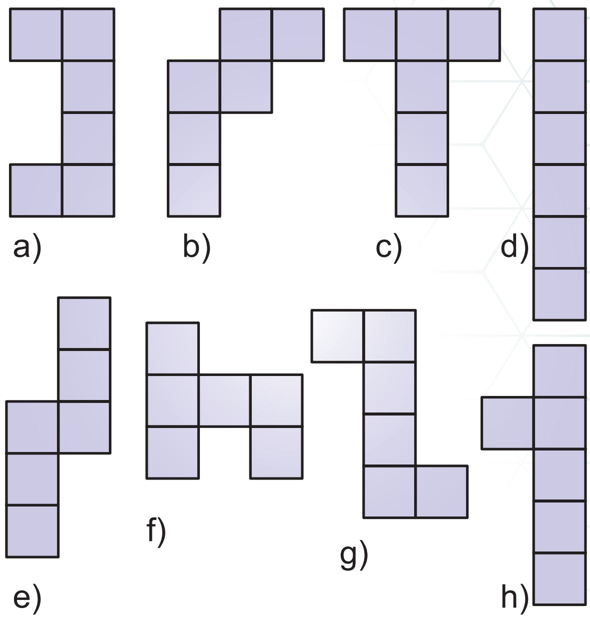
7.6. 8-rasmdagi yoyilmalarning qaysilari piramidalarning yoyilmasi bo‘ladi? Piramidalarning turini aniqlang.

7.7. Uch xil rang bilan kubni uning qo‘shni yoqlari har xil rangda bo‘yaladigan qilib bo‘yash mumkinmi? Kub modelini yasang va mos rangga bo‘yang.

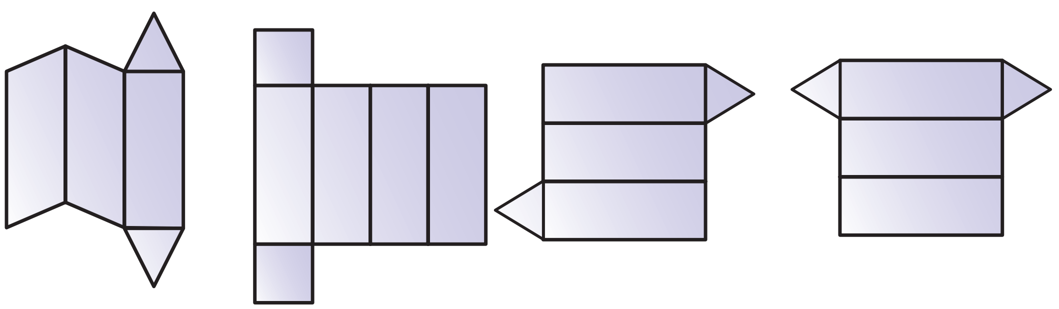
7.8. 9 ta gugurt cho‘pidan 7 ta teng uchburchak yasang.

7.9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kubning sirtida A uchidan C_1 uchga boradigan eng qisqa yo‘lni toping.

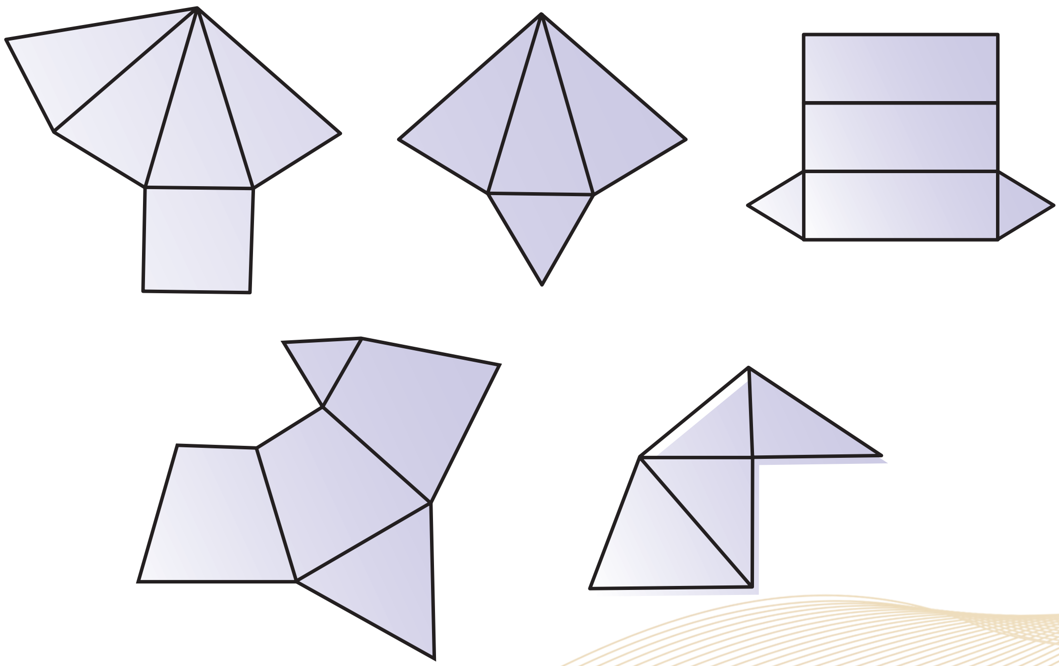
6



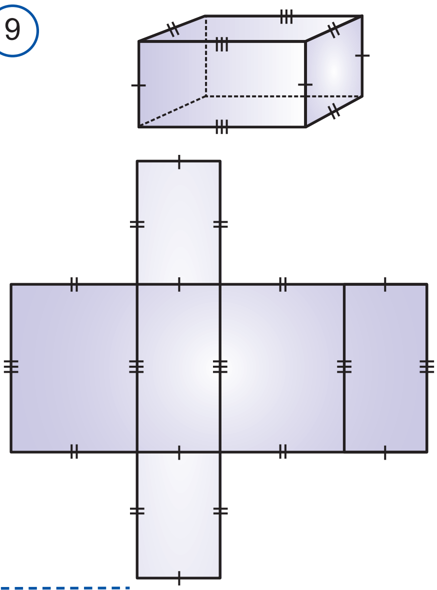
7



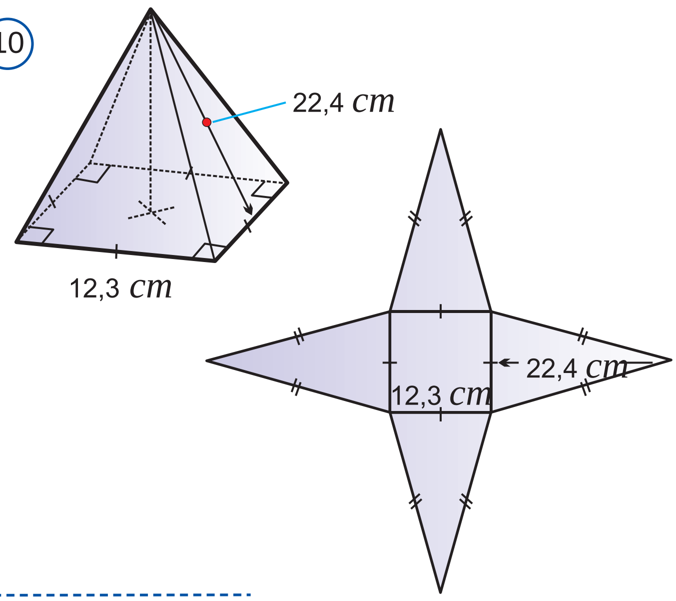
8



9



10



7.10. 9-rasmda tasvirlangan to‘g‘ri burchakli parallelepiped yoyilmasiga ko‘ra uning to‘la sirti formulasini toping.

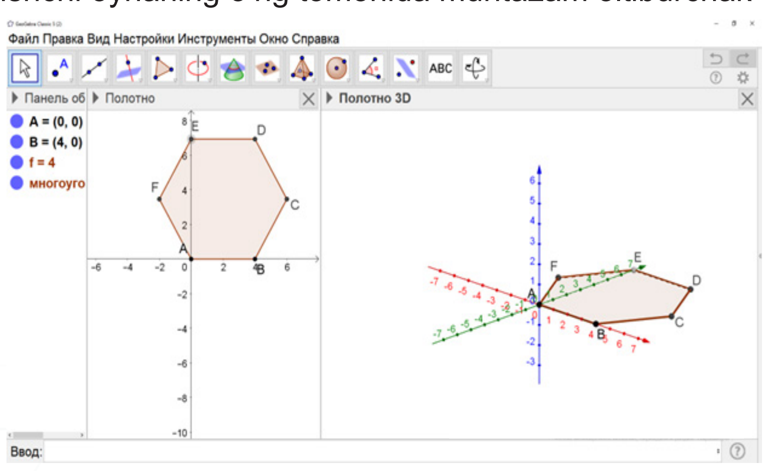
7.11. 10-rasmda tasvirlangan to‘rtburchakli muntazam piramida yoyilmasiga ko‘ra uning to‘la sirti formulasini toping va berilgan ma’lumotlarga ko‘ra hisoblang.

“GeoGebra”ni qo‘llab

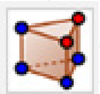
Muntazam oltiburchakli prizma va uning yoyilmasini yasash

1. Prizma yasash uchun dastlab muntazam oltiburchak (prizma asosi) yasaladi. Buning uchun “**Вид**” menyusidan “**Полотно**” buyrug‘i tanlanadi. Natijada ikki-ta alohida ishchi oyna hosil bo‘ladi. Chap tomondagi ishchi oynada “**Правильный многоугольник**” uskunasi yordamida muntazam oltiburchak yasaladi. Buning uchun ko‘pburchak bitta tomonining uzunligi va tomonlari sonini kiritish kifoya.

2. Natijada ishchi oynaning o‘ng tomonida muntazam oltiburchak tasviri hosil bo‘ladi.



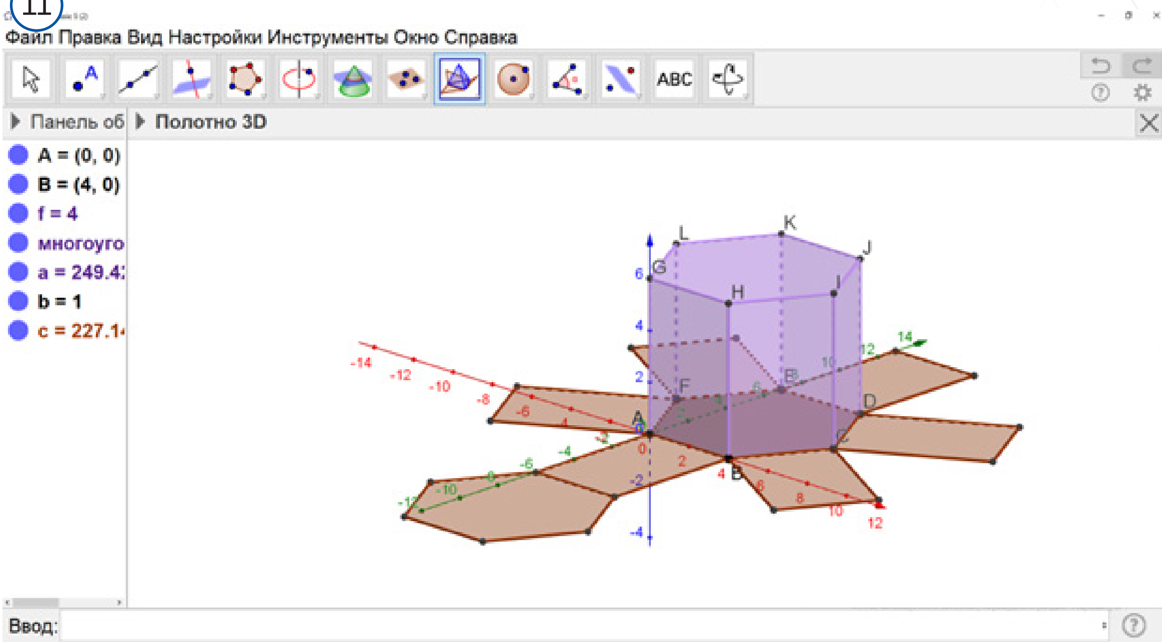
3. Chap oyna yopiladi.

4.  – “**Призма**” uskunasidan foydalanib, sichqoncha chap tugmasi chizilgan muntazam oltiburchak nuqtalari ustida ketma-ket bosiladi. So‘ngra koordinata o‘qining kerakli joyiga bosish orqali muntazam oltiburchakli prizma hosil qilinadi.

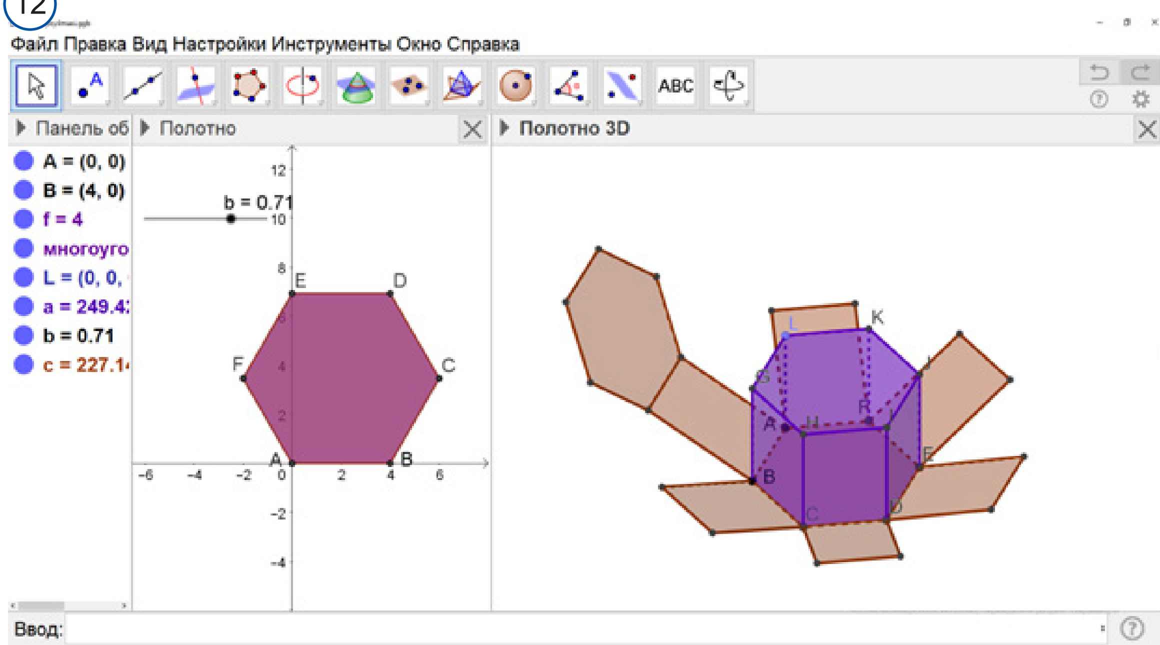
5.  – “**Развёртка**” uskunasi faollashtiriladi va prizma ustida sichqoncha chap tugmasi bosiladi. Natijada muntazam oltiburchakli prizma yoyilmasi hosil boʻladi *(11-rasm)*.

6. “**Вид**” menyusidan “**Полотно**” buyrugʻi tanlanadi. Chap oynadagi “**Ползунок**” (surgich) tugmasi yordamida chizma yoyilmasi harakatga keltiriladi *(12-rasm)*.

11



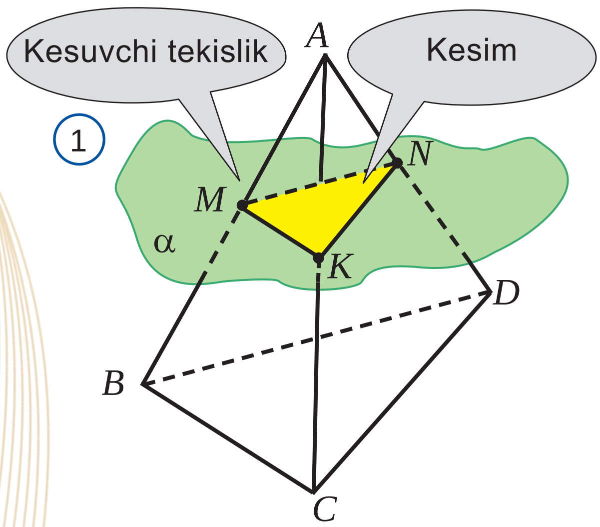
12



Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Muntazam oltiburchakli piramida va uning “jonli” yoyilmasini yasang.
2. Muntazam uchburchakli prizma va uning “jonli” yoyilmasini yasang.

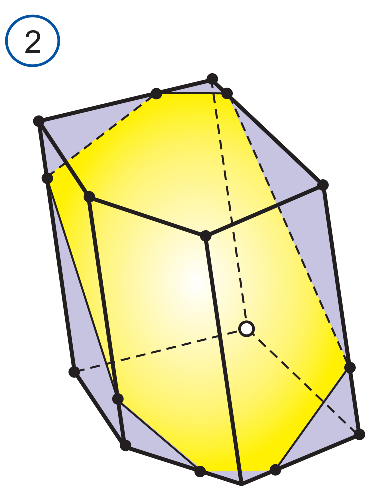
8 KO‘PYOQLARNING SODDA KESIMLARINI YASASH



Fazoviy geometrik shakllarning o‘zaro joylashuvini to‘g‘ri tasavvur qilgandagina uning chizmasini to‘g‘ri chizish mumkin. Fazoviy shakllarning biri ko‘pyoq, ikkinchisi esa tekislik bo‘lganda turli kesimlarni tasvirlashga to‘g‘ri keladi. Quyida ko‘pyoqlarning kesimlarini yasash bilan shug‘ullanamiz.

Aytaylik, ko‘pyoqni biror tekislik kesib o‘tgan bo‘lsin. *Ko‘pyoqning kesimi* deb ko‘pyoqning kesuvchi tekislikka tegishli nuqtalaridan iborat geometrik shaklga aytiladi.

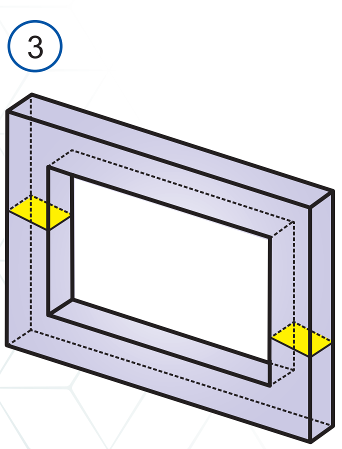
Kesuvchi tekislik ko‘pyoq sirtini kesmalar bo‘yicha kesib o‘tadi. Shuning uchun kesim kesuvchi tekislikda yotuvchi ko‘pburchakdan iborat bo‘ladi. 2-rasmda beshburchakli prizmaning yettiburchakdan iborat kesimi tasvirlangan. 3-rasmdagi romni tekislik bilan kesganda hosil bo‘lgan kesimi ikkita to‘rtburchakdan iborat.



Ko‘pyoqning kesimini tasvirlash uchun uning yoqlarining kesuvchi tekislik bilan umumiy nuqtalarini aniqlash kifoya.

Kesimning tomonlari soni ko‘pyoqning yoqlari sonidan katta bo‘la olmaydi.

Masalan, beshburchakli prizmaning kesimlari: uchburchak, to‘rtburchak, beshburchak, oltiburchak va yettiburchak bo‘lishi mumkin *(4-rasm)*. Lekin sakkizburchak bo‘la olmaydi. Nega?



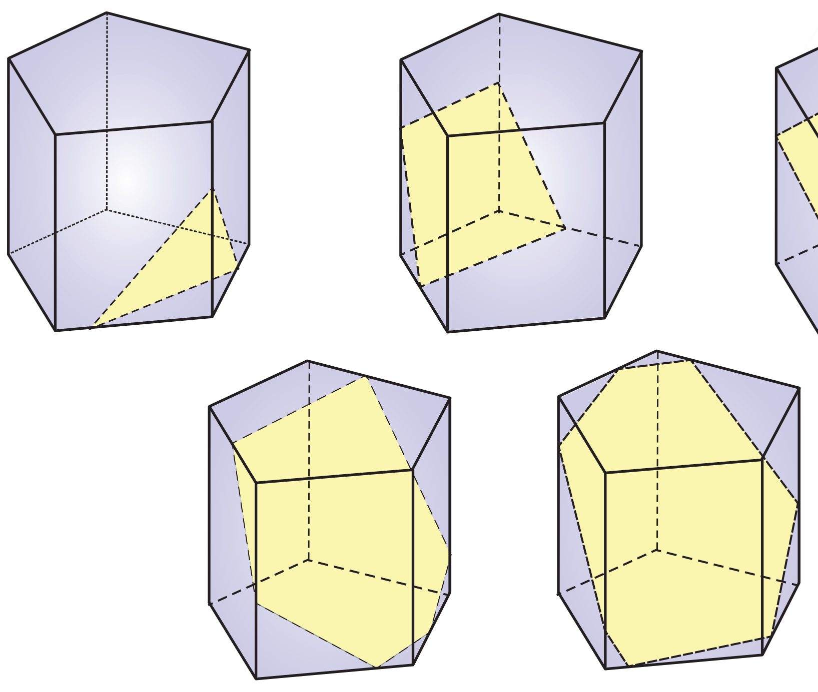
1-masala. $QABC$ uchburchakli piramidaning AB, AQ va CQ qirralarini mos ravishda K, L va M nuqtalarda kesib o‘tuvchi α tekislik bilan kesganda hosil bo‘lgan kesimni yasaymiz *(5-rasm)*.

Yasash. Kesuvchi α tekislik piramidaning AQB yog‘i bilan ikkita – K va L umumiy nuqtalarga ega. Unda kesuvchi tekislik bu yoqni KL kesma bo‘yicha kesib o‘tadi.

Xuddi shunga o‘xshash α tekislik piramidaning AQC yog‘i bilan ikkita – M va L umumiy nuqtalarga ega bo‘lgani uchun bu yoqni ML kesma bo‘ylab kesib o‘tadi.

Kesuvchi α tekislik piramidaning ABC yog‘i bilan bitta K umumiy nuqtaga ega. Bu tekislikning BC qirrani kesib o‘tadigan nuqtasini topamiz.

4



Bu tekislikka tegishli LM va AC to‘g‘ri chiziqlarni davom ettirib, ularning kesishish nuqtasi – X ni topamiz. X nuqta AQC va ABC tekisliklarda ham yotadi.

Kesuvchi α tekislik piramidaning ABC yog‘i bilan ikkita – K va X umumiy nuqtalarga ega. Unda kesuvchi tekislik bu yoqni KX kesma bo‘yicha kesib o‘tadi.

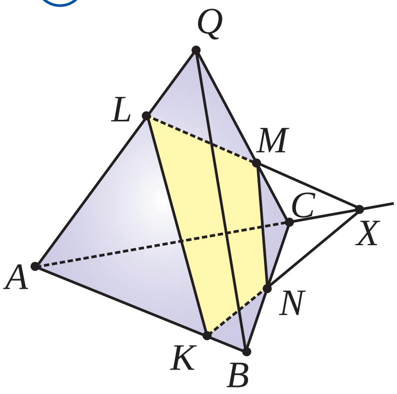
KX to‘g‘ri chiziq va BC qirraning kesishish nuqtasi N ham α tekislikda yotadi.

Demak, α tekislik ABC yoqni KN kesma bo‘yicha, BQC yoqni esa MN kesma bo‘yicha kesib o‘tadi.

$KLMN$ to‘rtburchak α tekislikning piramida bilan kesimidan iborat bo‘ladi. KL va KN kesmalar α tekislikning ABQ va ABC yoqlardagi *izlari* deb ataladi.

Shu bois kesim yasashning bunday usuli *izlar usuli* deb nomlanadi.

5

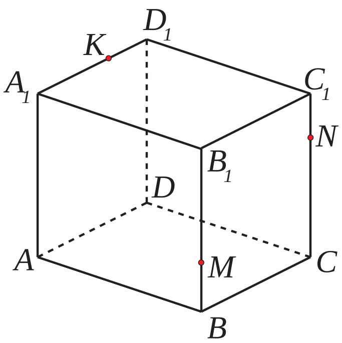


Bu usulning mohiyati quyidagilardan iborat:

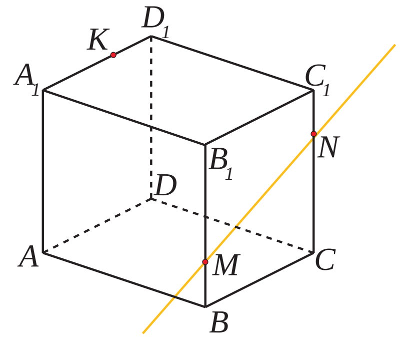
- Kesuvchi tekislik bilan ko‘pyoq biror yog‘ining kesishish chizig‘idan iborat bo‘lgan yordamchi to‘g‘ri chiziqni qurishdan iborat.
- Odatda kesuvchi tekislik bilan ko‘pyoqning pastki asosi yotgan tekislik bilan kesishish chizig‘ini yasash qulay hisoblanadi. Bu chiziq *kesuvchi tekislikning izi* deb ataladi.
- Izdan foydalanib kesuvchi tekislikning ko‘pyoq yon qirralari va yoqlarida yotgan nuqtalar oson aniqlanadi.

6

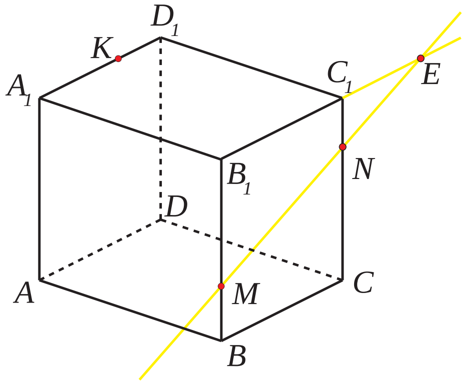
1-qadam



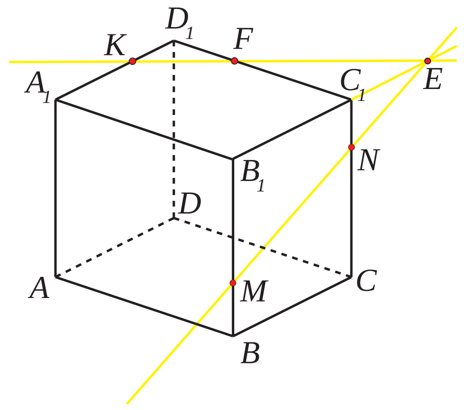
2-qadam



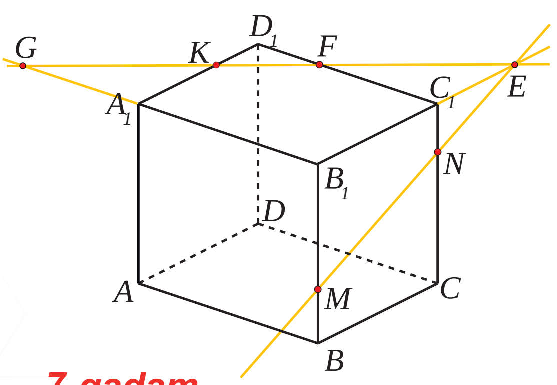
3-qadam



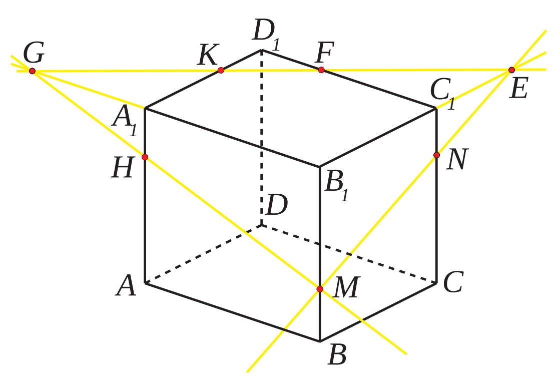
4-qadam



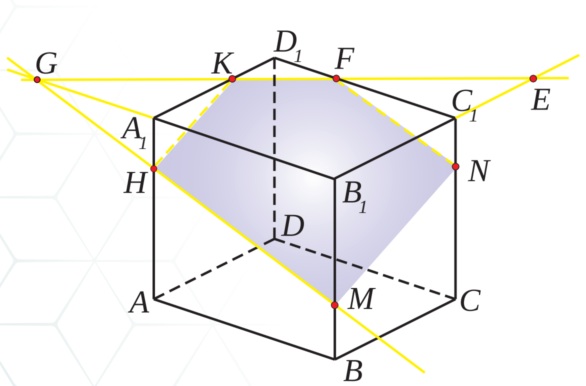
5-qadam



6-qadam



7-qadam



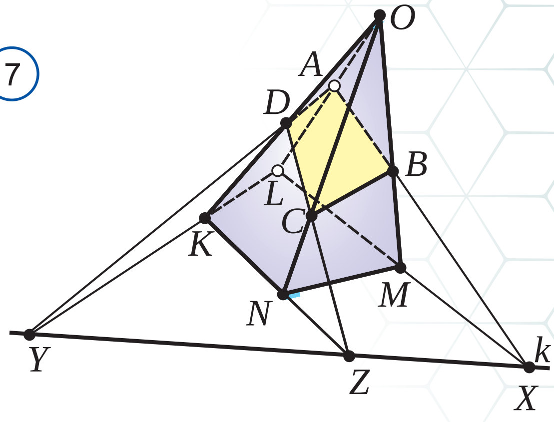
2-masala. Kubning M, P va K nuqtalardan o'tuvchi tekislik bilan kesimini yasaymiz.

Yasash. Kesimni yasash izlar usulida bajarilgan. Yasash ketma-ketligi 6-rasmda qadam-baqadam keltirilgan. Uni o'rganib chiqib, yasash jarayonini izohlang.

$MNFKH$ – izlanayotgan kesim.

3-masala. $OKLMN$ piramidaning OL qirrasining A nuqtasi va piramidaning $KLMN$ asosi tekisligida yotuvchi k to‘g‘ri chiziqdan o‘tuvchi β tekislik bilan kesganda hosil bo‘ladigan kesimni yasaymiz *(7-rasm)*.

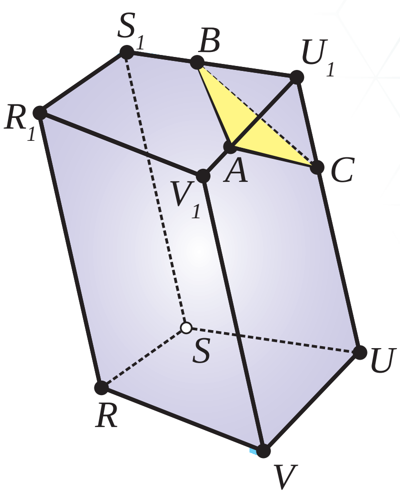
7



Yasash. LM va k to‘g‘ri chiziqlar kesishadigan nuqtani topamiz. Bu nuqta k to‘g‘ri chiziqda yotganligi uchun β tekislikka tegishli. Shuningdek, bu nuqta LM to‘g‘ri chiziqda yotgani uchun LOM yoqqa ham tegishli. A nuqta bu ikki tekislikning har ikkisiga ham tegishli. Shuning uchun β tekislik LOM tekislikni AX to‘g‘ri chiziq bo‘yicha, LOM yoqni esa AB kesma bo‘yicha kesib o‘tadi. Bu yerda B nuqta – AX va OM to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasi.

Xuddi shu kabi β tekislikning OLK yoqni kesib o‘tadigan Y va D nuqtalari va AD kesmani aniqlaymiz. So‘ng Z va C nuqtalar hamda DC va BC kesmalarni aniqlaymiz. Natijada hosil bo‘lgan $ABCD$ to‘rtburchak izlanayotgan kesimdan iborat bo‘ladi.

8

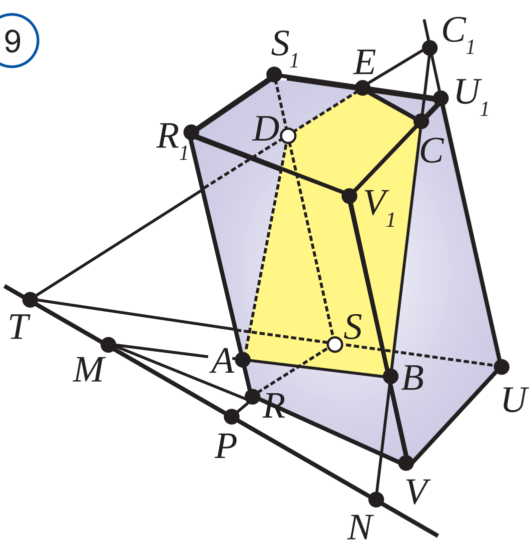


4-masala. A, B va C – to‘rtburchakli prizmaning turli yoqlaridagi nuqtalari. Prizmaning ABC tekislik bilan kesimini topamiz *(8-rasm)*.

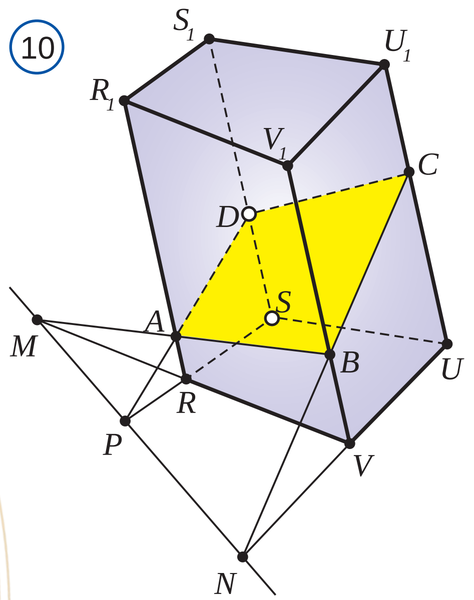
Izlanayotgan kesim A, B va C nuqtalarning to‘rtburchakli prizmaning qaysi yoqlarida va qanday yotganligiga bog‘liq bo‘ladi. 8-rasmda A, B va C nuqtalarning bitta uchdan chiquvchi yoqlarda yotgan, eng sodda holati tasvirlangan.

9-rasmda tasvirlangan holatda kesimni yasash murakkabroq ish sanaladi. Qolgan holatlardagi kesimlar quyidagi – 10- va 11-rasmlarda keltirilgan. Ko‘rib turganingizdek, kesim uchburchak, to‘rtburchak, beshburchak va oltiburchakdan iborat bo‘lmoqda. Bu kesimlarning yasalishini mustaqil tahlil qiling.

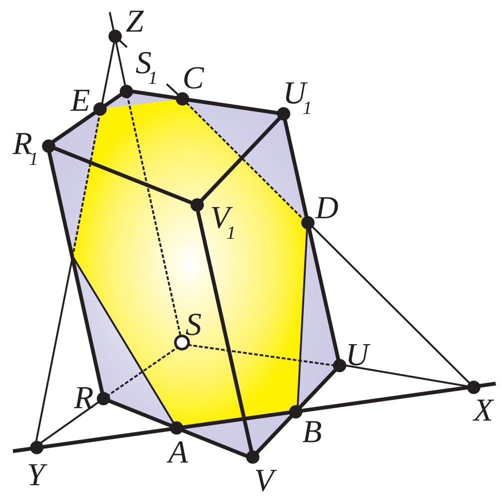
9



10



11



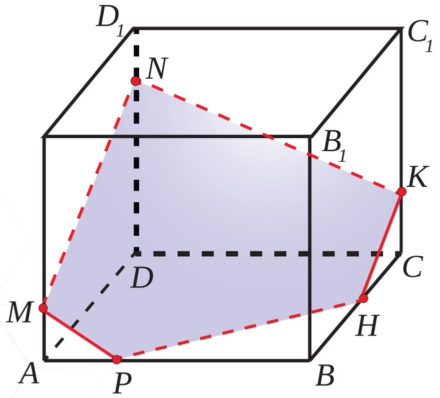
Izlar usulini qo‘llash qoidalari

- *kesimning uchlari ko‘pyoqning faqat qirralarida yotadi;*
- *kesimning tomonlari ko‘pyoqning faqat yoqlarida yotadi;*
- *kesuvchi tekislik va ko‘pyoqning yog‘i kesishsa, ularning kesishish chizig‘i yagona to‘g‘ri chiziqdan iborat bo‘ladi.*

Parallel ko‘chirish usuli

5-masala. Kubning M, N va K nuqtalardan o‘tuvchi tekislik bilan kesimini yasang.

12



Yasash

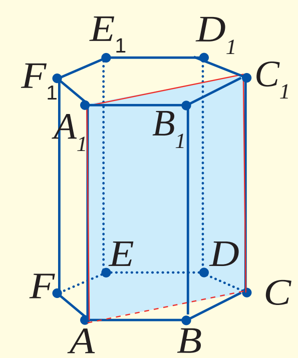
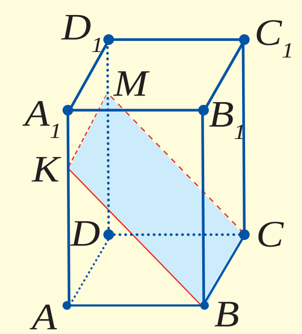
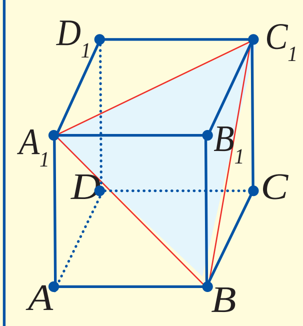
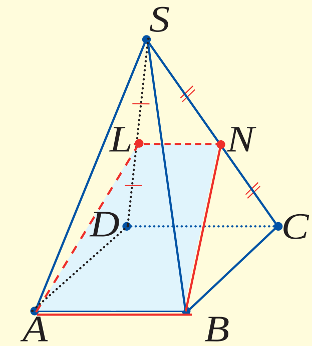
1. M va N nuqtalarni kesma bilan tutashtiramiz.
2. N va K nuqtalarni kesma bilan tutashtiramiz.
3. M nuqtadan NK ga parallel to‘g‘ri chiziqni o‘tkazamiz. Uning AB qirra bilan kesishish nuqtasini P bilan belgilaymiz.
4. K nuqtadan MN ga parallel to‘g‘ri chiziq o‘tkazamiz. Uning BC qirra bilan kesishish nuqtasini H bilan belgilaymiz.
5. P va H nuqtalarni kesma bilan tutashtiramiz.
6. $MNKHP$ izlanayotgan kesim bo‘ladi.

Mavzuga doir savollar

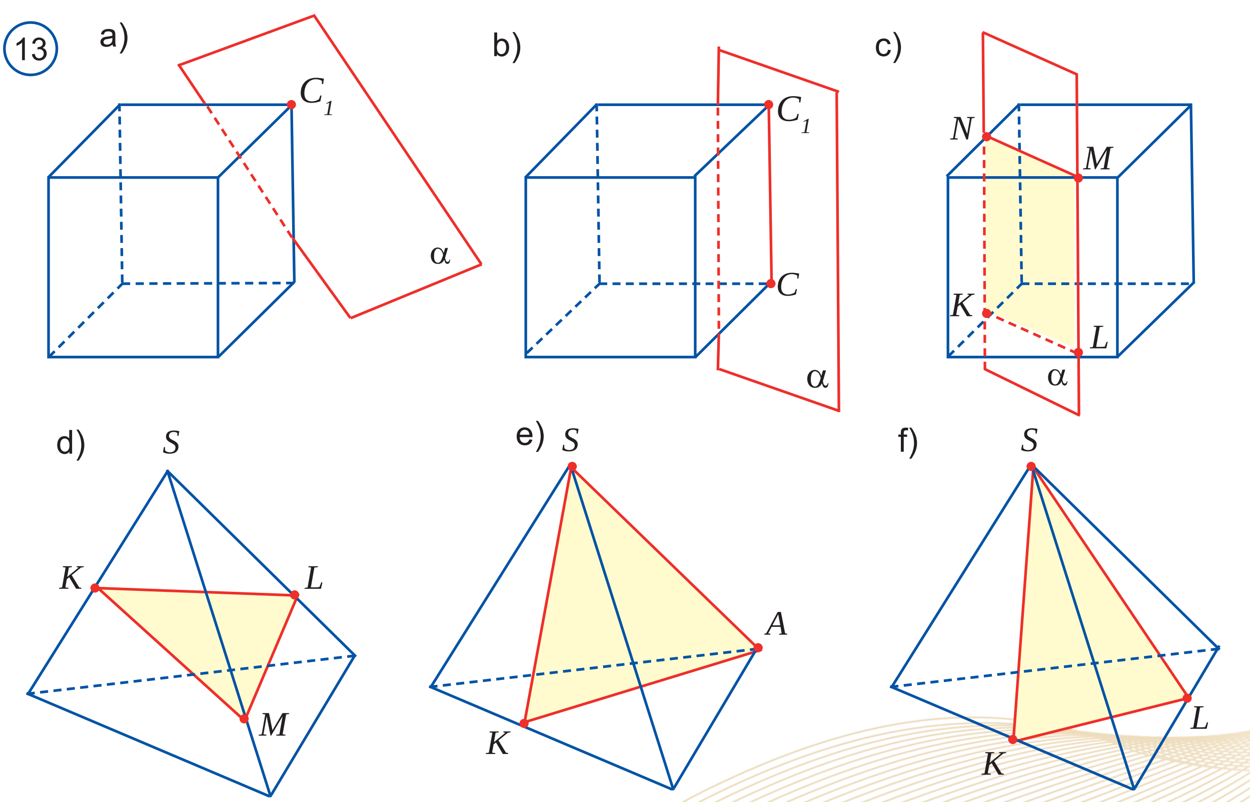
1. Ko‘pyoqning kesimi deb nimaga aytiladi?
2. Ko‘pyoqning kesimi qanday shakl bo‘lishi mumkin?
3. Bir tekislikning ikkinchi tekislikdagi izini tushuntirib bering.
4. To‘rtburchakli ko‘pyoqning kesimi nimalar bo‘lishi mumkin?
5. Kesim yasashning izlar usulini tushuntirib bering.
6. Kesim yasashning parallel ko‘chirish usulini tushuntirib bering.

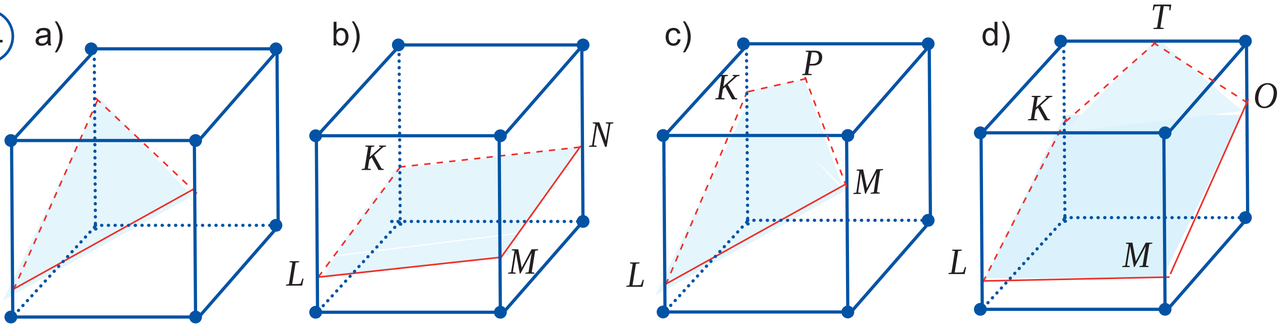
Amaliy mashq va tatbiq

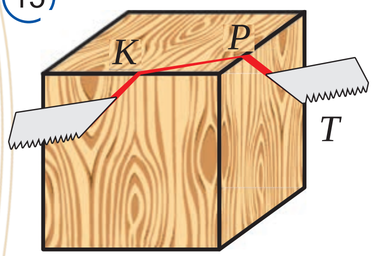
8.1. Jadvalda 8-mavzuning asosiy tayanch ma'lumotlari keltirilgan. Ularni sinchiklab o'rganib chiqing va izohlang.

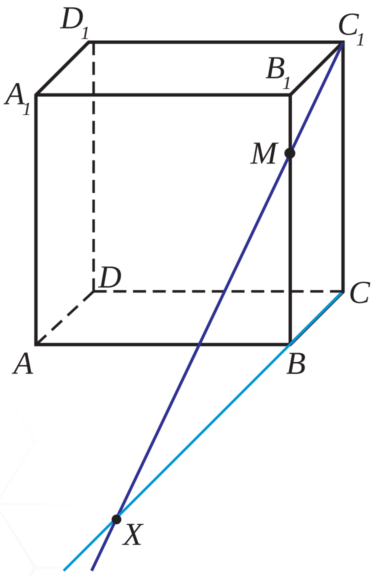
Ko'pyoqlarning sodda kesimlari			
Ko'pburchakli prizma	**To'g'ri burchakli parallelepiped**	**Kub**	**Piramida**
			
ACC_1 – A, C, C_1 nuqtalardan o'tuvchi, kesuvchi tekislik. ACC_1A_1 – kesim.	CBK – K nuqta va CB to'g'ri chiziqdan o'tuvchi, kesuvchi tekislik. $CBKM$ – kesim.	A_1BC_1 – BC_1 va BA_1 to'g'ri chiziqlardan o'tuvchi, kesuvchi tekislik. A_1C_1B – kesim.	ABN – AB va LN parallel to'g'ri chiziqlardan o'tuvchi, kesuvchi tekislik. $ABNL$ – kesim.

13



14


15


16


8.2. 13-rasmda keltirilgan holatlarda fazoviy shakllarning qanday kesimi tasvirlanganligini izohlang.

8.3. Kubni tekislik bilan kesganda kesimda 14-rasmda tasvirlangan qaysi holatlar boʻlishi mumkin? Qaysilari boʻlishi mumkin emas?

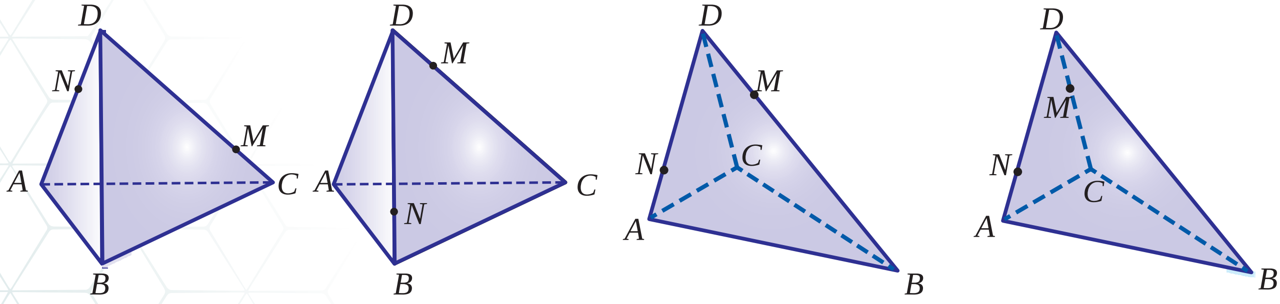
8.4. 15-rasmda tasvirlangan yogʻoch kub arralanganda K, P va T nuqtalardan oʻtuvchi kesim hosil boʻladi. Toʻliq kesim qanday shakldan iborat boʻladi?

8.5. Kub chizing. Uning qirralarida shunday uchta nuqtani belgilangki, bu nuqtalardan oʻtuvchi tekislik kesimda: a) uchburchak; b) toʻrtburchak; c) beshburchak hosil qilsin.

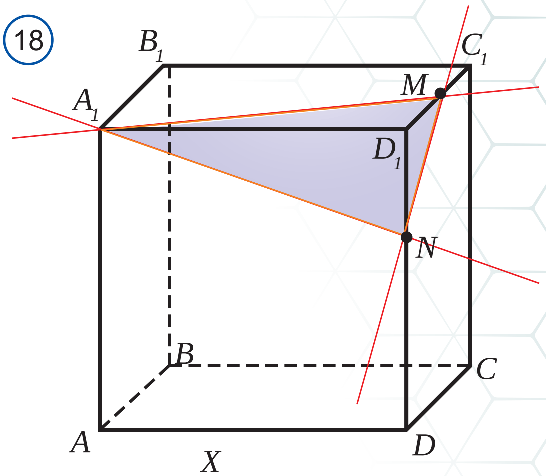
8.6. Quyidagi algoritm asosida yasashni bajaring va yasash jarayonini izohlang.
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ kub va $M \in BB_1$ nuqta berilgan. C_1M toʻgʻri chiziq bilan kubning $ABCD$ yogʻi kesishish nuqtasini topish algoritmi*(16-rasm)*:
C_1M va BC kesmalarni davom ettirib, ularning kesishish nuqtasini X bilan belgilaymiz.
X – izlangan nuqta boʻladi.

8.7. 17-rasmda tasvirlangan $ABCD$ tetraedrning qirralarida M va N nuqtalar belgilangan. MN toʻgʻri chiziqning ABC tekislik bilan kesishish nuqtasi qaysi toʻgʻri chiziqda yotishini aniqlang.

8.8. Quyidagi algoritm asosida kubning berilgan nuqtalardan oʻtuvchi kesimini yasang va izohlang.
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ kubning A_1, $M \in D_1C_1$ va $N \in DD_1$ nuqtalaridan oʻtuvchi kesimini yasash algoritmi (*18-rasm*):

17


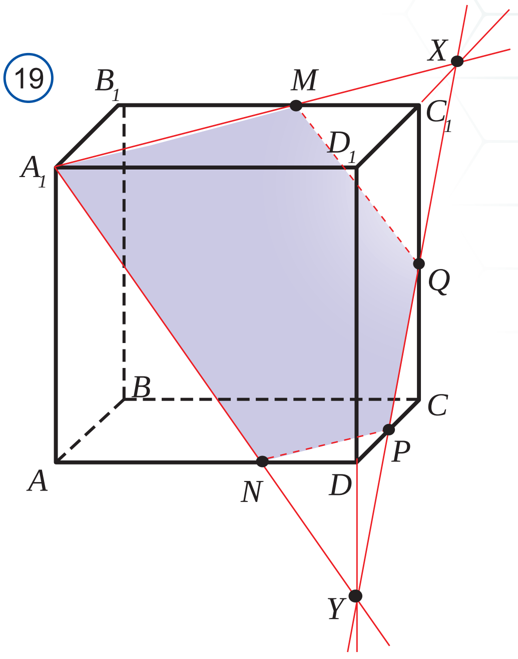
1. A_1 nuqtani M nuqta bilan tutashtiramiz.
2. A_1 nuqtani N nuqta bilan tutashtiramiz.
3. M nuqtani N nuqta bilan tutashtiramiz.
4. A_1MN uchburchak izlanayotgan kesim bo‘ladi.



8.9. Quyidagi algoritm asosida kubning berilgan nuqtalardan o‘tuvchi kesimini yasang va yasash jarayonini izohlang.

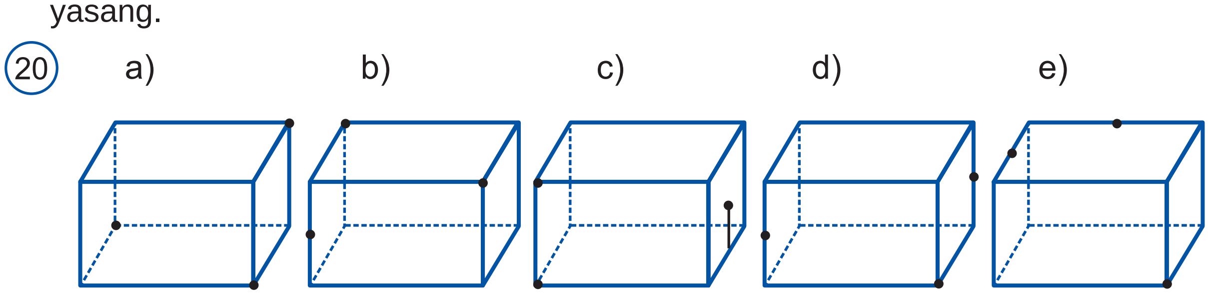
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ kubning M, Q va P nuqtalardan o‘tuvchi kesimini yasash algoritmi *(19-rasm)*:

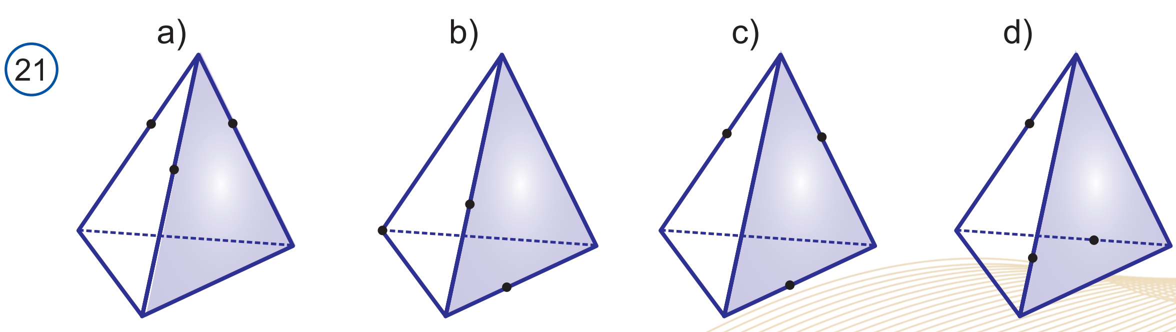
1. A_1 va M nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq o‘tkazamiz. A_1M va D_1C_1 to‘g‘ri chiziqlar kesishish nuqtasini X bilan belgilaymiz.
2. A_1 va N nuqtalardan to‘g‘ri chiziq o‘tkazamiz. A_1N va DD_1 to‘g‘ri chiziqlar kesishish nuqtasini Y bilan belgilaymiz.
3. X nuqtani Y nuqta bilan tutashtiramiz. XY va CC_1 to‘g‘ri chiziqlar kesishish nuqtasini Q bilan belgilaymiz.
4. XY va DC to‘g‘ri chiziqlar kesishish nuqtasini P bilan belgilaymiz.
5. M va Q nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq o‘tkazamiz. N va P nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq o‘tkazamiz.
6. A_1MQPN beshburchak izlanayotgan kesim bo‘ladi.



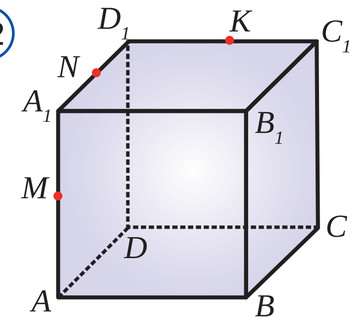
8.10. 20-rasmda tasvirlangan to‘g‘ri burchakli parallelepipedning berilgan uchta nuqtasidan o‘tuvchi kesimini yasang.

8.11. 21-rasmda tasvirlangan piramidaning berilgan uchta nuqtasidan o‘tuvchi kesimini yasang.





22



8.12. Kubning M, N va K nuqtalardan oʻtuvchi tekislik bilan kesimini parallel koʻchirish usuli bilan yasang *(22-rasm).*

8.13. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kubning AD hamda CD qirralarida M va N nuqtalar berilgan. Kubni MNB_1 tekislik bilan kesganda hosil boʻladigan kesimni yasang.

8.14. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kubni chizing hamda AB, BC va BB_1 qirralari oʻrtalari boʻlgan M, N va L nuqtalarni belgilang. Keyin: a) kubni MNL tekislik bilan kesganda hosil boʻladigan kesimni yasang; b) MNL uchburchakning muntazam ekanini isbotlang; c) kubning qirrasi 1 cm boʻlsa, MNL uchburchak yuzini toping.

8.15. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ toʻgʻri burchakli parallelepipedning qirralari $AB = 6$ cm, $AD = 6$ cm va $AA_1 = 8$ cm. Parallelepipedning BC_1D tekislik bilan kesimi teng yonli uchburchak ekanini isbotlang va bu uchburchak balandligini toping.

8.16. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ prizmani chizing. Prizmaning AD, AA_1 va DD_1 qirralari oʻrtalari boʻlgan M, N va L nuqtalardan oʻtuvchi tekislik bilan kesimini yasang.

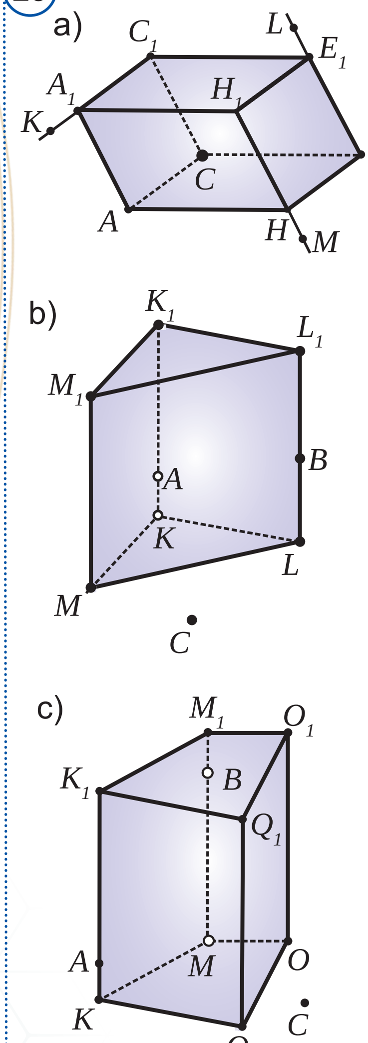
8.17. 23-rasmda berilgan maʼlumotlar asosida: a) M, N va L; b) A, B va C; c) A, B va C nuqtalardan oʻtuvchi fazoviy shakllarning tegishli kesimlarini yasang.

8.18. $IJKLI_1J_1K_1L_1$ prizmaning JI_1, J_1K_1 va LL_1 qirralarida yotgan A, B va C nuqtalar olingan *(24-rasm)*. Prizmaning ABC tekislik bilan kesimini yasang.

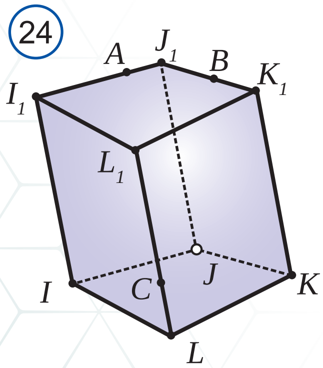
8.19. Berilgan maʼlumotlar asosida 25-rasmdagi fazoviy shaklning U, V va W nuqtalardan oʻtuvchi tekislik bilan kesganda hosil boʻlgan kesimini yasang.

8.20. Berilgan maʼlumotlar asosida 26-rasmdagi fazoviy shaklning A, B va X nuqtalardan oʻtuvchi tekislik bilan kesganda hosil boʻlgan kesimini yasang.

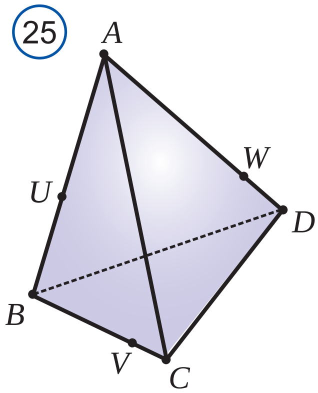
23



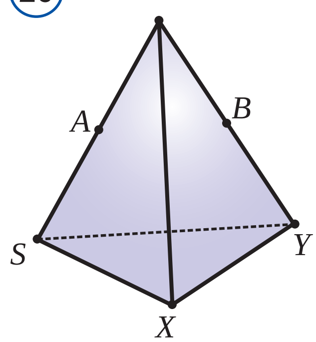
24



25



26



“GeoGebra”ni qo‘llab

Ko‘pyoqlar kesimlarini yasash

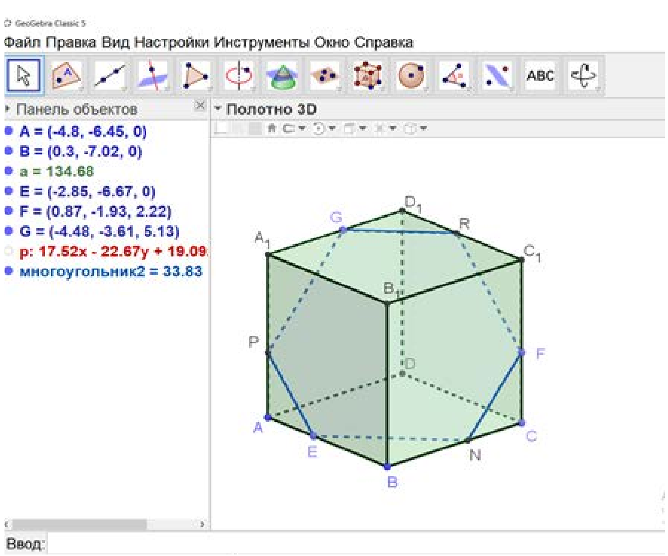
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ kubning AB, CC_1 va A_1D_1 qirralarida mos ravishda E, F va G nuqtalar berilgan. Kubni EFG tekislik bilan kesganda hosil bo‘ladigan kesimni yasang.

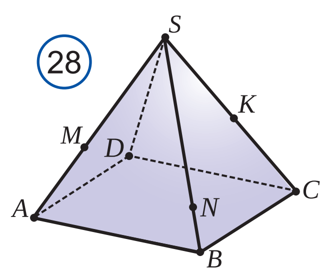
Yasash:

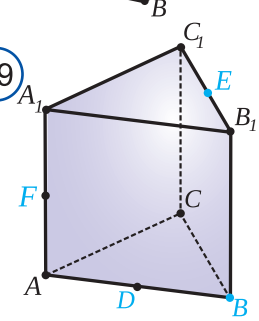
- “GeoGebra”da yangi oyna oching.
- “GeoGebra” interfeysini “**Настройки**” – “**3D Графика**” ko‘rinishiga o‘tkazing.

Kesimni yasash bosqichlari

1		**Куб**	Ixtiyoriy kub yasaladi.
2		**Точка в объекте**	$ABCDA_1B_1C_1D_1$ kub va uning AB, CC_1 va A_1D_1 qirralarida mos ravishda E, F va G nuqtalar belgilanadi.
3		**Плоскость через 3 точки**	EFG nuqtalardan o‘tuvchi tekislik yasaladi.
4		**Крывая пересечения**	Kub va EFG nuqtalardan o‘tuvchi tekislik kesimi hosil qilinadi.
5		**Показывать объект**	Tekislikning keraksiz qismi yashirin holatga keltiriladi.
6		**Перемещение**	E, F va G nuqtalarni siljitish orqali kub kesimi to‘g‘ri bajarilgani tekshiriladi (27-*rasm*).

27


28


29


Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Piramidaning M, N va K nuqtalaridan o‘tuvchi tekislik bilan kesgandagi kesimni yasang *(28-rasm)*.

2. Muntazam uchburchakli prizmaning berilgan nuqtalaridan o‘tuvchi kesimni toping *(29-rasm)*.

9 LOYIHA ISHI BO‘YICHA MASHG‘ULOT

Ilk geometrik bilimlar qadimgi Misrda ham 5 ming yildan ko‘proq vaqt oldin paydo bo‘lgan. Misrliklar ulardan nafaqat piramidalar qurishda, balki Nil qirg‘og‘idagi ekin maydonlarini belgilashda ham foydalanishgan. Miloddan avvalgi 2 minginchi yillarda qadimgi Misrda geometriyaning tug‘ilishi haqida qadimgi yunon olimi Gerodot (miloddan avvalgi V asr) shunday deb yozgan edi: “Misr fir’avni Seozoostris yerni bo‘lib, har bir misrlikka qur’a bo‘yicha tomorqa ajratib, har bir tomorqadan tegishli tartibda soliq yig‘ib olgan. Nil daryosi toshib, tomorqalarni suv bosgan. Yer egalari tomorqalari chegaralarini tiklab berish yoki soliqni kamaytirish uchun fir’avnga murojaat qilishgan. Hukmdor esa tomorqa qancha kamayganini aniqlash va shunga qarab soliqni kamaytirish uchun o‘z vakillari – yer o‘lchovchilarni yuborgan. Shu tariqa, Misrda yer o‘lchash haqidagi fan – geometriya paydo bo‘lgan va u yerdan Yunonistonga ko‘chib o‘tgan”.

O‘quv loyihasi – fanlarni yanada chuqurroq, uyg‘unlashgan holda o‘rganishga yo‘naltirilgan, ta’lim jarayoniga tajriba, amaliy faoliyat asosida yondashuvga imkon beruvchi, tadqiqot va izlanish olib borishni talab etuvchi ta’lim jarayonini tashkil etish shakli hisoblanadi. Shu bilan birga, loyiha ishi bitta fan doirasida ham bajarilishi mumkin.

O‘quvchilar loyiha ishi bo‘yicha izlanishlarini yil davomida odatda darsdan tashqari, mustaqil mashg‘ulotlarda olib borishadi.

Loyiha ishi mavzulari *amaliy, nazariy* va *tadqiqot* xarakterida bo‘lishi mumkin.

Amaliy loyiha ishida fanlarda o‘zlashtirilgan bilim va ko‘nikmalar hayotiy vaziyatlardagi muammolarni (keyslar) yechishda qo‘llanadi. Ma’lum bir fan yoki fanlarga doir amaliy ko‘nikma va malakalarni rivojlantirish zaruriyati paydo bo‘lganda amaliy yo‘naltirilgan loyihalardan foydalanish yaxshi samara beradi. Eng oddiy holatda o‘qituvchi o‘quvchilarga fanga doir qo‘shimcha o‘quv materiali, testlar to‘plamini, taqdimot, tarqatma materiallarni yoki glossariy (atamalar lug‘ati)ni tuzish, ko‘rgazmali o‘quv quroli modelini yaratish va yasash kabi topshiriqlarni berishi mumkin. Amaliy yo‘naltirilgan loyihalar bilan ishlash jarayonida o‘quvchilarda fanga doir bilim, ko‘nikma va malakalar rivojlanadi, faoliyatga doir kompetentlik qaror topadi.

Nazariy loyiha ishida esa fanlarning biror mavzusi chuqurroq o‘rganiladi. Bunday loyiha ishida berilgan mavzu bo‘yicha ma’lumotlar to‘planadi, qayta ishlanadi, tahlil qilinadi, tasniflanadi, umumlashtiriladi hamda foydali va qo‘shimcha yozma o‘quv resursi sifatida taqdim etiladi.

Tadqiqot loyiha ishida esa biror nostandart masala yoki hayotiy muammoni yechish ustida kichik ilmiy izlanish olib boriladi. O‘quvchilarning tahliliy, tanqidiy fikrlash qobiliyatini rivojlantirish, idrok etishning mantiqiy usullarini o‘zlashtirish va katta hajmdagi axborotlarni qayta ishlash maqsad qilib qo‘yilsa, tadqiqotchilikka doir o‘quv loyihasidan foydalanish maqsadga muvofiq. Mazkur o‘quv loyihasining maqsadi loyiha farazini asoslab berishdan iborat. Ushbu maqsadga erishish uchun tajriba-sinov ishlari o‘tkazish, olingan natijalarni tahlil etish, umumlashtirish, taqqoslash, rivojlanish qonuniyatlarini aniqlash, bundan tashqari, xulosalar chiqarish, o‘z nuqtayi nazarini asoslash zarur. Ana shu tarzda tadqiqotchilikka doir o‘quv loyihasida asosiy e’tibor fikriy kompetentlikni rivojlantirishga qaratiladi.

O‘quv loyihasida eng katta e’tiborni o‘quvchilarda ijodiy qobiliyatlarni rivojlantirishga qaratish lozim. Aynan ijodiy loyiha o'quvchilarga o'zini namoyon eta olish, istalgan sohada o'z ijodiy ishini yaratish imkonini beradi. Shuningdek, ijodiy loyihalar o'quvchilarning guruhdagi maqomini oshirish, o'z-o'zini baholashga imkon berish orqali ularning ijodiy qobiliyatlarini rivojlantiradi. Har qanday ijodiy ish uni taqdim etish va sinf jamoasi bilan aloqani taqozo etadi. Ana shu sababli ijodiy loyihalar o'quvchilarda kommunikativ kompetentlikni rivojlantirishga katta ta'sir ko'rsatadi.

Loyiha ishi mavzusi ustida o'quvchilar alohida-alohida yoki 3-4 kishilik guruh bo'lib ishlashlari mumkin. Loyiha ishi o'quv yili oxirida o'tkaziladigan himoya (kichik konferensiya) bilan tugaydi. Loyiha ishi ustidagi ish jarayoni quyidagi o'quv faoliyatlarini o'z ichiga olishi mumkin:

- loyiha ishi bo'yicha faoliyatni rejalashtirish;
- vazifalarni o'zaro taqsimlab olish;
- o'quv maqsadlarini qo'yish;
- kerakli ma'lumotlarni izlab topish;
- mavzuga doir muammoli vaziyat yechimlarini qidirish;
- yechimlardan eng maqbulini tanlash va uni asoslash;
- zarur hollarda so'rovlar yoki tajribalar o'tkazish;
- loyiha ishi natijalari bo'yicha hisobot tayyorlash;
- o'z faoliyatlarini tahlil qilish va baholash;
- loyiha ishi himoyasi uchun taqdimot tayyorlash;
- loyiha ishini himoya qilish.

Bu mashg'ulot davomida o'quvchilarga loyiha ishi haqida ma'lumot beriladi. Loyiha ishi mavzulari o'quvchilar orasida taqsimlanadi. Biror loyiha ishi namuna sifatida ko'rsatiladi.

Loyiha ishining namunaviy mavzulari

(bu mavzulardan tashqari boshqa mavzular ham taklif qilinishi mumkin)

1. Yevklid geometriyasi.
2. Lobachevskiy geometriyasi.
3. Ko'pyoqlar geometriyasi.
4. Misr piramidalarining jumboqlari.
5. Ko'pyoq sirti.
6. Mening shahrim geografiyasi va geometriyasi.
7. Geometrik mozaika.
8. Geometrik paradokslar.
9. Minoralar arxitekturasidagi geometrik shakllar.
10. Yo'laklarni loyihalash va bezashda geometrik shakllar.
11. Qadimgi naqqoshlikda geometriya.

Stereometriya yoki fazoviy geometriya geometriyaning turli fazoviy jismlarning shakli, o'lchamlari va xossalarini o'rganuvchi bo'limi hisoblanadi.

U yunoncha *stereo* – "jism" va *metrio* – "o'lchash" so'zlaridan kelib chiqqan hamda tom ma'noda "jismlarni o'lchash" degan ma'noni anglatadi. Stereometriya ham planimetriya kabi insonning amaliy faoliyati ehtiyojlari bilan bog'liq holda paydo bo'lgan va rivojlangan.

Eng qadimgi va eng mashhur maktablardan biri – Pifagor maktabi (miloddan avvalgi VI–V asrlar) uning asoschisi Pifagor nomi bilan atalgan. Pifagorchilar o'zlarining falsafiy nazariyalarida muntazam ko'pburchaklardan foydalanganlar. Ularning shakllari mavjudlik asoslariga berilgan. Qadimgi tadqiqotchilar olov – tetraedr, yer (tuproq) – kub, havo – oktaedr, suv – ikosaedr, butun koinot – dodekaedr shakliga ega deb bilishgan.

12. Rasm, haykal va arxitektura geometriyasi.

13. Muzeydagi rasmlarda geometriya.

14. Naqshli geometriya.

15. Bino va inshootlarning geometriyasi va me'moriy ko'rinishlari.

16. Kataklarda geometriya.

17. Markaziy Osiyo arxitekturasida geometriya.

18. Misr piramidasining matematik xususiyatlari.

19. Stereometrik jismlar.

20. Tabiatda simmetriya.

21. Geometriya atamalari lug'ati.

22. "Simmetriya nima?" o'quv filmi.

23. "Ko'pyoqlarning kesimi" mavzusidagi didaktik material.

24. Geometriyadan testlar to'plami.

25. "Geometrik jang" o'yini ssenariysini tuzish.

26. O'lchov birliklari haqida hikoya – animatsiya.

27. "Geometrik sarguzashtlar" sahna ko'rinishi ssenariysini ishlab chiqish.

28. Geometrik masalalar yechish trenajyori.

29. Geometrik kalkulyator.

30. "Geometrik shakllar" multimediali ilovasi.

31. Simmetriyaga oid elektron ko'rgazmali qurol.

32. "Geometriya" o'quv-test dasturi.

33. Stereometriya bo'yicha elektron qo'llanma.

34. Geometriyaning kelib chiqishi, rivojlanishi va insoniyat tomonidan qo'llanishi.

35. Fizikada matematika.

36. Kimyoda matematika.

37. Biologiya va tibbiyotda matematika.

38. Ekologiyada matematika.

39. Geografiyada matematika.

40. Iqtisodiyotda matematika.

41. San'atda matematika.

42. "GeoGebra" dasturidan stereometriya darslarida foydalanish.

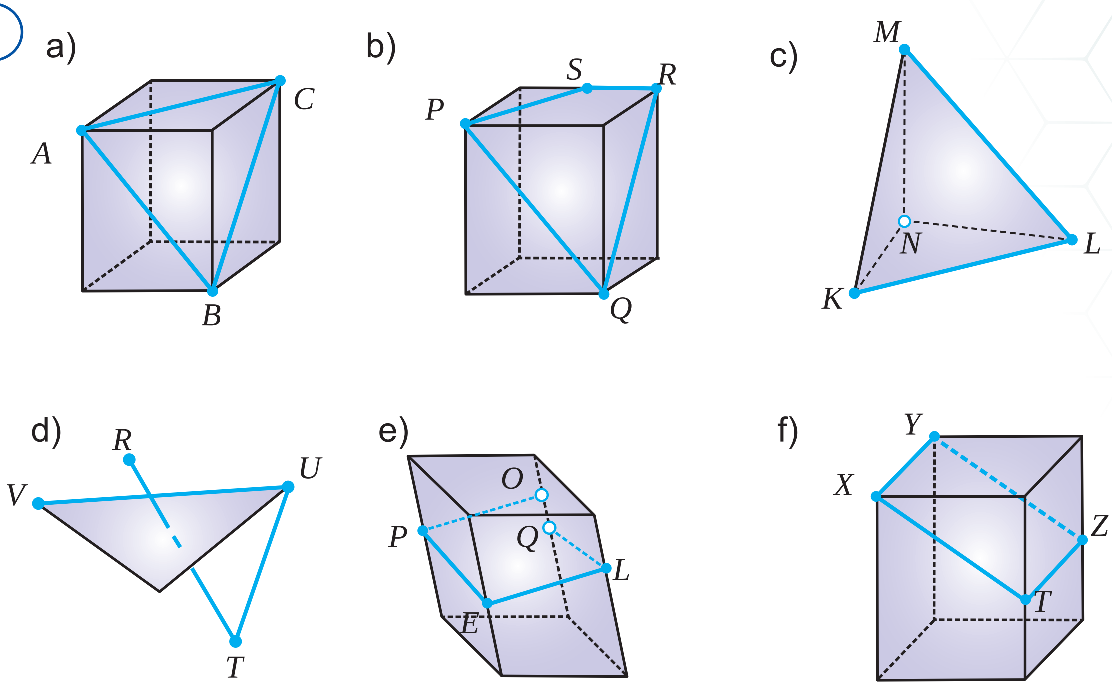
43. Stereometriyani o'rganish uchun foydali elektron resurslar ro'yxati.

44. Baholash bo'yicha xalqaro tadqiqotlarda stereometrik masalalar.

10 BOBNI TAKRORLASHGA DOIR AMALIY MASHQLAR

10.1. 1-rasmda tasvirlangan siniq chiziq yassimi yoki fazoviy?

1

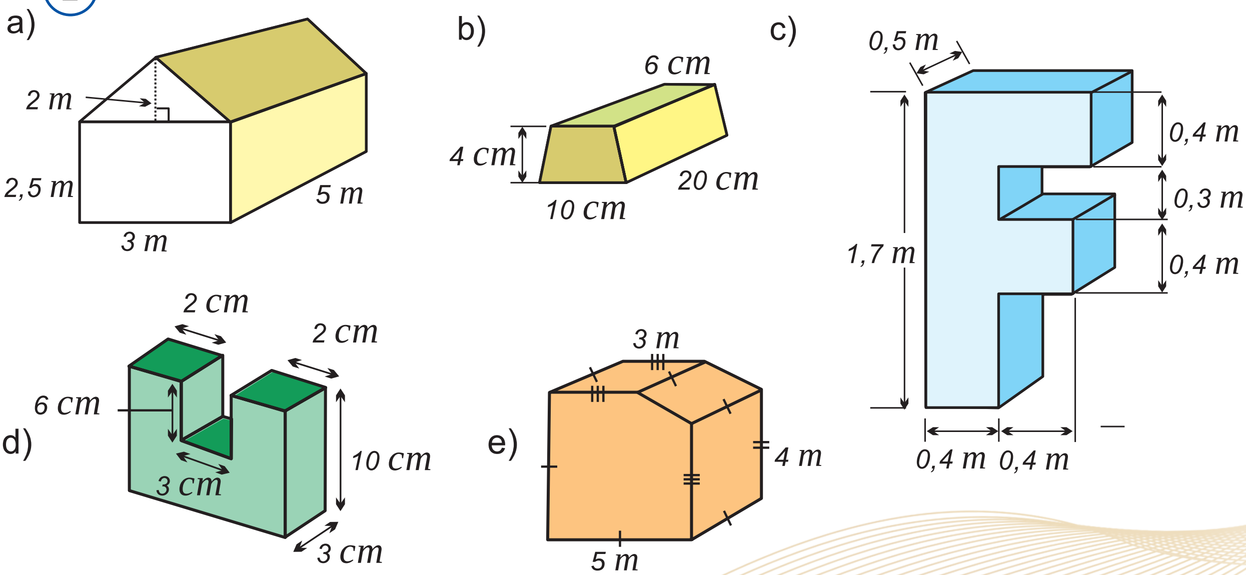


10.2. Muntazam to‘rtburchakli piramida asosining tomoni 12 cm ga, piramida uchini asos markazi bilan tutashtiruvchi kesma uzunligi 16 cm ga teng. Piramida: a) yon qirrasi va apofemasini; b) yon sirtini; c) to‘la sirtini toping.

10.3*. $REFGH$ piramida asosi tomonlari 10 cm va 18 cm bo‘lgan va yuzi 90 cm^2 ga teng bo‘lgan $EFGH$ parallelogrammdan iborat. Piramida uchi – R ni asos diagonallari kesishish nuqtasi – O bilan tutashtiruvchi kesma uzunligi 6 cm ga teng va u bu diagonallarga perpendikulyar. Piramida: a) yon qirralarini; b) yon sirtini; c) to‘la sirtini toping.

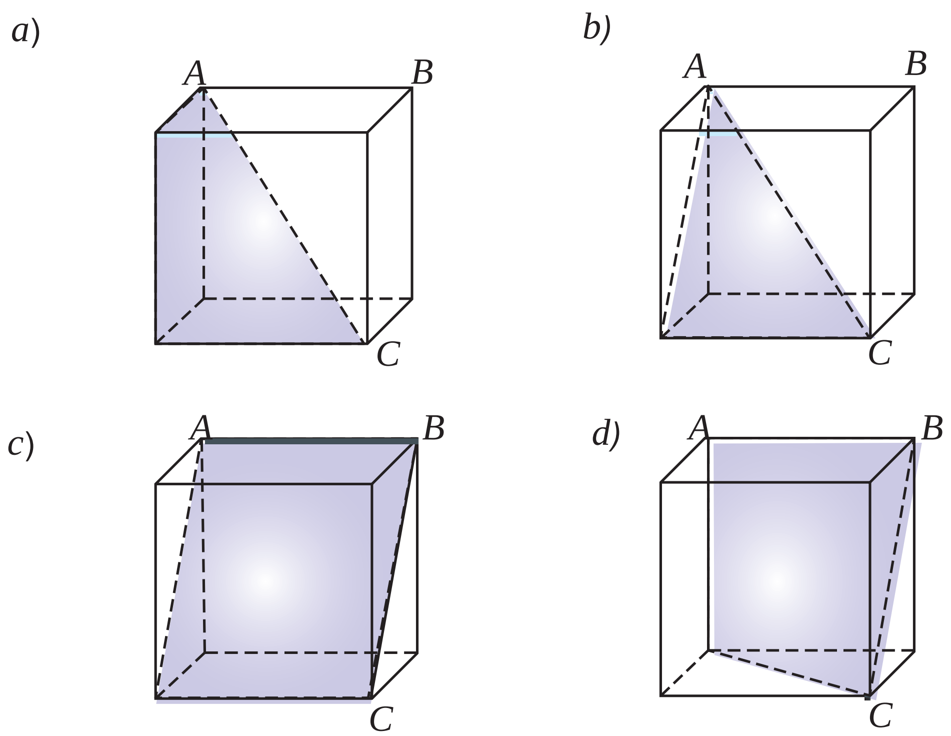
10.4. 2-rasmda tasvirlangan jismlarning to‘la sirtini toping.

2



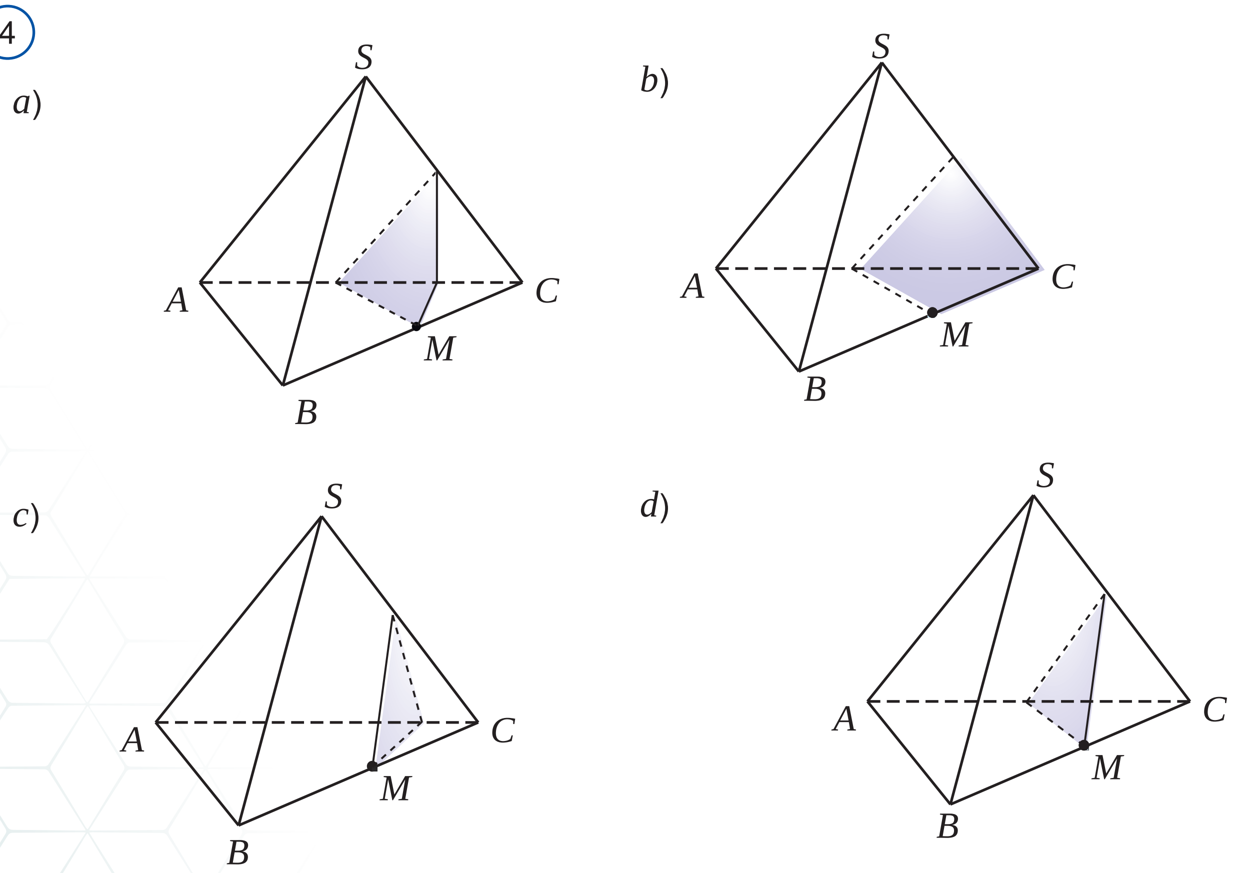
10.5. Kubni tekislik bilan kesgan payt kesimda 3-rasmda tasvirlangan qaysi holatlar bo‘lishi mumkin? Qaysilari bo‘lishi mumkin emas?

3



10.6. Qaysi rasmda M nuqtadan o‘tuvchi va tetraedrning SAB yog‘iga parallel bo‘lgan kesim tasvirlangan?

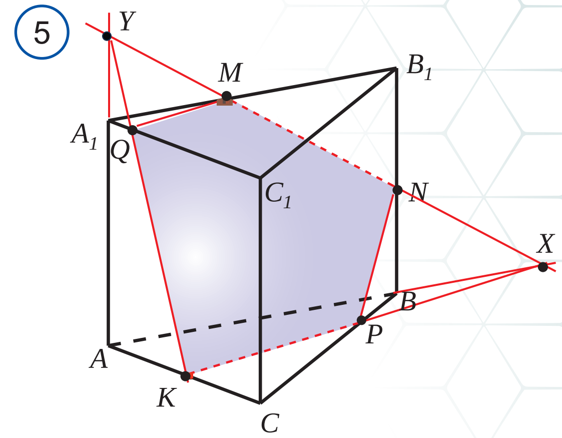
4



10.7. Quyidagi algoritm asosida prizmaning berilgan nuqtalardan oʻtuvchi kesimini yasang va yasash jarayonini izohlang.

$ABCA_1B_1C_1$ prizmaning M, N, P va Q nuqtalaridan oʻtuvchi kesimini yasash algoritmi:

1. $M \leftrightarrow N,\quad MN \cap AB = X$
2. $X \leftrightarrow K,\quad XK \cap BC = P$
3. $MN \cap AA_1 = Y$
4. $Y \leftrightarrow K,\quad YK \cap A_1C_1 = Q$
5. $P \leftrightarrow N,\quad Q \leftrightarrow M$
6. $MNKPQ$ izlanayotgan kesim boʻladi.

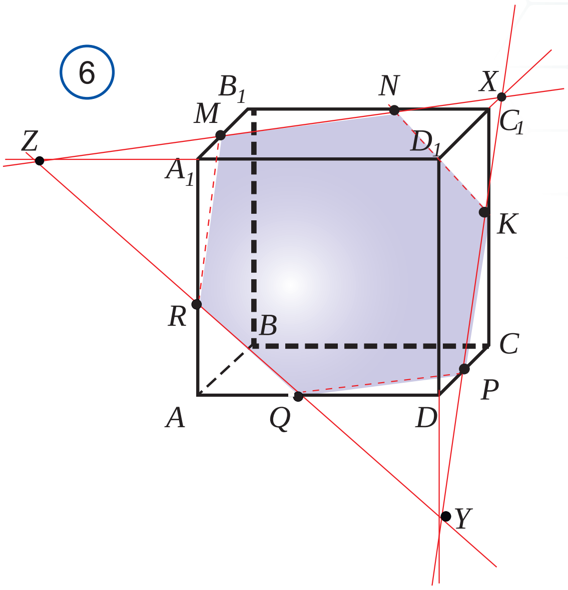


Bu yerda $M \leftrightarrow N$ belgilash – M va N nuqtalardan oʻtuvchi toʻgʻri chiziqni oʻtkazamiz, $MN \cap AB = X$ belgilash esa MN va AB toʻgʻri chiziqlar kesishish nuqtasini X bilan belgilaymiz degan maʼnoni anglatadi.

10.8. Quyidagi algoritm asosida kubning berilgan nuqtalardan oʻtuvchi kesimini yasang va yasash jarayonini izohlang.

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ kubning $M \in A_1B_1$, $N \in B_1C_1$ va $K \in CC_1$ nuqtalaridan oʻtuvchi kesimini yasash algoritmi:

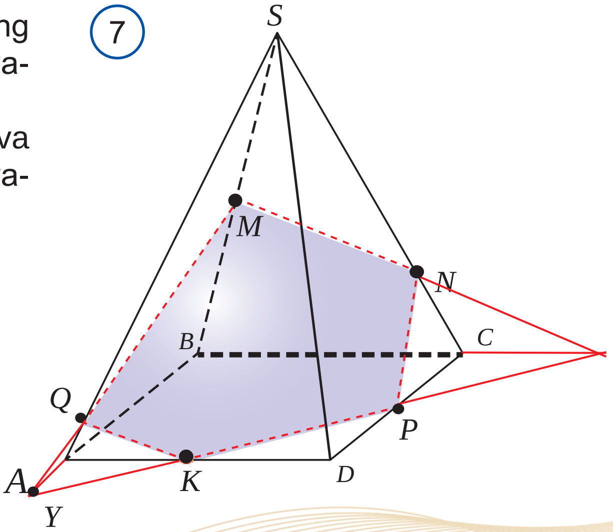
1. $M \leftrightarrow N;$
2. $MN \cap D_1C_1 = X;$
3. $N \leftrightarrow K,\quad X \leftrightarrow K;$
4. $XK \cap DC = P;$
5. $KP \cap DD_1 = Y;$
6. $MN \cap A_1D_1 = Z;$
7. $Y \leftrightarrow Z$
8. $YZ \cap AD = Q;$
9. $YZ \cap AA_1 = R;$
10. $Q \leftrightarrow P,\quad R \leftrightarrow M;$
11. $MNKPQR$ izlanayotgan kesim boʻladi.



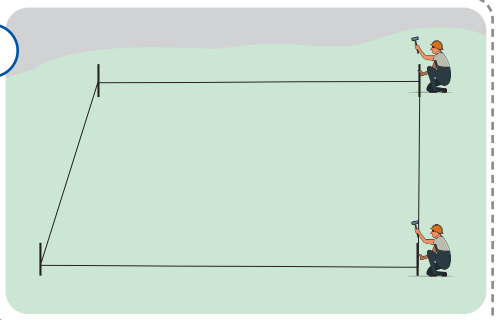
10.9. Quyidagi algoritm asosida piramidaning berilgan nuqtalardan oʻtuvchi kesimini yasang va yasash jarayonini izohlang.

$SABCD$ piramidaning $M \in SB$, $N \in SC$ va $K \in AD$ nuqtalaridan oʻtuvchi kesimini yasash algoritmi:

1. $M \leftrightarrow N$
2. $MN \cap BC = X$
3. $X \leftrightarrow K$
4. $XK \cap DC = P$
5. $XK \cap AB = Y$
6. $Y \leftrightarrow M$
8. $YM \cap SA = Q$
9. $P \leftrightarrow N,\quad K \leftrightarrow Q$
10. $MNPKQ$ izlanayotgan kesim boʻladi.

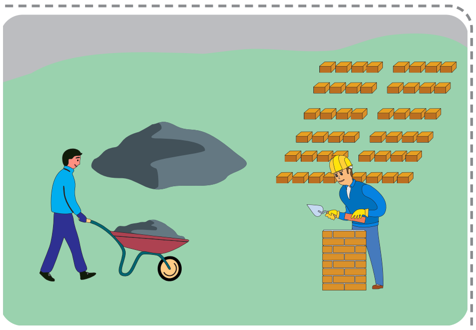


Tatbiqlar va amaliy kompetensiyalarni shakllantirish

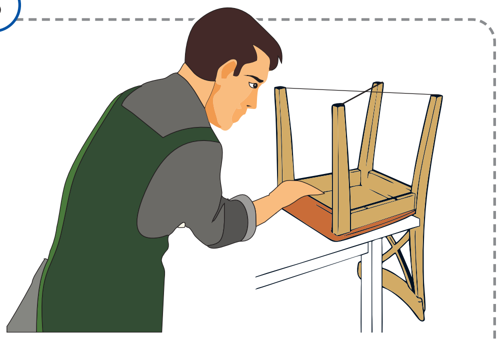
1


1. Nima sababdan biror imorat uchun o‘ra (chuqur) qazishdan oldin belgilash ishlari tarang tortilgan ip yordamida bajariladi? *(1-rasm)*

Javob: *ikkita tekislik kesishmasi to‘g‘ri chiziqdan iborat bo‘ladi.*

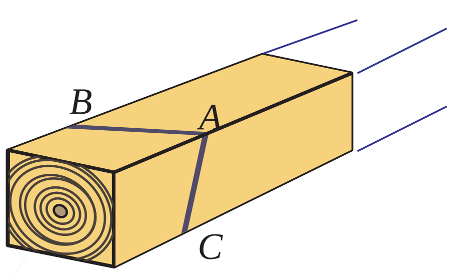
2


2. G‘isht quyish jarayonida qolipga loy solinib, tekis yog‘och bo‘lagi qolip ustida yurgizilib, loyning ortiqcha qismi sidirib olib tashlanadi. Bunda nima sababdan g‘ishtning sirti tekis chiqadi? *(2-rasm)*

3


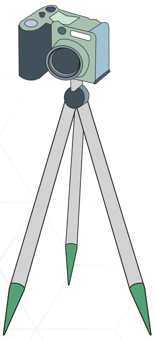
3. Yasalgan stulning oyoqlari bir tekislikda yotganini tekshirish uchun duradgorlar stulning qarama-qarshi oyoqlariga ip tortib tekshiradi. Bu usulni qo‘llab ko‘ring va u nimaga asoslanganligini ayting. *(3-rasm)*

Javob: *ikki kesishuvchi chiziq yagona tekislikni aniqlaydi.*

4


4. Bir bo‘lak yog‘och taxtani arralayotib duradgor arralash sirtining tekis bo‘lishiga qanday erishadi? *(4-rasm)*

Javob: *yog‘och taxtaning ikki qo‘shni yoqlariga AB va AC kesmalarni chizadi va arrani imkoni boricha shu kesmalardan o‘tadigan qilib qo‘yib, arralashni bajaradi. Natijada ikki kesishuvchi to‘g‘ri chiziqdan o‘tuvchi tekislik yagona bo‘lgani uchun arralash sirti tekis chiqadi.*

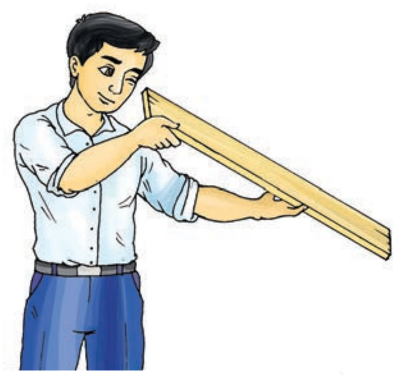
5


5. Fotoapparatni o‘rnatish uchun mo‘ljallangan tag moslama nima sababdan uch oyoqli qilib yasaladi? *(5-rasm)*

Javob: *bir to‘g‘ri chiziqda yotmagan uchta nuqtadan faqat bitta tekislik o‘tadi.*

6. Duradgor ishlov berilgan taxta sirtining tekisligini qanday tekshiradi? Bu usul nimaga asoslangan? *(6-rasm)*

Javob: *agar to‘g‘ri chiziqning ikki nuqtasi tekislikda yotsa, uning o‘zi ham butunligicha shu tekislikda yotadi.*

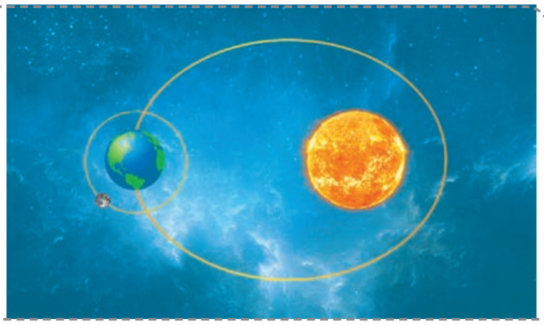
6


7. Nima sababdan uch oyoqli mototsikl ikki oyoqlisiga nisbatan ancha turg‘un bo‘ladi? *(7-rasm)*

Javob: *bir to‘g‘ri chiziqda yotmagan uchta nuqtadan faqat bitta tekislik o‘tadi.*

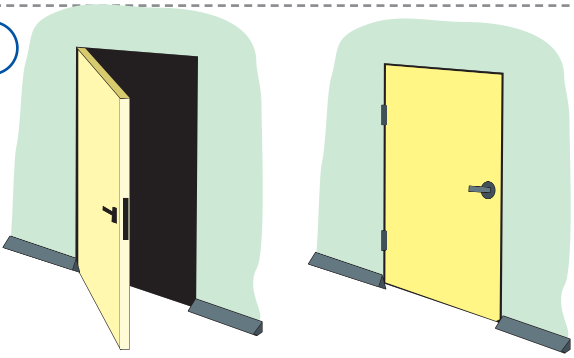
7


8. Quyosh, Yer va Oy markazlari bitta tekislikda yotishi mumkinmi? Bitta to‘g‘ri chiziqda-chi? Qachon? *(8-rasm)*

8


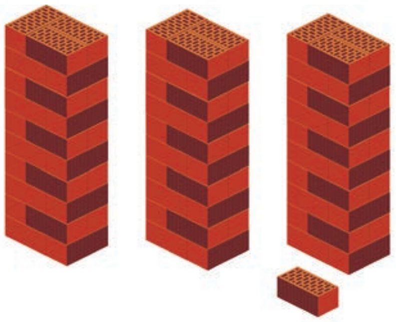
9. Nima uchun ochiq eshiklar yelvizakda o‘z holicha harakatga keladi? Nima sababdan bu holat yopiq eshiklar bilan sodir bo‘lmaydi? *(9-rasm)*

Javob: *to‘g‘ri chiziq va unda yotmagan nuqtadan faqat bitta tekislik o‘tkazish mumkin.*

9


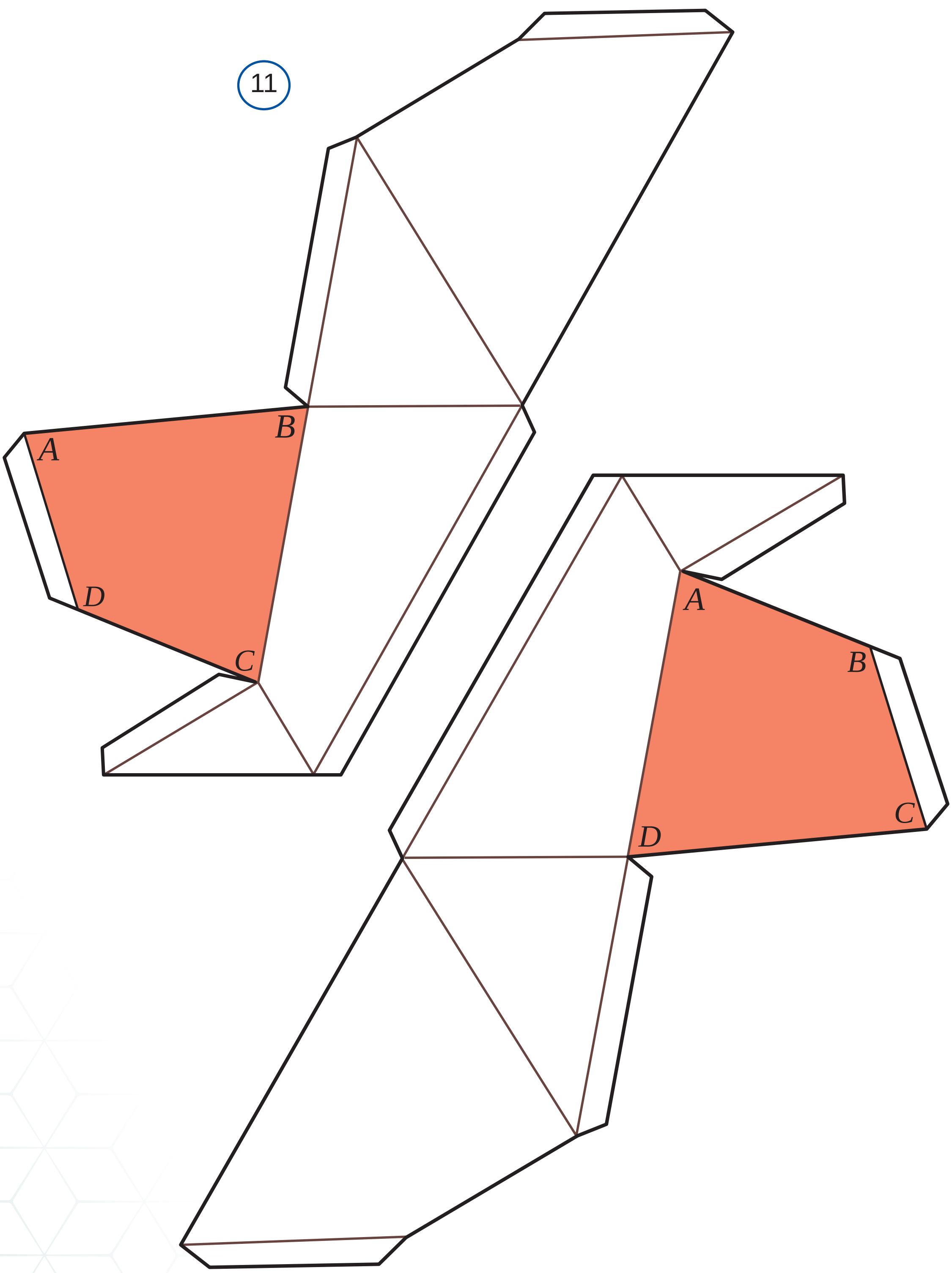
10. Kesimi tomoni 7 dm bo‘lgan kvadratdan iborat, balandligi 4 m bo‘lgan 18 ta ustunni qurish uchun qancha g‘isht kerak bo‘ladi? (G‘ishtning o‘lchamlari: 1 : 1,5 : 3 dm. Qurish jarayonida 5% g‘isht chiqitga ketadi). *(10-rasm)*

Javob: *5760 dona.*

10


Amaliy ish

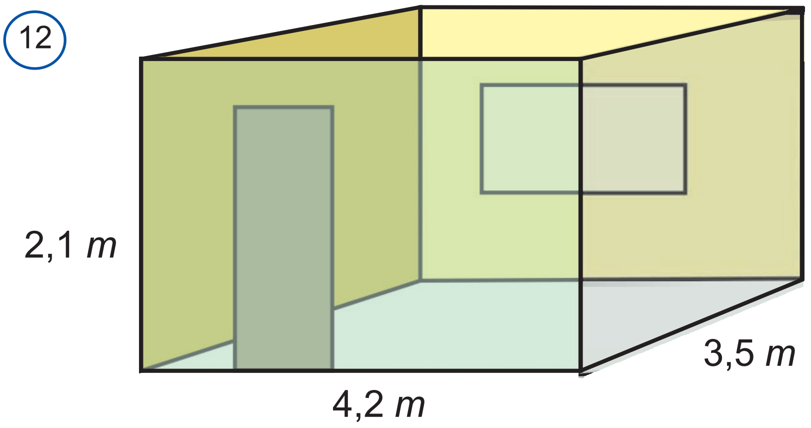
1. 11-rasmda berilgan yoyilmalarni qalin qog'ozga chizib oling. Ularni qaychi bilan qirqib olib, tegishli chiziqlar bo'yicha buklab, so'ng yelimlang. Natijada tetraedrning qandaydir tekislik bilan kesgandagi ikkita bo'lagining modeli hosil bo'ladi. Ularni birlashtirib, $ABCD$ kesimli butun tetraedrni hosil qiling.



2. 12-rasmda tasvirlangan xonani ta'mirlash kerak. Xonada o'lchamlari 0,8 *m* va 2,2 *m* bo'lgan eshik va o'lchamlari 183 *cm* va 91 *cm* bo'lgan deraza bor. Eshikning ikki tomoni ham bo'yalishi lozim. Jadvalda ikki xil bo'yoqning narxlari berilgan. Bu ma'lumotlardan foydalanib tejamli ta'mirlash uchun qancha mablag' kerakligini hisoblang.

Bo'yoq turi	**Hajmi**	**Bo'yash yuzi**	**Narxi** *(so'mda)*
Devor uchun	*4 l*	*16 m^2*	*32450*
	2 l	*8 m^2*	*20800*
Eshik uchun	*2 l*	*10 m^2*	*23600*
	1 l	*5 m^2*	*15400*

12



Geometrik joziba

Yirik bino va inshootlarni qurgan ota-bobolarimiz katta geometrik bilim va salohiyatga ega bo‘lgan. Buni birgina Samarqand shahridagi Registon maydonida qad ko‘targan tarixiy yodgorliklardan ham bilib olish mumkin (13-rasm).

Xiva shahridagi Ichanqal’a majmuasi rasmida (14-rasm) qanday geometrik shakllarni ko‘ryapsiz?

“Tojmahal” – Hindistonning Agra shahrida boburiy hukmdor Shohjahon qurdirgan qadimiy yodgorlik (15-rasm). Uni qurgan ustalar geometriyadan mukammal bilimga ega bo‘lganliklari kundek ravshan.

Sidney shahri opera teatri (16-rasm) – Avstraliyadagi zamonaviy me’morchilik namunasi. O‘zining g‘aroyib geometrik ko‘rinishi bilan diqqatga sazovordir.

17

18

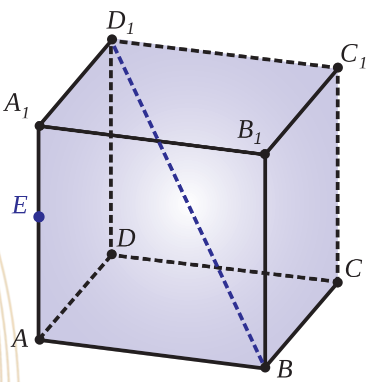
Go'zal geometrik tasavvur egasi, iroqlik mashhur arxitektor ayol – Zaha Hadidning loyihasi asosida Xitoy poytaxti Pekin shahrida qad rostlagan "Galaxy Soho" dam olish kompleksining ajabtovur ko'rinishidan zavq olmaslikning iloji yo'q (17-rasm).

Mamlakatimiz poytaxtida qad ko'tarayotgan "Tashkent city" majmuasining loyihasi ham kishini hayratga soladi. Bunday g'aroyib inshootlarni yaratishda muhandis-quruvchilarga qay darajadagi geometrik bilimlar kerak bo'lganini tasavvur qilish mumkin (18–19-rasmlar).

19

“GeoGebra”ni qo‘llab

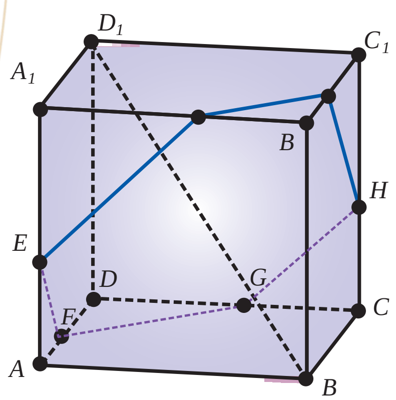
Ko‘pyoqlar kesimlarini yasash



Kubning berilgan E nuqtasidan o‘tuvchi va BD_1 chizig‘iga perpendikulyar kesimni yasang.

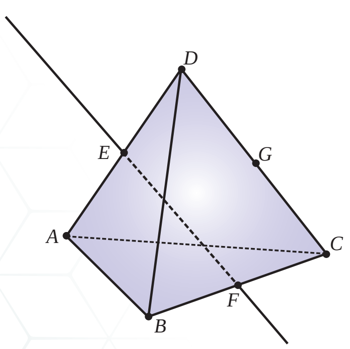
Yasash:

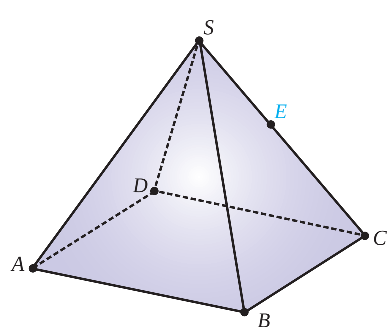
- “GeoGebra”da yangi oyna oching.
- “GeoGebra” interfeysini “**Настройки**”– “**3D Графика**” ko‘rinishiga o‘tkazing.

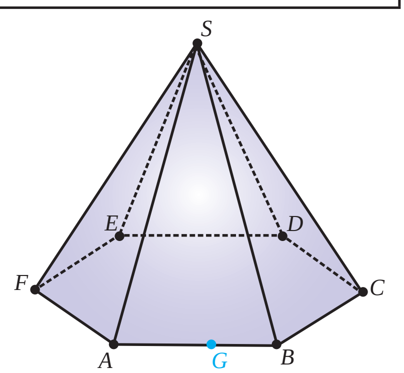


Kesimni yasash bosqichlari

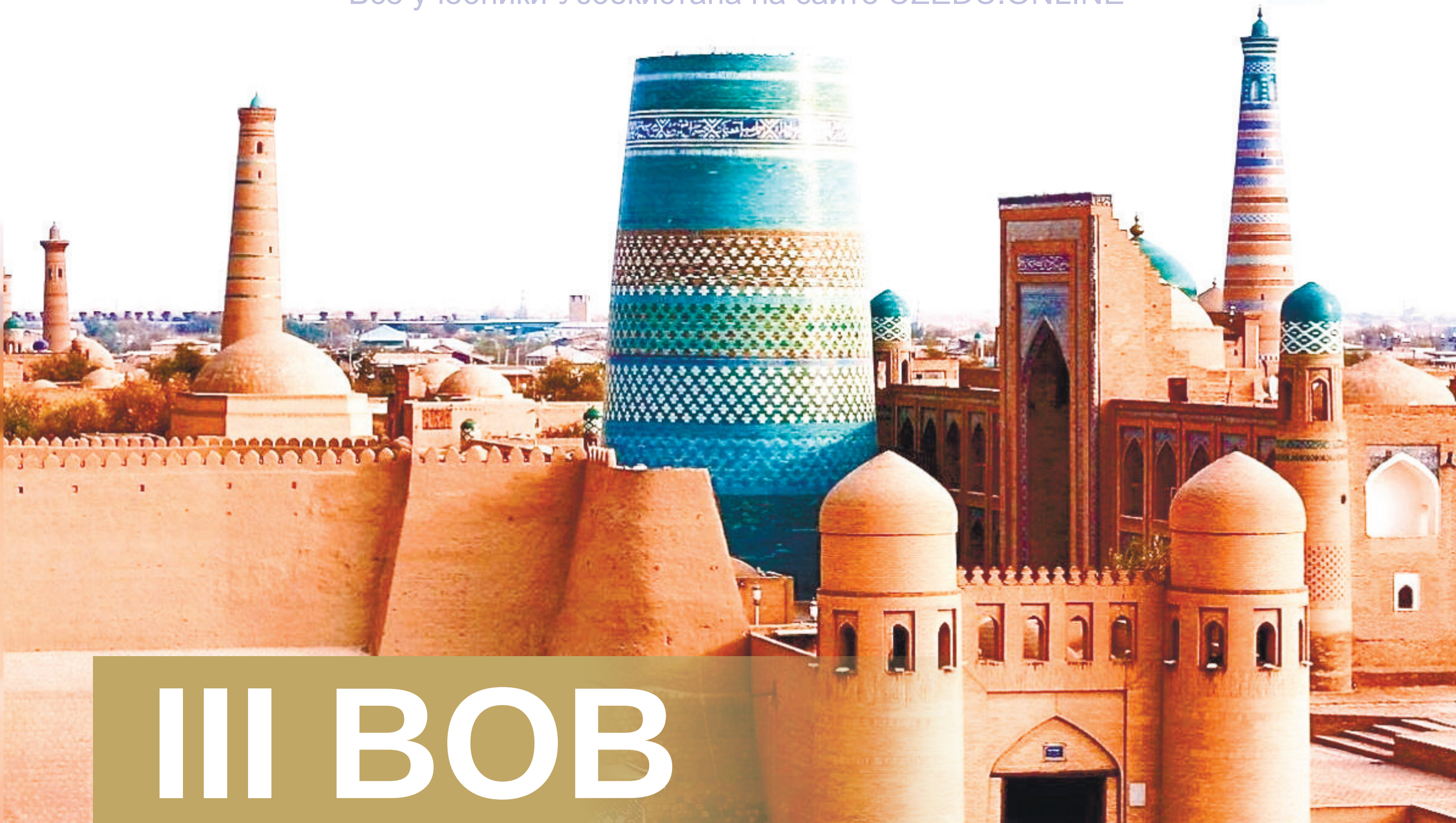
1		Ixtiyoriy kub yasaladi.
2		Kub AA_1 qirrasida E nuqta belgilanadi.
3		BD_1 chiziq o‘tkaziladi.
4		E nuqta va BD_1 chiziqdan perpendikulyar tekislik o‘tkaziladi.
5		Kubning E nuqtasidan o‘tuvchi kesim hosil qilinadi.
6		Tekislikning keraksiz qismi yashirin holatga o‘tkaziladi.
7		E nuqtani siljitish orqali kesim to‘g‘ri bajarilgani tekshiriladi.







1. $ABCD$ muntazam tetraedr CD qirrasining G o‘rtasi va EF perpendikulyar chiziqdan o‘tuvchi tekislik kesimi qanday shakl bo‘lishini aniqlang. Bu yerda E, F nuqtalar – AD va BC qirralarning o‘rtasi.
2. Muntazam to‘rtburchakli piramidaning SC qirrasidagi E nuqtadan o‘tuvchi va shu qirrasiga perpendikulyar tekislik kesimini chizing.
3. Muntazam oltiburchakli piramidaning berilgan G nuqtasidan o‘tuvchi va SAF tekisligiga parallel tekislik kesimini chizing.



III BOB

FAZODA TO‘G‘RI CHIZIQ VA TEKISLIKLARNING PARALLELLIGI

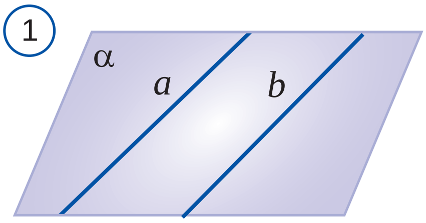
Bu bobni o‘rganish natijasida quyidagi bilim va ko‘nikmalarga ega bo‘lasiz:

- fazoda parallel to‘g‘ri chiziqlarni tasavvur qilish;
- parallel to‘g‘ri chiziqlarning xossalarini bilish hamda ularni isbotlashga doir va amaliy masalalar yechishda qo‘llash;
- parallelepipedning xossalarini bilish va ularni masalalar yechishda qo‘llash;
- ayqash to‘g‘ri chiziqlarni tasavvur qilish;
- to‘g‘ri chiziqlarning ayqashlik alomatini bilish va uni masalalar yechishda qo‘llash;
- fazoda to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakni aniqlash;
- ayqash to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakni aniqlash;
- perpendikulyar to‘g‘ri chiziqlarni tasavvur qilish;
- tekislikka parallel to‘g‘ri chiziq ta’rifini bilish;
- tekislikka parallel to‘g‘ri chiziqlarning xossalarini bilish va ularni qo‘llay olish;
- parallel va kesishuvchi tekisliklar ta’rifini bilish;
- ikki tekislikning parallelligi alomatini bilish va undan foydalanish;
- parallel tekisliklarning xossalarini bilish va ularni qo‘llay olish;
- parallel proyeksiyaning xossalarini bilish va ularni qo‘llay olish;
- o‘rganilgan tushunchalar, faktlar va metodlarni notanish yoki hayotiy vaziyatlarda qo‘llay olish.

11 FAZODA TO‘G‘RI CHIZIQLARNING O‘ZARO JOYLASHUVİ

Fazoda parallel to‘g‘ri chiziqlar

1



Fazoda bir tekislikda yotib, o‘zaro kesishmaydigan to‘g‘ri chiziqlar *parallel to‘g‘ri chiziqlar* deb ataladi *(1-rasm)*.

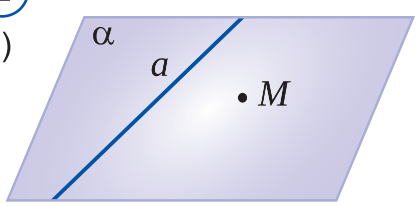
a va b to‘g‘ri chiziqlarning parallelligi $a \parallel b$ tarzda yoziladi.

Tekislikda berilgan nuqta orqali berilgan to‘g‘ri chiziqqa yagona parallel to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin. Bunday xossa fazoda ham o‘rinli bo‘ladi.

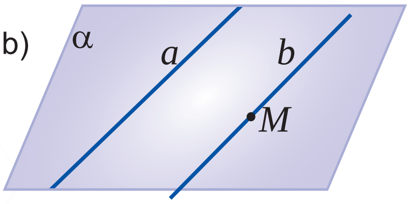
3.1-teorema. Fazoda berilgan to‘g‘ri chiziqda yotmagan nuqtadan shu to‘g‘ri chiziqqa yagona parallel to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin.

2

a)



b)



Isbot. a – berilgan to‘g‘ri chiziq va M bu to‘g‘ri chiziqda yotmagan nuqta bo‘lsin *(2a-rasm)*. 34-betdagi 1-natijaga ko‘ra, a berilgan to‘g‘ri chiziq va unda yotmagan M nuqta orqali yagona α tekislik o‘tkazish mumkin.

α tekislikda esa M nuqta orqali a – berilgan to‘g‘ri chiziqqa parallel yagona b – to‘g‘ri chiziqni o‘tkazish mumkin *(2b-rasm)*.

Xuddi shu b to‘g‘ri chiziq izlangan yagona parallel to‘g‘ri chiziq bo‘ladi.

Tekislikda ikkita parallel to‘g‘ri chiziqlardan biri uchinchi to‘g‘ri chiziqni kesib o‘tsa, ularning ikkinchisi ham bu to‘g‘ri chiziqni kesib o‘tadi. Shunga o‘xshash xossa fazoda ham o‘rinli bo‘ladi.

3.2-teorema. Fazoda ikkita parallel to‘g‘ri chiziqlardan biri tekislikni kesib o‘tsa, ularning ikkinchisi ham bu tekislikni kesib o‘tadi.

Isbot. b va c parallel to‘g‘ri chiziqlar berilgan bo‘lib, ularning biri – b to‘g‘ri chiziq β tekislikni M nuqtada kesib o‘tsin *(3-rasm)*.

b va c to‘g‘ri chiziqlar parallel bo‘lgani uchun ular bitta tekislikda yotadi. Bu γ tekislik bo‘lsin.

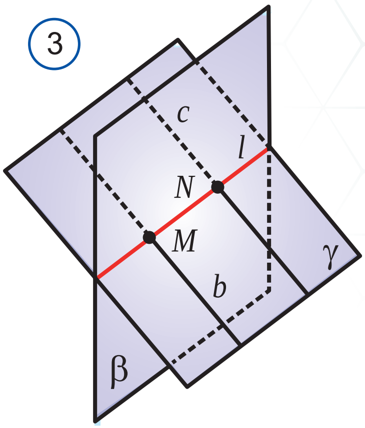
β va γ tekisliklar uchun M – umumiy nuqta. Unda S_3 aksiomaga ko‘ra, bu tekisliklar bitta l to‘g‘ri chiziq bo‘yicha kesishadi. Bu to‘g‘ri chiziq γ tekislikda yotadi va b to‘g‘ri chiziqni M nuqtada kesib o‘tadi. Shuning uchun bu to‘g‘ri chiziq b to‘g‘ri chiziqqa parallel c to‘g‘ri chiziqni ham N nuqtada kesib o‘tadi.

l to‘g‘ri chiziq β tekislikda ham yotgani uchun N nuqta β tekislikka ham tegishli bo‘ladi. Demak, N nuqta – β va γ tekisliklar uchun umumiy nuqta.

Endi c to‘g‘ri chiziqning β tekislik bilan boshqa umumiy nuqtasi yo‘qligini ko‘rsatamiz.

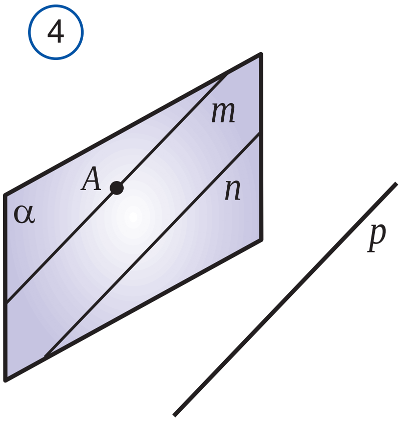
Teskarisini faraz qilamiz. Aytaylik, c to‘g‘ri chiziqning β tekislik bilan yana boshqa – K umumiy nuqtasi bor bo‘lsin. Unda S_2 aksiomaga ko‘ra, c to‘g‘ri chiziq β tekislikda yotadi. Unda c to‘g‘ri chiziq β va γ tekisliklar uchun umumiy bo‘ladi. Lekin l to‘g‘ri chiziq edi. Bundan c to‘g‘ri chiziqning l to‘g‘ri chiziq bilan ustma-ust tushishi kelib chiqadi. Bunday bo‘lishi esa mumkin emas. Chunki b to‘g‘ri chiziq c to‘g‘ri chiziqqa parallel va l to‘g‘ri chiziqni kesib o‘tadi. Ziddiyat farazimizning noto‘g‘ri ekanini ko‘rsatadi.

Planimetriyadan sizga ma’lumki, ikki to‘g‘ri chiziqning har biri uchinchi to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lsa, ular o‘zaro parallel bo‘ladi. Bu xossa fazoda ham o‘rinli bo‘lib, u to‘g‘ri chiziqlarning *parallellik alomati* deb yuritiladi.



3.3-teorema. *Uchinchi to‘g‘ri chiziqqa parallel ikki to‘g‘ri chiziq o‘zaro paralleldir.*

Isbot. Aytaylik, m va n to‘g‘ri chiziqlar p to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lsin *(4-rasm)*. m va n to‘g‘ri chiziqlarning bitta tekislikda yotishi va o‘zaro kesishmasligini, ya’ni parallel ekanini ko‘rsatamiz.



m to‘g‘ri chiziqda A nuqtani olamiz hamda bu nuqta va n to‘g‘ri chiziq orqali α tekislik o‘tkazamiz. m to‘g‘ri chiziqning α tekislikda yotishini isbotlaymiz.

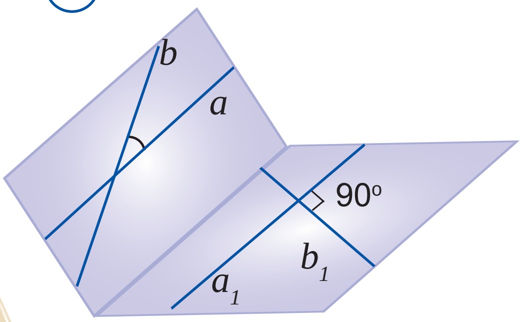
Aytaylik, bunday bo‘lmasin. m to‘g‘ri chiziq α tekislik bilan umumiy nuqtaga ega bo‘lgani uchun tekislikni kesib o‘tadi. Unda 3.2-teoremaga ko‘ra, bu tekislikni m to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lgan p to‘g‘ri chiziq ham, p to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lgan n to‘g‘ri chiziq ham kesib o‘tadi. Lekin bunday bo‘lishi mumkin emas, chunki n to‘g‘ri chiziq α tekislikda yotadi.

Demak, m va n to‘g‘ri chiziqlar α tekislikda yotadi.

Endi bu to‘g‘ri chiziqlarning kesishmasligini isbotlaymiz.

Yana teskarisini faraz qilamiz. m va n to‘g‘ri chiziqlar qandaydir B nuqtada kesishsin. Unda B nuqta orqali p to‘g‘ri chiziqqa parallel ikkita – m va n to‘g‘ri chiziqlar o‘tadi. 3.1-teoremaga ko‘ra esa, bunday bo‘lishi mumkin emas.

5



Bitta to'g'ri chiziqda yoki parallel to'g'ri chiziqlarda yotuvchi kesmalar (nurlar) o'zaro *parallel kesmalar (nurlar)* deb ataladi.

Ikki to'g'ri chiziqning kesishishidan hosil bo'lgan qo'shni burchaklarning kichigi *ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak* deyiladi *(5-rasm)*.

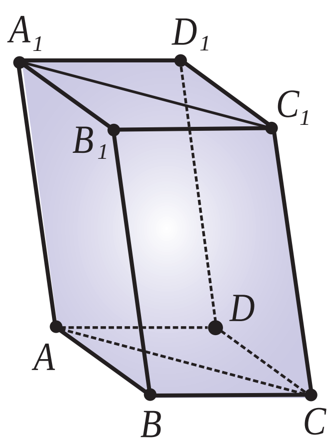
Orasidagi burchak 90° ga teng to'g'ri chiziqlar *perpendikulyar to'g'ri chiziqlar* deb ataladi.

Parallel to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak 0 ga teng deb hisoblanadi.

Endi parallelepipedning quyidagi xossalarini isbotlaymiz. Buning uchun II bo'limda berilgan parallelepiped va uning elementlari ta'rifini eslashga to'g'ri keladi.

Parallelepipedning xossalari

6



Xossa 1. ***$ABCDA_1B_1C_1D_1$ parallelepipedda asos diagonallari va yon qirralaridan tuzilgan ACC_1A_1 to'rtburchak parallelogrammdan iborat bo'ladi*** *(6-rasm).*

Isbot. Haqiqatan, parallelepipedning ABB_1A_1 va BCC_1B_1 yoqlari ta'rifiga ko'ra, parallelogrammdan iborat.

Bu parallelogrammlarning qarama-qarshi tomonlari o'zaro teng bo'ladi.

Xususan, $AB = A_1B_1$ va $BC = B_1C_1$.

Parallelepiped ta'rifiga ko'ra, $AA_1 \parallel BB_1$ va $BB_1 \parallel CC_1$. Unda 3.3-teoremaga ko'ra, $AA_1 \parallel CC_1$ va $AA_1 = CC_1$ bo'ladi.

Demak, AC_1CA_1 to'rtburchak – parallelogramm.

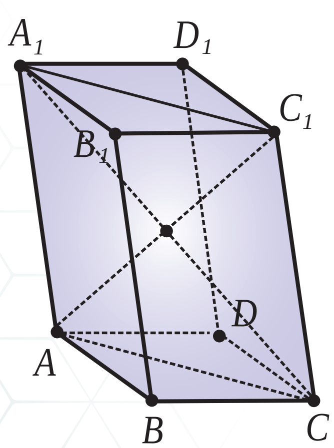
Xossa 2. ***$ABCDA_1B_1C_1D_1$ parallelepipedning qarama-qarshi yoqlari o'zaro teng*** *(6-rasm).*

Isbot. Yuqoridagi xossaga ko'ra, AC_1CA_1 – parallelogramm va $AC = A_1C_1$.

Unda ABC va $A_1B_1C_1$ uchburchaklar uchta tomon bo'yicha teng bo'lib, ABC va $A_1B_1C_1$ burchaklar ham o'zaro teng bo'ladi. Natijada $ABCD$ va $A_1B_1C_1D_1$ parallelogrammlar ham o'zaro teng bo'ladi.

Boshqa qarama-qarshi yoqlarning tengligi ham shu tariqa isbotlanadi.

7



Xossa 3. Parallelepipedning barcha diagonallari bitta nuqtada kesishadi va bu nuqtada teng ikkiga bo'linadi *(7-rasm).*

Isbot. 1-xossaga ko'ra, ACC_1A_1 – parallelogramm. Unda bu parallelogramm diagonallari A_1C va AC_1 bitta nuqtada kesishadi va kesishish nuqtasida teng ikkiga bo'linadi.

Qolgan diagonallarning kesishishi va bu nuqtada teng ikkiga boʻlinishi shunga oʻxshash isbotlanadi.

Masala. Uchlari bitta tekislikda yotmaydigan fazoviy toʻrtburchak tomonlarining oʻrtalari parallelogrammning uchlari boʻlishini isbotlang.

Isbot. $ABCD$ – fazoviy toʻrtburchak va A_1, B_1, C_1 va D_1 toʻrtburchak tomonlarining oʻrtalari boʻlsin *(8-rasm)*. U holda A_1B_1 kesma – ABC uchburchakning AC tomoniga parallel oʻrta chizigʻi, C_1D_1 *esa* ACD uchburchakning AC tomoniga parallel oʻrta chizigʻi boʻladi.

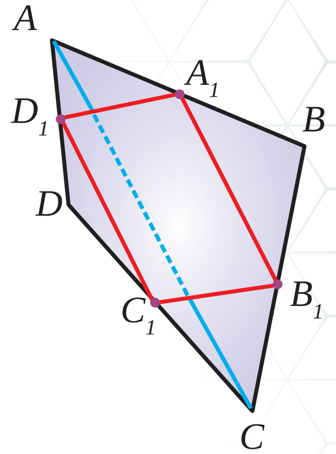
3.3-teoremaga koʻra, A_1B_1 va C_1D_1 toʻgʻri chiziqlar parallel boʻladi. Demak, ular bir tekislikda yotadi.

A_1D_1 va B_1C_1 toʻgʻri chiziqlarning parallelligi ham xuddi shunday isbotlanadi.

Shunday qilib, $A_1B_1C_1D_1$ toʻrtburchak bitta tekislikda yotadi va uning qarama-qarshi tomonlari parallel.

Demak, u parallelogrammdir.

8

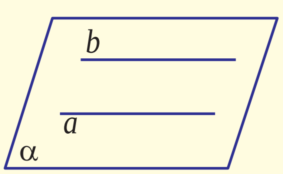
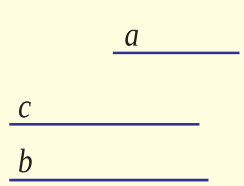
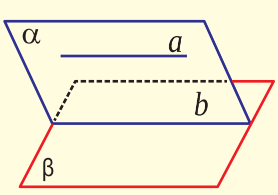
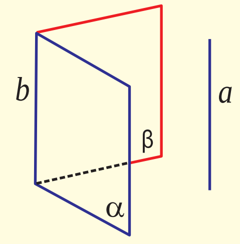


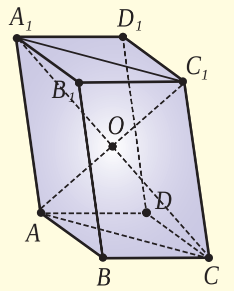
Mavzuga doir savollar va mashqlar

1. *Parallel toʻgʻri chiziqlarning qanday xossalarini bilasiz?*
2. *Toʻgʻri chiziqlarning parallellik alomatini ayting.*
3. *Parallelepipedning qanday xossalarini bilasiz?*

Amaliy mashq va tatbiq

11.1. Jadvalda 11-mavzuning asosiy tayanch maʼlumotlari keltirilgan. Ularni sinchiklab oʻrganib chiqing va izohlang.

1. Parallel toʻgʻri chiziqlar			
Taʼrifi	**Alomatlari**		
 $a \parallel b$, a va b toʻgʻri chiziqlar bitta tekislikda yotib, oʻzaro kesishmasa, *parallel toʻgʻri chiziqlar* deb ataladi.	 Agar $a \parallel b$, $a \parallel c$ boʻlsa, $b \parallel c$ boʻladi.	 Agar $\alpha \cap \beta = b$, $a \subset \alpha$ va $a \parallel \beta$ boʻlsa, $b \parallel a$ boʻladi.	 Agar $\alpha \cap \beta = b$, $a \parallel \alpha$ va $a \parallel \beta$ boʻlsa, $a \parallel b$ boʻladi.

2. Parallelepipedning xossalari	
	***1-xossa.*** Asosining diagonallari va yon qirralaridan tuzilgan to'rtburchak (AA_1C_1C) parallelogrammdir. ***2-xossa.*** Qarama-qarshi yoqlari o'zaro teng ($AA_1B_1B = DD_1C_1C$). ***3-xossa.*** Barcha diagonallari bitta nuqtada kesishadi va bu nuqtada teng ikkiga bo'linadi ($AO = OC_1$, $CO = OA_1$).

9

a) 

b) 

c) 

11.2. 9-rasmda fazoda parallel to'g'ri chiziqlarning timsollarini aniqlang.

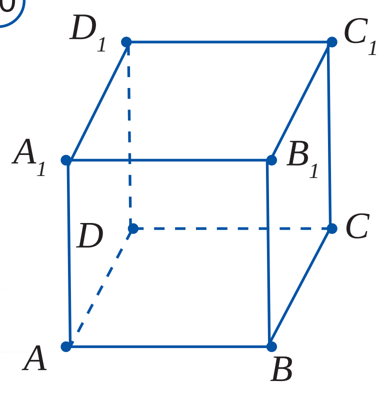
11.3. 10-rasmda tasvirlangan a) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ parallelepipeddagi; b) $ABCA_1B_1C_1$ prizmadagi parallel qirralar juftlarini aniqlang.

11.4. Qanday piramidalarda parallel qirralar bo'ladi?

11.5. Ma'lumki, tekislikda to'g'ri chiziq parallel to'g'ri chiziqlardan birini kesib o'tsa, ikkinchisini ham kesib o'tadi. Bu xossa fazoda ham o'rinli bo'ladimi?

11.6. a va b to'g'ri chiziqlar c to'g'ri chiziqqa parallel. a va b to'g'ri chiziqlar o'zaro qanday joylashishi mumkin?

10



11.7. 10-rasmda tasvirlangan $ABCDA_1B_1C_1D_1$ parallelepipedda BC_1 va AD_1 diagonallar o'zaro teng va parallel ekanini isbotlang.

11.8. A uchi α tekislikda yotgan AB kesmadan C nuqta tanlangan. B va C nuqtalardan o'tkazilgan parallel to'g'ri chiziqlar α tekislikni mos ravishda B_1 va C_1 nuqtalarda kesib o'tadi. Agar: a) C nuqta B kesmaning o'rtasi va BB_1 = 14 *cm;*
b) $AC : CB = 3 : 2$ va BB_1 = 50 *cm* bo'lsa, CC_1 kesmaning uzunligini toping.

11.9. Bitta tekislikda yotmaydigan $MNOP$ parallelogramm va EK asosli $MNEK$ trapetsiya berilgan. 1) PO va EK to'g'ri chiziqlarning o'zaro joylashishini aniqlang. 2) Trapetsiyaning asoslari MN = 45 *cm*, EK = 55 *cm* ga teng bo'lib, unga ichki aylana chizish mumkin. Trapetsiyaning perimetrini toping.

11.10. Quyidagi xossalarning qaysilari parallelepipedga tegishli? To‘g‘ri javoblarni belgilang.

A) Asos diagonallaridan va yon qirralardan tuzilgan to‘rtburchak parallelogrammdan iborat.

B) Yon yoqlari asosiga perpendikulyar.

C) Asos diagonallaridan va yon qirralardan tuzilgan to‘rtburchak kvadratdan iborat bo‘ladi.

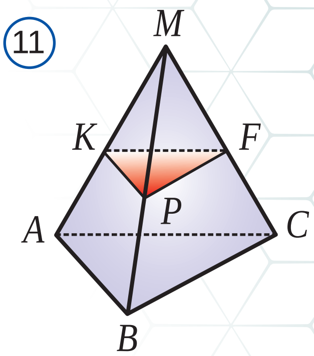
D) Barcha diagonallari bitta nuqtada kesishadi va bu nuqtada teng ikkiga bo‘linadi.

E) Qarama-qarshi qirralari o‘zaro parallel.

F) Hamma yoqlari to‘g‘ri to‘rtburchakdan iborat.

G) Qarama-qarshi yoqlari o‘zaro teng.

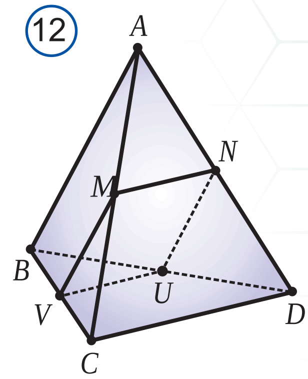
11



11.11. Fazoda bitta to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlar o‘zaro parallel bo‘ladimi?

11.12. 11-rasmda M nuqta ABC uchburchak tashqi sohasida yotibdi. MA, MB, MC kesmalarning o‘rtalari mos ravishda K, F, P nuqtalar bilan belgilangan. 1) KP; 2) PF; 3) KF; 4) KM; 5) PM; 6) FM; 7) AB; 8) BC; 9) AC to‘g‘ri chiziqlardan qaysilari o‘zaro parallel?

12



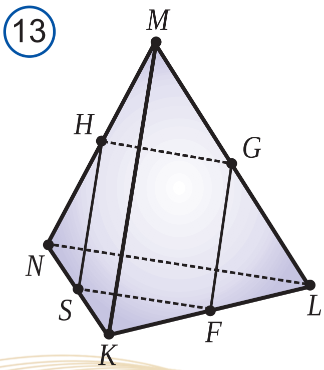
11.13. Quyidagi jumlalarni o‘qing. Jumla to‘g‘ri bo‘lsa “+”, noto‘g‘ri bo‘lsa “–” belgisini yonidagi katakka qo‘ying.

1	Fazoda to‘g‘ri chiziqqa unda yotmagan nuqtadan unga parallel ko‘plab to‘g‘ri chiziqlarni o‘tkazish mumkin.	
2	Uchinchi to‘g‘ri chiziqqa parallel ikki to‘g‘ri chiziq o‘zaro kesishadi.	
3	Agar ikki to‘g‘ri chiziq tekislikda yotsa, ular kesishadi.	
4	To‘g‘ri chiziq va unda yotmagan nuqtadan o‘tuvchi ikkita tekislik o‘tkazish mumkin.	
5	Fazoning tekislikda yotmagan nuqtasidan bu tekislikni kesadigan ko‘plab to‘g‘ri chiziqlarni o‘tkazish mumkin.	

11.14. M, N, U, V nuqtalar – $ABCD$ piramidaning mos ravishda AC, AD, BD va BC qirralarining o‘rtalari *(12-rasm)*. Agar $AB = 20$ *cm*, $CD = 30$ *cm* bo‘lsa, $MNUV$ to‘rtburchakning perimetrini toping.

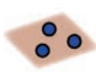
11.15. H, G, F, S nuqtalar – $KLMN$ uchburchakli piramidaning mos ravishda MN, ML, LK va KN qirralarining o‘rtalari *(13-rasm)*. Agar $LK = 18$ *mm*, $MN = 22$ *mm* bo‘lsa, $HGFS$ to‘rtburchakning perimetrini toping.

13



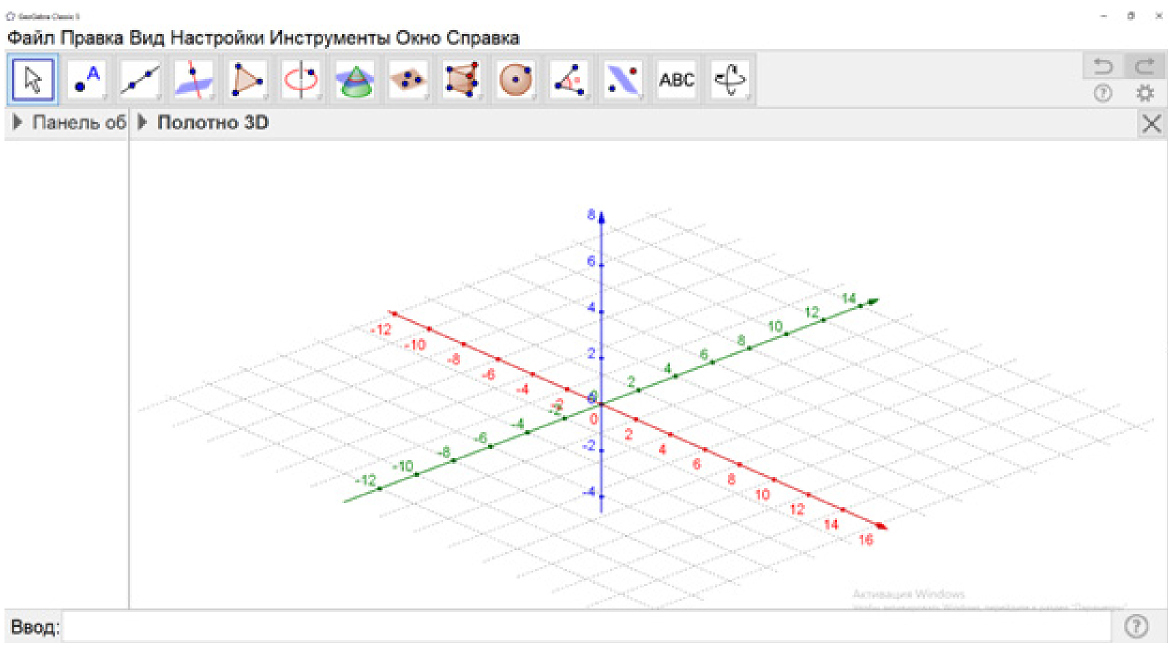
“GeoGebra”ni qo‘llab

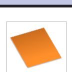
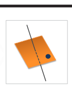
3D kalkulyatori yordamida turli tekisliklarni yasash



3D kalkulyatori uskunalar panelidagi **Плоскость через три точки** (Uch nuqta orqali tekislik) vositasi ustiga sichqonchaning chap tugmasi bosilsa, yangi darchada uning boshqa yana 3 ta imkoniyati:

- **Плоскость** (Tekislik),
- **Перпендикулярная плоскость** (Perpendikulyar tekislik);
- **Параллельная плоскость** (Parallel tekislik) ochiladi.



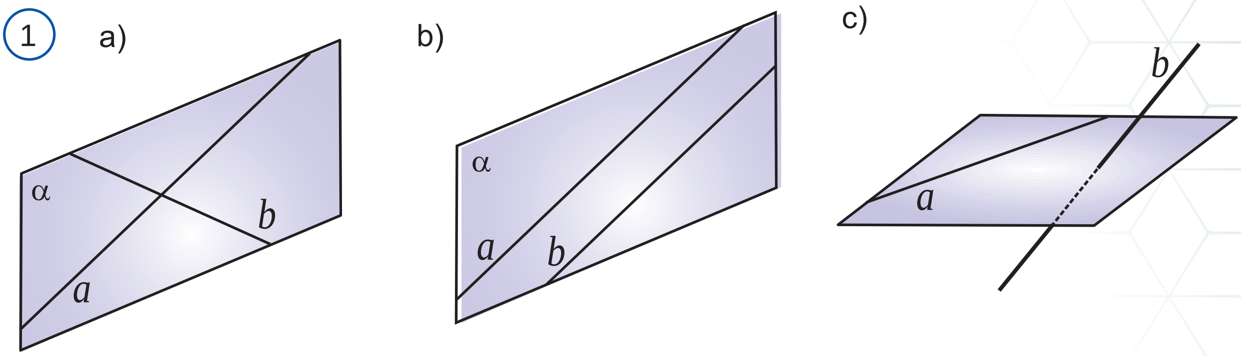
	Bu uskunalar quyidagi vazifalarni bajaradi:
	**Плоскость** (Tekislik) yordamida tekislik yasaladi.
	**Перпендикулярная плоскость** (Perpendikulyar tekislik) yordamida perpendikulyar tekislik yasaladi.
	**Параллельная плоскость** (Parallel tekislik) yordamida parallel tekislik yasaladi.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Ixtiyoriy uchta nuqta belgilang. Ular orqali o‘tuvchi tekislik yasang.
2. Biror tekislik yasang, so‘ng unga perpendikulyar tekislik yasang.
3. Biror tekislik yasang, so‘ng unga parallel tekislik yasang.

12 AYQASH TO‘G‘RI CHIZIQLAR

1



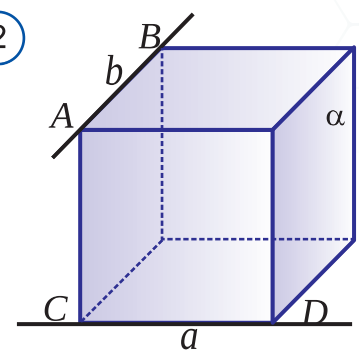
Agar fazoda ikki to‘g‘ri chiziq o‘zaro kesishsa yoki o‘zaro parallel bo‘lsa, ular bitta tekislikda yotadi (*1a- va 1b-rasm).*

Fazoda bitta tekislikda yotmaydigan to‘g‘ri chiziqlar *ayqash to‘g‘ri chiziqlar* deb ataladi *(1c-rasm)*. a va b to‘g‘ri chiziqlarning ayqashligi $a \dot{-} b$ tarzda ifodalanadi.

Ayqash to‘g‘ri chiziqlarda yotgan kesmalarni *ayqash kesmalar* deb ataymiz. 2-rasmda kubning AB va CD ayqash qirralari ko‘rsatilgan.

Ayqash to‘g‘ri chiziqlarni quyidagi alomatga ko‘ra tanib olish mumkin:

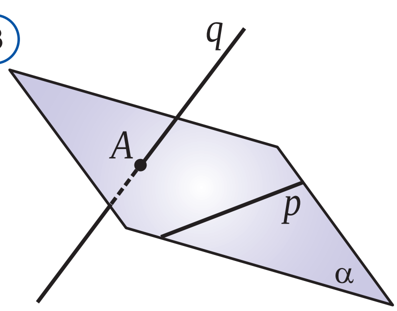
2



***Teorema 3.4. Agar ikki to‘g‘ri chiziqdan biri biror tekislikda yotsa, ikkinchisi esa bu tekislikni birinchi to‘g‘ri chiziqda yotmagan nuqtada kesib o‘tsa, u holda bu to‘g‘ri chiziqlar ayqash bo‘ladi*.**

Isbot. Aytaylik, p to‘g‘ri chiziq α tekislikda yotsin. q to‘g‘ri chiziq esa bu tekislikni p to‘g‘ri chiziqqa tegishli bo‘lmagan A nuqtada kesib o‘tsin *(3-rasm)*. p va q to‘g‘ri chiziqlarning ayqash ekanini isbotlaymiz.

3

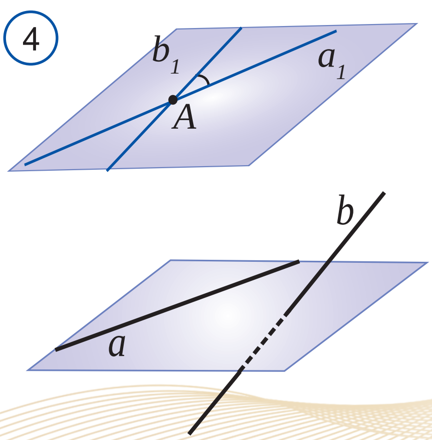


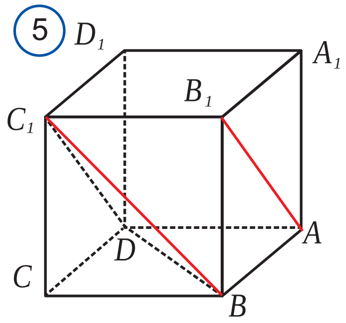
Teskarisini faraz qilamiz: p va q to‘g‘ri chiziqlar birorta β tekislikda yotsin. U holda β tekislikka p to‘g‘ri chiziq va A nuqta tegishli bo‘ladi. O‘z navbatida A nuqta α tekislikka ham tegishli. Demak, α va β tekisliklar ustma-ust tushadi. Natijada, shartga ko‘ra, α tekislikka tegishli bo‘lmagan q to‘g‘ri chiziq bu tekislikka tegishli bo‘lib qoldi. Ziddiyat farazimizning noto‘g‘ri ekanini ko‘rsatadi.

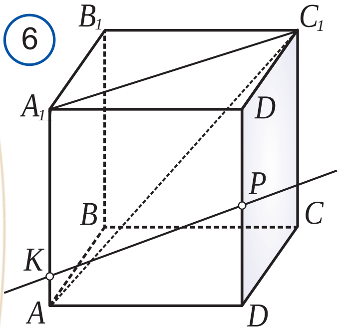
Ayqash to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak deb bu to‘g‘ri chiziqlarga parallel bo‘lgan kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakka aytiladi.

Amalda a va b ayqash to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakni topish uchun *(4-rasm)*:

4







1) biror A nuqta tanlanadi;

2) A nuqtadan ayqash to‘g‘ri chiziqlarga parallel a_1 va b_1 to‘g‘ri chiziqlar o‘tkaziladi;

3) bu to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak o‘lchanadi.

Bu algoritm natijasi – A nuqtaga bog‘liq emasligi haqida o‘ylab ko‘ring.

Masala. Kub qo‘shni yoqlarining ayqash diagonallari orasidagi burchakni toping.

Yechish. Shartga ko‘ra, $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – kub qo‘shni ABA_1B_1 va CBC_1B_1 yoqlarining AB_1 va C_1B diagonallari orasidagi burchakni topish kerak *(5-rasm)*.

AB_1 ga parallel bo‘lgan DC_1 diagonalni o‘tkazamiz. U holda ta’rifga ko‘ra, AB_1 va BC_1 diagonallari orasidagi burchak – DC_1 va C_1B diagonallar orasidagi DC_1B burchakka teng bo‘ladi.

DC_1B – teng tomonli uchburchak.

Demak, $\angle DC_1B = 60°$.

Mavzuga doir savollar va mashqlar

1. To‘g‘ri chiziqlarning ayqashlik alomatini ayting.

2. To‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak qanday aniqlanadi?

3. Ayqash to‘g‘ri chiziqlar parallel bo‘lishi mumkinmi?

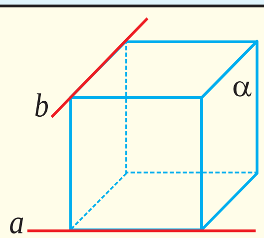
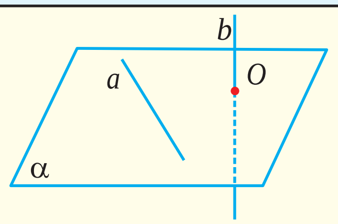
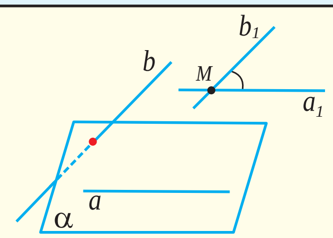
4. Ayqash to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak qanday aniqlanadi?

5. Fazoda to‘g‘ri chiziqlar o‘zaro qanday joylashishi mumkin?

6. Fazoda o‘zaro kesishmaydigan to‘g‘ri chiziqlar har doim ham parallel bo‘ladimi?

Amaliy mashq va tatbiq

12.1. Jadvalda 12-mavzuning asosiy tayanch ma’lumotlari keltirilgan. Ularni sinchiklab o‘rganib chiqing va izohlang.

1. Ayqash to‘g‘ri chiziqlar		
Ta’rifi	**Alomati**	**Orasidagi burchak**
 Bitta tekislikda yotmaydigan to‘g‘ri chiziqlar *ayqash to‘g‘ri chiziqlar* deb ataladi va $a \dot{-} b$ tarzda ifodalanadi.	 Agar $a \subset \alpha$, $\alpha \cap b = O$, $O \notin a$ bo‘lsa, $a \dot{-} b$ bo‘ladi.	 *Ayqash to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak* deb ularga parallel bo‘lgan, kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakka aytiladi.

12.2. 6-rasmda $ABCDA_1B_1C_1D_1$ to‘g‘ri burchakli parallelepiped va uning AA_1 va DD_1 qirralaridagi mos ravishda K va P nuqtalar tasvirlangan. Jadvalda keltirilgan to‘g‘ri chiziqlarning o‘zaro joylashuvidan kelib chiqib, jadvalning mos kataklariga tegishli belgi (⊗ – kesishish va ∸ – ayqashlik) qo‘yilgan. Jadvaldagi xatoliklarni toping.

	AB	BB_1	A_1D_1
KP	⊗	∸	⊗
C_1A_1	∸	∸	⊗
C_1B	⊗	⊗	∸

12.3. a va b to‘g‘ri chiziqlar bitta tekislikda yotadi. Bu to‘g‘ri chiziqlarning mumkin bo‘lgan o‘zaro joylashishlarini ko‘rsating.

A) parallel B) kesishadi C) kesishmaydi
D) ayqash E) perpendikulyar

12.4. a) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ parallelepiped; b) $ABCA_1B_1C_1$ prizma; c) $ABCD$ tetraedr; d) $SABCD$ piramidani chizing va undagi ayqash qirralar juftlarini aniqlang.

12.5. a to‘g‘ri chiziq b to‘g‘ri chiziqqa, b to‘g‘ri chiziq esa c to‘g‘ri chiziqqa ayqash bo‘lsa, a to‘g‘ri chiziq c to‘g‘ri chiziqqa ayqash bo‘ladimi?

12.6. 7-rasmdagi ayqash to‘g‘ri chiziqlar timsollarini toping.

12.7. 8-rasmda tasvirlangan EF va GH kesmalarning o‘zaro joylashuvi qanday?

12.8. 9-rasmda tasvirlangan EH va FG kesmalar o‘zaro kesishadimi?

12.9. K, Z, M, N nuqtalar – mos ravishda $SABC$ uchburchakli muntazam piramidaning SA, AC, BC, SB qirralarining o‘rtalari. Agar piramidaning yon qirralari b, asosining tomoni a ga teng bo‘lsa, $KZMN$ to‘rtburchak perimetrini toping.

12.10. 10-rasmdagi $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kubda quyidagi to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchaklarni toping: a) DC va BC; b) AB va BB_1; c) AA_1 va D_1C; d) AA_1 va D_1C_1; e) A_1C_1 va AC; f) AB va B_1D_1.

12.11. XU va VT to‘g‘ri chiziqlar parallel, XY va VT to‘g‘ri chiziqlar esa ayqash. Agar: a) $\angle YXU = 40^\circ$;
b) $\angle YXU = 135^\circ$; c) $\angle YXU = 90^\circ$ bo‘lsa, XY va VT to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

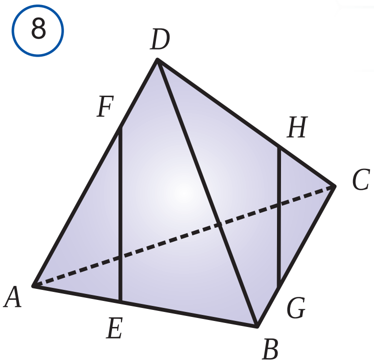
12.12. l to‘g‘ri chiziq $ABCD$ parallelogrammning BC tomoniga parallel va uning tekisligida yotmaydi. l va CD to‘g‘ri chiziqlar ayqash ekanini isbotlang. Agar parallelogrammning burchaklaridan biri: a) 58°; b) 133° bo‘lsa, l va CD to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

7

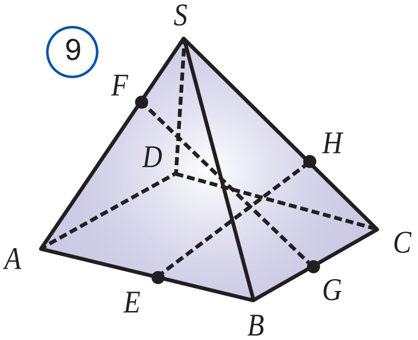
a)

b)

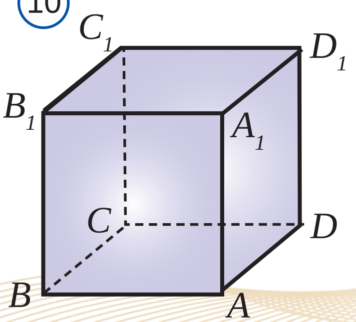
8



9



10

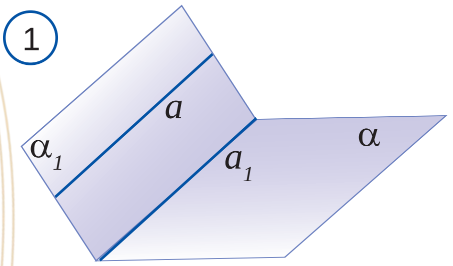


13 FAZODA TO‘G‘RI CHIZIQ VA TEKISLIKLARNING O‘ZARO JOYLASHUVI

Agar to‘g‘ri chiziq bilan tekislik kesishmasa, *to‘g‘ri chiziq va tekislik parallel* deyiladi. To‘g‘ri chiziq bilan tekislikning parallelligi quyidagi alomat orqali aniqlanadi.

3.5-teorema. ***Agar tekislikda yotmagan to‘g‘ri chiziq shu tekislikdagi biror to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lsa, bu to‘g‘ri chiziq tekislikning o‘ziga ham parallel bo‘ladi.***

1



Isbot. Aytaylik, α – tekislik, a – unda yotmagan to‘g‘ri chiziq, a_1 esa α tekislikda yotgan va a ga parallel to‘g‘ri chiziq bo‘lsin.

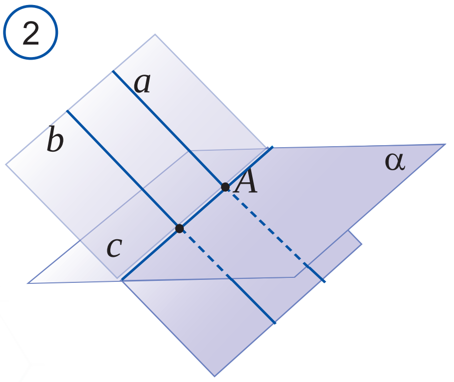
a va a_1 to‘g‘ri chiziqlar orqali α_1 tekislikni o‘tkazamiz *(1-rasm)*. Ravshanki, α va α_1 tekisliklar a_1 to‘g‘ri chiziq bo‘yicha kesishadi.

Agar a to‘g‘ri chiziq α tekislikni kesib o‘tsa, u holda kesishish nuqtasi a_1 to‘g‘ri chiziqqa tegishli bo‘lar edi. Ammo buning iloji yo‘q, chunki a va a_1 to‘g‘ri chiziqlar o‘zaro parallel. Shunday qilib, a to‘g‘ri chiziq α tekislikni kesib o‘ta olmaydi.

Demak, a to‘g‘ri chiziq α tekislikka parallel.

Masala. Agar tekislik ikki parallel to‘g‘ri chiziqdan birini kesib o‘tsa, ikkinchisini ham kesib o‘tishini isbotlang.

2



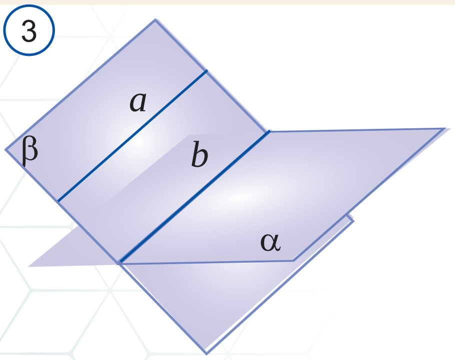
Isbot. a va b – ikki parallel to‘g‘ri chiziq, α esa a to‘g‘ri chiziqni A nuqtada kesib o‘tuvchi tekislik bo‘lsin *(2-rasm)*.

a va b to‘g‘ri chiziqlardan tekislik o‘tkazamiz. U α tekislikni biror c to‘g‘ri chiziq bo‘yicha kesadi. c to‘g‘ri chiziq a to‘g‘ri chiziqni A nuqtada kesib o‘tadi.

Demak, unga parallel bo‘lgan b to‘g‘ri chiziqni ham kesib o‘tadi. c to‘g‘ri chiziq α tekislikda yotgani uchun α tekislik b to‘g‘ri chiziqni ham kesib o‘tadi.

3.6-teorema. ***Agar bir tekislik ikkinchi tekislikka parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziqdan o‘tsa, bu tekisliklarning kesishish to‘g‘ri chizig‘i ham berilgan to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘ladi.***

3



Isbot. Aytaylik, a to‘g‘ri chiziq α tekislikka parallel va β tekislikda yotsin. b to‘g‘ri chiziq esa α va β tekisliklarning kesishish chizig‘i bo‘lsin *(3-rasm)*. U holda a va b to‘g‘ri chiziqlar β tekislikda yotadi va o‘zaro kesishmaydi. Aks holda a to‘g‘ri chiziq β tekislikni kesib o‘tar edi.

Demak, a va b to‘g‘ri chiziqlar o‘zaro parallel.

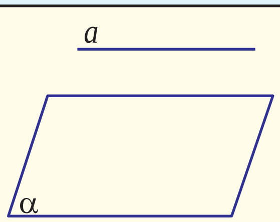
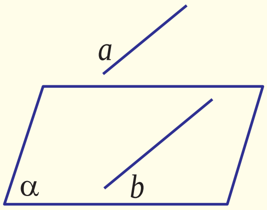
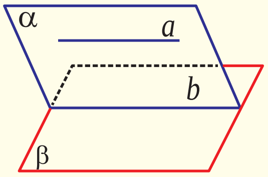
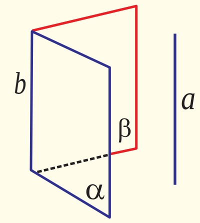
Mavzuga doir savollar va mashqlar

1. *To‘g‘ri chiziq va tekislik fazoda o‘zaro qanday joylashishi mumkin?*
2. *To‘g‘ri chiziq va tekislik qachon parallel bo‘ladi?*
3. *To‘g‘ri chiziqning tekislikka parallellik alomatini ayting.*
4. *Fazoda to‘g‘ri chiziq va tekisliklarning joylashuvi bilan bog‘liq qanday xossalarni bilasiz?*

Amaliy mashq va tatbiq

13.1. Jadvalda 13-mavzuning asosiy tayanch ma’lumotlari keltirilgan. Ularni sinchiklab o‘rganib chiqing va izohlang.

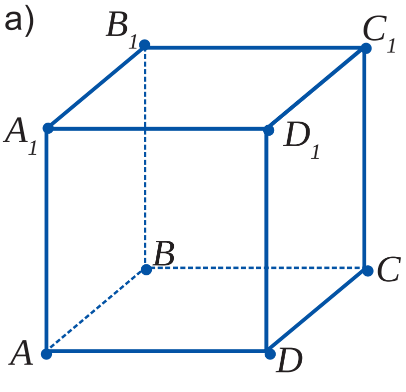
a to‘g‘ri chiziq va α tekislik	ko‘p umumiy nuqtalarga ega.	to‘g‘ri chiziq tekislikda yotadi: $a \subset \alpha$.
	bitta umumiy nuqtaga ega.	to‘g‘ri chiziq tekislikni kesadi: $a \otimes \alpha$.
	umumiy nuqtaga ega emas.	to‘g‘ri chiziq tekislikka parallel: $a \parallel \alpha$.

To‘g‘ri chiziq va tekisliklarning parallelligi			
Ta’rifi	**Alomatlari**	**Xossalari**	
 Agar a to‘g‘ri chiziq α tekislik bilan umumiy nuqtaga ega bo‘lmasa, *to‘g‘ri chiziq va tekislik parallel* deyiladi va $a \parallel \alpha$ tarzda ifodalanadi.	 Agar a to‘g‘ri chiziq α tekislikda yotmasa va $a \parallel b$, $b \subset \alpha$ bo‘lsa, u holda $a \parallel \alpha$ bo‘ladi.	 Agar b to‘g‘ri chiziq α va β *tekisliklar kesishish chizig‘i*, $a \subset \alpha$ va $a \parallel \beta$ bo‘lsa, u holda $b \parallel a$ bo‘ladi.	 Agar b to‘g‘ri chiziq α va β *tekisliklar kesishish chizig‘i*, $a \parallel \alpha$ va $a \parallel \beta$ bo‘lsa, $a \parallel b$ bo‘ladi.

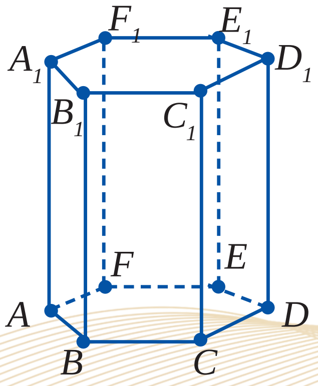
13.2. Rasmga qarab a) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kubning; b) $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ muntazam oltiburchakli prizmaning bir-biriga parallel bo‘lgan qirra va yoqlarini aniqlang *(4-rasm)*.

4

a)



b)



5

13.3. 5-rasmda kombayn tasvirlangan. Uning dala maydoniga (tekisligiga) nisbatan qaysi qismlari parallel ekanini aniqlang.

13.4. 6-rasmda tasvirlangan duradgorlar asbobi – reysmus yordamida yog‘och taxtaning qaysi yog‘iga nisbatan parallel to‘g‘ri chiziq chizilayotganligini aniqlang.

13.5. Quyidagi jumlalarni o‘qing. Jumla to‘g‘ri bo‘lsa “+”, noto‘g‘ri bo‘lsa, “–” belgisini yonidagi katakka qo‘ying.

1	Agar tekislikda yotmagan to‘g‘ri chiziq shu tekislikdagi biror to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lsa, bu to‘g‘ri chiziq tekislikning o‘ziga ham parallel bo‘ladi.	
2	Bitta tekislikka parallel to‘g‘ri chiziqlar o‘zaro parallel bo‘ladi.	
3	Tekislikka parallel to‘g‘ri chiziq bu tekislikda yotgan ixtiyoriy to‘g‘ri chiziqqa ham parallel bo‘ladi.	
4	Agar bir tekislik ikkinchi tekislikka parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziqdan o‘tsa, bu tekisliklarning kesishish to‘g‘ri chizig‘i ham berilgan to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘ladi.	
5	Agar to‘g‘ri chiziq bilan tekislik kesishmasa, to‘g‘ri chiziq va tekislik *parallel* deyiladi.	
6	Orasidagi burchak 90° ga teng to‘g‘ri chiziqlar perpendikulyar to‘g‘ri chiziqlar deb ataladi.	
7	Ayqash to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak deb bu to‘g‘ri chiziqlarga parallel bo‘lgan kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakka aytiladi.	

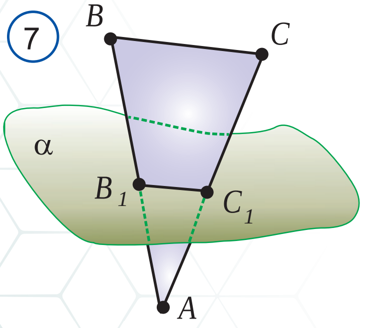
6

13.6. A va C nuqtalar α tekislikda yotadi. B va D nuqtalar β tekislikda yotadi. AC, CD, BD, AB, BC va AD to‘g‘ri chiziqlardan qaysilari β tekislikni kesib o‘tadi?

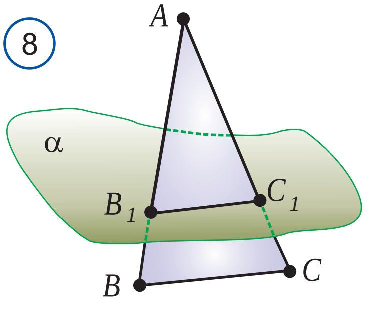
13.7. ABC uchburchak α tekislikni B_1 va C_1 nuqtalarda kesib o‘tadi *(7-rasm)*. Agar $AB_1 : BB_1 = 2 : 3$, $BC = 15$ *cm*, $BC \parallel B_1C_1$ bo‘lsa, B_1C_1 kesmaning uzunligini toping.

13.8. α tekislik ABC uchburchakning AB va AC tomonlarini B_1 va C_1 nuqtalarda kesib o‘tadi *(8-rasm)*. Agar $AB_1 : BB_1 = 3 : 1$, $B_1C_1 = 12$ *cm*, $BC \parallel \alpha$ bo‘lsa, BC kesmaning uzunligini toping.

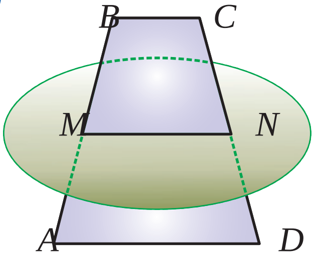
7



8



9



13.9. α tekislik $ABCD$ trapetsiyani uning AD asosiga parallel va yon tomonlarining o‘rtasi M va N nuqtalarda kesib o‘tadi *(9-rasm)*. Agar AD = 17 *cm*, BC = 9 *cm* bo‘lsa, MN kesmaning uzunligini toping.

13.10. Tekislikka unda yotmagan nuqtadan nechta parallel to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin?

13.11. a to‘g‘ri chiziq α tekislikka parallel. To‘g‘ri tasdiqlarni toping.

A) a to‘g‘ri chiziq α tekislikning faqat bitta to‘g‘ri chizig‘iga parallel bo‘ladi.

B) a to‘g‘ri chiziq α tekislikning bitta to‘g‘ri chizig‘idan boshqa barcha to‘g‘ri chiziqlariga ayqash bo‘ladi.

C) α tekislikda a to‘g‘ri chiziqqa parallel va ayqash bo‘lgan ko‘plab to‘g‘ri chiziqlar topiladi.

D) α tekislikda faqat bitta a to‘g‘ri chiziqqa parallel va bu tekislikning ixtiyoriy nuqtasidan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq mavjud.

13.12. A, B, C, D nuqtalar bitta tekislikda yotmaydi. M, N, K, Z nuqtalar mos ravishda AD, BD, BC, AC kesmalarning o‘rtalari. Agar $CD=AB$ bo‘lsa, MK va NZ to‘g‘ri chiziqlarning perpendikulyarligini isbotlang.

13.13. $ABCD$ parallelogrammning AB va BC tomonlari α tekislikni kesib o‘tadi. AD va DC to‘g‘ri chiziqlar ham α tekislikni kesib o‘tishini isbotlang.

13.14. ABC va ABD uchburchaklar bitta tekislikda yotmaydi. CD to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lgan ixtiyoriy to‘g‘ri chiziqning bu uchburchaklar tekisligini kesib o‘tishini isbotlang.

13.15. Berilgan ikki to‘g‘ri chiziqni kesib o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlarning bir tekislikda yotishini isbotlang.

13.16. $ABCD$ kvadratining C uchi orqali kvadrat tekisligida yotmagan CK to‘g‘ri chiziq o‘tadi:

a) CK va AD ayqash ekanini isbotlang;

b) CK va AD orasidagi burchakni toping.

13.17. Tadbirkor alyuminiydan 10-rasmda tasvirlangan narvonni ishlab chiqarmoqchi. Narvon har birida 6 ta zina bo‘lgan, bir-biriga mahkamlangan ikkita qismdan iborat.

1) Narvonning qaysi bo‘laklari o‘zaro parallel va qaysilari o‘zaro ayqash ekanini aniqlang.

2) Agar narvonning kengligi 0,5 *m*, balandligi kengligidan 3,5 marta uzun ekani ma’lum bo‘lsa, bitta narvonni tayyorlash uchun necha *m* quvur kerak bo‘ladi?

3) 1 *m* alyuminiy quvurning narxi 20 000 so‘m bo‘lsa, bitta narvonni ishlab chiqarish uchun necha so‘m alyuminiy quvur kerak bo‘ladi?

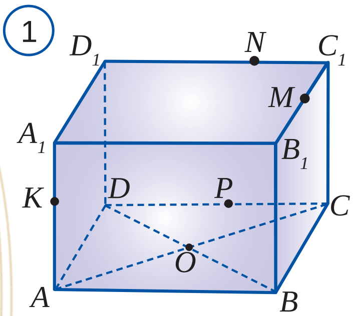
Eng so‘nggi falsafa maktabi – Iskandariya maktabi dunyoga miloddan avvalgi 300-yillarda yashagan mashhur olim Yevklidni bergan. Geometriyaning aksiomatik tuzilishi birinchi marta Yevklidning “Negizlar” asarining o‘n uchinchi kitobida taqdim etilgan. Taxminan ikki ming yil davomida bu ish geometriyaning tizimli kursini o‘rganish uchun asos bo‘lib qolmoqda. Rivoyatlarga qaraganda, qirol Ptolemey Yevkliddan “Geometriyani o‘rganishning “Negizlar”dagiga qaraganda qisqaroq va osonroq usulini topish mumkin emasmi?” deb so‘ragan. Yevklid unga: “Geometriyada qirollik yo‘li yo‘q”, deb javob bergan.

10

O'ZINGIZNI SINAB KO'RING

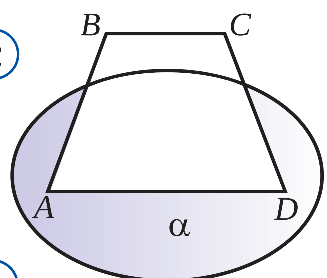
1. 1-rasmda $ABCDA_1B_1C_1D_1$ to'g'ri burchakli parallelepiped va uning B_1C_1, C_1D_1, CD va AA_1 qirralarining o'rtalari – mos ravishda M, N, P, K nuqtalar tasvirlangan. O nuqta – $ABCD$ asos markazi. Jadvalda keltirilgan to'g'ri chiziqlarning o'zaro joylashuvini rasmdan aniqlab, jadvalning mos katagiga tegishli belgi (⊗ – kesishish, // – parallellik va ∸ – ayqashlik)ni yozing.

1

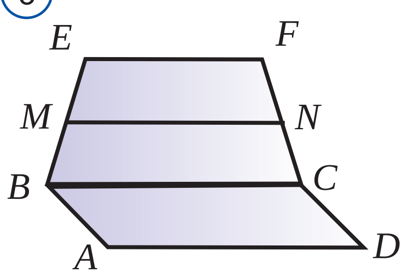


To'g'ri chiziqlar	MN	NP	C_1O	NO
AA_1				
BC_1				
BD				
AC				

2



3



2. A, B, C, D nuqtalar bir tekislikda yotadi. AB va CD to'g'ri chiziqlar haqida nima deyish mumkin?

A) parallel bo'ladi B) kesishadi C) ayqash bo'ladi

3. $ABCD$ to'rtburchakning AD tomoni orqali tekislik o'tkazilgan *(2-rasm)*. Agar $\angle BCA = \angle CAD$ bo'lsa, BC tomon α tekislikka parallel ekanini isbotlang.

4. $ABCD$ kvadrat va $BEFC$ trapetsiya *(3-rasm)* bir tekislikda yotmaydi. M va N nuqtalar – mos ravishda BE va FC kesmalarning o'rtasi. 1) MN ning AD ga parallel ekanini isbotlang.

2) Agar $AD = 10$ *cm*, $EF = 6$ *cm* bo'lsa, MN ni toping.

5. $ABCD$ parallelogrammning AD tomonida A_1 nuqta shunday tanlanadiki, $DA_1 = 4$ *cm*. AC diagonalga parallel tekislik A_1 nuqtadan o'tadi va CD tomonini C_1 nuqtada kesib o'tadi.

1) C_1DA_1 va ABC uchburchaklarning o'xshashligini isbotlang.

2) Agar $BC = 10$ *cm*, $A_1C_1 = 6$ *cm* bo'lsa, AC ni toping.

6. α tekislik BAC burchak tomonlarini A_1 va B_1 nuqtalarda, unga parallel β tekislik esa A_2 va B_2 nuqtalarda kesadi. $A_1B_1 = 18$, $AA_1 = 24$, $AA_2 = \frac{1}{2} A_1A_2$ bo'lsa, A_2B_2 va AA_2 ni toping.

7. FA to'g'ri chiziq $ABCD$ parallelogrammning uchidan o'tadi va parallelogramm tekisligida yotmaydi.

1) FA va CD ayqash ekanini isbotlang.

2) FAB burchagi 30° bo'lsa, FA va CD to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kubining qirrasi a ga teng. AD_1 to'g'ri chiziqdan va BC kesma o'rtasidan o'tadigan tekislik bilan kub kesganda hosil bo'ladigan kesimini yasang. Kesimning yuzini toping.

9. Muntazam to'rtburchakli piramidaning yon qirrasi 8 *cm* bo'lib, asos tekisligi bilan 30° li burchak hosil qiladi. Piramidaning balandligi va yon sirtining yuzini toping.

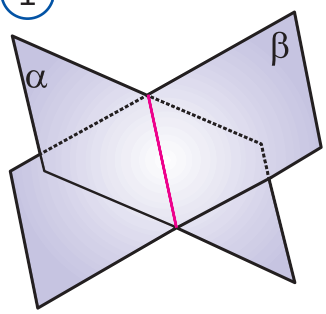
10. A, B, C va D nuqtalar bir tekislikda yotmaydi. Agar AB va BC kesmalar o'rtalari orasidagi masofa 6 ga teng va $AC = 16$, $BD = 20$ bo'lsa, AC va BD to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

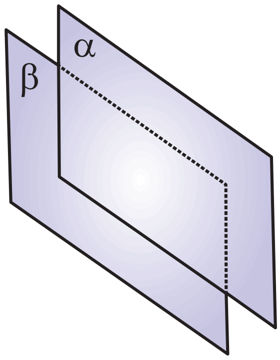
14 FAZODA TEKISLIKLARNING O‘ZARO JOYLASHUVI

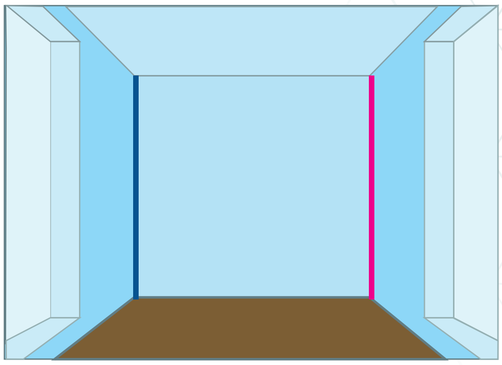
Ikki tekislik yoki umumiy nuqtaga ega, yoki umumiy nuqtaga ega bo‘lmasligi mumkin. Birinchi holda S_3 aksiomaga ko‘ra, bu tekisliklar umumiy to‘g‘ri chiziqqa ham ega bo‘ladi, ya’ni to‘g‘ri chiziq bo‘ylab kesishadi *(1-rasm)*. Ikkinchi holda tekisliklar kesishmaydi *(2-rasm)*.

Kesishmaydigan tekisliklar *parallel tekisliklar* deb ataladi. Parallel tekisliklar haqida xonaning poli va shifti, qarama-qarshi devorlar tasavvur berishi mumkin *(3-rasm)*.

Ikki tekislikning parallelligi quyidagi alomat orqali aniqlanadi.

1


2


3


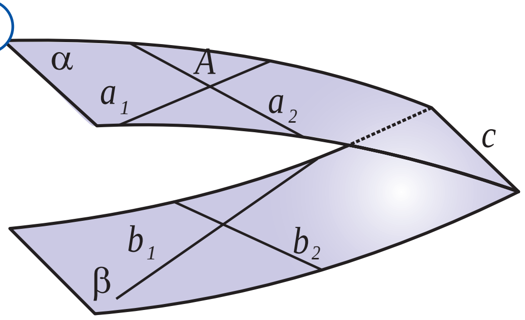
3.7-teorema. ***Agar bir tekislikdagi kesishuvchi ikki to‘g‘ri chiziq ikkinchi tekislikdagi ikki to‘g‘ri chiziqqa mos ravishda parallel bo‘lsa, bu tekisliklar parallel bo‘ladi.***

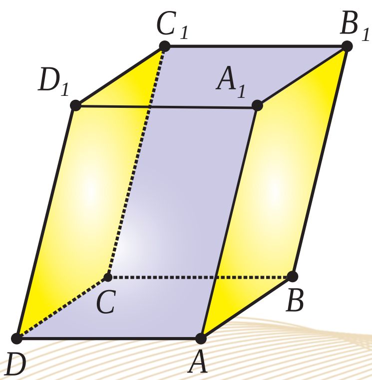
Isbot. Aytaylik, α va β – berilgan tekisliklar, a va b – α tekislikda yotgan va A nuqtada kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlar, a_1 va b_1 esa β tekislikda yotgan va mos ravishda a va b to‘g‘ri chiziqlarga parallel to‘g‘ri chiziqlar bo‘lsin *(4-rasm)*.

Faraz qilamiz, α va β tekisliklar o‘zaro parallel bo‘lmasin, ya’ni qandaydir c to‘g‘ri chiziq bo‘ylab kesishsin. U holda 3.6-teoremaga ko‘ra, a_1 va a_2 to‘g‘ri chiziqlar mos ravishda b_1 va b_2 to‘g‘ri chiziqlarga parallel bo‘lib, β tekislikka ham parallel bo‘ladi. Shuning uchun ular bu tekislikda yotgan c to‘g‘ri chiziqni ham kesib o‘tmaydi.

Shunday qilib, α tekislikda yotgan A nuqta orqali c to‘g‘ri chiziqqa parallel ikkita: a_1 va a_2 to‘g‘ri chiziqlar o‘tmoqda. Parallellik aksiomasiga ko‘ra, bunday bo‘lishi mumkin emas. Ziddiyat farazimizning noto‘g‘ri ekanini ko‘rsatadi.

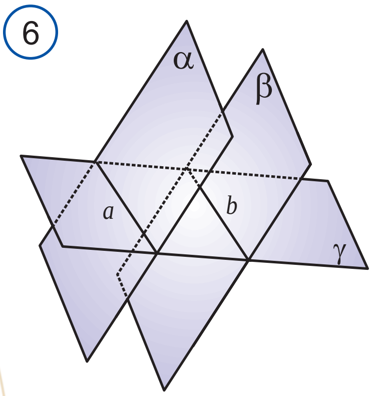
Parallelepipedning yon yoqlari *(5-rasm)* parallel bo‘lishini ushbu teoremadan foydalanib mustaqil isbotlang.

4


5


3.8-teorema. ***Ikki parallel tekislikning uchinchi tekislik bilan kesishish to‘g‘ri chiziqlari o‘zaro parallel bo‘ladi.***

6

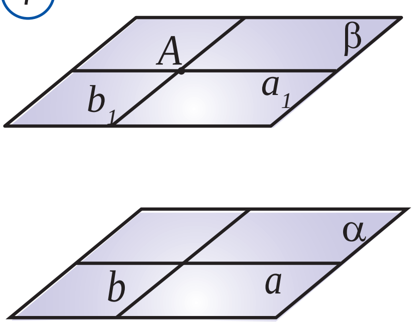


Isbot. Aytaylik, α va β parallel tekisliklar γ tekislikni mos ravishda a va b to‘g‘ri chiziqlar bo‘ylab kesib o‘tsin *(6-rasm)*. a va b to‘g‘ri chiziqlar parallel ekanini isbotlaymiz.

Faraz qilamiz, a va b to‘g‘ri chiziqlar biror Q nuqtada kesishsin. U holda Q nuqta α tekislikda yotadi, chunki a to‘g‘ri chiziq α tekislikda yotadi. Shuningdek, Q nuqta β tekislikda yotadi, chunki b to‘g‘ri chiziq β tekislikda yotadi. Natijada α va β tekisliklar umumiy Q nuqtaga ega bo‘lmoqda. Buning esa shartga ko‘ra iloji yo‘q. Ziddiyat farazimizning noto‘g‘ri ekanini ko‘rsatadi.

3.9-teorema. ***Berilgan tekislikka undan tashqaridagi nuqtadan yagona parallel tekislik o‘tkazish mumkin.***

7

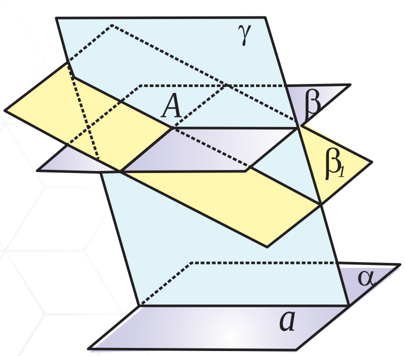


Isbot. Berilgan α tekislikda kesishadigan ikkita a, b to‘g‘ri chiziqlarni o‘tkazamiz. Berilgan A nuqtadan ularga parallel a_1, b_1 to‘g‘ri chiziqlarni o‘tkazamiz *(7-rasm)*.

a_1, b_1 to‘g‘ri chiziqlar orqali β tekislik o‘tkazamiz. Bu tekislik 3.7-teoremaga ko‘ra, α tekislikka parallel bo‘lib, izlanayotgan tekislik bo‘ladi.

Endi bu tekislikning yagonaligini ko‘rsatamiz. Faraz qilamiz, α tekislikka parallel yana bitta β_1 tekislik mavjud bo‘lsin *(8-rasm)*. A nuqtadan va a to‘g‘ri chiziqdan o‘tuvchi γ tekislikni o‘tkazamiz. Bu tekislik β tekislikni a_1 to‘g‘ri chiziq bo‘ylab, β_1 tekislikni a_2 to‘g‘ri chiziq bo‘ylab kesib o‘tadi. a_1, a_2 to‘g‘ri chiziqlar 3.6-teoremaga ko‘ra a to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘ladi. Lekin bunday bo‘lishi mumkin emas, chunki tekislikda unda yotmagan nuqtadan faqat bitta parallel to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin. Ziddiyat farazimizning noto‘g‘ri ekanini ko‘rsatadi.

8



3.10-teorema. ***Uchinchi tekislikka parallel ikki tekislik o‘zaro parallel bo‘ladi.***

Bu teoremani mustaqil isbotlang.

3.11-teorema. ***Parallel tekisliklar orasidagi parallel to‘g‘ri chiziqlar kesmalari tengdir.***

Isbot. Aytaylik, α va β tekisliklar k va l to‘g‘ri chiziqlardan AC va BD kesmalarni ajratsin *(9-rasm)*. Bu kesmalarning tengligini ko‘rsatamiz.

k va l to‘g‘ri chiziqlardan o‘tuvchi γ tekislik parallel tekisliklarni AC va BD to‘g‘ri chiziqlar bo‘ylab kesib o‘tadi. Natijada qarama-qarshi tomonlari parallel bo‘lgan $ABCD$ to‘rtburchakka, ya’ni parallelogrammga ega bo‘lamiz. Parallelogrammning qarama-qarshi tomonlari o‘zaro teng bo‘ladi. Xususan, $AB = CD$.

3.12-teorema. ***Uchta parallel tekislik orasidagi ixtiyoriy to‘g‘ri chiziqlar kesmalari o‘zaro proporsional bo‘ladi.***

Bu teoremani ham mustaqil isbotlang.

Mavzuga doir savollar va mashqlar

1. Tekisliklar fazoda qanday joylashishi mumkin?

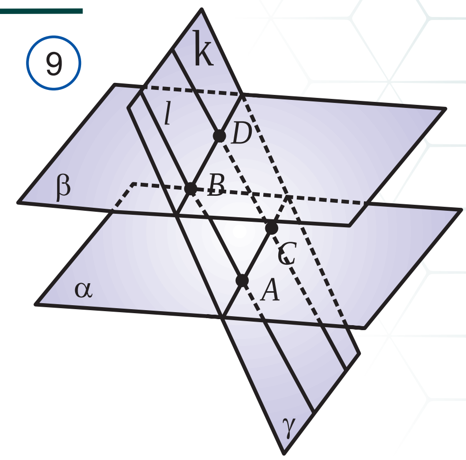
2. Parallel tekisliklar deb qanday tekisliklarga aytiladi?

3. Tekisliklarning parallellik alomatini ayting.

4. Fazoda tekisliklarning joylashuvi bilan bog‘liq qanday xossalarni bilasiz?

5. Parallelepipedning yon yoqlari parallel bo‘lishini asoslang.

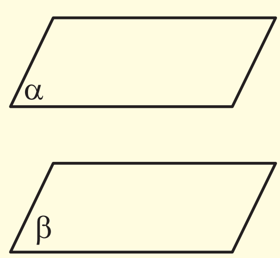
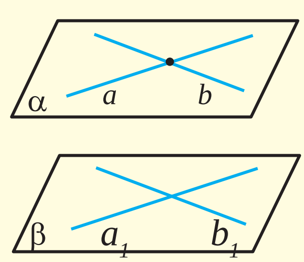
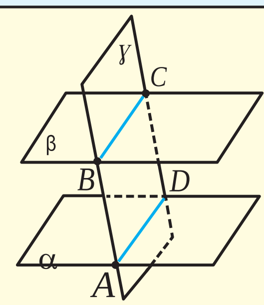
9



Amaliy mashq va tatbiq

14.1. Jadvalda 14-mavzuning asosiy tayanch ma’lumotlari keltirilgan. Ularni sinchiklab o‘rganib chiqing va izohlang.

α va β tekisliklar	Umumiy nuqtaga ega.	Kesishadi	$\alpha \otimes \beta$
	Umumiy nuqtaga ega emas.	Parallel	$\alpha \parallel \beta$

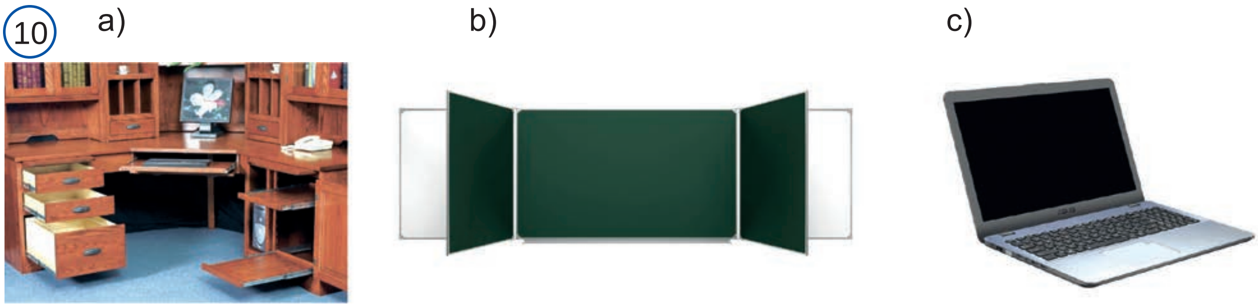
Tekisliklarning parallelligi		
Ta’rifi	**Alomati**	**Xossasi**
 Kesishmaydigan α va β tekisliklar *parallel tekisliklar* deb ataladi va $a \parallel b$ tarzda ifodalanadi.	 Agar $a \subset \alpha$, $b \subset \alpha$, $a \otimes b$, $a_1 \subset \beta$, $b_1 \subset \beta$, $a_1 \otimes b_1$, $a \parallel a_1$, $b \parallel b_1$ bo‘lsa, $\alpha \parallel \beta$ bo‘ladi.	 Agar $\alpha \parallel \beta$ va γ kesuvchi tekislik, $\alpha \cap \gamma = AD$ va $\beta \cap \gamma = BC$ bo‘lsa, $AD \parallel BC$ bo‘ladi.

14.2. 10-rasmdan parallel tekisliklar timsoli nimalar orqali berilganini aniqlang.

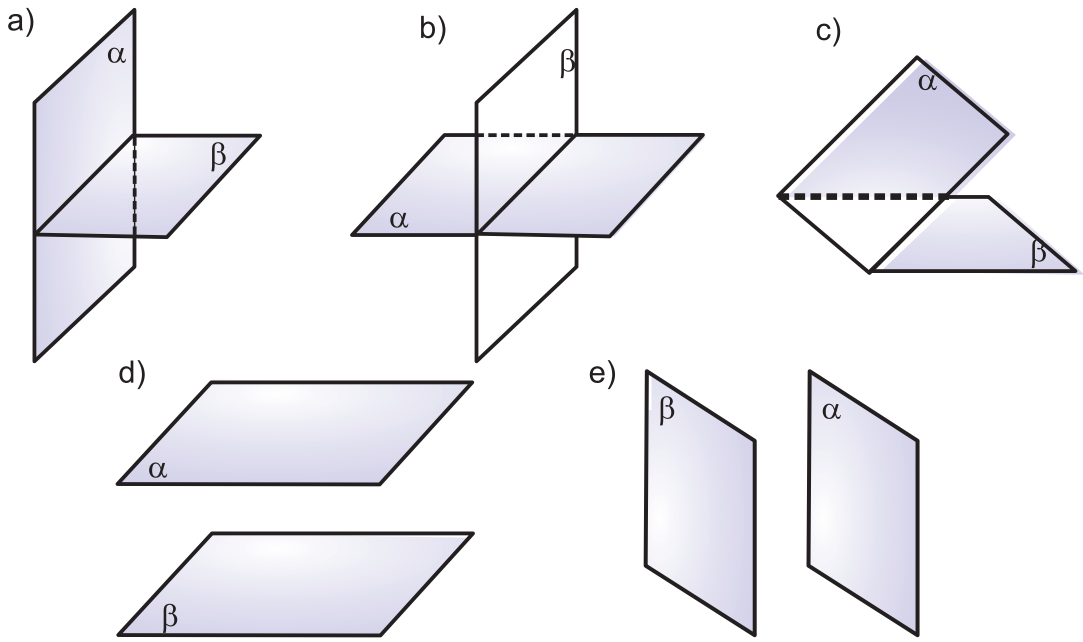
14.3. 1) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ parallelepipedning; 2) $ABCA_1B_1C_1$ prizmaning parallel yoqlarini aniqlang.

14.4. Birorta ham umumiy nuqtasi bo‘lmagan α va β tekisliklar fazoda qanday joylashadi?

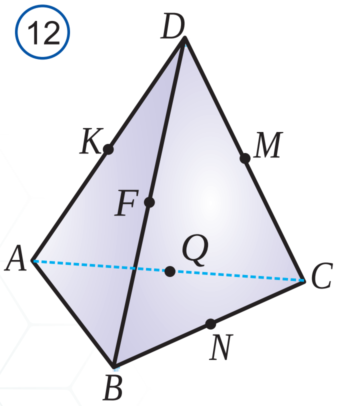
10



11



12



14.5. α va β tekisliklar parallel. a va b to‘g‘ri chiziqlar α tekislikda yotadi, c va d to‘g‘ri chiziqlar esa β tekislikda yotadi. Quyidagi tasdiqlardan qaysilari to‘g‘ri?

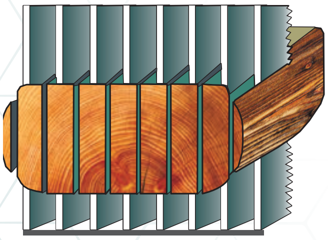
A) $\alpha \parallel b$ B) $c \parallel b$ C) $b \parallel \beta$ D) $\beta \parallel a$

E) $c \parallel a$ F) $d \parallel b$ G) $a \parallel \alpha$ H) $d \parallel \alpha$

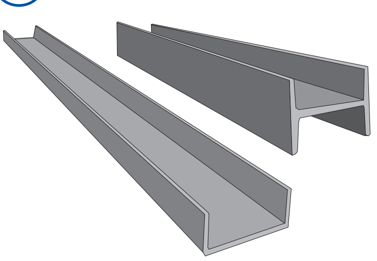
14.6. Kesishuvchi ikkita tekislik tasvirlangan uchta rasmni ko‘rsating *(11-rasm)*.

14.7. K, F, M, N, Q nuqtalar 12-rasmda tasvirlangan $ABCD$ tetraedr mos qirralarining o‘rtalari bo‘lsa, a) K nuqtadan o‘tuvchi va ABC tekislikka parallel; b) BD to‘g‘ri chiziqdan o‘tuvchi va MNQ tekislikka parallel bo‘lgan tekislikni aniqlang.

13



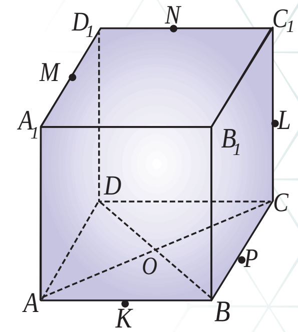
14



14.8. 13- va 14-rasmlardan parallel tekisliklarni aniqlang.

14.9. 15-rasmda $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kub va uning ba’zi qirralarining o‘rtalari – M, N, P, K va L nuqtalar tasvirlangan. O nuqta – $ABCD$ asos markazi. Jadvalda keltirilgan tekisliklarning o‘zaro joylashuvini rasmdan aniqlab, jadvalning mos katagiga tegishli belgi (⊗ – kesishish, // – parallellik)ni yozing.

15



Tekisliklar	ADC	PLN	MNP	A_1C_1C
$A_1B_1C_1$				
MNK				
MKP				
A_1DC_1				

14.10. α va β tekisliklar parallel. Ularning hech biriga tegishli bo‘lmagan nuqtadan γ tekislik o‘tkazilgan. To‘g‘ri tasdiqlarni ko‘rsating.

a) γ tekislik – α tekislikka parallel bo‘lgan yagona tekislik;

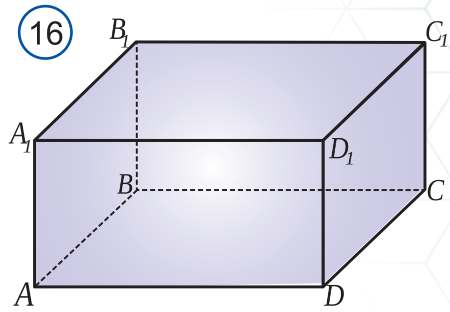
b) γ tekislik – β tekislikni kesib o‘tuvchi yagona tekislik;

c) γ tekislik – β tekislikka parallel bo‘lgan yagona tekislik;

d) γ tekislik – α tekislikni kesib o‘tuvchi yagona tekislik;

e) γ tekislik – α tekislikka ham, β tekislikka ham parallel bo‘lgan yagona tekislik.

16



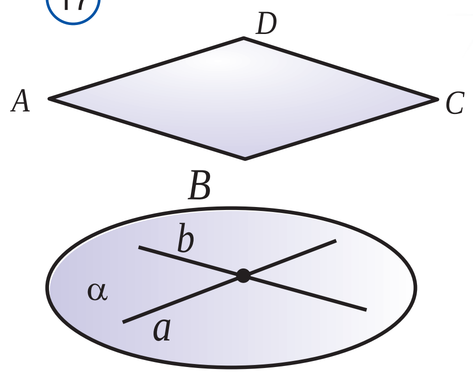
14.11. 16-rasmda $ABCDA_1B_1C_1D_1$ to‘g‘ri burchakli parallelepiped tasvirlangan.

a) $A_1B_1C_1D_1$ va $B_1A_1D_1C_1$; b) ADD_1A_1 va $ABCD$;

c) ABB_1A_1 va C_1D_1DC; d) $BADC$ va ABB_1A_1;

e) CC_1B_1B va ADD_1A_1 tekisliklarning o‘zaro joylashishini aniqlang.

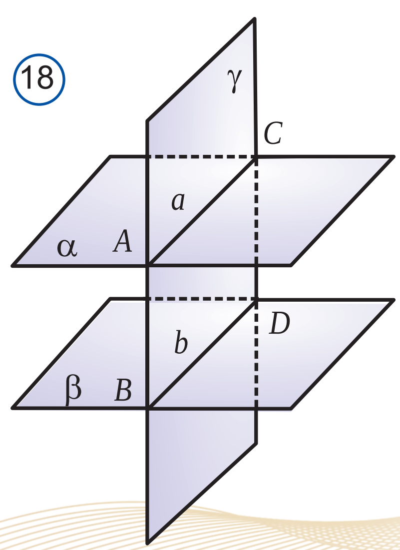
17



14.12. AB, BC kesmalar $ABCD$ parallelogrammning tomonlari bo‘lib, ular mos ravishda a va b to‘g‘ri chiziqlarga parallel *(17-rasm)*. a va b to‘g‘ri chiziqlar o‘zaro kesishadi va α tekislikka tegishli. $ABCD$ va α tekisliklarning fazoda o‘zaro joylashuvini aniqlang.

14.13. a va b ayqash to‘g‘ri chiziqlar berilgan. a to‘g‘ri chiziqdan o‘tuvchi va β tekislikka parallel bo‘lgan nechta tekislik o‘tkazish mumkin?

18

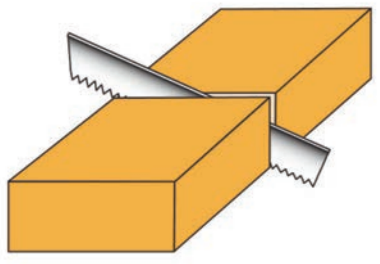


14.14. Ikkita α va β tekisliklarning kesishish chizig‘i uchinchi – γ tekislikka parallel. α va β tekisliklarning fazoda o‘zaro joylashuvini aniqlang.

14.15. AB va CD parallel to‘g‘ri chiziqlar orqali o‘tkazilgan γ tekislik α va β parallel tekisliklarni mos ravishda AC va BD to‘g‘ri chiziqlar bo‘ylab kesib o‘tadi. Agar $BD = 15$ cm bo‘lsa, AC kesma uzunligini toping *(18-rasm)*.

14.16. Yog‘och taxta bo‘lagining hamma yoqlari to‘g‘ri to‘rtburchakdan iborat *(19-rasm)*. Taxtani qanday

19



yo‘nalishda arralamaylik, har doim kesim parallelelogramm bo‘lishini isbotlang.

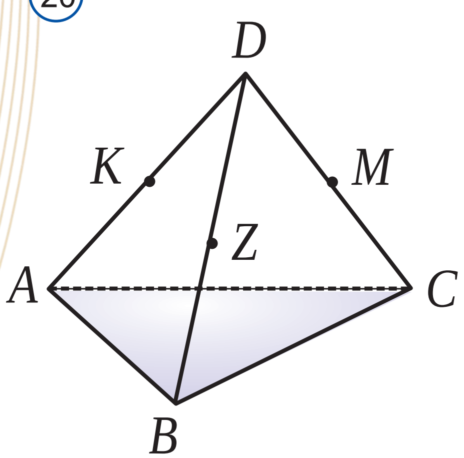
14.17. Ixtiyoriy ikkita ayqash to‘g‘ri chiziqlar orqali yagona parallel tekisliklar juftini o‘tkazish mumkinligini isbotlang.

14.18. α va β tekisliklar parallel. α tekislikda yotuvchi ixtiyoriy to‘g‘ri chiziq β tekislikka parallel bo‘lishini isbotlang.

14.19. O nuqta – bir tekislikda yotmaydigan AA_1, BB_1, CC_1 kesmalarning umumiy o‘rtasi. ABC va $A_1B_1C_1$ tekisliklar parallel ekanini isbotlang.

14.20. $ABCD$ parallelogramm va uni kesmaydigan tekislik berilgan. Parallelogrammning A, B, C, D uchlaridan tekislikni mos ravishda A_1, B_1, C_1, D_1 nuqtalarda kesib o‘tadigan parallel to‘g‘ri chiziqlar o‘tkazilgan. Agar $AA_1 = 4\ m$, $BB_1 = 3\ m$ va $CC_1 = 1\ m$ bo‘lsa, DD_1 kesma uzunligini toping.

20



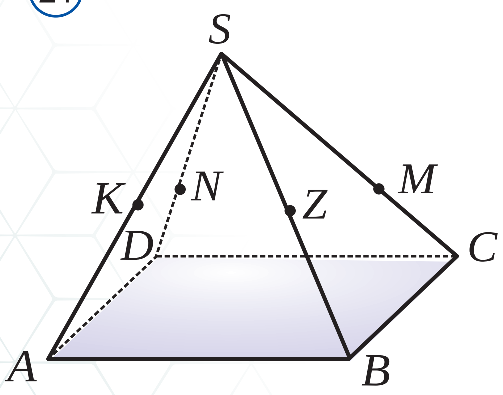
14.21. Ikkita parallel tekislik berilgan. Bir tekislikning A va B nuqtalaridan ikkinchi tekislikni A_1 va B_1 nuqtalarda kesib o‘tuvchi parallel to‘g‘ri chiziqlar o‘tkazilgan. Agar $AB = a$ bo‘lsa, A_1B_1 kesma uzunligini toping.

14.22. α va β tekisliklar parallel. α tekislikning M va N nuqtalaridan β tekislikni K va L nuqtalarda kesib o‘tuvchi parallel to‘g‘ri chiziqlar o‘tkazilgan. $MNLK$ parallelogramm ekanini isbotlang. Agar $ML=14\ cm$, $NK = 8\ cm$ va $MK : MN = 9 : 7$ bo‘lsa, $MNLK$ to‘rtburchak perimetrini toping.

14.23. OF va OP nurlar a va β parallel tekisliklarni mos ravishda F_1, P_1, F_2, P_2 nuqtalarda kesib o‘tadi. Agar $F_1P_1 = 3\ cm$, $F_2P_2 = 5\ cm$ va $P_1P_2 = 4\ cm$ bo‘lsa, OP_1 kesma uzunligini toping.

14.24. OA va OB nurlar a va β parallel tekisliklarni mos ravishda A_1, B_1, A_2, B_2 nuqtalarda kesib o‘tadi. Agar $OA_1 = 16\ cm$, $A_1A_2 = 24\ cm$ va $A_2B_2 = 50\ cm$ bo‘lsa, A_1B_1 kesma uzunligini toping.

21



14.25. D nuqta ABC uchburchak tekisligiga tegishli emas *(20-rasm)*. K, M, Z nuqtalar – mos ravishda DA, DB va DC kesmalarning o‘rtasi. ABC va KZM tekisliklarning o‘zaro joylashuvini aniqlang.

14.26. S nuqta $ABCD$ parallelogramm tekisligiga tegishli emas *(21-rasm)*. K, Z, M, N nuqtalar mos ravishda SA, SB, SC va SD kesmalarga tegishli. Agar

$SK = AK$, $SZ = BZ$, $CM : MC = 2 : 1$,

$SN : ND = 2 : 1$ bo‘lsa, $ABCD$ va $KZMN$ tekisliklarning o‘zaro joylashuvini aniqlang.

15 FAZODA PARALLEL PROYEKSIYALASH

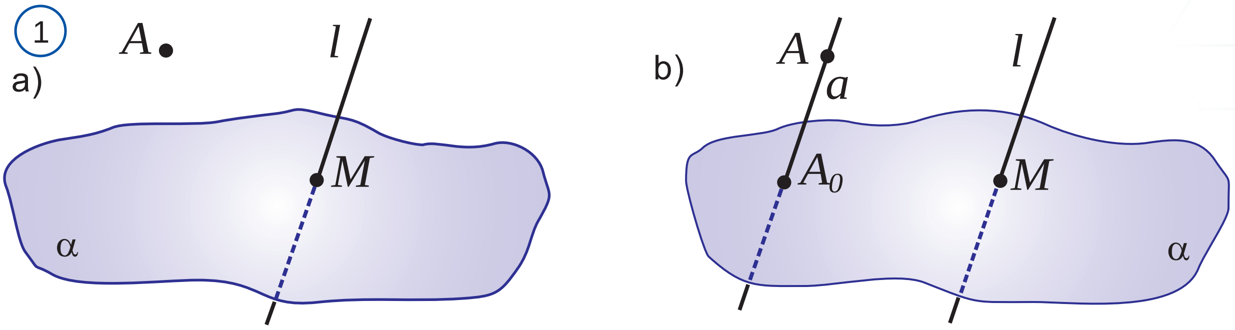
Fazodagi shakllar turli usullar bilan tekislikda tasvirlanadi. Quyida ular bilan tanishamiz.

Fazodagi shaklni tekislikka parallel proyeksiyalash deb shunday akslantirishga aytiladiki, unda shaklning har bir nuqtasi berilgan proyeksiyalash yo‘nalishiga parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlar bo‘ylab tekislikka ko‘chiriladi.

Parallel proyeksiyalashni yorug‘lik nurlari yordamida biror narsaning devor yoki poldagi soyasiga qiyoslash mumkin.

Shunday qilib, parallel proyeksiyalashda biror shakl va *proyeksiyalash tekisligi* deb nomlanuvchi tekislik olinadi hamda *proyeksiyalash yo‘nalishi*, ya’ni biror to‘g‘ri chiziq tanlanadi. Albatta, bu to‘g‘ri chiziq proyeksiya tekisligi bilan kesishishi lozim.

1



Aytaylik, ixtiyoriy α tekislik va proyeksiyalash to‘g‘ri chizig‘i – l va tekislikda ham, to‘g‘ri chiziqda ham yotmagan A nuqta berilgan bo‘lsin *(1a-rasm)*.

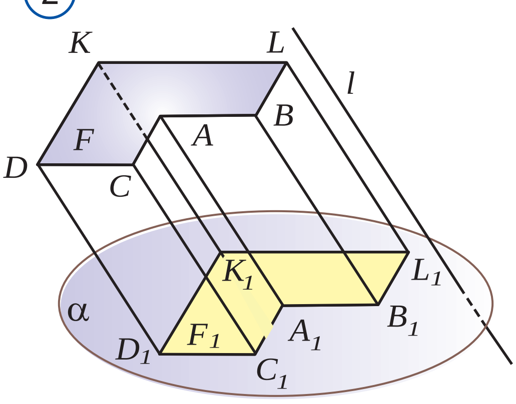
A nuqtadan α tekislikka l to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziq o‘tkazamiz. Bu to‘g‘ri chiziq α tekislikni A_o nuqtada kesib o‘tsin*(1b-rasm)*.

Topilgan A_o nuqta A nuqtaning α tekislikka *parallel proyeksiyasi* deb ataladi.

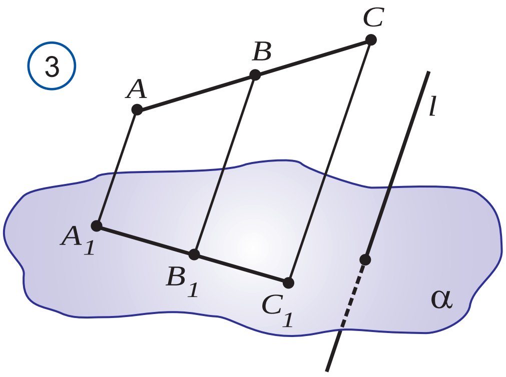
Shunday qilib, parallel proyeksiyalashda nuqta nuqtaga o‘tar ekan.

Aytaylik, biror F shaklni α tekislikka l yo‘nalish bo‘yicha parallel proyeksiyalash lozim bo‘lsin. Buning uchun F shaklning ixtiyoriy nuqtasini olamiz, undan l ga parallel to‘g‘ri chiziq o‘tkazamiz va uning α tekislik bilan kesishish nuqtasini belgilaymiz. Bunday nuqtalar α tekislikda qandaydir F_1 shaklni hosil qiladi. Aynan shu F_1 shakl F shaklning α tekislikdagi parallel proyeksiyasi bo‘ladi. 2-rasmda F shaklning α tekislikka proyeksiyasi – F_1 shakl tasvirlangan.

2



Parallel proyeksiyalashning quyidagi xossalarini ham keltirib o‘tamiz. Ularni mustaqil isbotlab ko‘ring.



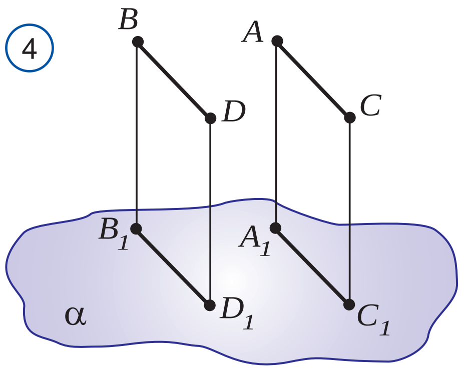
Parallel proyeksiyalashda kesma kesmaga, to‘g‘ri chiziq to‘g‘ri chiziqqa o‘tadi.

Parallel to‘g‘ri chiziqlar proyeksiyalari parallel bo‘ladi yoki ustma-ust tushadi.

Albatta, bu xossalar proyeksiyalash yo‘nalishiga parallel bo‘lmagan kesma va to‘g‘ri chiziqlar uchun o‘rinli bo‘ladi. Endi quyidagi xossalarni isbotlaylik.

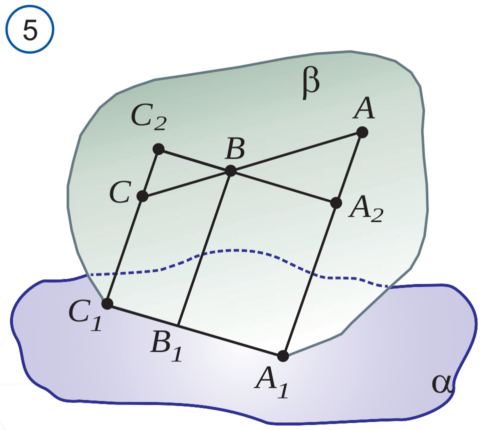
***1-xossa.** Parallel proyeksiyalashda shakllarning to‘g‘ri chiziqli kesmalari ham kesmalarga o‘tadi.*

Haqiqatan, AC kesmaning nuqtalarini proyeksiyalovchi barcha to‘g‘ri chiziqlar α tekislikni A_1C_1 to‘g‘ri chiziq bo‘yicha kesib o‘tuvchi tekislikda yotadi *(3-rasm)*. AC kesmaning ixtiyoriy B nuqtasi A_1C_1 kesmaning B_1 nuqtasiga o‘tadi.



***2-xossa.** Parallel proyeksiyalashda shakllarning parallel kesmalari ham parallel kesmalarga o‘tadi.*

Haqiqatan, AC va BD biror shaklning parallel kesmalari bo‘lsin *(4-rasm)*. Ularning proyeksiyalari A_1C_1 va B_1D_1 kesmalar ham parallel bo‘ladi, chunki ular ikki parallel tekislikni α tekislik bilan kesganda hosil bo‘ladi.



***3-xossa.** Bitta to‘g‘ri chiziqda yoki parallel to‘g‘ri chiziqlarda yotgan kesmalar uzunliklari nisbati ularning parallel proyeksiyalari uzunliklari nisbatiga teng.*

Haqiqatan, 5-rasmda AC va A_1C_1 to‘g‘ri chiziqlar β tekislikda yotadi. AC kesmaning B nuqtasidan A_1C_1 ga parallel bo‘lgan A_2C_2 to‘g‘ri chiziqni o‘tkazamiz. Hosil bo‘lgan BAA_2 va BCC_2 uchburchaklar o‘xshash bo‘ladi. Uchburchaklarning o‘xshashligi va $A_1B_1=A_2B$ va $B_1C_1=BC_2$ tengliklardan izlanayotgan nisbatda bo‘lamiz: $AB:BC=A_1B_1:B_1C_1$.

Shunday qilib, parallel proyeksiyalashda to‘g‘ri chiziqda yoki parallel to‘g‘ri chiziqlarda yotgan kesmalar uzunliklarining nisbati saqlanar ekan.

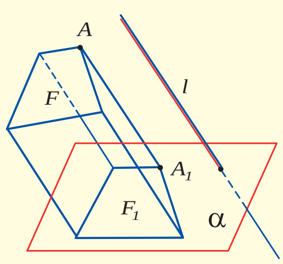
Xususan, kesmaning o‘rtasi proyeksiya o‘rtasiga o‘tadi.

Mavzuga doir savollar va mashqlar

1. *Fazodagi shaklni tekislikka parallel proyeksiyalash deb qanday akslantirishga aytiladi?*
2. *Nuqtaning tekislikka parallel proyeksiyasi qanday topiladi?*
3. *6-rasmdagi "soyalar teatri" jonivorlari qanday hosil qilinyapti?*
4. *Parallel proyeksiyalash tekisligi va proyeksiyalash yo'nalishi deb nimaga aytiladi?*
5. *Parallel proyeksiyalashning qanday xossalarini bilasiz?*
6. *Parallel proyeksiyalashdan qayerda foydalanish mumkin?*

Amaliy mashq va tatbiq

15.1. Jadvalda 15-mavzuning asosiy tayanch ma'lumotlari keltirilgan. Ularni sinchiklab o'rganib chiqing va izohlang.

Parallel proyeksiyalash		
Ta'rifi	**Parallel proyeksiyalashda shakllarning xossalari**	
	Saqlanadi	**Saqlanmaydi**
 F – shakl, α – proyeksiyalash tekisligi, l – proyeksiyalash yo'nalishi, F_1 – F shakl proyeksiyasi.	1) Shakllarning sinflarga tegishliligi (nuqta nuqtaga, to'g'ri chiziq to'g'ri chiziqqa, kesma kesmaga, uchburchak uchburchakka o'tadi); 2) nuqtalarning to'g'ri chiziqqa tegishliligi; 3) nuqtalarning to'g'ri chiziqda joylashuvi; 4) to'g'ri chiziqlarning parallelligi; 5) bitta yoki parallel to'g'ri chiziqlarda yotgan kesmalarning tengligi (yoki proporsionalligi).	1) kesma uzunligi; 2) burchak kattaligi; 3) to'g'ri chiziqlarning perpendikulyarligi; 4) burchaklar tengligi (proporsionalligi); 5) kesishuvchi to'g'ri chiziqlarda yotgan kesmalarning tengligi (proporsionalligi).

15.2. Parallel proyeksiyalashda kesmaning proyeksiyasi: a) kesma; b) nuqta; c) ikki nuqta; d) nur; e) to'g'ri chiziq bo'lishi mumkinmi?

15.3. Parallel proyeksiyalashda kvadratning proyeksiyasi: a) kvadrat; b) parallelogramm; c) romb; d) to'g'ri to'rtburchak; e) trapetsiya; f) kesma bo'lishi mumkinmi?

15.4. Parallel tekisliklardan birida yotgan uchburchak ikkinchi tekislikka parallel proyeksiyalansa, uning yuzi o'zgarmasligini isbotlang.

15.5. Parallelogrammning parallel proyeksiyasi trapetsiya bo'lishi mumkinmi? Javobingizni asoslang.

15.6. Muntazam uchburchakning parallel proyeksiyasi muntazam uchburchak bo‘ladimi?

15.7. To‘g‘ri burchakli uchburchakning parallel proyeksiyasi to‘g‘ri burchakli uchburchak bo‘ladimi?

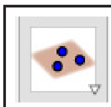
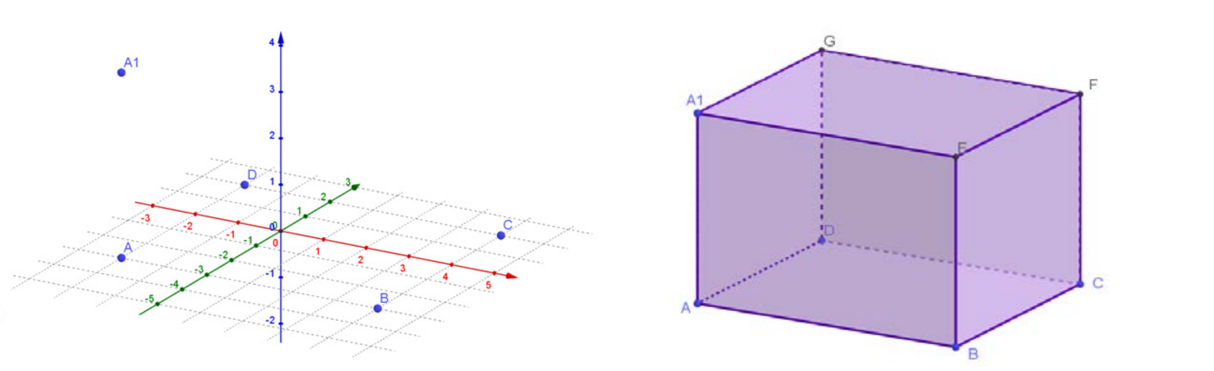
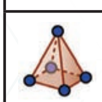
15.8. ABC uchburchakning parallel proyeksiyasi $A_1B_1C_1$ uchburchakdan iborat. Bu proyeksiyalashda ABC uchburchakning: a) medianasi; b) balandligi; c) bissektrisasi $A_1B_1C_1$ uchburchakning mos: a) medianasi; b) balandligi; c) bissektrisasiga o‘tadimi?

15.9. ABC uchburchakning parallel proyeksiyasi $A_1B_1C_1$ uchburchakdan iborat. Agar $\angle A = 30^\circ$, $BC = 20$ cm bo‘lsa, $\angle A_1 = 30^\circ$, $B_1C_1 = 20$ cm bo‘ladimi?

15.10. AB kesmaning parallel proyeksiyasi A_1B_1 kesmadan iborat. AB kesmadan olingan C nuqtaning proyeksiyasi esa C_1 nuqta. $AB = 48$ cm, $A_1B_1 = 36$ cm. Agar AC kesma uzunligi: a) 24 cm; b) 12 cm; c) 8 cm; d) 32 cm; e) 36 cm bo‘lsa, A_1C_1 kesmaning uzunligini toping.

“GeoGebra”ni qo‘llab

3D kalkulyatori yordamida to‘g‘ri burchakli parallelepipedni yasash

	**Ввод** (Kiritish) satri orqali xOy tekisligida 4 ta – A, B, C, D nuqtalarni va xOz tekisligida esa bitta A_1 nuqtani chap tomondagi rasmda ko‘rsatilgandek qilib yasaymiz.
	
	**Призма** (Prizma) uskunasini tanlaymiz va ketma-ket A, B, C, D nuqtalarni ustiga bosib chiqamiz, so‘ng A_1 nuqtani bosamiz va natijada o‘ng tomondagi rasmdagi to‘g‘ri burchakli parallelepipedni hosil qilamiz.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Yuqorida yasalgan to‘g‘ri burchakli parallelepipedning parallel yoqlarini aniqlang va “GeoGebra” 3D kalkulyatori yordamida ularning parallelligini tekshiring.

2. Birorta kub yasang. Uning parallel yoqlarini “GeoGebra” 3D kalkulyatori yordamida aniqlang.

3. Birorta kub yasang. Uning qo‘shni yoqlarining ayqash diagonallari orasidagi burchakni “GeoGebra” 3D kalkulyatori yordamida aniqlang.

16 BOBNI TAKRORLASHGA DOIR AMALIY MASHQLAR

16.1. a) Ikki to‘g‘ri chiziq; b) to‘g‘ri chiziq va tekislik; c) ikki tekislik nechta umumiy nuqtaga ega bo‘lishi mumkin?

16.2. a) Ikki to‘g‘ri chiziq; b) to‘g‘ri chiziq va tekislik; c) ikki tekislik; d) uchta tekislik yagona umumiy nuqtaga ega bo‘lishi mumkinmi?

16.3. To‘rtta nuqta bitta tekislikda yotmaydi. a) ulardan uchtasi bitta to‘g‘ri chiziqda yotishi mumkinmi; b) ular orqali nechta tekislik o‘tkazish mumkin?

16.4. m va n to‘g‘ri chiziqlar kesishadi, d to‘g‘ri chiziq esa n to‘g‘ri chiziqqa parallel. m va d to‘g‘ri chiziqlar o‘zaro qanday joylashishi mumkin?

16.5. ABC uchburchakning C uchidan o‘tuvchi va AB tomoniga parallel bo‘lgan nechta tekislik o‘tkazish mumkin?

16.6. $ABCD$ va $ABKZ$ parallelogrammlar turli tekisliklarda yotadi. Parallel to‘g‘ri chiziqlarni ko‘rsating.

A) DA va KB B) CD *va* KZ C) BC *va* AZ

D) DA *va* ZA E) CB *va* KB

16.7. A va C nuqtalar α tekislikka, B va D nuqtalar β tekislikka tegishli. AC, CD, BD, AB, BC, AD to‘g‘ri chiziqlardan qaysilari β tekislikni kesib o‘tadi?

16.8. AB, AC, KB, KD kesmalar α tekislikni kesib o‘tadi. AK, AD, BD, KC, CD to‘g‘ri chiziqlardan qaysilari α tekislikni kesib o‘tadi?

16.9. Bir tekislikda yotmagan AB, AC va AD to‘g‘ri chiziqlar α tekislikni B_1, C_1 va D_1 nuqtalarda kesib o‘tadi. B_1, C_1 va D_1 nuqtalar ketma-ket tutashtirilsa, qanday shakl paydo bo‘ladi?

16.10. α tekislikni kesib o‘tmaydigan MN kesma uchlaridan va o‘rtasidan parallel to‘g‘ri chiziqlar o‘tkazilgan. Agar bu to‘g‘ri chiziqlar α tekislikni mos ravishda M_1, N_1 va K_1 nuqtalarda kesib o‘tsa va $KK_1 = 9$ *cm*, $NN_1 = 15$ *cm* bo‘lsa, MM_1 kesma uzunligini toping.

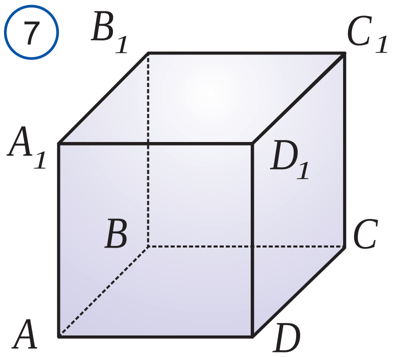
16.11. α tekislikning P va Z nuqtalaridan undan tashqarida uzunliklari $PK = 6$ *cm* va $ZM = 9$ *cm* bo‘lgan parallel kesmalar tushirilgan. MK to‘g‘ri chiziq α tekislikni O nuqtada kesib o‘tadi. Agar $MK = 6$ *cm* bo‘lsa, MO kesma uzunligini toping.

16.12. Parallelogrammni parallel proyeksiyalashda kvadrat hosil bo‘lishi mumkinmi?

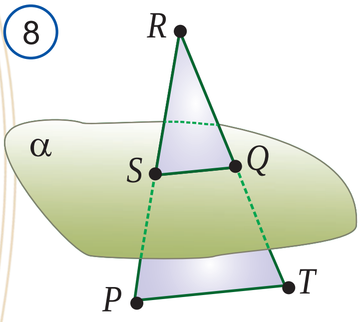
16.13. Uchburchakning parallel proyeksiyasi berilgan. Bu uchburchak medianalarining proyeksiyalari qanday yasaladi?

16.14. MNZ uchburchak va $MNPS$ (BC – asos) parallelogramm bitta tekislikda yotmaydi. Q va R nuqtalar – CB va DA kesmalarning o‘rtasi, M va N esa DP va CZ kesmalarning o‘rtasi. MN va QR to‘g‘ri chiziqlarning parallel ekanini isbotlang.

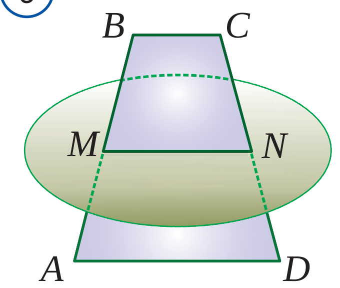
7



8



9



16.15. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kubning *(7-rasm)* AA_1D_1D; BB_1C_1C; $ABCD$; DD_1C_1C; $B_1C_1D_1A_1$; ADD_1A_1 yoqlaridan qaysilari A_1B_1 to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘ladi?

16.16. PRT uchburchak berilgan. PT to‘g‘ri chiziqqa parallel α tekislik PR tomonni S nuqtada, RT tomonni Q nuqtada kesib o‘tadi *(8-rasm)*. Agar SR = 7 cm, SQ = 3 cm va SP= 35 cm bo‘lsa, PT tomonni toping.

16.17. α tekislik $ABCD$ teng yonli trapetsiya asosi AD ga parallel hamda AB va CD tomonlarini M va N nuqtalarda kesib o‘tadi *(9-rasm)*. AD = 20 cm, MN = 16 cm. Agar M nuqta – AB kesma o‘rtasi va AB = 8 cm bo‘lsa, trapetsiya perimetrini toping.

16.18. α tekislikning P va Z nuqtalaridan undan tashqarida PK = 6 cm va ZM = 9 cm kesmalar o‘tkazilgan. MK to‘g‘ri chiziq tekislikni O nuqtada kesib o‘tadi. Agar MK = 6 cm bo‘lsa, MO masofani toping.

16.19. $ABCD$ to‘g‘ri to‘rtburchakning AB tomoni α tekislikka parallel, AD tomoni esa bu tekislikka parallel emas. $ABCD$ va α tekisliklarning fazoda o‘zaro joylashuvini aniqlang.

16.20. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ to‘g‘ri burchakli parallelepipedning quyida berilgan yoqlaridan qaysilari $ABCD$ yog‘iga parallel bo‘ladi?

A) D_1A_1AD B) $D_1A_1B_1C_1$ C) ABB_1A_1 D) D_1C_1CD

16.21. Rombning ikki diagonali α tekislikka parallel. Romb tekisligi va α tekisliklarning fazoda o‘zaro joylashuvini aniqlang.

16.22. Jadvalning chap ustunida tekislikdagi, o‘ng ustunida esa fazodagi geometrik shakllarning bir-biriga o‘xshash ba’zi xossalari keltirilgan. Ularni ko‘z oldingizga keltiring va qanday o‘xshashlikka ega ekanini aniqlang, so‘ng bo‘sh kataklarni to‘ldiring. Tekislik va fazodagi yana qanday o‘xshash xossalarni keltirish mumkin?

Tekislikda	Fazoda
Agar to‘g‘ri chiziqlar umumiy nuqtaga ega bo‘lsa, ular shu nuqtada kesishadi.	Agar tekisliklar umumiy to‘g‘ri chiziqqa ega bo‘lsa, ular shu to‘g‘ri chiziq bo‘yicha kesishadi.
Tekislikning biror nuqtasidan cheksiz ko‘p to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin.	
	Tekislikda yotmagan to‘g‘ri chiziq orqali berilgan tekislikka parallel bitta va faqat bitta tekislik o‘tkazish mumkin.
Bitta to‘g‘ri chiziqqa parallel to‘g‘ri chiziqlar o‘zaro paralleldir.	

Amaliy kompetensiyalarni shakllantirishga doir topshiriqlar

1 

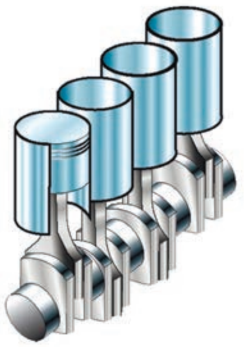
1. Temiryo‘l vagonlari g‘ildiraklarining o‘qlari bir-biriga nisbatan qanday joylashgan *(1-rasm)*?

2. Temiryo‘l vagonlari g‘ildiragining o‘qi relslarga nisbatan qanday joylashgan *(1-rasm)*?

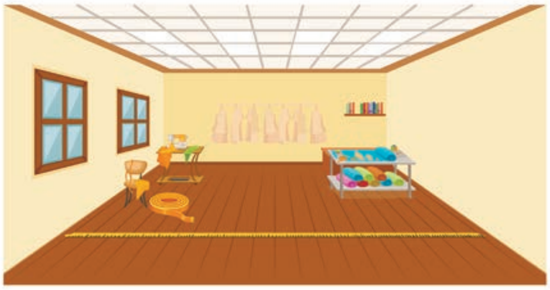
3. Tevarak-atrofdan parallel va ayqash to‘g‘ri chiziqlarga misollar keltiring.

2 

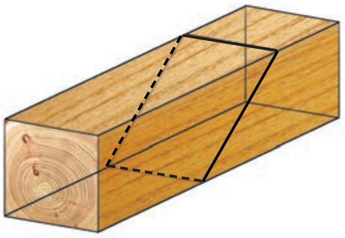
4. Nima uchun yozuv stoli tortmalari ba’zida silliq ochilmaydi *(2-rasm)*?

3 

5. Nima uchun nasos porsheni uning ichida silliq harakatlanadi *(3-rasm)*?

4 

6. Tikuvchilik tasmasi yoki istalgancha uzun tayoq yordamida dahliz poli chekkasiga qoqilgan reykalarning parallelligini qanday tekshirsa bo‘ladi *(4-rasm)*?

5 

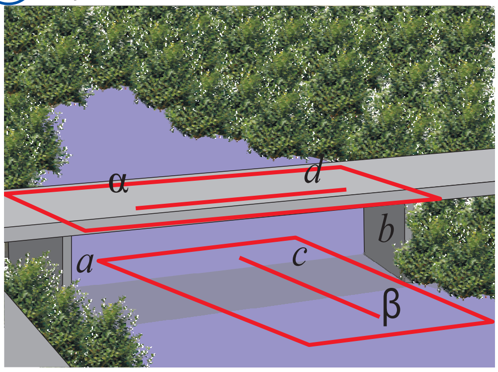
7. Yog‘ochdan ishlangan brus (taxta)ning hamma yoqlari to‘g‘ri to‘rtburchak shaklida. Uni ko‘ndalang qirralari bo‘ylab qanday arralamang, hosil bo‘lgan hamma kesimlar parallelogramm bo‘lishini isbotlang *(5-rasm)*.

O'ZINGIZNI SINAB KO'RING

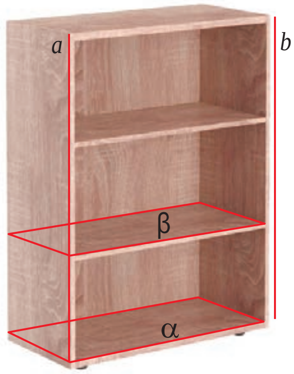
1. Quyidagi jumlalarni o'qing. Jumlalar ma'nosidan kelib chiqib, ularning har doim, ba'zida to'g'ri bo'lishi yoki hech qachon to'g'ri bo'lmasligini aniqlang va "+" belgisini tegishli ustunga qo'ying. Javobingizni izohlang.

	Jumla	Har doim	Ba'zida	Hech qachon
a	Fazoda ikki to'g'ri chiziq kesishmaydi.			
b	Fazoda ikki tekislik kesishmaydi.			
c	Fazoda to'g'ri chiziq bilan tekislik kesishadi.			
d	Fazoda to'g'ri chiziqlar ayqash bo'ladi.			
e	Tekislikda to'g'ri chiziqlar ayqash bo'ladi.			
f	Tekislikni kesuvchi to'g'ri chiziqlar kesishadi.			
g	Tekislikka parallel to'g'ri chiziqlar kesishadi.			

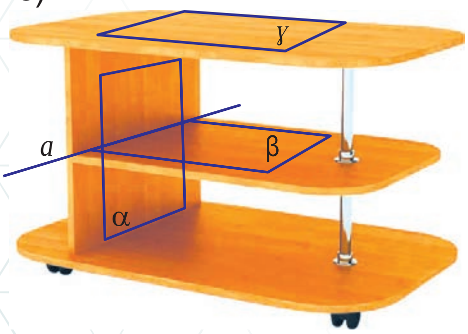
1 a)



b)



c)



2. 1-rasmda ba'zi obyektlar fazoviy geometrik shakllar timsoli sifatida chizib ko'rsatilgan. Qanday fazoviy geometrik shakllarni ko'ryapsiz? Ular o'zaro qanday joylashganligini aniqlab, yozing.

3. Bitta tekislikda yotib, bitta umumiy nuqtaga ega bo'lgan to'g'ri chiziqlar qanday nomlanadi?

A) ayqash B) kesishuvchi C) parallel

4. Ayqash to'g'ri chiziqlar nechta umumiy nuqtaga ega bo'lishi mumkin?

A) 1 ta B) ega emas C) 2 ta

5. Bitta tekislikda yotib, umumiy nuqtaga ega bo'lmagan to'g'ri chiziqlar qanday nomlanadi?

A) ayqash B) kesishuvchi C) parallel

6. To'g'ri chiziqdan turli ikkita tekislik o'tkazish mumkinligini isbotlang.

7. Bitta tekislikda yotmagan to'rtta nuqta berilgan. Ularning uchtasidan o'tuvchi nechta tekislik o'tkazish mumkin?

8. A, B, C nuqtalar berilgan ikkita tekisliklarning har birida yotadi. Bu nuqtalarning bitta tekislikda yotishini isbotlang.

9. a to'g'ri chiziq bo'ylab kesishuvchi ikkita tekislik berilgan. b to'g'ri chiziq ulardan birida yotadi va ikkinchisini kesib o'tadi. a va b to'g'ri chiziqlarning kesishishini isbotlang.

10. Uchta tekislikning har ikkitasi o'zaro kesishadi. Tekisliklarning kesishish to'g'ri chiziqlaridan ikkitasi biror nuqtada kesishsa, uchinchi kesishish chizig'i ham bu nuqtadan o'tishini isbotlang.

11. Agar fazodagi to‘rtburchakning diagonallari kesishsa, unda uning uchlari bitta tekislikda yotishini isbotlang.

12. $ABCD$ parallelogrammning A va C uchlari orqali parallelogramm tekisligida yotmaydigan A_1C va C_1C parallel to‘g‘ri chiziqlar o‘tkazildi. A_1AB va C_1CD tekisliklarining parallelligini isbotlang.

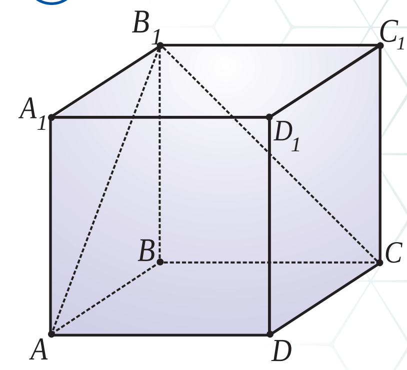
13. Trapetsiyaning asoslari qandaydir tekislikka parallel. Trapetsiyaning tomonlari ham shu tekislikka parallel bo‘lishi mumkinmi? Javobingizni asoslang.

14. Kvadratning A va B uchlari va diagonallari kesishish nuqtasi – O ning proyeksiyalari A_1, B_1 va O_1 nuqtalardan iborat ekani ma’lum. $ABCD$ kvadratining proyeksiyasini yasang.

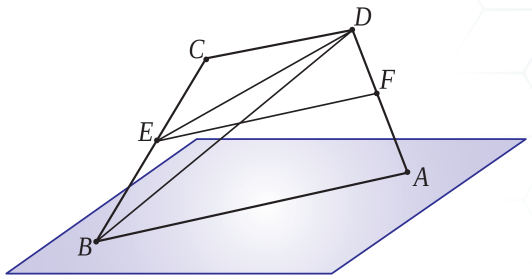
15. 2-rasmga ko‘ra berilgan to‘g‘ri chiziq va tekislikning o‘zaro qanday joylashganini aniqlang va ularning orasiga mos (⊗ – kesishish, // – parallellik, ∸ – ayqashlik va ⊂ – tegishli) belgilarni qo‘ying.

To‘g‘ri chiziqlar/ tekisliklar	AA_1	BC_1	CC_1	CB_1	AB_1
ADD_1					
AA_1B_1					
ABD					
AA_1D					
BCD					

2



3

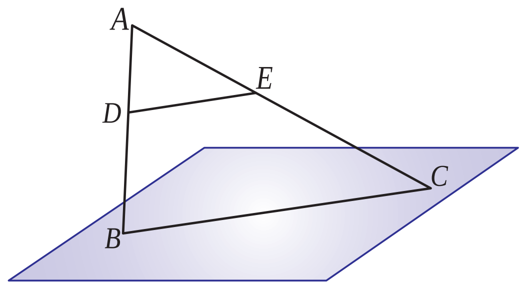


16. 3-rasmdagi $ABCD$ trapetsiyaning AB asosi α tekislikda yotadi, CD asosi esa α tekislikda yotmaydi. Berilgan to‘g‘ri chiziqlar va α tekislikning o‘zaro joylashishini ifodalaydigan jumlalarni to‘ldiring:

a) DB to‘g‘ri chiziq berilgan tekislik bilan umumiy nuqtaga ega bo‘lgani uchun u α tekislik bilan ________________;

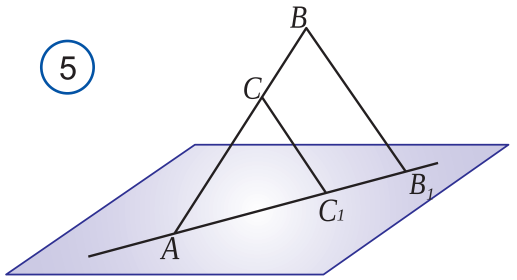
b) trapetsiyaning EF o‘rta chizig‘i uning asoslariga parallel bo‘lgani uchun α tekislikka ________________ bo‘ladi.

4

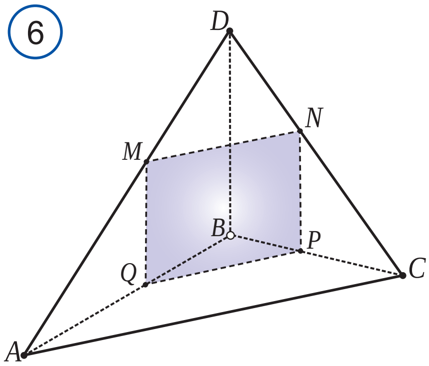


17. 4-rasmdagi ABC uchburchakning AB va AC tomonlarida D va E nuqtalar shunday belgilanganki, $DE = 5\ cm$ va $AD : BD = 3 : 4$. B va C nuqtalardan DE kesmaga parallel α tekislik o‘tkazilgan. BC tomon uzunligini toping.

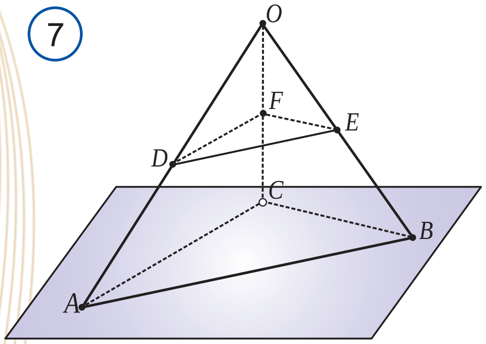
5



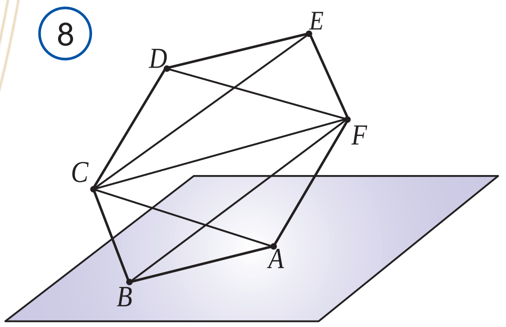
6



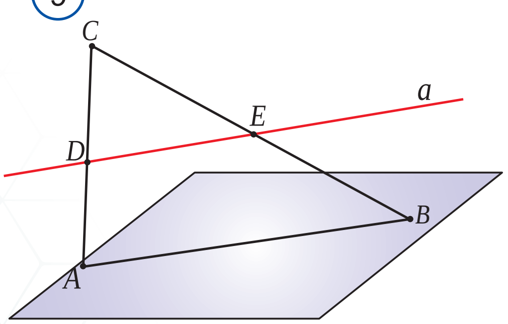
7



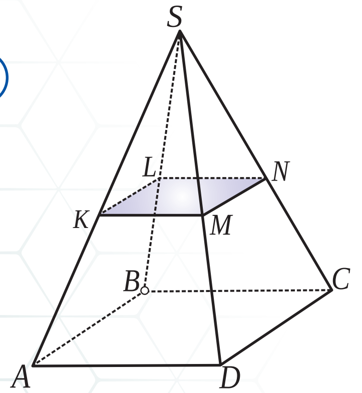
8



9



10



18. 5-rasmdagi C nuqta AB kesmaga tegishli. A nuqtadan tekislik, B va C nuqtalardan esa parallel to‘g‘ri chiziqlar o‘tkazilgan. Bu to‘g‘ri chiziqlar tekislikni mos ravishda: B_1 va C_1 nuqtalarda kesib o‘tadi. Agar $AC : BC = 3 : 2$ va $BB_1 = 9$ bo‘lsa, CC_1 kesma uzunligini toping.

19. a va b parallel to‘g‘ri chiziqlar ikkita parallel tekislikdan birini mos ravishda A_1 va B_1 nuqtalarda, ikkinchisini esa A_2 va B_2 nuqtalarda kesib o‘tadi: a) A_1B_1 ning A_2B_2 ga parallel ekanini isbotlang; b) $\angle A_1A_2B_2 = 140°$ bo‘lsa, $\angle A_2A_1B_1$ ni toping.

20. α tekislik BAC burchak tomonlarini A_1 va B_1 nuqtalarda, unga parallel β tekislik esa A_2 va B_2 nuqtalarda kesadi. $A_1B_1 = 8$, $AA_1 = 12$, $AA_2 = 0{,}5\ A_1A_2$ bo‘lsa, A_2B_2 va AA_2 ni toping.

21. D nuqta ABC uchburchak tekisligida yotmaydi. K, Z va M nuqtalar – mos ravishda DA, DB, va DC kesmalarning o‘rtalari. ABC va KZM tekisliklarning fazoda o‘zaro joylashuvini aniqlang.

22. 6-rasmdagi M, N, P, Q nuqtalar – mos ravishda AB, CD, BC, AB kesmalarning o‘rtasi. Agar $AC = 10\ cm$, $BD = 18\ cm$ bo‘lsa, $MNPQ$ to‘rtburchak perimetrini toping.

23. 7-rasmdagi O nuqta ABC uchburchak tekisligida yotmaydi. D, E, F nuqtalar – mos ravishda AO, BO, CO kesmalarning o‘rtasi. Agar ABC uchburchak yuzi 380 cm^2 bo‘lsa, DEF uchburchak yuzini toping.

24. 8-rasmdagi $ABCDEF$ muntazam oltiburchakning AB tomoni α tekislikda yotadi. Berilgan α tekislik bilan DE, CD va EC to‘g‘ri chiziqlarning o‘zaro joylashishini aniqlang.

25. 9-rasmdagi A va B nuqtalar α tekislikda yotadi. C nuqta esa α tekislikda yotmaydi. AC va BC kesmalar o‘rtasidan a to‘g‘ri chiziq o‘tkazilgan. Bu to‘g‘ri chiziq α tekislikka parallel ekanini isbotlang.

26. 10-rasmdagi $SABCD$ muntazam piramida asosiga parallel $KLNM$ tekislik bilan kesilgan.

1) BS va CS; AB va KL; CS va KL to‘g‘ri chiziqlar;
2) ASD va DSC; ABD va ASC tekisliklarning o‘zaro joylashuvini aniqlang.

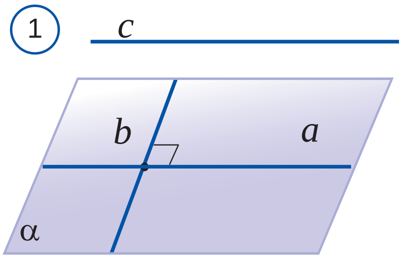
IV BOB

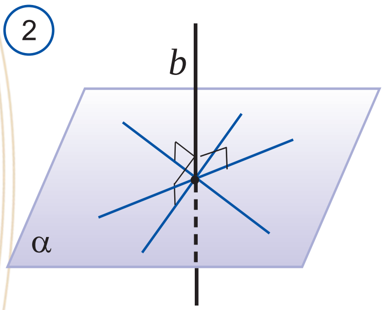
FAZODA TO‘G‘RI CHIZIQ VA TEKISLIKLARNING PERPENDIKULYARLIGI

Bu bobni o‘rganish natijasida quyidagi bilim va ko‘nikmalarga ega bo‘lasiz:

- tekislikka perpendikulyar to‘g‘ri chiziqlarni tasavvur qilish, ularning xossalarini, to‘g‘ri chiziqning tekislikka perpendikulyarlik alomatini bilish va ularni masalalar yechishda qo‘llay olish;
- umumlashgan Pifagor teoremasini bilish va uni masalalar yechishda qo‘llay olish;
- fazoda tekislikka tushirilgan perpendikulyar va og‘ma haqida tushunchaga ega bo‘lish va ularni amaliy masalalar yechishda qo‘llay olish;
- nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha va tekislikkacha, to‘g‘ri chiziqdan unga parallel bo‘lgan tekislikkacha bo‘lgan masofalarni aniqlab topa olish;
- parallel tekisliklar orasidagi, ayqash to‘g‘ri chiziqlar orasidagi masofalarni aniqlab topa olish;
- uch perpendikulyar haqidagi teoremani bilish va uni masalalar yechishda qo‘llay olish;
- tekisliklar orasidagi burchakni chizmada tasvirlay olish va hisoblay olish;
- fazoda perpendikulyar tekisliklar haqidagi teoremalarni va tekisliklarning perpendikulyarlik alomatlarini masalalar yechishda qo‘llay olish;
- ortogonal proyeksiya va ulardan texnikada foydalanish haqida ma’lumotga ega bo‘lish;
- ko‘pburchakning ortogonal proyeksiyasining yuzini topa olish.

17 FAZODA PERPENDIKULYAR TO‘G‘RI CHIZIQ VA TEKISLIKLAR





Eslatib o‘tamiz, fazoda berilgan ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak 90° ga teng bo‘lsa, ular o‘zaro *perpendikulyar to‘g‘ri chiziqlar* deyiladi.

Perpendikulyar to‘g‘ri chiziqlar kesishuvchi va ayqash bo‘lishi mumkin. 1-rasmda a va b perpendikulyar to‘g‘ri chiziqlar kesishuvchi, b va c perpendikulyar to‘g‘ri chiziqlar esa ayqashdir. a va b to‘g‘ri chiziqlarning perpendikulyarligi $a \perp b$ tarzda yoziladi.

Tekislikdagi ixtiyoriy to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri chiziq *tekislikka perpendikulyar to‘g‘ri chiziq* deb ataladi *(2-rasm)*.

α tekislik va b to‘g‘ri chiziqlarning perpendikulyarligi $b \perp \alpha$ tarzda yoziladi.

Tevarak-atrofdan o‘zaro perpendikulyar shakllarga ko‘plab misollar keltirish mumkin. Odatda uy devorlari va ustunlari, minoralar, chiroq ustunlari va simyog‘ochlar yerga nisbatan tik, ya’ni perpendikulyar qilib quriladi *(3-rasm)*.

Xonadagi shkaf, stol va muzlatkichlar ham polga nisbatan tik qilib o‘rnatiladi.

3

Endi fazodagi perpendikulyar to‘g‘ri chiziqlarning ba’zi xossalari haqida to‘xtalamiz.

Agar a to‘g‘ri chiziq α tekislikda yotsa yoki unga parallel bo‘lsa, unda α tekislikda yotgan, a to‘g‘ri chiziqqa parallel boshqa b to‘g‘ri chiziq ham topiladi.

Tekislikka perpendikulyar to‘g‘ri chiziq bu tekislikni albatta kesib o‘tadi.

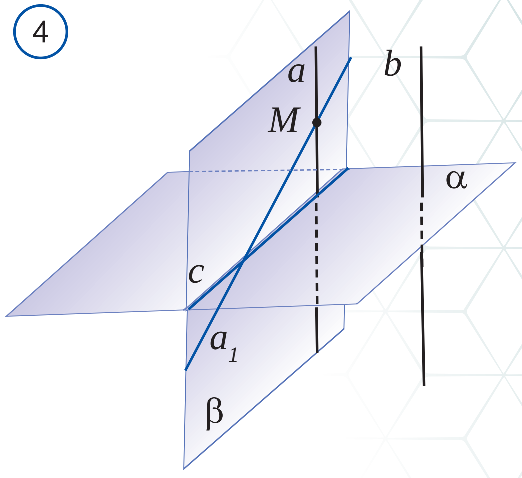
4.1-teorema. ***Agar ikki to'g'ri chiziq tekislikka perpendikulyar bo'lsa, ular o'zaro parallel bo'ladi.***

Isbot. a va b to'g'ri chiziqlar α tekislikka perpendikulyar bo'lsin *(4-rasm)*. Bu to'g'ri chiziqlarning o'zaro parallel ekanini isbotlaymiz.

a to'g'ri chiziqning biror M nuqtasidan b to'g'ri chiziqqa parallel a_1 to'g'ri chiziqni o'tkazamiz.

U holda $a_1 \perp \alpha$ bo'ladi.

a va a_1 to'g'ri chiziqlarning ustma-ust tushishini ko'rsatamiz. Aytaylik, unday bo'lmasin, a va a_1 to'g'ri chiziqlar ustma-ust tushmasin. Unda a va a_1 to'g'ri chiziqlar yotgan β tekislikdagi M nuqtadan α va β tekisliklarning kesishish chizig'i – c to'g'ri chiziqqa ikkita – a va a_1 perpendikulyar to'g'ri chiziqlar o'tadi. Bunday bo'lishi esa imkonsiz. Ziddiyat farazimizning noto'g'ri ekanini ko'rsatadi.



Demak, a va b to'g'ri chiziqlar o'zaro parallel.

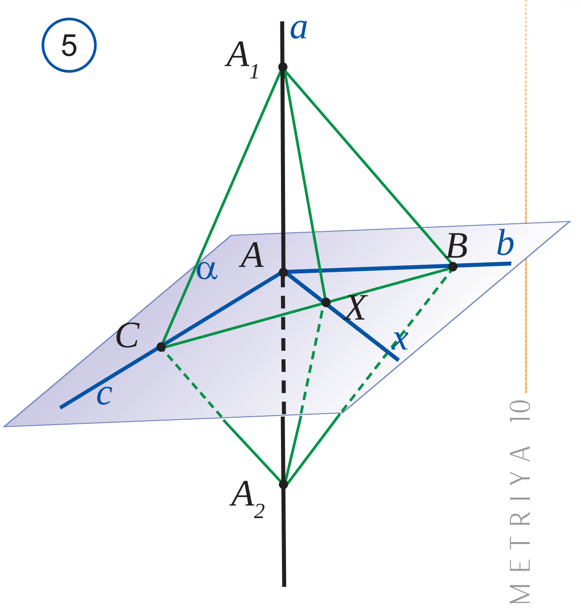
Endi to'g'ri chiziqning tekislikka perpendikulyarlik alomatini keltiramiz.

4.2-teorema. ***Agar to'g'ri chiziq tekislikda yotgan ikki kesishuvchi to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lsa, u tekislikka ham perpendikulyar bo'ladi.***

Isbot. a to'g'ri chiziq α tekislikda yotgan ikkita – b va c to'g'ri chiziqlarga perpendikulyar bo'lsin. U holda a to'g'ri chiziq b va c to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasi A orqali o'tadi *(5-rasm)*. a to'g'ri chiziqning α tekislikka perpendikulyar bo'lishini isbotlaymiz.

α tekislikning A nuqtasi orqali ixtiyoriy x to'g'ri chiziq o'tkazamiz va uning a to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lishini ko'rsatamiz. α tekislikda A nuqtadan o'tmaydigan, b, c va x to'g'ri chiziqlarni kesib o'tadigan x to'g'ri chiziqni o'tkazamiz. Mazkur kesishish mos ravishda B, C va X nuqtalar bo'lsin.

a to'g'ri chiziqda A nuqtaning turli tomonlarida AA_1 va AA_2 teng kesmalarni qo'yamiz. Hosil bo'lgan A_1BA_2 va A_1CA_2 uchburchaklar teng yonli bo'ladi (buni mustaqil asoslang). Bundan A_1BC va A_2BC uchburchaklar teng bo'lishi kelib chiqadi (buni ham mustaqil asoslang). O'z navbatida, bundan A_1BX va A_2BX burchaklarning teng bo'lishi va nihoyat A_1BX va A_2BX uchburchaklarning ham teng bo'lishi kelib chiqadi (buni ham mustaqil asoslang).



Xususan, $A_1X = A_2X$ bo'ladi. Unda A_1XA_2 uchburchak teng yonli bo'ladi. Shuning uchun uning XA medianasi uning balandligi ham bo'ladi. Bu esa, o'z navbatida, x to'g'ri chiziqning a to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lishini ko'rsatadi.

Demak, a to‘g‘ri chiziq α tekislikka perpendikulyar.

Bu teoremadan natija sifatida quyidagi xossalar kelib chiqadi. Ularni mustaqil asoslang.

4.3-teorema. ***Agar to‘g‘ri chiziq ikkita parallel tekislikning biriga perpendikulyar bo‘lsa, ikkinchisiga ham perpendikulyar bo‘ladi.***

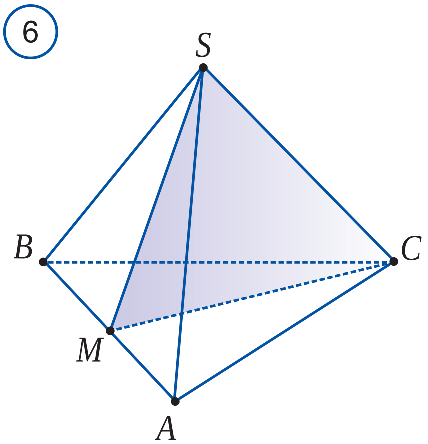
4.4-teorema. ***Agar ikkita tekislik bitta to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar bo‘lsa, ular parallel bo‘ladi.***

Quyida “mavjudlik va yagonalik teoremalari” deb ataluvchi xossalarni ham mustaqil isbotlash uchun keltiramiz.

4.5-teorema. ***Fazoning ixtiyoriy nuqtasidan berilgan to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar yagona tekislik o‘tkazish mumkin.***

4.6-teorema. ***Fazoning ixtiyoriy nuqtasidan berilgan tekislikka perpendikulyar yagona to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin.***

6



1-masala. $SABC$ muntazam uchburchakli piramidada M nuqta – AB qirraning o‘rtasi *(6-rasm)*. AB to‘g‘ri chiziqning SMC tekislikka perpendikulyar ekanini isbotlang.

Isbot. Shartga ko‘ra, $SABC$ piramida muntazam bo‘lgani uchun uning asosi teng tomonli, yon yoqlari esa teng yonli uchburchaklardan iborat bo‘ladi.

U holda ABC va ABS uchburchaklarning CM va SM medianalari ularning balandliklari ham bo‘ladi.

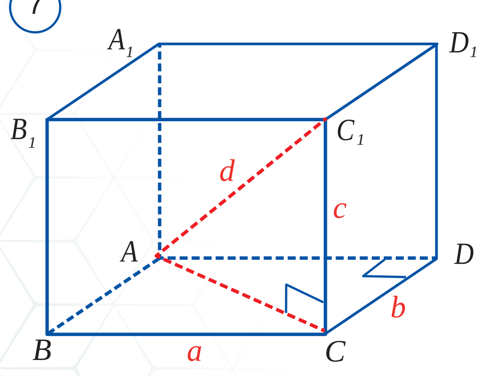
Unda AB to‘g‘ri chiziq ham CM, ham SM to‘g‘ri chiziqlarga perpendikulyar bo‘ladi.

Natijada AB to‘g‘ri chiziq SMC tekislikda yotuvchi ikkita SM va CM to‘g‘ri chiziqlariga perpendikulyar ekanini aniqladik.

Bu esa, 4.2-teoremaga ko‘ra, AB to‘g‘ri chiziqning SMC tekislikka perpendikulyar ekanini anglatadi.

Endi to‘g‘ri burchakli parallelepiped uchun umumlashgan Pifagor teoremasini isbotlaymiz. Buning uchun III bo‘limda berilgan parallelepipedning xossalarini eslashga to‘g‘ri keladi.

7



$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$

4.7-teorema. ***(umumlashgan Pifagor teoremasi). To‘g‘ri burchakli parallelepiped diagonalining kvadrati uning uchta o‘lchami kvadratlari yig‘indisiga teng.***

Isbot. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ to‘g‘ri burchakli parallelepiped bo‘lsin *(7-rasm)*.

CC_1 qirra $ABCD$ yoqqa perpendikulyar bo‘lgani uchun ACC_1 to‘g‘ri burchakli uchburchak bo‘ladi.

Unda Pifagor teoremasiga ko‘ra,

$A_1C^2 = CC_1^2 + AC^2$. (1)

ADC ham to‘g‘ri burchakli uchburchak. (Nega?)

Yana Pifagor teoremasini qo‘llasak:

$AC^2 = AD^2 + DC^2$. (2)

Unda (1) va (2) ga ko‘ra:

$A_1C^2 = CC_1^2 + AC^2 = CC_1^2 + AD^2 + DC^2$.

$AD = BC$ bo‘lgani uchun

$A_1C^2 = CC_1^2 + BC^2 + DC^2$.

Agar to‘g‘ri burchakli parallelepipedning diagonalini d, uning uchta o‘lchamini a, b va c harflari bilan belgilasak, umumlashgan Pifagor teoremasini quyidagicha yozish mumkin:

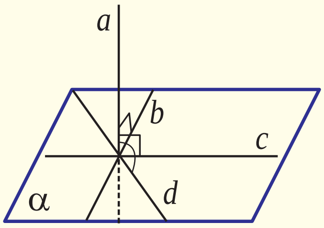
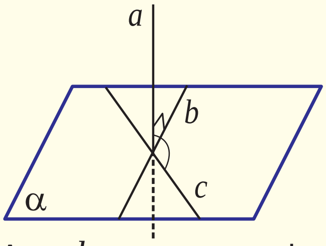
$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Mavzuga doir savollar va mashqlar

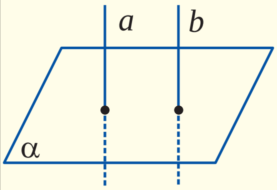
1. *Fazoda qanday to‘g‘ri chiziqlar o‘zaro perpendikulyar bo‘ladi?*
2. *Ayqash to‘g‘ri chiziqlar perpendikulyar bo‘lishi mumkinmi?*
3. *Yuqoridagi rasmda qaysi shahar tasvirlangan? Unda siz qanday to‘g‘ri chiziqlarni va tekisliklarni ko‘ryapsiz? Rasmdan parallel, perpendikulyar va ayqash to‘g‘ri chiziqlarga misollar keltiring.*
4. *Qanday to‘g‘ri chiziq tekislikka perpendikulyar deb ataladi?*
5. *Bitta tekislikka perpendikulyar to‘g‘ri chiziqlarning xossalarini ayting.*
6. *To‘g‘ri chiziq va tekisliklarning perpendikulyarlik alomatini ayting.*
7. *Parallel tekisliklarning biriga perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri chiziqning xossasini ayting.*
8. *Bitta to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar bo‘lgan tekisliklarning xossasini ayting.*
9. *Umumlashgan Pifagor teoremasi nima haqida?*

Amaliy mashq va tatbiq

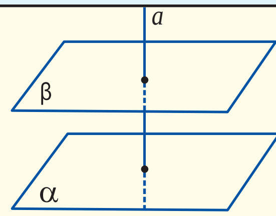
17.1. Jadvalda 17-mavzuning asosiy tayanch ma’lumotlari keltirilgan. Ularni sinchiklab o‘rganib chiqing va izohlang.

To‘g‘ri chiziqning tekislikka perpendikulyarligi	
Ta’rifi	**Alomati**
 Agar ixtiyoriy $b \in \alpha$ uchun $a \perp b$ bo‘lsa, $a \perp \alpha$ deb ataladi.	 Agar $b \in \alpha$, $c \in \alpha$ uchun $a \perp b$, $a \perp c$ bo‘lsa, $a \perp \alpha$ bo‘ladi.

Tekisliklarning parallelligi va perpendikulyarligi orasidagi bog‘lanishlar

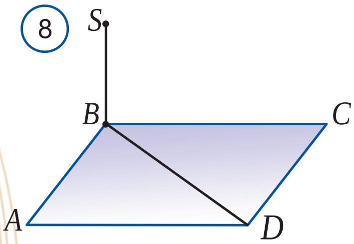


Agar $a \parallel b$, $\alpha \perp a$ bo‘lsa, $\alpha \perp b$ bo‘ladi. Agar $\alpha \perp a$, $b \perp \alpha$ bo‘lsa, $a \parallel b$ bo‘ladi.

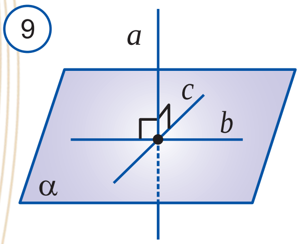


Agar $\alpha \parallel \beta$, $a \perp \beta$ bo‘lsa, $a \perp \alpha$ bo‘ladi. Agar $\alpha \perp a$, $\beta \perp a$ bo‘lsa, $\alpha \parallel \beta$ bo‘ladi.

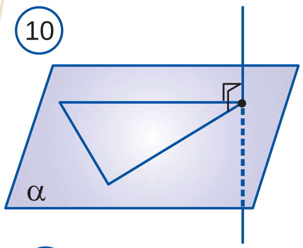
8



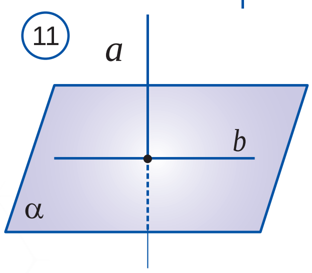
9



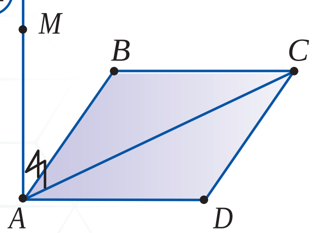
10



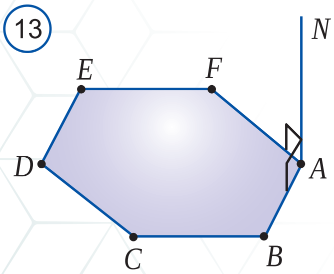
11



12



13



17.2. SB kesma $ABCD$ parallelogramm tekisligiga perpendikulyar *(8-rasm)*. SB kesma perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlarni ayting.

17.3. 9-rasmda α tekislikda yotgan b va c to‘g‘ri chiziqlarga perpendikulyar bo‘lgan a to‘g‘ri chiziq tasvirlangan. $a \perp \alpha$ ekanini asoslang.

17.4. 10-rasmdagi to‘g‘ri chiziq uchburchakning ikki tomoniga perpendikulyar. Uning uchburchak tekisligiga perpendikulyar ekanini asoslang.

17.5. 11-rasmda $a \perp \alpha$. a to‘g‘ri chiziqning α tekislikda yotgan b to‘g‘ri chiziqqa ham perpendikulyar bo‘lishini asoslang.

17.6. 12-rasmda $ABCD$ to‘g‘ri to‘rtburchakning A uchiga MA perpendikulyar tushirilgan. Agar $MA \perp AB$ va $MA \perp AC$ bo‘lsa, $MA \perp AD$ bo‘lishini asoslang.

17.7. 13-rasmda $ABCDEF$ oltiburchakning A uchiga NA perpendikulyar tushirilgan. Agar $NA \perp AB$ va $NA \perp AF$ bo‘lsa, a) $NA \perp AC$; b) $NA \perp AD$; c) $NA \perp AE$ bo‘lishini asoslang.

17.8. ABC uchburchakning A uchidan uning AB va AC tomonlariga perpendikulyar bo‘lgan AK to‘g‘ri chiziq o‘tkazilgan. Bu to‘g‘ri chiziq uchburchakning A nuqtasidan tushirilgan balandligi, medianasi va bissektrisasiga perpendikulyar bo‘lishini asoslang.

17.9. l to‘g‘ri chiziq ABC uchburchakning AB va AC tomonlariga perpendikulyar. l to‘g‘ri chiziq va ABC uchburchak tekisligining o‘zaro joylashishini aniqlang.

A) l to‘g‘ri chiziq ABC tekislikni kesib o‘tadi, lekin unga perpendikulyar emas.

B) l to‘g‘ri chiziq ABC tekislikka tegishli.

C) l to‘g‘ri chiziq ABC tekislikka perpendikulyar.

D) l to‘g‘ri chiziq ABC tekislikka parallel.

17.10. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ to‘g‘ri burchakli parallelepiped berilgan. a) DD_1 to‘g‘ri chiziq $ABCD$ yoqqa; b) AD to‘g‘ri chiziq esa DD_1CC_1 yoqqa perpendikulyar bo‘lishini asoslang.

17.11. 14-rasmda $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kub berilgan. a) AB_1D – to‘g‘ri burchakli uchburchak; b) AB_1C_1D – to‘g‘ri to‘rtburchak ekanini asoslang.

17.12. CM to‘g‘ri chiziq ABC uchburchak tekisligiga perpendikulyar ($\angle C = 90°$). a) BC to‘g‘ri chiziq AC va CM to‘g‘ri chiziqlar yotgan tekislikka perpendikulyar; b) AC to‘g‘ri chiziq

BC va CM to‘g‘ri chiziqlar yotgan tekislikka perpendikulyar ekanini isbotlang.

17.13. CD to‘g‘ri chiziq ABC uchburchakning BC tomoniga perpendikulyar ($\angle C = 90°$). O‘zaro perpendikulyar to‘g‘ri chiziq va tekisliklarni aniqlang va izohlang.

17.14. 15-rasmdagi ABC va DBC to‘g‘ri burchakli uchburchaklar turli tekisliklarda yotibdi va BC tomon bo‘yicha kesishadi. Qaysi to‘g‘ri chiziq va tekisliklar o‘zaro perpendikulyar bo‘ladi? Javobingizni asoslang.

17.15. KO to‘g‘ri chiziq $ABCD$ parallelogramm tekisligiga perpendikulyar *(16-rasm)*. KO to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar to‘g‘ri chiziqni aniqlang.

17.16. MB to‘g‘ri chiziq ABC uchburchakning AB va BC tomonlariga perpendikulyar *(17-rasm)*. X nuqta AC tomonning ixtiyoriy nuqtasi bo‘lsa, MBX uchburchak turini aniqlang.

17.17. $ABCD$ to‘rtburchakning tomonlari $A_1B_1C_1D_1$ to‘g‘ri to‘rtburchakning tomonlariga mos ravishda parallel. $ABCD$ to‘g‘ri to‘rtburchak ekanini isbotlang.

17.18. α tekislik m to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar, m to‘g‘ri chiziq esa n to‘g‘ri chiziqqa parallel. α tekislikning n to‘g‘ri chiziqqa ham perpendikulyar bo‘lishini isbotlang.

17.19. $ABCD$ trapetsiyaning AB asosi yotgan to‘g‘ri chiziq α tekislikka perpendikulyar. Bu trapetsiyaning CD asosi yotgan to‘g‘ri chiziq ham α tekislikka perpendikulyar bo‘lishini isbotlang.

17.20. Fazodagi to‘g‘ri chiziqning istalgan nuqtasidan unga perpendikulyar to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkinligini isbotlang.

17.21. Fazodagi to‘g‘ri chiziqning istalgan nuqtasidan unga ikkita turli perpendikulyar to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkinligini isbotlang.

17.22. AB, AC, AD to‘g‘ri chiziqlar juft-jufti bilan o‘zaro perpendikulyar *(18-rasm)*. Agar

1) $AB = 3$ cm, $BC = 7$ cm, $AD = 1{,}5$ cm;

2) $BD = 9$ cm, $BC = 16$ cm, $AD = 5$ cm;

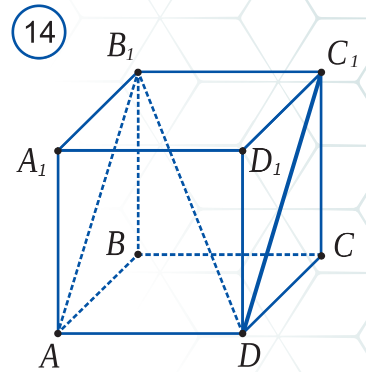
3) $AB = b$ cm, $BC = a$ cm, $AD = d$ cm;

4) $BD = c$ cm, $BC = a$ cm, $AD = d$ cm bo‘lsa, CD kesma uzunligini toping.

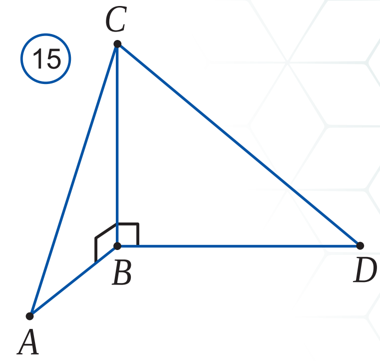
17.23. $ABCD$ to‘g‘ri to‘rtburchakning A uchida uning tekisligiga perpendikulyar AK to‘g‘ri chiziq o‘tkazilgan. K nuqtadan to‘g‘ri to‘rtburchakning boshqa uchlarigacha masofa 6 m, 7 m, 9 m. AK masofani toping.

17.24. A va B nuqtalardan α tekislikka perpendikulyar va uni mos ravishda C va D nuqtalarda kesuvchi to‘g‘ri chiziqlar o‘tkazilgan. Agar $AC = 3$ m, $BD = 2$ m va $CD = 2{,}4$ m bo‘lsa va AB kesma α tekislikni kesib o‘tmasa, A va B nuqtalar orasidagi masofani toping.

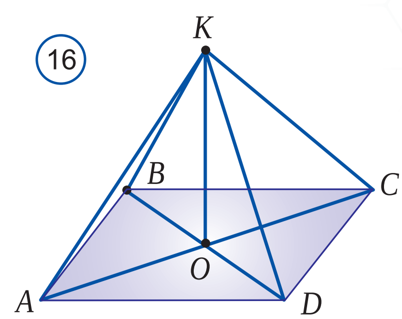
14



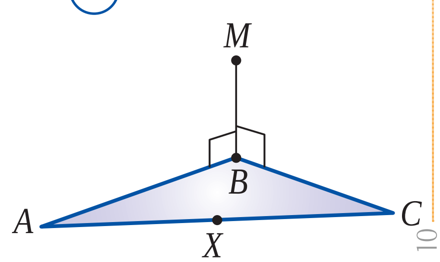
15



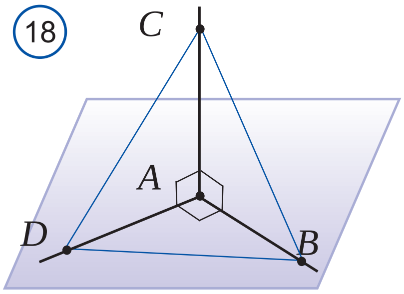
16



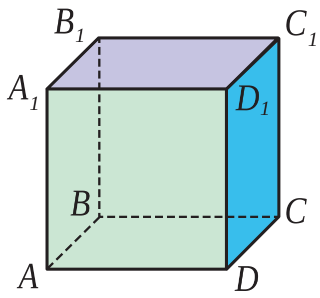
17



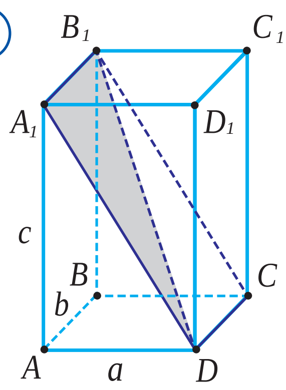
18



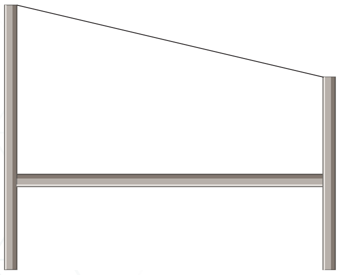
19



20



21



22

17.25. 19-rasmda tasvirlangan kubning qirrasi a) 4 *cm;* b) 8 *cm* bo‘lsa, AB_1C uchburchak perimetrini va DAC_1 uchburchak yuzini toping.

17.26. CM to‘g‘ri chiziq tomoni a ga teng bo‘lgan $ABCD$ kvadrat tekisligiga perpendikulyar va $CM = b$. Agar a) $a = 2$ *cm*, $b = 1$ *cm;* b) $a = 3$ *cm*, $b = 4$ *cm* bo‘lsa, M nuqtadan kvadrat uchlarigacha bo‘lgan masofalarni toping.

17.27. ABC to‘g‘ri burchakli uchburchakning C uchi orqali uning tekisligiga CD perpendikulyar tushirilgan. Agar a) $AC = 6$ *cm*, $BC = 8$ *cm*, $CD = 12$ *cm;* b) $AC = 12$ *cm*, $BC = 16$ *cm*, $CD = 24$ *cm* bo‘lsa, D nuqtadan uchburchakning gipotenuzasi o‘rtasigacha bo‘lgan masofani toping.

17.28. 20-rasmdagi $ABCDA_1B_1C_1D_1$ to‘g‘ri burchakli parallelepipedning o‘lchamlari a) $a = 12$ *cm*, $b = 8$ *cm*, $c = 16$ *cm;* b) $a = 5$ *cm*, $b = 10$ *cm*, $c = 12$ *cm* bo‘lsa, A_1B_1D uchburchak va A_1B_1CD to‘rtburchak yuzini toping.

17.29. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ to‘g‘ri burchakli parallelepipedning o‘lchamlari a) $a = 12$ *cm*, $b = 8$ *cm*, $c = 16$ *cm;* b) $a = 5$ *cm*, $b = 10$ *cm*, $c = 12$ *cm;* d) $a = 2$ *m*, $b = 12$ *m*, $c = 6$ *m* bo‘lsa, uning diagonalini toping.

17.30. Muntazam to‘g‘ri burchakli parallelepiped asosining tomoni 4 *cm* va balandligi 5 *cm* bo‘lsa, uning diagonalini toping.

17.31. To‘g‘ri burchakli parallelepiped asosining tomonlari 12 *cm* va 8 *cm* hamda diagonali 16 *cm* bo‘lsa, uning balandligini toping.

17.32. ABC to‘g‘ri burchakli uchburchak tekisligiga uning C to‘g‘ri burchagi uchi orqali perpendikulyar tushirilgan. $AD = a$, $BD = b$, $CD = c$ bo‘lsa, ABC uchburchakning CM medianasini toping.

17.33. $ABCD$ to‘g‘ri to‘rtburchak tekisligiga uning A uchi orqali AE perpendikulyar tushirilgan. E nuqtadan to‘g‘ri to‘rtburchak qolgan uchlarigacha bo‘lgan masofalar a, b va c $(a < c, b < c)$ bo‘lsa, AE kesma va to‘g‘ri to‘rtburchak tomonlari uzunliklarini toping.

17.34. ABC uchburchakda $\angle C = 90°$ va $\angle A = 30°$. Uchburchak tekisligiga uning C uchi orqali CM perpendikulyar tushirilgan. $AC = 18$ *cm*, $CM = 12$ *cm* bo‘lsa, M nuqtadan AB to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofani toping.

17.35. Bir-biriga parallel bo‘lgan ustunlarning yuqori uchlari orasidagi masofa 3,4 *m* *(21-rasm)*. Ustunlar bir-biri bilan gorizontal to‘sin yordamida bog‘langan. Birinchi ustun balandligi 5,6 *m*, ikkinchi ustun balandligi 3,9 *m* bo‘lsa, to‘sin uzunligini toping.

17.36. Uzunligi 15 *m* bo‘lgan telefon simi balandligi 6 *m* bo‘lgan simyog‘ochdan balandligi 20 *m* bo‘lgan uyga tarang tortilgan *(22-rasm)*. Ustun va uy orasidagi masofani toping.

18 FAZODA PERPENDIKULYAR, OG‘MA VA MASOFA

α tekislikka unda yotmagan A nuqtadan perpendikulyar a to‘g‘ri chiziq o‘tkazamiz *(1-rasm)*. Bu to‘g‘ri chiziq tekislikni B nuqtada kesib o‘tsin. Shuningdek, tekislikning biror C nuqtasini A nuqta bilan tutashtiramiz. Natijada hosil bo‘lgan

AB kesma *tekislikka tushirilgan perpendikulyar*,

AC kesma *tekislikka tushirilgan og‘ma,*

BC kesma *og‘maning tekislikdagi proyeksiyasi,*

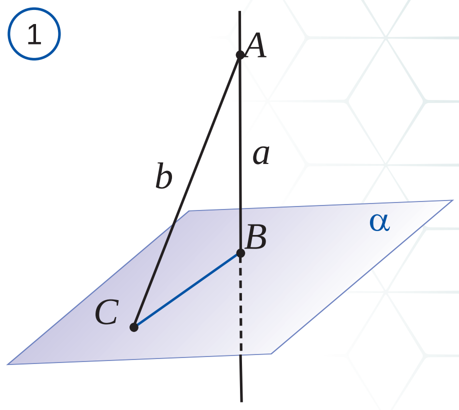
B nuqta *perpendikulyarning asosi*,

C nuqta *og‘maning asosi* deb ataladi.

ABC uchburchak to‘g‘ri burchakli va unda AB katet, AC esa gipotenuza bo‘lgani uchun har doim $AB < AC$ bo‘ladi.

Demak, biror nuqtadan tekislikka tushirilgan perpendikulyarning uzunligi shu nuqtadan o‘tkazilgan ixtiyoriy og‘maning uzunligidan kichik bo‘ladi.

Biror nuqtadan tekislikka tushirilgan perpendikulyar, og‘malar va ularning proyeksiyalari haqida quyidagi teorema o‘rinli bo‘ladi:

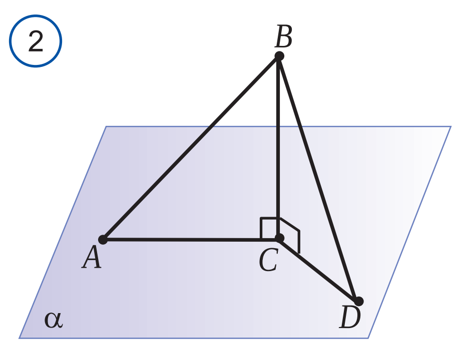


4.8-teorema. Agar biror nuqtadan tekislikka perpendikulyar va og‘malar tushirilgan bo‘lsa, u holda: *(2-rasm)*

a) perpendikulyar uzunligi har qanday og‘ma uzunligidan kichik bo‘ladi;

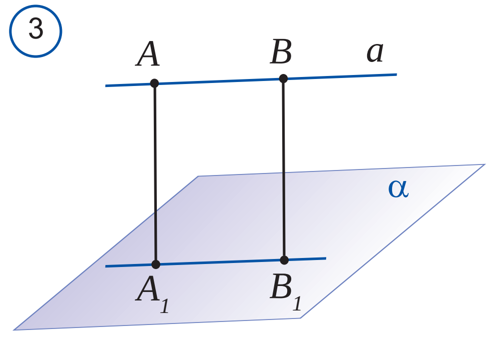
b) qaysi og‘maning proyeksiyasi uzun bo‘lsa, o‘sha og‘ma uzun bo‘ladi;

c) qaysi og‘ma uzun bo‘lsa, o‘sha og‘maning proyeksiyasi uzun bo‘ladi.



Endi parallel to‘g‘ri chiziqlarning quyidagi teormasini isbotlaylik.

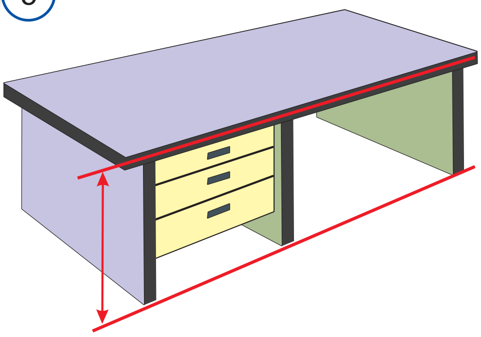
4.9-teorema. Agar to‘g‘ri chiziq tekislikka parallel bo‘lsa, u holda uning barcha nuqtalari tekislikdan baravar masofada bo‘ladi.



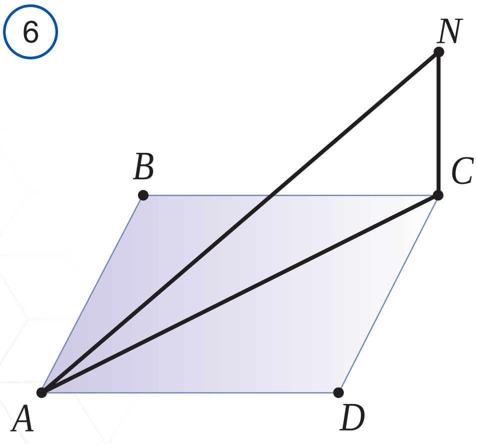
Isbot. a – berilgan to‘g‘ri chiziq va α esa berilgan tekislik bo‘lsin *(3-rasm)*. a to‘g‘ri chiziqda ikkita A va B nuqtani olamiz. Ulardan α – tekislikka perpendikulyarlar tushiramiz. Bu perpendikulyarlar asosi mos ravishda A va B nuqtalar bo‘lsin. Unda A va B nuqtalardan α tekislikkacha

4

5



6



bo‘lgan masofalar mos ravishda AA_1 va BB_1 kesmalar bo‘ladi. 3.6-teoremaga ko‘ra, AA_1 va BB_1 kesmalar parallel bo‘ladi.

Demak, ular bitta tekislikda yotadi. Bu tekislik α tekislikni A_1B_1 to‘g‘ri chiziq bo‘ylab kesadi.

a to‘g‘ri chiziq A_1B_1 to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘ladi, chunki u α tekislikni kesib o‘tmaydi.

Shunday qilib, ABA_1B_1 to‘rtburchakning qarama-qarshi tomonlari parallel.

Demak, u parallelogramm. Bu parallelogrammda $AA_1 = BB_1$.

Nuqtadan tekislikkacha bo‘lgan masofa deb nuqtadan tekislikka tushirilgan perpendikulyar uzunligiga aytiladi.

Toshkentdagi soat minorasining balandligi 30 m deyilganda minoraning uchidan uning asos tekisligiga tushirilgan perpendikulyar uzunligi tushuniladi *(4-rasm)*.

To‘g‘ri chiziqdan unga parallel bo‘lgan tekislikkacha bo‘lgan masofa deb to‘g‘ri chiziqning ixtiyoriy nuqtasidan shu tekislikkacha bo‘lgan masofaga aytiladi.

Tekislikning ixtiyoriy ikki nuqtasidan unga parallel bo‘lgan tekislikkacha bo‘lgan masofalar bir xil bo‘ladi.

Ikki parallel tekislik orasidagi masofa deb bir tekislikning ixtiyoriy nuqtasidan ikkinchi tekislikkacha bo‘lgan masofaga aytiladi.

5-rasmda tasvirlangan stolning balandligi pol va stol tekisliklari orasidagi masofaga teng bo‘ladi.

1-masala. $ABCD$ kvadratning C uchidan u yotgan tekislikka perpendikulyar CN chiqarilgan *(6-rasm)*. Agar $CN = 6$ cm, kvadrat tomoni $4\sqrt{2}$ ga teng bo‘lsa, N nuqtadan kvadratning A uchigacha bo‘lgan masofani toping.

Yechish. Shartga ko‘ra, berilgan kvadratning tomoni $AD = 4\sqrt{2}$.

$ABCD$ kvadratning AC diagonalini o‘tkazamiz va uning uzunligini hisoblaymiz:

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{\left(4\sqrt{2}\right)^2 + \left(4\sqrt{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{16 \cdot 2 + 16 \cdot 2} = \sqrt{64} = 8\ cm\ ;$$

CN tekislikka perpendikulyar bo‘lgani uchun $CN \perp AC$.

Demak, ACN – to'g'ri burchakli uchburchak. Unda Pifagor teoremasiga ko'ra:

$$AC=\sqrt{AC^2+CN^2}=\sqrt{8^2+6^2}=\sqrt{100}=10$$

Javob: 10 cm.

4.10-teorema. ***Ikki ayqash to'g'ri chiziq yagona umumiy perpendikulyarga ega bo'ladi.***

Isbot. a va b ayqash to'g'ri chiziqlar bo'lsin *(7a-rasm)*. Dastlab umumiy perpendikulyarning mavjudligini ko'rsatamiz. Buning uchun berilgan ayqash to'g'ri chiziqlarda shunday A va B nuqtalarni tanlash mumkinligini ko'rsatishimiz kerakki, AB to'g'ri chiziq ham a ga, ham b ga perpendikulyar bo'lsin.

α tekislik b to'g'ri chiziqdan o'tuvchi va a to'g'ri chiziqqa parallel bo'lsin. a to'g'ri chiziqda C nuqtani olamiz va undan α tekislikka CD perpendikulyar tushiramiz. Kesishuvchi a va CD to'g'ri chiziqlardan β tekislikni o'tkazamiz. a_1 to'g'ri chiziq α va β tekisliklarning kesishish chizig'i bo'lsin *(7b-rasm)*.

$a_1 \parallel a$ bo'lgani uchun a_1 va b to'g'ri chiziqlar qandaydir B nuqtada kesishadi. B nuqtadan β tekislikda yotuvchi va a to'g'ri chiziqqa perpendikulyar BA to'g'ri chiziqni chiqaramiz.

Natijada AB va CD to'g'ri chiziqlarning har ikkalasi ham β tekislikda yotadi va a to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'ladi. Shuning uchun $AB \parallel CD$ va $AB \perp a$ bo'ladi.

Demak, $AB \perp a$ va $AB \perp b$, ya'ni AB izlanayotgan to'g'ri chiziq bo'lib, u a va b ayqash to'g'ri chiziqlarning har ikkalasiga ham perpendikulyar bo'ladi.

Umumiy perpendikulyarning yagonaligini mustaqil isbotlang.

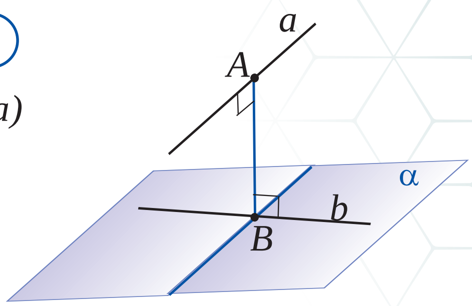
Ikki ayqash to'g'ri chiziq orasidagi masofa deb ularning umumiy perpendikulyari uzunligiga aytiladi.

Yuqoridagi teoremadan quyidagi xulosa kelib chiqadi:

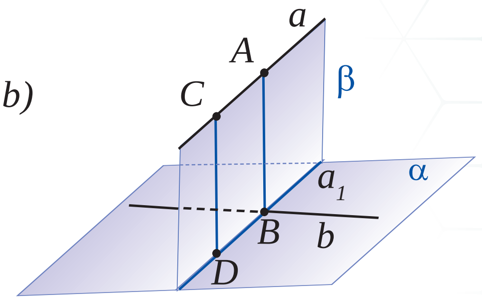
Xossa. *Ikki ayqash a va b to'g'ri chiziqlar orasidagi masofa (8-rasm) a to'g'ri chiziqning istalgan nuqtasidan b to'g'ri chiziq yotgan va a to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan α tekislikkacha bo'lgan masofaga teng bo'ladi.*

7

a)

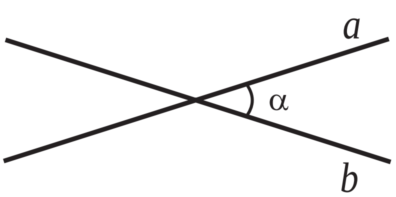


b)

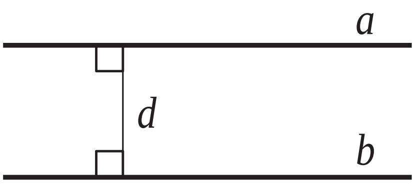


8

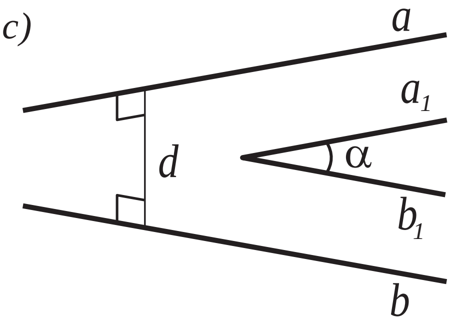
a)



b)



c)



Yuqoridagilarga asoslanib fazoda ikki to‘g‘ri chiziqning o‘zaro joylashishini sonlar yordamida tavsiflashimiz mumkin.

Agar fazoda ikki to‘g‘ri chiziq:

- o‘zaro kesishsa, ular orasidagi α burchak *(8a-rasm)*,
- o‘zaro parallel bo‘lsa, ular orasidagi d masofa *(8b-rasm)*,
- o‘zaro ayqash bo‘lsa, ular orasidagi α burchak va ular orasidagi d masofa *(8c-rasm)* mazkur to‘g‘ri chiziqlarning o‘zaro joylashishini sonli tavsiflaydi.

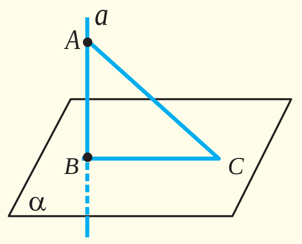
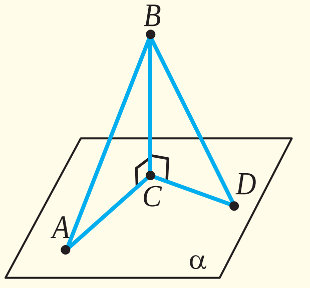
Mavzuga doir savollar va mashqlar

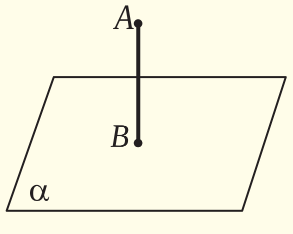
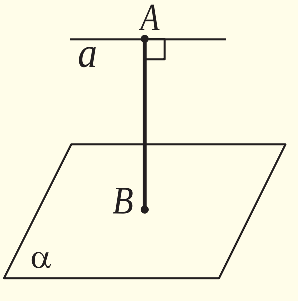
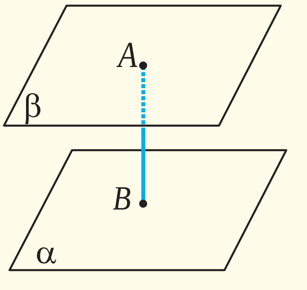
9

1. *Tekislikka tushirilgan perpendikulyar va og‘maga ta’rif bering.*
2. *9-rasmda nima: a) perpendikulyar; b) og‘ma timsolida tasvirlangan?*
3. *Og‘maning tekislikdagi proyeksiyasi deb nimaga aytiladi?*
4. *Nuqtadan tekislikkacha bo‘lgan masofa qanday aniqlanadi?*
5. *Tekislikka parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziq va tekislik orasidagi masofa qanday topiladi?*
6. *Ikki parallel tekisliklar orasidagi masofa qanday aniqlanadi?*
7. *Ikki ayqash to‘g‘ri chiziq orasidagi masofa qanday aniqlanadi?*
8. *Fazoda ikki to‘g‘ri chiziqning o‘zaro joylashishini qaysi sonli kattaliklar aniqlaydi?*

Amaliy mashq va tatbiq

18.1. Jadvalda 18-mavzuning asosiy tayanch ma’lumotlari keltirilgan. Ularni sinchiklab o‘rganib chiqing va izohlang.

Perpendikulyar va og‘ma	
Ta’rifi	**Xossalari**
 Agar $a \perp \alpha$, $AB \notin \alpha$ bo‘lsa: AB – α tekislikka A nuqtadan tushirilgan perpendikulyar; AC – og‘ma, BC – og‘maning α tekislikka proyeksiyasi.	 $BC < AB$, $BC < BD$; agar $AB = BD$ bo‘lsa, $AC = CD$ bo‘ladi; agar $AC = CD$ bo‘lsa, $AB = BD$ bo‘ladi; agar $AC > CD$ bo‘lsa, $AB > BD$ bo‘ladi.

Masofalar		
Nuqtadan tekislikkacha bo‘lgan masofa	**To‘g‘ri chiziqdan tekislikkacha bo‘lgan masofa**	**Tekisliklar orasidagi masofa**
 $A \notin \alpha$ $AB \perp \alpha$	 $a \parallel \alpha$, $A \in a$, $AB \perp \alpha$	 $\alpha \parallel \beta$, $A \in \beta$, $AB \perp \alpha$

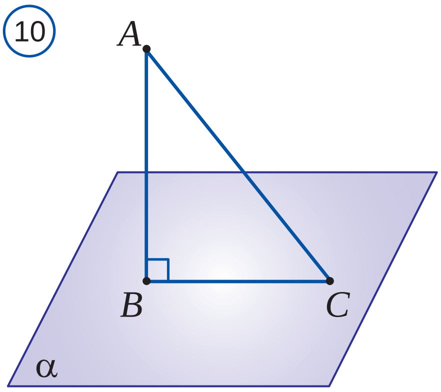
18.2. 10-rasmdan a) perpendikulyar; b) og‘ma: c) perpendikulyar asosi; d) og‘ma proyeksiyasini aniqlang va yozing.

18.3. 11-rasmdan AD va DC kesmalar AB va BC og‘malarning proyeksiyasi:

a) Agar $AD > DC$ bo‘lsa, og‘malar haqida nima deyish mumkin?

b) Agar $AB = BC$ bo‘lsa, proyeksiyalar haqida nima deyish mumkin?

10



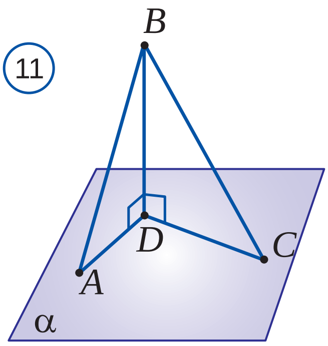
18.4. 12-rasmdagi noma'lum kesmalarning uzunligini toping.

18.5. 13-rasmda berilganlardan foydalanib MA va MC og'malar uzunliklarini o'zaro solishtiring.

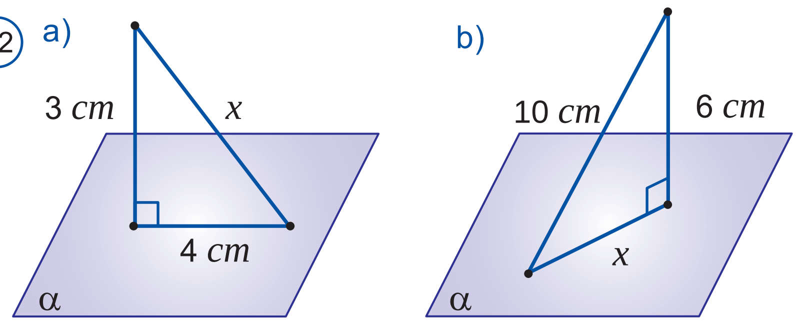
18.6. AB – perpendikulyar, AC – og'ma va BC – og'ma proyeksiyasi bo'lsa, jadvalni berilganlardan foydalanib to'ldiring.

AB	24	15			12
BC	7		24	$4a$	
AC		25	26	$5a$	13

11



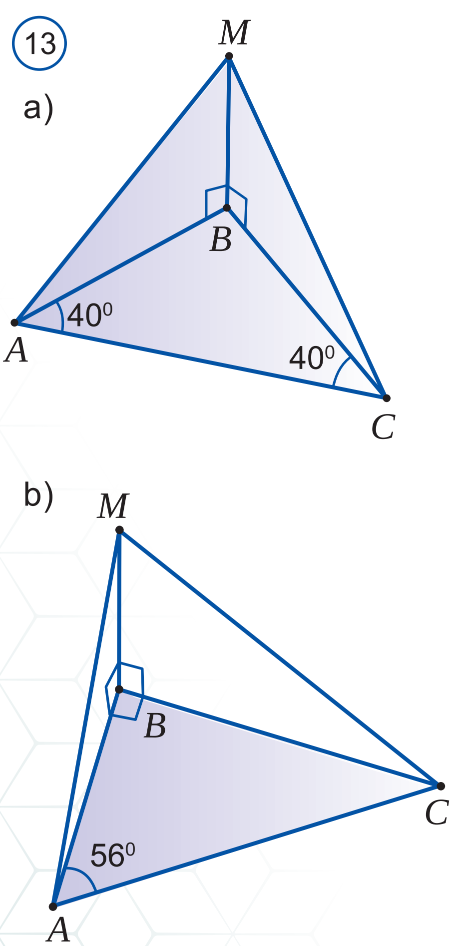
12



18.7. AB – perpendikulyar, AC – og'ma, BC – og'ma proyeksiyasi, α – perpendikulyar va og'ma orasidagi burchak bo'lsa, jadvalni berilganlardan foydalanib to'ldiring.

AB			5	6	14
BC		4			14
AC	6	8		12	
α	30°		45°		

13



18.8. M nuqtadan tekislikka o'zaro teng MA, MB, MC, MD og'malar o'tkazilgan. $ABCD$ to'rtburchak turi quyidagilardan qaysi biri bo'ladi: a) kvadrat; b) parallelogramm; c) to'g'ri to'rtburchak. Javobingizni asoslang.

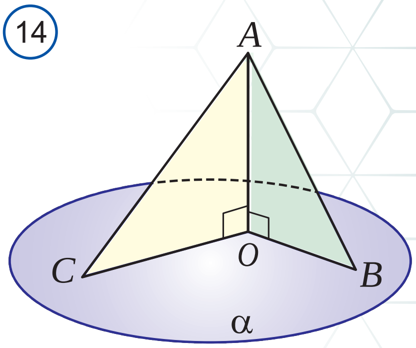
18.9. Agar parallelogrammning uchlaridan baravar uzoqlikda yotgan nuqta mavjud bo'lsa, bu parallelogramm to'g'ri to'rtburchak ekanini isbotlang.

18.10. Agar rombning uchlaridan baravar uzoqlikda yotgan nuqta mavjud bo'lsa, bu romb kvadrat ekanini isbotlang.

18.11. A, B, Q nuqtalar α tekislikka tegishli, M nuqta esa unga tegishli emas va $MQ \perp \alpha$. MA, AQ, MQ, BQ, MB kesmalarning qaysi biri: a) perpendikulyar; b) og'ma; c) og'ma proyeksiyasi ekanini aniqlang.

18.12. A nuqtadan α tekislikka AB va AC og‘malar va AO perpendikulyar o‘tkazilgan *(14-rasm)*. Agar $AB = 2{,}5$ cm, $AC = 3$ cm bo‘lsa, og‘malarning proyeksiyalarini o‘zaro taqqoslang.

14

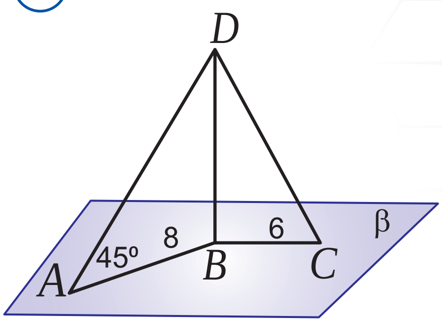


18.13. Nuqtadan tekislikka ikkita og‘ma tushirilgan *(14-rasm)*. Agar og‘malarning biri ikkinchisidan 26 cm uzun, proyeksiyalari esa 12 cm va 40 cm bo‘lsa, bu og‘malarning uzunliklarini toping.

18.14. Uchburchakka tashqi chizilgan aylana markazidan uchburchak tekisligiga perpendikulyar to‘g‘ri chiziq o‘tkazilgan. Bu to‘g‘ri chiziqning har bir nuqtasi uchburchak uchlaridan baravar uzoqlikda yotishini isbotlang.

18.15. Yuzi a) 21 cm^2; b) 96 cm^2; c) 44 cm^2; d) 69 cm^2; e) 156 cm^2 bo‘lgan $ABCD$ kvadrat tekisligiga uzunligi 10 cm bo‘lgan DM perpendikulyar tushirilgan. MA og‘maning uzunligini toping.

15



18.16. To‘g‘ri burchagi C bo‘lgan ABC uchburchakning o‘tkir burchagi uchidan uchburchak tekisligiga perpendikulyar AD to‘g‘ri chiziq o‘tkazilgan. Agar $AC = c$, $BC = b$ va $AD = c$ bo‘lsa, D nuqtadan B va C uchlarigacha bo‘lgan masofalarni toping.

18.17. Bir-biridan 4,2 m uzoqlikda bo‘lgan vertikal ustunlarning yuqori uchlari to‘sin bilan tutashtirilgan. Ustunlarning balandliklari 5,8 m va 4,1 m bo‘lsa, to‘sin uzunligini toping.

18.18. 20 m uzunlikdagi telefon simi simyog‘ochga yer sathidan 8 m balandlikda mahkamlangan va undan balandligi 18 m bo‘lgan ko‘pqavatli uy tomiga tarang tortilgan. Uy bilan ustun orasidagi masofani toping.

18.19. Tekislikka P nuqtadan tushirilgan PQ perpendikulyar uzunligi 1 ga, PA va PB og‘malar uzunliklari esa 2 ga teng. C nuqta AB kesma o‘rtasi. Agar a) $\angle APB = 90^\circ$; b) $\angle APB = \beta$ bo‘lsa, QC kesma uzunligini toping.

18.20. $ABCD$ parallelogrammning o‘tmas B burchagi uchidan uning tekisligiga perpendikulyar bo‘lgan BH kesma tiklangan. Agar $AH = 5$ cm, $HD = HC = 8{,}5$ cm, $AC = 1{,}5\sqrt{33}$ bo‘lsa, parallelogramm tomonlarini toping.

18.21. M nuqta tomoni 60 cm bo‘lgan muntazam ABC uchburchakning har bir uchidan 40 cm masofada joylashgan. ABC uchburchak tekisligidan M nuqtagacha bo‘lgan masofani toping.

18.22. β tekislikka BD perpendikulyar *(15-rasm)*, AD va DC og‘malar tushirilgan. $\angle DCB = 45^\circ$, $AB = 8$, $BC = 6$. CD ni toping.

“GeoGebra”ni qo‘llab

3D kalkulyatori yordamida nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofani aniqlash

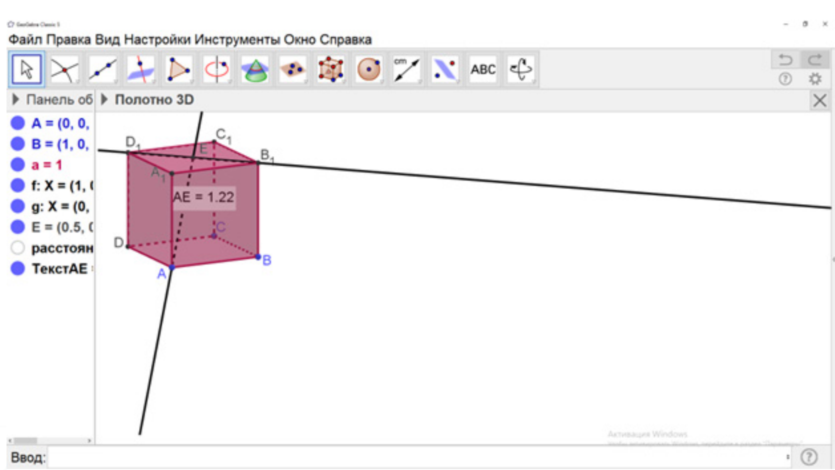
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ birlik kub berilgan. Kubning A uchidan B_1D_1 to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar tushirilgan. A uchidan B_1D_1 to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofani toping.

Yasash:

- “GeoGebra”da yangi oyna oching.
- “GeoGebra” interfeysini **“Настройки”** – **“3D Графика”** ko‘rinishiga o‘tkazing.

Masofani aniqlash bosqichlari

1.		**Ввод** (Kiritish) satri orqali	A=(0,0,0) nuqta yasaladi.
2.		**Ввод** (Kiritish) satri orqali	B=(1,0,0) nuqta yasaladi.
3.		**Куб** (Kub)	Birlik kub yasaladi.
4.		**Переименовать** (Qayta nomlash)	E, F, G, H nuqtalar mos ravishda A_1, B_1, C_1, D_1 ga o‘zgartiriladi. Buning uchun nuqta ustiga bosiladi va yangi belgi kiritiladi.
5.		**Прямая** (To‘g‘ri chiziq)	B_1D_1 to‘g‘ri chiziq o‘tkaziladi.
6.		**Перпендикулярная прямая** (Perpendikulyar to‘g‘ri chiziq)	Kubning A uchidan B_1D_1 to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar tushiriladi.
7.		**Пересечение** (Kesishish)	B_1D_1 to‘g‘ri chiziq va o‘tkazilgan perpendikulyar chiziqlar kesishish nuqtasi – E belgilanadi.
8.	cm	**Расстояние или длина** (Masofa yoki uzunlik)	Kubning A uchi va E nuqtasi orasidagi masofa aniqlanadi: AE = 1.22.



Mustaqil bajarish uchun topshiriq

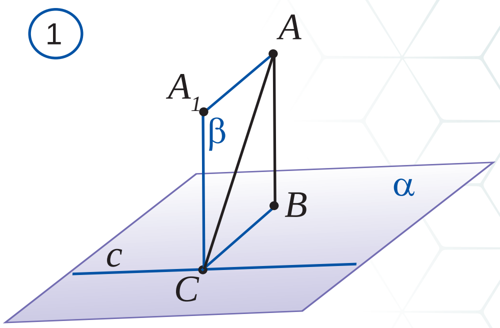
1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ birlik kub berilgan. Kubning A uchidan BD_1 to‘g‘ri chizig‘iga perpendikulyar tushirilgan. A uchidan BD_1 to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofani toping.

2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ birlik kubning AA_1 yog‘ining o‘rtasi – E dan BD_1 chizig‘iga perpendikulyar tushirilgan. E nuqtadan BD_1 chiziqqacha bo‘lgan masofani toping.

19 UCH PERPENDIKULYAR HAQIDAGI TEOREMA

***4.11-teorema.* Agar tekislikka tushirilgan og'maning asosidan o'tuvchi to'g'ri chiziq og'maning proyeksiyasiga perpendikulyar bo'lsa, u holda u og'maning o'ziga ham perpendikulyar bo'ladi.**

Isbot. Aytaylik, AB kesma α tekislikka tushirilgan perpendikulyar, AC kesma esa og'ma bo'lsin.



c to'g'ri chiziq esa α tekislikda yotuvchi, C nuqtadan o'tuvchi va og'ma proyeksiyasiga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq bo'lsin *(1-rasm)*.

AB ga parallel A_1C to'g'ri chiziqni o'tkazamiz. Bu to'g'ri chiziq α tekislikka perpendikulyar bo'ladi.

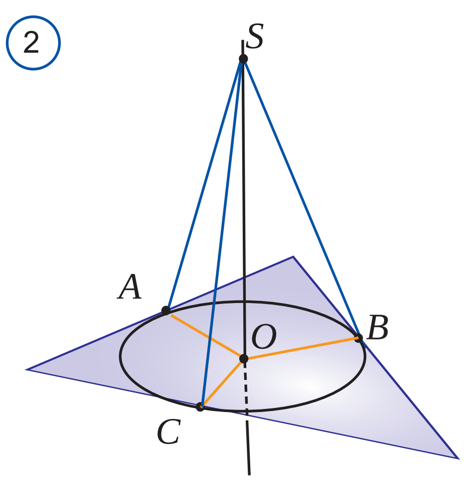
AB va A_1C to'g'ri chiziqlar orqali β tekislikni o'tkazamiz. c to'g'ri chiziq CA_1 to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'ladi. Shartga ko'ra, u CB to'g'ri chiziqqa ham perpendikulyar edi. Unda c to'g'ri chiziq β tekislikka ham perpendikulyar bo'ladi.

Demak, c to'g'ri chiziq β tekislikda yotgan AC og'maga ham perpendikulyar bo'ladi.

Mazkur teoremada uchta perpendikulyarlar haqida gap borayotgani uchun u "Uch perpendikulyar haqidagi teorema" nomini olgan. Bu teoremaga teskari bo'lgan teorema ham o'rinli bo'ladi. Uni mustaqil isbotlang.

***4.12-teorema.* Agar tekislikka tushirilgan og'maning asosidan o'tuvchi to'g'ri chiziq og'maga perpendikulyar bo'lsa, u holda u og'maning proyeksiyasiga ham perpendikulyar bo'ladi.**

1-masala. Uchburchakka ichki chizilgan aylana markazidan uchburchak tekisligiga perpendikulyar to'g'ri chiziq o'tkazilgan *(2-rasm)*. Bu to'g'ri chiziqning ixtiyoriy nuqtasi uchburchak tomonlaridan baravar uzoqlikda yotishini isbotlang.



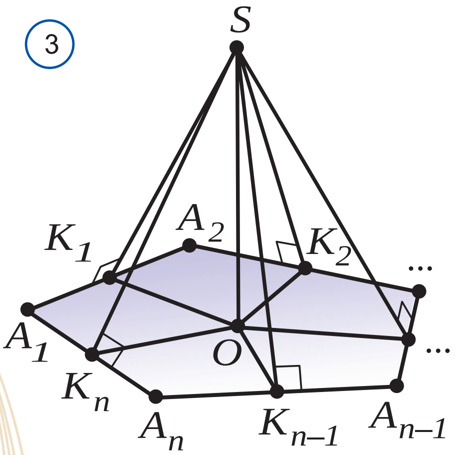
Isbot. Aytaylik, A, B, C – uchburchak tomonlarining aylana bilan kesishish nuqtalari, O – aylana markazi, S esa perpendikulyardagi ixtiyoriy nuqta bo'lsin.

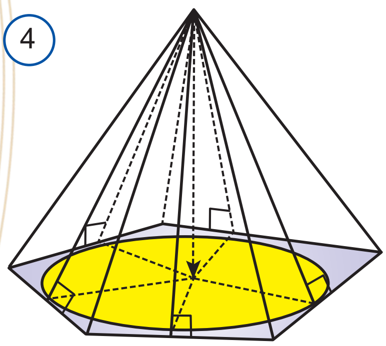
OS uchburchak tomoniga perpendikulyar bo'lgani uchun, uch perpendikulyar haqidagi teoremaga ko'ra, OA ham bu tomonga perpendikulyar bo'ladi. Unda SAO to'g'ri burchakli uchburchak bo'ladi. Bu uchburchakda Pifagor teoremasiga ko'ra:

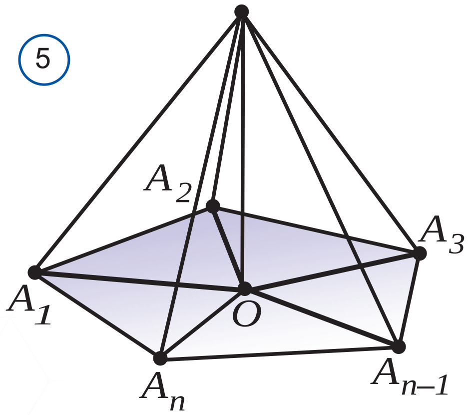
$$SA=\sqrt{AO^2+OS^2}=\sqrt{r^2+OS^2}$$

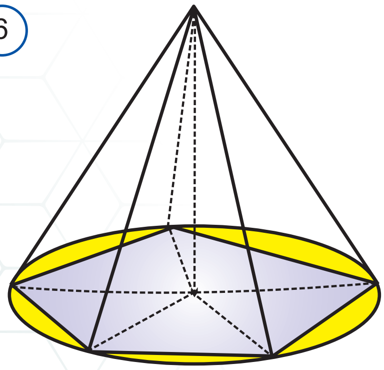
bu yerda r – aylana radiusi.

Xuddi shunga o'xshash SBO to'g'ri burchakli uchburchakdan $SB=\sqrt{r^2+OS^2}$ va SCO to'g'ri burchakli uchburchakdan esa $SC=\sqrt{r^2+OS^2}$ ekanini topamiz.

3


4


5


6


Demak, $SA = SB = SC$.

Bu xossaning ixtiyoriy koʻpburchak uchun umumiyroq hollarini ham koʻrib chiqamiz.

2-masala. Fazodagi nuqta koʻpburchakning tomonlaridan baravar uzoqlikda joylashgan boʻlib, undan koʻpburchak tekisligiga perpendikulyar tushirilgan. Bu perpendikulyar asosi nuqta koʻpburchakka ichki chizilgan aylana markazi bilan ustma-ust tushishini isbotlang *(3-rasm)*.

Isbot. Aytaylik, S – berilgan nuqta, $A_1A_2...A_{n-1}A_n$ – berilgan koʻpburchak va O esa S nuqtadan koʻpburchak tekisligiga tushirilgan perpendikulyar asosi boʻlsin.

U holda, shartga koʻra, SK_1, SK_2, ... SK_n – S nuqtadan koʻpburchakning tomonlarigacha boʻlgan masofalar (yaʼni bu tomonlarga tushirilgan perpendikulyarlar) oʻzaro teng boʻladi:

$SK_1 = SK_2 = ... = SK_n$.

O nuqtani K_1, K_2, ... K_n nuqtalar bilan tutashtirib chiqamiz. Natijada SOK_1, SOK_2, ... , SOK_n – bitta SO umumiy katetga va teng gipotenuzalarga ega toʻgʻri burchakli uchburchaklarni hosil qilamiz.

Bitta kateti va gipotenuzalari tengligi hamda uchburchaklar tenglik alomatiga koʻra bu toʻgʻri burchakli uchburchaklar teng boʻladi.

Unda ularning ikkinchi katetlari – OK_1, OK_2, ... OK_n ham oʻzaro teng boʻladi: $OK_1 = OK_2 = ... = OK_n$.

Bu tengliklar perpendikulyar asosi – O nuqta koʻpburchakka ichki chizilgan aylana markazi bilan ustma-ust tushishini koʻrsatadi.

Bu xossadan quyidagi muhim xulosa kelib chiqadi.

Xulosa. Agar piramidaning barcha yon yoqlarining balandliklari oʻzaro teng boʻlsa (yoki yon yoqlari asos tekisligi bilan bir xil burchak tashkil qilsa), u holda bu piramidaning balandligi asosiga ichki chizilgan aylana markaziga tushadi *(4-rasm)*.

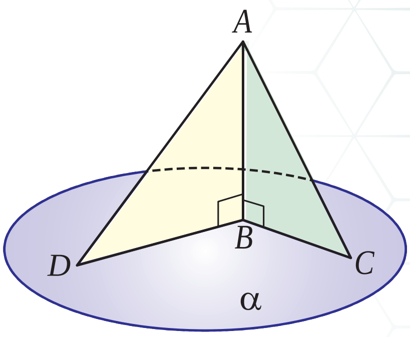
3-masala. Fazodagi nuqta koʻpburchakning uchlaridan baravar uzoqlikda joylashgan boʻlib, undan koʻpburchak tekisligiga perpendikulyar tushirilgan. Bu perpendikulyar asosi koʻpburchakka tashqi chizilgan aylana markazi bilan ustma-ust tushishini mustaqil isbotlang *(5-rasm)*.

Xulosa. Agar piramidaning barcha yon qirralari oʻzaro teng boʻlsa (yoki yon qirralari asos tekisligi bilan bir xil burchak tashkil qilsa), u holda bu piramidaning balandligi asosga tashqi chizilgan aylana markaziga tushadi *(6-rasm)*.

4-masala. Fazoda berilgan nuqtadan tekislikka ikkita ogʻma tushirilgan. Bu ogʻmalarning biri ikkinchisidan 26 *cm* uzun boʻlib, ularning proyeksiyalari uzunligi mos ravishda 12 *cm* va 40 *cm*. Ogʻmalarning uzunligini toping.

Yechish. Aytaylik, AB – perpendikulyar, AC va AD esa mos ogʻmalar boʻlsin *(7-rasm)*.

7



$AC = x$ *cm* deb olamiz. Unda shartga koʻra:

$AD = x + 26$ *cm* boʻladi.

1) ABC – toʻgʻri burchakli uchburchak. Pifagor teoremasiga koʻra:

$AC^2 = AC^2 + AB^2$ yoki $AB^2 = x^2 + 144$.

2) ABD ham toʻgʻri burchakli uchburchak. Pifagor teoremasiga koʻra:

$AD^2 = BD^2 + AB^2$ yoki $AB^2 = (x + 26)^2 - 1600$.

1 va 2 dan $x^2 + 144 = (x + 26)^2 - 1600$ ni hosil qilamiz.

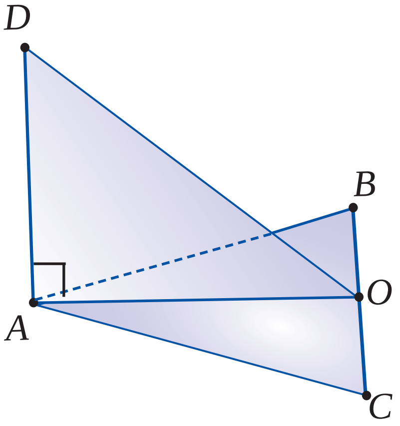
Undan $x = 16$ *cm* ekanini aniqlaymiz.

Demak, $AC = 15$ *cm*, $AD = x + 26 = 41$ (*cm*) boʻladi.

Javob: $AC = 15$ *cm*, $AD = 41$ *cm*.

5-masala. ABC uchburchak tekisligiga uning A nuqtasidan perpendikulyar chiqarilgan *(8-rasm)*. Agar $AB = 13$, $BC = 20$, $AC = 11$ va $AD = 36$ boʻlsa, D nuqtadan BC toʻgʻri chiziqqacha boʻlgan masofani toping.

8



Yechish. Izlanayotgan masofa D nuqtadan BC tomonga tushirilgan perpendikulyar uzunligiga teng boʻladi. Bu kesmani tushirish uchun uning BC tomondagi asosini topish kerak. Buning uchun ABC uchburchakning A uchidan BC tomoniga AO balandlikni tushiramiz: $AO \perp BC$.

Unda uch perpendikulyar haqidagi teoremaga koʻra, $BC \perp DO$ boʻladi. Demak, DO izlanayotgan kesma ekan.

Endi DO kesmaning uzunligini topamiz. Buning uchun oldin ABC uchburchak yuzini Geron formulasidan foydalanib topamiz:

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{20+11+13}{2} = 22;$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

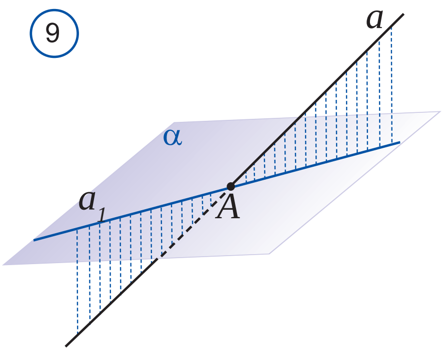
$$= \sqrt{22\cdot(22-20)\cdot(22-11)\cdot(22-13)} = 66$$

$$AO = \frac{2S}{a} = \frac{2\cdot 66}{20} = 6,6$$

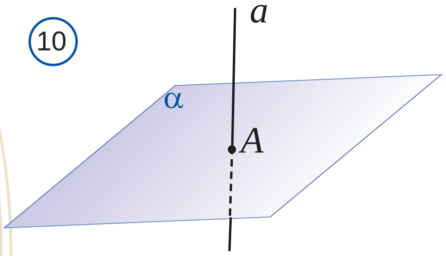
ADO toʻgʻri burchakli uchburchakda Pifagor teoremasiga koʻra:

$$DO = \sqrt{AD^2 + AO^2} = \sqrt{36^2 + 6,6^2} = 36,6$$

9



10



Aytaylik, α tekislik va uni kesib o‘tuvchi va bu tekislikka perpendikulyar bo‘lmagan a to‘g‘ri chiziq berilgan bo‘lsin *(9-rasm)*. a to‘g‘ri chiziqning har bir nuqtasidan perpendikulyarlar tushiramiz. Bu perpendikulyarlarning asoslari a_1 to‘g‘ri chiziqni tashkil qiladi.

a_1 to‘g‘ri chiziq a to‘g‘ri chiziqning α tekislikdagi *proyeksiyasi* deb ataladi.

a to‘g‘ri chiziq va α tekislik orasidagi burchak deb to‘g‘ri chiziq bilan uning bu tekislikdagi proyeksiyasi orasidagi burchakka aytiladi.

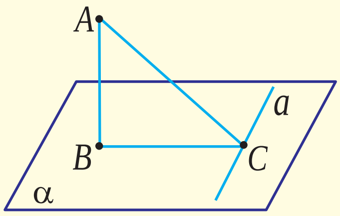
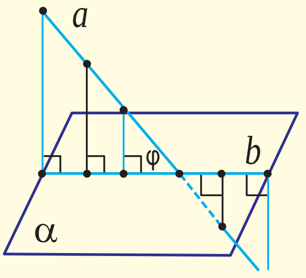
Agar to‘g‘ri chiziq tekislikka perpendikulyar bo‘lsa *(10-rasm)*, u bilan tekislik orasidagi burchak 90° ga, agar parallel bo‘lsa, bu to‘g‘ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchak 0° ga teng deb olinadi.

Mavzuga doir savollar va mashqlar

1. *Uch perpendikulyar haqidagi teoremani sharhlang. Nima* sababdan *u shunday nomlangan?*
2. *Uch perpendikulyar haqidagi teoremaga teskari teoremani ayting va izohlang.*
3. *To‘g‘ri chiziq va tekislik orasidagi burchak qanday aniqlanadi?*
4. *Tekislik va unga perpendikulyar to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak necha gradus?*

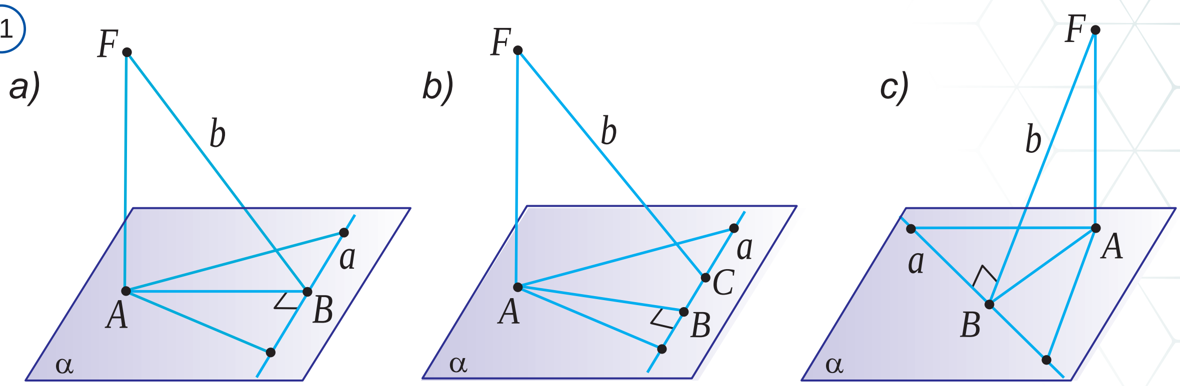
Amaliy mashq va tatbiq

19.1. Jadvalda 19-mavzuning asosiy tayanch ma’lumotlari keltirilgan. Ularni sinchiklab o‘rganib chiqing va izohlang.

Uch perpendikulyar haqidagi teorema	To‘g‘ri chiziq va tekislik orasidagi burchak
 $AB \perp \alpha$ Agar $a \perp BC$ bo‘lsa, $a \perp AC$ bo‘ladi. Agar $a \perp AC$ bo‘lsa, $a \perp BC$ bo‘ladi.	 b – a ning α tekislikdagi proyeksiyasi. φ – a va α tekislik orasidagi burchak.

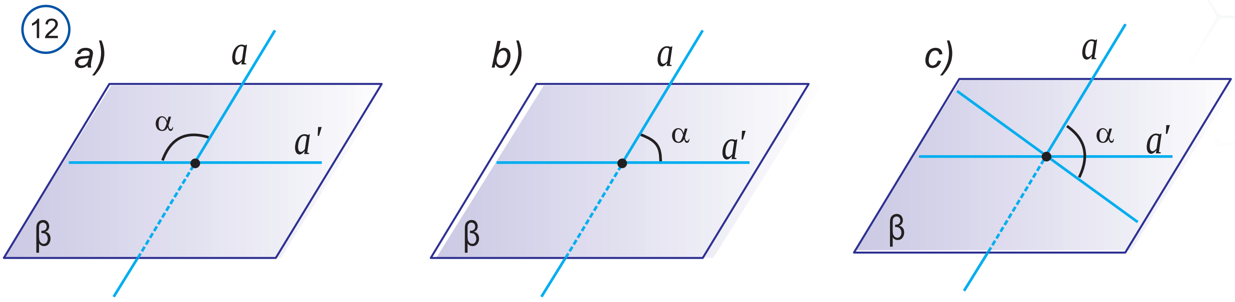
19.2. 11-rasmda $AF \perp \alpha$. a va b to‘g‘ri chiziqlarning o‘zaro joylashuvini aniqlang.

11



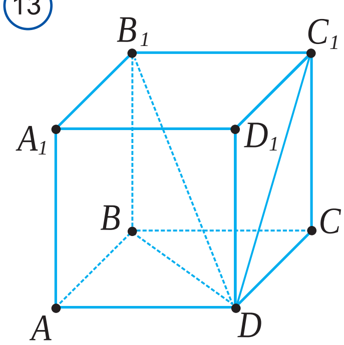
19.3. 12-rasmda a' to‘g‘ri chiziq – a to‘g‘ri chiziqning β tekislikdagi proyeksiyasi. Rasmlarning qaysi birida a to‘g‘ri chiziq va β tekislik orasidagi α burchak to‘g‘ri ko‘rsatilgan?

12

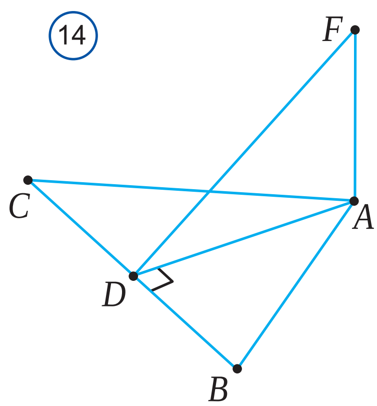


19.4. 13-rasmda $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kub berilgan. a) DD_1C_1C yoqning DC_1 diagonali va $ABCD$ asos tekisligi orasidagi; b) kubning B_1D diagonali va $ABCD$ asos tekisligi orasidagi; c) kubning B_1D diagonali va DD_1C_1C yoq tekisligi orasidagi burchakni aniqlang.

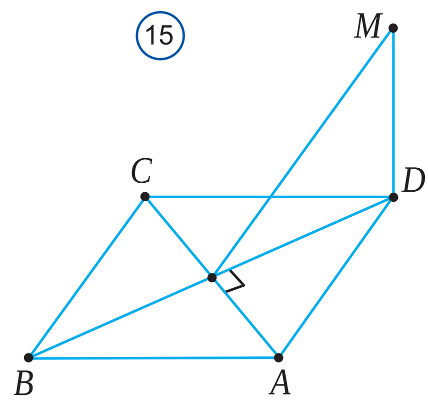
13



14



15



19.5 14- va 15- rasmlarga doir masalalar tuzing va ularni yeching.

19.6. Quyidagi mulohazalarning qaysi biri noto‘g‘ri?

A) Agar ikki to‘g‘ri chiziq bitta tekislikka perpendikulyar bo‘lsa, bu to‘g‘ri chiziqlar paralleldir.

B) Agar tekislikda yotmaydigan to‘g‘ri chiziq tekislikdagi birorta to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lsa, tekislik va to‘g‘ri chiziq o‘zaro paralleldir.

C) Agar tekislikka tushirilgan og‘ma tekislikda yotuvchi to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar bo‘lsa, uning proyeksiyasi ham to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar bo‘ladi.

D) Tekislikda yotuvchi ikki to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tekislikka ham perpendikulyar bo‘ladi.

E) Ikkita to‘g‘ri chiziqning har biri uchinchi to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lsa, bu to‘g‘ri chiziqlar paralleldir.

19.7. Quyidagi mulohazalarning qaysi biri noto‘g‘ri?

A) Agar tekislik ikkita parallel tekisliklardan biriga perpendikulyar bo‘lsa, u holda bu tekislik ikkinchi tekislikka ham perpendikulyar bo‘ladi.

B) Tekislikda yotuvchi kesishuvchi ikki to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tekislikka ham perpendikulyar bo‘ladi.

C) Fazodagi ikki to‘g‘ri chiziq uchinchi to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar bo‘lsa, ular o‘zaro paralleldir.

D) Agar tekislikdagi to‘g‘ri chiziq tekislikka tushirilgan og‘maga perpendikulyar bo‘lsa, bu to‘g‘ri chiziq og‘maning proyeksiyasiga ham perpendikulyar bo‘ladi.

E) Ikki parallel tekislikni uchinchi tekislik bilan kesganda hosil bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlar o‘zaro parallel bo‘ladi.

19.8. A nuqta tomoni a ga teng bo‘lgan teng tomonli uchburchakning uchlaridan a masofada yotadi. A nuqtadan uchburchak tekisligigacha bo‘lgan masofani toping.

19.9. α tekislikning tashqarisidagi S nuqtadan unga uchta teng SA, SB, SC og‘malar va SO perpendikulyar o‘tkazilgan. Perpendikulyarning O asosi ABC uchburchakka tashqi chizilgan aylananing markazi bo‘lishini isbotlang.

19.10. Teng tomonli uchburchakning tomonlari 3 m ga teng. Uchburchak har bir uchidan 2 m masofada bo‘lgan nuqtadan uchburchak tekisligigacha bo‘lgan masofani toping.

19.11. Teng yonli uchburchak asosi va balandligi 4 m ga teng. Berilgan nuqta uchburchak tekisligidan 6 m masofada va uning uchlaridan bir xil masofada yotadi. Shu masofani toping.

19.12. A nuqtadan kvadratning uchlarigacha bo‘lgan masofa a ga teng. Kvadratning tomoni b ga teng bo‘lsa, A nuqtadan kvadrat tekisligigacha bo‘lgan masofani toping.

19.13. Berilgan nuqtadan tekislikka o‘tkazilgan berilgan uzunlikdagi og‘malar asoslarining geometrik o‘rnini toping.

19.14. Berilgan nuqtadan tekislikka uzunliklari 10 cm va 17 cm bo‘lgan ikkita og‘ma o‘tkazilgan. Bu og‘malar proyeksiyasining ayirmasi 9 cm ga teng. Og‘malar proyeksiyalarini toping.

19.15. Nuqtadan tekislikka ikkita og‘ma o‘tkazilgan. Agar: a) ulardan biri ikkinchisidan 26 cm uzun, og‘malarning proyeksiyalari 12 cm va 40 cm bo‘lsa; b) og‘malar uzunliklari 1 : 2 nisbatda bo‘lib, ularning proyeksiyalari 1 cm va 7 cm ga teng bo‘lsa, og‘malarning uzunliklarini toping.

19.16. α tekislikdan d masofada yotgan A nuqtaga tekislik bilan 30° burchak tashkil qiluvchi AB va AC og‘malar o‘tkazilgan. Ularning α tekislikka proyeksiyalari o‘zaro 120° li burchak tashkil qiladi. BC kesma uzunligini toping.

19.17. Agar to‘g‘ri burchakli va teng yonli uchburchakning katetlaridan biri tekislikka tegishli, ikkinchisi esa u bilan 45° li burchak tashkil qilsa, gipotenuza bu tekislik bilan 30° li burchak tashkil qilishini isbotlang.

19.18. ABC uchburchak tekisligiga MA perpendikulyar tushirilgan. $\angle MBC = 45^{\circ}$. $\angle ACB = 90^{\circ}$. $MA = MC$. $\angle AMB$ ni toping *(16-rasm)*.

19.19. a og‘ma α tekislik bilan 45° li burchak tashkil qiladi, tekislikning b to‘g‘ri chizig‘i esa og'ma proyeksiyasi bilan 45° li burchak tashkil qiladi. a va b to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakning 60° ga teng ekanini isbotlang.

19.20. P nuqta tomoni a ga teng $ABCD$ kvadratning har bir uchidan a masofada yotadi. Kvadrat tekisligi va AP to'g'ri chiziq orasidagi burchakni toping.

19.21. Uchburchakli piramidaning hamma qirralari o'zaro teng. Piramidaning qirrasi va bu qirra tegishli bo'lmagan yog'i orasidagi burchakni toping.

19.22. To'g'ri burchakli parallelepipedning o'lchamlari a, b va c ga teng. Parallelepiped diagonali bilan uning yoqlari diagonallari orasidagi masofani toping.

19.23. $AB \perp \alpha$, $CD \perp \alpha$, $AB = CD$ ekanligi berilgan *(17-rasm)*. $ABCD$ to'rtburchak turini aniqlang.

19.24. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kub berilgan. $AD \perp DCC_1$ ekanini isbotlang.

19.25. S nuqtadan α tekislikka perpendikulyar SO, SA va SB og'malar o'tkazilgan. SA = 20 cm, AO = 16 cm, OB = 5 cm bo'lsa, SB ni toping.

19.26. S nuqta $ABCD$ to'rtburchak tekisligida yotmaydi va uning uchlaridan teng masofada joylashgan. S nuqtadan ABC tekislikkacha bo'lgan masofa 24 cm, AB = 12 cm, BC = 16 cm bo'lsa, S nuqtadan to'rtburchakning uchlarigacha bo'lgan masofalarni toping.

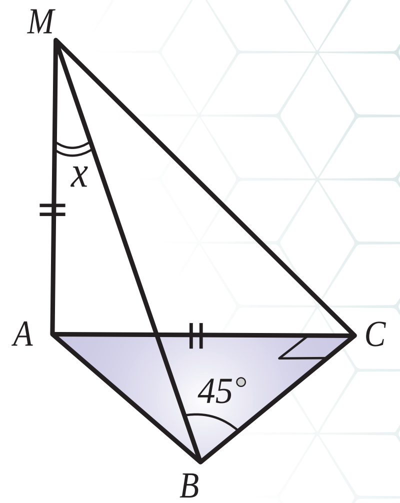
19.27. Nuqtadan katetlari 15 cm va 20 cm bo'lgan to'g'ri burchakli uchburchak tekisligiga, uzunligi 16 cm bo'lgan perpendikulyar o'tkazilgan. Perpendikulyarning asosi uchburchakning to'g'ri burchakli uchida. Bu nuqtadan gipotenuzagacha bo'lgan masofani toping.

19.28. A nuqtadan α tekislikka tekislik bilan 60° burchak hosil qiluvchi AB va AC og'malar o'tkazilgan. Agar $BC = AC = 6$ bo'lsa, AB ni toping.

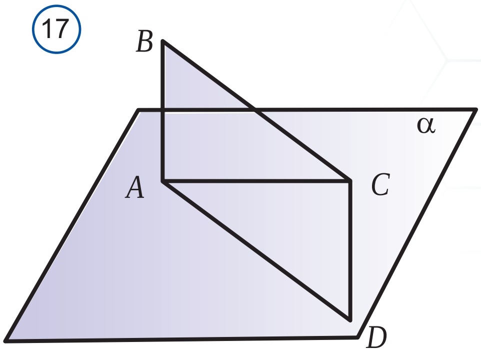
19.29. β tekislikka CD perpendikulyar *(18-rasm)*, AD va BD og'malar tushirilgan. $BC = 6$, $AD = 10$, $AC = 8$. $\angle DBC$ ni toping.

19.30. 19-rasmda $ABCD$ – to'g'ri to'rtburchak. MC to'g'ri to'rtburchak tekisligiga perpendikulyar. $\angle BAM = 64°$. $\angle BMA$ ni toping.

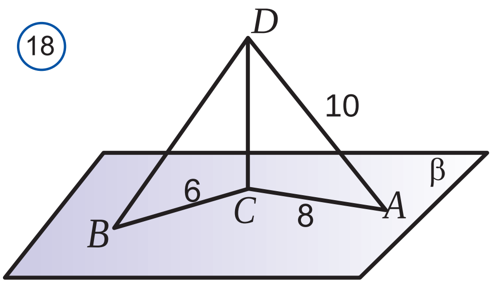
16



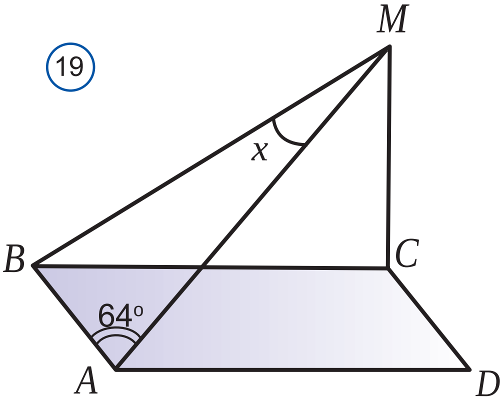
17



18

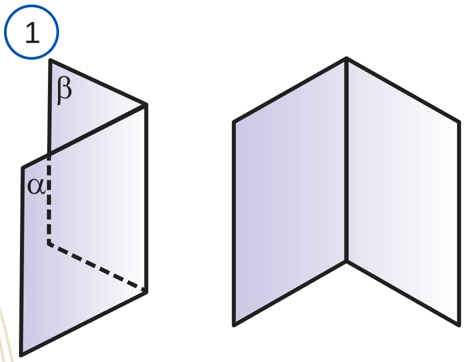


19



GEOMETRIYA 10

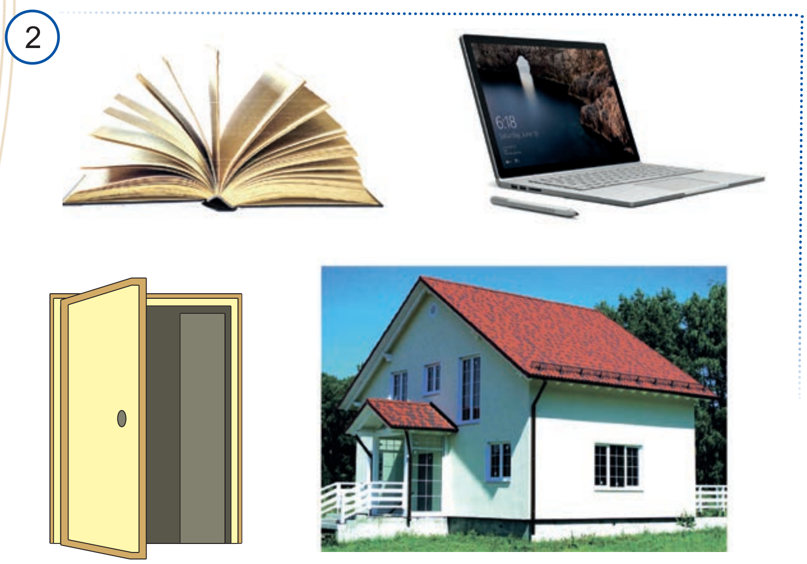
20 FAZODA TEKISLIKLARNING PERPENDIKULYARLIGI

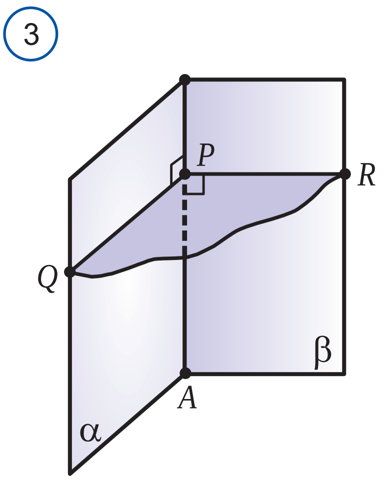


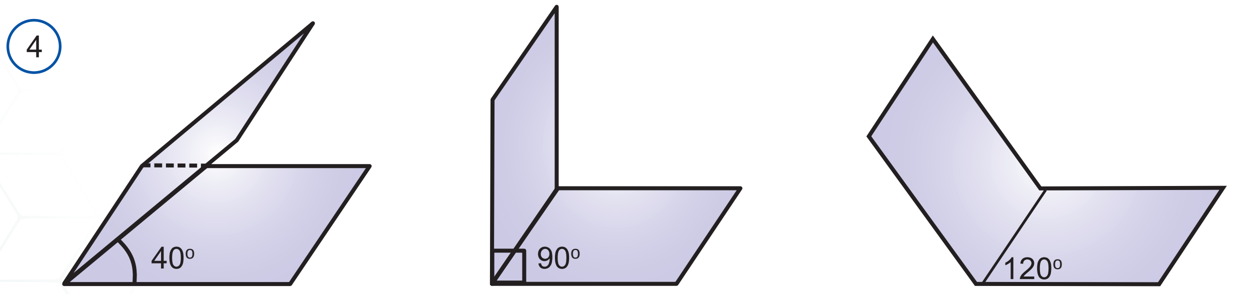
Ikkita yarimtekislik va ularni chegaralab turgan umumiy to‘g‘ri chiziqdan iborat geometrik shakl *ikki yoqli burchak* deb ataladi *(1-rasm)*. Yarimtekisliklar ikki yoqli burchakning *yoqlari*, ularni chegaralovchi to‘g‘ri chiziq esa ikki yoqli burchakning *qirrasi* deb ataladi.

Ikki yoqli burchaklar haqida tevarak-atrofdagi quyidagi narsalar tasavvur beradi *(2-rasm)*: kitob, noutbuk, ochiq eshik va imorat tomi.

Ikki yoqli burchak qirrasining ixtiyoriy nuqtasidan uning yoqlarida yotuvchi va bu qirraga perpendikulyar bo‘lgan nurlarni chiqaramiz. Bu nurlar hosil qilgan burchak ikki yoqli burchakning *chiziqli burchagi* deb ataladi *(3-rasm)*.



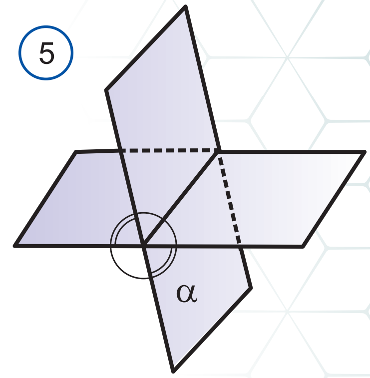




Ta’rifdan ko‘rinadiki, ikki yoqli burchakning chiziqli burchagi qirrada tanlangan nuqta bilan aniqlanadi va cheksiz ko‘p bo‘ladi. Shunday bo‘lsa-da, ikki yoqli burchakning chiziqli burchagi kattaligi qirrada tanlangan nuqtaga bog‘liq emas, ya’ni ularning hammasi o‘zaro teng bo‘ladi.

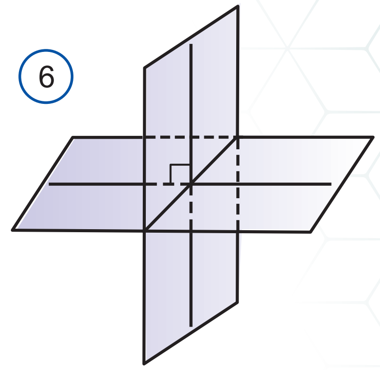
Ikki yoqli burchaklar kattaligi uning chiziqli burchagi kattaligi bilan aniqlanadi. Chiziqli burchaklar o‘tkir, to‘g‘ri, o‘tmas va yoyiq bo‘lishiga qarab ikki yoqli burchaklar ham mos ravishda o‘tkir, to‘g‘ri, o‘tmas va yoyiq-ikki yoqli burchaklarga ajratiladi. 4-rasmda turli xil ikki yoqli burchaklar tasvirlangan.

Ikki kesishuvchi tekislik butun fazoni umumiy qirraga ega bo‘lgan to‘rtta ikki yoqli burchakka ajratadi *(5-rasm)*. Bu ikki yoqli burchaklarning biri α ga teng bo‘lsa, ulardan yana bittasining qiymati ham α ga teng bo‘ladi. Qolgan ikkitasining qiymati esa $180^o - \alpha$ ga teng bo‘ladi.



Mazkur ikki yoqli burchaklar ichida 90^o dan kichigi ham bo‘ladi. Shu burchakning qiymati kesishuvchi *tekisliklar orasidagi burchak* deb olinadi.

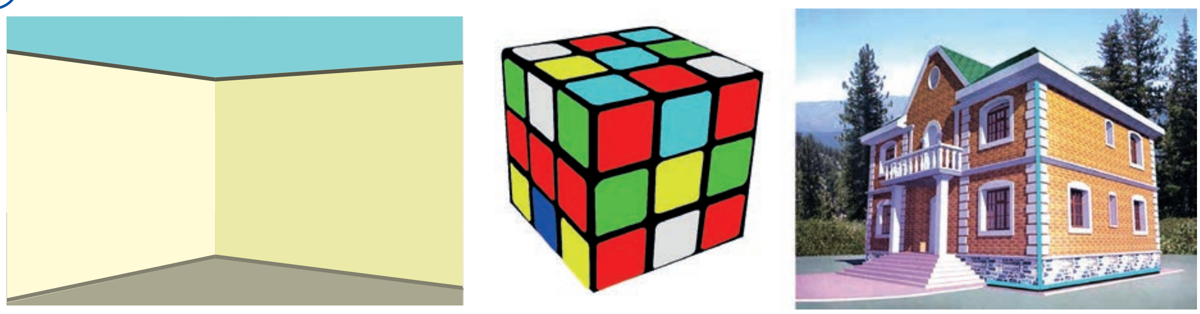
Agar ikki yoqli burchaklarning biri to‘g‘ri, ya’ni 90^o ga teng bo‘lsa, qolgan uchtasi ham to‘g‘ri bo‘ladi *(6-rasm)*.



To‘g‘ri burchak ostida kesishuvchi tekisliklar *perpendikulyar tekisliklar* deb ataladi.

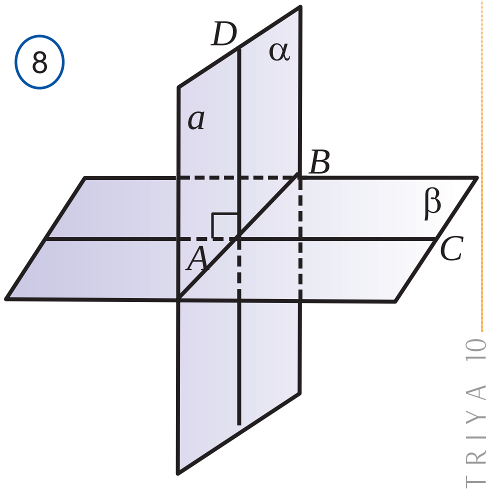
Perpendikulyar tekisliklarga tevarak-atrofdan misol sifatida xona poli va devorlari, umumiy qirraga ega xona devorlari, umumiy qirraga ega rubik kubi yoqlari va yer sathi va uy devorlari hamda uyning bir-biriga tutashgan devorlarini misol tariqasida keltirish mumkin *(7-rasm)*.

α va β tekisliklarning perpendikulyarligi to‘g‘ri chiziqlardagi kabi “ $\perp$ ” belgi yordamida, $\alpha \perp \beta$ tarzda yoziladi.



Endi perpendikulyar tekisliklarning xossalariga to‘xtalamiz. Quyidagi teorema tekisliklarning *perpendikulyarlik alomati* deb nomlanadi.

4.13-teorema. Agar tekisliklardan biri ikkinchisiga perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri chiziqdan o‘tsa, bunday tekisliklar o‘zaro perpendikulyar bo‘ladi.

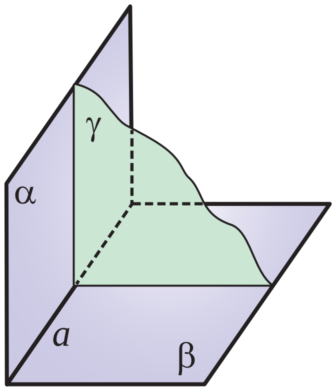


Isbot. Aytaylik, α va β tekisliklar berilgan bo‘lib, α tekislik β tekislikka perpendikulyar bo‘lgan a to‘g‘ri chiziqdan o‘tsin *(8-rasm)*. β tekislik bilan a to‘g‘ri chiziqning kesishish nuqtasi A bo‘lsin. $\alpha \perp \beta$ ekanini isbotlaymiz.

α va β tekisliklar AB to‘g‘ri chiziq bo‘ylab kesishyapti. Unda $AB \perp a$ bo‘ladi, chunki shartga ko‘ra $\beta \perp a$. β tekislikda yotgan va AB to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar bo‘lgan AC to‘g‘ri chiziqni o‘tkazamiz. Natijada hosil bo‘lgan $\angle DAC$ α, β – ikki yoqli burchakning chiziqli burchagi bo‘ladi. Shartga ko‘ra, $a \perp \beta$. Unda $\angle DAC$ – to‘g‘ri burchak. Demak, $\alpha \perp \beta$.

Bu teoremadan quyidagi natija kelib chiqadi.

9

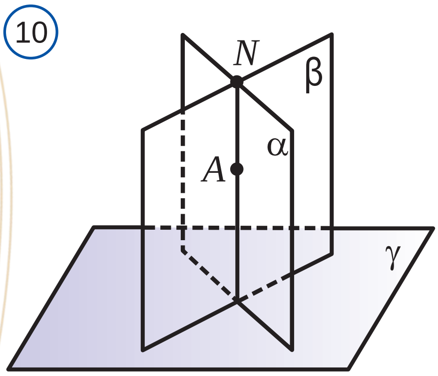


Natija. ***Agar tekislik ikki tekislikning kesishish chizig'iga perpendikulyar bo'lsa, bu tekisliklarning har biriga ham perpendikulyar bo'ladi*** *(9-rasm).*

4.11-teoremaga teskari teorema ham o'rinli bo'ladi. Uni isbotsiz keltiramiz.

4.14-teorema. ***Agar ikki perpendikulyar tekisliklardan birining biror nuqtasidan ikkinchisiga perpendikulyar to'g'ri chiziq o'tkazilsa, bu to'g'ri chiziq birinchi tekislikda yotadi.***

10

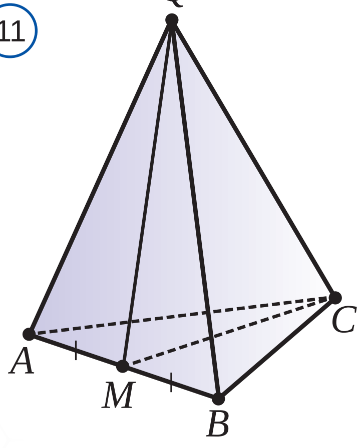


Natija. ***Agar ikki perpendikulyar tekislik uchinchi tekislikka perpendikulyar bo'lsa, ularning kesishish chizig'i ham bu tekislikka perpendikulyar bo'ladi*** *(10-rasm).*

1-masala. M nuqta $QABC$ muntazam piramida asosidagi qirrasining o'rtasi bo'lsa *(11-rasm)*, QCM tekislik piramida asosi tekisligi ABC ga perpendikulyar ekanini isbotlang.

Isbot. AB kesma teng yonli AQB va ACB uchburchaklarning asosi bo'lgani uchun bu uchburchaklar medianalari QM va CM ga ham perpendikulyar bo'ladi. Shu bilan birga, AB kesma QCM tekislikka ham perpendikulyar bo'ladi. Unda 4.12-teoremaga ko'ra, ABC tekislik QCM tekislikka perpendikulyar bo'ladi.

11



2-masala. $QABC$ muntazam piramidaning uchidagi yassi AQB burchagi α ga teng. Uning yon qirrasidagi ikki yoqli burchagini toping *(12-rasm)*.

Yechish. Aytaylik, N nuqta AC qirraning o'rtasi, AK esa A nuqtadan BQ qirraga tushirilgan perpendikulyar bo'lsin.

ABQ va CBQ uchburchaklarning tengligidan $CK \perp BQ$ bo'ladi. Shuning uchun AKC burchak BQ ikki yoqli burchakning chiziqli burchagi bo'ladi.

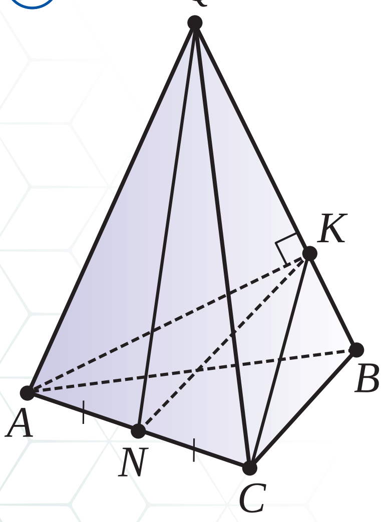
AKQ va ANQ to'g'ri burchakli uchburchaklardan $AK = \sin\alpha$, $AN = AQ \sin\frac{\alpha}{2}$ ekanini topamiz.

AKN to'g'ri burchakli uchburchaklardan esa:

$$\sin\left(\frac{\angle AKC}{2}\right) = \frac{AN}{AK} = \frac{1}{2\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \text{ ga egamiz.}$$

Bundan $\angle AKC = 2 \arcsin \dfrac{1}{2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$.

12

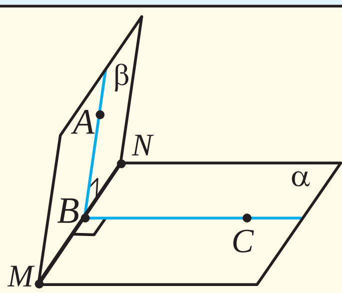
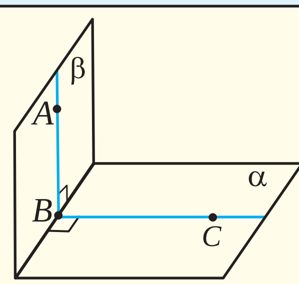
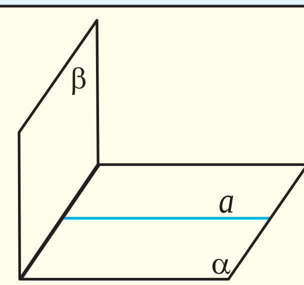


Mavzuga doir savollar va mashqlar

1. Ikki yoqli burchak deb nimaga aytiladi?
2. Qanday burchak "tekisliklar orasidagi burchak" deb ataladi?
3. To'g'ri burchak ostida kesishuvchi tekisliklar qanday nomlanadi?
4. Tekisliklarning perpendikulyarlik alomatini ayting.
5. Perpendikulyar tekisliklarning xossalarini ayting va sharhlang.

Amaliy mashq va tatbiq

20.1. Jadvalda 20-mavzuning asosiy tayanch ma'lumotlari keltirilgan. Ularni sinchiklab o'rganib chiqing va izohlang.

Tekisliklarning perpendikulyarligi		
Tekisliklar orasidagi burchak	**Tekisliklarning perpendikulyarligi**	**Tekisliklarning perpendikulyarlik alomati**
 Agar $AB \perp MN$ va $CB \perp MN$ bo'lsa, $\angle ABC$ – α va β tekisliklar orasidagi burchak.	 Agar $\angle ABC = 90^0$ bo'lsa, α va β tekisliklar *perpendikulyar* deyiladi.	 Agar $a \subset \alpha$ va $a \perp \beta$ bo'lsa, $\alpha \perp \beta$ bo'ladi.

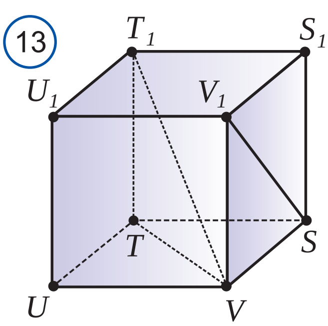
20.2. a) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ to'g'ri burchakli parallelepipedning; b) $ABCA_1B_1C_1$ to'g'ri prizmaning perpendikulyar yoqlarini aniqlang va to'g'ri ikki yoqli burchaklarini ayting.

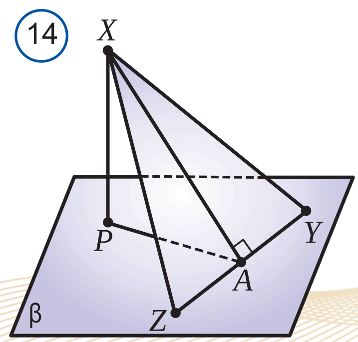
20.3. $STUVS_1T_1U_1V_1$ kubda *(13-rasm)* a) TVT_1 burchak; b) T_1ST burchak T_1SVT ikki yoqli burchakning chiziqli burchagi bo'ladimi? V_1UTS ikki yoqli burchakning qiymatini toping.

20.4. Ikkita ikki yoqli burchakning bittadan yog'i umumiy, qolgan yoqlari birgalikda tekislikni tashkil qiladi. Bu ikki yoqli burchaklarning yig'indisi 180° ga teng ekanini isbotlang.

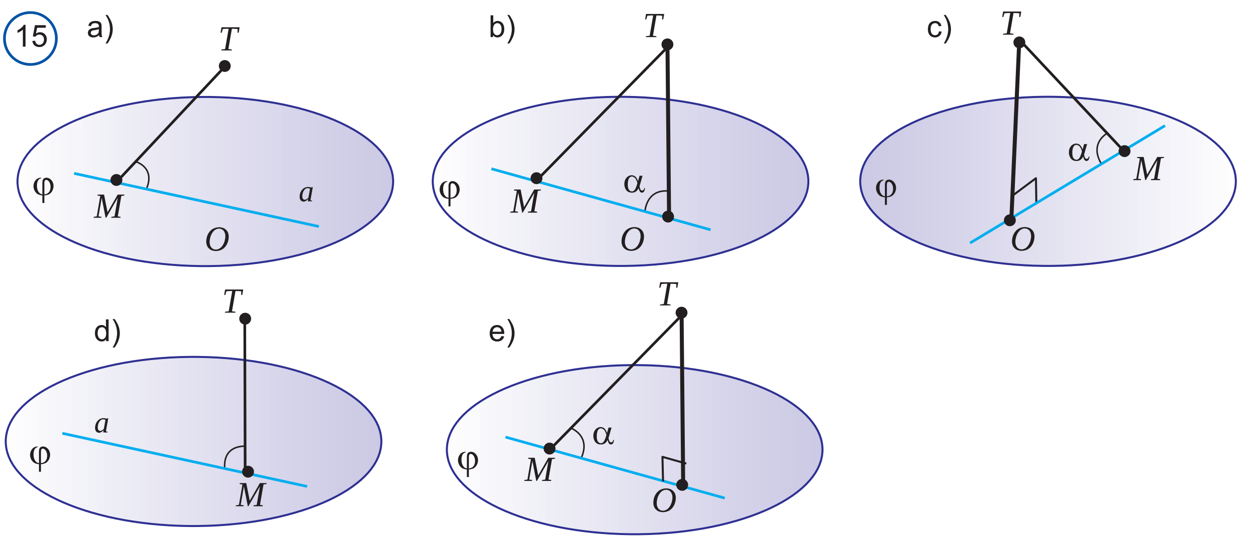
20.5. XYZ uchburchakning YZ tomoni β tekislikda yotadi. Uning X uchidan XA balandlik va β tekislikka XP perpendikulyar tushirilgan *(14-rasm)*. XAP burchak $XYZP$ ikki yoqli burchakning chiziqli burchagi ekanini isbotlang.

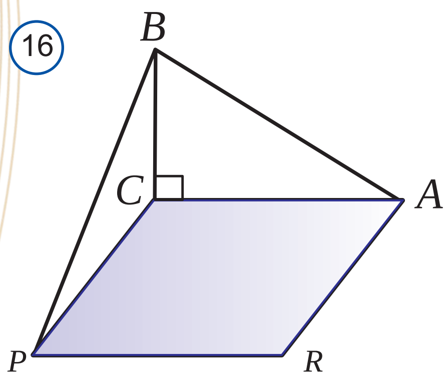
20.6. Uchburchakli $ABCD$ piramidaning CD qirrasi ABC tekislikka perpendikulyar. $AB = BC = AC = 6$ va $BD = 3\sqrt{7}$ bo'lsa, $DACB$, $DABC$, $BDCA$ ikki yoqli burchaklarni toping.

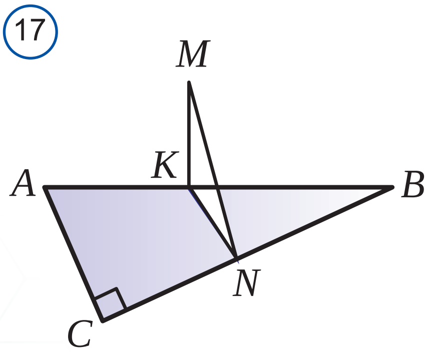
13


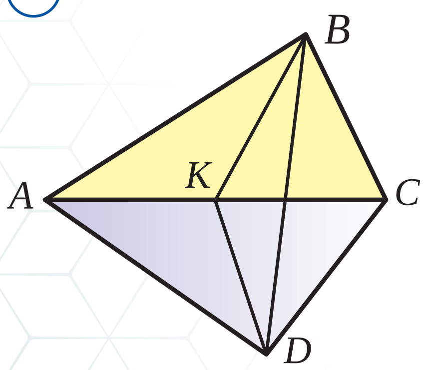
14


GEOMETRIYA 10

15


16


17


18


20.7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ muntazam parallelepipedning AA_1C_1C va BB_1D_1D diagonal kesimlari o‘zaro perpendikulyar ekanini isbotlang.

20.8. T nuqtadan φ tekislikka og‘ma tushirilgan *(15-rasm)*. Rasmlarning qaysilarida tekislik va og‘ma orasidagi α burchak to‘g‘ri belgilangan?

20.9. Uchburchakli $ABCD$ piramidada DAB, DAC, ACB burchaklar to‘g‘ri, $AC = CB = 5$ va $DB = 5\sqrt{5}$ bo‘lsa, $ABCD$ ikki yoqli burchagini toping.

20.10. Ikki yoqli burchak chiziqli burchagining tekisligi uning har bir yog‘ida perpendikulyar ekanini isbotlang.

20.11. Ikki yoqli burchakning bitta yog‘ida yotgan ikkita nuqta uning qirrasidan mos ravishda 51 cm va 34 cm uzoqlikda yotibdi. Bu nuqtalarning birinchisi boshqa yog‘idan 15 cm uzoqlikda yotganligi ma’lum bo‘lsa, shu yoqdan ikkinchi nuqtagacha bo‘lgan masofani toping.

20.12. ABC to‘g‘ri burchakli uchburchak ($\angle C = 90^\circ$) va $ACPR$ kvadrat tekisliklari o‘zaro perpendikulyar *(16-rasm)*. Kvadrat tomoni 6 cm, uchburchak gipotenuzasi 10 cm. BP kesma uzunligini toping.

20.13. MK kesma to‘g‘ri burchakli ABC uchburchak ($\angle C = 90^\circ$) tekisligiga perpendikulyar *(17-rasm)*. $KN \parallel AC$, $AK = KB$, $AC = 12\ cm$, $MK = 8\ cm$ bo‘lsa, MN kesma uzunligini toping.

20.14. ABC va ADC teng yonli uchburchaklar tekisliklari perpendikulyar *(18-rasm)*. AC – ularning umumiy asosi. BK kesma ABC uchburchak medianasi. $BK = 8\ cm$, $DK = 15\ cm$ bo‘lsa, BD kesma uzunligini toping.

20.15. Muntazam to‘rtburchakli piramida asosining tomoni orqali uning qarshisidagi yon yoqqa perpendikulyar tekislik o‘tkazilgan. Asosining tomoni $a = 30\ cm$, piramidaning balandligi $h = 20\ cm$. Hosil bo‘lgan kesimning yuzini aniqlang.

“GeoGebra”ni qo‘llab

3D kalkulyatori yordamida nuqtadan tekislikkacha bo‘lgan masofani aniqlash

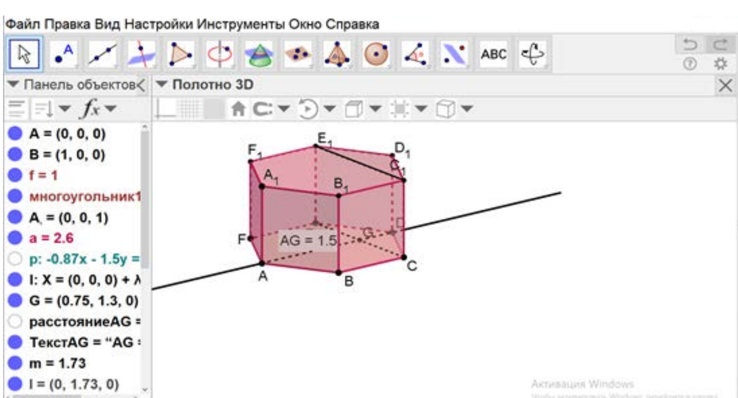
Barcha qirralari 1 ga teng bo‘lgan muntazam oltiburchakli prizmaning A uchidan CC_1E_1 tekislikka perpendikulyar tushirilgan. Prizmaning A uchidan shu tekislikkacha bo‘lgan masofani toping.

Yasash:

- “GeoGebra”da yangi oyna oching.
- “GeoGebra” interfeysini **“Настройки”** – “**3D Графика”** ko‘rinishiga o‘tkazing.

Masofani aniqlash bosqichlari

1		**Ввод** (Kiritish)	A=(0,0,0) nuqta yasaladi.
2		**Ввод** (Kiritish)	B=(1,0,0) nuqta yasaladi.
3		**Правильный многоугольник** (Muntazam ko‘pburchak)	Tomoni 1 ga teng bo‘lgan muntazam oltiburchak yasaladi.
4		**Призма** (Prizma)	Qirrasi 1 ga teng bo‘lgan muntazam oltiburchakli to‘g‘ri prizma yasaladi.
5		**Переименовать** (Qayta nomlash)	Tegishli nuqtalar mos ravishda $A1$, $B1$, $C1$, $D1$, $E1$, $F1$ ga deb qayta nomlanadi.
6		**Плоскость через 3 точки** (3 nuqta orqali tekislik)	CC_1E_1 tekislik yasaladi.
7		**Перпендикулярная прямая** (Perpendikulyar o‘g‘ri chiziq)	Prizmaning A uchidan CC_1E_1 tekisligiga perpendikulyar tushiriladi.
8		**Пересечение** (Kesishish)	A nuqta va CC_1E_1 tekislik kesishish nuqtasi – G nuqta belgilanadi.
9	cm	**Расстояние или длина** (Masofa yoki uzunlik)	Prizmaning A uchi va G nuqtasi orasidagi masofa aniqlanadi: AG = 1,5.



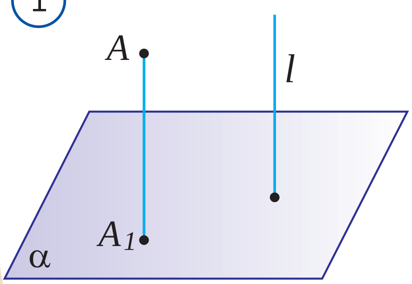
Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Barcha qirralari 1 ga teng bo‘lgan muntazam oltiburchakli prizmaning A uchidan CC_1D_1 tekislikka perpendikulyar uzunligini toping.

2. Barcha qirralari 1 ga teng bo‘lgan uchburchakli to‘g‘ri prizmaning A_1 uchidan AB_1C_1 tekislikka perpendikulyar uzunligini toping.

21 FAZODA ORTOGONAL PROYEKSIYA VA UNDAN TEXNIKADA FOYDALANISH

1



Agar proyeksiya yoʻnalishi l proyeksiyalash tekisligi α ga perpendikulyar boʻlsa, bunday parallel proyeksiyalash *ortogonal proyeksiyalash* deb ataladi.

1-rasmda $l \perp \alpha$ boʻlib, A nuqtaning α tekislikka ortogonal proyeksiyasi – A_1 nuqta tasvirlangan.

Ortogonal proyeksiyalashda hosil boʻlgan shaklga berilgan shaklning *ortogonal proyeksiyasi* yoki qisqacha *proyeksiyasi* deb aytiladi.

2-rasmda turli fazoviy shakllarning α tekislikka ortogonal proyeksiyalari tasvirlangan.

Ortogonal proyeksiyalash parallel proyeksiyalashning xususiy holi boʻlgani uchun parallel proyeksiyalashning hamma xossalari ortogonal proyeksiyalashda ham oʻrinli boʻladi. Ortogonal proyeksiyalashda:

a) nuqta nuqtaga, kesma kesmaga, toʻgʻri chiziq toʻgʻri chiziqqa oʻtadi;

b) parallel toʻgʻri chiziqlar proyeksiyalari parallel boʻladi yoki ustma-ust tushadi;

c) shakllarning toʻgʻri chiziqli kesimlari proyeksiyasi ham kesmalardan iborat boʻladi;

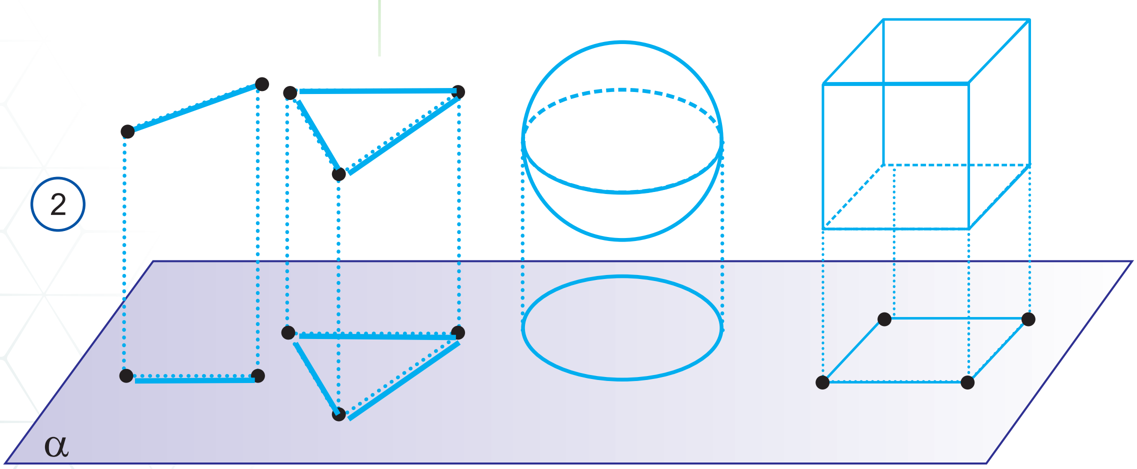
d) shaklning parallel kesmalari proyeksiyasi ham parallel kesmalardan iborat boʻladi;

e) bitta toʻgʻri chiziqda yoki parallel toʻgʻri chiziqlarda yotgan kesmalar uzunliklari nisbati ularning proyeksiyalari uzunliklari nisbatiga teng boʻladi, kesmalar uzunliklari nisbati saqlanadi.

Albatta, bu xossalar proyeksiyalash yoʻnalishiga parallel boʻlmagan kesma va toʻgʻri chiziqlar uchun oʻrinli boʻladi.

Buyuk italyan olimi Galeleo Galiley taʼbiri bilan aytganda, "geometriya aqliy qobiliyatimizni charxlashning eng kuchli quroli boʻlib, toʻgʻri fikrlash va mulohaza yuritish imkoniyatini beradi".

2

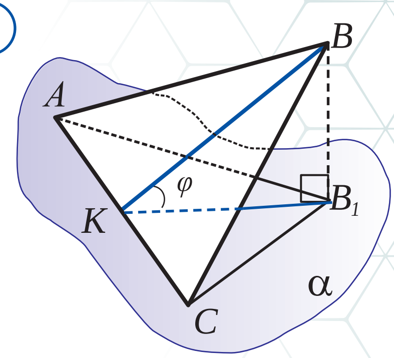


bilan hosil qilinadi *(6-rasm)*.

Quyida faqat ortogonal proyeksiyaga tegishli bo‘lgan muhim xossani isbotlaymiz.

4.15-teorema. Ko‘pburchakning tekislikdagi ortogonal proyeksiyasining yuzi ko‘pburchak yuzi bilan uning tekisligi va proyeksiya tekisligi orasidagi burchak kosinusining ko‘paytmasiga teng.

3



Isbot. 1. Avval xossani uchburchak va uning biror tomonidan o‘tuvchi tekislikdagi proyeksiyasi uchun qarab chiqamiz. Aytaylik, ABC uchburchakning α tekislikdagi proyeksiyasi AB_1C uchburchak bo‘lsin *(3-rasm).*

ABC uchburchakning BK balandligini tushiramiz. Uch perpendikulyar haqidagi teoremaga ko‘ra, B_1K kesma KBB_1 uchburchakning balandligi bo‘ladi.

BKB_1 burchak – uchburchak tekisligi bilan proyeksiya tekisligi orasidagi φ burchakdan iborat bo‘ladi. BKB_1 uchburchakda: $KB_1 = KB \cdot cos\varphi$.

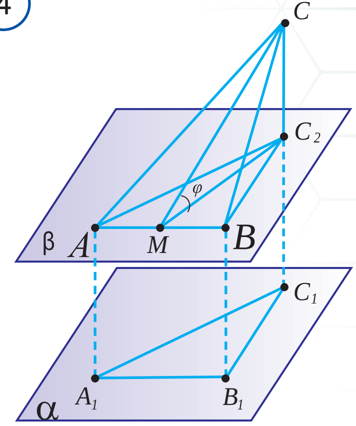
U holda: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot KB$,

$$S_{\triangle AB_1C} = \frac{1}{2} AC \cdot KB_1 = \frac{1}{2} AC \cdot KB \cdot cos\varphi = S_{\triangle ABC} \cdot cos\varphi.$$

Natijada $S_{\triangle AB_1C} = S_{\triangle ABC} \cdot cos\varphi$ ni hosil qilamiz.

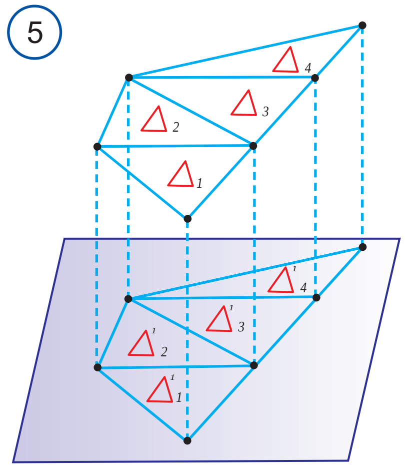
2. α tekislik o‘rniga unga parallel bo‘lgan, boshqa β tekislik olinganda ham teorema o‘rinli bo‘ladi *(4-rasm)*. Bu parallel proyeksiyalash xossasidan foydalanib isbotlanadi.

4



3. Endi umumiy ko‘pburchak holiga keladigan bo‘lsak *(5-rasm)*. Bu holda teorema ko‘pburchakni diagonallari yordamida uchburchaklarga bo‘lish yordamida yuqorida ko‘rilgan xususiy holga keltirib isbotlanadi.

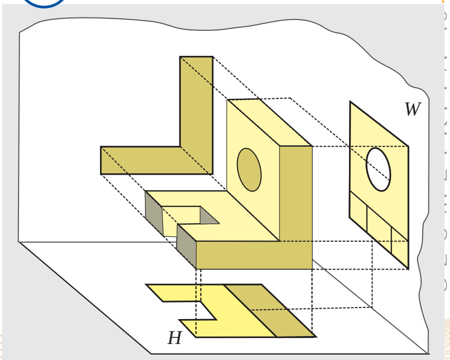
5



Bu proyeksiyalar qaysi yo‘nalishda proyeksiyalanganligiga qarab *vertikal (tik), gorizontal* va *frontal proyeksiyalar* deb ham ataladi.

Ortogonal proyeksiyadan texnik chizmachilikda turli xil detallarni loyihalashda foydalaniladi. Turli mashina detallari chizmalari bitta, ikkita yoki uchta o‘zaro perpendikulyar proyeksiyalar tekisliklariga ortogonal proyeksiyalash yo‘li

6



Masala. ABC uchburchakning ortogonal proyeksiyasi tomonlari 13 cm, 14 cm va 15 cm bo‘lgan ACB_1 uchburchakdan iborat *(3-rasm)*. Uchburchak tekisligi proyeksiya tekisligi bilan 60° li burchak tashkil qiladi. ABC uchburchak yuzini toping.

Yechish. Ma’lumki, 4.15-teoremaga ko‘ra, uchburchak proyeksiyasi yuzi $S_{\triangle AB_1C} = S_{\triangle ABC} \cdot cos\varphi$ formula yordamida topiladi.

Bu yerda φ – uchburchak tekisligi bilan proyeksiya tekisligi orasidagi burchak.

ACB_1 uchburchak yuzini Geron formulasidan foydalanib hisoblaymiz:

$$p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{13+14+15}{2}=21$$

$$S_{\triangle AB_1C}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=$$

$$=\sqrt{21\cdot(21-13)\cdot(21-14)\cdot(21-15)}=84$$

$$S_{\triangle AB_1C}=\frac{S_{\triangle AB_1C}}{\cos\varphi}=\frac{84}{\cos 60^\circ}=84:\frac{1}{2}=168$$

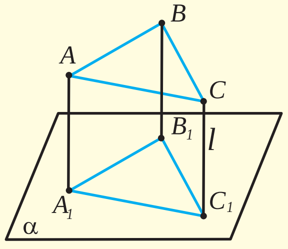
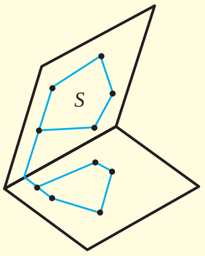
Javob: 168 cm^2.

Mavzuga doir savollar va mashqlar

1. *Ortogonal proyeksiyalash deb nimaga aytiladi?*
2. *Ortogonal proyeksiyalash xossalarini sanang.*
3. *Ko'pburchakning tekislikdagi ortogonal proyeksiyasining yuzi qanday topiladi?*
4. *Ortogonal proyeksiyalashdan texnikada qanday foydalaniladi?*

Amaliy mashq va tatbiq

21.1. Jadvalda 21-mavzuning asosiy tayanch ma'lumotlari keltirilgan. Ularni sinchiklab o'rganib chiqing va izohlang.

Fazoda ortogonal proyeksiya	Ko'pburchak proyeksiyasining yuzi
 Ortogonal proyeksiyada: $l \perp \alpha$. l – proyeksiyalash yo'nalishi; α – proyeksiyalash tekisligi.	 $S_1 = S \cdot \cos\varphi$ S – ko'pburchak yuzi; S_1 – ko'pburchak ortogonal proyeksiyasining yuzi; φ – ko'pburchak va proyeksiya tekisliklari orasidagi burchak.

21.2. Trapetsiyaning ortogonal proyeksiyasi a) kvadrat; b) kesma; c) to'g'ri to'rtburchak; d) parallelogramm; e) trapetsiya bo'lishi mumkinmi?

21.3. 7-rasmga qarab ortogonal proyeksiyasi to'g'ri to'rtburchak bo'lgan geometrik shakllarni ayting.

21.4. A_1B_1 kesma AB kesmaning α tekislikka ortogonal proyeksiyasi *(8-rasm)*. Agar AB = 20 cm, AC = 10 cm, A_1B_1 = 12 cm bo‘lsa, B_1C_1 kesma uzunligini toping.

21.5. Uzunligi 5 cm bo‘lgan AB kesmaning ω tekislikka ortogonal proyeksiyasi uzunligi 3 cm bo‘lgan AC kesmadan iborat *(9-rasm)*. AB kesmaning ω tekislikka og‘ish burchagi kosinusini toping.

21.6. Tomoni a ga teng bo‘lgan muntazam uchburchak berilgan. Uchburchak tekisligi bilan: a) 30°; b) 45°; c) 60° li burchak tashkil qiluvchi tekislikka uning ortogonal proyeksiyasi yuzini toping.

21.7. Umumiy AB tomonga ega bo‘lgan ABC va ABD teng yonli uchburchaklar turli tekisliklarda yotadi.
Agar a) AB = 24 cm, AC = 13 cm, AD = 37 cm, CD = 35 cm; b) AB = 32 cm, AC = 65 cm, AD = 20 cm, CD = 63 cm bo‘lsa, ABC uchburchakning ABD uchburchakka ortogonal proyeksiyasi yuzini toping. Shuningdek, ABD uchburchakning ABC uchburchakka ortogonal proyeksiyasi yuzini ham toping.

21.8. Agar AB to‘g‘ri chiziqdan C nuqtagacha bo‘lgan masofa *(10-rasm)* C nuqtadan ABD tekislikkacha bo‘lgan masofadan ikki marta katta bo‘lsa, ABC va ABD tekisliklar orasidagi burchakni toping.

21.9. ABC uchburchak yuzi 18 cm^2 ga teng *(11-rasm)*. $KC \perp ABC$**.** Agar ABK va ABC uchburchaklar tekisliklari orasidagi burchak: a) α = 30°; b) α = 45°; c) α = 60° bo‘lsa, ABK uchburchak yuzini toping.

21.10. ABC va ABD uchburchaklar tekisliklari orasidagi burchak 60° ga teng. Agar $AB = 4\sqrt{3}$ bo‘lsa, CD masofani toping.

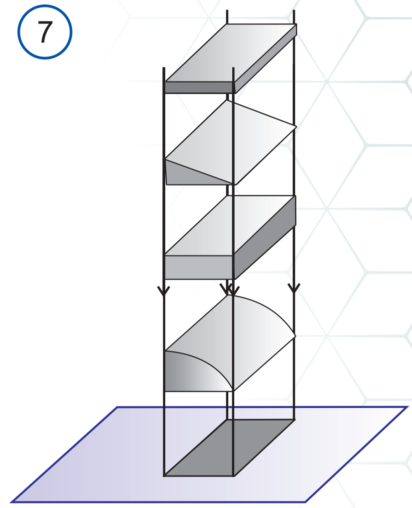
21.11. To‘g‘ri to‘rtburchakning yuzi 72 ga teng. Uning tekislikdagi ortogonal proyeksiyasi kvadratdan iborat. Tekislik va to‘g‘ri to‘rtburchak yotgan tekislik orasidagi burchak 60° ga teng. Kvadratning perimetrini toping.

21.12. Yuzi 48 cm^2 ga teng bo‘lgan uchburchakning ortogonal proyeksiyasi tomonlari 14 cm, 16 cm va 6 cm bo‘lgan uchburchakdan iborat. Bu uchburchak tekisligi va uning proyeksiyasi orasidagi burchakni hisoblang.

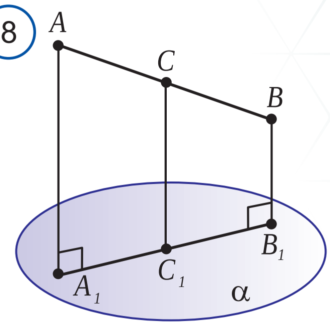
21.13. Yuzi 12 cm^2 ga teng bo‘lgan uchburchakning ortogonal proyeksiyasi tomonlari 13 cm, 14 cm va 15 cm bo‘lgan uchburchakdan iborat. Bu uchburchak tekisligi va uning proyeksiyasi orasidagi burchakni hisoblang.

21.14. Asosi 8 cm va yon tomoni 12 cm bo‘lgan teng yonli uchburchakning ortogonal proyeksiyasi tomonlari 8 cm, 6 cm va 6 cm bo‘lgan uchburchakdan iborat. Bu uchburchak tekisligi va uning proyeksiyasi orasidagi burchakni toping.

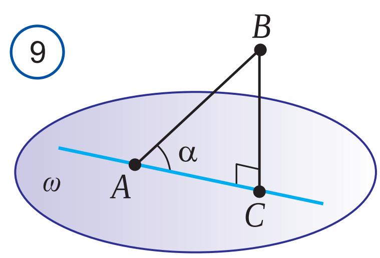
7



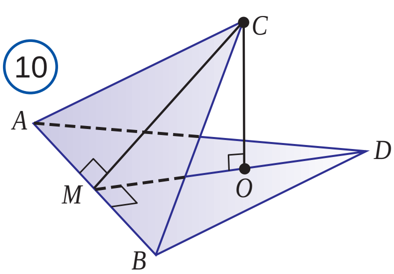
8



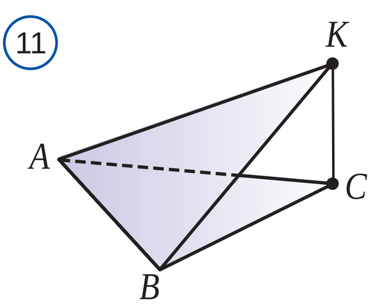
9



10



11



22 BOBNI TAKRORLASHGA DOIR AMALIY MASHQLAR

22.1. Quyidagi mulohazalarning qaysi biri noto‘g‘ri?

A) Agar bir tekislikda yotgan ikki to‘g‘ri chiziq ikkinchi tekislikda yotgan ikki to‘g‘ri chiziqqa mos ravishda parallel bo‘lsa, bu tekisliklar paralleldir.

B) Agar ikki to‘g‘ri chiziq uchinchi to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lsa, ular o‘zaro paralleldir.

C) Tekislikda yotgan to‘g‘ri chiziq og‘maning proyeksiyasiga perpendikulyar bo‘lsa, og‘maning o‘ziga ham perpendikulyar bo‘ladi.

D) To‘g‘ri chiziq tekislikda yotgan ikki kesishuvchi to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar bo‘lsa, bu to‘g‘ri chiziq tekislikka ham perpendikulyar bo‘ladi.

E) Og‘ma va uning tekislikdagi proyeksiyasi orasidagi burchaklardan eng kichigi og‘ma va tekisliklar orasidagi burchak deyiladi.

22.2. Quyidagi mulohazalarning qaysi biri noto‘g‘ri?

A) Agar fazoda ikki to‘g‘ri chiziq uchinchi to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lsa, ular o‘zaro paralleldir.

B) Tekislikda og‘maning asosidan uning proyeksiyasiga perpendikulyar qilib o‘tkazilgan to‘g‘ri chiziq og‘maning o‘ziga ham perpendikulyar bo‘ladi.

C) Fazodagi uchta nuqta orqali faqat bitta tekislik o‘tkazish mumkin.

D) To‘g‘ri chiziq yoki parallel to‘g‘ri chiziqlar kesmalarining nisbati parallel proyeksiyalashda o‘zgarmaydi (proyeksiyalanadigan kesmalar proyeksiyalash yo‘nalishiga parallel emas).

E) Tekislikdan tashqarida yotgan to‘g‘ri chiziq bu tekislikdagi biror to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lsa, bu to‘g‘ri chiziq va tekislik o‘zaro paralleldir.

22.3. $ABCD$ to‘g‘ri to‘rtburchak tekisligiga uning B uchi orqali BM perpendikulyar tushirilgan. a) AD to‘g‘ri chiziq AB va BM to‘g‘ri chiziqlar yotgan tekislikka; b) CD to‘g‘ri chiziq BC va BM to‘g‘ri chiziqlar yotgan tekislikka perpendikulyar bo‘lishini isbotlang.

22.4. A va B nuqtalardan α tekislikka perpendikulyar va uni mos ravishda C va D nuqtalarda kesib o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq o‘tkazilgan. Agar $AC = 3\ m$, $BD = 2\ m$ va $CD = 2{,}4\ m$ bo‘lsa hamda AB to‘g‘ri chiziq α tekislikni kesmasa, A va B nuqtalar orasidagi masofani toping.

22.5. To‘g‘ri burchakli parallelepipedning uchta o‘lchamiga ko‘ra uning diagonali uzunligini toping: a) 1, 2, 2; b) 2, 3, 6; c) 6, 6, 7.

22.6. Kubning qirrasi a ga teng. Kubning uchidan uning boshqa ikki uchini tutashtiruvchi diagonali orasidagi masofani toping.

22.7. To‘g‘ri burchakli parallelepiped asosining tomonlari 7 cm va 24 cm, balandligi 8 cm. Parallelepiped diagonal kesimining yuzini toping.

22.8. To‘g‘ri burchakli parallelepipedning uchta o‘lchamiga ko‘ra uning to‘la sirti yuzini toping: 10 cm, 22 cm, 16 cm.

22.9. To'g'ri burchakli parallelepipedning balandligi h, asosining yuzi Q, diagonal kesimining yuzi M bo'lsa, uning yon sirtining yuzini toping.

22.10. To'g'ri burchakli parallelepipedning bitta uchida uchrashuvchi yoqlarining diagonallari: a, b, c ga teng *(1-rasm)*. Parallelepipedning uchta o'lchami uzunliklarini toping.

22.11. Perpendikulyar bilan og'ma orasidagi burchak 60° ga teng. Perpendikulyarning uzunligi 20 ga teng. Og'maning uzunligini toping.

22.12. Tekislikka tushirilgan og'ma bilan perpendikulyar orasidagi burchak 60°, og'maning uzunligi $20\sqrt{3}$. Perpendikulyarning uzunligini toping.

22.13. Tekislikka o'tkazilgan perpendikulyar bilan og'ma orasidagi burchak 30°, perpendikulyarning uzunligi esa 10 ga teng. Og'maning uzunligini toping.

22.14. Nuqtadan tekislikka ikkita og'ma o'tkazilgan. Agar og'malar 1 : 2 ga teng nisbatda bo'lib, ularning proyeksiyalari 1 va 7 ga teng bo'lsa, og'malarning uzunligini toping.

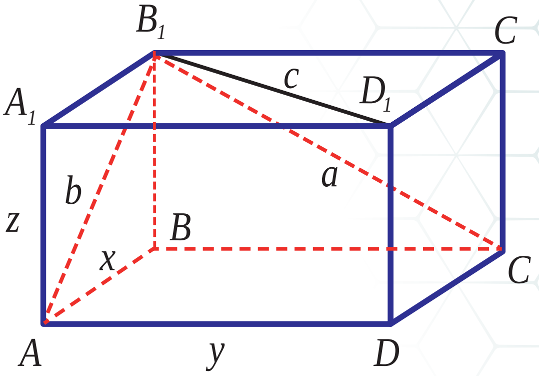
22.15. ABC uchburchakning to'g'ri burchakli B uchidan uchburchak tekisligiga perpendikulyar to'g'ri chiziq b o'tkazilgan. $AB = 3$, $BC = 4$. b va AC to'g'ri chiziqlar orasidagi masofani toping.

22.16. Uzunliklari 10 cm va 15 cm bo'lgan ikki kesmaning uchlari o'zaro parallel tekisliklarda yotadi. Birinchi kesmaning tekislikdagi proyeksiyasi $\sqrt{19}$ cm bo'lsa, ikkinchi kesmaning proyeksiyasi necha cm bo'ladi?

22.17. O'lchamlari 12,5 m va 7,2 m bo'lgan uy tomi to'rtta qiya yoqlar bilan 2-rasmda ko'rsatilgandek qilib yopilgan. Har bir yoq tom tekisligi bilan 40° li burchak tashkil qiladi. a) Har bir qiya yoq yuzini toping; b) Tomning jami qiya yoqlari yuzini toping. c) Tomni tunuka bilan yopganda uning 6 foizi isrof bo'lishi ma'lum bo'lsa, tomni yopishga qancha tunuka kerak bo'ladi?

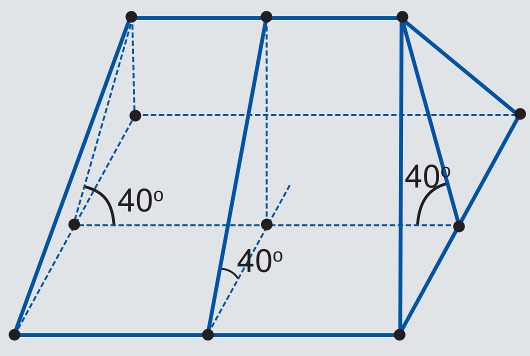
22.18. AB va CD – o'zaro 60° li burchak hosil qilib kesishuvchi ikki tekislikda yotgan parallel to'g'ri chiziqlar. A va D nuqtalar tekisliklarning kesishish chizig'idan 8 cm va 6,3 cm uzoqlikda. AB va CD orasidagi masofani toping.

1



2

a)



b)

Amaliy kompetensiyalarni shakllantirishga doir masalalar

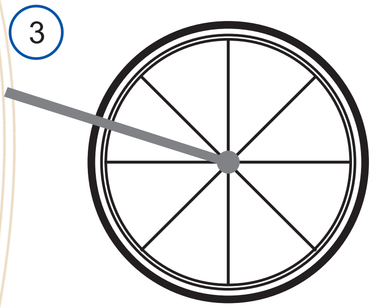
1. Ikki qo‘shni xona devorlari tutashgan chiziqning polga perpendikulyarligini qanday qilib o‘lchashlar yordamida tekshirsa bo‘ladi?

2. Uzunlik o‘lchov asbobi – ruletka yordamida ustunning tikligini qanday tekshirsa bo‘ladi?

3. G‘ildirak o‘qi tekisligining u g‘ildirayotgan tekislikka perpendikulyarligini qanday tekshirsa bo‘ladi?

4. Nima sababdan qishda tomdan osilib tushgan sumalaklarni ularning qalinligini hisobga olmasdan o‘zaro parallel deyish mumkin?

3



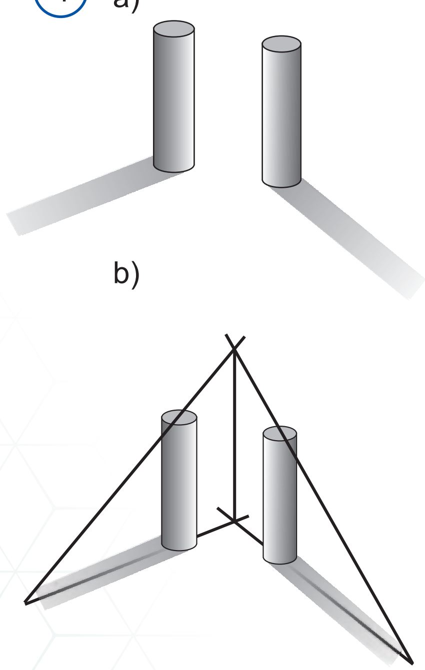
5. O‘quvchi amaliy ish bajardi. Bir nechta o‘rnatilgan ustunlarning yerga nisbatan tikligini tekshirish uchun ulardan faqat bittasini tekshirdi. Qolgan ustunlarning tikligini quyidagicha tekshirdi: hamma ustunlarning balandligini, ularning pastki asoslari va yuqori uchlari orasidagi masofalarni o‘lchab qaror qabul qildi. U bu ishni to‘g‘ri bajardimi?

6. Nima sababdan eshik ochiq yoki yopiq bo‘lishidan qat’i nazar, polga nisbatan perpendikulyar bo‘ladi?

7. To‘g‘ri chiziqning tekislikka perpendikulyarligiga yaqqol misol sifatida g‘ildirak simlari yotgan tekislikning g‘ildirak o‘qiga bo‘lgan joylashuvini keltirish mumkin *(3-rasm)*. O‘q g‘ildirakning har bir simiga perpendikulyar. Harakat davomida g‘ildirak simlari har bir nuqtada kesishadigan kesmalardan iborat doira tekisligini hosil qiladi. Agar o‘q gorizontal joylashgan bo‘lsa, g‘ildirak qanday tekislikda aylanadi? Nega?

Ko‘rsatma: g‘ildirak o‘qiga perpendikulyar tekislikka perpendikulyar bo‘ladi.

4



8. Balandlikka sakrash mashqi bajarilmoqda. To‘siq tayoqni ma’lum balandlikka o‘rnatish uchun qirrasi 25 cm bo‘lgan kub va o‘lchamlari 25 cm X 25 cm X 50 cm bo‘lgan to‘g‘ri burchakli parallelepipedlardan foydalanilmoqda. 1) 125 cm; 2) 150 cm; 3) 175 cm balandlikka sakrash mashqlarini qanday tashkil qilsa bo‘ladi?

9. 4-rasmda ikkita vertikal ustun va ularning soyasi tasvirlangan. Shu ma’lumotlardan foydalanib yorug‘lik manbai (chiroq) joylashgan nuqtani va uning gorizontal tekislikka proyeksiyasini toping va quyidagi savollarga javob bering. 1) Ustunlarning vertikalligining ahamiyati bormi? 2) Soya tushayotgan tekislik gorizontalligining ahamiyati bormi? 3) Rasmda berilgan ma’lumotlarning hammasi ham muhimmi?

Yechish. 4-rasmda tegishli yasashlar keltirilgan. Yorug‘lik manbaining joyini topishda ustunlarning yo‘nalishi ahamiyatga ega emas, lekin ularning vertikal ekani muhim hisoblanadi. Agar ustunlar vertikal va soya gorizontal tekislikka tushayotgan bo‘lsa, masalani yechish uchun rasmdagi bitta ustunning soyasini va ikkinchi ustundan tushayotgan soyaning yo‘nalishini bilish kifoya *(4b-rasm)*.

10. Qalinligi 5 m, yuzi 4 m^2 bo‘lgan, kvadrat shaklidagi po‘lat platforma to‘rtta uchidan tros sim bilan gorizontal osilgan. Har bir tros sim uzunligi 2 m. Tros simlarning platformaga nisbatan og‘ish burchagini toping. Balandligi 0,9 m, asosining diametri 0,6 m bo‘lgan silindr shaklidagi bakni bu platformaga joylashtirib bo‘ladimi?

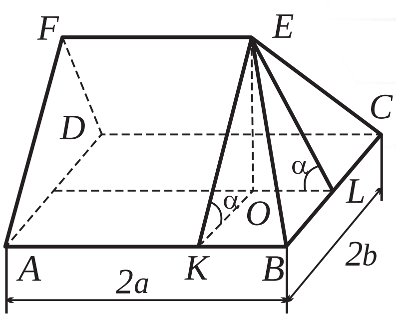
Javob: 45°, bakni joylashtirib bo‘ladi.

11. Suv to‘rt tomonidan oqib tushadigan tom asosiga ortogonal proyeksiyalangan. Tom qirralarining proyeksiyasi to‘g‘ri to‘rtburchak shaklidagi tom asosi burchagining bissektrisasi bo‘lishini isbotlang.

12. Asosi $ABCD$ to‘g‘ri to‘rtburchakdan iborat uyga yomg‘ir suvi to‘rt tomonidan oqib tushadigan tom o‘rnatish kerak *(5-rasm)*. $AB = 2a$ m, $BC = 2b$ m. Tomning hamma yoqlari asos tekisligi bilan α burchak tashkil qiladi. Bu tomni yopish uchun qancha tunuka kerak bo‘ladi? Bunda tom sirti yuzining k foizi miqdoridagi tunuka chiqitga ketishini hisobga oling.

Javob: $4ab\,(1 + 0{,}01k) / \cos\alpha$.

5



13. Shamolsiz havoda yomg‘ir qiyalab yog‘moqda. To‘g‘ri to‘rtburchak shaklidagi faner bo‘lagi yordamida yomg‘irning gorizont tekisligiga nisbatan qiyaligini qanday aniqlasa bo‘ladi? Tegishli chizmani chizing.

Ko‘rsatma. Faner bo‘lagini shunday joylashtirish kerakki, uning tekisligi yomg‘ir tomchilari harakat trayektoriyasi va ularning gorizontal tekislikka proyeksiyasi aniqlagan tekislikka taxminan perpendikulyar bo‘lsin. Shunda gorizontal tekislikda yomg‘ir tushmaydigan to‘g‘ri to‘rtburchak hosil bo‘ladi. So‘ng tegishli kesmalarning uzunliklari o‘lchanadi va ular orasidagi burchakning tangensi hisoblanadi.

14. Yuzi S_1 ga, uzunligi n ga teng bo‘lgan bolalar karavoti ustini ikkita bir xil to‘g‘ri to‘rtburchak shaklidagi pardalar bilan yopish kerak. Har bir pardaning yuzi S_2 ga, uzunligi esa karavot uzunligiga teng. Har ikkala pardaning yuqori cheti karavot ustida parallel o‘rnatilgan va karavot uzunligiga teng simga mahkamlangan. Simning karavotdan qanday balandlikda o‘rnatilganini toping. Masalani quyidagi sonli shartlarda yeching:

n = 1 m 20 cm, $S_1 = 6000$ cm^2, $S_2 = 7800$ cm^2. Tegishli chizmani chizing.

Ko‘rsatma. $\dfrac{\sqrt{4S_2^2 - S_1^2}}{2n}$. **Javob:** 0,5 m.

O‘ZINGIZNI SINAB KO‘RING

Testlar

1. Qaysi mulohaza to‘g‘ri?

A) Agar ikkita to‘g‘ri chiziqdan biri uchinchi to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar bo‘lsa, ikkinchi to‘g‘ri chiziq ham shu to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar bo‘ladi.

B) Agar ikkita to‘g‘ri chiziq uchinchi to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar bo‘lsa, ular parallel.

C) Agar ikkita to‘g‘ri chiziq tekislikka perpendikulyar bo‘lsa, ular parallel.

2. m to‘g‘ri chiziq α tekislikda yotgan a va b to‘g‘ri chiziqlarga perpendikulyar, lekin m to‘g‘ri chiziq α tekislikka perpendikulyar emas. a va b to‘g‘ri chiziqlar haqida nima deyish mumkin?

A) parallel

B) kesishadi

C) ayqash

3. α tekislik $ABCD$ rombning A uchidan o‘tadi va AC diagonaliga perpendikulyar. U holda BD diagonal ...

A) α tekislikka perpendikulyar

B) α tekislikka parallel

C) α tekislikda yotadi

4. $a \parallel \alpha$, $b \perp \alpha$. Bu holda a va b to‘g‘ri chiziqlar qanday bo‘lishi mumkin emas?

A) kesishuvchi

B) perpendikulyar

C) parallel

5. $ABCD$ parallelogramm, $BD \perp \alpha$, $AC \perp \alpha$ *(1-rasm)*. U holda $ABCD$ nima bo‘la olmaydi?

A) to‘g‘ri to‘rtburchak

B) kvadrat

C) romb

6. To‘g‘ri chiziq doira tekisligiga perpendikulyar bo‘ladi, agar u ...

A) ikkita radiusga perpendikulyar bo‘lsa

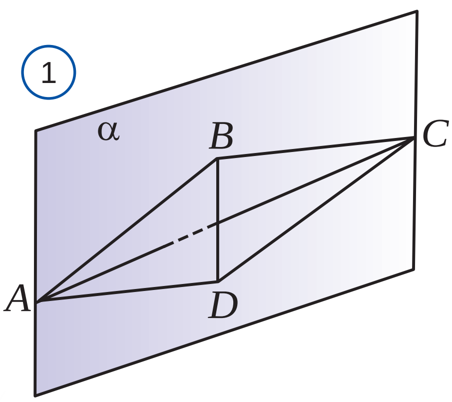
B) ikkita diametrga perpendikulyar bo‘lsa

C) ikkita vatarga perpendikulyar bo‘lsa.

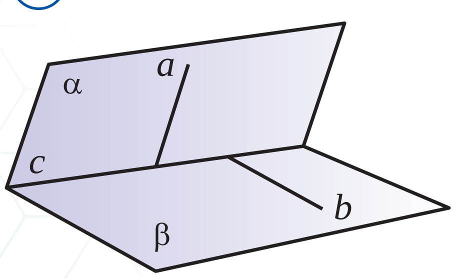
7. $\alpha \cap \beta = c$, $a \in \alpha$, $b \in \beta$ *(2-rasm)*. Qaysi shart bajarilganda $\angle(ab)$ - α va β tekisliklar orasidagi ikki yoqli burchakning chiziqli burchagi bo‘ladi?

A) $b \perp \alpha$ bo‘lsa

1



2



B) $a \perp c$ bo‘lsa

C) $a \perp c$, $b \perp c$ bo‘lsa

8. Qaysi mulohaza to‘g‘ri?

A) Ikki yoqli burchakning qirrasi uning chiziqli burchagi tekisligiga perpendikulyar bo‘lishi mumkin emas.

B) Bir tekislikka perpendikulyar bo‘lgan ikkita tekislik parallel bo‘lishi mumkin emas.

C) Bitta to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar bo‘lgan ikkita tekislik parallel bo‘lolmaydi.

9. $ABC \perp ABD$ *(3-rasm)*. D nuqtadan ABC tekislikka tushirilgan perpendikulyarning asosi ...

A) ABC uchburchakdan tashqarida yotadi

B) AB tomonida yotadi

C) ABC uchburchak ichida yotadi

10. Qaysi mulohaza noto‘g‘ri?

1) Agar ikkita tekislikdan biri ikkinchi tekislikka perpendikulyar bo‘lgan chiziqdan o‘tsa, bunday tekisliklar perpendikulyar bo‘ladi.

2) Agar tekisliklar perpendikulyar bo‘lsa, u holda ularning kesishish chizig‘i shu tekisliklarning birida yotgan har qanday to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar bo‘ladi.

3) Berilgan ikkita tekislikning kesishish chizig‘iga perpendikulyar bo‘lgan tekislik shu tekisliklarning har biriga perpendikulyar.

11. Parallelepipedning ikki yoqli burchaklari soni nechta?

A) 18 ta

B) 12 ta

C) 24 ta

12. ABC uchburchakda AN va CM – balandliklar *(4-rasm)*. $DO \perp ABC$. $ABCD$ ikki yoqli burchakning gradus o‘lchovi qaysi burchak gradus o‘lchoviga teng?

A) ABD

B) AND

C) ACD

13. $AF \perp \alpha$ *(5-rasm)*. Qaysi tengsizlik o‘rinli emas?

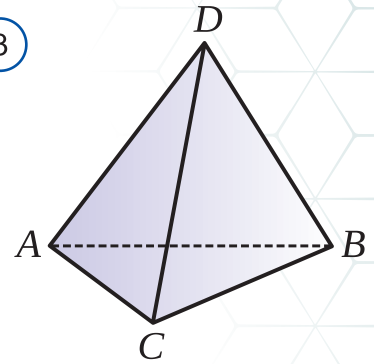
A) $FM > AF$

B) $FA > FK$

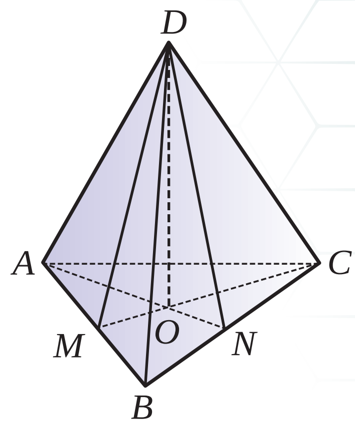
C) $AK < FK$

14. $BF \perp ABC$ *(6-rasm)*. $ABCD$ qanday bo‘lsa, CD va CF to‘g‘ri chiziqlar perpendikulyar bo‘ladi?

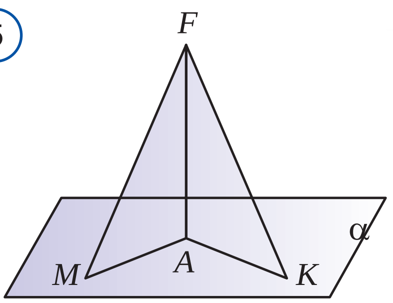
3



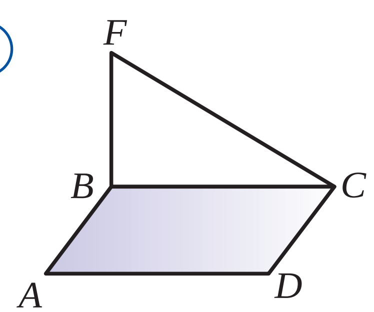
4



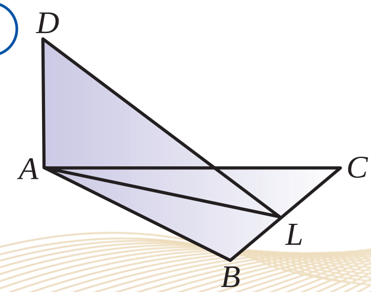
5



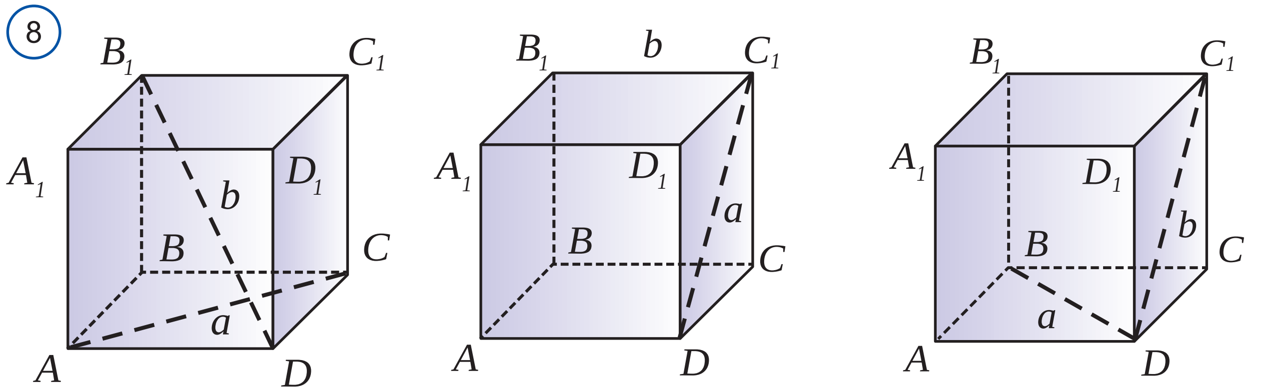
6



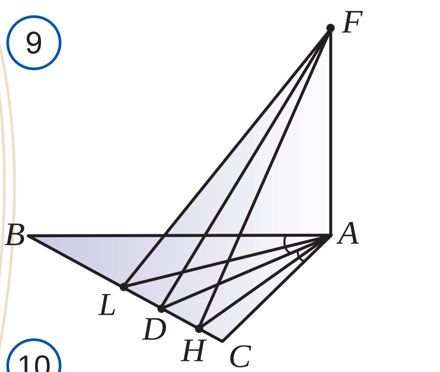
7



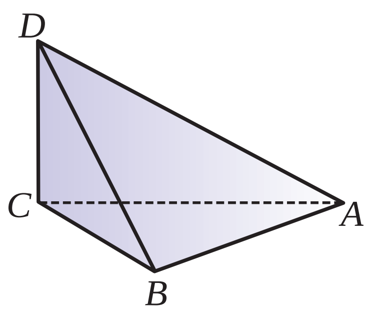
8



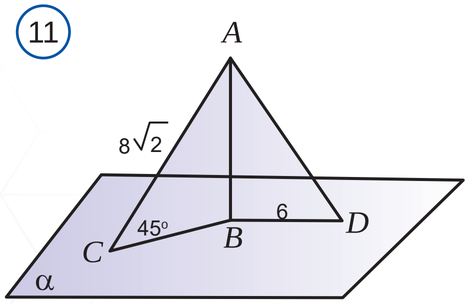
9



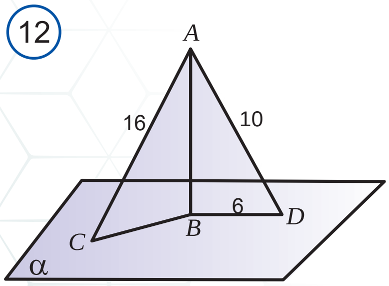
10



11



12



A) to‘rtburchak

B) romb

C) kvadrat

15. $AD \perp ABC$ *(7-rasm)*. LA nima bo‘lsa, DL va BC to‘g‘ri chiziqlar perpendikulyar bo‘ladi?

A) bissektrisa

B) mediana

C) balandlik

16. M nuqta ABC uchburchak uchlaridan teng masofada joylashgan. M nuqtaning ABC tekislikdagi proyeksiyasi qaysi kesmalar kesishish nuqtasidan iborat bo‘ladi?

A) uchburchak balandliklarining

B) uchburchak bissektrisalarining

C) uchburchak tomonlariga tushirilgan o‘rta perpendikulyarlarining

17. 8-rasmda $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kub tasvirlangan. a va b to‘g‘ri chiziqlar qaysi rasmda perpendikulyar emas?

18. ABC uchburchakda AL – mediana, AD – bissektrisa, AH – balandlik *(9-rasm)*. $AF \perp ABC$. F nuqtadan BC to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa qaysi kesma uzunligiga teng bo‘ladi?

A) FM

B) FD

C) FH

19. $ABCD$ tetraedrda *(10-rasm)* $\angle BCD = \angle ACD = 90^o$. CD ga perpendikulyar bo‘lgan barcha qirralarni ko‘rsating.

A) AB, CB, CA B) AB, BD, AD

C) CB, CA D) AB

20. α tekislikka A nuqtadan AB perpendikulyar, AC va AD og‘malar tushirilgan *(11-rasm)*.

$\angle ACB$= 45°, $AC = 8\sqrt{2}$, BD = 6. AD ni toping.

A) $2\sqrt{13}$;

B) 10;

C) 14

D) 4

21. α tekislikka AB perpendikulyar *(12-rasm)*, AD va AC og‘malar tushirilgan. BD = 6, AD = 10, AC = 16. $\angle ACB$ ni toping.

A) 45°

B) 30°

C) 60°

D) 90°

Masalalar

1. KS kesma ABC uchburchak tekisligiga perpendikulyar, KB kesma AB ga perpendikulyar.

1) ABC to‘g‘ri burchakli uchburchak ekanini isbotlang.

2) KAC va ABC tekisliklarning perpendikulyarligini isbotlang.

3) Agar AC = 14, BC = 6 va $\angle KBC$ = 45° bo‘lsa, KB kesma uzunligini toping.

2. A nuqtadan α tekislikka tekislik bilan 60° burchak hosil qiluvchi AB va AC og‘malar o‘tkazilgan. Agar BC = AC = 6 bo‘lsa, AB ni toping.

3. KA kesma ABC tekisligiga perpendikulyar. M nuqta – BC kesmaning o‘rtasi. KM to‘g‘ri chiziq BC to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar va AB = BC.

1) ABC teng yonli uchburchak ekanini isbotlang.

2) KBC va KAM tekisliklarining perpendikulyarligini isbotlang.

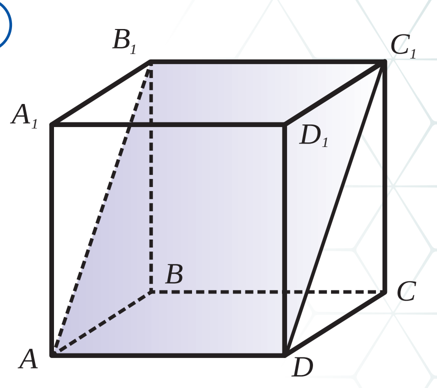
4. Agar BK = 8, KA = 39, BC = 6 bo‘lsa, ABC uchburchakning yuzini toping.

5. S nuqta to‘g‘ri burchakli uchburchak uchlaridan 3 cm uzoqda joylashgan. AB = 9 bo‘lsa, $SABC$ ikki yoqli burchakni toping.

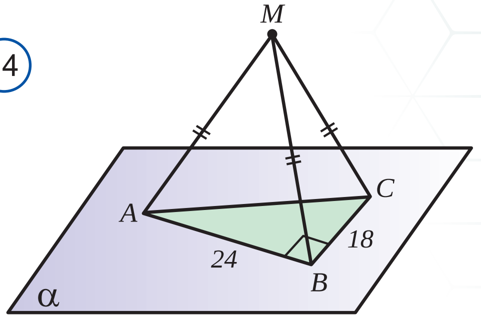
6. O nuqta 60° ga teng ABC burchak bissektrisasida yotadi. DO kesma ABC tekisligiga perpendikulyar va AB = AC.

1) D nuqta A va C nuqtalardan teng masofada yotishini isbotlang.

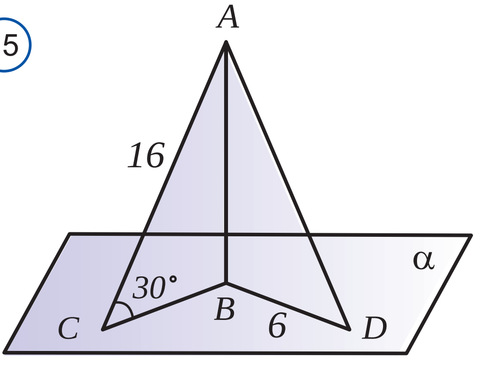
13



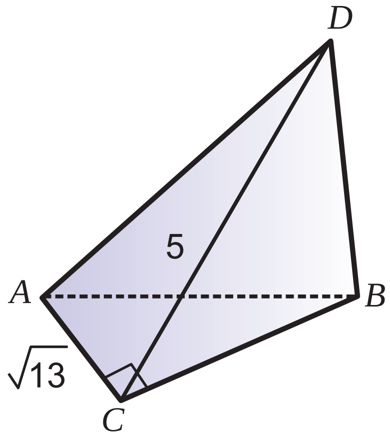
14



15



16



Geometriya qadim zamonlardan beri odamlarga dunyoni bilishda yordam berib keladi. Masalan, Yerning aylanasini qadimgi yunon olimi Eratosfen odamlar Yerning sharsimon shaklga ega ekanini tan olishlaridan bir necha asr oldin aniq hisoblab chiqqan. Buning uchun Eratosfen geometrik qoidalardan foydalangan. Zamonaviy o'lchovlar ko'rsatishicha, u deyarli xato qilmagan – eski va yangi o'lchovlar o'rtasidagi farq ahamiyatsiz bo'lib chiqqan. U Quyosh Syene (Afrikadagi shahar) tepasida turganida 800 km uzoqlikda joylashgan Iskandariyadagiga qaraganda vertikaldan 7° ga og'ishini aniqladi. Eratosfen Quyosh Yerning markazidan 7° burchak ostida ko'rinadi va shuning uchun Yer sharining aylanasi 360 : 7 x 800 = 41140 km degan xulosaga kelgan.

2) DAC va DOB tekisliklarning perpendikulyarligini isbotlang.

3) AC = 12 va DO = 8 bo'lsa, DB ni toping.

7. 13-rasmda kub berilgan. $AD = 42$. AB_1C_1D tekislik va A_1D_1 to'g'ri chiziq orasidagi masofani toping.

8. ABC va ADC teng yonli uchburchaklar umumiy AC asosga ega. $BASD$ ikki yoqli burchak to'g'ri. Agar $\angle ACD = 45°$ va $\angle CAB = 60°$ bo'lsa, $DCBA$ ikki yoqli burchakni toping.

9. 14-rasmda $\angle ABC = 90°$, $MA = MB = MC$. ABC uchburchak tekisligi va M nuqta orasidagi masofa 8 ga teng. MA kesma uzunligini toping.

10. SA to'g'ri chiziq $ABCD$ to'rtburchakning uchidan o'tadi va uning AB va AD tomonlariga perpendikulyar. SAD va ABC tekisliklarning perpendikulyarligini isbotlang.

11. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kubining qirrasi 4 ga teng. AB va CC_1 to'g'ri chiziqlar orasidagi masofani toping.

12. Umumiy asosli ABD va ABC teng yonli uchburchaklar tekisliklari o'zaro perpendikulyar. Agar $AD = \sqrt{31}$ cm, $AB = 6$ cm, $\angle ACB = 60°$ bo'lsa, CD ni toping.

13. Perpendikulyar α va β tekisliklar l to'g'ri chiziq bo'ylab kesishadi. α va β tekisliklarda yotuvchi OA va OB kesmalar mos ravishda l to'g'ri chiziqqa perpendikulyar va ularning umumiy uchi – O nuqta l to'g'ri chiziqda yotadi. Agar $OA = 20$ cm, $OB : AB = 12 : 13$ bo'lsa, AB ni toping.

14. ABC teng yonli uchburchakning B uchi orqali AC asosga parallel tekislik o'tkazildi. Uchburchakning yuzi 48 cm^2 ga teng. Agar asos $AC = 12$ cm va u tekislikdan 5 cm uzoqlikda joylashgan bo'lsa, uchburchak yon tomonlarining ushbu tekislikka qiyalik burchaklarini toping.

15. $AB \perp \alpha$, $\angle ACB = 30°$, $AC = 16$ cm, $BD = 6$ cm *(15-rasm)*. AD ni toping.

16. ABC uchburchakda $\angle ACB = 90°$, $AB = 5$ cm, $AC = \sqrt{13}$ cm *(16-rasm)*. $BD \perp ABC$, $\angle(CD, ABC) = 30°$. BD perpendikulyar uzunligini toping.

V BOB

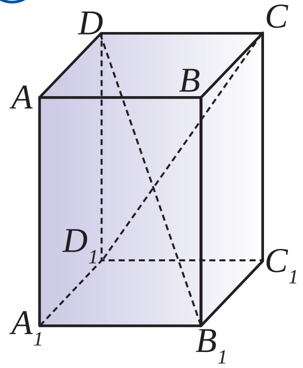
TAKRORLASH

Bu bobni o‘rganish natijasida siz 10-sinfda shakllantirilgan bilim va ko‘nikmalaringizni mustahkamlab olasiz:

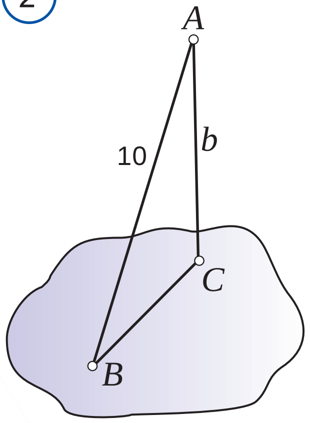
– tekislikka perpendikulyar va og‘malar;
– to‘g‘ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchak;
– parallel to‘g‘ri chiziqlar va tekisliklar;
– tekislikka parallel to‘g‘ri chiziq;
– parallel tekisliklar;
– perpendikulyar tekisliklar.

23 TAKRORLASHGA DOIR MASALALAR

1



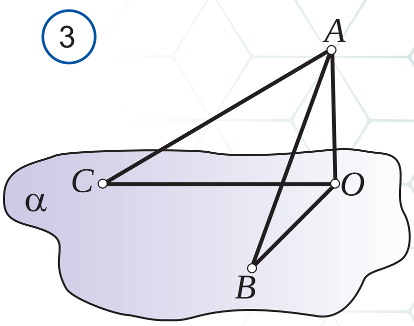
2



1. Tekislikka perpendikulyar va og'malar

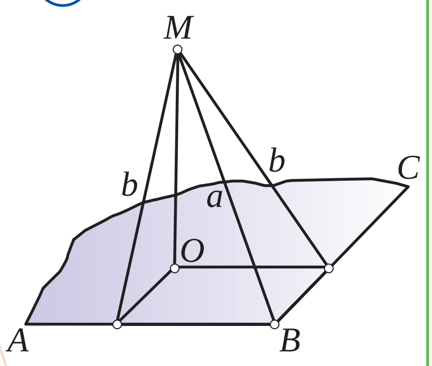
1. 1-rasmda to'g'ri burchakli parallelepiped tasvirlangan. 1) DB_1 va D_1C to'g'ri chiziqlar kesishadimi? BB_1 va D_1C to'g'ri chiziqlar-chi? 2) AO va B_1C_1 to'g'ri chiziqlar orqali tekislik o'tkazish mumkinmi? DC va DB_1 orqali-chi? BC va AA_1 orqali-chi?
2. To'g'ri burchakli parallelepipedning qirralari 3 cm, 4 cm va 7 cm. Bir uchidan chiqqan uchta qirra uchlari orqali o'tkazilgan kesimning yuzini toping.
3. Muntazam prizmaning asosi tomoni a ga teng bo'lgan uchburchakdan iborat. Prizmaning balandligi b ga teng. Ostki asosi tomonlarining biri va ustki asosining shu tomon qarshisida yotgan uchi orqali tekislik o'tkazing. Hosil bo'lgan kesimning yuzini hisoblang.
4. To'g'ri chiziqda olingan nuqtadan shu to'g'ri chiziqqa perpendikulyar tekislik o'tkazing.
5. To'g'ri chiziq tashqarisida olingan nuqtadan shu to'g'ri chiziqqa perpendikulyar tekislik o'tkazing.
6. Tekislikdan b cm masofada turgan A nuqtadan, shu tekislikka uzunligi 10 cm bo'lgan AB og'ma o'tkazilgan. Uning shu tekislikka tushirilgan BC proyeksiyasini toping *(2-rasm)*.
7. Tekislikdan tashqarida yotgan nuqtadan berilgan masofada turgan nuqtalarning berilgan tekislikdagi geometrik o'rnini toping.
8. Doira markazidan uning tekisligiga perpendikulyar o'tkazilgan. Agar perpendikulyarning uzunligi a ga, doiraning yuzi Q ga teng bo'lsa, perpendikulyarning ustki uchidan aylanadagi nuqtagacha bo'lgan masofani aniqlang.
9. Berilgan ikki nuqtadan teng uzoqlikdagi nuqtalarning geometrik o'rnini toping.
10. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ to'g'ri burchakli parallelepipedning yon qirrasi AA_1 = 56 cm, asosining tomonlari: AB = 33 cm va AO = 40 cm. AD va B_1C_1 qirralaridan o'tkazilgan kesimning yuzini aniqlang.
11. O nuqta – tomoni a bo'lgan kvadratning markazi, OA – kvadrat tekisligiga perpendikulyar to'g'ri chiziq bo'lib, uzunligi b ga teng. A nuqtadan kvadratning uchlarigacha bo'lgan masofani toping.
12. α tekislikdan d = 4 masofada turgan M nuqtadan shu tekislikka MA, MB va MC og'malar o'tkazilgan. Bu og'malar bilan α tekislikka perpendikulyar bo'lgan MO to'g'ri chiziq orasidagi burchaklar: 30°, 45°, 60°. MA, MB va MC og'malarning uzunliklarini aniqlang.

13. α tekislikka biror M nuqtadan oʻzaro teng uchta ogʻma MA, MB va MC oʻtkazilgan. $MA = MB$ va O nuqta – M nuqtaning proyeksiyasi. A, B va C nuqtalarning (ogʻmalarning α tekislikdagi asoslari) markazi O nuqta boʻlgan aylanada yotishini koʻrsating.



14. Tekislikka fazoning bir nuqtasidan uzunligi 20 cm va 15 cm boʻlgan ikki ogʻma oʻtkazilgan. Birinchi ogʻmaning tekislikdagi proyeksiyasi 16 cm. Ikkinchi ogʻmaning proyeksiyasini toping.
15. Tekislikka fazodagi bir nuqtadan perpendikulyar va ogʻma oʻtkazilgan. Perpendikulyarning uzunligi 6 cm, ogʻmaning uzunligi 9 cm. Perpendikulyarning ogʻmaga tushirilgan proyeksiyasini toping.
16. Biror A nuqtadan berilgan α tekislikka *(3-rasm)* AO perpendikulyar va bir-biriga teng AB va AC ogʻmalar oʻtkazilgan. Ogʻmalar perpendikulyar bilan $\angle BAO = \angle CAO = 60°$ li, oʻzaro esa $\angle CAB = 90°$ li burchak hosil qiladi. $AO = 1$ cm. Ogʻmalarning asoslari orasidagi BC masofani toping.
17. Teng yonli uchburchakning asosi va balandligi 4 cm dan. Berilgan nuqta uchburchak tekisligidan b cm masofada va uning uchlaridan baravar masofada turadi. Shu masofani toping.
18. Teng yonli ABC uchburchak berilgan, uning asosi $b = 6$ cm va yon tomoni $a = 5$ cm. Uchburchakka ichki chizilgan aylananing O markazidan uchburchak tekisligiga $OK = 2$ cm perpendikulyar oʻtkazilgan. K nuqtadan uchburchakning tomonlarigacha va B uchigacha boʻlgan masofani toping.
19. ABC uchburchakda B burchak toʻgʻri boʻlib, katet $BC = a$. A uchidan uchburchak tekisligiga D perpendikulyar oʻtkazilgan. D va C nuqtalar orasidagi masofa f ga teng boʻlsa, D nuqtadan BC katetgacha boʻlgan masofani toping.
20. ABC uchburchakda C – toʻgʻri burchak. CD – shu uchburchak tekisligiga oʻtkazilgan perpendikulyar. D nuqta A va B nuqtalar bilan tutashtirilgan. Agar $CA = 3$ dm, $BC = 2$ dm va $CD = 1$ dm boʻlsa, AOB uchburchakning yuzini aniqlang.
21. $ABCD$ toʻgʻri toʻrtburchakning A uchidan uning tekisligiga AK perpendikulyar oʻtkazilgan, uning K uchi toʻrtburchakning boshqa uchlaridan 6 cm, 7 cm va 9 cm masofada yotadi. AK perpendikulyarning uzunligini toping.
22. A va B nuqtalar α tekislikda yotadi. AC va BE shu tekislikka oʻtkazilgan perpendikulyarlardir. Agar: $AC = a$ va $BD = b$ boʻlsa, AD va BC chiziqlarning kesishishini isbot qiling hamda ularning kesishish nuqtasidan α tekislikkacha boʻlgan masofani toping.

4



23. Berilgan to‘g‘ri burchak tekisligidan tashqarida yotgan M nuqta uning B uchidan a uzoqlikda, har qaysi tomonidan esa b uzoqlikda yotadi. To‘g‘ri burchak tekisligidan M nuqtagacha bo‘lgan MO masofa qanchaga teng *(4-rasm)*?
24. α tekislikda AB va CD parallel to‘g‘ri chiziqlar berilgan, ular orasidagi masofa a ga teng. α tekislik tashqarisida AB dan b uzoqlikda va CD dan c uzoqlikda S nuqta berilgan. Agar: a) $a = 66$, $b = c = 65$; b) $a = 6$, $b = 25$, $c = 29$ ekani ma’lum bo‘lsa, S nuqtadan α tekislikkacha bo‘lgan masofani aniqlang.
25. Agar tekislikda yotgan burchakning uchidan tekislikka burchakning tomonlari bilan teng burchaklar hosil qiladigan og‘ma o‘tkazilsa, bu og‘maning proyeksiyasi berilgan burchakning bissektrisasi bo‘lishini isbotlang.

2. To‘g‘ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchak

1. To‘g‘ri burchakli parallelepiped asosining qirralari 4 *cm* va 3 *cm*, parallelepipedning balandligi 5 *cm*. Uning diagonalini va diagonalning asos tekisligi bilan hosil qilgan burchagini toping.
2. To‘g‘ri burchakli parallelepipedning diagonali parallelepiped asosining tekisligi bilan 45° li burchak hosil qiladi. Asosining tomonlari 120 *cm* va 209 *cm*. Parallelepipedning balandligini aniqlang.
3. Muntazam to‘rtburchakli piramidaning balandligi h, apofemaning asos tekisligiga og‘ish burchagi 60°. Piramidaning yon qirralarini toping.
4. Muntazam uchburchakli piramidaning yon qirrasi b ga teng bo‘lib, piramida asosi bilan 30° li burchak hosil qiladi. Piramida asosining tomonini toping.
5. Og‘ma a ga teng. Agar og‘ma proyeksiyalar tekisligi bilan: 1) 45°; 2) 60°; 3) 30° li burchak hosil qilsa, bu og‘maning tekislikdagi proyeksiyasi uzunligini toping.
6. Nuqta tekislikdan h uzoqlikda yotibdi. Shu nuqtadan tekislikka o‘tkazilgan va u bilan: a) 30°; b), 45°; c) 60° li burchaklar hosil qilgan og‘maning uzunligini toping.
7. Kesmaning tekislikka tushirilgan proyeksiyasi uning o‘zidan ikki marta kichik bo‘lishi uchun kesmani tekislikka qanday burchak ostida og‘ma qilib o‘tkazish kerak?
8. Tekislikdan a masofada turgan nuqtadan unga ikkita og‘ma o‘tkazilgan. Bu og‘malar tekislik bilan 45° li burchak, o‘zaro esa 60° li burchak hosil qiladi. Og‘malarning uchlari orasidagi masofani aniqlang.
9. Tekislikdan a uzoqlikda turgan nuqtadan tekislik bilan 30° li burchak yasovchi ikki og‘ma o‘tkazilgan. Ular-

Geometriya matematikaning bo‘limlaridan biri hisoblanadi. Ammo Qadimgi Yunonistonda “matematika” va “geometriya” so‘zlari o‘rtasida teng belgisi qo‘yilgan va hatto mashhur Aflotun maktabining kirish qismiga “Bu yerga geometriyani bilmagan kishi kirmasin!” degan yozuv yozib qo‘yilgan.

ning tekislikdagi proyeksiyalari o‘zaro 120° li burchak hosil qiladi. Og‘malarning uchlari orasidagi masofani aniqlang.

10. AB to‘g‘ri chiziq α tekislikda yotadi. B nuqtadan AB ga perpendikulyar BC va BD to‘g‘ri chiziqlar o‘tkazilgan. Ular α tekislikning bir tomonida bo‘lib, unga 50° va 15° ga og‘gan. CBD burchakni toping.
11. Teng yonli to‘g‘ri burchakli uchburchakning bir kateti α tekislikda yotib, ikkinchi kateti α tekislik bilan 45°li burchak hosil qiladi. Bu holda gipotenuza α tekislik bilan 30° li burchak hosil qilishini asoslang.
12. Agar AB og‘ma α tekislik bilan 45° li burchak hosil qilsa, α tekislikda yotgan AC to‘g‘ri chiziq AB og‘maning proyeksiyasi bilan 45° li burchak hosil qiladi. U holda $\angle BAC$ = 60° bo‘lishini isbotlang.
13. Agar muntazam uchburchakli piramidaning balandligi asosining tomoniga teng bo‘lsa, yon qirralari asos tekisligi bilan 60° li burchak tashkil qilishini isbotlang.

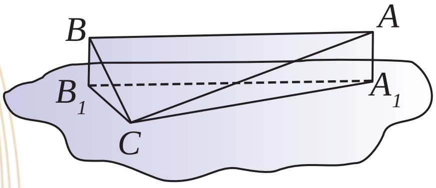
3. Parallel to‘g‘ri chiziqlar va tekisliklar

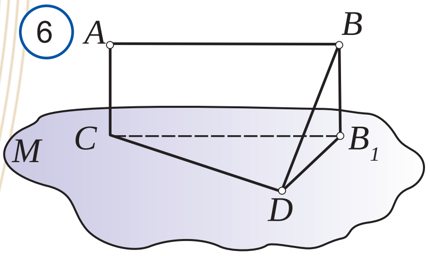
1. A va B nuqtalar α tekislikning tashqarisida yotibdi. AC va BD shu tekislikka perpendikulyar. AC = 3 m, BD = 2 m, CD = 24 dm. A va B nuqtalar orasidagi masofani aniqlang.
2. 125 cm uzunlikdagi kesmaning uchlari tekislikdan 100 cm va 56 cm uzoqlikda. Kesma proyeksiyasining uzunligini toping.
3. α tekislikning A nuqtasidan og‘ma to‘g‘ri chiziq o‘tkazilgan va unda B hamda α nuqtalar olingan. AB = 8 cm va AC = 14 cm. B nuqta α tekislikdan 6 cm uzoqlikda. α tekislikdan C nuqtagacha bo‘lgan masofani toping.
4. 10 cm uzunlikdagi kesma tekislikni kesadi. Uning uchlari tekislikdan 5 cm va 3 cm uzoqlikda. Kesmaning tekislikdagi proyeksiyasining uzunligini toping.
5. Kesma tekislikni kesadi. Uning uchlari tekislikdan 8 cm va 2 cm uzoqlikda. Kesmaning o‘rtasidan tekislikkacha bo‘lgan masofani toping.
6. Tekislik bilan kesishmaydigan kesmaning uchlari tekislikdan 30 cm va 50 cm uzoqlikda. Shu kesmani 3 : 7 nisbatda bo‘luvchi nuqta tekislikdan qancha uzoqlikda bo‘ladi? (ikki holni qarang)
7. Muntazam uchburchak tekislikka proyeksiyalangan. Uning uchlari tekislikdan 10 dm, 15 dm va 17 dm uzoqlikda. Uchburchakning markazidan proyeksiyalar tekisligigacha bo‘lgan masofani toping.
8. Tekislikka parallel AB kesma berilgan, uning uzunligi a ga teng. B uchi bilan ikkinchi uchining A_1 proyeksiyasini tutashtiruvchi BA_1 kesma tekislik bilan 60° li burchak hosil qiladi. BA_1 kesmaning uzunligini aniqlang.
9. α tekislikning A va B nuqtalaridan uning tashqarisiga o‘zaro parallel kesmalar chizilgan: AC = 8 cm va BD = 6 cm. C va D nuqtalar orqali o‘tkazilgan to‘g‘ri chiziq α tekislikni E nuqtada kesadi. AB = 4 cm bo‘lsa, BE masofani aniqlang.
10. a ga teng AB kesma α tekislikda yotadi, har biri b ga teng AC va BD kesmalar α tekislikda yotmaydi. AC kesma α tekislikka perpendikulyar, AB ga perpendikulyar BD esa α tekislik bilan 30° li burchak hosil qiladi. CD masofani aniqlang.

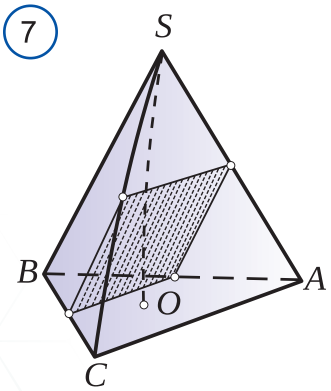
4. Tekislikka parallel to‘g‘ri chiziq

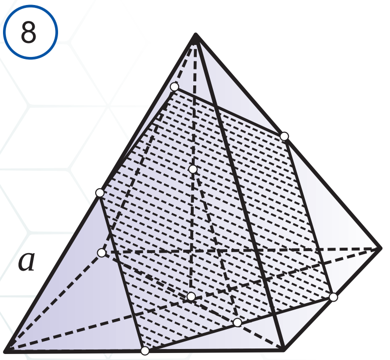
1. a) Berilgan nuqtadan berilgan tekislikka parallel to‘g‘ri chiziq o‘tkazing.
   b) Berilgan nuqtadan shunday a kesma o‘tkazingki, uning berilgan tekislikdagi proyeksiyasi o‘ziga teng bo‘lsin.
2. Muntazam uchburchakli prizma asosining a tomoni va b yon qirrasiga asosan prizmaning yon qirrasi va o‘qi orqali o‘tkazilgan kesimning yuzini toping.

3. Tashqi A nuqtadan α tekislikka AB kesma o‘tkazilgan. Bu kesma C nuqtada (A dan B ga qarab) 3 : 4 nisbatda bo‘lingan va undan α tekislikka parallel CD = 2 cm kesma o‘tkazilgan. α tekislikka D nuqta orqali ADE kesma o‘tkazilgan. B va E nuqtalar orasidagi masofani toping.
4. AB va CD – bir-biri bilan kesishgan ikki tekislikdagi parallel kesmalar. AE va DF tekisliklarning kesishish chizig‘iga o‘tkazilgan perpendikulyarlardir. AD = 5 cm va EF = 4 cm bo‘lsa, AB va CD to‘g‘ri chiziqlar orasidagi masofani toping.
5. $ABCD$ parallelogrammning A va D uchlari M tekislikda, B va C uchlari uning tashqarisida, AD = 10 cm, AB = 15 cm, AC va BD diagonallarning M tekislikdagi proyeksiyalari mos ravishda 13,5 cm va 10,5 cm ga teng. Diagonallarni aniqlang.
6. Romb tomonlarining biri orqali qarshidagi tomondan 4 cm masofada tekislik o‘tkazilgan. Romb diagonallarining shu tekislikdagi proyeksiyalari 8 cm va 2 cm. Romb tomonlarning proyeksiyalarini toping.
7. To‘g‘ri burchakli ABC uchburchakning C to‘g‘ri burchagi uchidan gipotenuzaga parallel va undan 1 dm masofada tekislik o‘tkazilgan *(5-rasm)*. Katetlarning bu tekislikdagi proyeksiyalari 3 dm va 5 dm. Gipotenuzaning shu tekislikdagi proyeksiyasini aniqlang.
8. AB va CD – bir-biridan 28 cm masofadagi, α tekislikda yotgan ikki parallel chiziq, EF – tashqi to‘g‘ri chiziq, AB ga parallel va AB dan 17 cm, α tekislikdan esa 15 cm uzoqlikda, EF bilan CD orasidagi masofani toping (ikki holni qarang).
9. α tekislikka parallel AB kesmaning uchlaridan o‘sha tekislikka AC perpendikulyar va $BD \perp AB$ og‘ma o‘tkazilgan. Agar $AB = a$, $AC = b$ va $BD = c$ bo‘lsa, CD masofani aniqlang *(6-rasm)*.
10. Muntazam to‘rtburchakli piramida asosining diagonali orqali yon qirraga parallel tekislik o‘tkazing. Asosining tomoni a ga teng, yon qirrasi esa b ga teng. Hosil bo‘lgan kesimning yuzini aniqlang.
11. Muntazam uchburchakli $SABC$ piramida asosining tomoni a, yon qirrasi esa b. Bu piramidaning AB va BC qirralari o‘rtasidan SB qirraga parallel tekislik o‘tkazing. Hosil bo‘lgan kesimning yuzini aniqlang *(7-rasm)*.
12. Muntazam to‘rtburchakli piramidaning har bir qirrasi a ga teng. Asosining ikki qo‘shni tomoni o‘rtalaridan va balandligining o‘rtasidan tekislik o‘tkazing *(8-rasm)* hamda uning yuzini toping.

5


6


7


8


5. Parallel tekisliklar

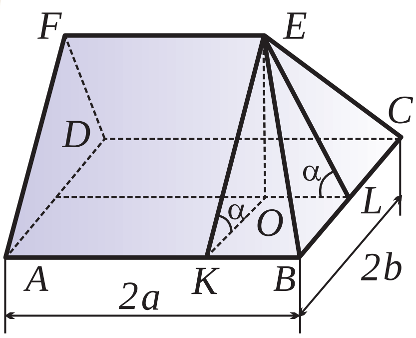
1. Berilgan nuqtadan berilgan tekislikka parallel tekislik o‘tkazing.
2. Qirrasi a ga teng bo‘lgan kubga shunday tekislik o‘tkazilsinki, bu tekislik ustki asosining ikki qo‘shni tomoni o‘rtalaridan va ostki asosining markazidan o‘tsin. Kesimning perimetrini hisoblang.
3. Ikki parallel tekislik oralig‘i 8 dm. Uzunligi 10 dm bo‘lgan kesmaning uchlari shu tekisliklarga tiralgan. Kesmaning har qaysi tekislikka tushirilgan proyeksiyasini aniqlang.
4. α va β tekisliklar parallel. α tekislikning A va B nuqtalaridan β tekislikka AC = 37 cm va BD = 125 cm og‘malar o‘tkazilgan. AC og‘maning tekisliklardan biridagi proyeksiyasi 12 cm. BD og‘maning proyeksiyasi uzunligini toping.
5. Ikki parallel tekislik orasiga 4 m uzunlikda perpendikulyar va 6 m uzunlikda og‘ma o‘tkazilgan. Har qaysi tekislikda ularning uchlari orasidagi masofa 3 m dan. Perpendikulyar bilan og‘maning o‘rtalari orasidagi masofani toping.
6. Yig‘indisi c ga teng bo‘lgan ikki kesmaning uchlari ikki parallel tekislikka tiraladi. Ularning proyeksiyalari a va b bo‘lsa, kesmalar uzunliklarini toping.
7. Ikki parallel tekislik α va β orasiga AC va BD kesmalar o‘tkazilgan (A va B nuqtalar α tekislikda yotadi). AC = 13 cm, BD = 15 cm, AC va BD ning berilgan tekisliklardan biridagi proyeksiyalari uzunliklarining yig‘indisi 14 cm. Bu proyeksiyalarning uzunliklarini va tekisliklar orasidagi masofani toping.
8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kubning AA_1 va CC_1 qarama-qarshi qirralarining K va L o‘rtalari to‘g‘ri chiziqlar orqali kubning B va D_1 uchlari bilan tutashtirilgan. Kubning qirrasi a ga teng. Hosil qilingan $KBLD_1$ to‘rtburchakning tomonlari va diagonallarini toping hamda uning shaklini aniqlang.
9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kubda tartib bilan quyidagi qirralarning o‘rtalarini tutashtiring: AA_1, A_1B_1, B_1C_1, C_1C, CD, DA va AA_1. Hosil bo‘lgan shaklning muntazam oltiburchak ekanini isbot qiling. Agar kubning qirrasi a ga teng bo‘lsa, oltiburchak yuzini toping.
10. Muntazam prizmaning asosi tomoni 3 dm li oltiburchakdan iborat. Prizmaning balandligi 13 dm. Prizmaning ustki va ostki asoslarining ikki qarama-qarshi tomoni orqali o‘tkazilgan kesimning yuzini aniqlang.

6. Perpendikulyar tekisliklar

1. To‘g‘ri prizmaning asosi ABC teng yonli uchburchak bo‘lib, uning AB va BC tomonlari 7 cm dan, uchinchi – AC tomoni esa 2 cm. AC tomon orqali asos tekisligi bilan 30° li burchak yasab, qarshidagi yon qirra bilan D nuqtada kesishuvchi tekislik o‘tkazilgan. Olingan kesimning yuzini va yon qirraning BD kesmasini aniqlang.
2. Ikkita teng yonli uchburchak umumiy asosga ega, ularning tekisliklari esa bir-biriga nisbatan 60° og‘gan. Umumiy asos 16 cm ga teng. Bir uchburchakning yon tomoni 17 cm ga teng, ikkinchisining yon tomonlari esa o‘zaro perpendikulyar. Uchburchaklarning uchlari orasidagi masofani aniqlang.
3. To‘g‘ri burchakli uchburchakning katetlari 7 cm va 24 cm. Gipotenuza orqali o‘tuvchi va uchburchak tekisligi bilan 30° li burchak yasovchi tekislik o‘tkazilgan. Shu tekislikdan to‘g‘ri burchak uchigacha bo‘lgan masofani aniqlang.
4. AB to‘g‘ri chiziq α tekislikka parallel bo‘lib, undan a uzoqlikda yotibdi. AB orqali β tekislik o‘tadi, bu tekislik α tekislik bilan 45° li burchak hosil qiladi. β tekislikda AB bilan 45° li burchak hosil qiluvchi to‘g‘ri chiziq o‘tkazilgan. Shu to‘g‘ri chiziqning AB bilan α tekislik orasidagi kesmasini aniqlang.

5. Berilgan tekislikka perpendikulyar boʻlgan va shu tekislikda berilgan toʻgʻri chiziq bilan kesishadigan toʻgʻri chiziqlarning geometrik oʻrnini toping.
6. Berilgan nuqtadan boshqa bir tekislikka perpendikulyar tekislik oʻtkazing.
7. AB – oʻzaro perpendikulyar boʻlgan α va β tekisliklarning kesishgan toʻgʻri chizigʻi. CD esa α tekislikdagi kesma boʻlib, AB ga parallel va undan 60 cm masofada turadi. β tekislikdagi E nuqta AB dan 91 cm masofada turadi. E dan CD gacha boʻlgan masofani toping.
8. AB toʻgʻri chiziq oʻzaro perpendikulyar tekisliklardagi A va B nuqtalarni tutashtiradi. A va B nuqtalardan tekisliklarning kesishgan chizigʻiga tushirilgan perpendikulyarlar mos ravishda a va b ga teng. Ularning asoslari orasidagi masofa esa c ga teng. AB kesmaning uzunligini va uning berilgan tekisliklarga tushirilgan proyeksiyalarining uzunliklarini aniqlang.
9. Muntazam oltiburchakli piramidaning yon qirrasi 8 dm ga, asosining tomoni esa 4 dm ga teng. Asosning ikki qoʻshni tomoni oʻrtalari orqali asosga perpendikulyar tekislik oʻtkazilgan. Kesimning yuzini toping.
10. Asosi $ABCD$ toʻgʻri toʻrtburchakdan iborat uyga yomgʻir suvi toʻrt tomonidan oqib tushadigan tom oʻrnatish kerak *(9-rasm)*. AB = 18 m, BC = 12 m. Tomning hamma yoqlari asos tekisligi bilan 40° li burchak tashkil qiladi. Agar tomning 1 m^2 ini yopish uchun 15 dona cherepitsa ishlatilsa, tomni yopish uchun necha dona cherepitsa kerak boʻladi?

9



Amaliy kompetensiyalarni shakllantirishga doir masalalar

1. Olti yoqli qalam va ochilgan kitob yordamida toʻgʻri chiziqlar orasidagi, toʻgʻri chiziq va tekislik orasidagi, tekisliklar orasidagi burchaklarning timsollarini koʻrsating.
2. Ikkita simmetriya oʻqiga ega, 9-rasmda tasvirlangan tomdan yomgʻir suvi qaysi yoʻnalishlarda oqib tushishini aniqlang.
3. Yoniga borib boʻlmaydigan minoraning balandligini aniqlash uchun qanday oʻlchashlarni amalga oshirish kerak?
4. Balandligi maʼlum, lekin yaqiniga borib boʻlmaydigan binogacha boʻlgan masofani topish uchun qanday oʻlchashlarni amalga oshirish kerak?
5. Nega soyalar choshgohda (tushda) yoʻqoladi?
6. Daraxt tepasiga chiqmasdan uning balandligini qanday oʻlchasa boʻladi?
7. Dumaloq stolga tomoni a ga teng boʻlgan kvadrat shaklidagi katta dasturxon solingan. Doira markazi kvadrat

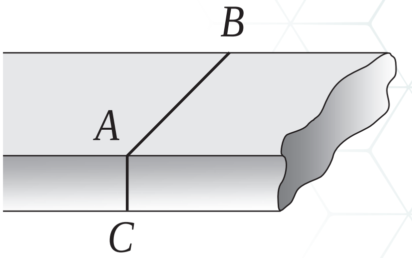
markazi bilan ustma-ust tushadi. Dasturxonning uchlari uning tomonlari o‘rtalariga nisbatan polga qanchalar yaqin?

Javob: $a \cdot \frac{(\sqrt{2}-1)}{2} \approx 0{,}207\, a$.

8. Devorlarning tikligi shoqul (bir uchiga tosh bog‘langan ip) bilan tekshiriladi. Shoqulning ipi devorga qanchalik yopishib parallel tursa, shunchalik devor tik degan qarorga kelinadi. Bu qaror qanchalik to‘g‘ri? Bu tekshirish usuli nimaga asoslangan?

9. Arralash sirti arralanayotgan taxtaning hamma qirralariga perpendikulyar bo‘lishini ta’minlash uchun *(10-rasm)* taxta sirtida arralash chiziqlarini qanday belgilash kerak?

10



10. Xonaning qo‘shni devorlari o‘zaro perpendikulyarligini tekshirish uchun Pifagor teoremasidan qanday foydalansa bo‘ladi?

11. Ustunning tikligi ustun asosi bilan bitta to‘g‘ri chiziqda yotmagan ikki nuqtadan kuzatib tekshiriladi. Bunday tekshirish usulini asoslang.

Ko‘rsatma. *To‘g‘ri chiziq va tekislikning perpendikulyarlik alomatidan foydalaning.*

12. Borib bo‘lmaydigan tepalikdagi nuqtada baland ustun o‘rnatilgan. Shoqul yordamida uning tikligini qanday tekshirsa bo‘ladi?

Yechish. *Ustunning biror vertikal to‘g‘ri chiziq bilan bitta tekislikda yotishini va yana boshqa vertikal to‘g‘ri chiziq bilan bitta (boshqa) tekislikda yotishini ko‘rsatish yetarli bo‘ladi. Shoqulni oldimizga shunday qo‘yamizki, uning va ustunning yuqori uchlari hamda ko‘zimiz bitta to‘g‘ri chiziqda yotganda shoqul ipi va ustun bitta to‘g‘ri chiziqda yotsin. Bu usul quyidagilarga asoslangan: 1) vertikal ustun ixtiyoriy vertikal to‘g‘ri chiziq bilan bitta tekislikda yotishi kerak; 2) agar ikki parallel to‘g‘ri chiziq ikkita kesishuvchi tekislikda yotsa, bu to‘g‘ri chiziqlar tekisliklarning kesishish chizig‘iga ham parallel bo‘ladi.*

13. Ikki vertikal joylashgan yassi oyna berilgan. Bu oynalarning biri sirtiga parallel bo‘lgan, gorizontal nur ikkinchi oynadan birinchi oyna sirtiga perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri chiziq bo‘yicha qaytadi. Oynalar orasidagi burchakni toping.

Ko‘rsatma. *Yorug‘likning qaytish qonunidan foydalaning.*

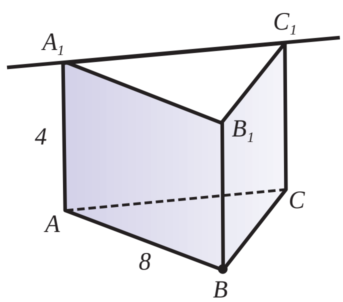
Javob: *45°.*

14. Gorizontal nur ikki vertikal joylashgan yassi oynalardan qaytmoqda. Dastlab nur birinchi oyna sirtiga parallel bo‘lgan bo‘lsa, ikki marta akslanish natijasida ikkinchi oyna tekisligiga parallel bo‘lib qolmoqda. Oynalar orasidagi burchakni toping.

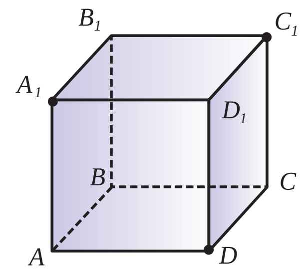
Javob: 60°.

O‘ZINGIZNI SINAB KO‘RING

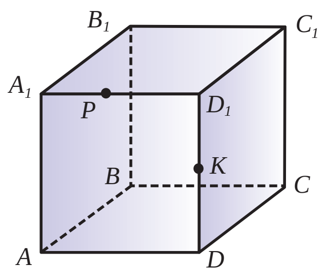
1. Muntazam uchburchakli prizma berilgan. Uning A_1C_1 qirrasi va B uchidan o‘tuvchi kesimi yuzini toping.



2. Kubning to‘la sirti 12 ga teng. Uning A_1, C_1 va D uchidan o‘tuvchi kesimi yuzini toping.

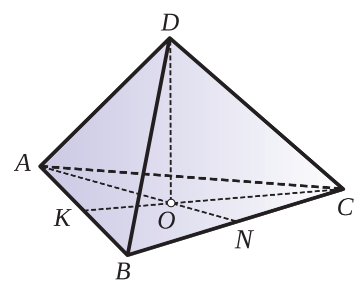


3. PK to‘g‘ri chiziq qaysi to‘g‘ri chiziqlarni kesib o‘tadi?



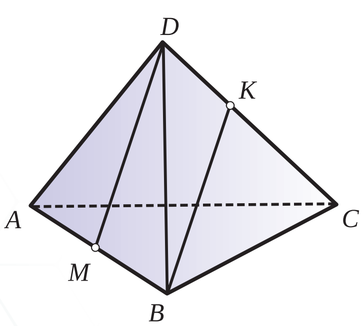
A) A_1B_1 va DC
B) A_1A_1 va AD
C) A_1B_1 va AD
D) D_1C_1

4. AOD tekislik BDC tekislikni qaysi to‘g‘ri chiziq bo‘ylab kesib o‘tadi?



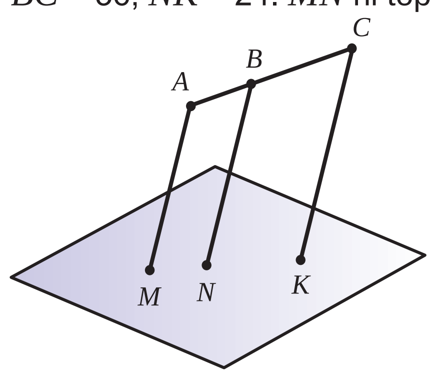
A) DO
B) AN
C) DN
D) DC

5. To‘g‘ri mulohazani ko‘rsating: MD to‘g‘ri chiziq ...

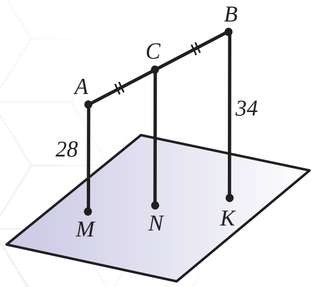


A) BK to‘g‘ri chiziqni kesib o‘tadi
B) BK to‘g‘ri chiziqqa parallel
C) BK to‘g‘ri chiziqqa ayqash
D) BKC tekislik bilan kesishmaydi

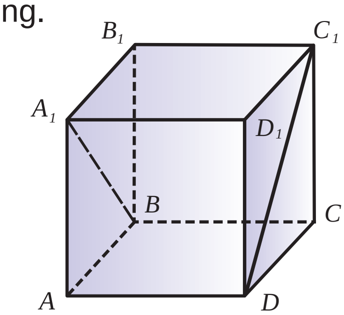
6. Rasmda AM // BN // CK, AB = 18, BC = 36, NK = 24. MN ni toping.



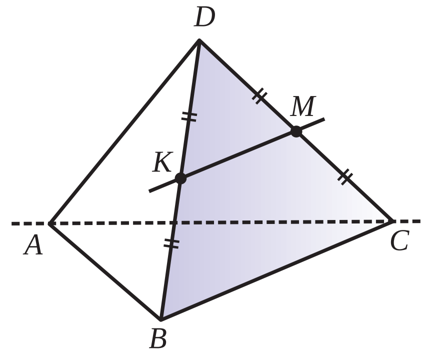
7. Rasmda AM // CN // BK, AM = 28, BK = 34. CN ni toping.



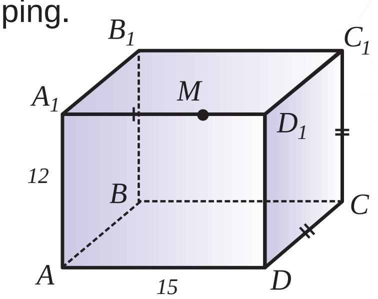
8. Kub berilgan. BA_1 va DC_1 to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.



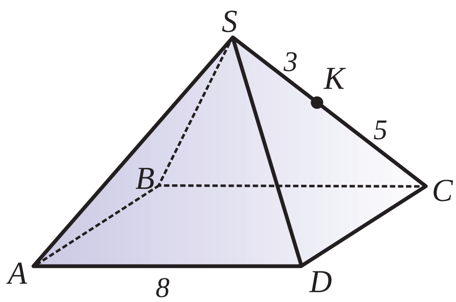
9. Muntazam tetraedr berilgan. KM va AC to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.



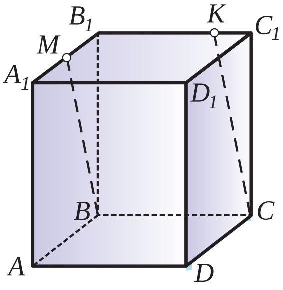
10. To‘g‘ri burchakli parallelepiped berilgan. $DC = CC_1$, $A_1M : MD_1 = 2 : 1$, $AA_1 = 12$, $AD = 15$. Parallelepipedning CDM tekislik bilan kesimi perimetrini toping.



11. $SABCD$ – muntazam piramida. $KC = 5$, $KS = 3$, $AD = 8$. Piramidaning ADK tekislik bilan kesimi perimetrini toping.

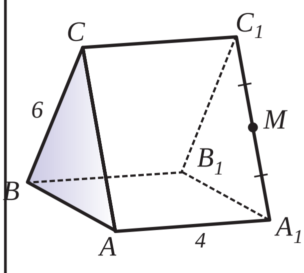


12. AOD tekislik BDC tekislikni qaysi to‘g‘ri chiziq bo‘ylab kesib o‘tadi?



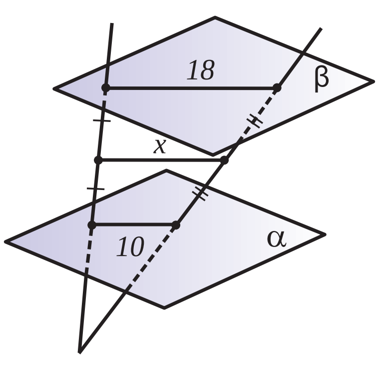
A) AA_1D_1 tekislikni kesib o‘tadi
B) BM to‘g‘ri chiziqqa parallel
C) AA_1B_1 tekislikka parallel
D) ABA_1 tekislikni kesib o‘tadi.

13. Muntazam prizma berilgan. $BC = 6$, $AA_1 = 4$. Prizmaning BMC tekislik bilan kesimi perimetrini toping.

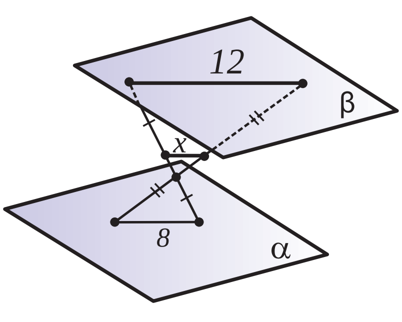


A) AA_1D_1 tekislikni kesib o‘tadi
B) BM to‘g‘ri chiziqqa parallel
C) AA_1B_1 tekislikka parallel
D) ABA_1 tekislikni kesib o‘tadi.

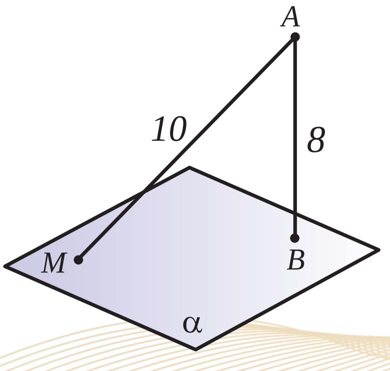
14. $\alpha \parallel \beta$. $x = ?$



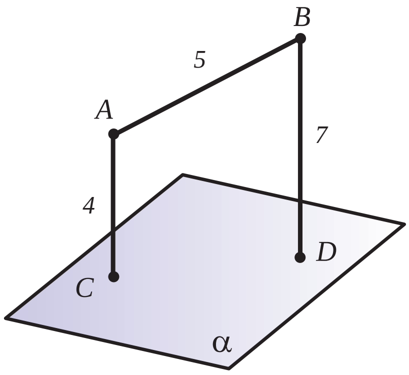
15. $\alpha \parallel \beta$. $x = ?$



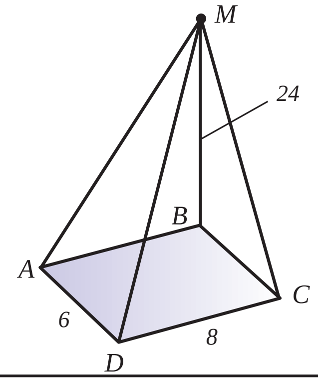
16. $AB \perp \alpha$. $MB = ?$



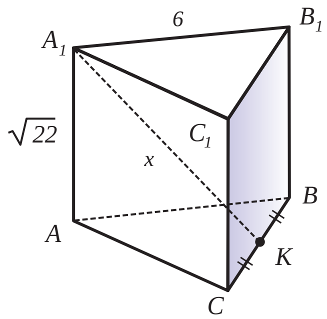
17. $AC \perp \alpha$, $BD \perp \alpha$. CD = ?



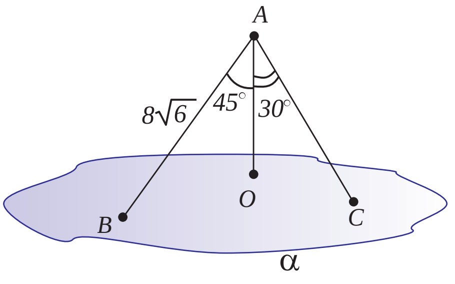
18. $ABCD$ – to‘g‘ri to‘rtburchak. $MB \perp AB$, $MB \perp BC$. MD = ?



19. Muntazam piramida berilgan. A_1K ni toping.



20. $AO \perp \alpha$, $AB = 8\sqrt{6}$, $\angle SAO = 45°$. $\angle CAO = 30°$. OC = ?



21. Kubning bir uchidan chiqqan uch qirrasining uchlaridan o‘tadigan tekislik o‘tkazing. Kubning qirrasi a ga teng. Kesimning yuzini hisoblang.

22. Teng tomonli uchburchakning tomoni 3 cm. Uchburchakning har bir uchidan 2 cm uzoqlikdagi nuqta bilan uning tekisligi orasidagi masofani toping.

23. Teng yonli uchburchakning AC asosi α tekislikda yotadi. Agar $AB = 5$, $AC = 6$ va uchburchak tekisligi bilan α tekislik orasidagi ikki yoqli burchak $60°$ ga teng bo‘lsa, b nuqtadan α tekislikkacha bo‘lgan masofani toping.

24. 10 cm uzunlikdagi kesma tekislikni kesadi. Uning uchlari tekislikdan 3 cm va 2 cm uzoqlikda. Berilgan kesma bilan tekislik orasidagi burchakni toping.

25. $ABCD$ trapetsiyaning DA asosi α tekislikda, CB asosi esa undan 5 cm narida. Agar $DA : CB = 7 : 3$ bo‘lsa, P tekislikdan shu trapetsiya diagonallarining kesishgan M nuqtasigacha bo‘lgan masofani toping.

26. AB kesma α tekislikka parallel. AC va BD kesmalar α tekislikka o‘tkazilgan ikki teng og‘ma bo‘lib, AB kesmaga perpendikulyar va undan turli yo‘nalishda o‘tkazilgan. $AB = 2$ cm bo‘lib, α tekislikdan 7 cm uzoqlikda turadi, AC va BD kesmalarning har biri 8 cm dan. CD masofani aniqlang.

27. AB to‘g‘ri chiziq – $90°$ ga teng ikki yoqli burchakning qirrasi. AA_1 va BB_1 to‘g‘ri chiziqlar bu burchakning turli yoqlariga te-

gishli. AA_1 // BB_1, BB_1 kesma AB ga perpendikulyar. AA_1 va BB_1 to‘g‘ri chiziqlarning kesishishini isbotlang. Ushbu to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

28. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kubda AB_1C_1D va A_1D_1CB kesimlar tekisliklari orasidagi chiziqli burchakni yasang va gradus o‘lchovini toping.

29. Muntazam tetraedrning qirrasi a ga teng. AB qirradan o‘tib, uni 1 : 3 nisbatda bo‘ladigan va BC qirraga parallel tekislik bilan kesganda hosil bo‘ladigan kesimni yasang. Kesimning yuzini toping.

30. To‘g‘ri parallelepipedning asosi diagonallari 48 cm va 20 cm bo‘lgan rombdan iborat. Parallelepipedning katta diagonali asos tekisligi bilan 45° li burchak hosil qiladi. Uning to‘la sirti yuzini toping.

31. Piramidaning asosi yuzi $16\sqrt{3}$ ga teng bo‘lgan to‘g‘ri burchakli uchburchakdan iborat. Ikki yon yoqlari asos tekisligiga perpendikulyar, uchinchisi esa asos bilan 45° li burchak tashkil qiladi. Piramida qirralarining uzunligini va yon sirtining yuzini toping.

32. To‘g‘ri prizma asosi katetlari 12 cm va 9 cm bo‘lgan to‘g‘ri burchakli uchburchakdan iborat. Agar prizmaning yon qirrasidan o‘tuvchi eng kichik kesim kvadrat bo‘lsa, uning yon sirti yuzini toping.

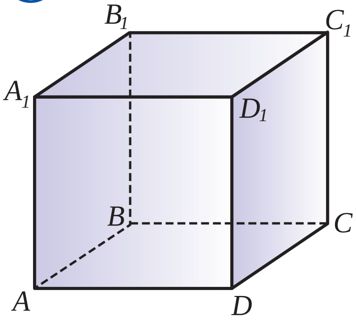
33. Piramidaning asosi kichik diagonali d va o‘tmas burchagi α bo‘lgan rombdan iborat. Piramida asosidagi barcha ikki yoqli burchaklar β ga teng. Piramidaning yon sirti yuzini toping.

34. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kubining qirrasi a ga teng. Kubni AA_1, AD, A_1B_1 qirralarining o‘rtasidan o‘tadigan tekislik bilan kesganda hosil bo‘lgan kesimni yasang.

35. 1-rasmga ko‘ra, berilgan to‘g‘ri chiziqlarning o‘zaro qanday joylashganini aniqlang va ularning orasiga mos (⊗ – kesishish, // – parallellik, ∸ – ayqashlik) belgilarni qo‘ying.

To‘g‘ri chiziqlar	AA_1	BC_1	CC_1	CB_1	AB_1
AD					
A_1B_1					
AB					
A_1D					
BD					

1



36. 1-rasmdagi to‘g‘ri chiziq va tekislik o‘zaro qanday joylashganini aniqlang va ularning orasiga mos (⊗ – kesishish, // – parallellik, ∸ – ayqashlik va ⊂ – tegishli) belgilarni qo‘ying.

To‘g‘ri chiziqlar/ Tekisliklar	AA_1	BC_1	CC_1	CB_1	AB_1
ADD_1					

AA_1B_1					
ABD					
AA_1D					
BCD					

37. Berilgan tekislikka bir nuqtadan perpendikulyar va ogʻma oʻtkazilgan. Ularning orasidagi burchak 45°. Perpendikulyarning uzunligi a ga teng. Ogʻmaning uzunligini toping.
38. Tekislikka berilgan nuqtadan har biri 2 cm ga teng ikki ogʻma oʻtkazilgan. Ular orasidagi burchak 60°, proyeksiyalari orasidagi burchak esa toʻgʻri burchak. Berilgan nuqta bilan tekislik orasidagi masofani toping.
39. Berilgan tekislikka bir nuqtadan ikkita teng ogʻma oʻtkazilgan. Ular orasidagi burchak 60°, proyeksiyalari orasidagi burchak toʻgʻri. Har bir ogʻma va uning proyeksiyasi orasidagi burchaklarni toping.
40. Toʻgʻri burchakli ABC uchburchakning katetlari – 15 m va 20 m. Toʻgʻri burchakning C uchidan bu uchburchak tekisligiga perpendikulyar qilib CD = 35 m kesma oʻtkazilgan. D nuqtadan AB gipotenuzagacha boʻlgan masofani toping.
41. Uchburchakning tomonlari: 10 cm, 17 cm va 21 cm. Shu uchburchakning katta burchagi uchidan uning tekisligiga 16 cm uzunlikda perpendikulyar oʻtkazilgan. Uning uchlaridan uchburchakning katta tomonigacha boʻlgan masofalarni aniqlang.
42. ABC uchburchakning A uchidan uning tekisligi tashqarisida AD toʻgʻri chiziq oʻtkazilgan, u toʻgʻri chiziq AB va AC tomonlar bilan teng oʻtkir burchaklar hosil qiladi. Agar AB = 51 m, AC = 34 m va BC = 30 m boʻlsa, AD toʻgʻri chiziqning uchburchak tekisligiga tushirilgan proyeksiyasi BC tomonni qanday boʻlaklarga boʻladi?
43. Tekislikdan a uzoqlikda turgan nuqtadan ikki ogʻma oʻtkazilgan, bu ogʻmalar tekislik bilan 45° li va 30° li burchak, oʻzaro esa toʻgʻri burchak hosil qiladi. Ogʻmalarning uchlari orasidagi masofani aniqlang.
44. Berilgan nuqtadan berilgan toʻgʻri chiziqqa parallel tekislik oʻtkazing. Bunday tekisliklardan nechta oʻtkazish mumkin?
45. Tekislik va unga parallel toʻgʻri chiziq berilgan. Tekislikda olingan nuqta orqali berilgan toʻgʻri chiziqqa parallel qilib, oʻsha tekislikda toʻgʻri chiziq oʻtkazing.
46. Ikki parallel tekislik orasidagi ikki toʻgʻri chiziq kesmasining uzunliklari 51 cm va 53 cm. Ularning bu tekisliklardan biriga tushirilgan proyeksiyalarining nisbati 6 : 7 kabi. Berilgan tekisliklar orasidagi masofani aniqlang.
47. Fazoda ikki toʻgʻri burchak shunday joylashganki, ularning mos tomonlari bir-biriga parallel va bir xilda yoʻnalgan hamda ularning uchlarini tutashtiruvchi kesmaga perpendikulyardir. Bu kesmaning uzunligi a ga teng. Bir burchakning bir tomonida uning uchidan boshlab b kesma ajratilgan. Ikkinchi burchakning unga parallel boʻlmagan tomonida c kesma ajratilgan. Shu kesmalarning uchlari orasidagi masofani aniqlang.
48. Yon yoqlari kvadrat boʻlgan muntazam oltiburchakli prizma ostki asosining bir tomoni va ustki asosining unga qarshi yotgan tomoni orqali oʻtgan tekislik bilan kesilgan. Asosning tomoni a ga teng. Hosil qilingan kesimning yuzini aniqlang.
49. ABC uchburchak tomonlari: AB = 9, BC= 6 va AC = 5. AC tomon orqali uchburchak tekisligi bilan 45° li burchak hosil qiluvchi α tekislik oʻtadi. α tekislik bilan B uchi orasidagi masofani toping.
50. Berilgan toʻgʻri chiziqdan ikkinchi bir tekislikka perpendikulyar tekislik oʻtkazing. Nechta shunday tekislik oʻtkazish mumkin?

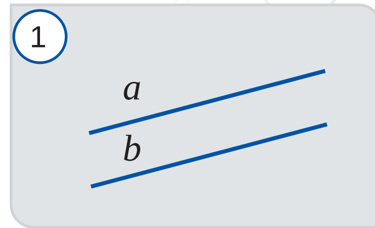
GEOMETRIYAGA OID ASOSIY MA’LUMOTLAR

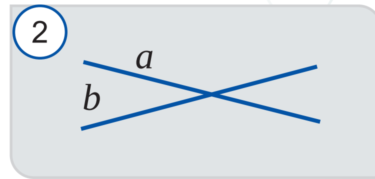
I. Planimetriya

1.1. Burchaklar va to‘g‘ri chiziqlar

Parallel va kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlar

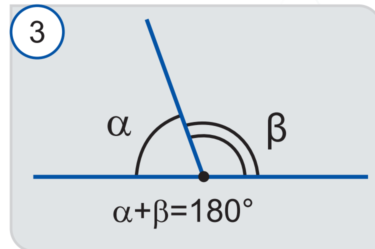
Tekislikda ikki to‘g‘ri chiziq yoki parallel *(1-rasm)* yoki kesishuvchi *(2-rasm)* bo‘lishi mumkin.

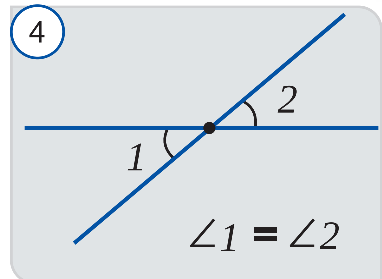




Qo‘shni va vertikal burchaklar

Qo‘shni burchaklar yig‘indisi 180° ga teng *(3-rasm)*. Vertikal burchaklar teng *(4-rasm)*.



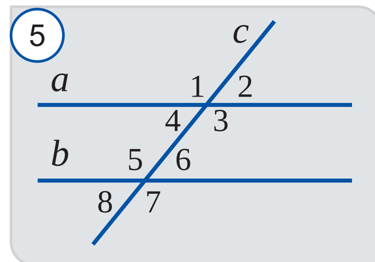


Ikki to‘g‘ri chiziqni uchinchi to‘g‘ri chiziq kesganda hosil bo‘ladigan burchaklar *(5-rasm)*:

1) ∠1 va ∠5, ∠2 va ∠6, ∠3 va ∠7, ∠4 va ∠8 – mos burchaklar;

2) ∠3 va ∠6, ∠4 va ∠5 – **ichki bir tomonli burchaklar;**

3) ∠3 va ∠5, ∠4 va ∠6 – **ichki almashinuvchi burchaklar** deb ataladi.



To‘g‘ri chiziqlarning parallellik alomatlari

Agar ikki to‘g‘ri chiziqni uchinchi to‘g‘ri chiziq kesganda *(5-rasm)*,

1) ichki almashinuvchi burchaklar teng bo‘lsa yoki;

2) mos burchaklar teng bo‘lsa yoki;

3) ichki bir tomonlama burchaklar yig‘indisi 180° ga teng bo‘lsa, berilgan to‘g‘ri chiziqlar parallel bo‘ladi.

Parallel to‘g‘ri chiziqlarning xossalari:

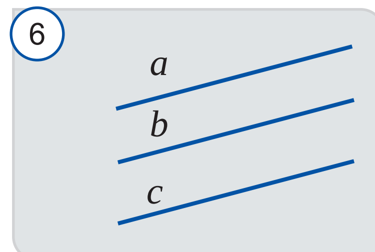
Agar ikki parallel to‘g‘ri chiziqni uchinchi to‘g‘ri chiziq kesib o‘tsa *(5-rasm)*:

1) ichki almashinuvchi burchaklar teng bo‘ladi;

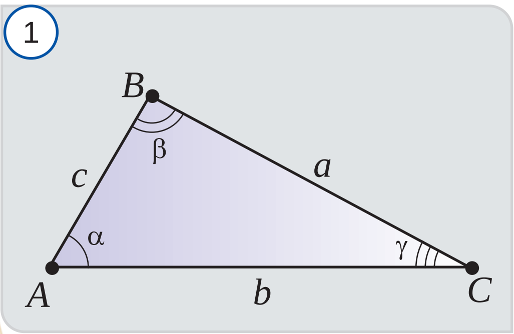
2) mos burchaklar teng bo‘ladi;

3) ichki bir tomonlama burchaklar yig‘indisi 180° ga teng bo‘ladi.

Agar $a \parallel b$ va $a \parallel c$ bo‘lsa, $b \parallel c$ bo‘ladi *(6-rasm)*.



1.2. Uchburchaklar



1°. Asosiy tushunchalar

Tekislikda bir to'g'ri chiziqda yotmagan uchta nuqta berilgan bo'lsin. Shu nuqtalarning har ikkitasini kesmalar bilan tutashtiramiz. Hosil bo'lgan shaklga *uchburchak* deyiladi. Nuqtalar uchburchakning *uchlari*, kesmalar esa *tomonlari* deyiladi. Belgilanishi: A, B, C – uchlar, a, b, c – tomonlar (*1-rasm*).

Uchburchak uchta ichki burchakka ega: $\angle BAC$, $\angle CBA$, $\angle ACB$.

Belgilanishi: α , β, γ.

Uchburchakning o'rta chizig'i – uning ikkita tomoni o'rtalarini tutashtiruvchi kesma.

Mediana – uchburchak uchini uning qarshisidagi tomon o'rtasi bilan tutashtiruvchi kesma. Uchburchakda 3 ta mediana bo'lib, ular m_a, m_b, m_c kabi belgilanadi.

Bissektrisa – uchburchak uchini uning qarshisidagi tomon bilan tutashtiruvchi va shu uchdagi burchak bissektrisasida yotuvchi kesma. Uchburchakda uchta bissektrisa bo'lib, ular l_a, l_b, l_c kabi belgilanadi.

Balandlik – uchburchak uchidan uning qarshisidagi tomon yotgan to'g'ri chiziqqa tushirilgan perpendikulyar. Uchburchakda uchta balandlik bo'lib, ular h_a, h_b, h_c kabi belgilanadi. *O'rta chiziq* – ikki tomon o'rtalarini tutashtiruvchi kesma. O'rta chiziqlar soni ham 3 ta.

Perimetr – uchala tomon uzunliklari yig'indisi. Belgilanishi: *P.*

Uchburchaklar tomonlariga qarab uch turga ajratiladi: a) teng tomonli ($a = b = c$); b) teng yonli (A, B, C larning qandaydir ikkisi teng); c) turli tomonli (A, B, C larning hech qaysisi teng emas).

Uchburchakning uchala tomoniga urinib o'tuvchi aylana unga ichki chizilgan *aylana* deyiladi (bunday aylana mavjud va yagona). Ichki chizilgan aylana radiusi *r* orqali belgilanadi.

Uchburchakning uchala uchidan o'tuvchi aylana unga *tashqi chizilgan aylana* deyiladi va uning radiusi R orqali belgilanadi (bunday aylana mavjud va yagona).

2°. Asosiy munosabatlar

1) $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Uchburchak ichki burchaklari yig'indisi 180° ga teng.

2) Uchala mediana bir nuqtada kesishadi. Bu nuqta medianani 2 : 1 nisbatda bo'ladi. Mediana uchburchakni yuzlari teng ikkita uchburchakka ajratadi. Medianalar

uzunliklari: $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$; $m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$; $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$.

formulalardan topiladi.

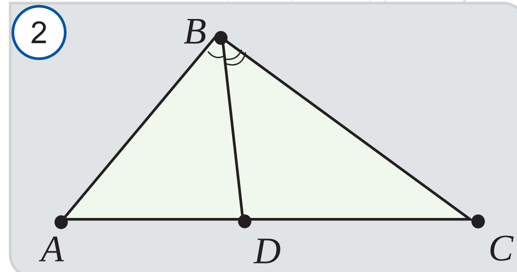
3) Uchala bissektrisa bir nuqtada kesishadi. Bu nuqta ichki chizilgan aylana markazi bo'ladi. Bissektrisa o'zi tushirilgan tomonni qolgan tomonlarga proporsional bo'laklarga ajratadi (*2-rasm*).

BD bissektrisa bo'lsa, $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DC}$.

Bissektrisa uzunliklarini ushbu formulalardan topish mumkin.

$$l_a = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{p(p-a)}; \qquad l_b = \frac{2\sqrt{ac}}{a+c}\sqrt{p(p-b)};$$

$$l_c = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\sqrt{p(p-c)}, \text{ bu yerda } p = a+b+c.$$

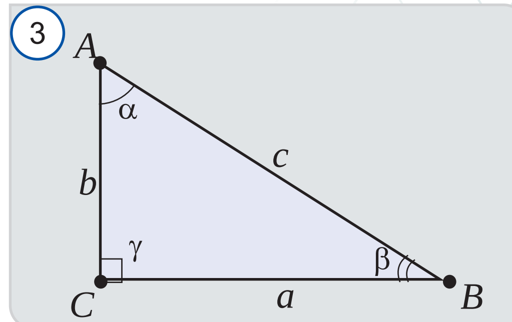


4) Uchburchak balandliklari yoki ularning davomlari bir nuqtada kesishadi. Balandlik uzunliklarini

$$h_a = \frac{2S}{a}; \quad h_b = \frac{2S}{b}; \quad h_c = \frac{2S}{c};$$

formulalardan topish mumkin.

Bu yerda S – uchburchak yuzi.



5) Uchburchak tomonlarining o‘rta perpendikulyari bir nuqtada kesishadi. Bu nuqta uchburchakka *tashqi chizilgan aylana markazi* bo‘ladi.

6) Uchburchakning *o‘rta chizig‘i* uchinchi tomonga parallel va uning yarmiga teng.

7) Sinuslar teoremasi:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

8) Kosinuslar teoremasi:

$a^2=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot \cos\alpha$; $b^2=a^2+c^2-2\cdot a\cdot c\cdot\cos\beta$; $c^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot \cos\gamma$

9) Uchburchak yuzini hisoblash formulalari:

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c; \quad S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}bc\sin\beta. \quad S = \frac{abc}{4R}; \quad S = pr.$$

10) Geron formulasi:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}; \qquad p = \frac{a+b+c}{2};$$

3°. Muhim xususiy hollar

a) *To‘g‘ri burchakli uchburchak* (*3-rasm*).

$\angle\gamma=90°$, $\alpha+\beta=90°$, AC va BC – katetlar, AB – gipotenuza.

Pifagor teoremasi: $a^2+b^2=c^2$.

$$S = \frac{1}{2}ab; \qquad R = \frac{c}{2}; \qquad r = \frac{a+b-c}{2};$$

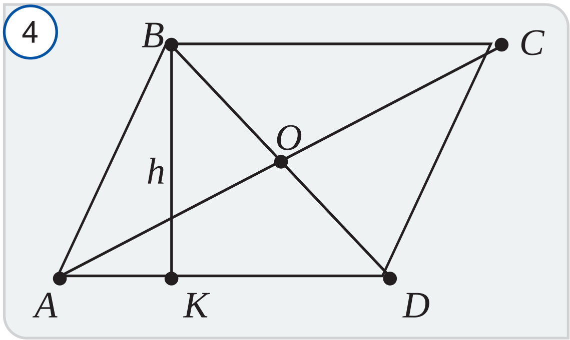
$$\frac{a}{c} = \sin\alpha; \qquad \frac{a}{c} = \cos\beta; \qquad \frac{b}{c} = \sin\beta; \qquad \frac{b}{c} = \cos\alpha;$$

$$\frac{a}{b} = tg\alpha; \qquad \frac{a}{b} = ctg\beta; \qquad \frac{b}{a} = ctg\alpha; \qquad \frac{b}{b} = tg\beta.$$

b) *Teng tomonli uchburchak*.

$$\alpha = \beta = \gamma = 60°; \qquad S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}; \qquad r = \frac{a\sqrt{3}}{6}; \qquad R = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

1.3. To'rtburchaklar



1°. Parallelogramm

Qarama-qarshi tomonlari parallel bo'lgan to'rtburchak *parallelogramm* deyiladi (*4-rasm*).

Qo'shni bo'lmagan uchlarni tutashtiruvchi kesma *diagonal* deyiladi.

AB va CD; AD va BC parallel tomonlar;

BD va AC diagonallar.

Asosiy xossalar va munosabatlar

1) Diagonallar kesishish nuqtasi parallelogrammning simmetriya markazi bo'ladi.

2) Qarama-qarshi tomonlarning uzunliklari o'zaro teng:

$AB = CD$ va $AD = BC$.

3) Parallelogrammning qarama-qarshi burchaklari o'zaro teng:

$\angle BAD = \angle BCD$ va $\angle ABC = \angle ADC$.

4) Qo'shni burchaklar yig'indisi 180° ga teng.

5) Diagonallar kesishish nuqtasida teng ikkiga bo'linadi: $BO = OD$ va $AO = OC$.

6) Tomonlari kvadratlarining yig'indisi diagonallari kvadratlarining yig'indisiga teng:

$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2$ yoki $2 \cdot (AB^2 + BC^2) = AC^2 + BD^2$.

7) Parallelogramm yuzi: a) $S=ah_a$, bu yerda: $a = AD$ tomon, $h_a = BK$ – balandlik.

b) $S = ab\sin\alpha$, bu yerda: $b=AB$ – tomon, $\alpha=\angle BAD$ – AB va AD tomonlar orasidagi burchak.

2°. Romb

Barcha tomonlari o'zaro teng bo'lgan parallelogramm *romb* deyiladi.

Parallelogramm uchun o'rinli bo'lgan barcha xossalar romb uchun ham o'rinli.

Rombning qo'shimcha xossalari

1) Romb diagonallari o'zaro perpendikulyar.

2) Romb diagonallari ichki burchaklarning bissektrisalari bo'ladi.

3) Romb yuzi $S = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2$, bu yerda: d_1, d_2 – romb diagonallari.

3°. To'g'ri to'rtburchak

Barcha burchaklari 90° ga teng bo'lgan parallelogramm *to'g'ri to'rtburchak* deyiladi.

1) To'g'ri to'rtburchak diagonallari o'zaro teng.

2) To'g'ri to'rtburchak yuzi $S = a \cdot b$, bu yerda a va b – to'g'ri to'rtburchakning qo'shni tomonlari.

4°. Kvadrat

Barcha tomonlari o'zaro teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchak *kvadrat* deyiladi.

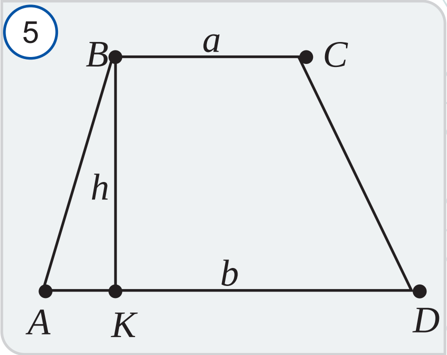
Romb va to'g'ri to'rtburchaklar uchun o'rinli bo'lgan barcha xossalar kvadrat uchun ham o'rinli.

Agar a – kvadrat tomoni, d esa diagonali bo'lsa: $S = a^2$; $S = \frac{d^2}{2}$; $d = a\sqrt{2}$.

5°. Trapetsiya

Asoslar deb ataluvchi ikki tomoni o‘zaro parallel va *yon tomonlar* deb ataluvchi qolgan ikki tomoni esa parallel bo‘lmagan to‘rtburchak *trapetsiya* deyiladi.

Yon tomonlar o‘rtalarini tutashtiruvchi kesma trapetsiyaning *o‘rta chizig‘i* deyiladi.



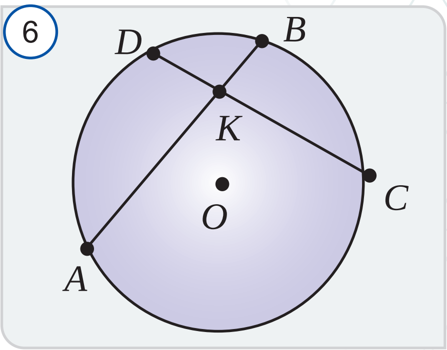
Asosiy xossalar:

1) trapetsiya o‘rta chizig‘i asoslarga parallel va asoslar yig‘indisining yarmiga teng bo‘ladi;

2) trapetsiya yuzi $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$, bu yerda a va b — asoslar, h esa balandlik (5-*rasm*).

1.4. Aylana, doira

1°. Musbat son R va tekislikda O nuqta berilgan bo‘lsin. O nuqtadan R masofada joylashgan nuqtalardan tashkil topgan shakl *aylana* deyiladi. O nuqta *aylana markazi*, markaz bilan aylanadagi nuqtani tutashtiruvchi kesma *radius*, R son esa *radius uzunligi* deyiladi. Aylanadagi ikki nuqtani tutashtiruvchi kesma *vatar*, markazdan o‘tuvchi vatar esa *diametr* deyiladi.



Tekislikning aylana bilan chegaralangan chekli qismi *doira* deb ataladi.

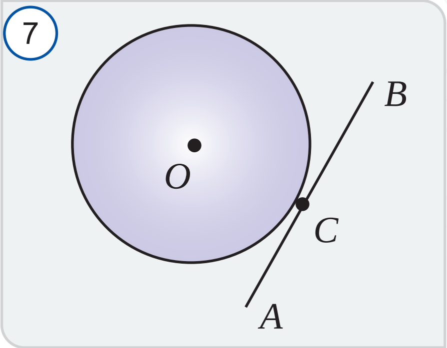
Asosiy munosabatlar:

1) $D = 2R$, bu yerda: D – diametr uzunligi.

2) $L = 2\pi R$ – aylana uzunligi.

3) $S = \pi R^2$ – doira yuzi.

4) AB va CD vatarlar K nuqtada kesishsa (6-*rasm*), $AK \cdot KB = CK \cdot KD$ munosabat bajariladi.



5) Vatarni teng ikkiga bo‘luvchi diametr shu vatarga perpendikulyardir.

6) Teng vatarlar markazdan teng masofalarda joylashgan va, aksincha, markazdan teng masofada joylashgan vatarlar o‘zaro teng.

2°. Urinma

Aylana (yoki doira) bilan yagona umumiy nuqtaga ega bo‘lgan to‘g‘ri chiziq *urinma* deyiladi. Nuqta esa *urinish nuqtasi* deyiladi (7-*rasm*).

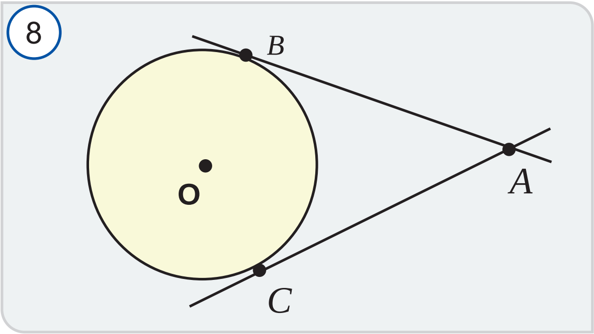
Aylana bilan 2 ta umumiy nuqtaga ega bo‘lgan to‘g‘ri chiziq *kesuvchi* deb ataladi.

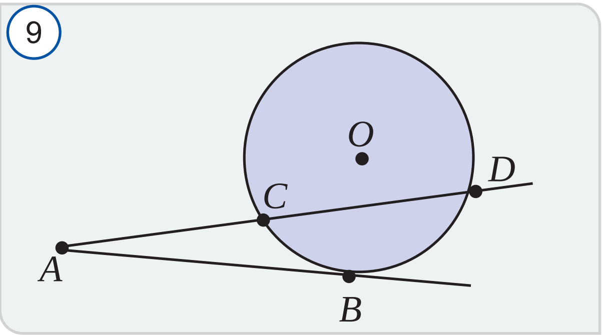
Urinmaning xossalari:

1) Urinish nuqtasiga o‘tkazilgan radius urinmaga perpendikulyardir.

2) Doira tashqarisidagi nuqtadan shu doiraga ikkita urinma o‘tkazish mumkin, bu urinmalarning kesmalari o‘zaro teng (8-*rasm*): $AB = AC$.

3) Agar AC kesuvchi bo‘lib, aylanani C va D nuqtalarda kesib o‘tsa, AB esa urinma bo‘lsa, $AB^2 = AD \cdot AC$ tenglik o‘rinli (9-*rasm*).



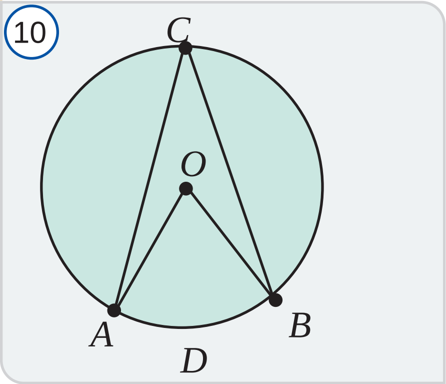


3°. Markaziy va ichki chizilgan burchaklar

Aylanadagi ikki nuqta yordamida aylana ikki boʻlakka ajraladi. Bu boʻlaklar *yoylar* deb ataladi. Belgilanishi: ADB, ACB.

AOB burchak ADB yoyga tiralgan *markaziy burchak* (*10-rasm*), ACB burchak esa ADB yoyga tiralgan va aylanaga *ichki chizilgan burchak* deyiladi. Bu burchaklar orasida $\angle ACB = \frac{1}{2} \cdot \angle AOB$ munosabat oʻrinli.

Xususan, yarim aylanaga tiralgan ichki burchak toʻgʻri burchak boʻladi (*11-rasm*). Bitta yoyga tiralgan aylanaga ichki chizilgan burchaklar oʻzaro teng boʻladi.



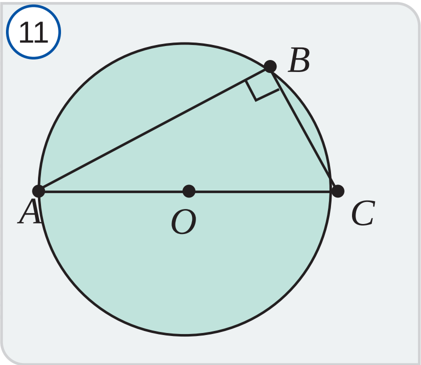
4°. Sektor va segment

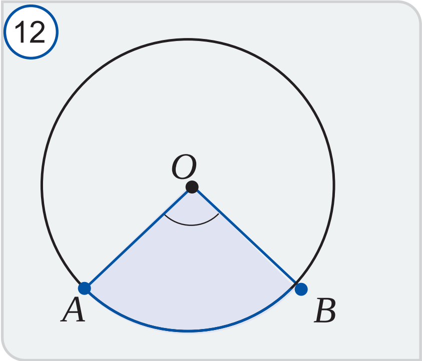
Doiraning ikki radius bilan chegaralangan boʻlagi *sektor* deyiladi (*12-rasm*). Sektor yoyining uzunligi:

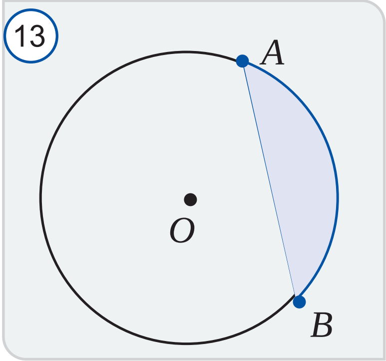
$l = \frac{\pi R\alpha}{180^o}$, bu yerda α – markaziy burchakning gradus oʻlchovi.

Sektor yuzi: $S = \frac{\pi R^2\alpha}{360^o}$; $S = \frac{1}{2} \cdot R \cdot l$.

Segment – doiraning vatar va shu vatar tiralgan yoy bilan chegaralangan boʻlagi (*13-rasm*).







Segment yuzi: $S = S_{sektor} \pm S_{\Delta} = \frac{\pi R^2}{360^o} \cdot \alpha \pm \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot \sin \alpha$.

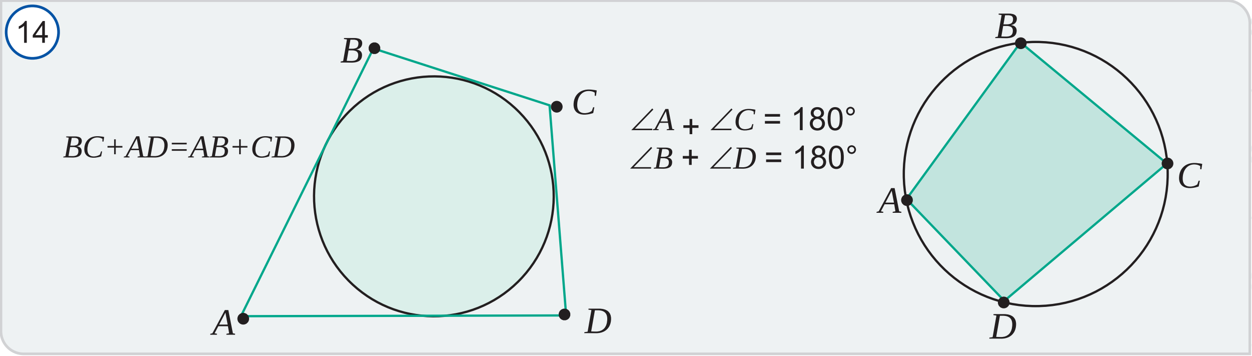
1.5. Muntazam ko‘pburchaklar

Muntazam n burchakning tomoni a_n, perimetri P_n, yuzi S_n, ichki chizilgan aylana radiusi r_n, tashqi chizilgan aylana radiusi R_n, ichki burchagi α_n bo‘lsa,

$$P_n = n \cdot a_n; \quad S_n = \frac{1}{2} \cdot P_n \cdot r_n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot a_n \cdot r_n; \quad \alpha_n = \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$$

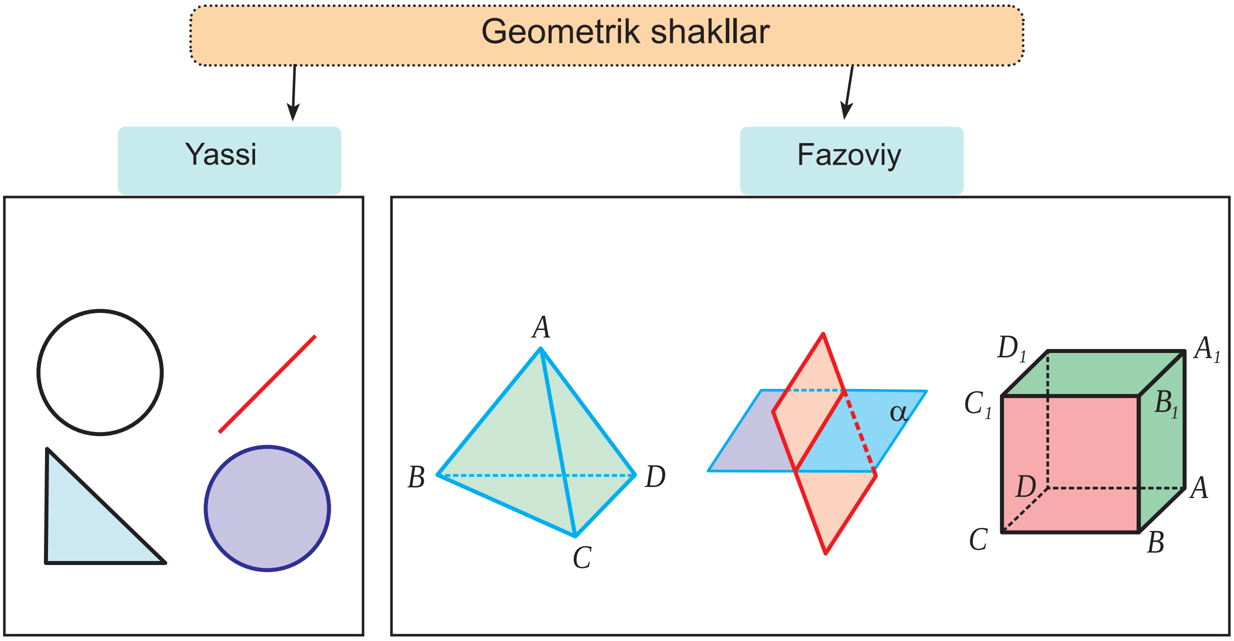
$$R_n = \frac{a_n}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}; \quad r_n = \frac{a_n}{2 \cdot tg\frac{180^\circ}{n}}$$

Aylanaga tashqi va ichki chizilgan to‘rtburchaklar *(14-rasm)*.



II. Stereometriya

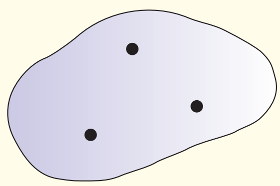
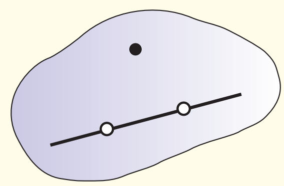
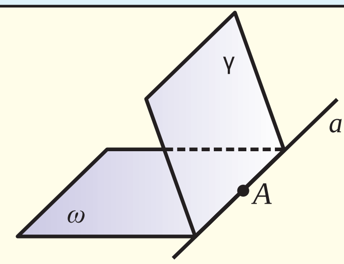
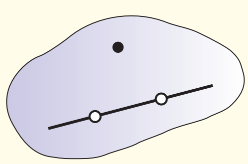
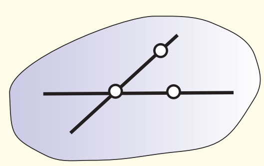
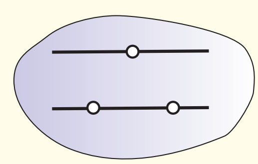
Fazoda geometrik shakllar tekislikda to‘liq yotgan yoki yotmaganiga qarab yassi va fazoviy shakllarga ajratiladi.



2.1. Stereometriyaning asosiy tushunchalari

Geometriyaning *stereometriya* bo‘limi fazoviy geometrik shakllarning (yoki jismlarning) xossalarini o‘rganadi. *Stereometriya* so‘zi grekchadan olingan bo‘lib, *stereos* – “fazoviy” *metreo* – “o‘lchayman” degan ma’noni anglatadi.

Fazodagi asosiy geometrik shakllar nuqta, to‘g‘ri chiziq va tekislikdir. Ular stereometriyaning asosiy tushunchalari bo‘lib, ularga ta’rif berilmaydi.

Stereometriya aksiomalari va ulardan kelib chiqadigan natijalar		
		
S_1 aksioma. Bir to‘g‘ri chiziqda yotmagan uchta nuqta orqali bitta va faqat bitta tekislik o‘tkazish mumkin.	**S_2 aksioma.** Agar to‘g‘ri chiziqning ikki nuqtasi bitta tekislikda yotsa, u holda uning barcha nuqtalari shu tekislikda yotadi.	**S_3 aksioma.** Agar ikki tekislik umumiy nuqtaga ega bo‘lsa, u holda ular shu nuqtadan o‘tuvchi umumiy to‘g‘ri chiziqqa ham ega bo‘ladi.
		
1-natija. To‘g‘ri chiziq va unda yotmagan nuqta orqali bitta va faqat bitta tekislik o‘tkazish mumkin.	**2-natija.** Kesishuvchi ikki to‘g‘ri chiziq orqali bitta va faqat bitta tekislik o‘tkazish mumkin.	**3-natija.** Parallel ikki to‘g‘ri chiziq orqali bitta va faqat bitta tekislik o‘tkazish mumkin.

2.2. Fazoda to‘g‘ri chiziq va tekisliklarning joylashuvi

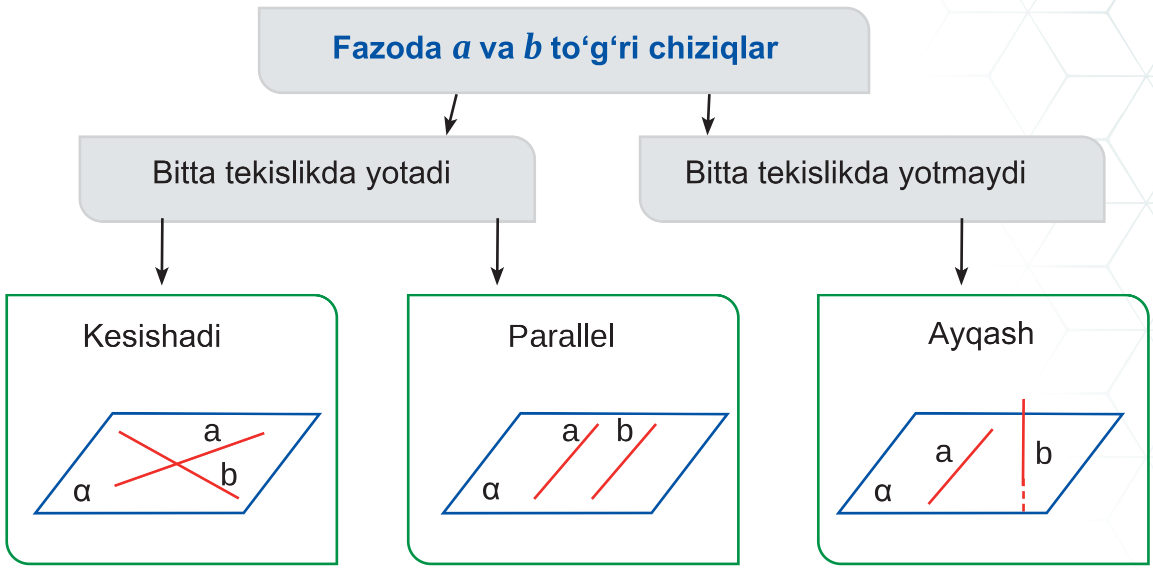
Fazoda to‘g‘ri chiziqlar

Fazoda ikki to‘g‘ri chiziq bir tekislikda yotishi yoki yotmasligi mumkin.

Bitta tekislikda yotgan va faqat bitta umumiy nuqtaga ega bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlar *kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlar* deb ataladi.

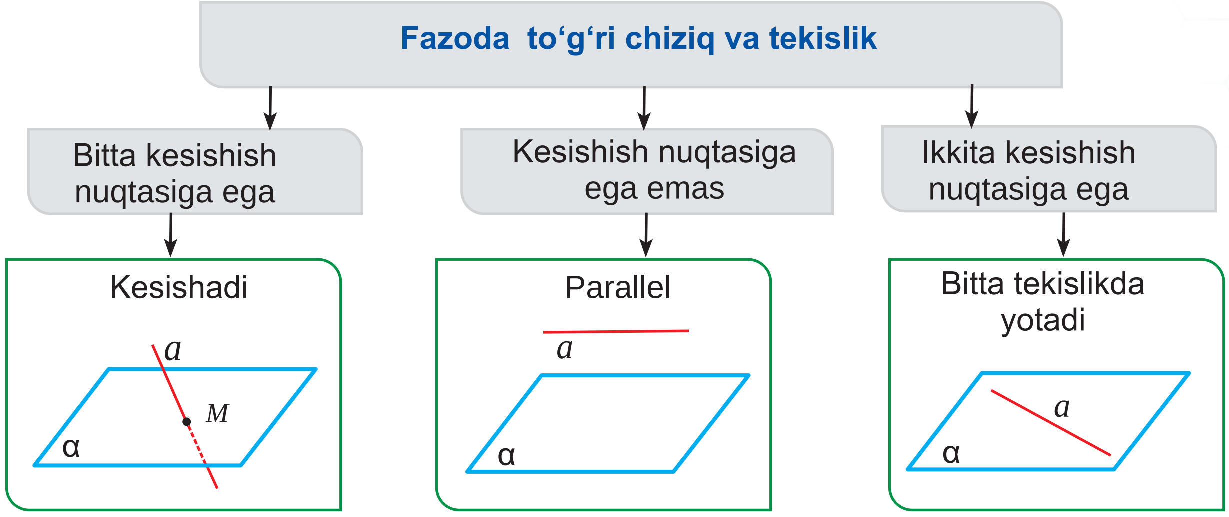
Bitta tekislikda yotgan va o‘zaro kesishmaydigan to‘g‘ri chiziqlar esa *parallel to‘g‘ri chiziqlar* deb ataladi.

Fazoda bir tekislikda yotmaydigan ikki to‘g‘ri chiziq *ayqash to‘g‘ri chiziqlar* deyiladi.



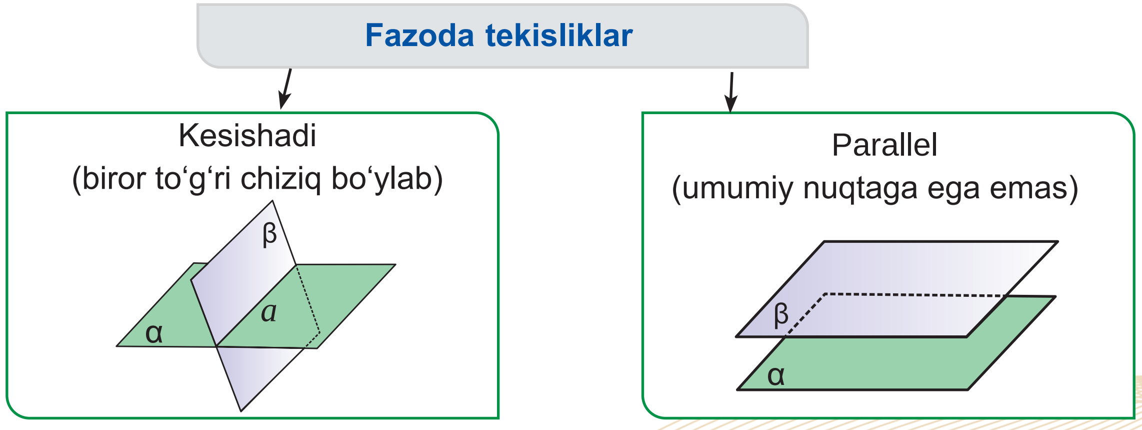
Fazoda to‘g‘ri chiziqlar va tekisliklar

To‘g‘ri chiziq tekislikda yotishi, uni kesib o‘tishi yoki kesib o‘tmasligi, ya’ni tekislikka parallel bo‘lishi mumkin.



Fazoda tekisliklar

Fazoda tekisliklar biror to‘g‘ri chiziq bo‘ylab kesishishi yoki umumiy nuqtaga ega bo‘lmasligi, ya’ni o‘zaro parallel bo‘lishi mumkin.



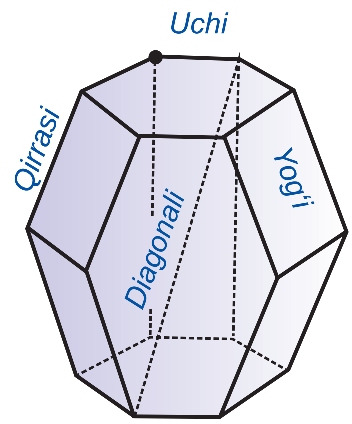
Shakllar	Fazoda to‘g‘ri chiziqlarning o‘zaro joylashuvi		
a va b to‘g‘ri chiziqlar	Bitta tekislikda yotadi.	Bitta umumiy nuqtaga ega.	Kesishuvchi: $a \otimes b$
		Umumiy nuqtaga ega emas.	Parallel: $a \parallel b$
	Bitta tekislikda yotmaydi.		Ayqash: $a \dot{-} b$

Shakllar	Fazoda to‘g‘ri chiziq va tekisliklarning o‘zaro joylashuvi		
a to‘g‘ri chiziq va α tekislik	a to‘g‘ri chiziq α tekislikda yotmaydi.	a to‘g‘ri chiziq α tekislik bilan bitta umumiy nuqtaga ega.	Kesishuvchi $a \otimes \alpha$
		a to‘g‘ri chiziq α tekislik bilan bitta umumiy nuqtaga ega emas.	Parallel: $a \parallel \alpha$
	a to‘g‘ri chiziq α tekislikda yotadi.		$a \subset \alpha$

Shakllar	Fazoda to‘g‘ri chiziqlarning o‘zaro joylashuvi	
α va β tekisliklar	Umumiy nuqtaga ega.	Kesishuvchi: $\alpha \cap \beta = a$ to‘g‘ri chiziq.
	Umumiy nuqtaga ega emas.	Parallel: $\alpha \parallel \beta$.

2.3. Ko‘pyoqlar

Fazoviy jism va ko‘pyoq

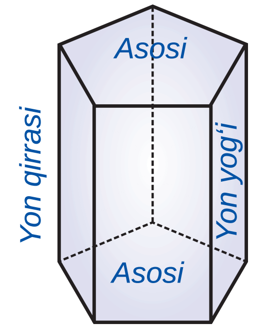


Fazoviy jismlarni qandaydir moddiy jism egallagan borliqning bo‘lagi sifatida tasavvur qilish mumkin. Fazoviy jismni uning sirti chegaralab turadi.

Sirti yassi ko‘pburchakdan iborat jism *ko‘pyoq* deyiladi.

Prizma

Prizma deb ikki yog‘i teng ko‘pburchaklardan iborat, parallel tekisliklarda yotuvchi va qolgan barcha qirralari o‘zaro parallel ko‘pyoqqa aytiladi.

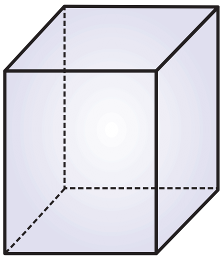


Muntazam prizma deb asoslari muntazam ko‘pburchaklardan iborat to‘g‘ri prizmaga aytiladi.

To‘g‘ri prizmaning yon sirti asosining perimetri bilan balandligi ko‘paytmasiga teng.

Parallelepiped

Asosi parallelogrammdan iborat prizmaga *parallelepiped* deyiladi. Uning barcha oltita yog‘i parallelogrammdan iborat.



Parallelepipedning xossalari

1) Parallelepipedning diagonallari o‘rtalari uning *simmetriya markazi* deyiladi.

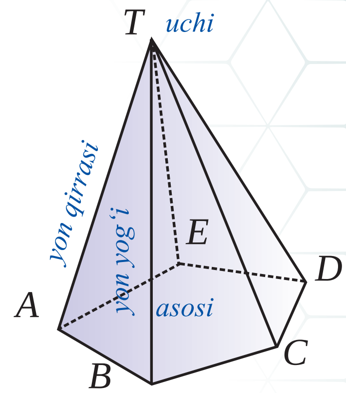
2) Parallelepipedning qarama-qarshi yoqlari teng va parallel.

3) Parallelepipedning barcha to‘rtta diagonali ham bir nuqtada kesishadi va kesishish nuqtasida teng ikkiga bo‘linadi.

Yon qirralari asos tekisligiga perpendikulyar parallelepiped *to‘g‘ri parallelepiped* deyiladi.

To‘g‘ri burchakli parallelepiped to‘g‘ri parallelepiped bo‘lib, asoslari to‘g‘ri to‘rtburchaklardan iborat. To‘g‘ri burchakli parallelepipedning qirralari teng bo‘lsa, bunday parallelepiped *kub* deyiladi.

Kubning hamma yoqlari teng kvadratlardan iborat.

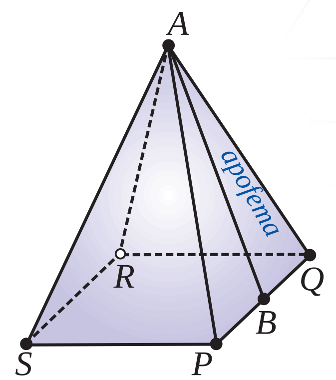


Piramida

Piramida deb uning bitta yog‘i ixtiyoriy ko‘pburchakdan, qolgan yoqlari umumiy uchga ega bo‘lgan uchburchaklardan iborat ko‘pyoqqa aytiladi.

Piramidaning balandligi deb piramidaning uchidan asos tekisligiga tushirilgan perpendikulyarga aytiladi.

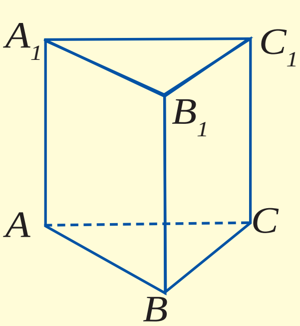
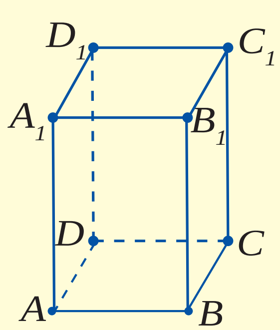
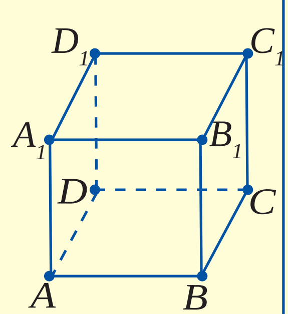
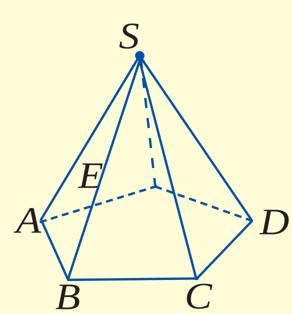
Muntazam piramida deb asosi muntazam ko‘pburchakdan iborat bo‘lib, balandligi asosining markaziga tushuvchi piramidaga aytiladi. Muntazam piramidaning barcha yon qirralari bir-biriga teng; barcha yon yoqlari teng yonli uchburchaklardir.

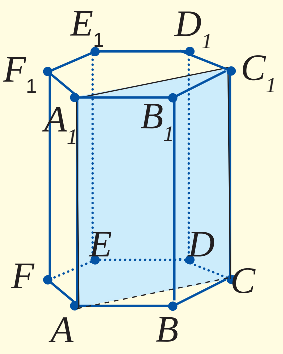
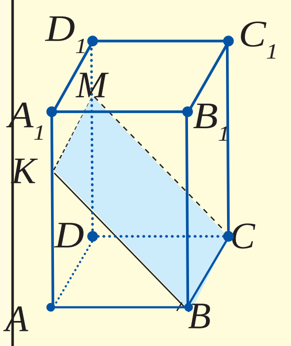
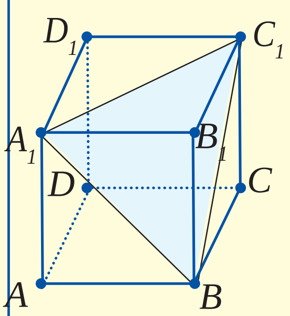
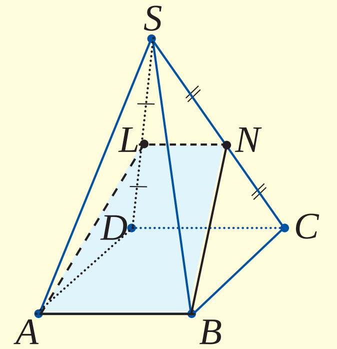


Agar piramidaning asosi n burchakdan iborat bo‘lsa, u holda bunday piramida *n burchakli piramida* deyiladi. Uchburchakli piramida *tetraedr* deyiladi.

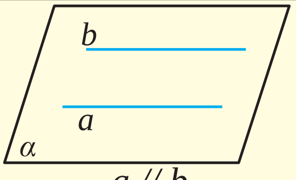
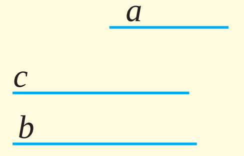
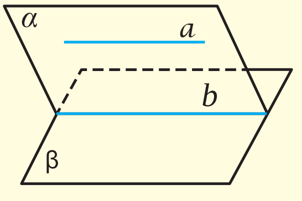
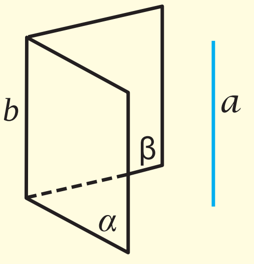
Agar tetraedrning barcha qirralari teng bo‘lsa, bunday tetraedr *muntazam tetraedr* deyiladi.

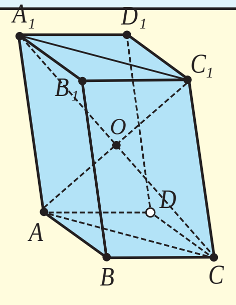
Muntazam piramidaning yon sirti quyidagi formula yordamida hisoblanadi: $S_{yon} = P \cdot h$, bu yerda P – piramida asosining perimetri, h – apofema.

Ko‘pyoqlar			
Prizma	**To‘g‘ri burchakli parallelepiped**	**Kub**	**Piramida**
			
Asoslari – ko‘pburchak, yoqlari – parallelogrammlar.	Asoslari – to‘g‘ri to‘rt-burchak, yoqlari – to‘g‘ri to‘rtburchaklar.	Asoslari – kvadrat, yoqlari – kvadrat.	Asosi – ko‘pburchak, yoqlari – uchburchak.

Ko'pyoqlarning sodda kesimlari			
Ko'pburchakli prizma	**To'g'ri burchakli parallelepiped**	**Kub**	**Piramida**
 $ACC_1 - A, C, C_1$ nuqtalardan o'tuvchi, kesuvchi tekislik; ACC_1A_1 – kesim.	 CBK – K nuqta va CB to'g'ri chiziqdan o'tuvchi, kesuvchi tekislik; $CBKM$ – kesim.	 A_1BC_1 – BC_1 va BA_1 to'g'ri chiziqlardan o'tuvchi, kesuvchi tekislik; A_1C_1B – kesim.	 ABN – AB va LN parallel to'g'ri chiziqlardan o'tuvchi, kesuvchi tekislik; $ABNL$ – kesim.

2.4. Fazoda to'g'ri chiziqlar va tekisliklarning parallelligi

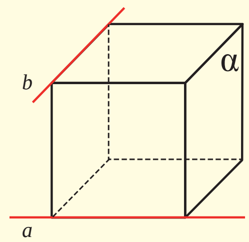
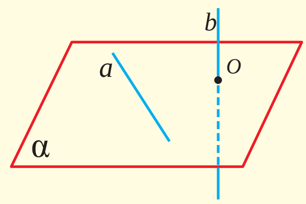
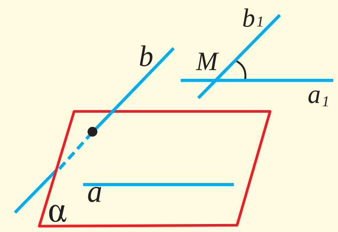
Parallel to'g'ri chiziqlar			
Ta'rifi	**Alomatlari**		
 $a \parallel b$, a va b to'g'ri chiziqlar bitta tekislikda yotib, o'zaro kesishmasa *parallel to'g'ri chiziqlar* deb ataladi.	 Agar $a \parallel b$, $a \parallel c$ bo'lsa, $b \parallel c$ bo'ladi.	 Agar $\alpha \cap \beta = b$, $a \subset \alpha$ va $a \parallel \beta$ bo'lsa, $b \parallel a$ bo'ladi.	 Agar $\alpha \cap \beta = b$, $a \parallel \alpha$ va $a \parallel \beta$ bo'lsa, $a \parallel b$ bo'ladi.

Parallelepipedning xossalari	
	1-xossa. Asosining diagonallari va yon qirralaridan tuzilgan to'rtburchak (AA_1C_1C) parallelogrammdir. 2-xossa. Qarama-qarshi yoqlari o'zaro teng ($AA_1B_1B = DD_1C_1C$). 3-xossa. Barcha diagonallari bitta nuqtada kesishadi va bu nuqtada teng ikkiga bo'linadi ($AO = OC_1$, $CO = OA_1$).

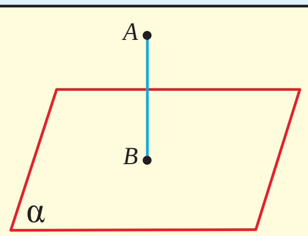
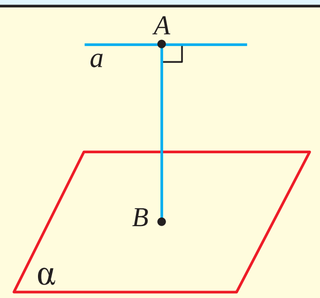
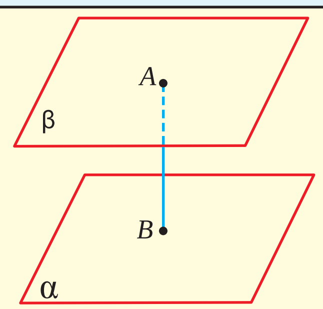
2.5. Fazoda to‘g‘ri chiziqlar va tekisliklarning perpendikulyarligi

To‘g‘ri chiziq va tekislikning perpendikulyarligi

Agar tekislikni kesib o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tekislikdagi shu kesishish nuqtasidan o‘tuvchi istalgan to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar bo‘lsa, u holda to‘g‘ri chiziq shu *tekislikka perpendikulyar* deb ataladi.

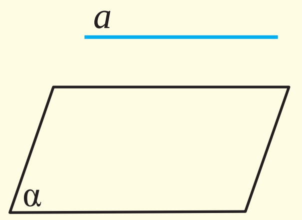
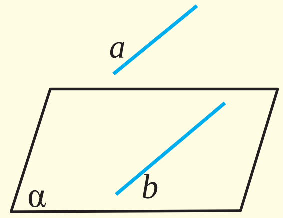
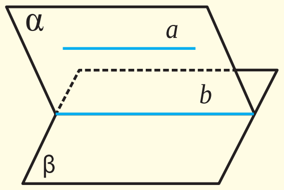
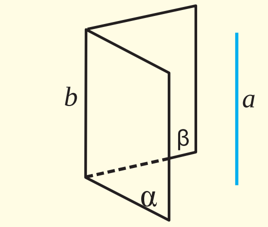
Ayqash to‘g‘ri chiziqlar		
Ta’rifi	**Alomati**	**Orasidagi burchak**
 Bitta tekislikda yotmaydigan to‘g‘ri chiziqlar *ayqash to‘g‘ri chiziqlar* deb ataladi va $a \dot{-} b$ tarzda ifodalanadi.	 Agar $a \subset \alpha,\ \alpha \cap b = O,$ $O \notin a$ bo‘lsa, $a \dot{-} b$ bo‘ladi.	 Ayqash to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak deb ularga parallel bo‘lgan, kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakka aytiladi.

Shakllar	Fazoda to‘g‘ri chiziqlarning o‘zaro joylashuvi		
a va b to‘g‘ri chiziqlar	Bitta tekislikda yotadi	Bitta umumiy nuqtaga ega.	Kesishuvchi: $a \otimes b.$
		Umumiy nuqtaga ega emas.	Parallel: $a \parallel b.$
	Bitta tekislikda yotmaydi		Ayqash: $a \dot{-} b.$

Fazoda masofalar		
Nuqtadan tekislikkacha bo‘lgan masofa	**To‘g‘ri chiziqdan tekislikkacha bo‘lgan masofa**	**Tekisliklar orasidagi masofa**
 $A \notin \alpha$ $AB \perp \alpha$	 $a \parallel \alpha,$ $A \in a,\ AB \perp \alpha$	 $\alpha \parallel \beta,$ $A \in \beta,\ AB \perp \alpha$

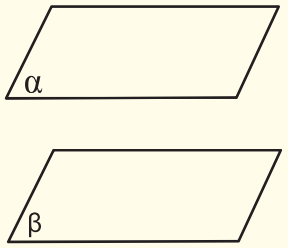
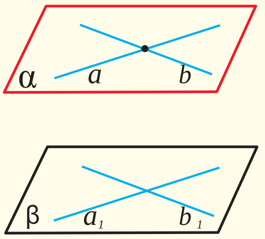
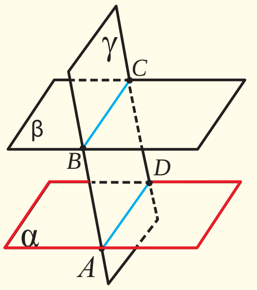
Fazoda to‘g‘ri chiziq va tekisliklarning parallelligi

a to‘g‘ri chiziq va α tekislik	Ko‘p umumiy nuqtalarga ega.	To‘g‘ri chiziq tekislikda yotadi: $a \subset \alpha.$
	Bitta umumiy nuqtaga ega.	To‘g‘ri chiziq tekislikni kesadi: $a \otimes \alpha.$
	Umumiy nuqtaga ega emas.	To‘g‘ri chiziq tekislikka parallel: $a \parallel \alpha.$

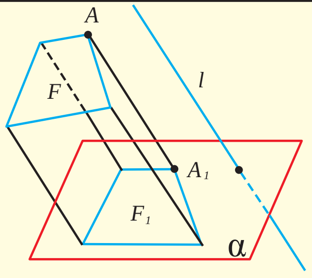
Ta'rifi	Alomatlari	Xossalari	
 Agar a to'g'ri chiziq α tekislik bilan umumiy nuqtaga ega bo'lmasa, *to'g'ri chiziq* va *tekislik parallel* deyiladi va $a \parallel \alpha$ tarzda belgilanadi.	 Agar a to'g'ri chiziq - α tekislikda yotmasa va $a \parallel b$, $b \subset \alpha$ bo'lsa, u holda $a \parallel \alpha$ bo'ladi.	 Agar b to'g'ri chiziq - α va β tekisliklar kesishish chizig'i, $a \subset \alpha$ va $a \parallel \beta$ bo'lsa, u holda $b \parallel a$ bo'ladi.	 Agar b to'g'ri chiziq - α va β tekisliklar kesishish chizig'i, $a \parallel \alpha$ va $a \parallel \beta$ bo'lsa, $a \parallel b$ bo'ladi.

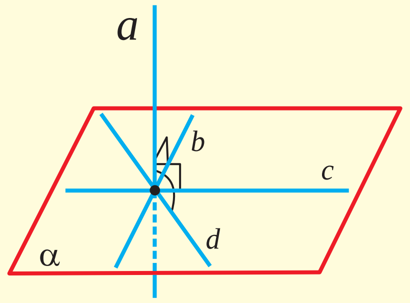
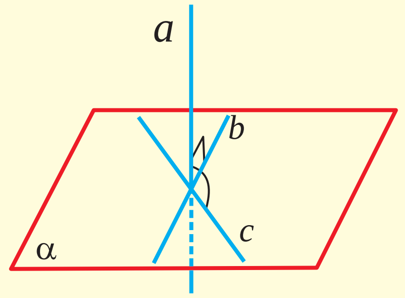
Fazoda tekisliklarning parallelligi

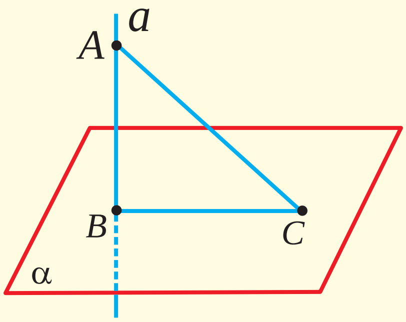
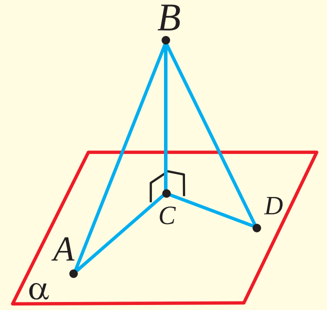
α va β tekisliklar	Umumiy nuqtaga ega.	Kesishadi: $\alpha \otimes \beta$.
	Umumiy nuqtaga ega emas.	Parallel: $\alpha \parallel \beta$.

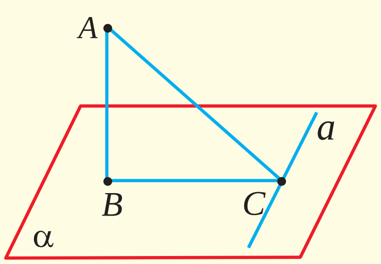
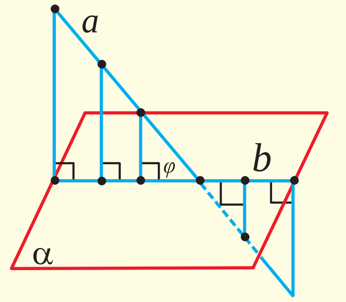
Ta'rifi	Alomati	Xossasi
 Kesishmaydigan α va β tekisliklar *parallel tekisliklar* deb ataladi va $\alpha \parallel \beta$ tarzda belgilanadi.	 Agar $a \subset \alpha$, $b \subset \alpha$, $a \otimes b$, $a_1 \subset \beta$, $b_1 \subset \beta$, $a_1 \otimes b_1$, $a \parallel a_1$, $b \parallel b_1$ bo'lsa, $\alpha \parallel \beta$ bo'ladi.	 Agar $\alpha \parallel \beta$ va γ kesuvchi tekislik, $\alpha \cap \gamma = AD$ va $\beta \cap \gamma = BC$ bo'lsa, $AD \parallel BC$ bo'ladi.

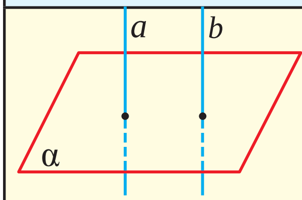
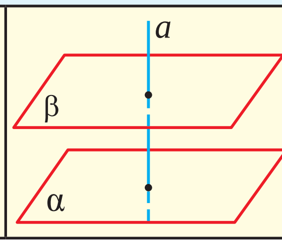
Parallel proyeksiyalash

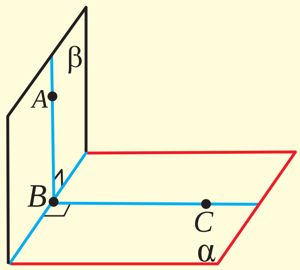
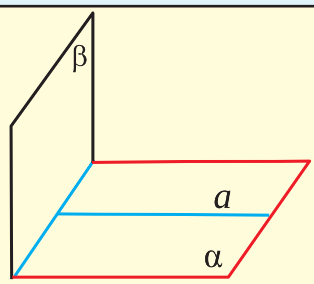
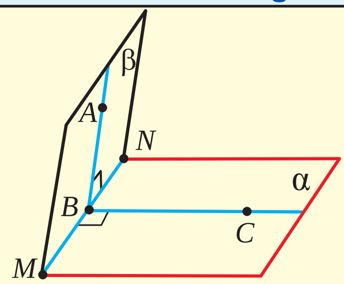
Ta'rifi	Parallel proyeksiyalashda shakllarning xossalari	
	Saqlanadi	**Saqlanmaydi**
 F - shakl, α – proyeksiyalash tekisligi, l - proyeksiyalash yo'nalishi, F_1 – F shakl proyeksiyasi.	1) nuqta nuqtaga, to'g'ri chiziq to'g'ri chiziqqa, kesma kesmaga, uchburchak uchburchakka o'tadi; 2) nuqtalarning to'g'ri chiziqqa tegishliligi; 3) nuqtalarning to'g'ri chiziqqa nisbatan joylashuvi; 4) to'g'ri chiziqlarning parallelligi; 5) bitta yoki parallel to'g'ri chiziqlarda yotgan kesmalarning tengligi (yoki proporsionalligi).	1) kesma uzunligi; 2) burchak kattaligi; 3) to'g'ri chiziqlarning perpendikulyarligi; 4) burchaklar tengligi (proporsionalligi); 5) kesishuvchi to'g'ri chiziqlarda yotgan kesmalarning tengligi (proporsionalligi).

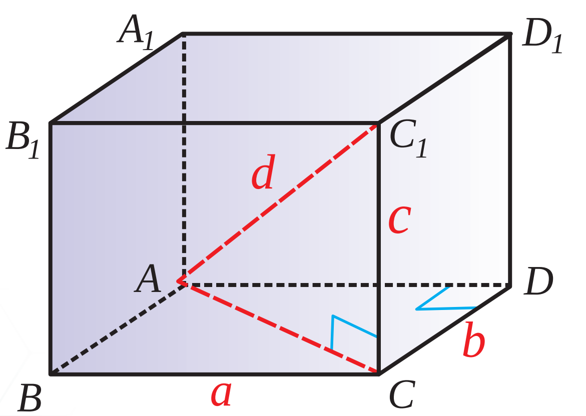
To‘g‘ri chiziqning tekislikka perpendikulyarligi	
Ta’rifi	**Alomati**
 Agar ixtiyoriy $b \in \alpha$ uchun $a \perp b$ bo‘lsa, $a \perp \alpha$ deb ataladi.	 Agar $b \in \alpha$, $c \in \alpha$ uchun $a \perp b$, $a \perp c$ bo‘lsa, $a \perp \alpha$ bo‘ladi.

Perpendikulyar va og‘ma	
Ta’rifi	**Xossalari**
 Agar $a \perp \alpha$, $AB \notin \alpha$ bo‘lsa, AB – α tekislikka A nuqtadan tushirilgan perpendikulyar; AC – og‘ma, BC – og‘maning α tekislikka proyeksiyasi.	 $BC < AB$, $BC < BD$. Agar $AB = BD$ bo‘lsa, $AC = CD$ bo‘ladi. Agar $AC = CD$ bo‘lsa, $AB = BD$ bo‘ladi. Agar $AC > CD$ bo‘lsa, $AB > BD$ bo‘ladi.

Uch perpendikulyar haqidagi teorema	To‘g‘ri chiziq va tekislik orasidagi burchak
 $AB \perp \alpha$ Agar $a \perp BC$ bo‘lsa, $a \perp AC$ bo‘ladi. Agar $a \perp AC$ bo‘lsa, $a \perp BC$ bo‘ladi.	 b – a ning α tekislikdagi proyeksiyasi. φ – a va α tekislik orasidagi burchak.

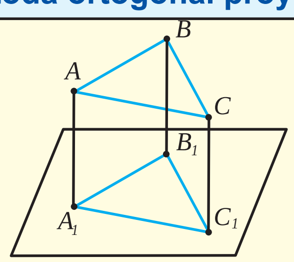
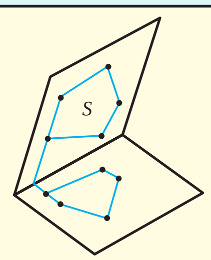
Tekisliklarning parallelligi va perpendikulyarligi orasidagi bog‘lanishlar	
 Agar $a \parallel b$, $\alpha \perp a$ bo‘lsa, $\alpha \perp b$ bo‘ladi. Agar $\alpha \perp a$, $b \perp \alpha$ bo‘lsa, $a \parallel b$ bo‘ladi.	 Agar $\alpha \parallel \beta$, $a \perp \beta$ bo‘lsa, $a \perp \alpha$ bo‘ladi. Agar $\alpha \perp a$, $\beta \perp a$ bo‘lsa, $\alpha \parallel \beta$ bo‘ladi.

Tekisliklarning perpendikulyarligi		
Ta’rifi	**Alomati**	**Tekisliklar orasidagi burchak**
 Agar $\angle ABC = 90^\circ$ bo‘lsa, α va β tekisliklar perpendikulyar deyiladi.	 Agar $a \subset \alpha$ va $a \perp \beta$ bo‘lsa, $\alpha \perp \beta$ bo‘ladi.	 Agar $AB \perp MN$ va $CB \perp MN$ bo‘lsa, $\angle ABC$ – α va β tekisliklar orasidagi burchak.



Umumlashgan Pifagor teoremasi

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Fazoda ortogonal proyeksiya	Ko‘pburchak proyeksiyasining yuzi
 Ortogonal proyeksiyada: $l \perp \alpha$. l – proyeksiyalash yo‘nalishi; α – proyeksiyalash tekisligi.	 $S_1 = S \cdot \cos\varphi$ S – ko‘pburchak yuzi; S_1 – ko‘pburchak proyeksiyasining yuzi; φ – ko‘pburchak va proyeksiya tekisliklari orasidagi burchak.

O'quv nashri

GEOMETRIYA

Umumiy o'rta ta'lim maktablarining
10-sinfi uchun darslik

Muharrir Orifjon Madvaliyev
Texnik muharrir Akmal Sulaymonov
Musahhih Xurshid Ibrohimov
Sahifalovchi dizayner Ixvoldin Salohitdinov
Rassom Umid Sulaymonov

Original-maketdan bosishga ruxsat etildi __.__.2022. Bichimi 60x84 1/8.
"Arial" garniturasi. Ofset bosma usulda bosildi. Shartli bosma tabog'i 22,32.
Nashr bosma tabog'i 19,43. Nusxasi __________. Buyurtma N______.

Ijaraga berilgan darslik holatini ko‘rsatuvchi jadval

T/r	O‘quvchining ismi va familiyasi	O‘quv yili	Darslikning olingandagi holati	Sinf rahbari-ning imzosi	Darslikning topshiril-gandagi holati	Sinf rahbari-ning imzosi
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Darslik ijaraga berilib, o‘quv yili yakunida qaytarib olinganda yuqoridagi jadval sinf rahbari tomonidan quyidagi baholash mezonlariga asosan to‘ldiriladi:

Yangi	Darslikning birinchi marotaba foydalanishga berilgandagi holati.
Yaxshi	Muqova butun, darslikning asosiy qismidan ajralmagan. Barcha varaqlari mavjud, yirtilmagan, ko‘chmagan, betlarida yozuv va chiziqlar yo‘q.
Qoniqarli	Muqova ezilgan, birmuncha chizilib, chetlari yedirilgan, darslikning asosiy qismidan ajralish holati bor, foydalanuvchi tomonidan qoniqarli ta’mirlangan. Ko‘chgan varaqlari qayta ta’mirlangan, ayrim betlariga chizilgan.
Qoniqarsiz	Muqovaga chizilgan, yirtilgan, asosiy qismdan ajralgan yoki butunlay yo‘q, qoniqarsiz ta’mirlangan. Betlari yirtilgan, varaqlari yetishmaydi, chizib, bo‘yab tashlangan. Darslikni tiklab bo‘lmaydi.