GEOMETRIYA

10

Ulıwma bilim beriw mektebiniń
10-klası ushın sabaqlıq

Ózbekstan Respublikası Xalıq bilimlendiriw
ministrligi baspaǵa ruqsat etken

Jańa basılım

Tashkent – 2022

UO‘K 514(075.3)
KBK 22.151ya72
G 35

Dúziwshiler:

Boxodir Xaydarov
Nargiza Tashtemirova
Isak Asrorov

Pikir bildiriwshiler

Z. R. Babayeva – Sırdárya wálayatı Gúlistan qalasındaǵı 11-sanlı ulıwma orta bilim beriw mektebiniń matematika páni muǵallimi.
M. X. Usmanov – Namangan wálayatı xalıq bilimlendiriw basqarması janındaǵı 3-sanlı QMUBBMI matematika páni muǵallimi.
A. K. Alibekova – Tashkent qalası Shayxontohur rayonındaǵı 180-sanlı QMUBBM matematika páni muǵallimi.

Geometriya 10-klass [Matn]: sabaqlıq / B. Xaydarov, N. Tashtemirova, I. Asrorov - Tashkent: Respublikalıq bilimlendiriw orayı, 2022. - 192 b.

Ózbekstan Respublikası Pánler akademiyası V.I.Romanovskiy atındaǵı matematika institutı juwmaǵı tiykarında tolıqtırıldı.

Original maket hám dizayn koncepciyası
Respublikalıq bilimlendiriw orayı tárepinen islep shıǵıldı.

Respublikalıq maqsetli kitap qorı qarjıları esabınan basıp shıǵarıldı

UNICEF tiń Ózbekstandaǵı wákili menen birgelikte tayarlandı.

ISBN 978-9943-8457-3-2

SÓZ BASÍ

Áziz oqıwshılar! Siz geometriyanıń bólimi – stereometriya kursın úyreniwdi baslap atırsız. Stereometriya keńisliktegi geometriyalıq figuralardıń qásiyetlerin úyreniwge arnalǵan. 10-klasta stereometriya aksiomaları hám olardıń nátiyjeleri, keńisliktegi tuwrı sızıqlar hám tegisliklerdiń parallelligi hám perpendikulyarlıǵı menen tanısasız.

Keltirilgen teoriyalıq materiallar múmkinshiligi barınsha ápiwayı hám qolaylı tilde bayan etilgen. Barlıq tema hám túsiniklerdiń mánisi túrli turmıslıq mısallar arqalı ashıp berilgen. Hárbir temadan keyin berilgen sorawlar, dálillewge, esaplawǵa hám jasawǵa tiyisli kóplegen másele hám mısallar oqıwshını dóretiwshilik penen pikirlewge iytermeleydi, ózlestirilgen bilimlerdi tereńlestiriwge hám bekkemlep barıwǵa járdem beredi. Sabaqlıq ayrıqsha dizaynı hám sabaqlıq materialın kórgizbeli etip usınıwı menen ajıralıp turadı. Ol jaǵdayda keltirilgen súwretler hám sızılmalar sabaqlıq materialların jaqsı ózlestirip alıwǵa xızmet etedi.

Úyrenilgen geometriyalıq túsinikler hám qásiyetler sizde turmıslıq mashqalalardı sheshiw hám ámeliyatta qollaw qábiletin rawajlandıradı. Stereometriya boyınsha ózlestirilgen bilim hám kónlikpeler kúndelikli turmısta, kóplegen kásip iyeleri hám qánigeler – arxitektorlar, qurıwshılar, dizaynerlar, tokarlar hám basqalardıń kásiplik iskerliginde zárúr ekenligine isenesiz.

Barlıq materiallar baplarǵa, baplar bolsa temalarǵa bólingen. Hárbir temada teoriyalıq materiallar hám wazıypalar bar. Teoriyanı úyrenip atırǵanda, qoyıw hárip penen ajıratılǵan tekstke bólek itibar beriń. Bul eń zárúrli anıqlama hám qásiyetler bolıp tabıladı. Mashqalalardı sheshiwde olardı túsiniw, eslew hám qollay biliw kerek. Temalar tekstinde bazı mashqalalardı sheshiw hám máselelerdi sheshiw úlgilerin de tabasız.

Hárbir temadan keyin berilgen sorawlar tema materialın qanday ózlestirilgenligin tekseriwge jáne onı tákirarlawǵa járdem beredi. Hárbir bólim aqırında qadaǵalaw sorawları hám test tapsırmaları berilgen bolıp, olar járdeminde bólim temaları qanday ózlestirilgenligin tekseriw múmkin. Sabaqlıqtaǵı soraw hám tapsırmalar úsh qıyınshılıq dárejesine iye. Tema aqırındaǵı sorawlar hám bazı dóńgelek (°) penen belgilengen máseleler dáslepki qıyınshılıq dárejesinde bolıp, olar teoriyalıq materialdı jaqsı túsingenligine isenimi kámil bolmaǵanlar ushın tayarlıq shınıǵıwları esaplanadı. Heshqanday belgisizleri ortasha qıyınshılıqtaǵı wazıypalar hám shınıǵıwlar bolıp tabıladı. Olardı sheshiwdi úyrenip, jetkilikli dárejedegi akademiyalıq tabıslardı isenimli tárizde kórsete alasız. Juldızsha (*) menen joqarı quramalılıqtaǵı wazıypalar belgilengen. Eger siz olardı tezlik penen sheshe almasańız, uwayımlamań, biraq sabırlı hám turaqlı bolıń. Qıyın wazıypanı sheshiw quwanıshı siz ushın sıylıq boladı. Juwaplardaǵı kórsetpeler bul wazıypalardıń geyparaların sheshiw jolların tabıwǵa járdem beredi.

Pán, atap aytqanda, geometriyanı oqıtıwdan gózlengen zárúrli nátiyje oqıwshılardıń tiyisli kompetenciyalar – bilim hám kónlikpelerge tiykarlanǵan bilim beriw hám turmısta tabıslı háreket etiw ilimiy tájiriybelerin iyelewden ibarat. Sabaqlıqta keltirilgen tapsırma hám shınıǵıwlar áne sol maqsette ámelge asırıwǵa qaratılǵan.

Avtorlar

SABAQLÍQTAN PAYDALANÍW BOYÍNSHA KÓRSETPELER

Sabaqlıqtan stereometriyanı tabıslı úyreniw ushın tómendegilerge ámel etiwdi usınıs etemiz:

• hárbir keńisliktegi deneni úyreniwdi onıń modelin jasawdan baslaw hám olardıń qásiyetlerin sol modeller tiykarında úyreniw;

• keńisliktegi denelerdi dápterde súwretlewge bólek itibar qaratıw;

• kóbirek turmıslıq, kúndelikli turmıstan alınǵan máselelerdi sheshiw, yaǵnıy kompetenciyalardı qáliplestiriwge itibar beriw;

• bara-bara súwretli máselelerden tekstli máselelerge ótiw;

• sabaqta túrli predmetler, úy buyımlarına keńisliktegi dene modeli retinde qaraw, olardıń qásiyetlerin úyreniwge tiyisli máselelerdi kóbirek sheshiw;

• túrli qásiyetler hám formulalardıń dálilleniwi boyınsha olardıń mánisi hám qollanıwına kóbirek toqtalıw.

SABAQLÍQTA QOLLANÍLǴAN SHÁRTLI BELGILER:

– geometriyalıq túsinik anıqlaması.

– teorema sıpatlaması.

– aksioma sıpatlaması.

– tema boyınsha sorawlar.

– aktivlestiriwshi shınıǵıwlar.

– másele sheshiw úlgisi.

– ámeliy shınıǵıw hám qollanıw.

– geometriyalıq izertlew.

– tariyxıy túsinikler.

– geometriyalıq basqatırmalar.

– multimedia qosımshaları.

– elektron resurslar.

MAZMUNÍ

I BAP
PLANIMETRIYANÍ SISTEMALÍ TÁKIRARLAW

II BAP
STEREOMETRIYAǴA KIRISIW

III BAP
KEŃISLIKTEGI TUWRÍ SÍZÍQ HÁM TEGISLIKLERDIŃ PARALLELLIGI

IV BAP

KEŃISLIKTE TUWRÍ SÍZÍQ HÁM TEGISLIKLERDIŃ PERPENDIKULYARLÍǴÍ

V BAP

TÁKIRARLAW

10-KLASS "GEOMETRIYA" SABAQLÍǴÍ USHÍN BILIM BERIWSHI OYÍNLAR

10-KLASS "GEOMETRIYA" SABAQLÍǴÍ USHÍN VIDEOSABAQLAR

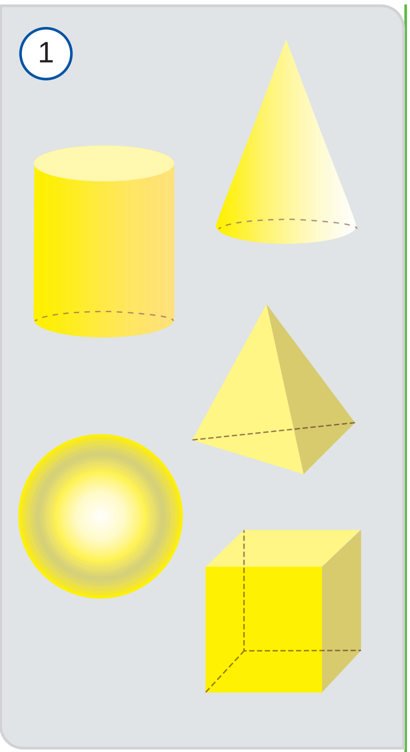
I BAP

PLANIMETRIYANÍ SISTEMALÍ TÁKIRARLAW

Bul baptı úyreniw nátiyjesinde siz 7–9-klaslarda geometriyanıń planimetriya bólimi boyınsha qáliplestirgen tómendegi bilim hám kónlikpeleriińizdi bekkemlep alasız:

- geometriyanıń logikalıq (aksiomatikalıq) dúzilisi menen tanısasız;
- planimetriyanıń tiykarın shólkemlestirgen aksiomalar sistemasın bilip alasız;
- geometriyanı ǵárezsiz pán retinde tiykarlawǵa úlken úles qosqan ilimpazlar menen tanısasız;
- geometriya tariyxına tiyisli maǵlıwmatlar menen tanısasız;
- geometriyalıq máseleler sheshiwdiń analitikalıq, sintetikalıq, tuwrı hám keri, algebralıq, maydanlar, vektorlar, koordinatalar hám geometriyalıq almastırıwlar usılları menen tanısasız;
- joqarıdaǵı usıllar tiykarında planimetriyaǵa tiyisli máselelerdi sheshesiz.

1 GEOMETRIYANÍŃ LOGIKALÍQ DÚZILISI



Geometriya real turmıstağı predmetlerdiń muğdarlıq kórsetkishleri hám keńisliktegi formaların úyrenetuğın pán bolıp tabıladı. Zatlardıń basqa qásiyetlerin basqa pánler úyrenedi. Eger qanday da bir zat úyrenilip atırǵanda onıń tek keńisliktegi forması hám ólshemleri esapqa alınsa, ol jaǵdayda *geometriyalıq figura* dep atalıwshı abstrakt obyektke iye bolamız.

"Geometriya" grek sózi bolıp, "jer ólshew" degen mánisti ańlatadı. Mektepte úyreniletuǵın geometriya áyyemgi grek alımı Evklid atı menen *Evklid geometriyası* dep ataladı. Geometriya eki bólimnen: *planimetriya hám stereometriyadan* ibarat. *Planimetriya* – tegisliktegi, *stereometriya* bolsa keńisliktegi geometriyalıq figuralardıń qásiyetlerin úyrenedi *(1-súwret)*.

Geometriyalıq figuralardı bir-birinen parıqlaw ushın olardıń qásiyetleri táriyiplenedi, yaǵnıy olarǵa *anıqlama* beriledi. Biraq barlıq figuralarǵa da anıqlama berip bolmaydı. Olardıń dáslepki birneshewin anıqlamasız qabıllawǵa májbúrmiz. Olardı anıqlama berilmeytuǵın, *baslanǵısh (tiykarǵı) geometriyalıq figuralar* dep alamız.

Geometriyanıń logikalıq dúziliwi tómendegi tártipte ámelge asırıladı:

1. Aldın tiykarǵı (baslanǵısh) geometriyalıq figuralar anıqlamasız qabıl etiledi;
2. Tiykarǵı geometriyalıq figuralardıń tiykarǵı qásiyetleri dálillewsiz qabıl etiledi;
3. Basqa geometriyalıq figuralar tiykarǵı figuralar hám olardıń qásiyetlerine súyene otırıp anıqlama beriledi hám olardıń qásiyetleri aldınnan belgili qásiyetlerge súyene otırıp dálillenedi.

Pánniń bunday dúzilisi *aksiomalıq dúzilis* dep ataladı. *Aksioma* dep durıslıǵı dálillewsiz qabıl etiletuǵın qásiyetke aytıladı. Usı waqıtqa shekem biz úyrengen planimetriyanıń tiykarǵı figuraları noqat, tuwrı sızıq hám tegislik edi. Olardı anıqlamasız qabılladıq. Kesindi, nur, úshmúyeshlik hám basqa geometriyalıq figuralarǵa bolsa anıqlama berdik. Sonıń menen birge, tómendegi qásiyetlerdi (tastıyıqlardı) dálillewsiz aksioma sıpatında qabılladıq:

I. Tiyislilik aksiomalar toparı:

1.1. Tegislikte qanday tuwrı sızıq alınbasın, onda bul tuwrı sızıqqa tiyisli bolǵan noqatlar da, tiyisli bolmaǵan noqatlar da bar.

1.2. Hárqanday eki noqattan tek ǵana bir tuwrı sızıq ótedi.

Geometriya tiykarları mısrlıqlarǵa eramızǵa shekemgi 3-mıń jıllıqtıń baslarında belgili bolǵan. Sol dáwirlerde, piramidalar qurılısı qızǵın máwsimde bolǵanında, olar bul bilimlerdi aktiv qollaǵan. Ilimpazlardıń anıqlawınsha, áyyemgi Egipetlik injinerler teń aralıqtaǵı 12 túyin menen ajıratılǵan, úsh qazıqqa tartılǵan jip tuwrı múyesh payda etiwin bilgen. Olar, sonıń menen birge, awıl xojalıǵı eginlerin egiw ushın egis tegisliginiń aymaqların belgilep, geometriyalıq bilimlerdi qollanǵan.

II. Tártip aksiomalar toparı:

2.1. Bir tuwrı sızıqtan alınǵan qálegen úsh noqattıń tek birewi qalǵan ekewiniń arasında jatadı.

2.2. Hárbir tuwrı sızıq tegislikti eki bólekke – eki yarımtegislikke ajıratadı.

III. Ólshew aksiomalar toparı:

3.1. Hárqanday kesindi nólden ayrıqsha belgili uzınlıqqa iye bolıp, ol oń san menen ańlatıladı. Kesindi uzınlıǵı onıń qálegen noqatı ajıratqan bólekleri uzınlıqlarınıń qosındısına teń.

3.2. Hárqanday múyesh belgili gradus ólshemge iye bolıp, onıń mánisi oń san menen ańlatıladı. Jayıq múyeshtiń gradus ólshemi 180° qa teń. Múyeshtiń gradus ólshemi múyesh tárepleri arasınan ótetuǵın qálegen nur ajıratqan múyeshler gradus ólshemleriniń qosındısına teń.

IV. Teń figuranı qoyıw aksiomalar toparı:

4.1. Qálegen nurǵa onıń tóbesinen baslap, berilgen kesindige teń birden-bir kesindini qoyıw múmkin.

4.2. Qálegen nurdan belgili yarımtegislikke berilgen, jayıq bolmaǵan múyeshke teń birden-bir múyeshti qoyıw múmkin.

4.3. Hárqanday úshmúyeshlik ushın oǵan teń úshmúyeshlik bar boladı hám onı nurdan belgili yarımtegislikke birden-bir tárizde qoyıw múmkin.

V. Parallellik aksioması:

5.1. Tegislikte tuwrı sızıqta jatpaytuǵın noqattan bul tuwrı sızıqqa tek bir parallel tuwrı sızıq ótkeriw múmkin.

Qanday da bir tastıyıqtıń durıslıǵın logikalıq pikirler járdeminde keltirip shıǵarıw *dálillew* dep ataladı. Durıslıǵın dálillew jolı menen dálillenetuǵın tastıyıq bolsa *teorema* dep ataladı. Teorema ádette *shárt* hám *juwmaq* bólimlerden ibarat boladı. Teoremanıń birinshi – shárt bóleginde neler berilgeni bayanlanadı. Ekinshi-juwmaq bóleginde bolsa neni tastıyıqlaw kerekligi ańlatıladı.

Teoremanı dálillew – onıń shártinen paydalanıp buǵan deyin tastıyıqlangan hám qabıl etilgen qásiyetlerge súyene otırıp, pikir júritip, juwmaq bóleginde kórsetilgen gáptiń durıslıǵın keltirip shıǵarıw. Teoremanıń shárt hám juwmaq bólimlerin anıqlastırıp alıw teoremanı aydınlastıradı, onı túsiniw hám dálillew procesin jeńillestiredi.

Geometriya matematikanıń zárúrli bólimi bolıp tabıladı. Onıń kelip shıǵıwı birneshe mıń jıllarǵa barıp taqaladı hám birinshi náwbette ónermentshilik, mádeniyat, kórkem óner, insan miyneti hám átiraptaǵı dúnyanı baqlawdıń rawajlanıwı menen baylanıslı. Bunı geometriyalıq figuralardıń atları da tastıyıqlaydı. Mısalı, “trapeciya” termininiń atı grekshe “trapesiya” (stul) sózinen, “konus” grekshe “konos” (qaraǵay konusı) sózinen, “tuwrı sızıq” bolsa latınsha “lynum” (zıǵır sabaq) nan kelip shıqqan.

Evklid (eramızdan aldıńǵı 356 – 300-jıllar)

Geometriyanı úyrengen eń ataqlı ilimpazlardan biri Evklid bolıp tabıladı. Onıń húrmetine bul pánniń klassikalıq tarawı "Evklid geometriyası" dep ataladı. Onıń ózi 465 teoremanı dálillegen. Házirge shekem bul rekord heshkim tárepinen jańalanbaǵan.

Grek alımı ***Aflotun*** geometriyada ájayıp bir nızamlılıqtı kórgen: aldın úyrenilgen, durıslıǵı dálillengen qásiyetlerden logikalıq pikirlew, baqlaw júrgiziw arqalı jańa qásiyetlerdi keltirip shıǵarıwǵa boladı eken. Bunday ájayıp múmkinshilikten paydalanıp qalǵan qásiyetler teoremalar kórinisinde ańlatıladı hám aksiomalar hám bul waqıtqa shekem durıslıǵı dálillengen qásiyetlerge tiykarlanıp logikalıq pikirler júrgiziw arqalı dálillenedi.

Pikir júrgiziw procesinde dálillenbegen qásiyetlerden (eger olardıń durıslıǵı ashıq-aydın kórinip turǵan bolsa da) paydalanıw qadaǵan etiledi.

Solay etip, geometriyanı bir imarat dep qaraytuǵın bolsaq, baslanǵısh túsinikler hám aksiomalar onıń fundamentin quraydı. Bul fundament ústine terilgen “gerbishler” anıqlama berilgen jańa túsinikler hám teoremalar kórinisinde dálillengen qásiyetlerden ibarat boladı.

Geometriyanı ǵárezsiz pán sıpatında tiykarlawǵa áyyemgi grek ilimpazları úlken úles qosqan. Mısalı, ***Gippokrat*** geometriya tiykarları haqqındaǵı dáslepki qıyalların aytqan. Bul taraw boyınsha tiykarǵı islerdi ullı grek alımı Evklid ámelge asırǵan. Onıń tiykarǵı shıǵarması – “Negizler” planimetriya, stereometriya hám sanlar teoriyasınıń bazı máselelerin, sonıń menen birge, algebra, qatnaslar ulıwma teoriyası, maydan hám kólemlerdi esaplaw usılı hám limitler teoriyası elementlerin óz ishine aladı. “Negizler” de Evklid áyyemgi grek matematikasınıń barlıq jetiskenliklerin jıynadı hám onıń rawajlanıwı ushın tiykar jarattı.

“Negizler” 13 kitaptan ibarat bolıp, bul dóretpe eramızdan aldıńǵı V-IV ásirler grek matematikalıq shıǵarmalarınıń qayta islenbesinen ibarat. Shıǵarmada 23 anıqlama, 5 postulat hám 9 aksioma berilgen. Shıǵarmada tuwrı tórtmúyeshlik, kvadrat hám sheńberge durıs anıqlamalar berilgen. Noqat hám sızıqqa tómendegishe anıqlama berilgen: “Noqat bólimlerge iye bolmaǵan zat”; “Sızıq eni joq uzınlıq”.

“Negizler”de 9 aksioma – dálillewsiz qabıl etiletuǵın pikirler aytılǵan. Geometriyalıq jasawlardı ámelge asırıw múmkinligin aytıwshı matematikalıq pikirler (postulat) den tómendegi besewi bayan etilgen:

I. Hárqanday eki noqattan tek bir tuwrı sızıq ótkeriw múmkin.

II. Tuwrı sızıq kesindini sheksiz dawam ettiriw múmkin.

III. Hárqanday oraydan qálegen radiusta sheńber jasaw múmkin.

IV. Barlıq tuwrı múyeshler óz ara teń.

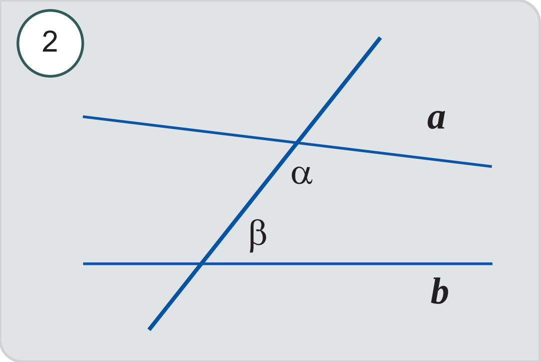
V. Bir tegislikte jatqan eki tuwrı sızıqtı úshinshi tuwrı sızıq kesip, bir táreplemeli ishki múyeshler payda etse hám múyeshler eki tuwrı múyeshten kishi bolsa, usı tuwrı sızıqlar dawam ettirilgende olar qosındısı eki tuwrı múyeshten kishi múyeshler tárepinde kesilisedi.

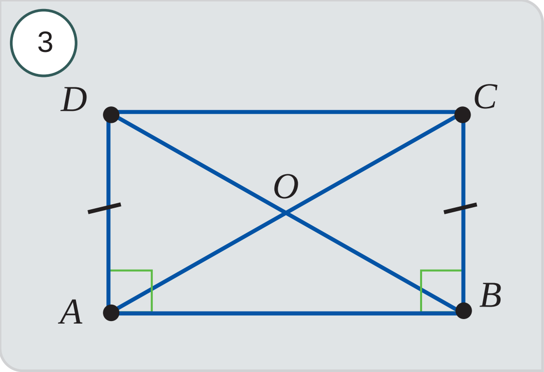
Usı dóretpe úlken hám uzaq maqtawǵa iye boldı. Ásirese, V postulat úlken ilimiy tartıslarǵa sebep boldı. Onı tómendegishe qayta táriyiplew múmkin: aytayıq, a hám b tuwrı sızıqlardı kesiwshi kesip ótkende payda bolǵan ishki bir táreplemeli múyeshler α hám β bolsın *(2-súwret)*. Onda, eger $\alpha + \beta < 180°$ bolsa, a hám b tuwrı sızıqlar sol múyeshler jatqan tárepte kesilisedi.

Kórip turǵanımızday, ol joqarıdaǵı qısqa hám ayqın táriyiplengen IV postulatlarǵa uqsamaydı. Ol kóbirek teoremaǵa uqsap ketedi. Tap sol sebepli onı postulat emes, teorema dep qarap, dálillemekshi bolǵanlar júdá kóp bolǵan. Postulattı tastıyıqlaw jolında oǵan teń kúshli bir qatar pikirler payda bolǵan. Mısalı, inglis matematigi ***Yan Pleyfer***diń (1748-1819) ***parallellik aksioması*** sol qatarda: tegislikte tuwrı sızıqtan sırtında alınǵan noqattan bul tuwrı sızıqqa tek bir parallel tuwrı sızıq ótkeriw múmkin.

Matematik, shayır, astronom hám filosof ***Omar Xayyam*** da bul másele menen shuǵıllanǵan. Xayyam "Evklid kitabınıń kirisiw bólegindegi qıyınshılıqlarǵa túsindiriwler" atlı shıǵarmasında V postulatqa toqtalǵan. Ol Evklidtiń postulatı teorema ekenligin tastıyıqlaw ushın tómengi ultanındaǵı eki múyeshi tuwrı hám qaptal táreplerі teń bolǵan tórtmúyeshlikti qaraǵan *(3-súwret)*. Bul tórtmúyeshliktiń tómengi eki múyeshi tuwrı bolsa, joqarıdaǵı eki múyeshi de tuwrı bolıwı kerek degen juwmaqqa kelgen. Omar Xayyam: "Bir tuwrı sızıqqa perpendikulyar bolǵan eki tuwrı sızıq tuwrı sızıqtıń eki tárepinde de kesilise almaydı",- deydi. Bunıń menen Omar Xayyam V postulat máselesine aydınlıq kirgiziwine bir qádem qalǵan. Omar Xayyamnıń bul jumıslarınan xabarsız italiyalıq matematik J.Sakkeri (1667-1733) de V postulat penen shuǵıllanıp, joqarıdaǵı tórtmúyeshlikke múrájat etken. Geometriya tiykarlarına bul tuwrı tórt-

Omar Xayyam
(1048–1131)





N. I. Lobachevskiy (1792–1856)

Eramızdan aldıńǵı V ásirde geometriyanıń rawajlanıwında sheshiwshi burılıs júz bergen. Ol Milet qalasında tuwılıp dóretiwshilik etken Fales atı menen baylanıslı. Tiykarı sawdager bolǵan Fales bos waqıtlarında matematika menen shuǵıllanǵan hám ol matematika tariyxındaǵı eń úlken jańa ashılıwdı ámelge asırǵan: ol kóplegen geometriyalıq nızamlılıqlardı tájiriybe menen emes, bálki pikirlew (tastıyıq) menen de alıw múmkinligin anıqladı. Ol soǵan tiykarlanıp, qatar teoremalardı tastıyıqlaǵan. III ásirge kelip geometriya óz aksiomaları (dáslepki qásiyetleri) na iye bolǵan hám basqa barlıq qásiyetler (teoremalar) dálillew járdeminde ornatılatuǵın pánge aynalǵan. Falestiń pikiri boyınsha, Evdoks Evklid hám Arximed geometriyanıń rawajlanıwına úlken úles qosqan.

múyeshlik *Xayyam-Sakkeri* tórtmúyeshligi ataması menen kirgen.

Bul mashqalanı rus matematigi ***Nikolay Ivanovich Lobachevskiy*** (1792-1856) sheshiwge eristi hám Evklidlik emes geometriyasın jarattı. Lobachevskiy birinshi ret Evklidtiń V postulatı geometriyanıń basqa aksiomalarına baylanıslı emesligin dálilledi. Bul geometriya Evklid geometriyasınan birqansha parıq eter edi. Biraq ol logikalıq qarama-qarsılıqqa dus keliwi kerek edi, sebebi eki geometriya bir waqıtta bar bolıwı múmkin emes edi. Soǵan qaramay, Lobachevskiy jańa nátiyjeler keltirip shıǵara aldı, olar logikalıq qarama-qarsılıqlarǵa ushıramadı. Jańa geometriya hám Evklid geometriyasında birinshi tórt topar aksiomalar ústpe-úst túsedi. Bul aksiomalar toparları hám olardıń nátiyjeleri ***absolyut geometriya*** dep atala basladı.

Biraq Naevklid (Lobachevskiy) geometriyası Evklid geometriyasınan ulıwma parıq qıladı. Máselen, Lobachevskiy geometriyasında úshmúyeshlik ishki múyeshleriniń qosındısı π dan kishi, ol jaǵdayda uqsas yamasa teń bolmaǵan úshmúyeshlikler bolmaǵan; berilgen tuwrı sızıqtan birdey uzaqlasqan noqatlar kompleksi tuwrı sızıq emes, bálki iymek sızıq esaplanadı hám taǵı basqa.

Naevklid geometriyasın jaratılıwına venger matematigi ***Yanosh Boyyai*** (1802-1860) hám nemis matematigi ***Karl Fridrix Gauss*** (1777-1855) úlken úles qostı. Sonıń menen birge, italyan matematigi ***Eujenio Beltrami*** (1835-1900) hám nemis matematigi ***Bernhard Riman*** (1826-1866) jańa geometriya sıpatlaması boyınsha úlken jumıslar isledi.

Evklid baslap bergen aksiomatika belgili mániste nemis matematigi ***David Hilbert*** (1862-1943) hám rus matematigi ***Veniamin Fyodorovich Kagan*** (1859-1953) jumıslarında aqırına jetkizildi.

Temaǵa tiyisli soraw hám tapsırmalar

1. Geometriya aksiomaları sistemasın bayan etken Evklid haqqında nelerdi bilesiz?

2. Evklidtiń "Negizler" shıǵarması haqqında sóylep beriń.

3. Anıqlama degenimiz ne? Tegislikte qaysı figuralar tiykarǵı (baslanǵısh) figuralar retinde anıqlamasız qabıl etilgen?

4. Teorema hám aksioma bir-birinen qalay parıq etedi?

5. Planimetriya aksiomaların sanań hám túsindirme beriń.

6. Geometriya páni qanday dúzilgen?

7. Evklidtiń V postulatı ne haqqında hám onı ne ushın tastıyıqlawǵa urınǵan?

8. V postulattı dálillewge urınǵan ilimpazlar hám olardıń jumısları haqqında sóylep beriń.

9. Lobachevskiy jańa geometriyanıń jaratılıwına qanday úles qosqan?

10. Naevklid geometriyasın jaratqan ilimpazlar hám olardıń jumısları haqqında sóylep beriń.

Ámeliy shınıǵıw hám qollanıwlar

1.1. Mekteptiń geometriya kursında tómendegi geometriyalıq figuralardıń qaysıları anıqlamasız qabıl etilgen (tiykarǵı) hám qaysılarına anıqlama berilgen?

a) noqat b) múyesh c) tegislik
d) kesindi e) nur f) tuwrı sızıq
g) úshmúyeshlik h) súyir múyesh

1.2. Mekteptiń geometriya kursında geometriyalıq figuralardıń tómendegi qásiyetlerinen qaysıları aksioma (yaǵnıy tastıyıqsız qabıl etilgen) hám qaysıları teorema (yaǵnıy olardıń durıslıǵı dálillep kórsetiliwi shárt) sıpatında keltirilgen?

a) Hárqanday eki noqattan tek bir tuwrı sızıq ótedi.

b) Qońsılas múyeshler qosındısı 180° qa teń.

c) Úshmúyeshlik ishki múyeshleri qosındısı 180° qa teń.

d) Parallelogramnıń diagonalları kesilisiw noqatında teń ekige bólinedi.

e) Bir tuwrı sızıqta alınǵan qálegen úsh noqattıń tek birewi qalǵan ekewiniń arasında jatadı.

f) Tegislikte tuwrı sızıqta jatpaytuǵın noqattan bul tuwrı sızıqqa tek bir parallel tuwrı sızıq ótkeriw múmkin.

1.3. Tómendegi gáplerdi oqıń. Gáp durıs bolsa, "+", nadurıs bolsa, "-" belgisin janındaǵı ketekshege jazıń.

1	Planimetriya tegisliktegi, stereometriya bolsa keńisliktegi geometriyalıq figuralardıń qásiyetlerin úyrenedi.	
2	Baslanǵısh (tiykarǵı) geometriyalıq figuralar anıqlamasız qabıl etiledi.	
3	Tegislikte tuwrı sızıqta jatpaytuǵın noqattan bul tuwrı sızıqqa qálegenshe parallel tuwrı sızıq ótkeriw múmkin.	
4	Evklid óziniń “Negizler” shıǵarmasında geometriyaǵa tiyisli barlıq jetiskenliklerin jıynap, onıń rawajlanıwına úlken úles qosqan.	

1.4. Geometriya páni rawajlanıwına kim qanday úles qosqan? Tómendegi kesteniń birinshi baǵanasında keltirilgen ilimpazlar atlarına ekinshi baǵanadaǵı táriyiplerden sáykesin tańlap, qoyıń.

Omar Xayyam	Naevklid geometriyasın jaratqan.
N.I.Lobachevskiy	Evklidtiń V postulatına anıqlıq kiritiw boyınsha izertlewler alıp barǵan.
Bernhard Riman	Geometriyanı pán sıpatında sıpatlaǵan.
Evklid	Naevklid geometriyasın sıpatlawda úlken jumıslar islegen.

1.5. Tómendegi tastıyıqlawlardıń qaysı birin V postulat sıpatında Evklid sıpatlaǵan? Olardıń qaysıları bul postulatqa teń kúshli esaplanadı?

A. Bir tegislikte jatqan eki tuwrı sızıqtı úshinshi tuwrı sızıq kesip, bir tareplemeli ishki múyeshler payda etse hám múyeshler qosındısı eki tuwrı múyeshten kishi bolsa, usı tuwrı sızıqlar dawam ettirilgende, olar qosındısı eki tuwrı múyeshten kishi múyeshler tárepinde kesilisedi.

B. a hám b tuwrı sızıqlardı kesiwshi kesip ótkende payda bolǵan ishki bir tareplemeli a hám b múyeshler ushın $a+b<180^\circ$ bolsa, onda berilgen tuwrı sızıqlar sol múyeshler jatqan tárepte kesilisedi.

C. Tegislikte tuwrı sızıqta jatpaytuǵın noqattan bul tuwrı sızıqqa tek bir parallel tuwrı sızıq júrgiziw múmkin.

D. Hárqanday eki noqattan tek bir tuwrı sızıq ótkeriw múmkin.

1.6*. “Xayyam-Sakkeri tórtmúyeshligi”, yaǵnıy tómengi ultanındaǵı eki múyeshi tuwrı hám qaptal tárepleri teń bolǵan tórtmúyeshlik (3-súwret) berilgen. Bul tórtmúyeshliktiń joqarıdaǵı eki múyeshi de tuwrı bolıwın parallellik aksiomasınan paydalanbastan tastıyıqlawǵa urınıp kóriń. Bunıń ilajı barma? Nege?

2 GEOMETRIYALÍQ MÁSELELER HÁM OLARDÍ SHESHIW USÍLLARÍ

Joqarıda aytıp ótkenimizdey, geometriyanıń eń ájayıp ózgesheligi bul aldın úyrenilgen, durıslıǵı dálillengen qásiyetlerden logikalıq pikirlew, baqlaw júrgiziw arqalı jańa qásiyetlerdi keltirip shıǵarıw múmkinshiligi bolıp tabıladı. Bunday ájayıp múmkinshilikten paydalanıp basqa qásiyetler teoremalar yamasa máseleler kórinisinde kórsetilgen hám aksiomalar hám usı waqıtqa shekem durıslıǵı dálillengen qásiyetlerge tiykarlanıp logikalıq pikirler júrgiziw arqalı tastıyıqlanǵan. Sol tárizde matematikalıq yamasa geometriyalıq máseleler payda bolǵan.

Matematikalıq máselede shártler berilgen boladı. Olardan paydalanıp bir nárseni tabıw (esaplaw) yamasa tastıyıqlaw, yamasa jasaw talap etiledi. Qoyılǵan talaptı orınlaw máseleni sheshiwdi ańlatadı.

Geometriyalıq máseleler qoyılǵan talapqa kóre esaplawǵa, tastıyıqlawǵa, izertlewge hám jasawǵa tiyisli máselelerge bólinedi.

Matematikalıq máseleni sheshiw ushın tek teoriyanı biliw jetkilikli emes. Másele sheshiw kónlikpesin hám tájiriybesin de iyelew talap etiledi. Bunday kónlikpege ápiwayı máselelerden baslap hám barǵan sayın quramalılaw máselelerdi sheshiw arqalı erisiledi. Sonıń menen birge, máselelerdi sheshiwdiń hár qıylı usılları bar bolıp, olardı tek kóp másele sheshiw arqalı ózlestiriw múmkin. Hárbir usıl arnawlı bir gruppaǵa tiyisli máselelerdi sheshiw ushın qollanıladı. Qansha kóp usıl ózlestirilse, sonsha másele sheshiw kónlikpesi qáliplesedi.

Tómende geometriyalıq máselelerdi sheshiwdiń bazı zárúrli usılları ústinde toqtalamız.

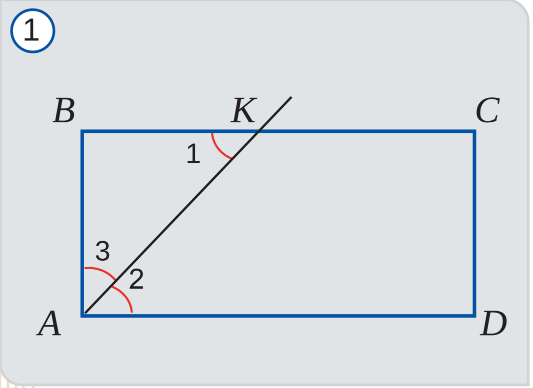
Másele sheshiw usılları dúzilisi boyınsha sintetikalıq, analitikalıq, kerisinshe boljaw arqalı hám taǵı basqa túrlerge bólinedi. Matematikalıq apparattıń qollanıwı boyınsha bolsa, algebralıq, vektorlıq, koordinatalıq, maydanlar usılı, uqsaslıq usılı, geometriyalıq almastırıwlar sıyaqlı túrlerge bólinedi.

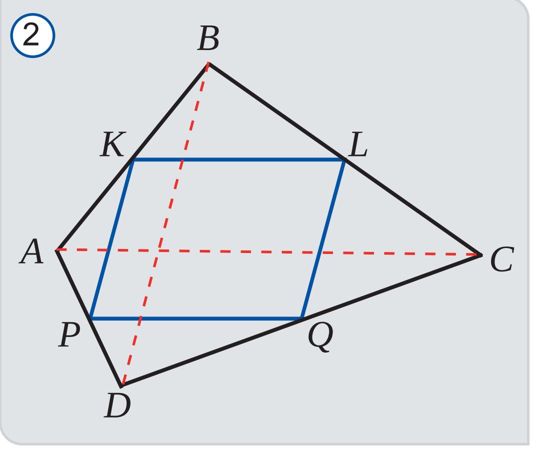
Sintetikalıq usılda másele shártinde berilgenlerden paydalanıp pikir júrgiziw arqalı logikalıq pikirler shınjırı payda etiledi. Pikirler shınjırınıń eń aqırǵı bólegi másele talabı menen ústpe-úst túskenshe dawam ettiriledi.

1-mısal. Tuwrı tórtmúyeshlik múyeshiniń bissektrisası onıń tárepin 7 *cm* hám 9 *cm* uzınlıqtaǵı kesindilerge bóledi *(1-súwret)*. Tuwrı tórtmúyeshliktiń perimetrin tabıń.

Sheshiliwi. Aytayıq $ABCD$ - tuwrı tórtmúyeshliktiń,

Aksiomatikalıq qurılısı tárepinen hár túrli geometriyalar ámeldegi hám olardıń hámmesinde de úshmúyeshlik ishki múyeshleriniń qosındısı 180° qa teń emes. Lobachevskiy geometriyasında úshmúyeshlik ishki múyeshleriniń qosındısı 180° tan kishi, Riman geometriyasında bolsa 180° tan úlken.





AK bissektrisa, $K \in BC$, BK= 7 cm, KC= 9 cm (yamasa BK= 9 cm, KC= 7 cm) bolsın.

1. $BC \parallel AD$ hám AK kesiwshi bolǵanı ushın:

$$\angle 1 = \angle 2 \qquad (1)$$

boladı, sebebi bul múyeshler ishki ayqısh múyeshler;

2. AK – bissektrisa: $\angle 2 = \angle 3$ (2)

3. Ol jaǵdayda (1) hám (2) ge kóre, $\angle 1 = \angle 3$;

4. Bul jaǵdayda ABK teń qaptallı úshmúyeshlik hám $AB = BK$;

5. Bul nátiyjeden paydalanıp esaplawlardı ámelge asıramız:

1-jaǵdayda: $AB = BK$ = 7 cm.

$P = 2 \cdot (AB + BC) = 2 \cdot (7 + 16) = 46$ (cm).

2-jaǵdayda: $AB = BK$ = 9 cm.

$P = 2 \cdot (AB + BC) = 2 \cdot (9 + 16) = 50$ (cm).

Bul másele tayanısh máseleler qatarına kiredi, sebebi kóplegen máseleler tap sol pikirler átirapında qurıladı. Parallelogramm hám trapeciya múyeshiniń bissektrisası bul figuralar tegisliginen teń qaptallı úshmúyeshlik kesip aladı. Bunday tayanısh faktlerdi mudamı este saqlaw kerek. Olar basqa máselelerdi sheshiwde júdá qolaylı keledi.

Analitikalıq usılda teorema (másele) nıń juwmaq bóleginen kelip shıǵıp, aldınnan belgili tastıyıqlawlardan paydalanıp pikir júrgiziw arqalı logikalıq pikirler shınjırı payda etiledi. Pikirler shınjırınıń eń aqırǵı bólegi másele shártiniń nátiyjesi ekenligin anıqlanǵanǵa shekem dawam ettiriledi.

2-mısal. Qálegen tórtmúyeshlik tárepleriniń ortaları parallelogramnıń tóbeleri bolıwın dálilleń.

Dálillew. Aytayıq $ABCD$-tórtmúyeshlik (2-súwret), $AK = KB$, $BL = LC$, $CQ = QD$, $AP = PD$ bolsın. Tórtmúyeshliktiń AC hám BD diagonalların júrgizemiz.

1. $\triangle ABC$ da KL - orta sızıq: $KL \parallel AC$ (1).
2. $\triangle ADC$ da PQ - orta sızıq: $AC \parallel PQ$ (2).
3. (1) hám (2) den: $KL \parallel PQ$ (3).
4. Joqarıdaǵıǵa uqsas: $KP \parallel LQ$ (4).
5. (3) hám (4) den: $KLQP$- parallelogramm.

Joqarıda kórilgen sintetikalıq hám analitikalıq usıllar ***tuwrı usıllar*** dep te ataladı. Máseleni tuwrı usıllar menen sheshilgende aldın másele mazmunı analiz etiledi. Analiz nátiyjesi boyınsha usıl tańlanadı.

Sonnan soń súwret kórinisinde máseleni sheshiw modeli (sızılması) dúziledi hám sızılma ústinde pikir júritiledi. Nátiyjede pikirler júrgizip, máseleniń shártinen onıń juwmaq bólegine qaray barıladı.

Másele sheshiwdiń kerisinshe usılı da bar. Ol menen kóp ret dus kelgenbiz. Ol *kerisinshe shama menen oylanıp dálillew usılı* dep ataladı. Bul usıldı qollanıw algoritmin keltiremiz.

Kerisinshe shama menen oylap dálillew usılın qollanıw algoritmi

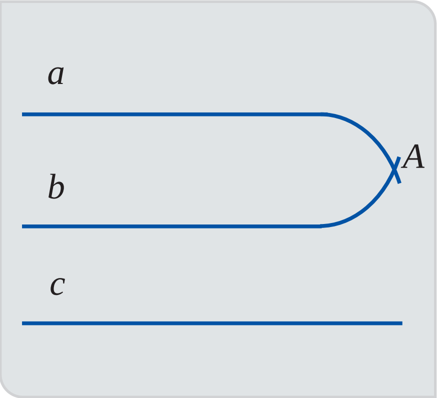
Teorema (durıs tastıyıq)	***Eger A orınlı bolsa, B orınlı boladı.*** (A hám B qanday da bir pikirler)
Dálillew.	
Kerisinshe oylap pikirleymiz:	Teoremada keltirilgen tastıyıqtı kerisinshe oylap pikirleymiz, yaǵnıy teoremanıń shárti orınlansın, biraq juwmaq orınlı bolmasın: ***Eger A orınlı bolsa, B orınlı bolmaydı.***
Pikir júrgizemiz:	Durıslıǵı aldın tastıyıqlanǵan teorema yamasa qabıl etilgen aksiomalarǵa súyene otırıp logikalıq pikir júrgizemiz.
Qarama-qarsılıqqa kelemiz:	Durıslıǵı aldın tastıyıqlanǵan teorema yamasa qabıl etilgen aksiomalardıń birine qarsı bolǵan tastıyıqqa dus kelip qalamız.
Juwmaq shıǵaramız:	Demek, boljawımız nadurıs, yaǵnıy berilgen teorema durıs eken.
Teorema dálillendi.	

3-mısal. Eger eki tuwrı sızıqtıń hárbiri úshinshi tuwrı sızıqqa parallel bolsa, olar óz ara parallel boladı. Aytayıq, a hám b tuwrı sızıqlar berilgen bolıp, olardıń hárbiri úshinshi – c tuwrı sızıqqa parallel bolsın.

Teoremanı kerisinshe shamalap oylaw usılı menen dálilleymiz.

Dálillew. Kerisinshe shama menen oylaymız: a hám b tuwrı sızıqtıń hárbiri úshinshi – c tuwrı sızıqqa parallel bolsın, olar óz ara parallel bolmaytuǵın, yaǵnıy qanday da bir A noqatta kesilissin (3-súwretke qarań).

3



Ol jaǵdayda A noqattan c tuwrı sızıqqa eki – a hám b parallel tuwrı sızıqlar ótpekte. Bul parallellik aksiomasına qarsı. Qarama-qarsılıq boljawımızdıń nadurıs ekenligin kórsetedi. Yaǵnıy a hám b tuwrı sızıqtıń hárbiri úshinshi – c tuwrı sızıqqa parallel bolsa, olar óz ara parallel boladı.

Teorema dálillendi.

Usı usıl tómendegi logikalıq nızamlılıqqa tiykarlanǵan: bir-birine qarsı eki dálillewdiń tek birewi ras, ekinshisi bolsa ótirik boladı, úshinshi jaǵday bolıwı múmkin emes.

Endi geometriyalıq máselelerdi sheshiwdiń basqa usıllarına toqtalamız.

Evklid geometriyasında berilgen tuwrı sızıqta jatpaytuǵın hárqanday noqat arqalı tek bir tuwrı sızıq júrgiziw múmkin. Biraq Lobachevskiydiń geometriyasında keminde ekewin ótkeriw múmkin.

Algebralıq usıl

Geometriyalıq máseleni algebralıq usıl menen sheshiwde tómendegi algoritm tiykarında jumıs kóriw maqsetke muwapıq boladı:

1) máseleni mazmunın talqılaw hám onıń sızılma modelin qurıw;

2) belgisizdi háripler menen belgilew;

3) másele shártin ańlatıwshı teńleme yamasa teńlemeler sistemasın dúziw;

4) dúzilgen teńleme yamasa teńlemeler sistemasın sheshiw;

5) tabılǵan sheshimdi talqılaw;

6) juwaptı jazıw.

4-mısal. Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń perimetri 36 *cm* ge teń. Gipotenuzanıń katetke qatnası 5:3. Úshmúyeshlik tárepleriń tabıń.

Aytayıq, $\angle ABC$ berilgen bolıp, onda $\angle C = 90°$, $P = 36$ *cm*, $AB : AC = 5 : 3$ bolsın.

Sheshiliwi. Proporcionallıq koefficiyentin k menen belgileymiz.

Onda: $AB = 5k$, $AC = 3k$.

Pifagor teoreması boyınsha: $AB^2 = AC^2 + BC^2$ yamasa $25k^2 = 9k^2 + BC^2$.

Bunnan $BC = \sqrt{25k^2 - 9k^2} = 4k$.

Shárt boyınsha:

$P = 36$ *cm*; $AB + AC + BC+P$; $5k + 3k + 4k = 36$; $k = 3$;
$AB = 5k = 15$ (*cm*), $AC = 3k = 9$ (*cm*), $BC = 4k = 12$ (*cm*).

Juwabı: 15 *cm*, 9 *cm*, 12 *cm*.

Maydanlar usılı

Bazı geometriyalıq máselelerdi sheshiwde maydanlardı esaplaw formulalarınan paydalanıw kútilgen nátiyjeni tez beredi. Bul jaǵdayda tabıw talap etilgen belgisiz, máseledegi járdemshi figuralardıń maydanların teńlestiriw nátiyjesinde payda etilgen teńlemeden tabıladı. Bunı tómendegi mısalda kórsetip ótemiz.

5-mısal. Úshmúyeshliktiń tárepleri 13 *cm*, 14 *cm* hám 15 *cm*. Uzınlıǵı 14 ke teń tárepke túsirilgen biyiklikti tabıń.

Sheshiliwi. Aytayıq, $\triangle ABC$ berilgen bolıp, ol jaǵdayda $a < b$ hám $b < c$, yaǵnıy $a=13$ *cm*, $b=14$ *cm*, $c=15$ *cm* hám h_b – izlenip atırǵan biyiklik bolsın.

Geron formulası boyınsha: $S_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21\cdot 8\cdot 7\cdot 6} = 3\cdot 7\cdot 4 = 84\ (cm^2)$

Basqa formula boyısha: $S_\Delta = \frac{1}{2}bh_b$ ǵa iyemiz.

Onda $\frac{1}{2}bh_b = 84$ yamasa $h_b = \frac{84}{2b} = \frac{84}{2\cdot 14} = 12$, $h_b = 12$ (cm).

Juwabı: 12 cm.

Vektorlar usılı

Geometriyalıq máseleni vektorlar usılı menen sheshiw ushın tómendegi algoritm tiykarında orınlaw maqsetke muwapıq boladı.

1) Máseleni vektorlar tiline awdarma jasaw, yaǵnıy máseledegi bazı shamalarǵa vektor sıpatında qarap, olarǵa tiyisli vektorlıq teńlemeler dúziw;

2) Vektorlardıń belgili qásiyetlerinen paydalanıp vektorlıq teńlemelerdiń formasın almastırıw hám belgisizdi tabıw;

3) Vektorlar tilinen geometriya tiline qaytıw;

4) Juwaptı jazıw.

Vektorlar usılı menen tómendegi geometriyalıq máselelerdi sheshiw maqsetke muwapıq boladı:

a) tuwrı sızıqlar (kesindiler) dıń parallelligin anıqlaw (dálillew):

b) kesindilerdi berilgen koefficientke bóliw;

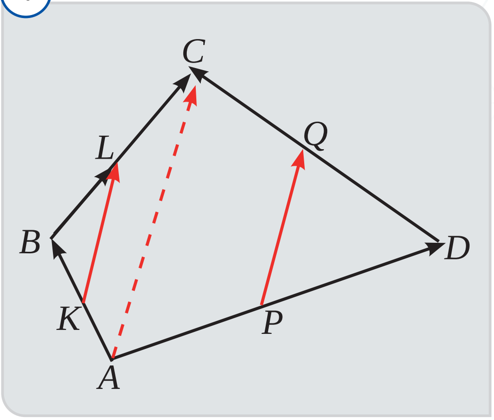
c) úsh noqattıń bir tuwrı sızıqta jatıwın kórsetiw;

d) tórtmúyeshliktiń parallelogramm (romb, trapeciya, kvadrat, tuwrı tórtmúyeshlik) ekenligin kórsetiw.

6-mısal. Dóńes tórtmúyeshliktiń tárepleri ortaları, parallelogramnıń tóbeleri bolıwın dálilleń.

Aytayıq, $ABCD$ tórtmúyeshlik berilgen bolıp, ol jaǵdayda $AK = KB$, $BL = LC$, $CQ = QD$, $AP = PD$ bolsın (4-súwret).

4



Dálillew. 1. Berilgen kesindiler uqsas túrde AB, AC, BC, DC, AD, KL, PQ, BL, KB vektorlar menen almastırılıp, máseleni vektor tiline ótkeremiz.

2. Vektorlardı qosıwdıń úshmúyeshlik qaǵıydasınan paydalanamız:

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC},\ \overline{KB} + \overline{BL} = \overline{KL},\ \overline{KB} = \frac{1}{2}\overline{AB}$$

hám $\overline{BL} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ ekenliginen paydalanıp

$$\overline{KL} = \frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{BC}) = \frac{1}{2}\overline{AC}.$$

Usıǵan uqsas $\overline{PQ} = \frac{1}{2}\overline{AC}$ boladı.

3. $KL = PQ$, yaǵnıy bul vektorlar birdey baǵıtlanǵan hám uzınlıqları teń. Bul $KLQP$ tórtmúyeshlik parallelogramm ekenligin ańlatadı.

Koordinatalar usılı

Geometriyalıq máseleni koordinatalar usılı menen sheshiwde tómendegi algoritm tiykarında orınlaw maqsetke muwapıq boladı:

1) másele mazmunın talqılaw hám onı koordinatalar tiline awdarma jasaw;

2) ańlatpalardıń formasın almastırıw hám mánisin esaplaw;

3) nátiyjeni geometriya tiline awdarma jasaw;

4) juwaptı jazıw.

Koordinatalar usılı menen tómendegi geometriyalıq máselelerdi sheshiw maqsetke muwapıq boladı:

a) noqatlardıń geometriyalıq ornın tabıw;

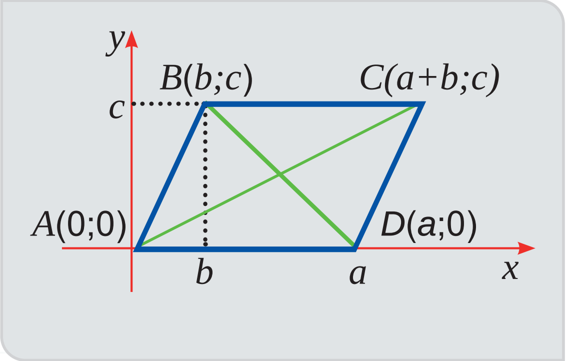
b) geometriyalıq figuralardıń sızıqlı elementleri arasındağı baylanıslardı dálillew.

Koordinatalar usılı menen másele sheshiwde koordinatalar basın durıs tańlaw zárúrli bolıp tabıladı. Berilgen figuranı koordinatalar tegisligine sonday jaylastırıw kerek, múmkinshiligi barınsha noqatlardıń koordinataları nólge yamasa birdey sanǵa teń bolsın.

7-mısal. Diagonalları teń parallelogramnıń tuwrı tórtmúyeshlik bolıwın dálilleń.

Dálillew. Koordinatalar sistemasın sonday saylaymız, parallelogramnıń tóbeleri tómendegi koordinatalarǵa iye bolsın (5-súwretke qarań):

5



$A(0;0)$, $B(b;c)$, $C(a+b;\ c)$, $D(a;0)$,

bul jerde $a > 0,\ b \geq 0,\ c > 0$.

A, B, C, D noqatlar arasındağı aralıqlardı olardıń koordinataları arqalı ańlatamız:

$$AC = \sqrt{(a+b-0)^2 + (c-0)^2}$$

$$BD = \sqrt{(a-b)^2 + (0-c)^2}$$

$$\sqrt{(a+b-0)^2 + (c-0)^2} = \sqrt{(a-b)^2 + (0-c)^2}$$

$$(a+b-0)^2 + (c-0)^2 = (a-b)^2 + (0-c)^2$$

Bunnan $4ab = 0$.

Biraq $a > 0$, ol jaǵdayda $b = 0$. Bul bolsa óz gezeginde $B(b;c)$ noqat Oy kósherde jatıwın ańlatadı. Sol sebepli BAD tuwrı múyesh boladı.

Bunnan $ABCD$ parallelogramm tuwrı tórtmúyeshlik ekenligi kelip shıǵadı.

Geometriyalıq almastırıwlar usılı

Geometriyalıq almastırıwlar usılına burıw, simmetryalıq sáwlelendiriwler, parallel kóshiriw hám gomotetiya sıyaqlı almastırıwlarǵa tiykarlanǵan usıllar kiredi. Geometriyalıq almastırıwlar járdeminde máselelerdi sheshiw procesinde berilgen geometriyalıq figuralar menen bir qatarda jańa, qollanǵan geometriyalıq almastırıw járdeminde payda etilgen figuralarǵa da qaraladı. Jańa figuralardıń qásiyetleri anıqlanadı hám berilgen formaǵa ótkeriledi. Sonnan keyin máseleni sheshiw jolı tabıladı. Joqarıda keltirilgen geometriyalıq figuralardıń qásiyetlerine tiykarlanatuǵın barlıq usıllar bir ulıwma at penen *geometriyalıq usıllar* dep aytıladı

Zárúrli esletpe!

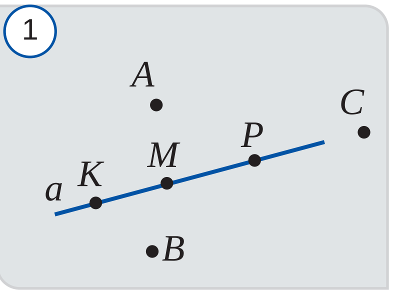
Bul bólimdegi orın alǵan materiallar planimetriyanı tákirarlaw ushın keltirilgen. Tákirarlaw ushın máseleler kereginen artıq berilip atır. Olardıń barlıǵın klassta kóriwdiń múmkinshiligi bolmawı múmkin. Sol sebepli olardı ǵárezsiz sheship shıǵıwdı máslahat beremiz. Bul 10-klasta geometriyanı úyreniwdi tabıslı dawam ettiriwińizge imkaniyat jaratadı.

Temaǵa tiyisli sorawlar

1. *Matematikalıq másele degende neni túsinesiz?*
2. *Geometriyalıq máseleniń qanday túrlerin bilesiz?*
3. *Másele sheshiwdiń qanday usılların bilesiz?*
4. *Geometriyalıq máseleni sheshiwdiń sintetikalıq, analitikalıq usılları haqqında aytıp beriń.*
5. *Másele sheshiwdiń tuwrı hám kerisinshe usılları haqqında ne bilesiz?*
6. *Kerisinshe shama menen dálillew usılınıń mánisi nede?*
7. *Geometriyalıq máseleni algebralıq usılda sheshiw algoritmin túsindirip beriń.*
8. *Geometriyalıq máseleni vektorlıq usılında sheshiw algoritmin túsindirip beriń.*
9. *Vektorlıq usılı menen ádette qanday máseleler sheshiledi?*
10. *Geometriyalıq máseleni koordinatalar usılı menen sheshiw algoritmin túsindirip beriń.*
11. *Koordinatalar usılı menen ádette qanday máseleler sheshiledi?*
12. *Geometriyalıq almastırıwlar usılın túsindirip beriń.*

Ataqlı alım hám oylap tabıwshı Arximed geometriyanı dúnyadaǵı eń zárúrli pán dep esaplaǵan. Geometriya dúnyanıń barlıq qaǵıydaların túsindirip bere aladı, dep isengen hám óziniń geometriyalıq bilimleri sebepli óz dáwirinen aldınlaw kóplegen mexanizmlerdi oylap tapqan.

Ámeliy shınıǵıwlar



2.1. 1-súwretten paydalanıp durıs matematikalıq tastıyıqlawdı tabıń.

A) $A \in a$ B) $K \notin a$ C) $C \in a$ D) $M \notin a$

2.2. Bir tuwrı sızıqta A, B, C noqatlar sonday saylanǵan, $AB = 2{,}7\ dm$, $BC = 1{,}3\ dm$, $AC = 1{,}3\ dm$. Bir noqattıń qalǵan ekewi arasında jatıwı haqqındaǵı durıs tastıyıqlawdı anıqlań.

A) $A \in BC$ B) $B \in AC$ C) $C \in AB$ D) $C \notin AB$.

2.3. AC kesindi BC kesindiden úsh márte uzın. Bul qatnas kórsetilgen eki juwaptı anıqlań.

A) $AC = 3BC$ B) $3AC = BC$ C) $AC + BC = 4AC$ D) $BC = \frac{1}{3}AC$

2.4. AC kesindi BC kesindiden úsh márte uzın. Bul baylanıs kórsetilgen eki juwaptı anıqlań.

A) $AC - BC = 3\ cm$; B) $BC - AC = 2\ cm$

C) $AC - 2\ cm = BC$; D) $AC + 2\ cm = BC$

2.5. A, B, C noqatlardıń qaysı biri qalǵan ekewiniń arasında jatadı?

A) $AC = 3$, $AB = 8$, $BC = 5$ D) $AC = 9\ mm$, $BC = 21\ mm$, $AB = 12\ mm$

B) $AC = 7$, $BC = 12$, $AB = 19$ E) $AC = 21\ m$, $BC = 37\ m$, $AB = 16\ m$

C) $AC = 27\ m$, $BC = 5\ m$, $AB = 22\ m$ F) $BC = 18\ dm$, $AC = 33\ dm$, $AB = 15\ dm$

2.6. AB kesindini O noqatta uzınlıǵı 18 cm hám 14 cm bolǵan bóleklerge bóledi. Eger K hám M noqatlar AO hám BO kesindilerdiń ortası bolsa, KM kesindi uzınlıǵın tabıń.

2.7. Uzınlıǵı 48 dm bolǵan kesindide O noqat belgilengen. Eger $AO{:}BO = 3{:}5$ bolsa, AO hám BO kesindilerdiń uzınlıqların tabıń.

2.8. A, B, C, M noqatlar bir tuwrı sızıqta jatadı hám $AC = 12\ m$, $CB = 5\ m$, M bolsa AC kesindiniń ortası. MB kesindi uzınlıǵın tabıń.

2.9. $\angle KOC = 153^\circ$. OM nur múyeshi tárepleri arasınan ótedi. Eger $\angle KOM = 2\angle MOC$ bolsa, KOM hám MOC múyeshlerdi tabıń.

2.10*. Uzınlıǵı 75 cm bolǵan AB kesindi M hám K noqatlar belgilengen. Bunda $N \in AK$, $K \in NB$. Sonday-aq, AN kesindi NK kesindiden 5 cm uzın, KB bolsa AN nen 2 márte uzın. Payda bolǵan 5 kesindi uzınlıqların tabıń.

2.11*. Múyesh tárepleri arasınan ótken nur onı eki múyeshke ajıratadı. Bul múyeshler bissektrisaları arasındaǵı múyesh berilgen múyeshten 2 márte kishi ekenligin dálilleń.

2.12*. a, b, c hám d tuwrı sızıqlar berilgen. Olardıń hár úshewi bir noqatta kesilisedi. Barlıq tuwrı sızıqlardıń bir noqattan ótiwin dálilleń.

2.13. Eki tuwrı sızıqtıń kesilisiwinen tórt múyesh payda boldı *(2-súwret)*. Tómende keltirilgen kestede hárbir shárt (A-E) ke odan kelip shıǵıwshı juwmaq (1-5) tı sáykes qoyıń.

A) $\angle 1 = \angle 3$ 1) $\angle 3 = \angle 4 = 90^\circ$

B) $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$ 2) $\angle 1 = \angle 2 = \angle 4 = 90^\circ$

C) $\angle 1 = \angle 2 + 90^\circ$ 3) $\angle 1$ hám $\angle 4$ – qońsılas

D) $\angle 2 + \angle 4 = 260^\circ$ 4) $\angle 1$ hám $\angle 3$ – súyir

E) $\angle 3 = 90^\circ$. 5) $\angle 2$ hám $\angle 4$ – vertikal

A	
B	
C	
D	
E	

2.14. Tómende bazı múyeshlerdiń gradus ólshemleri (1-7) berilgen. Olardan qaysı jupları qońsılas bolıwı múmkinligin anıqlań.

1) 18° 2) 72° 3) 128° 4) 62° 5) 28° 6) 108° 7) 38°

A) 1 hám 2 B) 2 hám 6 C) 3 hám 4 D) 1 hám 7 E) 2 hám 5

2.15. Eger 2-súwrette $\angle 1 = \angle 7$ bolsa, durıs tastıyıqlawdı tabıń.

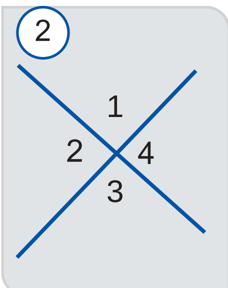
A) $a \parallel b$; *B)* $a \perp b$; *C)* a hám b kesilispeydi;

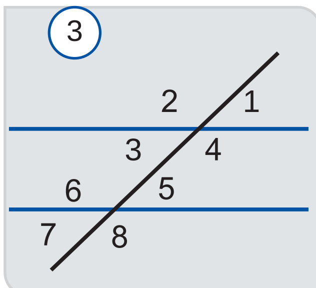
2.16. Eger 3-súwrette $CD \parallel AB$, $\angle 1 = \angle 2$ hám $\angle 2 = 72°$ bolsa, $\angle 3 = ?$

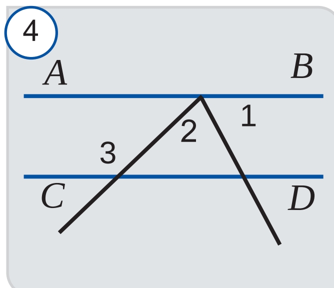
A) 72° B) 144° C) 108° D) 36° E) 124°

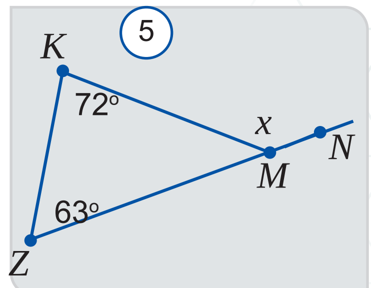
2.17. Eger teń qaptallı úshmúyeshlik múyeshleri 3:4:3 qatnasta bolsa, onıń tóbesiniń bissektrisası hám qaptal tárepi arasındağı múyeshti tabıń.

A) 18° B) 36° C) 72° D) 60° E) 30°









2.18. 5-súwrette súwretlengen KMZ úshmúyeshlik múyeshine sırtqı bolǵan KMN múyeshtiń gradus ólshemin tabıń.

A) 135° B) 108° C) 45° D) 125° E) 117°

2.19. Durıs teńliklerdi anıqlań (*6-súwret*).

A) $\triangle ABO = \triangle OCD$ B) $BA = CD$ C) $\triangle ABO = \triangle COD$

D) $\angle AOB = \angle DOC$ E) $\angle BAO = \angle DCO$ F) $\angle BAO = \angle CDO$

2.20. 7-súwrettegi BOC úshmúyeshlik múyeshlerin tabıń.

A) 48°, 48°, 84° B) 24°, 132°, 24°

C) 132°, 48°, 48° D) 42°, 90°, 48° E) 48°, 32°, 20°

2.21. Hárbir altımúyeshliktiń perimetri (A-E) ne oǵan sırtlay sızılǵan sheńber radiusı (1-5) nan sáykesin qoyıń hám kesteni toltırıń.

A) *P = 42 cm* 1) *R = 2 cm*

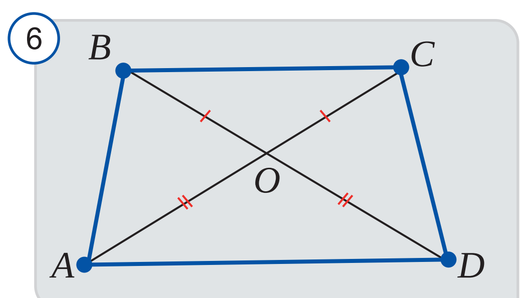
B) *P = 12 cm* 2) *R = 8 cm*

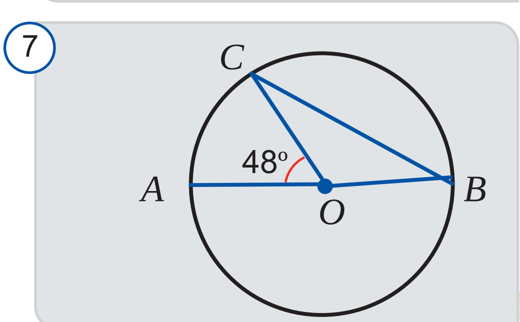
C) *P = 84 cm* 3) *R = 6 cm*

D) *P = 48 cm* 4) *R = 14 cm*

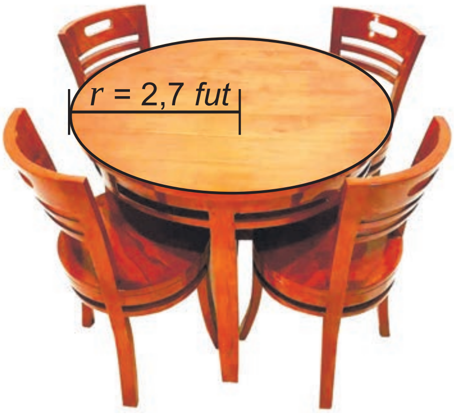
E) *P = 36 cm* 5) *R = 7 cm*

A	
B	
C	
D	
E	

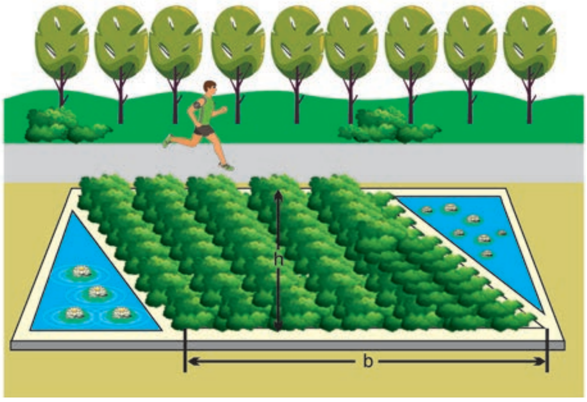




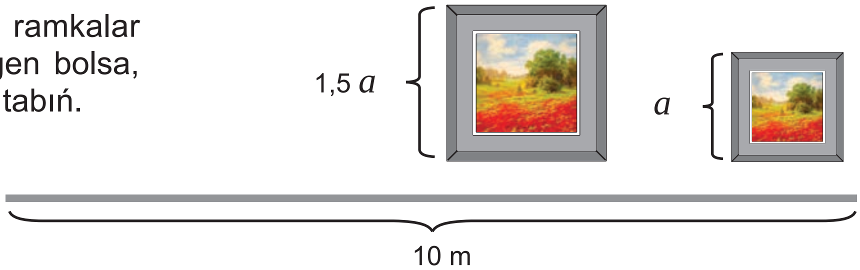
2.22. Sheńber formasındaǵı stol betiniń maydanın tabıń (1 *fut* = 30,48 *cm*).



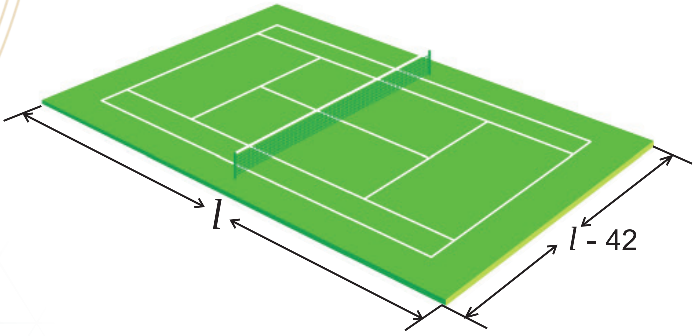
2.23. Eger $h = 3$ m hám $b = 6$ m bolsa, súwrettegi gúlzar maydanın tabıń.

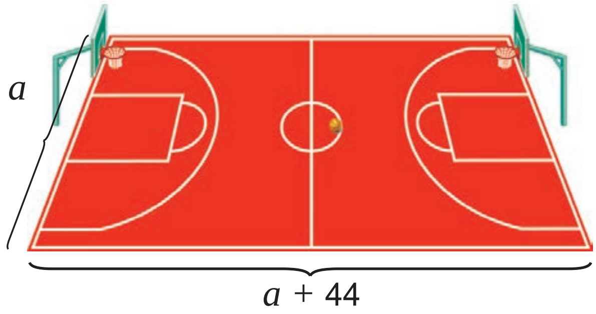


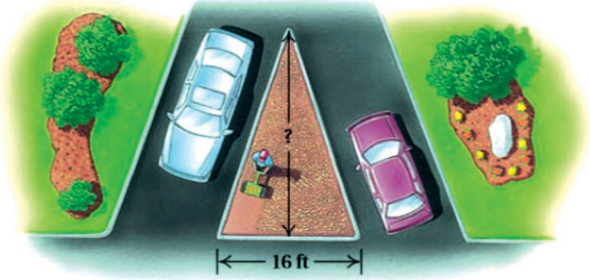
2.24. Kvadrat formasındaǵı ramkalar ushın 10 m reyka isletilgen bolsa, hárbir ramka ólshemlerin tabıń.

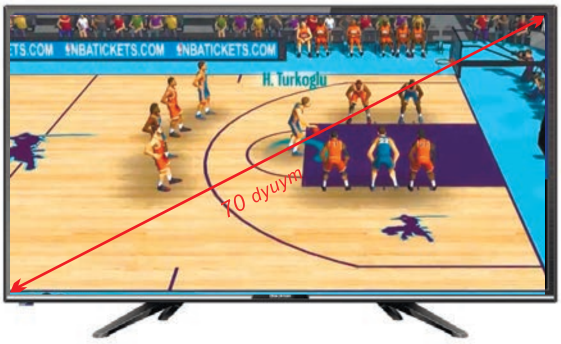


2.25. Basketbol maydanınıń perimetri 288 *fut*, uzınlıǵı bolsa eninen 44 *fut* uzın bolsa, maydan ólshemlerin metrlerde tabıń (1 *fut* = 30,48 *cm*).









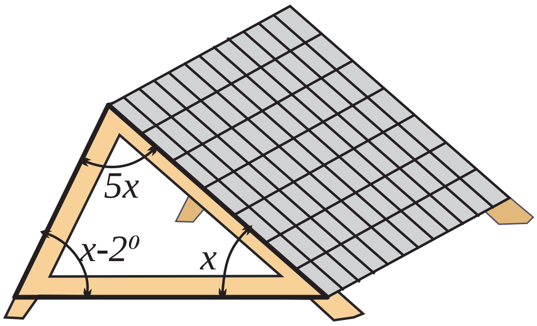
2.26. Tennis kortınıń perimetri 288 *fut*, uzınlıǵı bolsa eninen 42 *fut* uzın bolsa, maydan ólshemlerin metrlerde tabıń. (1 *fut* = 30,48 *cm*).

2.27. Avtomobiller toqtaw ornındaǵı teń qaptallı úshmúyeshlik formasındaǵı maydanshanıń maydanı 288 fut^2 hám ultanı 16 *fut* bolsa, onıń biyikligin tabıń (1 *fut* = 30,48 *cm*).

2.28. Súwrettegi HD televizorı ekranınıń biyikligi hám eni uzınlıǵı qatnası 16:9 sıyaqlı boladı. Diagonalı 70 dyuym bolǵan HD televizorı ólshemlerin *cm* lerde tabıń (1 *dyuym* = 2,54 *cm*).

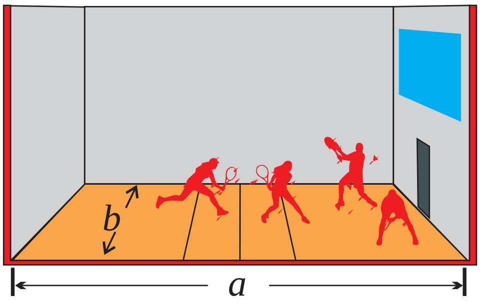
2.29. Súwretlerdegi bastırma múyeshlerin tabıń.

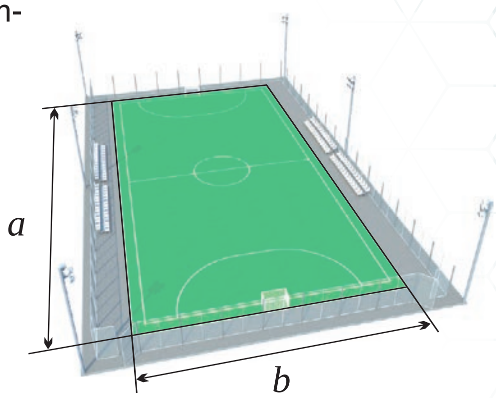
a)



b)

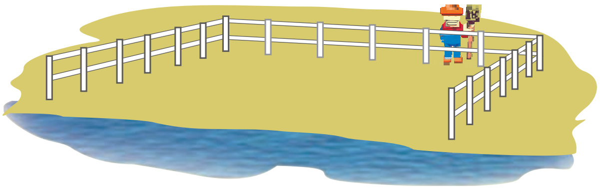
2.30. Jabıq sport maydanınıń perimetri 120 *fut*, uzınlıǵı bolsa eninen eki márte uzın bolsa, maydan ólshemlerin metrlerde tabıń (1 *fut* = 30,48 cm).





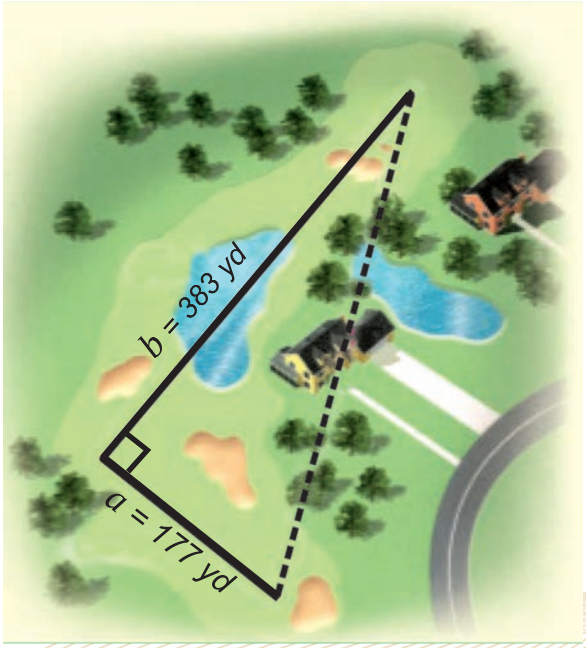
2.31. Futbol maydanınıń perimetri 340 m, uzınlıǵı bolsa eninen 50 m uzın bolsa, maydan ólshemlerin tabıń.

2.32. Fermer dárya jaǵasında tuwrı tórtmúyeshlik formasındaǵı maydandı tor menen qorshap almaqshı. 100 m uzınlıqtaǵı tor menen qanday ólshemdegi eń úlken maydanǵa iye maydanshanı qorshap alıwı múmkin?

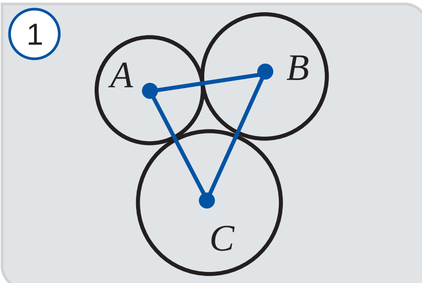


2.33. Sheńber formasındaǵı eki gúlzar maydanları qosındısı $90\pi\ m^2$, ayırması $72\pi\ m^2$. Hárbir gúlzardıń radiusların tabıń.

2.34. Golf maydanshası sızılması berilgen. Eger oyınshı birinshi urıwda toptı a aralıqqa, birinshi urıw baǵdarına perpendikulyar ekinshi urıwda b aralıqqa uzaqlastırǵan bolsa, golf tobı baslanǵısh jaǵdayınan qansha aralıqqa barıp túsken?



3 BAPTÍ TÁKIRARLAWǴA TIYISLI ÁMELIY SHÍNÍǴÍWLAR

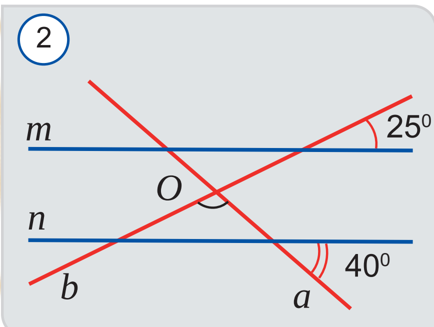


3.1. Úshmúyeshliktiń tóbeleri, radiusları 6 cm, 7 cm hám 8 cm bolǵan hám jup-jubı menen urınatuǵın úsh sheńber oraylarında jaylasqan *(1-súwret)*. Bul úshmúyeshliktiń perimetrin tabıń.

A) 28 cm B) 29 cm C) 27 cm D) 42 cm E) 21 cm

3.2. Kvadrattıń tárepi 20 ǵa teń. Bul kvadratqa ishley sızılǵan sheńber radiusın tabıń.

A) 20 B) $10\sqrt{2}$ C) 10 D) $5\sqrt{2}$ E) 5



3.3. Trapeciyanıń bir ultanı ekinshisinen 8 cm ge uzın, orta sızıǵı bolsa 10 cm ge teń. Trapeciyanıń kishi ultanın tabıń.

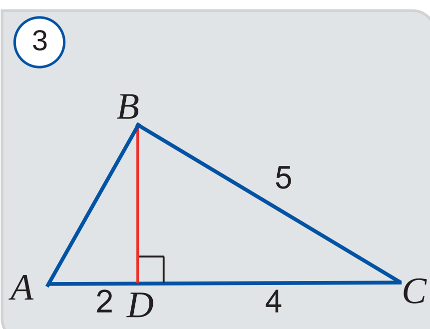
A) 2 cm B) 4 cm C) 6 cm D) 8 cm E) 10 cm

3.4. Diagonalları 10 m hám 36 m bolǵan rombtıń maydanın tabıń.

A) 90 m^2 B) 92 m^2 C) 180 m^2 D) 184 m^2 E) 36 m^2

3.5. 2-súwrettegi m hám n tuwrı sızıqlar óz ara parallel bolsa, a hám b tuwrı sızıqlar arasındaǵı múyeshti tabıń.

A) 50° B) 80° C) 100° D) 65° E) 115°

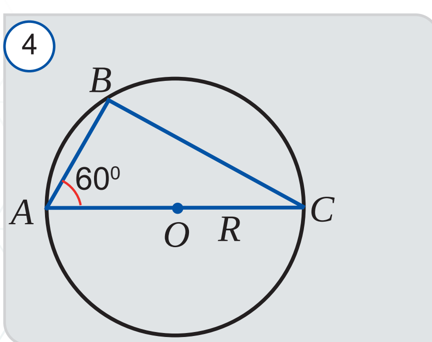


3.6. 3-súwrettegi úshmúyeshlik maydanın tabıń.

A) 6 B) 9 C) 12 D) 24 E) 30

3.7. 4-súwrettegi R radiuslı sheńberge ishley sızılǵan ABC úshmúyeshliktiń BC tárepin tabıń.

A) R B) $R\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ C) $R\sqrt{2}$ D) $R\sqrt{3}$ E) $R\dfrac{\sqrt{3}}{2}$



3.8. Maydanı 9π cm^2 bolǵan dóńgelekti qorshap turǵan sheńber uzınlıǵın tabıń.

A) 3π cm B) 9π cm C) 12π cm D) 18π cm E) 6π cm

3.9. Tárepi 6 cm ge teń bolǵan kvadratqa ishley sızılǵan sheńber maydanın tabıń.

A) 9π cm^2 B) 144π cm^2 C) 36π cm^2 D) 72π cm^2 E) 18π cm^2

3.10. Kvadratqa ishley sızılǵan sheńber radiusı 5 cm. Kvadrat diagonalın tabıń.

A) $5\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ B) $5\sqrt{2}$ C) $5\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ D) $10\sqrt{3}$ E) $20\sqrt{3}$

3.11. Ishki múyeshleri qosındısı 1600° bolǵan úzliksiz kópmúyeshliktiń tárepleri sanın tabıń.

A) 12 B) 14 C) 16 D) 18 E) 20

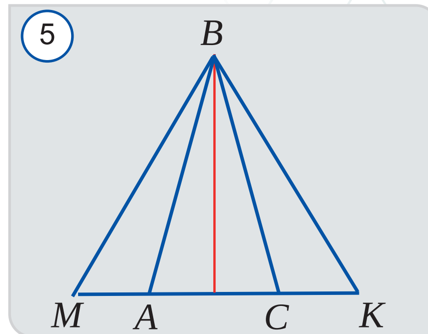
3.12. Diagonalları 24 cm hám 18 cm bolǵan rombtıń perimetrin tabıń.

A) 120 cm B) 60 cm C) 84 cm D) 108 cm E) 144 cm

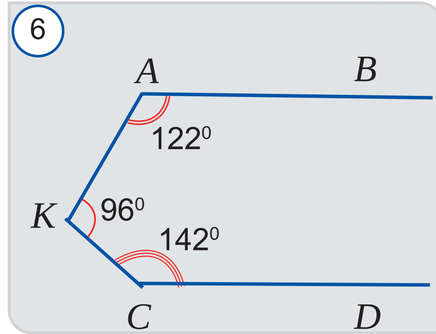
3.13. Parallelogramnıń perimetri 48 *dm* bolıp, bir tárepi ekinshisinen 8 *dm* ge uzın. Parallelogramnıń kishi tárepin tabıń.

A) *8 dm* B) *16 dm* C) *6 dm* D) *12 dm* E) *10 dm*

3.14. 5-súwrettegi ABC teń qaptallı úshmúyeshlik sırtında eki teń ABM hám CBK múyeshler jasaldı. Bul múyeshler tárepleri AC tárepin sáykes túrde M hám K noqatlarda kesip ótti. MBC hám KBA úshmúyeshlikler teńligin dálilleń.



3.15. 6-súwrette súwretlengen AB hám CD tuwrı sızıqlardıń óz ara jaylasıwın anıqlań. Juwabıńızdı túsindiriń.



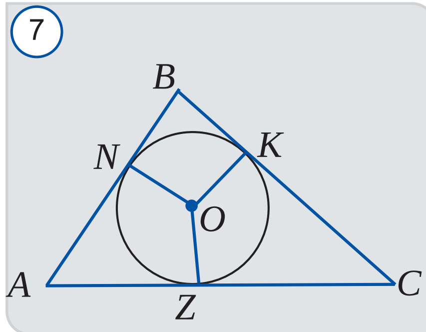
3.16. 7-súwrettegi ABC úshmúyeshlikke sheńber ishley sızılǵan. Sheńberdiń N hám Z urınıw noqatları úshmúyeshliktiń AB hám AC tárepleri ayırması sáykes túrde 3 *cm* hám 4 *cm* bolǵan kesindilerge ajıratadı ($AN>NB$, $AZ>ZC$). Eger úshmúyeshliktiń perimetri 28 *cm* bolsa, onıń tareplerin tabıń.

3.17. Teń tárepli úshmúyeshlikke radiusı 33 bolǵan sheńber sırtlay sızılǵan. Ishley sızılǵan sheńber radiusın tabıń.

3.18. Ultanındaǵı múyeshi 30° bolǵan teń qaptallı trapeciyaǵa sheńber sırtlay sızılǵan. Trapeciyanıń biyikligi 7 cm ge teń bolsa, onıń orta sızıǵın tabıń.

3.19. Ultanındaǵı múyeshi 150° bolǵan teń qaptallı trapeciya sheńberge sırtlay sızılǵan. Trapeciyanıń orta sızıǵı $16\sqrt{3}$ ke teń bolsa, onıń biyikligin tabıń.

3.20. Ultanı 16 *cm* hám bul ultanǵa túsirilgen biyikligi 15 cm bolǵan teń qaptallı úshmúyeshliktiń qaptal tárepin tabıń.



3.21. ABC úshmúyeshliktiń AO biyikligi onıń BC tárepin BO hám OC kesindilerge ajıratadı. Eger $AB = 10\sqrt{2}$ *cm*, $AC = 26$ *cm* hám $B = 45°$ bolsa, OC kesindiniń uzınlıǵın tabıń.

3.22. Rombtıń tárepi 10 *cm*, diagonallarınan biri 12 *cm*. Oǵan ishley sızılǵan sheńber radiusın tabıń.

3.23. Radiusı 15 *cm* bolǵan sheńberge onıń orayınan 12 *cm* uzaqlıqta bolǵan xorda júrgizilgen. Bul xorda uzınlıǵın tabıń.

3.24. Sheńberde eki kesiwshi xorda júrgizilgen. Olardan biri kesilisiw noqatı menen teń ekige, ekinshisi bolsa uzınlıqları 5 *cm* hám 20 *cm* bolǵan kesindilerge bólinedi. Hárbir xorda uzınlıǵın tabıń.

3.25. Sheńberdiń sırtında jatqan noqattan oǵan urınba hám kesiwshi júrgizilgen. Eger urınba óziniń sırtqı bóleginen 5 *cm* uzın, kesiwshiniń ishki bóleginen 5 *cm* qısqa bolsa, onıń uzınlıǵın tabıń.

3.26. Sheńberden sırtta jatqan noqattan oǵan urınba hám kesiwshi ótkerilgen. Eger urınba hám kesiwshiniń uzınlıqları qosındısı 15 *cm*, kesiwshiniń sırtqı bólegi urınbadan 2 *cm* qısqa bolsa, urınba hám kesiwshi uzınlıqların tabıń.

3.27. Tuwrı múyeshli úshmúyeshlikke ishley sızılǵan sheńberdiń urınıw noqatı gipotenuzanı uzınlıqları 6 *cm* hám 9 *cm* bolǵan kesindilerge boladı. Bul úshmúyeshliktiń maydanın tabıń.

3.28. Tuwrı múyeshli trapeciyanıń kishi ultanı 8 cm, kishi qaptal tárepi bolsa $6\sqrt{3}$ cm ge teń. Eger trapeciya múyeshlerinen biri 120° bolsa, onıń maydanın tabıń.

3.29. Ultanları 40 cm hám 14 cm, biyikligi bolsa 39 cm bolǵan trapeciyaǵa sheńber sırtlay sızılǵan. Sheńber radiusın tabıń.

3.30. Trapeciyanıń diagonalları 20 cm hám 15 cm, biyikligi 12 cm. Trapeciyanıń maydanın tabıń.

3.31. Rombtıń úlken diagonalı 24 cm, ishley sızılǵan sheńber radiusı 6 cm. Rombtıń maydanın tabıń.

3.32. Úshmúyeshliktiń tárepleri 17 cm, 25 cm, 28 cm. Orayı úlken tárepi ortasında bolǵan sheńber onıń qalǵan eki tárepine urınadı. Sheńber maydanın tabıń.

3.33. Tárepleri 6 cm hám 4 cm, diagonalları arasındaǵı múyeshi 60° qa teń bolǵan parallelogramm maydanın tabıń.

3.34. Eki parallel tuwrı sızıqtı úshinshi tuwrı sızıq penen keskende payda bolǵan múyeshlerdiń úshewiniń qosındısı 240° qa teń. Payda bolǵan qońsılas múyeshlerdiń úlkeniniń kishisine qatnasın payızlarda ańlatıń.

3.35. Eki parallel tuwrı sızıqtı úshinshi tuwrı sızıq penen keskende payda bolǵan múyeshlerden biri ekinshisinen 3 márte úlken bolsa, eki súyir múyeshlerdiń qosındısın tabıń.

3.36. Sheńberde jatqan noqattan júrgizilgen, bir-birine perpendikulyar eki xorda uzınlıǵı 8 cm hám 15 cm. Sheńber radiusın tabıń.

3.37. Sheńberde jatqan noqattan júrgizilgen eki xorda arasındaǵı múyesh 30°. Sheńber radiusı 5 cm bolsa, xordalar aqırların tutastırıwshı kesindiniń uzınlıǵın tabıń.

3.38. Sheńberdiń 6 cm li xordası onıń orayınan 4 cm uzaqlıqta jaylasqan. Sheńber uzınlıǵın tabıń.

3.39. Sheńberge sırtlay sızılǵan trapeciyanıń qaptal tárepleri qatnası 7:9 na teń, orta sızıǵı 32 cm. Trapeciyanıń qaptal táreplerin tabıń.

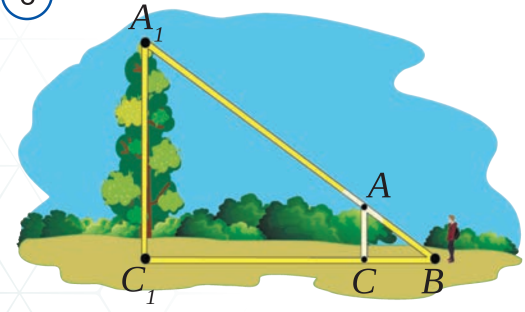
3.40. Radiusı 4 cm bolǵan sheńberge trapeciya ishley sızılǵan. Trapeciyanıń diagonalı súyir múyeshi bissektrisası menen 30° múyeshti quraydı. Trapeciyanıń biyikligin tabıń.

3.41. ABC úshmúyeshlikte $\angle A = 45°$, $\angle B = 60°$, $BC = 3\sqrt{6}$ cm bolsa, AC tárepti tabıń.

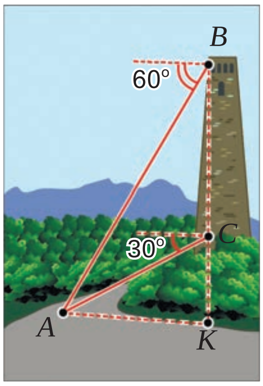
3.42. 8-súwrette tayaq járdeminde terektiń biyikligin tabıw procesi súwretlengen. Onı túsindirip beriń.

3.43. Qırda biyikligi 70 m bolǵan minara jaylasqan *(9-súwret)*. Minara B tóbesinen tómendegi A predmet gorizontqa salıstırǵanda 60° lı, minaranıń ultanındaǵı C noqattan bolsa 30° lı múyesh astında kórinedi. Qırdıń biyikligin tabıń.

8



9



Matematikalıq máseleler ǵáziynesi

Belgili bolǵanınday, keyingi waqıtlarda informaciyalıq kommunikaciya texnologiyaları júdá tez rawajlanıp atır hám jedel pát penen bilimlendiriw sistemasına da kirip barıp atır. Házir internet tarmaǵına sonshelli kóp informaciya derekleri jaylastırılǵan, bul ǵáziyneden paydalanıw hárbir jas áwlad ushın júdá zárúr hám paydalı. Internetten siz ózbek, rus, inglis hám basqa tillerde matematika álemindegi eń aqırǵı jańalıqlar, elektron kitapxanalar bazasında saqlanıp atırǵan kóplegen elektron sabaqlıqlardı, cifrlı resurslardın tabıwińız múmkin. Sonıń menen birge, hár túrli teoriyalıq materiallar, stilistikalıq usınıslar, san-sanaqsız máseleler, mısallar hám olardıń sheshimleri, túrli mámleketlerde ótkerilip atırǵan matematikalıq kórik-tańlaw hám olimpiadalar haqqında maǵlıwmatlar hám olarda usınıs etilgen qızıqlı matematikalıq máseleler hám olardıń sheshimleri menen tanısıwıńız múmkin.

Elektron figuralar

Video sabaqlar

Tómende bir qatar dereklerdiń mánzilleri berilip atır. Olardan geometriyaǵa tiyisli ózińizdi qızıqtırǵan túrli maǵlıwmatlardı alıp tabıwdı, matematikanı ǵárezsiz úyreniw múmkinshiliklerinen paydalanıwdı usınıs etemiz:

1. http://www.uzedu.uz - Xalıq bilimlendiriw ministrliginiń rásmiy saytı, informaciya bilimlendiriw portalı.
2. http://www.ziyonet.uz -"Ziyonet" bilimlendiriw portalı.
3. http://dr.rtm.uz- jańa sabaqlıqlar, oqıtıwshılar ushın stilistikalıq qollanbalardıń elektron formaları, prezentaciyalar, multimedia qosımshaları, videosabaqlar hám cifrlı resurslar platforması.
4. http://www.maktab.uz - 1-11-klaslar ushın onlayn mektep, mektep oqıw baǵdarlaması boyınsha videosabaqlar hám basqa materiallar platforması.
5. http://www.stesting.uz - oqıwshılar ushın "Xalıqaralıq bahalaw izertlewlerine tayarlanıw" elektron platforması (ózbek tilinde).
6. http://www.masofa.uz - A. Avloniy atındaǵı milliy- izertlew institutınıń aralıqtan oqıtıw portalı.

Prezentaciyalar

Testler

Tapsırmalar

Qosımsha materiallar

7. http://www.onlinedu.uz- A. Avloniy atındaǵı milliy-izertlew institutınıń “Úzliksiz kásiplik bilim beriw” elektron platforması.

8. http://www.skillgrover.com.uz - Finlandiyanıń matematikanı úyreniw hám oqıwshılar bilimlerin bahalaw platforması (ózbek tilinde).

9. http://www.khanakademy.org - “Xon akademiyası” aralıqtan oqıtıw saytı (inglis tilinde).

10. http://www.xanakademiyasi.uz - matematika, informatika, ximiya, fizika, ekonomika, biologiya hám astronomiya sıyaqlı pánler boyınsha videosabaqlar platforması (ózbek tilinde).

11. http://www.school.edu.ru - ulıwma bilim beriw portalı (rus tilinde).

12. http://www.problems.ru/ - matematikadan máseleler izlew sisteması (rus tilinde).

13. http://geometry.net/ - algebra hám geometriyadan oqıw materialları (inglis tilinde).

14. http://mathproblem.narod.ru/ - matematikalıq dógerekler hám olimpiadalar (rus tilinde).

15. http://www.ixl.com - matematikanı aralıqtan oqıtıw portalı (inglis tilinde).

16. http://www.mathkang.ru - “Kenguru” xalıqaralıq matematikalıq tańlaw saytı (rus tilinde).

17. http://www.olimpia.uz - “Kenguru” xalıqaralıq matematikalıq tańlaw saytı (ózbek tilinde).

18. http://www.brilliant.org - matematikadan aralıqtan oqıtıw saytı (inglis tilinde).

19. http://www.geogebra.org - geometriya hám algebra pánleri boyınsha dinamikalıq (“janlı”) sızılmalar jaratıw múmkinshiligin beretuǵın biypul programma.

20. http://www.yaklass.ru - mektep oqıwshıları hám muǵallimler ushın onlayn bilim beriw platforması.

21. www.schulen-ans-netz.de - Germaniya “Internet-Mektep”saytı (nemis tilinde).

22. www.studienkreis.de -Germaniya oqıw dógerekleri saytı (nemis tilinde).

23. www.educasource.education.fr - Franciya bilimlendiriw saytı (francuz tilinde).

24. www.educmath.inrp.fr - Franciya matematika bilimlendiriw cifrlı resursları (francuz tilinde).

25. http://mat-game.narod.ru/ - matematikalıq gimnastika. Matematikalıq máseleler hám basqatırmalar (rus tilinde).

II BAP

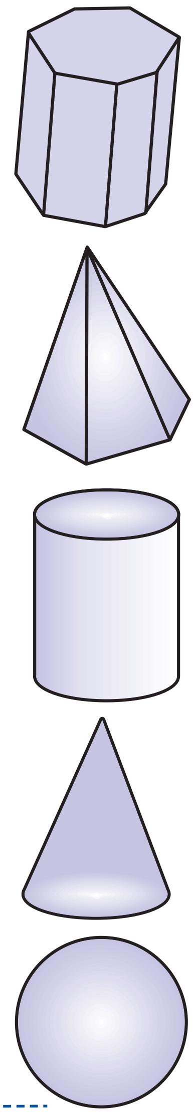
STEREOMETRIYAǴA KIRISIW

Bul baptı úyreniw nátiyjesinde tómendegi bilim hám kónlikpelerge iye bolasız:

- stereometriya aksiomaların biliw hám olardan paydalana alıw;
- stereometriya aksiomalarınan kelip shıǵıwshı nátiyjelerdi biliw hám olardı qollay alıw;
- keńisliktegi ayqısh, parallel hám kesilisiwshi tuwrı sızıqlar anıqlamasın biliw hám sızılmada súwretlew;
- tuwrı sızıqtıń tegislikke parallelligi anıqlamasın biliw;
- kesilisiwshi hám parallel tegislikler haqqında túsinikti iyelew;
- keńisliktegi deneler, kópjaqlılar - prizma, parallelepiped, kub, piramida haqqında baslanǵısh túsiniklerdi iyelew, tegislikte súwretley alıw, olardı sızılmada kórsetiw hám maydanın tabıwǵa tiyisli máselelerdi sheshiw;
- kópjaqlılardıń ápiwayı kesimlerin “izler” hám parallel kóshiriw usılları-nan paydalanıp jasaw;
- úyrenilgen túsinikler, faktlar hám metodlardı tanıs emes yamasa tur-mıslıq jaǵdaylarda qollay alıw.

4 STEREOMETRIYANÍŃ TIYKARǴÍ TÚSINIKLERI

1



Belgili bolǵanınday, geometriyalıq figuralar tegislikte tolıq jatqan yamasa jatpaǵanlıǵına qaray *tegisliktegi* hám *keńisliktegi figuralarǵa* ajıratıladı. Usı waqıtqa shekem geometriya sabaqlarında tiykarınan tegisliktegi geometriyalıq figuralardıń qásiyetlerin úyrendik. 9-klass aqırında bolsa bazı keńisliktegi figuralar: prizma, piramida, cilindr, konus hám shardıń (1-súwret) qásiyetlerin qarap shıqqan edik.

Geometriyanıń planimetriya bólimi tegisliktegi geometriyalıq figuralardı, *stereometriya* bólimi bolsa keńisliktegi geometriyalıq figuralardıń (yamasa denelerdiń) qásiyetlerin úyrenedi. *Stereometriya* sózi grek tilinen alınǵan bolıp, *stereos* – "keńisliktegi", *metreo* – "ólsheymen" degen mánisti ańlatadı.

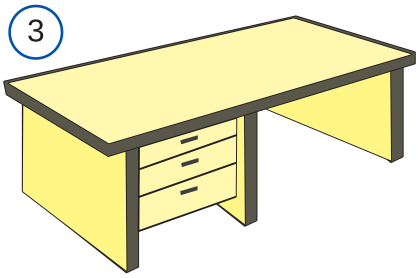
2-súwrette súwretlengen zatlar keńisliktegi denelerdiń belgisi retinde olar haqqında kóz aldıńızǵa keltiredi. Átirapımızdaǵı barlıq predmetler úsh ólshemli bolıp, olardıń forması qanday da bir keńisliktegi geometriyalıq denege uqsap ketedi.

Keńisliktegi tiykarǵı geometriyalıq figuralar *noqat, tuwrı sızıq* hám *tegislik* bolıp tabıladı. Olar stereometriyanıń tiykarǵı túsinikleri bolıp, olarǵa anıqlama berilmeydi.

Noqatqa ólshemleri esapqa alınbasa da bolatuǵın mayda predmetler belgisi sıpatında, tuwrı sızıqqa bolsa kerip tartılǵan sabaq yamasa mektep doskası qırın belgi sıpatında qaraw múmkin. Noqatlar úlken latın háripleri – A, B, C... menen, tuwrı sızıqlar bolsa kishi latın háripleri – a, b, c... menen belgilenedi

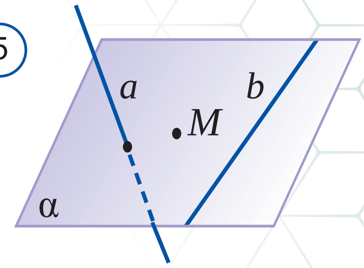
2

3



4

5



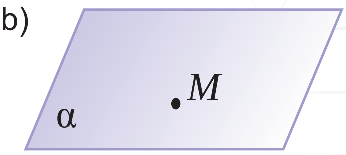
Tegislikti stol ústi sıyaqlı tegis bet dep kóz aldımızǵa keltiriwimiz múmkin *(3-súwret)*. Tegislikte tuwrı sızıq sıyaqlı sheksiz bolıp tabıladı. Súwrette tegisliktiń tek bir bólegine súwretleymiz. Biraq onı barlıq tárepke sheksiz dawam etken dep kóz aldımızǵa keltiremiz hám ádette sızılmada parallelogramm formasında súwretleymiz *(4-súwret)*.

6

a)

$M \notin \alpha$

b)



$M \in \alpha$

Stereometriyada isletiletuǵın bazı belgilewler

Tegisliklerdi α, β, γ, ... - grek háripleri menen belgileymiz.

Keńislikte tegislik, tuwrı sızıq hám noqatlar 5-súwrettegi sıyaqlı súwretlenedi. Keńislikte noqat tegislikke tiyisli bolmawı (6a-*súwret*) yamasa tiyisli bolıwı (6 b-*súwret*) múmkin.

M noqat a tegislikke tiyisli bolǵanda α tegislik M noqattan ótedi, dep de aytıladı hám $M \in \alpha$ tárizde belgilenedi. M noqat α tegislikke tiyisli bolmasa, $M \notin \alpha$ tárizde belgilenedi.

Sonıń menen birge, keńislikte tuwrı sızıq tegislikke tiyisli bolıwı yamasa tiyisli bolmawı da múmkin. a tuwrı sızıqtıń barlıq noqatları α tegislikke tiyisli bolsa (7 a-*súwret*), a tuwrı sızıq α tegislikte jatadı yamasa α tegislikte a tuwrı sızıq arqalı ótedi, dep aytıladı hám $a \subset \alpha$ tárizde belgilenedi.

a tuwrı sızıq α tegislikke tiyisli bolmasa, $a \not\subset \alpha$ tárizde belgilenedi.

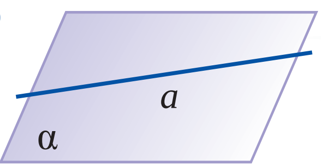
a tuwrı sızıqtıń tek bir noqatı α tegislikke tiyisli bolsa (7*b-súwret*), a tuwrı sızıq α tegislikti kesip ótedi, dep aytıladı jáne bul $\alpha \cap a = M$ tárizde jazıladı.

Eger a hám b tegisliklerdiń ulıwma noqatları a tuwrı sızıqtı payda etse (8-*súwret*), bul eki tegislik a tuwrı sızıq boylap kesilisedi deymiz hám bunı $\alpha \cap \beta = a$ formasında jazamız.

Eger a hám b tegisliklerdiń ulıwma noqatları bolmasa (9-*súwret*), bul eki tegislik óz ara kesilispeydi, deymiz hám bunı $\alpha \cap \beta = \varnothing$ sıyaqlı jazamız.

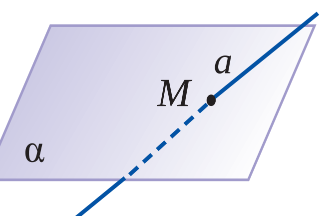
7

a)



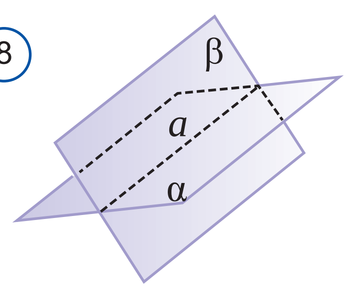
$a \subset \alpha$

b)



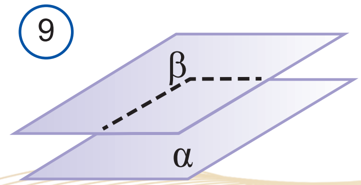
$a \not\subset \alpha, \quad \alpha \cap a = M$

8



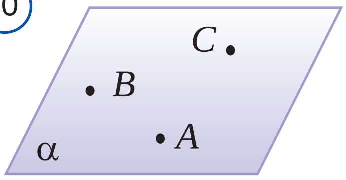
$\alpha \cap \beta = a$

9

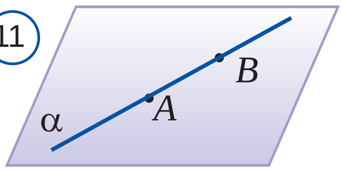


$\alpha \cap \beta = \varnothing$

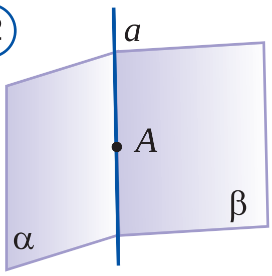
10



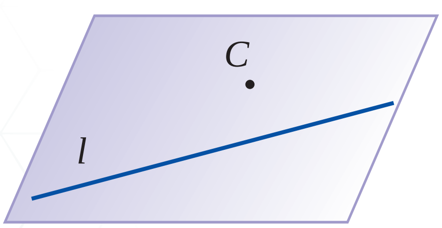
11



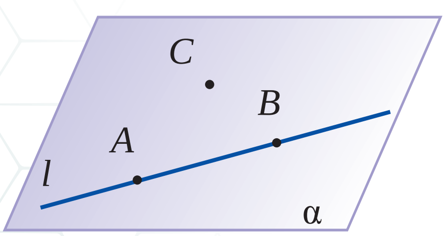
12



13 a)



b)



Stereometriya aksiomaları

Planimetriyadaǵı sıyaqlı stereometriyada bazı geometriyalıq figuralardıń qásiyetleri dálillewsiz qabıl etiledi. Keńislikte tegisliklerdiń tómendegi qásiyetlerin dálillewsiz, S topadaǵı aksiomaları sıpatında qabıl etemiz:

S_1 *Eger úsh noqat bir tuwrı sızıqta jatpasa, onda olar arqalı birden-bir tegislik ótkeriw múmkin (10-súwret).*

S_2 *Eger tuwrı sızıqtıń eki noqatı bir tegislikte jatsa, onda onıń barlıq noqatları sol tegislikte jatadı (11-súwret).*

S_3 *Eger eki tegislik ulıwma noqatqa iye bolsa, onda bul tegislikler sol noqattan ótetuǵın ulıwma tuwrı sızıqqa da iye boladı (12-súwret).*

Planimetriyada kiritilgen aksiomalar menen birgelikte bul úsh aksioma stereometriyanıń tiykarın quraydı. Planimetriyada biz qarap atırǵan barlıq figuralar jaylasatuǵın bir tegislikke iye edik. Stereometriyada bolsa bunday tegislikler sheksiz kóp bolıp, olardıń barlıǵında planimetriya aksiomaları hám planimetriyada dálillengen barlıq qásiyetler orınlı boladı, dep qaraladı. Sonday-aq, stereometriya kursında planimetriya aksiomalarına stereometriyalıq kóz qarastan qarawǵa tuwrı keledi.

Stereometriya aksiomalarınan kelip shıǵıwshı nátiyjeler

***1-nátiyje.* Tuwrı sızıq hám onda jatpaytuǵın noqat arqalı bir hám tek ǵana bir tegislik ótkeriw múmkin.**

Dálillew. l – berilgen tuwrı sızıq, C bolsa onda jatpaytuǵın noqat bolsın(13a-*súwret*).

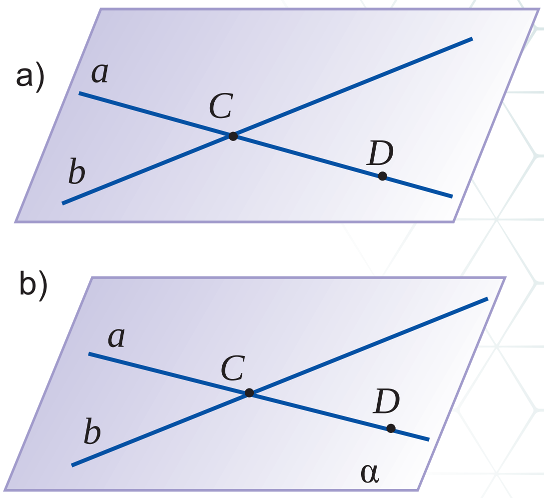
Aldın teoremanıń juwmaq bóleginde aytılǵan tegisliktiń bar ekenligin kórsetemiz. l tuwrı sızıqta A hám B noqatlardı alamız. Shárt boyınsha, A, B hám C noqatlar bir tuwrı sızıqta jatpaydı. Ol jaǵdayda S_1 aksioma boyınsha, A, B hám C noqatlar arqalı α tegislikti ótkeriw múmkin *(13b-súwret)*. S_2 aksioma boyınsha bolsa, α tegislik l tuwrı sızıqtan ótedi.

Sonday eken, α izlengen tegislik eken.

Endi bul tegisliktiń birden-birligin kórsetemiz.

Kerisinshe shama menen oylaymız: l-berilgen tuwrı sızıq hám onda jatpaǵan C noqattan jáne bir β tegislik ótkeriw múmkin bolsın. Onda β tegislik te A, B hám C noqatalardan ótedi. Biraq S_1 aksioma boyınsha, úsh noqattan tek bir tegislik ótkeriw múmkin. Qarama-qarsılıq. Demek, boljawımız nadurıs. Tuwrı sızıq hám onda jatpaytuǵın noqat arqalı bir hám tek ǵana bir tegislik ótkeriw múmkin.

14



2-nátiyje. ***Berilgen kesilisiwshi eki tuwrı sızıq arqalı birden-bir tegislik ótkeriw múmkin.***

Dálillew. Berilgen a hám b tuwrı sızıqlar C noqatta kesilissin *(14a-súwret)*. a tuwrı sızıqta C noqattan tısqarıdaǵı bir D noqattı alamız. Onda dálillengen 1-nátiyje boyınsha, b tuwrı sızıq hám onda jatpaǵan D noqat arqalı birden-bir α tegislik ótedi *(14b-súwret)*. Bul tegislik a tuwrı sızıqtıń C hám D noqatlarınan ótedi. Onda S_2 aksioma boyınsha, α tegislik a tuwrı sızıqtan da ótedi.

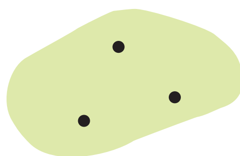
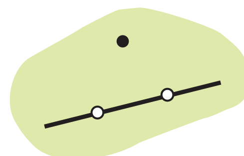
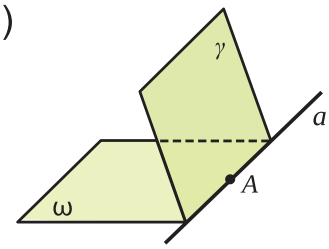
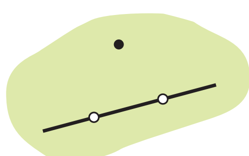
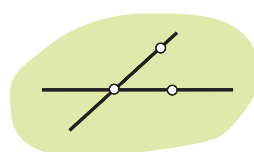
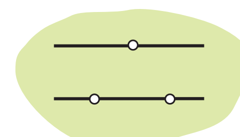
Demek, α tegislik berilgen kesilisiwshi eki tuwrı sızıq arqalı ótedi. Bul tegisliktiń birden-birligin ǵárezsiz dálilleń.

Temaǵa tiyisli sorawlar

1. *Keńisliktegi tiykarǵı geometriyalıq figuraları aytıń. Olardı qanday belgi sıpatında alıw múmkin?*
2. *Stereometriyanıń S topar aksiomaların aytıń hám anıqlama beriń.*
3. *Stereometriyada planimetriya aksiomaları da orınlı ma? Planimetriya aksiomalarına stereometriya kóz qarastan qaraw degende neni túsinesiz?*
4. *S_1 aksiomada úsh noqattıń bir tuwrı sızıqta jatpawın aytıp ótken. Bul talap sonshelli zárúrli me? Onı alıp taslasa, aksioma orınlı bola ma? Nege?*
5. *Stereometriya aksiomalarınan kelip shıǵıwshı nátiyjelerge anıqlama beriń.*

Ámeliy shınıǵıw hám qollanıw

4.1. Kestede 4-temanıń tiykarǵı tayanısh maǵlıwmatları keltirilgen. Olardı dıqqat penen úyrenip shıǵıń hám anıqlama beriń.

Stereometriya aksiomaları hám olardan kelip shıǵıwshı nátiyjeler		
a)  **S_1 aksioma.** Bir tuwrı sızıqta jatpaǵan úsh noqat arqalı bir hám tek ǵana bir tegislik ótkeriw múmkin.	b)  **S_2 aksioma.** Eger tuwrı sızıqtıń eki noqatı bir tegislikte jatsa, onda onıń barlıq noqatları sol tegislikte jatadı.	c)  **S_3 aksioma.** Eger eki tegislik ulıwma noqatqa iye bolsa, onda olar sol noqattan ótetuǵın ulıwma tuwrı sızıqqa da iye boladı.
 **1-nátiyje.** Tuwrı sızıq hám onda jatpaǵan noqat arqalı bir hám tek ǵana bir tegislik ótkeriw múmkin.	 **2-nátiyje.** Kesilisiwshi eki tuwrı sızıq arqalı bir hám tek ǵana bir tegislik ótkeriw múmkin.	 **3-nátiyje.** Parallel eki tuwrı sızıq arqalı bir hám tek bir tegislik ótkeriw múmkin.

4.2. Tómendegi tastıyıqlarǵa sáykes keletuǵın belgili ańlatpalardı tabıń.

Tastıyıq		Ańlatpa
1. M noqat α tegislikke tiyisli.		$\alpha \cap \beta = \varnothing$
2. M noqat α tegislikke tiyisli emes		$M \in \alpha$
3. a tuwrı sızıq α tegislikte jatadı.		$M \notin \alpha$
4. a tuwrı sızıq α tegislikte jatpaydı		$a \subset \alpha$
5. α hám β tegislikler a tuwrı sızıq boylap kesilisedi		$\alpha \cap \beta = a$
6. α hám β tegislikler óz ara kesilispeydi.		$a \not\subset \alpha$

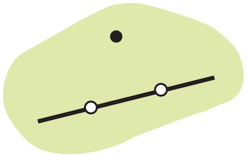
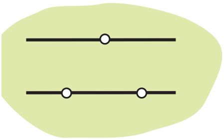
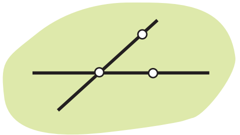
4.3. Klass bólmesi diywalların tegisliklerdiń bólekleri dep kóz aldıńızǵa keltiriń hám tómendegilerdi kórsetiń:

a) eki kesilisiwshi tuwrı sızıq;
b) eki kesilisiwshi tegislik;
c) bir noqatta kesilisiwshi úsh tuwrı sızıq;
d) eki kesilispeytuǵın tegislik;
e) eki kesilispeytuǵın tuwrı sızıq;
f) úsh kesilisetuǵın tegislik.

4.4. Tómendegi gáplerdi oqıń. Gáp durıs bolsa "+", nadurıs bolsa "-" belgisin janındaǵı ketekshege jazıń.

1	Eki tegislik tek bir ulıwma noqatqa iye bolıwı múmkin.	
2	Eki tegislik tek eki ulıwma noqatqa iye bolıwı múmkin	
3	Eki tegislik eki ulıwma tuwrı sızıqqa iye bolıwı múmkin.	
4	Berilgen kesilisiwshi eki tuwrı sızıq arqalı birden-bir tegislik ótkeriw múmkin.	
5	Tuwrı sızıq hám onda jatpaytuǵın noqat arqalı bir hám tek ǵana bir tegislik ótkeriw múmkin.	
6	Eger úsh noqat bir tuwrı sızıqta jatpasa, onda olar arqalı birden-bir tegislik ótkeriw múmkin.	
7	Eger tuwrı sızıqtıń eki noqatı bir tegislikte jatsa, onda onıń barlıq noqatları sol tegislikte jatadı.	
8	Eger eki tegislik ulıwma noqatqa iye bolsa, onda bul tegislikler sol noqattan ótetuǵın ulıwma tuwrı sızıqqa da iye boladı.	

4.5. Tómendegi keńisliktegi figuralar qásiyetlerine sáykes súwretti tabıń.

Qásiyetleri		Súwretler
Tuwrı sızıq hám onda jatpaytuǵın noqat arqalı bir hám tek ǵana bir tegislik ótkeriw múmkin.		
Kesilisiwshi eki tuwrı sızıq arqalı bir hám tek ǵana bir tegislik ótkeriw múmkin.		
Parallel eki tuwrı sızıq arqalı bir hám tek ǵana bir tegislik ótkeriw múmkin.		

4.6. Keńislikte eki noqattan neshe tuwrı sızıq ótiwi múmkin?

4.7. Keńislikte úsh noqattan neshe tegislik ótkeriw múmkin?

4.8. Keńislikte bir tuwrı sızıqtan neshe tegislik ótkeriw múmkin?

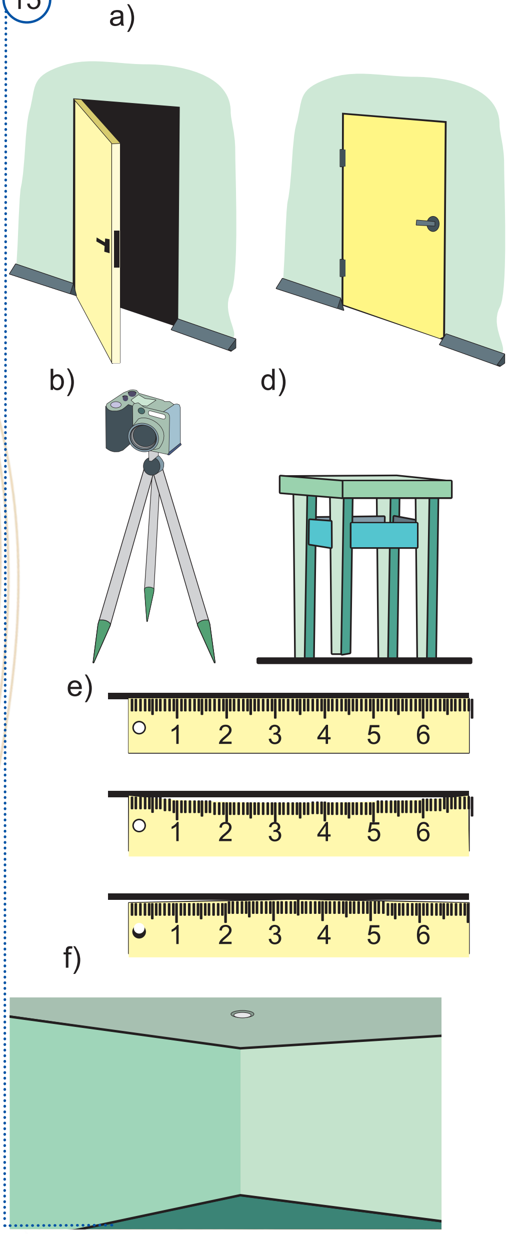
4.9. Keńislikte úsh noqat qanday jaylasqanda olardan sheksiz kóp tegislik ótkeriw múmkin?

4.10. Keńislikte: a) eki tuwrı sızıq; b) tuwrı sızıq hám tegislik; c) eki tegislik neshe ulıwma noqatqa iye bolıwı múmkin?

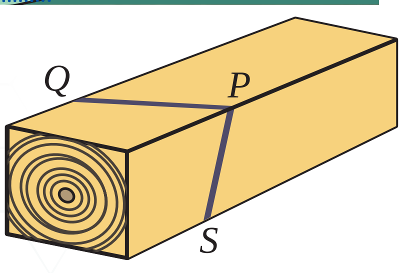
4.11. Keńislikte: a) eki tuwrı sızıq; b) tuwrı sızıq hám tegislik; c) eki tegislik; d) úsh tegislik birden-bir ulıwma noqatqa iye bolıwı múmkin be?

4.12. Bir tuwrı sızıqta jatıwshı úsh noqattan tegislik ótkeriw múmkinligin dálilleń. Bunday tegislikler sanı neshew?

15



16



17

4.13. A, B, C hám D noqatlar bir tegislikte jatpaydı. AB hám CD tuwrı sızıqlardıń kesilispeytuǵınlıǵın dálilleń.

4.14. Berilgen eki tuwrı sızıqtıń kesilisken noqatınan bul tuwrı sızıqlar menen bir tegislikte jatpaytuǵın tuwrı sızıq ótkeriw múmkin be? Juwabıńızdı túsindiriń.

4.15. A, B, C noqatlar eki túrli tegisliktiń hárbirinde jatadı. Bul noqatlardıń bir tuwrı sızıqta jatıwın dálilleń.

4.16. Tuwrı sızıq arqalı eki túrli tegislik ótiwin dálilleń.

4.17. Túrli: a) úsh; b) tórt; c) bes; d) n noqat jubınan eń kóbi menen neshe tuwrı sızıq ótkeriw múmkin?

4.18. Túrli: a) úsh; b) tórt; c) bes; d) n noqat úshliginen eń kóbi menen neshe tegislik ótkeriw múmkin?

Ámeliy qollanıwlar

4.19. 15-súwrettegi jaǵdaylardı túsindiriwde qaysı aksiomalarǵa tayanıw múmkin?

A) Nege ashıq qapı samal waqtında ashılıp -jabılıp hárekette boladı? Nege qulıp ilingende bunday háreket baqlanbaydı?

B) Kamera ayaqları nege úshew boladı?

C) Stul jerde bekkem turıwı ushın onıń ayaqları qanday tekseriledi?

D) Sızǵıshtıń tegisligi qanday tekseriledi?

E) Eki diywal stereometriya aksiomalarınan kelip shıǵıp qaysı nátiyjeni túsindiriwde qol keledi?

4.20. 16-súwrette aǵash ustasınıń taxtanı pıshqılawdan aldın sızǵan sızıqları súwretlengen. Onıń bul jumısın stereometriya aksiomalarınan kelip shıǵıp qaysı nátiyje menen anıqlama beriw múmkin?

4.21. 17-súwrette temirshiniń qıysıq temirdi tegislew procesi súwretlengen. Temir aldın tegis orınǵa qoyılıp, shókkish penen urıp tegislenedi. Keyin aylandırılıp, jáne urıp tegislenedi. Eki basqıshtan ibarat bul jumıstı stereometriya aksiomalarınan kelip shıǵıp qaysı nátiyje menen anıqlama beriw múmkin?

5 KEŃISLIKTEGI TUWRÍ SÍZÍQLAR HÁM TEGISLIKLER

Keńislikte tuwrı sızıqlar

Keńislikte eki tuwrı sızıq bir tegislikte jatıwı yamasa jatpawı múmkin *(1-súwret)*. Keńislikte bir tegislikte jatpaytuǵın eki tuwrı sızıq *ayqısh tuwrı sızıqlar* dep ataladı*(1a-súwret)*.

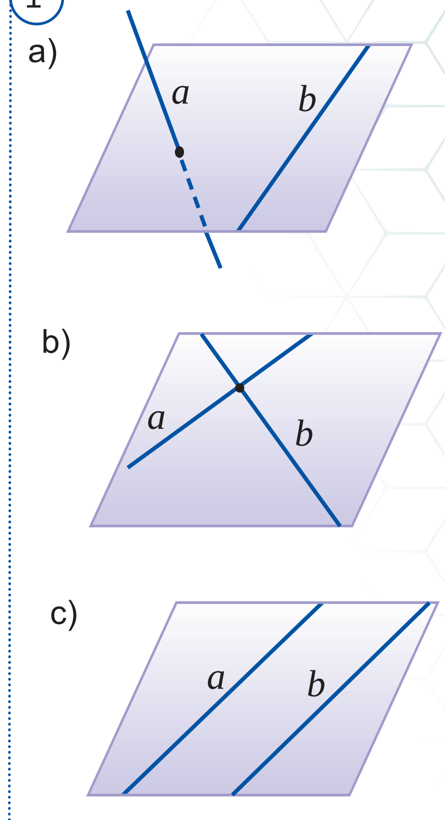
Bir tegislikte jatqan hám tek bir ulıwma noqatqa iye bolǵan tuwrı sızıqlar *kesilisiwshi tuwrı sızıqlar* dep ataladı *(1b-súwret)*.

Bir tegislikte jatqan hám óz ara kesilispeytuǵın tuwrı sızıqlar bolsa *parallel tuwrı sızıqlar* dep ataladı *(1c-súwret)*.

Ayqısh tuwrı sızıqlarǵa biri kópirden, ekinshisi kópir astınan ótetuǵın jollardı mısal retinde keltiriw múmkin*(2-súwret)*. Sonıń menen birge, 3-súwrettegi parallelepipedtiń MN hám L_1M_1 qırları jatqan tuwrı sızıqlar da ayqısh boladı.

Ayqısh (parallel) tuwrı sızıqlarda jatqan kesindi de nurlardı da ayqısh (parallel) dep ataymız.

1

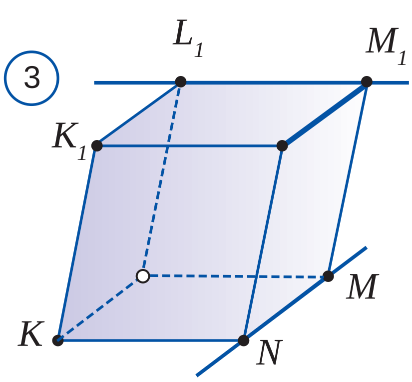


Keńislikte tuwrı sızıq hám tegislik

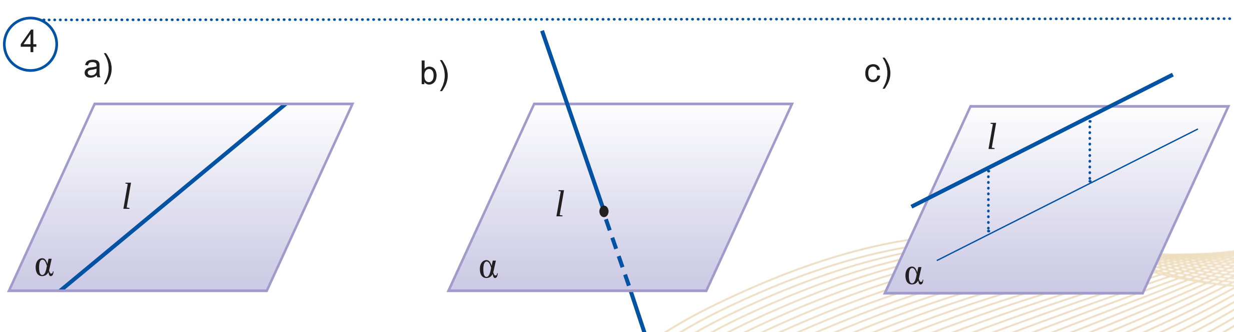
2

Tuwrı sızıq tegislikte jatıwı *(4a-súwret)*, onı kesip ótiwi *(4b-súwret)* yamasa kesip ótpewi, yaǵnıy ulıwma noqatqa iye bolmawı *(4c-súwret)* múmkin. Aqırǵı jaǵdayda tuwrı sızıq tegislikke parallel dep ataladı.

3

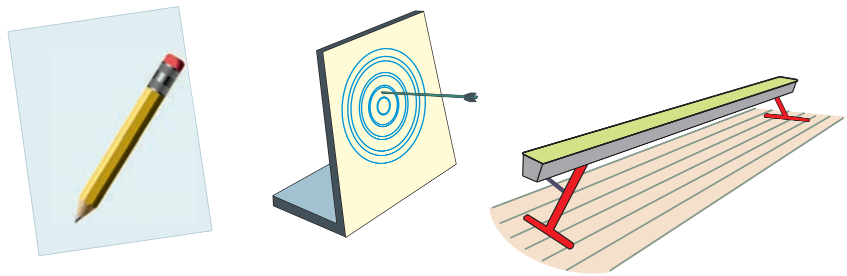


4

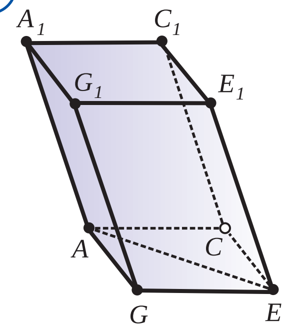


5

a) b) c)

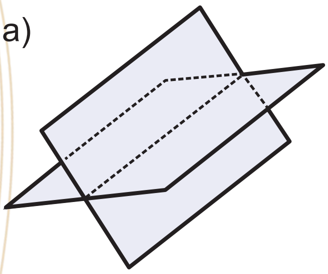


6

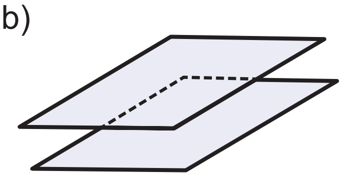


7

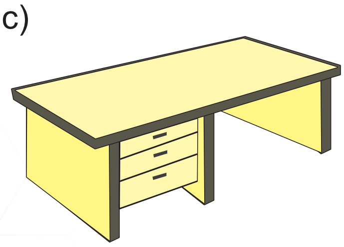
a)



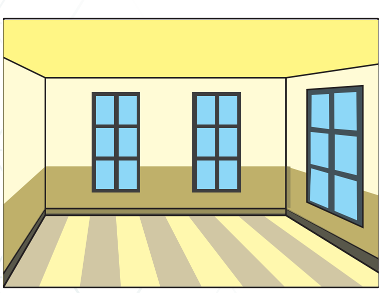
b)



c)



d)



Stol ústinde jatqan qálem tegislikte jatqan tuwrı sızıq haqqında *(5a-súwret)*, nıshanǵa qadalǵan oq *(5b-súwret)* tegislikti kesip ótetuǵın tuwrı sızıq haqqında hám polda turǵan gimnastika aǵashı tegislikke parallel tuwrı sızıq kórinisin *(5c-súwret)* kóz aldımızǵa keltiredi.

6-súwrette súwretlengen parallelepipedtiń $AGEC$ ultanınıń diagonalı AE jatqan tuwrı sızıq ultan tegisliginde jatadı, AGA_1G_1 jaq jatqan tegislikti kesip ótedi hám $A_1G_1E_1C_1$ joqarǵı ultan tegisligine parallel boladı.

Keńislikte tegislikler

Endi keńislikte tegisliklerdiń óz ara jaylasıwına aydınlıq kiriteyik.

Keńislikte tegislikler qanday da bir tuwrı sızıq boylap kesilisedi *(7a-súwret)* yamasa ulıwma noqatqa iye bolmawı múmkin *(7b-súwret)*. Sonnan kelip shıǵıp, bul tegislikler sáykes túrde *kesilisiwshi* yamasa *parallel tegislikler* dep ataladı.

7c-súwrette súwretlengen stoldıń ústki beti hám qaptal jaǵı kesilisiwshi tegislikler haqqında, bólmeniń polı hám tóbesi bolsa *(7d-súwret)* parallel tegislikler haqqında kóz aldımızǵa keltiredi.

Sonıń menen birge, 6-súwrette súwretlengen parallelepipedtiń qarama-qarsı bolmaǵan qaptal jaqları kesilisiwshi tegislikler haqqında, tómengi hám ústki ultanları hám qarama-qarsı jaqları bolsa parallel tegislikler haqqında oyda sáwlelendiriwdi beredi.

Parallellik belgisi - "||" tek ǵana parallel tuwrı sızıqlardı, bálki tegislikke parallel tuwrı sızıqtı hám parallel tegisliklerdi belgilewde de qollanıladı:

$a \parallel b$, $a \parallel \alpha$ hám $\alpha \parallel \beta$.

Geyde tegislikler bir tuwrı sızıqta jatpaǵan úsh:

A, B hám C noqatı járdeminde "ABC tegislik" kórinisinde de belgilenedi

Temaǵa tiyisli sorawlar

1. Tegislikte jatıwshı qanday tuwrı sızıqlar: a) kesilisiwshi; b) parallel dep ataladı?
2. Qanday tuwrı sızıqlar ayqısh dep ataladı? Mısallar keltiriń.
3. Keńislikte eki tuwrı sızıq qanday jaylasıwı múmkin?
4. Qanday tuwrı sızıqlar: a) tegislikte jatıwshı; b) tegislikke parallel dep ataladı?
5. Keńislikte tuwrı sızıq hám tegislik qanday jaylasıwı múmkin?
6. Keńislikte qanday tegislikler: a) kesilisiwshi; b) parallel dep ataladı?
7. Keńislikte eki tegislik qanday jaylasıwı múmkin?

Ámeliy shınıǵıw hám qollanıw

5.1. Kestelerde 5-bóliminiń tiykarǵı tayanısh maǵlıwmatları keltirilgen. Olardı dıqqat penen úyrenip shıǵıń hám anıqlama beriń.

Figuralar	Keńislikte tuwrı sızıqlardıń óz ara jaylasıwı		
a hám b tuwrı sızıqlar	Bir tegislikte jatadı	Bir ulıwma noqatqa iye	Kesilisiwshi: $a \otimes b$
		Ulıwma noqatqa iye emes	Parallel: $a \parallel b$
	Bir tegislikte jatpaydı		Ayqısh: $a \dot{-} b$

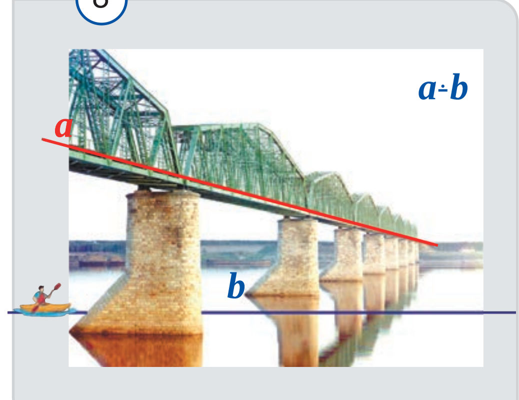
Figuralar	Keńislikte tuwrı sızıq hám tegisliklerdiń óz ara jaylasıwı		
a tuwrı sızıq hám α tegislik	a tuwrı sızıq α tegislikte jatpaydı.	a tuwrı sızıq α tegislik penen bir ulıwma noqatqa iye	Kesilisiwshi: $a \otimes \alpha$
		a tuwrı sızıq α tegislik penen bir ulıwma noqatqa iye emes	Parallel: $a \parallel \alpha$
	a tuwrı sızıq α tegislikte jatadı.		$a \subset \alpha$

Figuralar	Keńislikte tuwrı sızıqlardıń óz ara jaylasıwı	
α hám β tegislikler	Ulıwma noqatqa iye.	Kesilisiwshi: $\alpha \cap \beta = a$ tuwrı sızıq
	Ulıwma noqatqa iye emes.	Parallel: $\alpha \parallel \beta$

5.2. 8-súwrette keńislikte ayqısh tuwrı sızıqlar neni súwretlegenligin anıqlań.

5.3. Kub modelinde onıń tómendegi elementleri juplıǵın kórsetiń:
a) bir ulıwma noqatqa iye eki qır;
b) ulıwma noqatqa iye bolmaǵan eki qır;
c) bir tegislikte jatpaytuǵın eki qır;
d) bir ulıwma noqatqa iye qır hám jaq;
e) ulıwma noqatqa iye bolmaǵan qır hám jaq;
f) jaq hám onda jatqan qır;
g) kesilispeytuǵın eki jaq;
h) kesilisiwshi eki jaq.

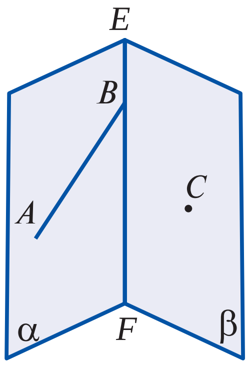
8



5.4. Tómendegi kestedegi eki tuwrı sızıqtıń qásiyetleri boyınsha óz ara jaylasıwın sáykeslendiriń.

Tuwrı sızıqlardıń qásiyetleri	*Óz ara jaylasıwı*
Bir tegislikte jatadı hám ulıwma noqatqa iye emes.	Ayqısh
Bir tegislikte jatadı hám ulıwma noqatqa iye.	Parallel
Bir tegislikte jatpaydı.	Kesilisiwshi

9



5.5. 9-súwrettegi α hám β tegislikler EF tuwrı sızıq boylap kesilisedi. AB tuwrı sızıq α tegislikte jatadı. β tegislikte jatqan C noqattan sonday tuwrı sızıq ótkeriń, ol:

a) AB tuwrı sızıqtı kesip ótsin;

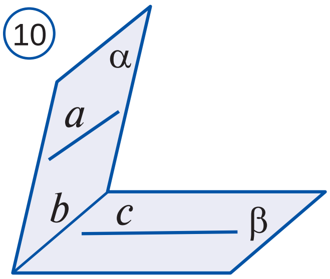
b) AB tuwrı sızıq penen ayqısh bolsın;

c) AB tuwrı sızıq penen parallel bolsın.

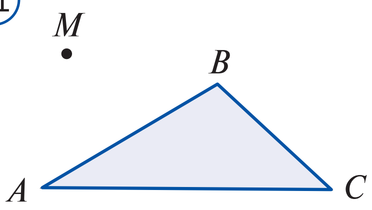
5.6. $a \parallel b$ hám $a \parallel \alpha$ ekenligi belgili. b tuwrı sızıq hám α tegislik óz ara qanday jaylasqan bolıwı múmkin?

5.7. $\alpha \parallel \beta$, $a \subset \alpha$ hám $b \subset \beta$ ekenligi belgili. a hám b tuwrı sızıqlar óz ara qanday jaylasqan bolıwı múmkin?

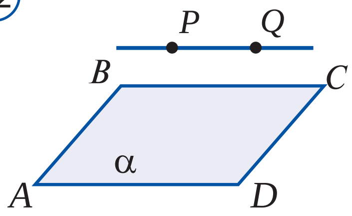
10



11



12



5.8. 10-súwrette α hám β tegislikler b tuwrı sızıq boylap kesilisedi. Eger $a \parallel b$, c hám b tuwrı sızıqlar parallel bolmasa, a hám c tuwrı sızıqlar óz ara qanday jaylasıwı múmkin?

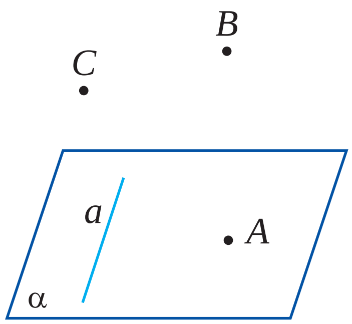
5.9. 11-súwrette M noqat ABC úshmúyeshlik sırtında jaylasqan. MA, MC, MB tuwrı sızıqlarǵa ayqısh tuwrı sızıqlardı anıqlań.

5.10. 12-súwrette PQ tuwrı sızıq $ABCD$ tórtmúyeshliktiń sırtında jatadı hám BC ǵa parallel: a) PQ hám AB; b) PQ hám CD; c) PQ hám AD qanday tuwrı sızıqlar?

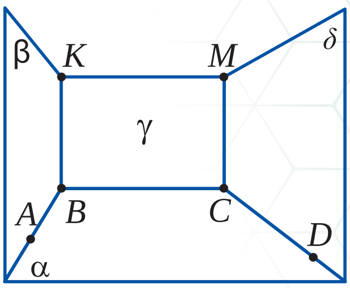
5.11. $ABCP$ úshmúyeshli piramida (tetraedr) berilgen. Tómendegi kestede keltirilgen tuwrı sızıqlar óz ara qanday jaylasadı? Sáykes ketekshege tiyisli belgi (⊗- kesilisedi, ∸ - ayqısh, ||- parallel) ni qoyıń.

	AB	BC	AC	PA	PB	PC
AB						
BC						
AC						
PA						
PB						
PC						

13



14



5.12. 13-súwrette a tuwrı sızıq hám A noqat α tegislikke tiyisli. C hám B noqatlar bolsa bul tegislikke tiyisli emes. Tómendegilerden ótiwshi tegislik berilgen α tegislikten ayrıqsha bola ma?

A) a tuwrı sızıq hám B noqattan; B) a tuwrı sızıq hám C noqattan;
C) AB hám AC tuwrı sızıqtan; D) AB hám BC tuwrı sızıqtan;

5.13. 14-súwrettegi maǵlıwmatlardan paydalanıp kesteni úlgige kóre toltırıń:

Tegislikler	α hám β	α hám γ	α hám δ	β hám γ	γ hám δ
Ulıwma noqatları	A hám B				
Ulıwma tuwrı sızıq	AB				

5.14. Tómendegi gáplerdi oqıń. Olardıń mudamı, geyde yamasa heshqashan tuwrı bolıw yamasa bolmawın anıqlap, kesteniń sáykes ketekshesine “+” belgisin qoyıń. Juwabıńızdı tiykarlaytuǵın mısallar keltiriń.

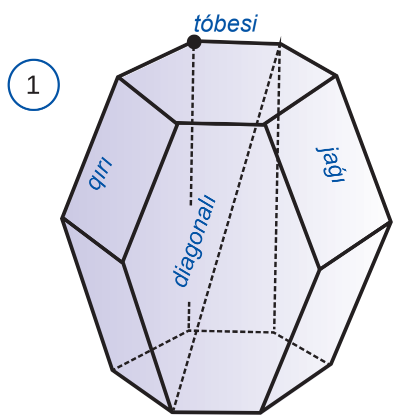
	Gáp	**Mudamı**	**Geyde**	**Hesh-qashan**
1	Keńislikte tuwrı sızıq tegislikte jatpaydı.			
2	Eki tegislik tek ǵana bir ulıwma noqatqa iye.			
3	Tegislikler tuwrı sızıq boyınsha kesilisedi.			
4	Eki tegislik tek eki ulıwma noqatqa iye			
5	Eki tegislik eki ulıwma tuwrı sızıqqa iye.			
6	Kesilisiwshi eki tuwrı sızıq arqalı birden-bir tegislik ótedi.			
7	Tuwrı sızıq hám noqat arqalı bir tegislik ótedi.			
8	Úsh noqat arqalı birden-bir tegislik ótedi.			
9	Tuwrı sızıqtıń bir noqatı tegislikte jatsa, onıń barlıq noqatları da sol tegislikte jatadı.			
10	Eki tegislik ulıwma noqatqa iye bolsa, olar ústpe-úst túsedi.			

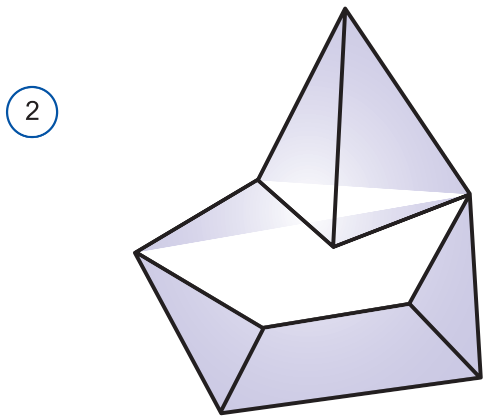
6 KEŃISLIKTEGI GEOMETRIYALÍQ FIGURALAR. KÓPJAQLÍLAR

Tómengi klaslarda qatar keńisliktegi geometriyalıq figuralar menen tanıstıq. Olardıń bazıların *keńisliktegi deneler* dep te atadıq. Keńisliktegi denelerdi qanday da materiallıq dene iyelegen bolmıstıń bólegi sıpatında kóz aldımızǵa keltiriw múmkin. Keńisliktegi deneni onıń beti shegaralap turadı.

Kópjaqlı dep tegis kópmúyeshlikler menen shegaralanǵan denege aytıladı. Tegis kópmúyeshlikler – bul *kópjaqlınıń jaqları*, kópmúyeshliklerdıń tóbeleri *kópjaqlınıń tóbeleri*, tárepleri bolsa *kópjaqlınıń qırları* dep ataladı. Bir jaqqa tiyisli bolmaǵan tóbelerdi birlestiriwshi kesindi *kópjaqlınıń diagonalı* dep ataladı *(1-súwret)*.

Kópjaqlınıń shegarası onıń beti dep ataladı. Kópjaqlınıń beti keńislikti eki bólekke ajıratadı. Olardan sheksiz bólegi *kópjaqlınıń sırtqı oblastı*, shekli bólegi bolsa *kópjaqlınıń ishki oblastı* dep ataladı. Kópjaqlınıń qálegen jaǵı jatqan tegisliktiń bir tárepinde bolsa, bunday kópjaqlı *dóńes kópjaqlı* dep ataladı.

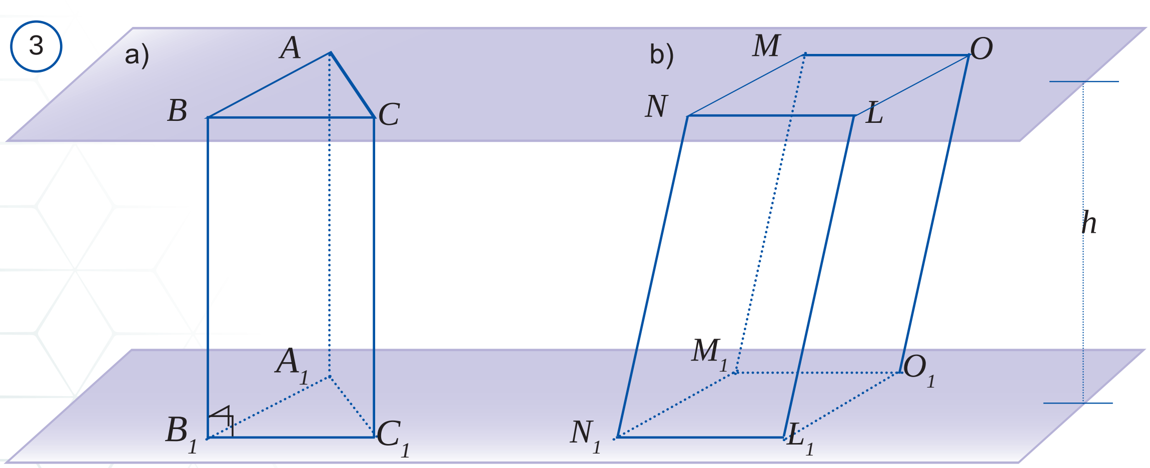


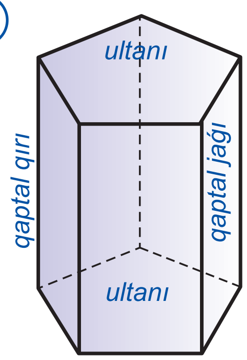


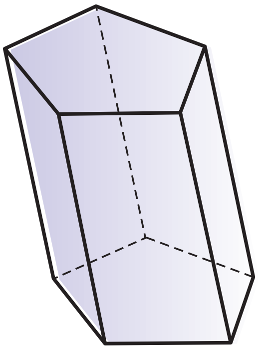
Mısalı, kub-dóńes kópjaqlı bolıp tabıladı. 2-súwrette bolsa dóńes bolmaǵan kópjaqlı súwretlengen. Endi, eń ápiwayı dóńes kópjaqlılar-prizma hám piramidalardı úyrenemiz.

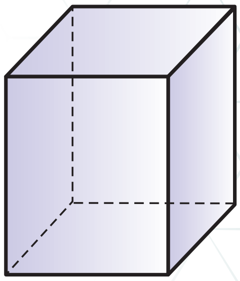
Prizma dep eki jaǵı teń kópmúyeshlikten, qalǵan jaqları bolsa parallelogramlardan ibarat kópjaqlıǵa aytıladı *(3-súwret)*. Teń jaqları prizmanıń ultanları, parallelogramlar bolsa onıń qaptal jaqları dep ataladı *(4-súwret)*.

Ultanınıń tárepleri sanına qaray prizmalar úshmúyeshli, tórtmúyeshli hám basqa n múyeshli prizmalar dep aytıladı. 3a-súwrette úshmúyeshli $ABCA_1B_1C_1$ prizma, 3b-súwrette bolsa tórtmúyeshli $MNLOM_1N_1L_1O_1$ prizma súwretlengen.



4


5


6


Qaptal jaqları tuwrı tórtmúyeshliklerden ibarat prizmaǵa *tuwrı prizma (4-súwret)*, keri jaǵdayda *qıya prizma (5-súwret)* dep ataladı.

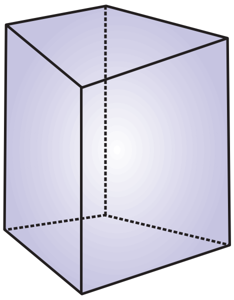
Ultanı durıs kópmúyeshlikten ibarat tuwrı prizma *durıs prizma* dep ataladı*(6-súwret)*.

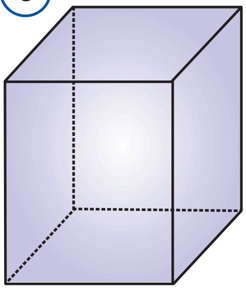
Ultanları parallelogramnan ibarat prizma *parallelepiped* dep ataladı *(7-súwret)*. Parallelepipedler de prizma sıyaqlı tuwrı *(8-súwret)* hám qıya *(9-súwret)* bolıwı múmkin. Tuwrı parallelepipedtiń qaptal jaqları tuwrı tórtmúyeshliklerden ibarat boladı.

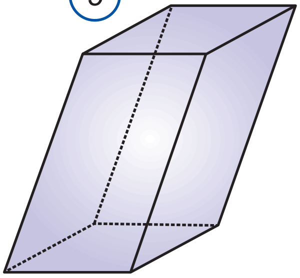
Ultanı tuwrı tórtmúyeshlikten ibarat tuwrı parallelepiped *tuwrı múyeshli parallelepiped* dep ataladı *(8-súwret)*. Kórinip turǵanınday, tuwrı múyeshli parallelepipedtiń barlıq jaqları tuwrı tórtmúyeshliklerden ibarat boladı.

Tuwrı múyeshli parallelepipedtiń bir tóbesinen shıǵıwshı úsh qabırǵası uzınlıqları onıń *ólshemleri* dep ataladı.

Ólshemleri óz ara teń bolǵan tuwrı múyeshli parallelepiped *kub* dep ataladı. Kubtıń barlıq jaqları teń kvadratlardan ibarat boladı.

7


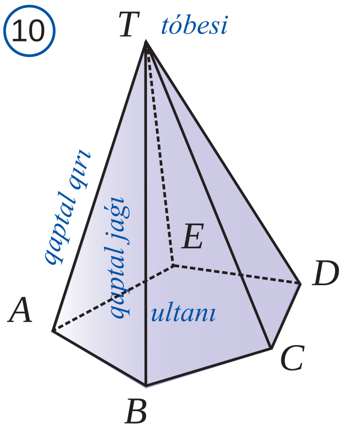
8


9


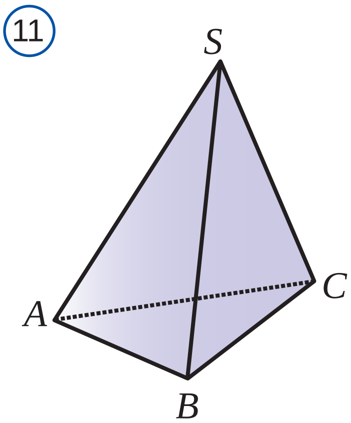
Piramida dep bir jaǵı kópmúyeshlikten, qalǵan jaqları bolsa bir tóbege iye úshmúyeshliklerden ibarat kópjaqlıǵa aytıladı. Kópmúyeshlik piramidanıń *ultanı*, úshmúyeshlikler bolsa onıń qaptal jaqları dep ataladı. 10-súwrette $TABCDE$ besmúyeshli piramida súwretlengen. $ABCDE$ besmúyeshlik piramidanıń ultanı, ATB, BTC, CTD, DTE hám ETA úshmúyeshlikler onıń *qaptal jaqları*, T bolsa onıń tóbesi. Ultanınıń tárepleri sanına qaray piramidalar úshmúyeshli, tórtmúyeshli hám basqa *n múyeshli piramidalar* dep ataladı. Úshmúyeshli piramida *tetraedr* dep te ataladı. 11-súwrette úshmúyeshli, 12-súwrette bolsa tórtmúyeshli piramida súwretlengen.

Durıs piramida dep ultanı durıs kópmúyeshlik hám qaptal jaqları óz ara teń bolǵan piramidaǵa aytıladı.

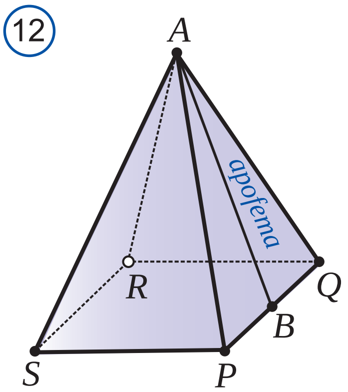
10



11



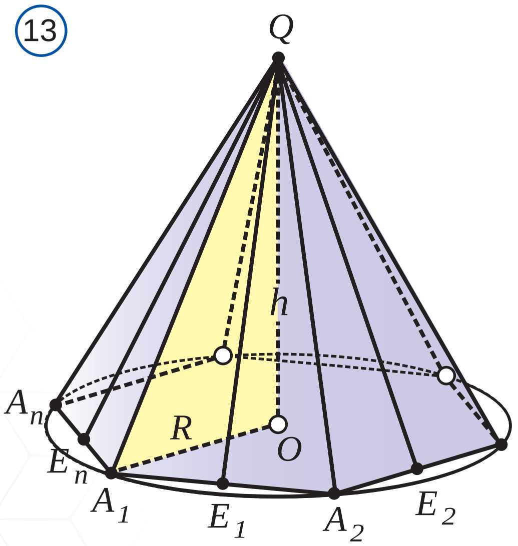
12



Durıs piramida qaptal jaǵınıń piramida tóbesinen túsirilgen biyikligi onıń *apofeması* dep ataladı. 12-súwrette $APQRS$ tórtmúyeshli durıs piramida súwretlengen. Ondaǵı AB kesindi piramida apofemalarınan biri bolıp tabıladı

2.1-teorema. ***Durıs piramidanıń: a) qaptal jaqları; b) qaptal qırları; c) apofemaları óz ara teń.***

13



Dálillew. Aytayıq, $QA_1 A_2... A_n$ durıs piramida, O bolsa piramida ultanınıń orayı bolsın *(13-súwret)*. 1) OA_1, OA_2,... OA_n kesindiler durıs kópmúyeshlikke sırtlay sızılǵan sheńber radiusınan ibarat bolǵanı ushın óz ara teń boladı. Tuwrı múyeshli QOA_1, QOA_2,.. ., QOA_n úshmúyeshliklerde eki kateti óz ara teń bolǵanı ushın olar teń boladı. Onda olardıń gipotenuzaları da teń boladı:

$$QA_1 = QA_2 = ... = QA_n.$$

2) $QA_1A_2... A_n$ durıs piramidanıń qaptal qırları óz ara teń bolǵanı ushın onıń qaptal jaqları teń qaptallı úshmúyeshliklerden ibarat boladı. Bul úshmúyeshliklerdiń ultanları durıs kópmúyeshliktiń tárepi bolǵanı ushın óz ara teń boladı.

Demek, durıs piramidanıń qaptal jaqları úsh tárepi boyınsha óz ara teń.

3) Durıs piramidanıń qaptal jaqları teń bolǵanı ushın olardıń Q tóbesinen túsirilgen biyiklikleri de óz ara teń boladı.

Demek, durıs piramidanıń apofemaları da óz ara teń

.

2.2-teorema. ***Durıs piramidanıń qaptal beti ultanınıń yarım perimetri hám apofeması kóbeymesine teń.***

Dálillew. Aytayıq, $QA_1A_2...A_n$ durıs piramida bolsın (*13-súwret*). Piramidanıń qaptal beti onıń qaptal jaqları maydanları qosındısına teń. Onıń qaptal jaqları bolsa óz ara teń bolǵan teń qaptallı úshmúyeshliklerden ibarat. Óz gezeginde, bul úshmúyeshliklerdiń biyiklikleri de óz ara teń apofemalardan ibarat: $QE_1 = QE_2 = ... = QE_n$.

Bulardan: $S = S_{A_1QA_2} + S_{A_2QA_3} + ... + S_{A_nQA_1} =$

$$= \frac{1}{2} A_1A_2 \cdot QE_1 + \frac{1}{2} A_2A_3 \cdot QE_2 + ... + \frac{1}{2} A_nA_1 \cdot QE_n =$$

$$= \frac{1}{2} (A_1A_2 + A_2A_3 + ... + A_nA_1)\, QE_1 = p \cdot a.$$

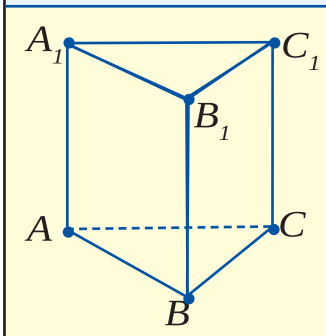
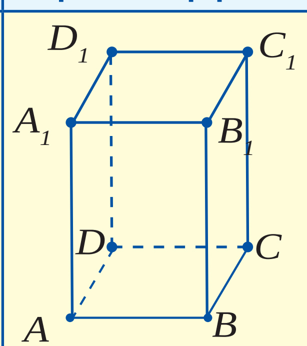
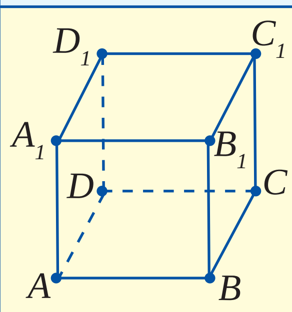
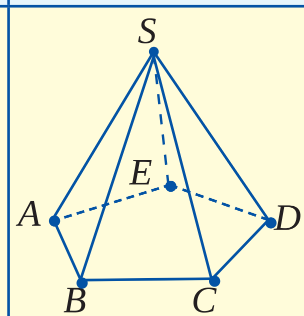
bul jerde p - piramida ultanınıń yarım perimetri, a - piramida apofeması

Tema boyınsha sorawlar

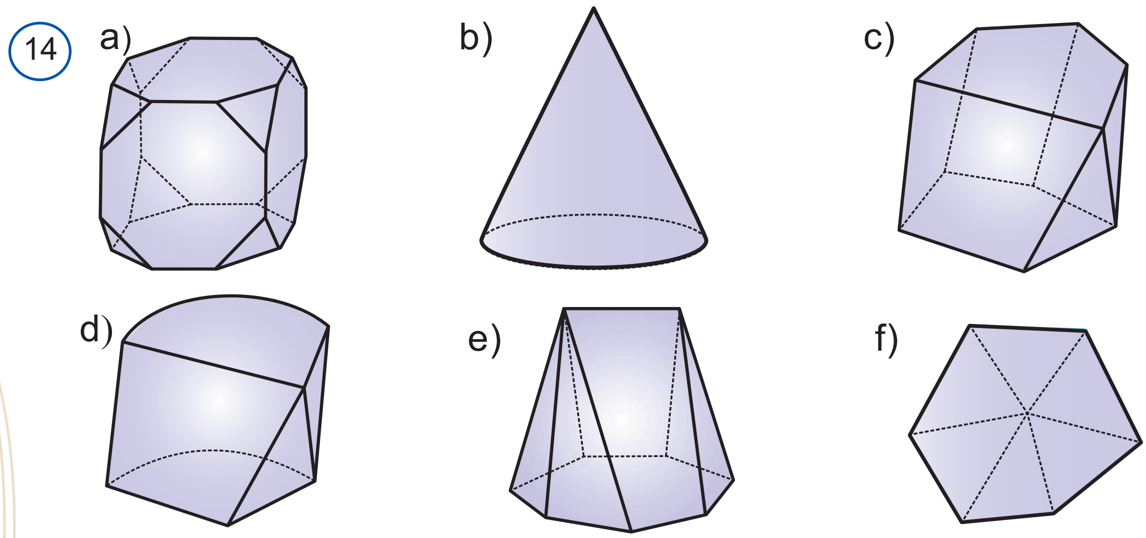
1. *Qanday geometriyalıq figuralar: a) tegis; b) keńisliktegi dep ataladı?*
2. *Keńisliktegi dene degen ne?*
3. *Qanday dene kópjaqlı dep ataladı? Onıń elementlerine anıqlama beriń.*
4. *Qanday dene prizma dep ataladı? Onıń elementlerine anıqlama beriń.*
5. *Prizmanıń qanday túrlerin bilesiz?*
6. *Tuwrı múyeshli parallelepipedke anıqlama beriń.*
7. *Qanday dene piramida dep ataladı? Onıń elementlerine anıqlama beriń.*
8. *Piramidanıń qanday túrlerin bilesiz?*
9. *Durıs piramidanıń qásiyetlerin aytıń.*

Ámeliy shınıǵıw hám qollanıw

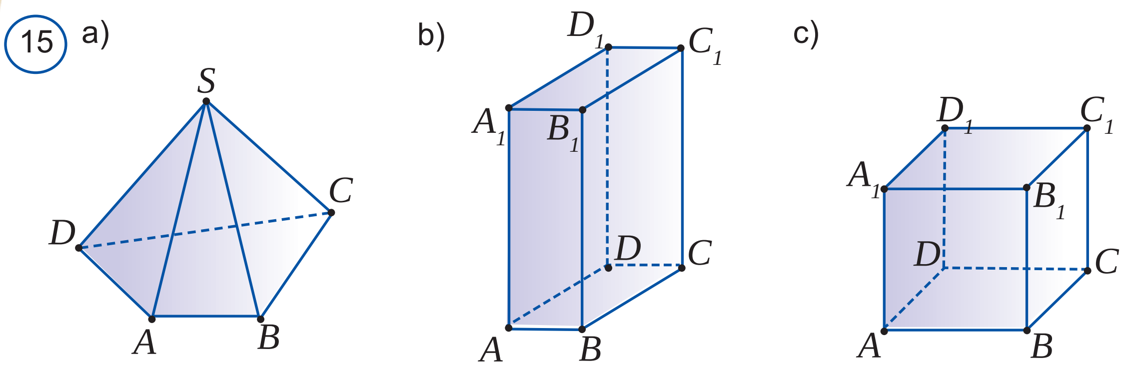
6.1. Kestede 6-temanıń tiykarǵı tayanısh maǵlıwmatları keltirilgen. Olardı dıqqat penen úyrenip shıǵıń hám anıqlama beriń.

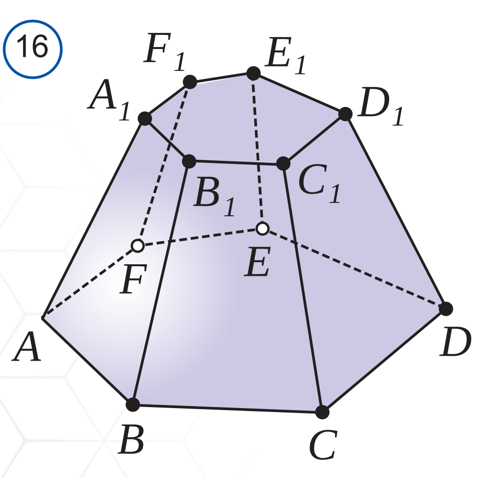
Kópjaqlılar			
Prizma	**Tuwrı múyeshli parallelepiped**	**Kub**	**Piramida**
			
Ultanları – kópmúyeshlik, jaqları - parallelogramlar	Ultanları – tuwrı tórtmúyeshlik, jaqları – tuwrı tórtmúyeshlikler	Ultanları – kvadrat, jaqları – kvadrat	Ultanı – kópmúyeshlik, jaqları – úshmúyeshlik

6.2. 14-súwrettegi keńisliktegi denelerdiń qaysıları kópjaqlı boladı?



6.3. 15-súwrettegi keńisliktegi denelerdiń qaysı biri: 1) kub; 2) piramida; 3) prizma?





6.4. 15a-súwrettegi piramidanıń neshe tóbesi, qabırǵası hám jaǵı bar? Ultanı qanday kópmúyeshlikten ibarat? Qaptal jaqları qanday kópmúyeshlikten ibarat?

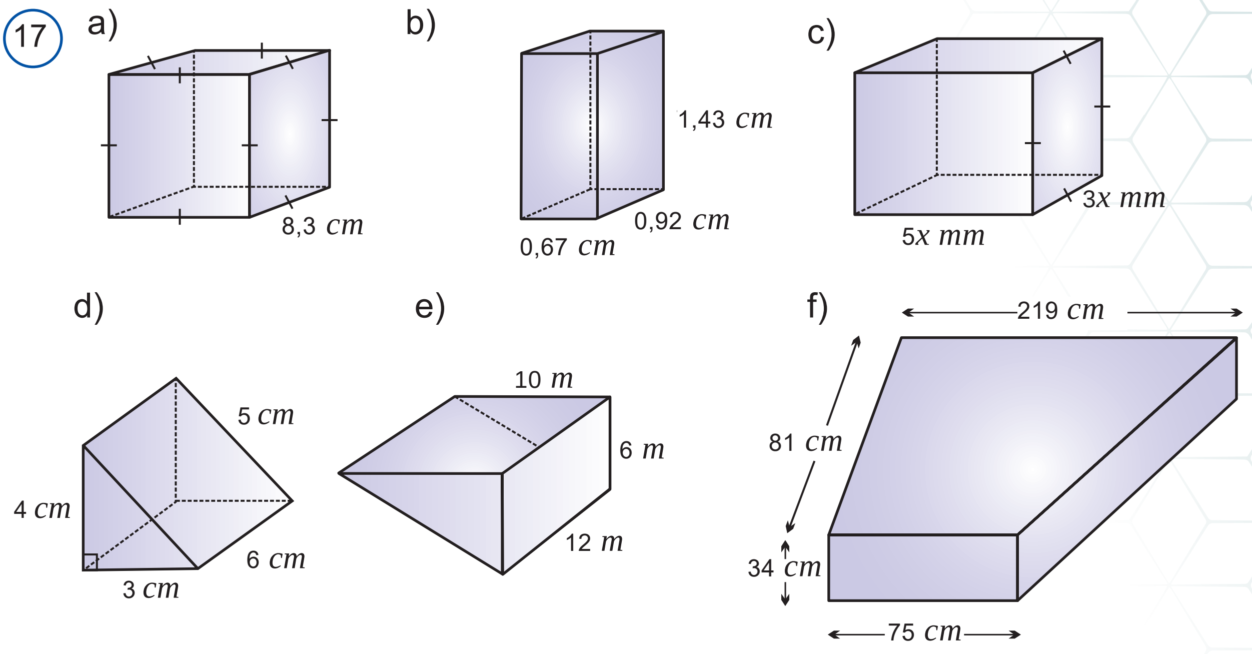
6.5. 15b-súwrettegi prizmanıń neshe tóbesi, qabırǵası hám jaǵı bar? Ultanları qanday kópmúyeshlikten ibarat? Qaptal jaqları qanday kópmúyeshlikten ibarat?

6.6. 16-súwrette $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ kópjaqlı súwretlengen. Ondaǵı:

a) CD qabırǵası ulıwma bolǵan jaqlardı;
b) DD_1 qabırǵası ulıwma bolǵan jaqlardı;
c) E tóbesi ulıwma bolǵan jaqlardı;
d) C_1 tóbesi ulıwma bolǵan jaqlardı;
e) A tóbesi ulıwma bolǵan qabırǵalardı;
f) F_1 tóbesi ulıwma bolǵan qabırǵalardı aytıń.

6.7. Prizmanıń: a) 9; b) 16 tóbesi bolıwı múmkin be?

17



6.8. Qálegen prizmanıń tóbeleri sanı jup bolıwın túsindiriń.

6.9. Prizmanıń: a) 14; b) 15 qabırǵası bolıwı múmkin be?

6.10. Qálegen prizmanıń qabırǵaları sanı 3 ke eseli bolıwın túsindiriń.

6.11. Prizmanıń: a) 10 tóbesi; b) 18 qabırǵası ; c) 8 jaǵı bar bolsa, onıń túrin anıqlań.

6.12. Qálegen n múyeshli prizmanıń: a) tóbeleri; b) qırları; c) jaqları sanın esaplaw formulasın keltirip shıǵarıń.

6.13. Piramidanıń: a) 3; b) 7 tóbesi bolıwı múmkin be?

6.14. Piramidanıń: a) 20; b) 21 qabırǵası bolıwı múmkin be?

6.15. Qálegen piramidanıń qabırǵaları sanı jup bolıwın túsindiriń.

6.16. Piramidanıń: a) 6 tóbesi; b) 22 qabırǵası; c) 10 jaǵı bar bolsa, onıń túrin anıqlań.

6.17. Prizmanıń: a) 9; b) 16 jaǵı bolıwı múmkin be?

6.18. 15 qabırǵası bar prizmanıń ultanı qanday kópmúyeshlikten ibarat?

6.19. 32 qabırǵası bar piramidanıń ultanı qanday kópmúyeshlikten ibarat?

6.20. Qálegen n múyeshli piramidanıń a) tóbeleri; b) qabırǵaları;

c) jaqları sanın esaplaw formulasın keltirip shıǵarıń.

6.21. 17-súwrettegi maǵlıwmatlardan paydalanıp kópjaqlılardıń tolıq betin tabıń.

Franciya imperatorı Napoleon Bonapart júdá ótkir hám janlı pikirge iye bolıp, geometriyada zor edi. Ol bul pándi áskeriy jumıslarda da, basqa tarawlarda da zárúrli dep esaplaǵan. Imperator hátteki geometriyaǵa tiyisli birqansha saldamlı ilimiy jumıslar da jazǵan. Onıń húrmetine geometriyalıq máselelerden biri keyinirek "Napoleon máselesi" dep atalǵan.

6.22. Tuwrı prizmanıń qaptal jaqları tuwrı tórtmúyeshlik ekenligin dálilleń.

6.23. Tuwrı prizma qaptal beti ultanınıń perimetri hám qaptal qabırǵasınıń kóbeymesine teń ekenligin dálilleń.

6.24. Tuwrı parallelepipedtiń ultanı - diagonalları 10 m hám 24 m bolǵan rombtan ibarat. Eger parallelepipedtiń qaptal qabırǵası 8 m bolsa, onıń tolıq betin tabıń.

6.25. Tuwrı múyeshli parallelepipedtiń barlıq jaqları tuwrı tórtmúyeshlik ekenligin dálilleń.

6.26. Durıs úshmúyeshli prizma ultanınıń tárepi 6 cm, qaptal qabırǵası bolsa 11 cm ge teń. Prizmanıń tolıq betin tabıń.

6.27. Durıs n múyeshli prizma ultanınıń tárepi a, qaptal qabırǵası h qa teń. Eger: a) $n = 3$, $a = 5$, $h = 10$; b) $n = 4$, $a = 10$, $h = 30$; c) $n = 6$, $a = 18$, $h = 32$; d) $n = 5$, $a = 16$, $h = 25$ bolsa, prizmanıń qaptal beti hám tolıq beti maydanın tabıń.

6.28. Durıs úshmúyeshli piramida apofeması 15 ke, piramida tóbesin ultan orayı menen tutastırıwshı kesindi uzınlıǵı 12 ge teń. Piramidanıń: a) qaptal qabırǵası hám ultanınıń tárepin; b) qaptal betin; c) tolıq beti maydanın tabıń.

6.29*. Piramida ultanı tárepleri 8 hám 10, kishi diagonalı 6 ǵa teń bolǵan parallelogramnan ibarat. Piramida tóbesin ultanı diagonalları kesilisiw noqatı menen tutastırıwshı kesindi uzınlıǵı 4 ke teń hám ol bul diagonallarǵa perpendikulyar. Piramidanıń: a) qaptal qabırǵaların; b) qaptal betin; c) tolıq betin tabıń.

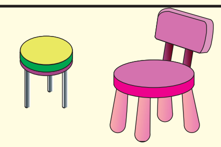
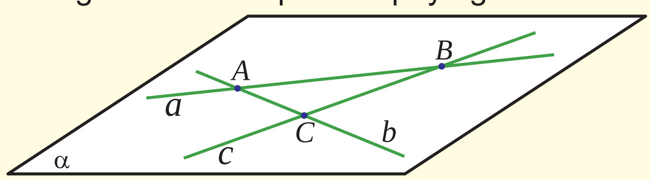
6.30*. Durıs altımúyeshli piramida ultanı tárepi 10 cm ge teń. Piramida tóbesin ultan orayı menen tutastırıwshı kesindi uzınlıǵı $\sqrt{69}$ ǵa teń. Piramidanıń: a) qaptal qabırǵası hám apofemasın; b) qaptal betin; c) tolıq betin tabıń.

6.31. Durıs altımúyeshli piramida qaptal betiniń maydanı 150 m^2 qa, qaptal qabırǵası bolsa 10 m ge teń. Piramida ultanınıń maydanın tabıń.

6.32. Tuwrı prizmanıń ultanı gipotenuzası 5 cm, kateti 4 cm bolǵan tuwrı múyeshli úshmúyeshlik bolıp tabıladı. Eger eń kishi katet jatqan jaq kvadrat bolsa, prizmanıń qaptal beti maydanın tabıń

ÓZIŃIZDI SÍNAP KÓRIŃ

1. Tómendegi gáplerdi oqıń. Gáp durıs bolsa "+", nadurıs bolsa "-" belgisin janındaǵı ketekshege qoyıń.

<table>
<tr><td>A</td><td>A, B, C, D noqatlar bir tegislikte jatpaydı. A, B, C hám B, D, A noqatlardan ótetuǵın eki tegislik DB tuwrı sızıq boyınsha kesilisedi.</td><td></td></tr>
<tr><td>B</td><td>Jerde 3 ayaqlı stul 4 ayaqlı stulǵa qaraǵanda bekkem turadı.
</td><td></td></tr>
<tr><td>C</td><td>$ABCD$ tórtmúyeshliktiń tek úsh - A, B, C qırları bir tegislikte jatadı</td><td></td></tr>
<tr><td>D</td><td>Bir tuwrı sızıqta jatpaǵan úsh noqattan tek hám tek bir tegislik ótkeriw múmkin</td><td></td></tr>
<tr><td>E</td><td>A, B, C, D noqatlar bir tegislikte jatpaydı. Ol jaǵdayda bul noqatlardıń qálegen úshewi bir tuwrı sızıqta jatpaydı</td><td></td></tr>
<tr><td>F</td><td>Eki túrli – a hám b tuwrı sızıqlar A noqatta kesilisedi. Bul tuwrı sızıqlardı kesetuǵın hám A noqattan ótpeytuǵın tuwrı sızıqlar bir tegislikte jatadı.

</td><td></td></tr>
<tr><td>G</td><td>Eki túrli – α hám β tegislikler m tuwrı sızıq boylap kesilisedi. a tuwrı sızıq α tegislikti, b tuwrı sızıq β tegislikte jatadı. a hám b tuwrı sızıqlar A noqatta kesilisedi. Onda A noqat m tuwrı sızıqta jatadı.</td><td></td></tr>
<tr><td>H</td><td>Eki túrli tegislikler tek bir ulıwma noqatqa iye bolıwı múmkin.</td><td></td></tr>
</table>

2. Keńislikte a tuwrı sızıqta jatpaytuǵın O noqattan ótetuǵın jáne bul tuwrı sızıq penen kesilispeytuǵın neshe tuwrı sızıq ótkeriw múmkin?

A) 3 B) sheksiz kóp C) heshqansha D) 1 E) 2

3. Túsirip qaldırılǵan sózdi tawıp, gápti toltırıń:

Eki parallel tegislik keńislikti ____________ bólekke ajıratadı.

A) 3 B) 4 C) 6 D) 2

4. Stol ústinde qonıp turǵan úsh shıbın túrli táreplerge qaray ushıp ketti. Qashan olar jáne bir tegislikte jaylasadı?

5. Keńislikte heshbir úshewi bir tegislikte jatpaytuǵın tórt parallel tuwrı sızıq arqalı eń kóbi menen neshe tegislik ótkeriw múmkin?

6. Keńislikte heshbir úshewi bir tegislikte jatpaytuǵın, heshbir ekewi bir tuwrı sızıqta jatpaytuǵın bir ulıwma tóbege iye bolǵan altı nur arqalı eń kóbi menen neshe tegislik ótkeriw múmkin?

7. Keńislikte heshbir tórtewi bir tegislikte jatpaytuǵın, heshbir úshewi bir tuwrı sızıqta jatpaytuǵın altı noqat arqalı eń kóbi menen neshe tegislik ótkeriw múmkin?

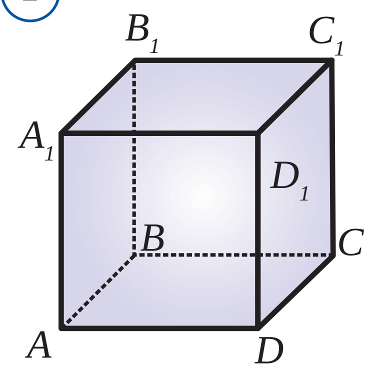
8. Prizmanıń 14 tóbesi bar bolsa, onıń túrin anıqlań.

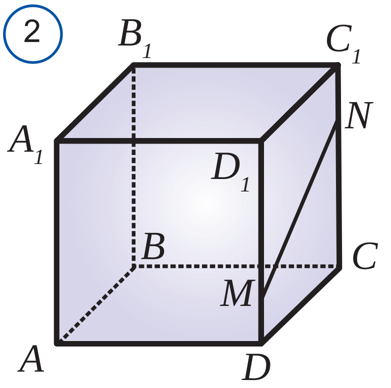
9. 27 qabırǵası bar piramidanıń ultanı qanday kópmúyeshlik?

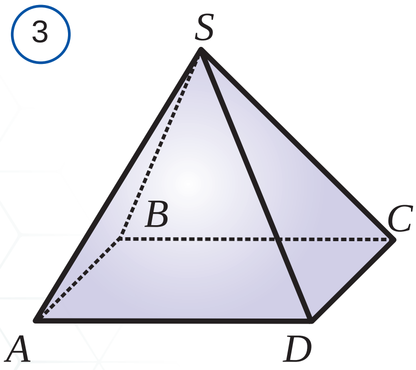
10. Durıs altımúyeshli piramida qaptal betiniń maydanı 120 m^2 qa, apofeması bolsa 10 m ge teń. Piramida ultanınıń maydanın tabıń.

Qosımsha test hám máseleler

1. Testler

1


2


3


1. Qaysı pikir nadurıs?

A) Keńisliktegi hárqanday úsh noqattan tek hám tek ǵana bir tegislik ótedi.

B) Kesilisiwshi eki tuwrı sızıq arqalı tek hám tek ǵana bir tegislik ótedi.

C) Parallel eki tuwrı sızıq arqalı tek hám tek ǵana bir tegislik ótedi.

2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – kub *(1-súwret)*. ABC hám DD_1C_1 tegislikler...

A) kesilisedi;

B) kesilispeydi;

C) ústpe-úst túsedi.

3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – kub *(2-súwret)*. MN tuwrı sızıq qaysı tegislikti kesip ótpeydi?

A) ABC

B) AA_1B_1

C) BB_1C_1

4. $SABCD$ – tórtmúyeshli piramida *(3-súwret)*. SD tuwrı sızıq qaysı tuwrı sızıqtı kesip ótpeydi?

A) BC

B) AD

C) SC

5. Eki hár túrlı tegislik …

A) ulıwma noqatqa iye emes

B) ulıwma tuwrı sızıqqa iye emes

C) bir tuwrı sızıqta jatpaytuǵın úsh ulıwma noqatqa iye emes

6. m hám k tuwrı sızıqlar arqalı birewden kóp tegislik ótkeriw múmkin. Onda m hám k tuwrı sızıqlar...

A) kesilisedi

B) parallel

C) ústpe-úst túsedi

7. Noqat a tuwrı sızıqqa tiyisli. Olar arqalı...

A) keminde bir tegislik ótkeriw múmkin

B) tek ǵana bir tegislik ótkeriw múmkin

C) birewden artıq tegislik ótkeriw múmkin

8. A, B, C hám D noqatlar bir tegislikte jatpaydı. AB hám CD tuwrı sızıqlar haqqında ne aytıw múmkin?

A) kesilisedi

B) parallel

C) ayqısh

9. Tuwrı sızıqlar haqqında qaysı pikir durıs *(2-súwret)*?

A) BC hám MN kesilisedi.

B) BC hám MN ayqısh.

C) MN hám DC kesilispeydi.

10. Eki sızıqtıń óz ara parallelligin tastıyıqlaw ushın neni anıqlaw jetkilikli?

A) olardıń kesilispeytuǵınlıǵın;

B) olardıń qanday da tuwrı sızıqqa perpendikulyarlıǵın;

C) olardıń kesilispeytuǵınlıǵın hám bir tegislikte jatpaytuǵınlıǵın.

11. Qaysı pikir nadurıs?

A) $a \,//\, b,\ \ b \,//\, c \rightarrow a \,//\, c$

B) $a \,//\, b,\ \ c \mathbin{\dot{-}} a \rightarrow c \mathbin{\dot{-}} b$

C) $a \mathbin{\dot{-}} b,\ \ b \mathbin{\dot{-}} c \rightarrow a \,//\, c$

12. F noqat $ABCD$ parallelogramm tegisliginde jatpaydı. K noqat DF kesindiniń, N noqat bolsa BF kesindiniń ortası. Onda AK hám CN tuwrı sızıqlar...

A) ayqısh

B) kesilisedi

C) parallel

13. a tuwrı sızıq α tegislikke parallel. Tómendegi pikirlerdiń qaysı biri nadurıs?

A) a tuwrı sızıq α tegislikte jatqan hárqanday tuwrı sızıqqa parallel.

B) a tuwrı sızıq α tegislikte jatqan heshqaysı tuwrı sızıqtı kesip ótpeydi.

C) α tegislikte jatıwshı hám a tuwrı sızıqqa parallel tuwrı sızıq bar.

14. Qaysı pikir nadurıs?

A) Eger tegislik basqa tegislikke parallel bolǵan tuwrı sızıqtan ótip, bul tegislikti kesip ótse, onda tegisliklerdiń kesilisiw sızıǵı berilgen sızıqqa parallel boladı.

B) Eger tuwrı sızıq kesilisiwshi eki tegislikke parallel bolsa, onda olardıń kesilisiw sızıǵına parallel boladı.

C) Bir tegislikke parallel bolǵan tuwrı sızıqlar parallel.

15. $ABCD$ trapeciyanıń MN orta sızıǵı α tegislikte jatadı. Trapeciyanıń A tóbesi bul tegislikke tiyisli emes. Onda BC tuwrı sızıq...

A) α tegislikte jatadı

B) α tegislikti kesip ótedi

C) α tegislikke parallel

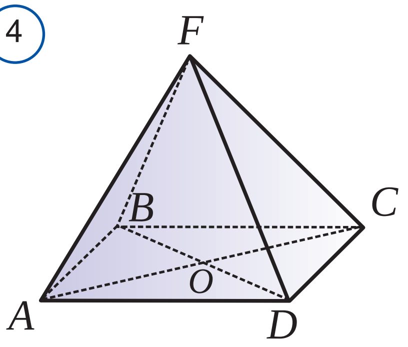
16. M noqat a tuwrı sızıqta jatpaydı. Bul jaǵdayda qaysı pikir nadurıs?

A) M noqat arqalı a tuwrı sızıqtı kesip ótpeytuǵın tek bir tuwrı sızıq ótkeriw múmkin.

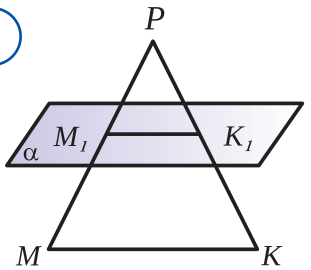
B) M noqat arqalı a tuwrı sızıqqa parallel tek bir tuwrı sızıq ótkeriw múmkin.

C) M noqat arqalı a tuwrı sızıqtı kesip ótpeytuǵın sheksiz kóp tuwrı sızıq ótkeriw múmkin.

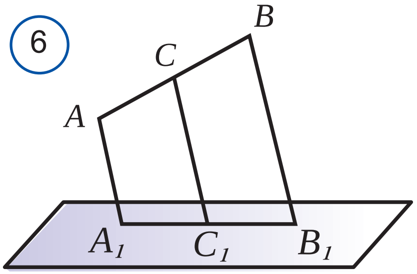
4



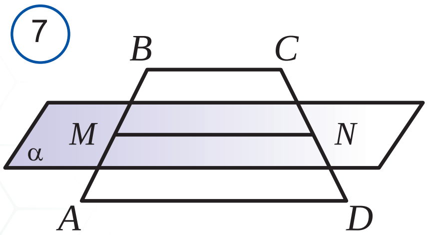
5



6



7



17. *a* tuwrı sızıq α tegislikke parallel, *b* tuwrı sızıq ta β tegislikke parallel. *a* hám *b* tuwrı sızıqlar haqqında ne aytıw múmkin?

A) parallel

B) kesilisedi

C) ayqısh

18. *a* tuwrı sızıq boylap eki tegislik kesilisedi. *a* hám *b* tuwrı sızıqlar ayqısh hám *a*, *c* tuwrı sızıqlar parallel. *b* hám *c* tuwrı sızıqlar haqqında ne aytıw múmkin?

A) bul tegisliklerdiń birinde jatadı;

B) berilgen túrli tegisliklerde jatadı;

C) bul tegislikler menen kesilisedi (juwap unamlı bolsa, *a* hám *b* tuwrı sızıqlar óz ara jaylasıwın kórsetiń).

2. Máseleler

1. *A*, *B* hám *C* noqatlar bir tuwrı sızıqta jatadı, *D* noqat bolsa onda jatpaydı. Hár úsh noqattan ótkerilgen tegislikler sanı neshew?

2. α hám β tegislikler *m* tuwrı sızıq boylap kesilisedi. *A* noqat α tegislikte, *B* noqat β tegislikte jatadı. Qaysı jaǵdayda *AB* tuwrı sızıǵı β tegislikte jatadı?

3. Bes tegislik sızılǵan. Olardıń hár ekewi kesilisedi. Jup-jup kesilisetuǵın tegisliklerdiń kesilisiw sızıqlarınıń eń kóp sanı neshege teń?

4. *ABCD* – parallelogramm *(4-súwret)*. $F \notin ABC$. *AFC* hám *BFD* tegislikler qaysı tuwrı sızıq boylap kesilisedi?

5. *MKP* úshmúyeshlik berilgen *(5-súwret)*. *MK* tuwrı sızıqqa parallel tegislik *MP* tárepti M_1 noqatta, *PK* tárepti K_1 noqatta kesip ótedi. $MK = 18$ *cm*, $MP : M_1P = 12 : 5$. M_1K_1 kesindiniń uzınlıǵın tabıń.

6. *AB* kesindi α tegislik penen kesilispeydi *(6-súwret)*. Kesindiniń tóbeleri jáne onıń ortası *C* noqat arqalı parallel tuwrı sızıqlar ótkerilgen. Bul tuwrı sızıqlar α tegislikti sáykes túrde A_1, B_1 hám C_1 noqatlarında kesip ótedi. $AA_1 = 6$ *cm*, $CC_1 = 9$ *cm*. BB_1 kesindiniń uzınlıǵın tabıń.

7. *ABCD* trapeciya ultanlarına parallel bolǵan tegislik *AD* hám *CD* táreplerin sáykes túrde *M* hám *N* noqatlarda kesip ótedi *(7-súwret)*.

1) $CN = ND$. $AD = 6$ *cm*, $BC = 4$ *cm*. *MN* kesindiniń uzınlıǵın tabıń.

2) α tegislikte jatqan hám BC tuwrı sızıqqa parallel bolǵan hárqanday tuwrı sızıq AD tuwrı sızıqqa parallel ekenligin dálilleń.

3) M hám N noqatlar qaptal tápeplerdiń ortaları. BC = 8, MN = 12 bolsa, AD nı tabıń.

8. $ABCD$ piramidada M, H hám P noqatlar sáykes túrde AD, DC hám AB qırlarınıń ortası *(8-súwret)*. $KH \parallel ABD$. $AC = 8$ *cm*, $BD = 10$ *cm*. $MHKP$ tórtmúyeshliktiń perimetrin tabıń.

9. Eki túrli tegisliktiń bir tuwrı sızıqta jatpaytuǵın úsh ulıwma noqatı bolıwı múmkin be?

10. a tuwrı sızıq α tegislikte jatadı. β tegislik α tegislikti b tuwrı sızıq boylap kesip ótedi. A tuwrı sızıq bolsa β tegislikti B noqatta kesip ótedi. B noqat qay jerde jatadı?

11. Bir tegislikte jatpaytuǵın a, b hám c tuwrı sızıqlar bir noqattan ótedi. Bul sızıqlar jubı arqalı neshe hár túrli tegisliklerdi ótkeriw múmkin?

12. A, B noqatlar hám CD tuwrı sızıq bir tegislikte jatpaydı. CD hám AB tuwrı sızıqlar óz ara qanday jaylasqan?

13. Kvadrattıń eki qońsılas tóbesi hám diagonallarınıń kesilisiw noqatı α tegislikte jatadı. Kvadrattıń qalǵan eki tóbesi de sol tegislikte jatıwın dálilleń.

14. a hám b tuwrı sızıqlar ayqısh. c tuwrı sızıq b tuwrı sızıqqa parallel. a hám c tuwrı sızıqlar kesilisiwi múmkin be?

15. M noqat $ABCD$ parallelogramm tegisliginiń sırtında jaylasqan.

1) MAD hám MBC úshmúyeshliklerdiń orta sızıqları parallel ekenligin dálilleń.

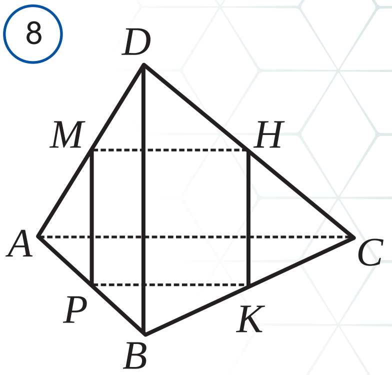
2) $ABCD$ parallelogramnıń ultanı 5 ke teń. Biyikligi bolsa 4 ke teń hám ol túsirilgen tárepti ekige bóledi. MAD hám MBC úshmúyeshliklerdiń orta sızıqların tabıń.

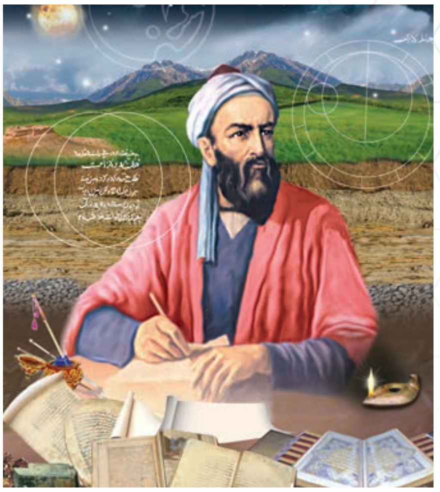
16. α tegislik ABC úshmúyeshliktiń AB hám BC tápeplerin sáykes túrde M hám N noqatlarda kesip ótedi. $BN : NC = 5 : 8$ hám $MB : AB = 5 : 13$.

1) $AC \parallel \alpha$ ekenligin dálilleń.

2) AC = 26 bolsa, MN di tabıń.

8





Abu Rayhon Beruniy – dúnya páni tariyxında óshpes iz qaldırǵan ullı enciklopedist alımlardan biri. Onıń shıǵarmalarında geometriyanıń barlıq tarawları (planimetriya, stereometriya hám qatnaslar teoriyası)na baylanıslı qımbatlı maǵıwmatlar óz sáwleleniwin tapqan. Máselen, "Juldıztanıw óneri negizlerin túsindiriw kitabı"nıń geometriya bóliminde tiykarǵı geometriyalıq figuralar, olardıń anıqlamaları hám qásiyetleri, tegisliktegi figuralardıń maydanların esaplaw jolları hám keńisliktegi denelerdiń tolıq betin hám kólemin tabıwǵa baylanıslı qaǵıydaları tolıq bayan etilgen. Abu Rayhon Beruniydiń bul shıǵarmasın shıǵıs mámleketlerinde uzaq waqıt matematikadan sabaqlıq sıpatında qollanıp kelgen.

“GeoGebra”nı qollanıp

“GeoGebra” – matematikadan “janlı” sızılmalar bağdarlaması

GeoGebra – geometriya, algebra hám basqa pánler boyınsha bilimlendiriwdiń túrli dárejelerinde paydalanıw ushın dinamikalıq (“janlı”) sızılmalar jaratıw múmkinshiligin beretuǵın biypul baǵdarlama esaplanadı. Ol geometriyalıq figuralar, algebralıq ańlatpalar, kesteler, grafikler hám statistika menen islew ushın keń múmkinshiliklerdi usınıs etedi.

Bul baǵdarlamalıq támiynat 2002-jılda Avstriyalıq matematikalıq Markus Hohenvarter tárepinen jaratılǵan bolıp, házirgi kúnde onnan millionlap adamlar paydalanıp atır.

GeoGebra baǵdarlamasınıń abzallıqları:

• biypul;

• kóp tilli interfeyske iye;

• grafikalıq interfeysi ápiwayı hám paydalanıwǵa qolaylı;

• hár qıylı operatcion sistemalarǵa (hátteki planshet hám smartfonlarǵa) ornatıw múmkinshiligi hám onlayn versiyanıń bar ekenligi;

• paydalanıwshılar tárepinen materiallardı qosıw ushın ashıq baza bar ekenligi.

“GeoGebra” baǵdarlamasınıń bólimleri wazıypaları

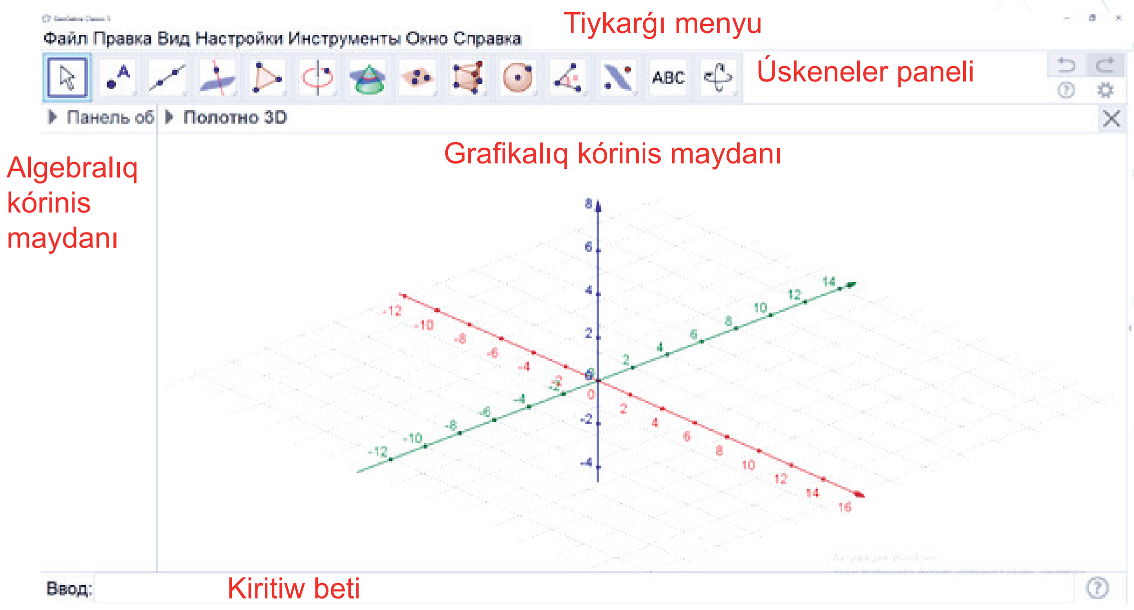
	Kalkulyatorlar toplamı Funkciyalardı tekseriw, teńlemelerdi sheshiw, geometriyalıq figuralar hám 3D obyektlerdi qurıw		**Geometriya** Túrli geometriyalıq figuralardı sızıw hám olardıń formaların almastırıw
	3D kalkulyator Túrli sızılmalar, 3D (úsh ólshemli) geometriyalıq figuralar hám obyektlerdi sızıw	x=	**CAS kalkulyator** Túrli teńlemelerdi sheshiw, algebralıq ańlatpalar formasın almastırıw, tuwındı hám integrallardı esaplaw
	Grafikalıq kalkulyator Túrli funkciyalar grafiklerin qurıw, teńlemelerdi izertlew hám maǵlıwmatlardı súwretlew		**Klassikalıq GeoGebra** Geometriya, belgilerin súwretlew, itimallıqlar hám túrli shamalardı esaplaw

Ámeliy tapsırma

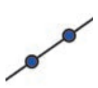
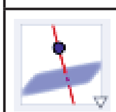
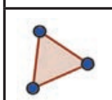
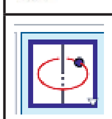
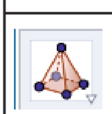
1. GeoGebra rásmiy vebsaytı (http://www.geogebra.org/) nan GeoGebra haqqında tolıq maǵlıwmat alıń jáne onı kompyuter, planshet yamasa smartfonıńızǵa bul vebsayttan júklep alıń.
2. Youtube kanalında (https://www.youtube.com/GeoGebraChannel) GeoGebranı úyreniw ushın videosabaqlar hám onnan paydalanıwǵa tiyisli mısallardı kózden ótkeriń.
3. 3D kalkulyatorda jaratılǵan ápiwayı jumıslardı úyreniwge háreket etiń.

“GeoGebra” 3D kalkulyatorı interfeysiniń kórinisi

“GeoGebra” baǵdarlamalı “3D kalkulyator” rejimine ótkerilgennen keyin tómendegi kórinistegi ayna payda boladı:



3D kalkulyatorı panelindegi tiykarǵı úskenelerdiń wazıypaları

	**Перемещать** (Jıljıtıw) – túrli obyektler (noqat, tuwrı sızıq, kópmúyeshlik hám basqalar) di jıljıtıw. Bir waqıttıń ózinde bir neshe obyektlerdi tańlaw ushın Ctrl túymesin basqan halda tıshqansha menen izbe-iz belgilew kerek.
	**Точка** (Noqat) – tegislikte noqat jasaw. Noqat jasaw ushın tegisliktegi orındı belgilew kerek.
	**Прямая** (Tuwrı sızıq) – tegislikte berilgen eki noqat arqalı tuwrı sızıq jasaw. Sızılmada ámeldegi noqatlardı tańlawıńız yamasa tıshqansha járdeminde noqatlar ornın belgilewińiz múmkin.
	**Перпендикулярная линия** (Perpendikulyar tuwrı sızıq) – berilgen noqat arqalı tuwrı sızıqqa perpendikulyar ótkeriw. Perpendikulyar ótkeriw ushın tegislikte perpendikulyar jasalatuǵın sızıqtı hám sızıq ótetuǵın noqattı kórsetiw kerek.
	**Многоугольник** (Kópmúyeshlik) – tegislikte qálegen túrdegi kópmúyeshlikti jasaw
	**Окружность по точке и оси** (Kósher hám noqatı boyınsha sheńber) – berilgen kósher hám noqatı boyınsha arnawlı bir radiuslı sheńber jasaw.
	**Плоскость через три точки** (Úsh noqat arqalı tegislik) – berilgen úsh noqat arqalı tegislik ótkeriw. Sonıń menen birge, parallel hám perpendikulyar tegislikler de ótkeriw múmkin.
	**Пирамида** (Piramida) – berilgen noqatları arqalı piramida, prizma, konus, cilindr hám kub sıyaqlı keńisliktegi denelerdi jasaw.
	**Сфера по центру и точке** (orayı hám noqatı boyınsha sfera) – orayı hám sırtındaǵı berilgen noqat arqalı sfera jasaw.

7 KÓPJAQLÍLARDÍ SÚWRETLEW HÁM MODELIN JASAW

Kópjaqlılardı tegislikte súwretlew

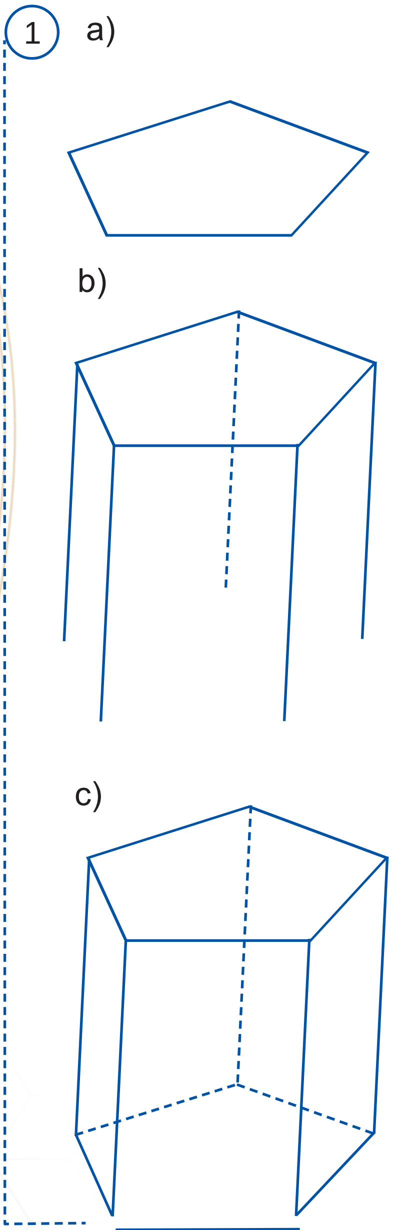
Geometriyalıq máselelerdi sheshiwde másele shártine sáykes sızılmanı sızıw júdá zárúrli esaplanadı. Geyde durıs sızılǵan sızılma máseleniń “yarım sheshimi” menen teńlestiriledi. Stereometriyada máseleniń sızılmasın durıs sızıw júdá zárúrli, oǵada juwapkerli hám geyde bolsa quramalı jumıs esaplanadı. Sebebi stereometriyalıq figuralar úsh ólshemli bolıp, olardı tegislikte, dápter betinde súwretlew kerek boladı. Nadurıs sızılǵan sızılma nadurıs sheshimge yamasa sheship bolmaytuǵın jolǵa baslaydı.

Prizmanı súwretlew tómendegi tártipte alıp barıladı *(1-súwret)*. Aldın kópmúyeshlik formasındaǵı ultanlarınan biri sızıladı. Keyin onıń hárbir tóbesinen óz ara parallel hám teń kesindiler, yaǵnıy prizmanıń jasawshıları sızıladı. Kesindiniń aqırları sáykes túrde tutastırılıp shıǵıladı. Bunda ekinshi ultan payda boladı. Sızılmada prizmanıń kórinbeytuǵın qırları úzik sızıqlar menen sızıladı.

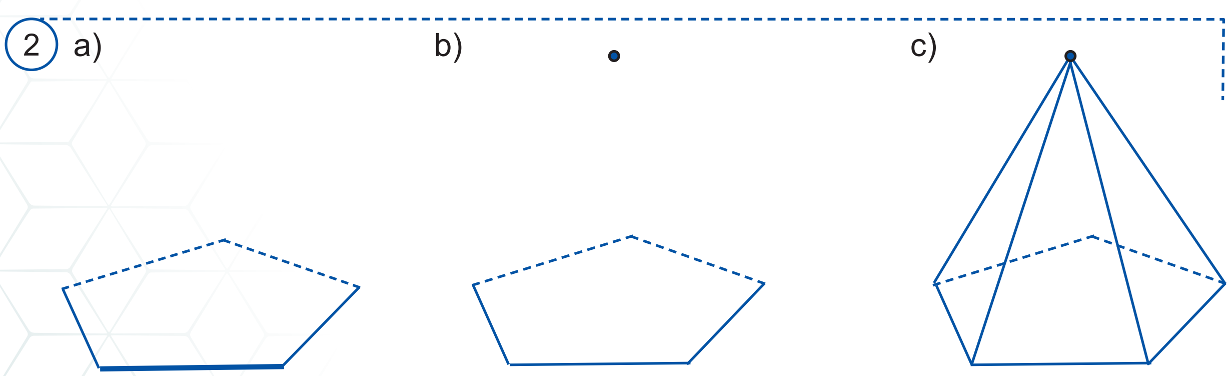
Piramidanı súwretlew de soǵan uqsas tártipte alıp barıladı *(2-súwret)*. Aldın kópmúyeshlik formasındaǵı ultanı sızıladı. Keyin piramida tóbesi belgilenip, bul noqat tiykarınıń hárbir tóbesi menen tutastırıp shıǵıladı.

Sızılmada piramidanıń kórinbeytuǵın qırları úzik sızıqlar menen sızıladı.

1



2

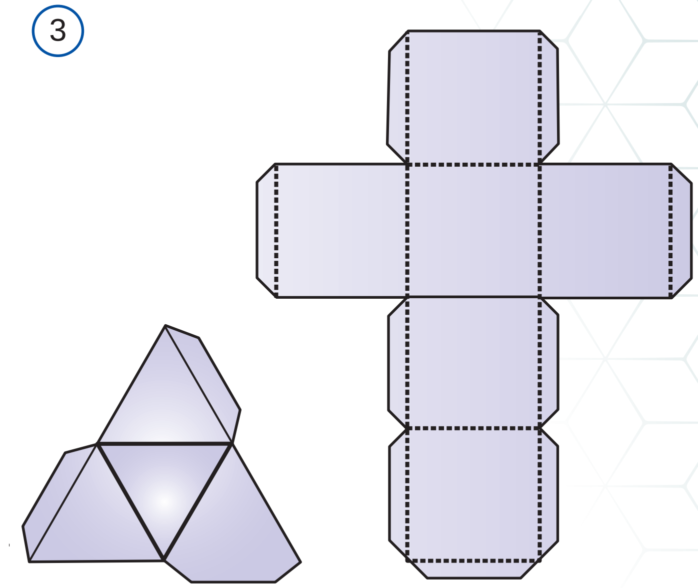


Keńisliktegi figuralardıń modellerin jasaw

Kópjaqlını bazı qırları boylap qırqıp, tegislikke jayǵanda, kópjaqlınıń barlıq jaqları sol tegislikte jatsa, bul tegis figura kópjaqlınıń jayılması dep ataladı. 3-súwrette kub hám úshmúyeshli piramidanıń jayılması súwretlengen.

Kópjaqlı maketin jasaw ushın aldın onıń jayılmasın qalıń qaǵazǵa sızıp, keyin qayshı menen qırqıp, tiyisli qırların jelimlep payda etiw múmkin. Jelimlew qolaylı bolıwı ushın jelimlenetuǵın qırlardı belgili qalıńlıqta jiyekler tastap sızıladı hám qırqıladı.

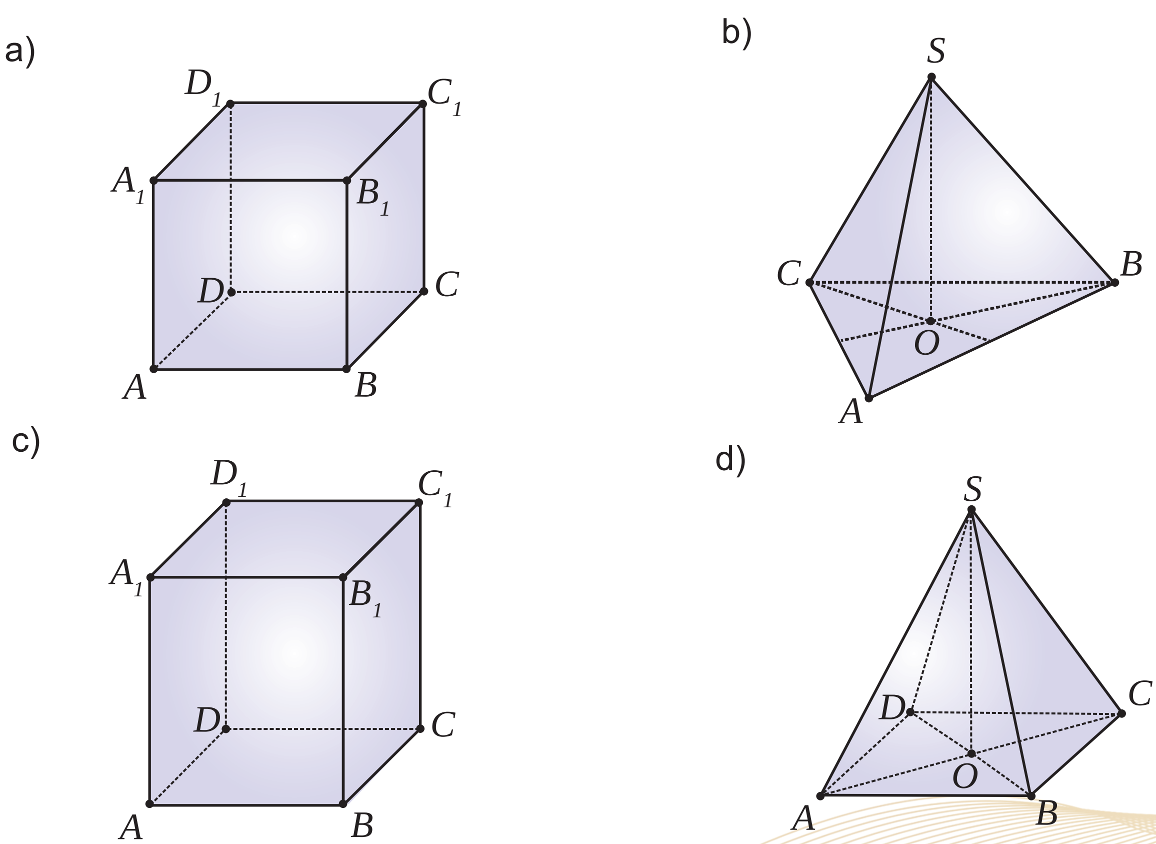
3



Ámeliy shınıǵıw hám qollanıw

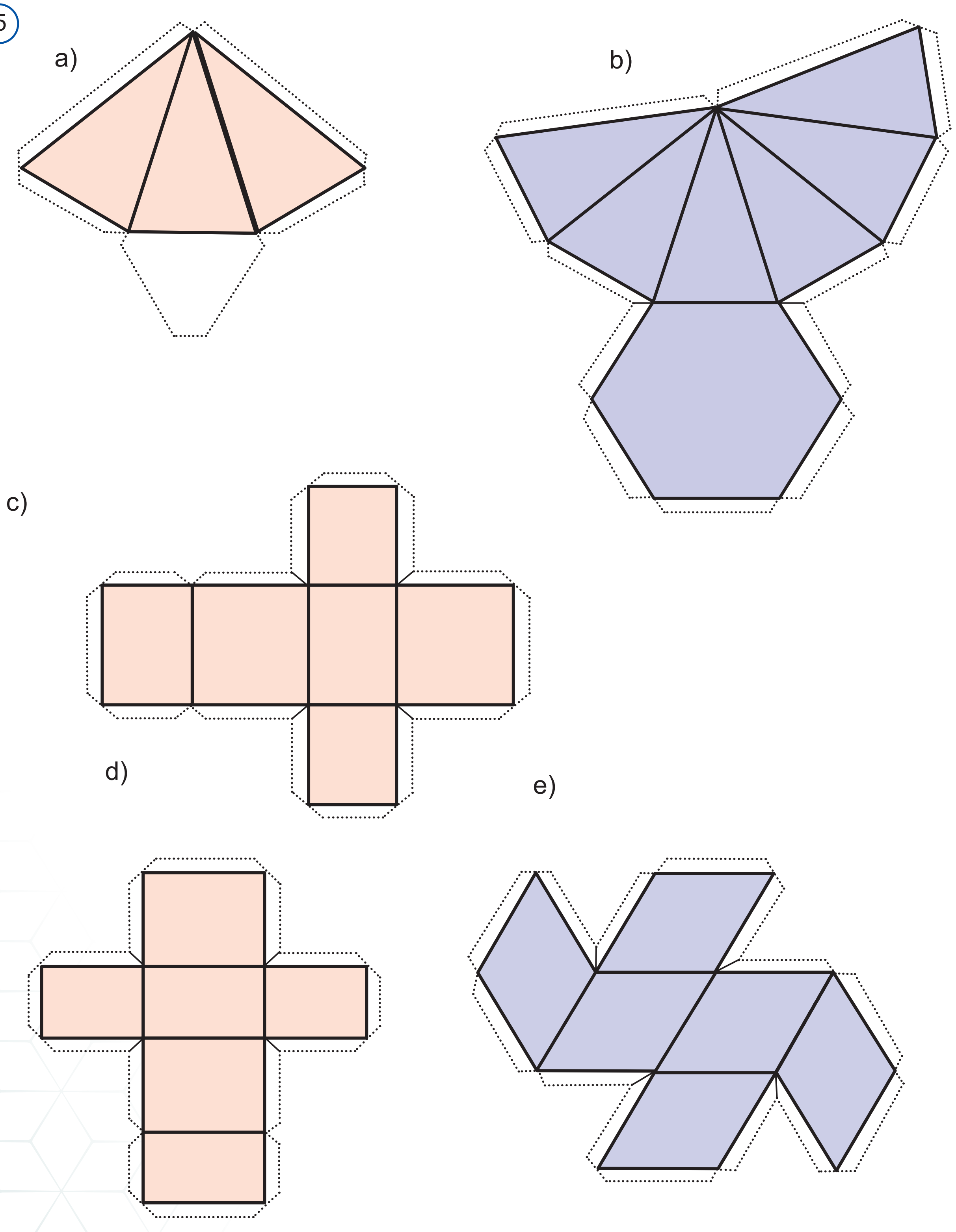
7.1. 4-súwrette keltirilgen keńisliktegi figuralardı dápter ketekshelerinen paydalanıp sızıń hám túrin aytıń. Úzik sızıqlardıń isletiliwine itibar beriń.

4



7.2. Keńisliktegi denelerdi jaqsılap kóz aldımızǵa keltiriw ushın olardıń modelinen paydalanǵan maqul. Keńisliktegi denelerdiń modelin olardıń jayılmasınan paydalanıp jasaw múmkin *(5-súwret)*. Kórip turǵanımız sıyaqlı, keńisliktegi denelerdiń jayılması tegis geometriyalıq figuralardan ibarat. Tómendegi jayılmalardan paydalanıp tuwrı múyeshli parallelepiped, kub hám piramidalar modelin jasań.

5



7.3. Tuwrı múyeshli parallelepiped hám durıs tórtmúyeshli piramida jayılmasın sızıń.

7.4. 6-súwrettegi jayılmalardıń qaysıları kubtıń jayılması boladı?

7.5. 7-súwrettegi jayılmalardıń qaysıları prizmalardıń jayılması boladı? Prizmalardıń túrin anıqlań.

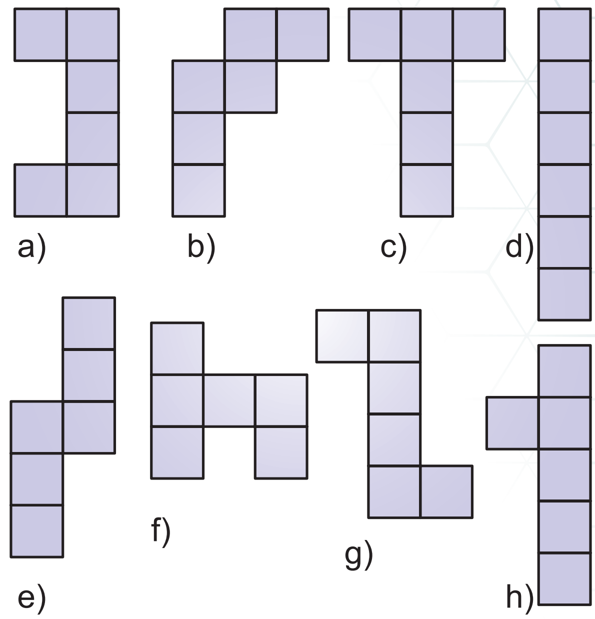
7.6. 8-súwrettegi jayılmalardıń qaysıları piramidalardıń jayılması boladı? Piramidalardıń túrin anıqlań.

7.7. Úsh túrli reń menen kubtı onıń qońsılas jaqları hár túrli reńde boyalatuǵın etip boyaw múmkin be? Kub modelin jasań hám sáykes reńge boyań.

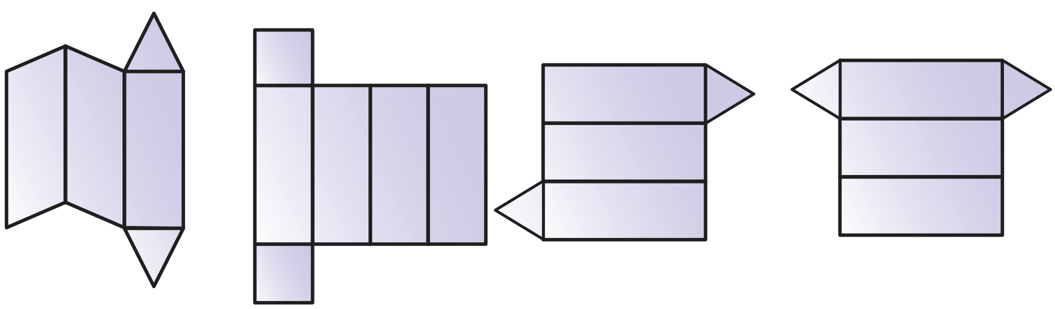
7.8. 9 shırpı shóbinen 7 teń úshmúyeshlik jasań.

7.9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kubtıń sırtında A tóbesinen C_1 tóbege baratuǵın eń qısqa joldı tabıń.

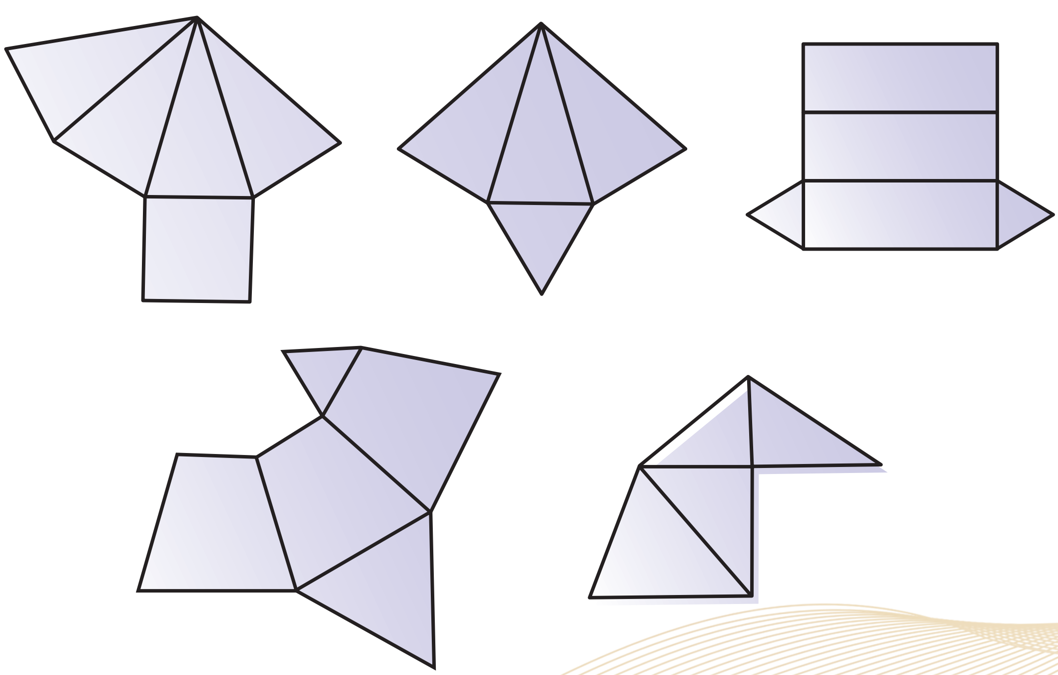
6

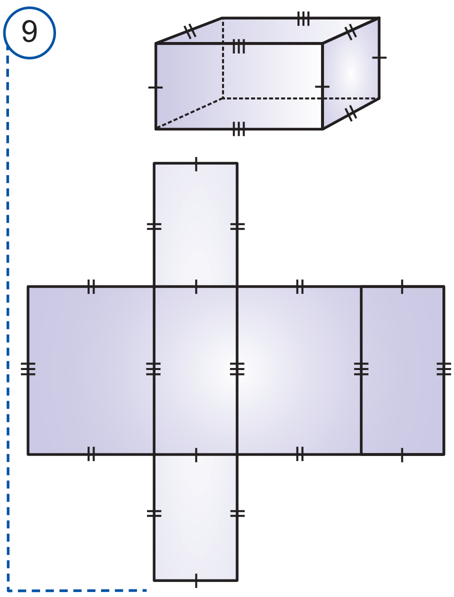


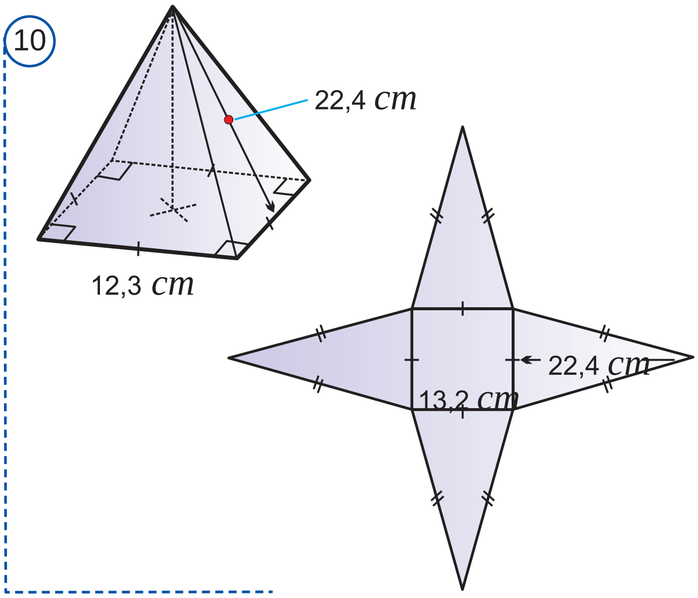
7



8







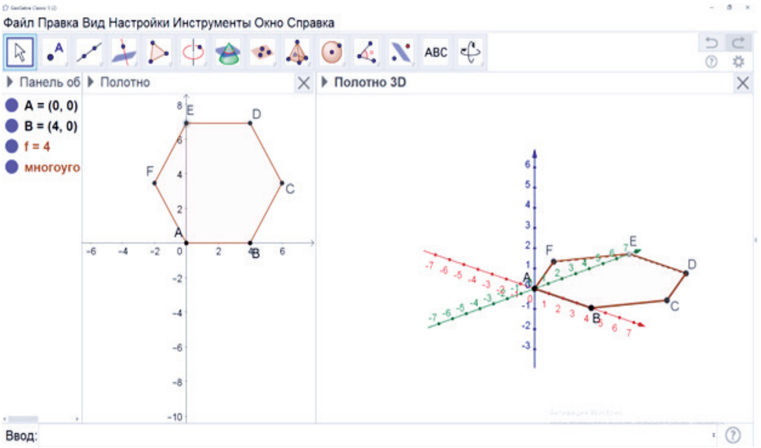
7.10. 9-súwrette súwretlengen tuwrı múyeshli parallelepiped jayılması boyınsha onıń tolıq beti maydanın esaplaw formulasın tabıń.

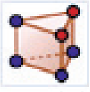
7.11. 10-súwrette súwretlengen tórtmúyeshli durıs piramida jayılması boyınsha onıń tolıq beti maydanın esaplaw formulasın tabıń hám berilgen maǵlıwmatlar boyınsha esaplań.

"GeoGebra"nı qollanıp

Durıs altımúyeshli prizma jáne onıń jayılmasın jasaw

1. Prizma jasaw ushın dáslep durıs altımúyeshlik (prizma ultanı) jasaladı. Bunıń ushın "**Вид**" menyusınan "**Полотно**" buyrıǵı saylanadı. Nátiyjede eki bólek jumısshı ayna payda boladı. Shep táreptegi jumısshı aynada "**Правильный многоугольник**" úskenesi járdeminde durıs altımúyeshlik jasaladı. Bunıń ushın kópmúyeshlik bir tárepiniń uzınlıǵı hám tárepleri sanın kiritiw jetkilikli.
2. Nátiyjede jumısshı aynanıń oń tárepinde durıs altımúyeshlik súwreti payda boladı.

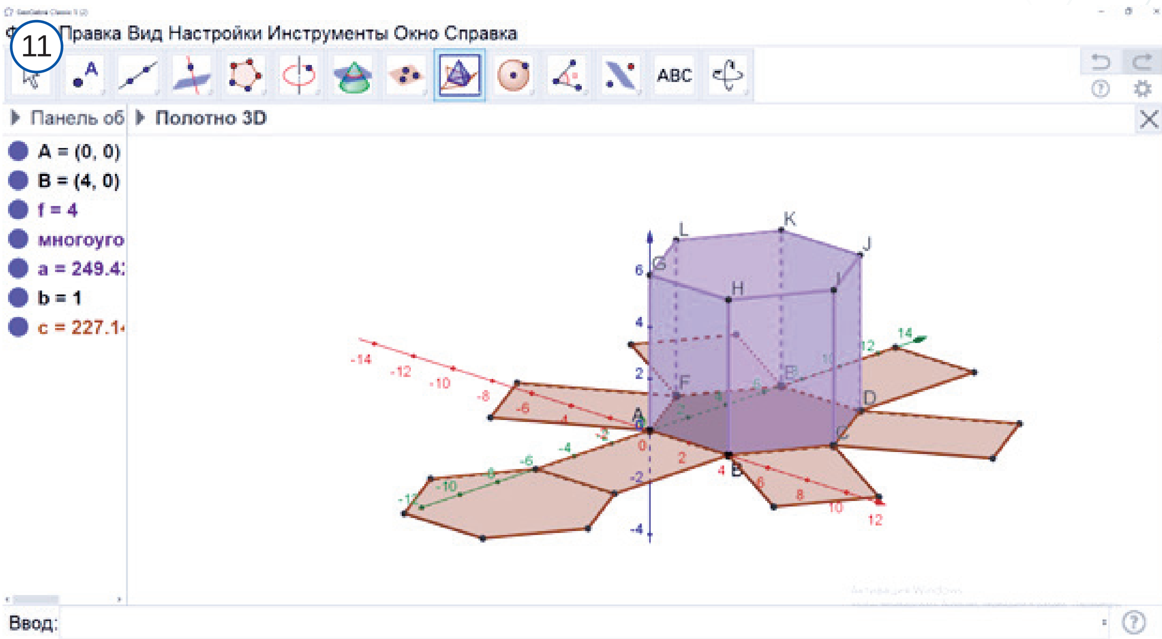


3. Shep ayna jabıladı.
4.  – "**Призма**" úskenesinen paydalanıp, tıshqanshanıń shep túymesi sızılǵan durıs altımúyeshlik noqatları ústinde izbe-iz basıladı. Keyninen koordinata kósheriniń kerekli ornına basıw arqalı durıs altımúyeshli prizma payda etiledi.

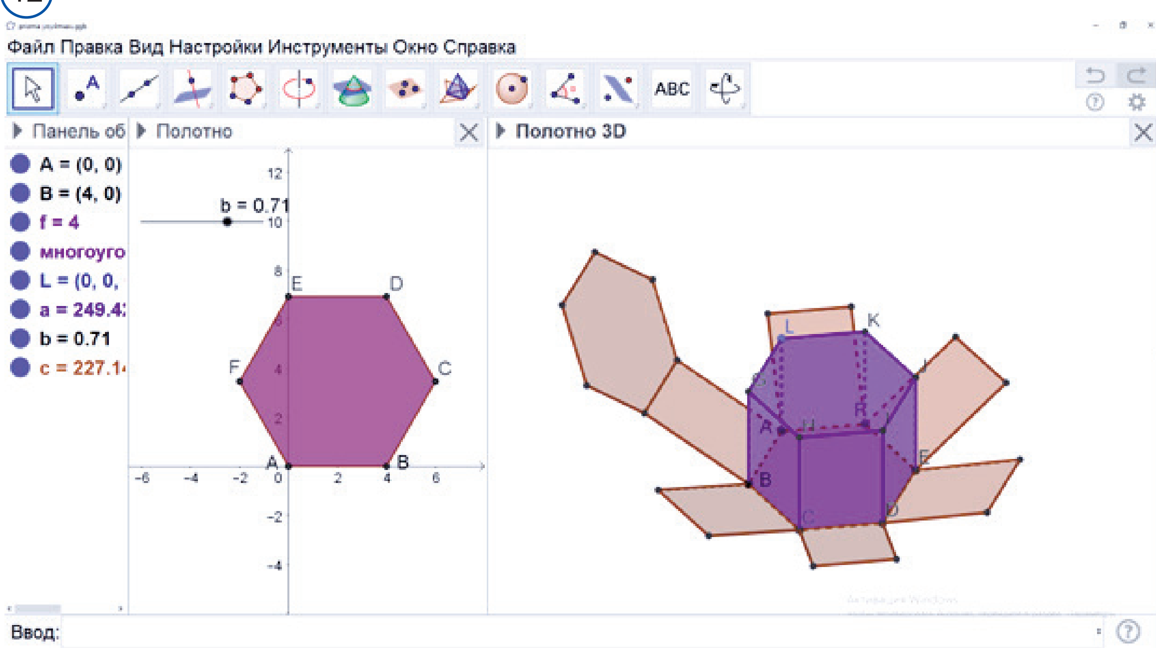
5.  – “**Развёртка**” úskenesi aktivlestiriledi hám prizma ústinde tıshqanshanıń shep túymesi basıladı. Nátiyjede durıs altımúyeshli prizma jayılması payda boladı *(11-súwret)*.

6. “**Вид**” menyusınan “**Полотно**” buyrıǵı saylanadı. Shep aynadaǵı “**Ползунок**” (súrgish) túymesi járdeminde sızılma jayılması háreketke keltiriledi *(12-súwret)*.

11



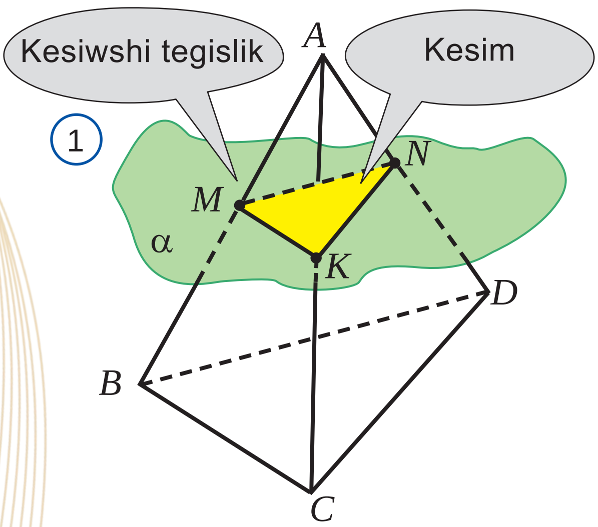
12



Óz betinshe orınlaw ushın tapsırmalar

1. Durıs altımúyeshli piramida jáne onıń “janlı” jayılmasın jasań.
2. Durıs úshmúyeshli prizma hám onıń “janlı” jayılmasın jasań.

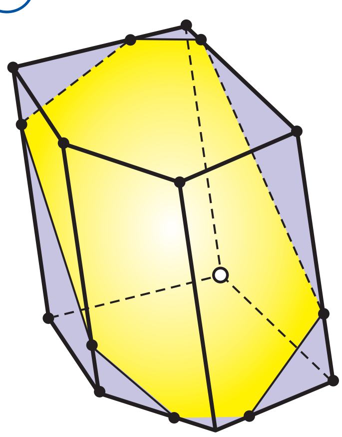
8 KÓPJAQLÍLARDÍŃ ÁPIWAYÍ KESIMLERIN JASAW



1

Keńisliktegi geometriyalıq figuralardıń óz ara jaylasıwın durıs kóz aldımızǵa keltirgende ǵana, onıń sızılmasın durıs sızıw múmkin. Keńisliktegi figuralardıń biri kópjaqlı, ekinshisi bolsa tegislik bolǵanda túrli kesimlerdi súwretlewge tuwrı keledi. Tómende kópjaqlılardıń kesimlerin jasaw menen shuǵıllanamız.

Aytayıq, kópjaqlını qanday da bir tegislik kesip ótken bolsın. *Kópjaqlınıń kesimi* dep kópjaqlını kesetuǵın tegislikke tiyisli noqatlarınan ibarat geometriyalıq figuraǵa aytıladı. Kesetuǵın tegislik kópjaqlı betin kesindiler boyınsha kesip ótedi. Sol sebepli kesindi kesetuǵın tegislikte jatıwshı kópmúyeshlikten ibarat boladı. 2-súwrette besmúyeshli prizmanıń jetimúyeshten ibarat kesimi súwretlengen. 3-súwrettegi ramkanı tegislik penen keskende onıń payda bolǵan kesimi eki tórtmúyeshlikten ibarat.

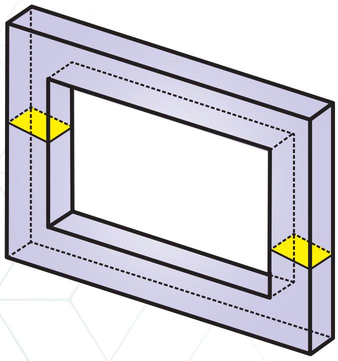


2

Kópjaqlınıń kesimin súwretlew ushın onıń jaqlarınıń kesetuǵın tegislik penen ulıwma noqatların anıqlaw jetkilikli.

Kesimniń tárepleri sanı kópjaqlınıń jaqları sanınan úlken bola almaydı.

Mısalı, besmúyeshli prizmanıń kesimleri: úshmúyeshlik, tórtmúyeshlik, besmúyeshlik, altımúyeshlik hám jetimúyeshlik bolıwı múmkin *(4-súwret)*. Biraq segizmúyeshlik bola almaydı. Nege?



3

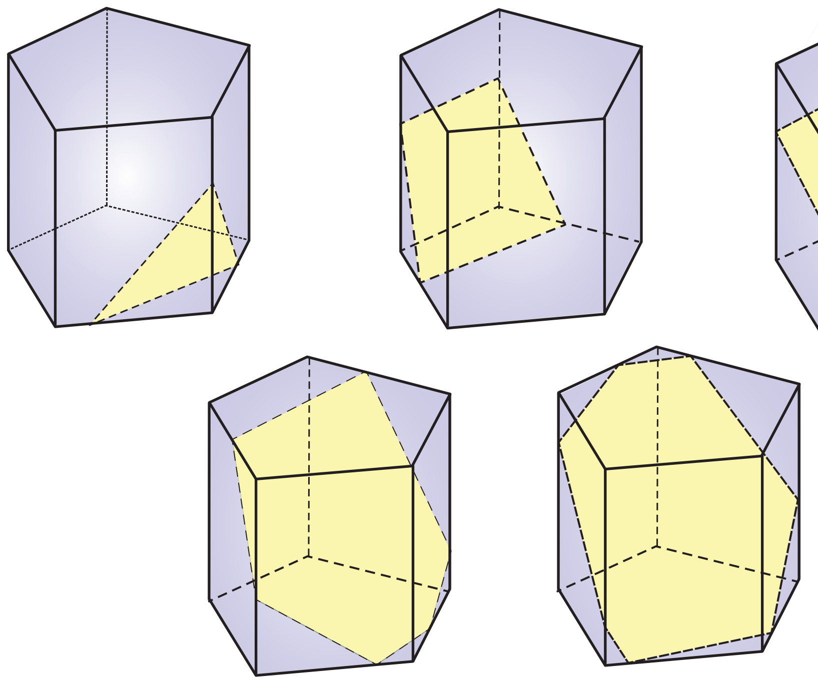
1-máselе. $QABC$ úshmúyeshli piramidanıń AB, AQ hám CQ qırların sáykes túrde K, L hám M noqatlarda kesip ótiwshi α tegislik penen keskende payda bolǵan kesimdi jasaymız (5-súwret).

Jasaw. Kesetuǵın α tegislik piramidanıń AQB jaǵı menen eki – K hám L ulıwma noqatlarǵa iye. Onda kesetuǵın tegislik bul jaqtı KL kesindi boyınsha kesip ótedi.

Tap soǵan uqsas α tegislik piramidanıń AQC jaǵı menen eki – M hám L ulıwma noqatlarǵa iye bolǵanı ushın bul jaqtı ML kesindi boyınsha kesip ótedi.

Kesetuǵın α tegislik piramidanıń ABC jaǵı menen bir K ulıwma noqatqa iye. Bul tegisliktiń BC qabırǵasın kesip ótetuǵın noqatın tabamız.

4



Bul tegislikke tiyisli LM hám AC tuwrı sızıqlardı dawam ettirip, olardıń kesilisiw noqatı – X ti tabamız. X noqat AQC hám ABC tegisliklerde jatadı.

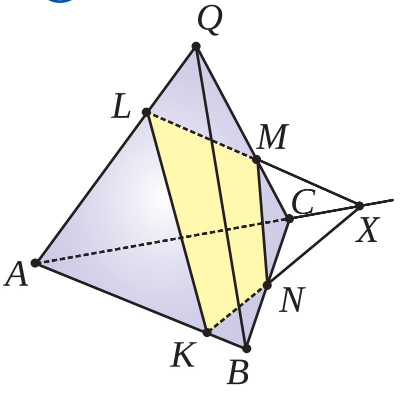
Kesiwshi α tegislik piramidanıń ABC jaǵı menen eki – K hám X ulıwma noqatlarǵa iye. Ol jaǵdayda kesiwshi tegislik bul jaqtı KX kesindi boyınsha kesip ótedi.

KX tuwrı sızıq hám BC qırdıń kesilisiw noqatı N ham α tegislikte jatadı.

Demek, α tegislik ABC jaqtı KN kesindi boyınsha, BQC jaqtı bolsa MN kesindi boyınsha kesip ótedi.

$KLMN$ tórtmúyeshlik α tegisliktiń piramida menen kesiminen ibarat boladı. KL hám KN kesindiler α tegisliktiń ABQ hám ABC jaqlarındaǵı *izleri* dep ataladı.

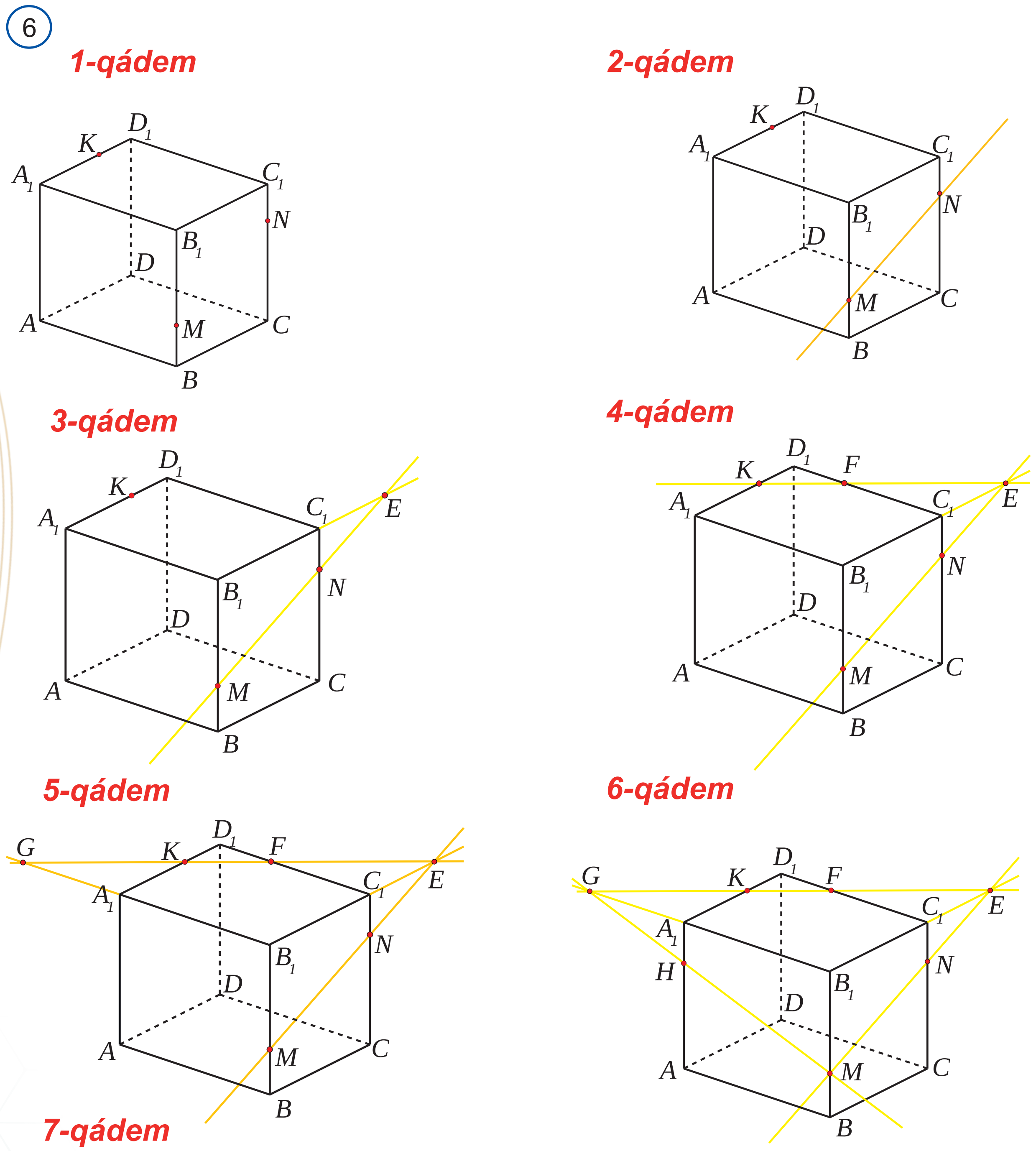
5

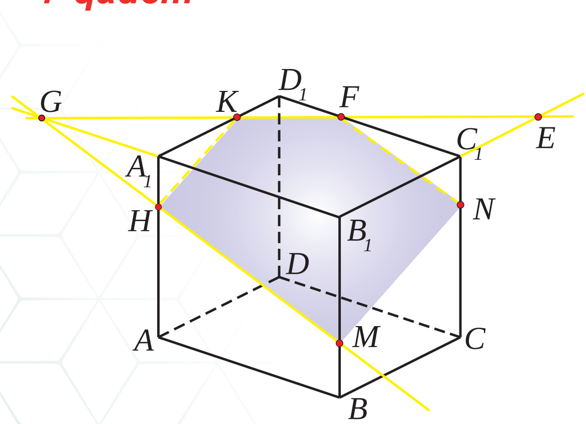


Sol sebepli kesimdi jasawdıń bunday usılı *izler usılı* dep ataladı.

Bul usıldıń mánisi tómendegilerden ibarat:

- Kesiwshi tegislik penen kópjaqlı qanday da bir jaǵınıń kesilisiw sızıǵınan ibarat bolǵan járdemshi tuwrı sızıqtı jasawdan ibarat.
- Ádette kesiwshi tegislik penen kópjaqlınıń tómengi ultanı jatqan tegislik penen kesilisiw sızıǵın jasaw qolaylı esaplanadı. Bul sızıq *kesiwshi tegisliktiń izi* dep ataladı.
- Izden paydalanıp kesiwshi tegisliktiń kópjaqlınıń qaptal qırları hám jaqlarında jatqan noqatlar ańsat anıqlanadı.





2-másele. Kubtıń M, P hám K noqatlardan ótetuǵın tegislik penen kesimin jasaymız.

Jasaw. Kesimdi jasaw izler usılında orınlanǵan. Jasaw izbe-izligi 6-súwrette adımlap keltirilgen. Onı úyrenip shıǵıp, jasaw procesine anıqlama beriń.

$MNFKH$- izlenip atırǵan kesim.

3-másele. $OKLMN$ piramidanıń OL qabırǵasınıń A noqatı hám piramidanıń $KLMN$ ultan tegisliginde jatıwshı k tuwrı sızıqtan ótetuǵın β tegislik penen keskende payda bolatuǵın kesimdi jasaymız *(7-súwret)*.

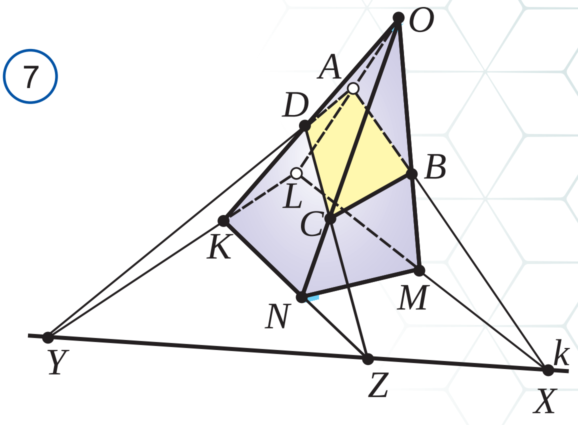
Jasaw. LM hám k tuwrı sızıqlar kesilisetuǵın noqattı tabamız. Bul noqat k tuwrı sızıqta jatqanlıǵı ushın β tegislikke tiyisli. Sonıń menen birge, bul noqat LM tuwrı sızıqta jatqanı ushın LOM jaqqa da tiyisli. A noqat bul eki tegisliktiń hár ekewine de tiyisli. Sol sebepli β tegislik LOM tegislikti AX tuwrı sızıq boyınsha, LOM jaqtı bolsa AB kesindi boyınsha kesip ótedi. Bul jerde B noqat – AX hám OM tuwrı sızıqlardıń kesilisiw noqatı.

Tap sol sıyaqlı β tegisliktiń OLK jaqtı kesip ótetuǵın Y hám D noqatları hám AD kesindini anıqlaymız. Keyin Z hám C noqatlar hám DC hám BC kesindilerdi anıqlaymız. Nátiyjede payda bolǵan $ABCD$ tórtmúyeshlik izlenip atırǵan kesimnen ibarat boladı.

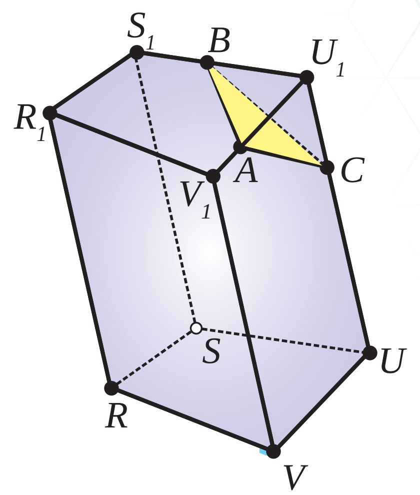
4-másele. A, B hám C – tórtmúyeshli prizmanıń túrli jaqlarındaǵı noqatları. Prizmanıń ABC tegislik penen kesimin tabamız *(8-súwret)*.

Izlenip atırǵan kesim A, B hám C noqatlardıń tórtmúyeshli prizmanıń qaysı jaqlarında hám qanday jatqanlıǵına baylanıslı boladı. 8-súwrette A, B hám C noqatlardıń bir tóbeden shıǵıwshı jaqlarda jatqan, eń ápiwayı jaǵdayı súwretlengen. 9-súwrette súwretlengen jaǵdayda kesimdi jasaw quramalılaw jumıs esaplanadı. Qalǵan jaǵdaylardaǵı kesimler tómendegi – 10- hám 11-súwretlerde keltirilgen. Kórip turǵanımızday, kesim úshmúyeshlik, tórtmúyeshlik, besmúyeshlik hám altımúyeshlikten ibarat bolıp atır. Bul kesimlerdiń jasalıwın óz betinshe talqılań.

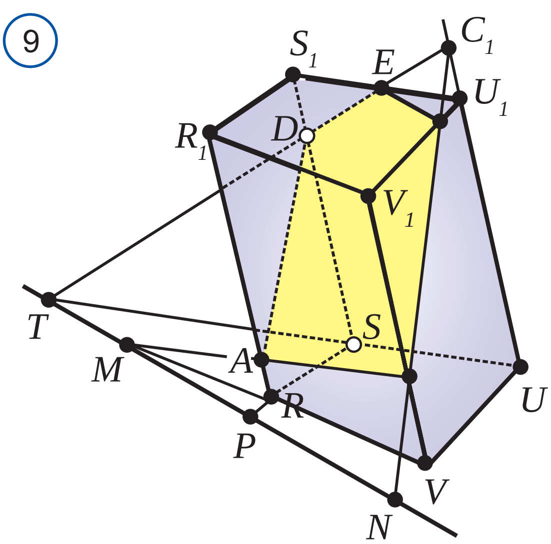
7



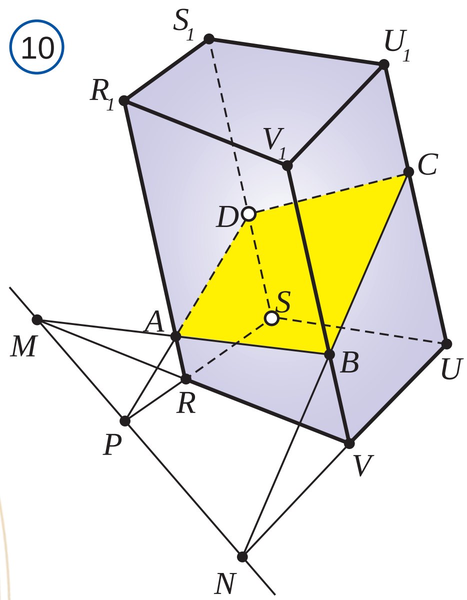
8



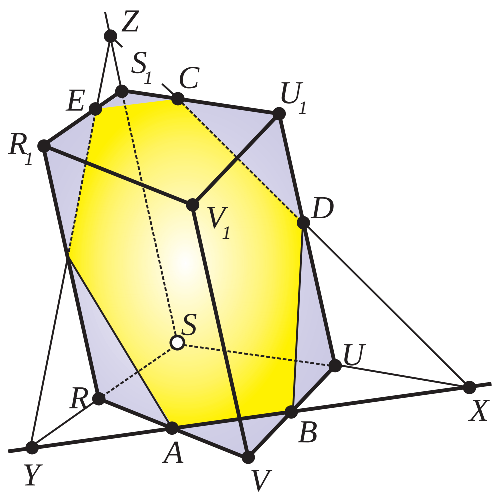
9



10



11



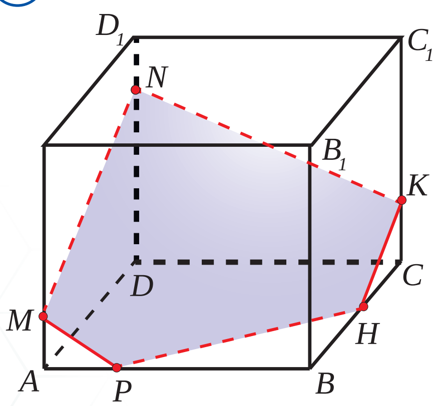
Izler usılın qollaw qaǵıydaları

- *kesimniń tóbeleri kópjaqlınıń tek ǵana* qabırǵalarında *jatadı;*
- *kesimniń tárepleri kópjaqlınıń tek ǵana jaqlarında jatadı;*
- *kesiwshi tegislik hám kópjaqlınıń jaǵı kesilisse, olardıń kesilisiw sızıǵı birden-bir tuwrı sızıqtan ibarat boladı.*

Parallel kóshiriw usılı

5-máselе. Kubtıń M, N hám K noqatlardan ótetuǵın tegislik penen kesilisiwin jasań.

12



Jasaw

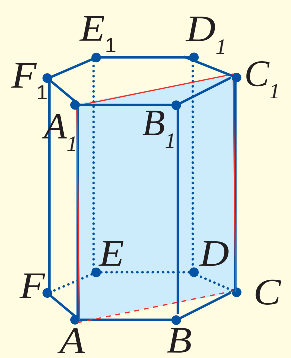
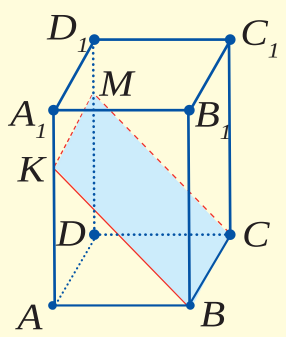
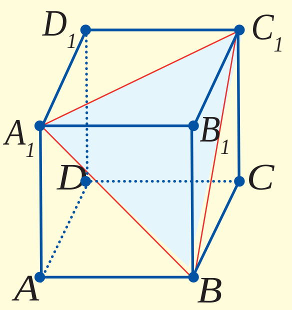
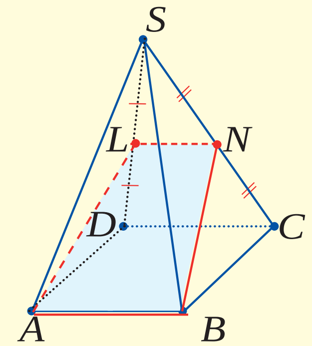
1. M hám N noqatlardı kesindi menen tutastıramız.
2. N hám K noqatlardı kesindi menen tutastıramız.
3. M noqattan NK ǵa parallel tuwrı sızıqtı ótkeremiz. Onıń AB qabırǵası menen kesilisiw noqatın P menen belgileymiz.
4. K noqattan MN ge parallel tuwrı sızıq ótkeremiz. Onıń BC qır menen kesilisiw noqatın H penen belgileymiz.
5. P hám H noqatlardı kesindi menen tutastıramız.
6. $MNKHP$ izlenip atırǵan kesim boladı.

Temaǵa tiyisli sorawlar

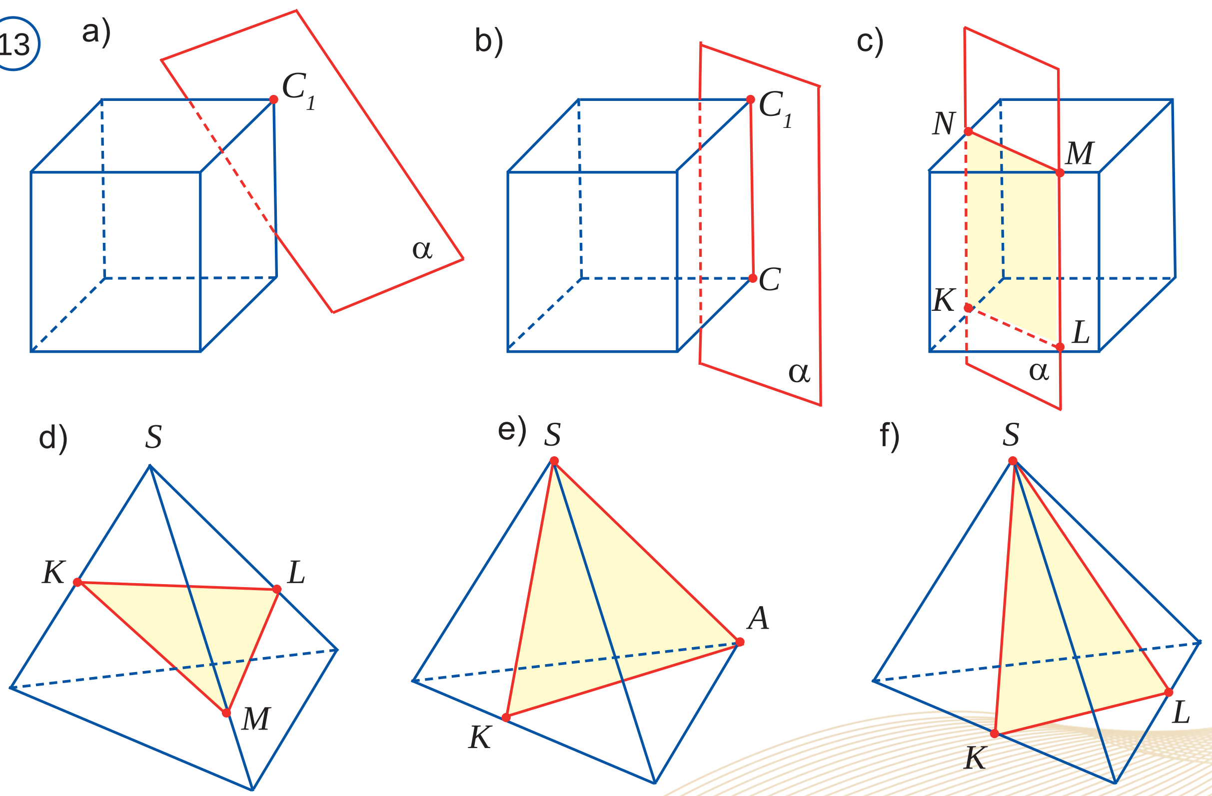
1. Kópjaqlınıń kesimi dep nege aytıladı?
2. Kópjaqlınıń kesimi qanday figura bolıwı múmkin?
3. Bir tegisliktiń ekinshi tegisliktegi izin túsindirip beriń.
4. Tórtmúyeshli kópjaqlınıń kesimi neler bolıwı múmkin?
5. Kesimdi jasawdıń izler usılın túsindirip beriń.
6. Kesimdi jasawdıń parallel kóshiriw usılın túsindirip beriń.

Ámeliy shınıǵıw hám qollanıw

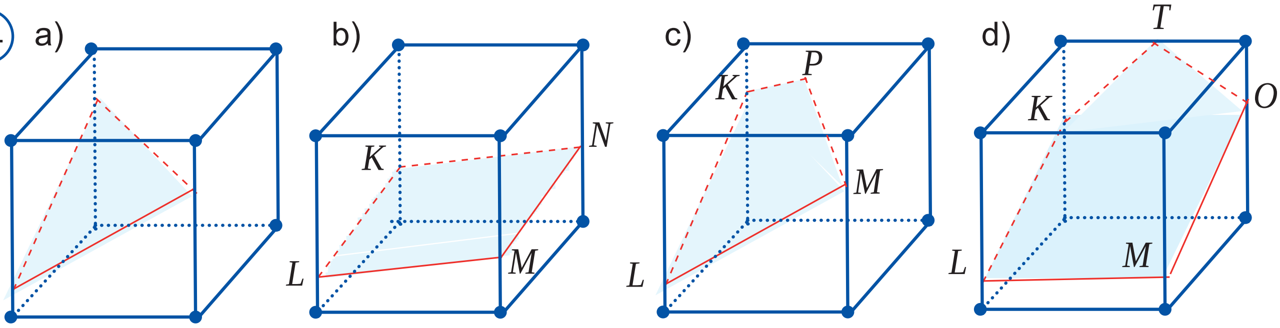
8.1. Kestede 8-temanıń tiykarǵı tayanısh maǵlıwmatları keltirilgen. Olardı dıqqat penen úyrenip shıǵıń hám anıqlama beriń.

Kópjaqlılardıń ápiwayı kesimleri			
Kópmúyeshli prizma	**Tuwrı múyeshli parallelepiped**	**Kub**	**Piramida**
			
ACC_1 – A, C, C_1 noqatlardan ótetuǵın, kesiwshi tegislik. ACC_1A_1 – kesim.	CBK – K noqat hám CB tuwrı sızıqtan ótetuǵın, kesiwshi tegislik. $CBKM$ – kesim.	A_1BC_1 – BC_1 hám BA_1 tuwrı sızıqlardan ótetuǵın, kesiwshi tegislik. A_1C_1B – kesim.	ABN – AB hám LN parallel tuwrı sızıqlardan ótetuǵın, kesiwshi tegislik. $ABNL$ – kesim.

13



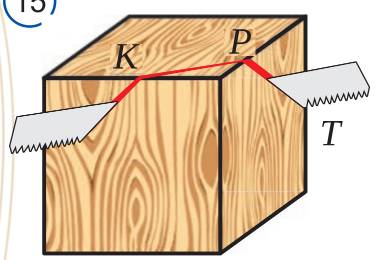
14 a) b) c) d)



8.2. 13-súwrette keltirilgen jaǵdaylarda keńisliktegi figuralardıń qanday kesimi súwretlengenligine anıqlama beriń.

8.3. Kubtı tegislik penen keskende kesimde 14-súwrette súwretlengen qaysı jaǵdaylar bolıwı múmkin? Qaysıları bolıwı múmkin emes?

15

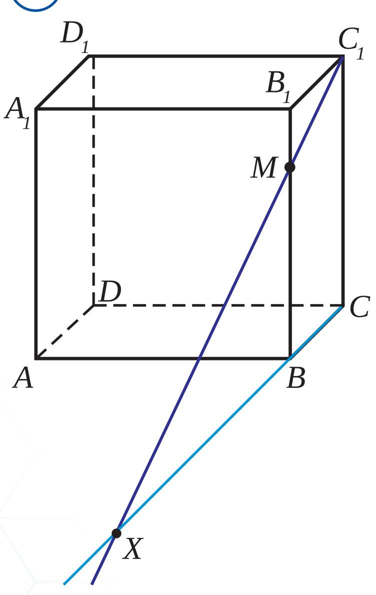


8.4. 15-súwrette súwretlengen aǵash kub keskende K, P hám T noqatlardan ótetuǵın kesim payda boladı. Tolıq kesim qanday figuradan ibarat boladı?

8.5. Kubtı sızıń. Onıń qırlarında sonday úsh noqattı belgileń, bul noqatlardan ótetuǵın tegislik kesimde:

a) úshmúyeshlik; b) tórtmúyeshlik; c) besmúyeshlik payda etsin.

16



8.6. Tómendegi algoritm tiykarında jasawdı atqarıń hám jasaw procesine anıqlama beriń.

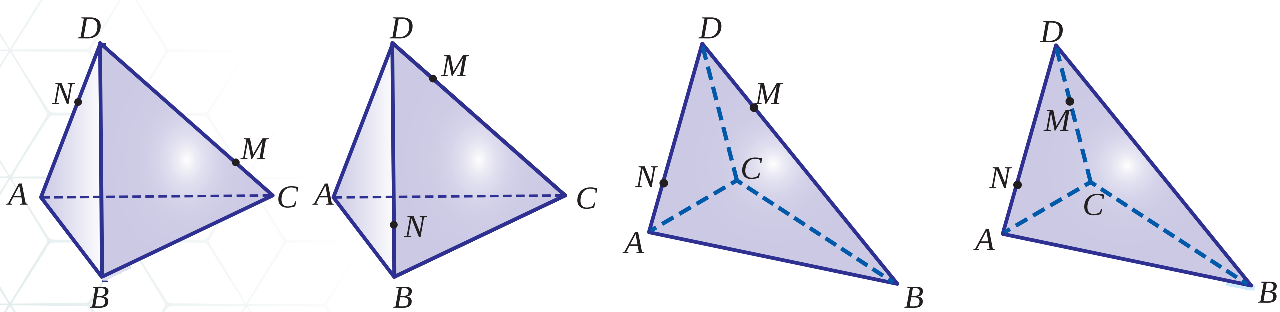
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ kub hám $M \in BB_1$ noqat berilgen. C_1M tuwrı sızıq penen kubtıń $ABCD$ jaǵı kesilisiw noqatın tabıw algoritmi *(16-súwret)*:

C_1M hám BC kesindilerdi dawam ettirip, olardıń kesilisiw noqatın X penen belgileymiz. X – izlengen noqat boladı.

8.7. 17-súwrette súwretlengen $ABCD$ tetraedrdiń qırlarında M hám N noqatlar belgilengen. MN tuwrı sızıqtıń ABC tegislik penen kesilisiw noqatı qaysı tuwrı sızıqta jatıwın anıqlań.

8.8. Tómendegi algoritm tiykarında kubtıń berilgen noqatlardan ótetuǵın kesimin jasań hám anıqlama beriń. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kubtıń A_1, $M \in D_1C_1$ hám $N \in DD_1$ noqatlarınan ótetuǵın kesimin jasaw algoritmi *(18-súwret)*:

17



1. A_1 noqattı M noqat penen tutastıramız.
2. A_1 noqattı N noqat penen tutastıramız.
3. M noqattı N noqat penen tutastıramız.
4. A_1MN úshmúyeshlik izlenip atırǵan kesim boladı.

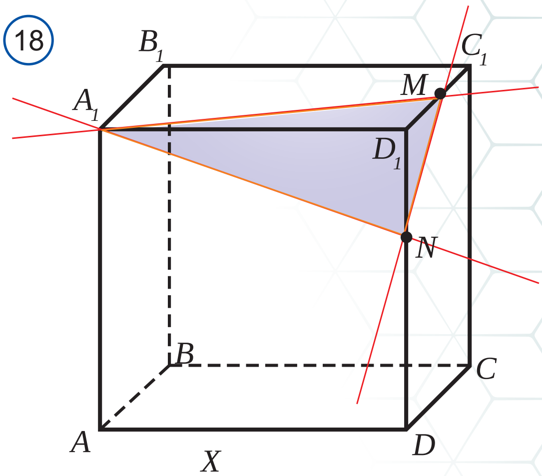
8.9. Tómendegi algoritm tiykarında kubtıń berilgen noqatlardan ótiwshi kesindini jasań hám jasaw procesin túsindiriń.

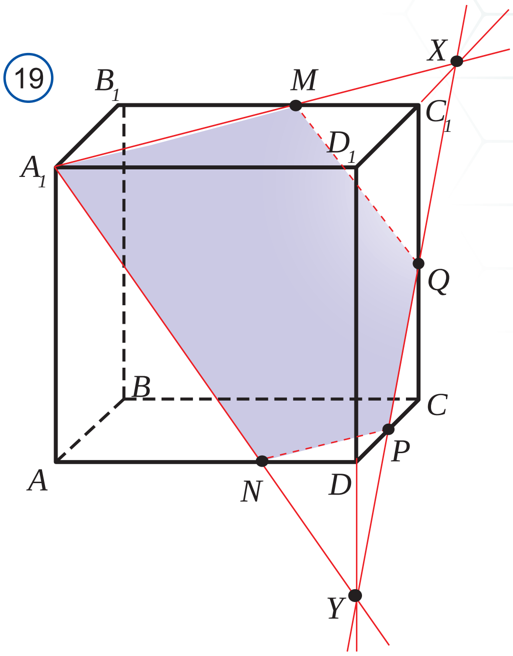
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ kubtıń M, Q hám P noqatlardan ótiwshi kesindini jasaw algoritmi *(19-súwret)*:

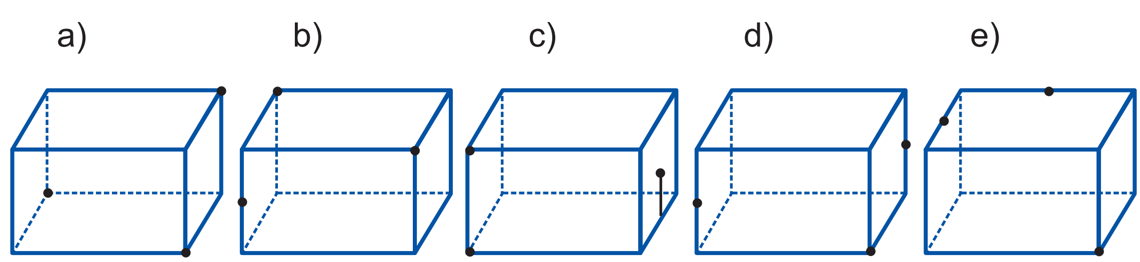
1. A_1 hám M noqatlardan ótiwshi tuwrı sızıq ótkeremiz. A_1M hám D_1C_1 tuwrı sızıqlar kesilisiw noqatın X penen belgileymiz.
2. A_1 hám N noqatlardan tuwrı sızıq ótkeremiz. A_1N hám DD_1 tuwrı sızıqlar kesilisiw noqatın Y penen belgileymiz.
3. X noqattı Y noqat penen tutastıramız. XY hám CC_1 tuwrı sızıqlar kesilisiw noqatın Q menen belgileymiz.
4. XY hám DC tuwrı sızıqlar kesilisiw noqatın P menen belgileymiz.
5. M hám Q noqatlardan ótiwshi tuwrı sızıq júrgizemiz. N hám P noqatlardan ótiwshi tuwrı sızıq júrgizemiz.
6. A_1MQPN besmúyeshlik izlenip atırǵan kesim boladı.

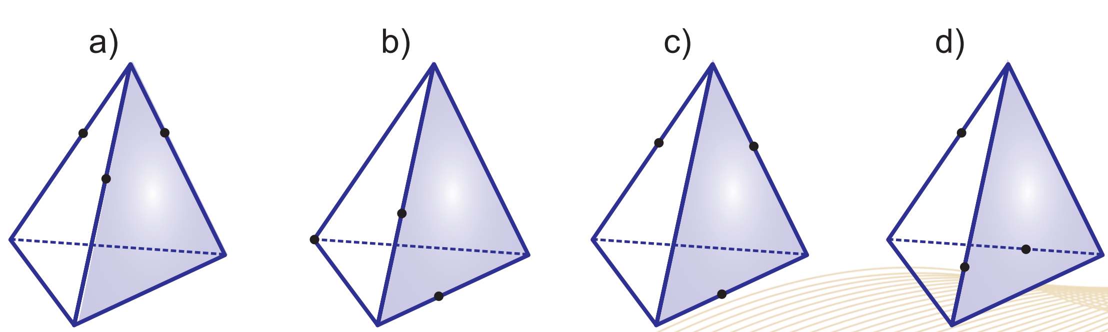
8.10. 20-súwrette kórsetilgen tuwrı múyeshli parallelepipedtiń berilgen úsh noqatınan ótiwshi kesindini jasań.

8.11. 21-súwrette kórsetilgen piramidanıń berilgen úsh noqatınan ótiwshi kesindini jasań.

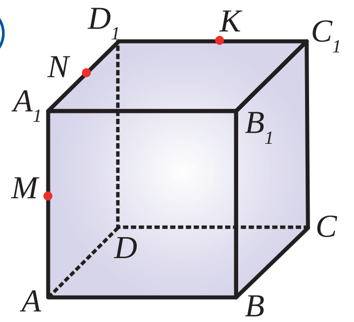
18


19


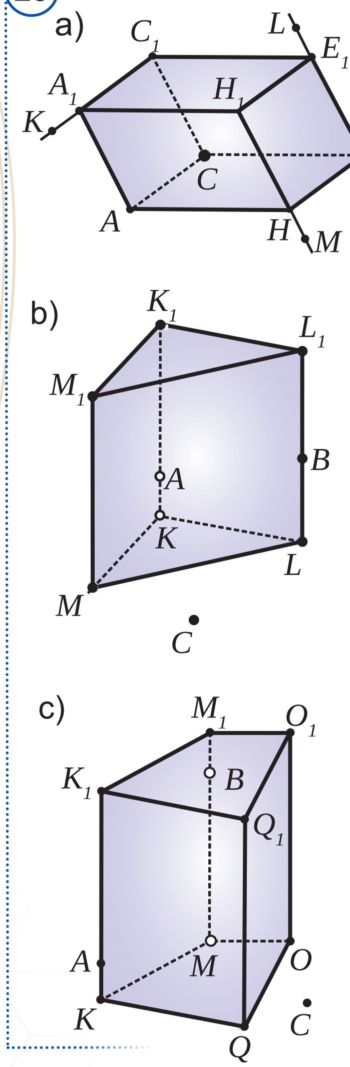
20


21


22



23



8.12. Kubtıń M, N hám K noqatlardan ótiwshi tegislik penen kesilisiwin parallel kóshiriw usılı menen jasań *(22-súwret)*.

8.13. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kubtıń AD hám CD qırlarında M hám N noqatlar berilgen. Kubtı MNB_1 tegislik penen keskende payda bolatuǵın kesimdi jasań.

8.14. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kubtı sızıń AB, BC hám BB_1 qırları ortaları bolǵan M, N hám L noqatlardı belgileń. Keyin: a) kubtı MNL tegislik penen keskende payda bolatuǵın kesimdi jasań; b) MNL úshmúyeshliktiń durıs ekenligin dálilleń; c) kubtıń qabırǵası 1 cm bolsa, MNL úshmúyeshlik maydanın tabıń.

8.15. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ tuwrı múyeshli parallelepipedtiń qırları $AB = 6$ cm, $AD = 6$ cm hám $AA_1 = 8$ cm. Parallelepipedtiń BC_1D tegislik penen kesimi teń qaptallı úshmúyeshlik ekenligin dálilleń hám bul úshmúyeshlik biyikligin tabıń.

8.16. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ prizmanı sızıń. Prizmanıń AD, AA_1 hám DD_1 qabırǵaları ortaları bolǵan M, N hám L noqatlardan ótiwshi tegislik penen kesilisiwin jasań.

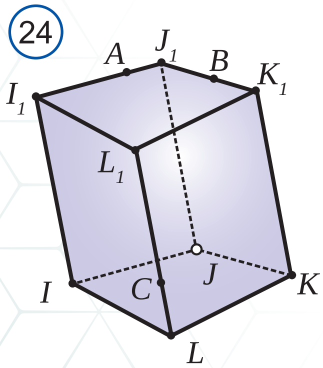
8.17. 23-súwrette berilgen maǵlıwmatlar tiykarında: a) M, N hám L; b) A, B hám C; c) A, B hám C noqatlardan ótiwshi keńislik figuralarınıń tiyisli kesimlerin jasań.

8.18. $IJKLI_1J_1K_1L_1$ prizmanıń JI_1, J_1K_1 hám LL_1 qırlarında jatqan A, B hám C noqatlar alınǵan *(24-súwret)*. Prizmanıń ABC tegislik penen kesimin jasań.

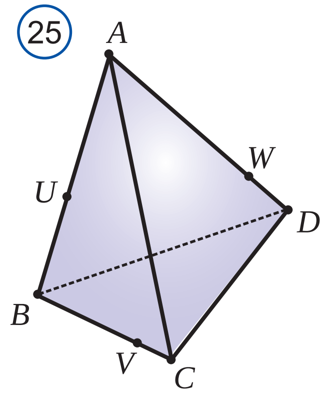
8.19. Berilgen maǵlıwmatlar tiykarında 25-súwrettegi keńisliktegi figuranıń U, V hám W noqatlardan ótiwshi tegislik penen keskende payda bolǵan kesimin jasań.

8.20. Berilgen maǵlıwmatlar tiykarında 26-súwrette keńisliktegi figuralardıń A, B hám X noqatlardan ótiwshi tegislik penen keskende payda bolǵan kesimin jasań.

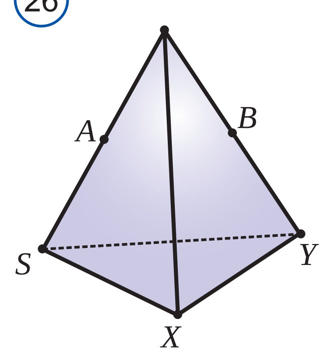
24



25



26



“GeoGebra”nı qollanıp

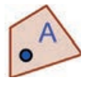
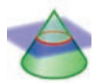
Kópjaqlılar kesimlerin jasaw

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ kubtıń AB, CC_1 hám A_1D_1 qırlarında sáykes túrde E, F hám G noqatlar berilgen. Kubtı EFG tegislik penen keskende payda bolatuǵın kesimdi jasań.

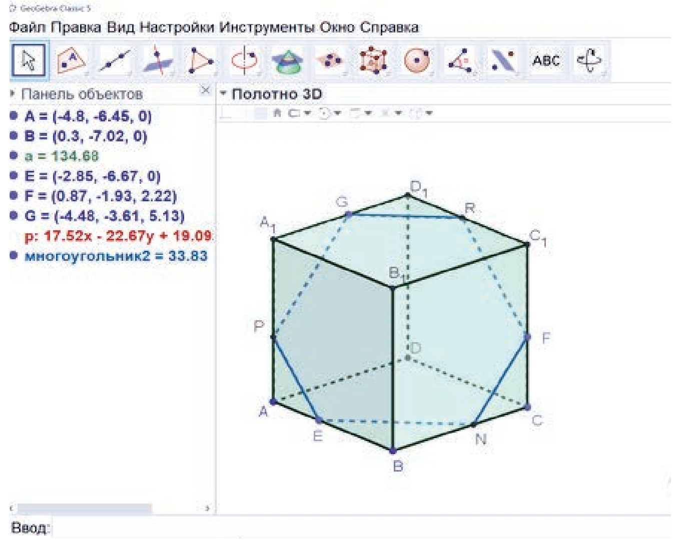
Jasaw:

- “GeoGebra” da jańa ayna ashıń.
- “GeoGebra” interfeysin “**Настройки**” – “**3D Графика**” kórinisine ótkeriń.

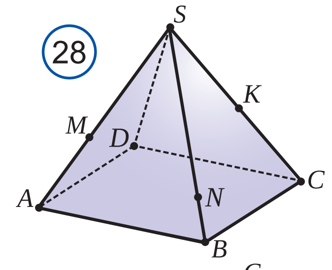
Kesimdi jasaw basqıshları

1		**Куб**	Qálegen kub jasaladı.
2		**Точка в объекте**	$ABCDA_1B_1C_1D_1$ kub hám onıń AB, CC_1 hám A_1D_1 qırlarında sáykes túrde E, F hám G noqatlar belgilenedi.
3		**Плоскость через 3 точки**	EFG noqatlardan ótiwishi tegislik jasaladı.
4		**Кривая пересечения**	Kub hám EFG noqatlardan ótiwshi tegislik kesimi payda etiledi.
5		**Показывать объект**	Tegisliktiń kereksiz bólegi jasırın jaǵdayǵa keltiriledi.
6		**Перемещение**	E, F hám G noqatlardı jıljıtıw arqalı kub kesimi durıs orınlanǵanı tekseriledi (27-súwret).

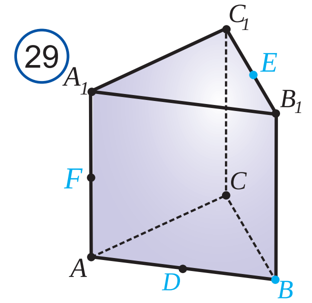
27



28



29



Óz betinshe orınlaw ushın tapsırmalar

1. Piramidanıń M, N hám K noqatlarınan ótiwshi tegislik penen keskendegi kesimin jasań *(28-súwret)*.

2. Durıs úshmúyeshli prizmanıń berilgen noqatlarınan ótiwshi kesimin tabıń *(29-súwret)*.

9 JOYBARLAW JUMÍSÍ BOYÍNSHA SHÍNÍǴÍWLAR

Dáslepki geometriyalıq bilimler áyyemgi Mısrda da 5 mıń jıldan kóbirek waqıt aldın payda bolǵan. Mısrlıqlar olardan tek ǵana piramidalar qurıwda emes, bálkim Nil jaǵasındaǵı egislik maydanlardı belgilewde de paydalanǵan. Eramızdan aldıńǵı 2 mıńınshı jıllarda áyyemgi Mısrda geometriyanıń payda bolıwı haqqında áyyemgi grek alımı Gerodot (eramızdan aldıńǵı V ásir) dep jazǵan edi: "Mısr imperatorı Seozoostris jerdi bólip, hárbir mısrlıqqa qurra boyınsha qıytaq jer ajıratıp, hárbir qıytaq jerden tiyisli tártipte salıq jıynap alǵan. Nil dáriyası qıytaq jerlerdi suw basqan. Jer iyeleri qıytaq jerlerdiń shegaraların tiklep beriw yamasa salıqtı kemeytiw ushın imperatorǵa múrájat etken. Húkimdar bolsa tamarqa qansha kemeygenligin anıqlap hám soǵan qarap salıqtı kemeytirgeni ushın óz wákilleri – jer ólshewshilerdi jibergen. Sol waqıtta greklerde jer ólshew haqqındaǵı pán –geometriya payda bolǵan hám ol jerden Greciyaǵa kóship ótken".

Oqıw joybarı bul – pánlerdi jánede tereńirek, jaqınlasqan jaǵdayda úyreniwge baǵdarlanǵan, bilim beriw procesinde tájiriybe, ámeliy xızmeti tiykarında orınlawǵa imkaniyat beriwshi, qollanıw hám izleniw alıp barıwdı talap etiwshi bilim beriw procesin payda etiw forması esaplanadı. Usı menen birge, joybarlaw jumısı bir pán jónelisinde de orınlanıwı múmkin.

Oqıwshılar joybarlaw jumısı boyınsha izlenislerdi jıl dawamında ádette sabaqtan tısqarı, óz betinshe shınıǵıwlarda alıp barıladı.

Joybarlaw jumısı temaları *ámeliy, teoriya* hám *qollanıw* sıpatlamasında bolıwı múmkin.

Ámeliy joybarlaw jumısında pánlerde ózlestirilgen bilim hám kónlikpeler turmıslıq jaǵdaylardaǵı mashqalalardı (keysler) sheshiwde qollanıladı. Belgili bir pán yamasa pánlerge tiyisli ámeliy kónlikpe hám qábiletlerdi rawajlandırıwda zárúrlik payda bolǵanda ámeliy baǵdarlanǵan joybarlardan paydalanıw jaqsı nátiyje beredi. Eń ápiwayı jaǵdayda muǵallim oqıwshılarǵa pánge tiyisli qosımsha oqıw materialı, testler toplamın, kórgizbe, tarqatpa materiallardı yamasa glossariy (atamalar sózligi) dúziw, kórgizbeli oqıw quralı modelin jaratıw hám jasaw sıyaqlı tapsırmalardı beriw múmkin. Ámeliy baǵdarlanǵan joybarlaw menen islew procesinde oqıwshılarda pánge tiyisli bilim, kónlikpe hám qábiletleri rawajlanadı, qollanıwǵa tiyisli kompetentlik qarar qabıl etedi.

Teoriyalıq joybarlaw jumısında bolsa pánlerdiń bazıbir teması tereńirek úyreniledi. Bunday joybarlaw jumısında berilgen tema boyınsha maǵlıwmatlar toplanadı, qayta islenedi, talqılanadı, ajıratıladı, ulıwmalastırıladı, paydalı hám qosımsha jazba oqıw resursı sıpatında usınıs etiledi.

Izertlew joybarlaw jumısında bolsa bazıbir standart emes másele yamasa turmıslıq mashqalanı sheshiw ústinde kishi ilimiy izleniw alıp barıladı. Oqıwshılardıń talqılawı, sın kóz qarastan pikirlew qábileti rawajlanadı, oylap tabıw usılların ózlestiriw hám úlken kólemdegi xabarlardı qayta islew maqset etip qoyılsa, izertlewshilikke tiyisli oqıw joybarınan paydalanıw maqsetke muwapıq. Usı oqıw joybarınıń maqseti joybarda oylanıp tiykarlap beriwden ibarat. Usı maqsetke erisiw ushın tájiriybe-sınaw islerin ótkeriw, alınǵan nátiyjelerdi talqılaw, ulıwmalastırıw, salıstırıw, rawajlandırıw nızamlılıqlardı anıqlaw, bunnan tısqarı, juwmaq shıǵarıw, óz kóz qaraslarına tiykarlanıw zárúr. Áne sol tárizde izertlewshilikke tiyisli oqıw joybarında tiykarǵı itibar pikirlew kompetentlikti rawajlandırıwǵa qaratıladı.

Oqıw joybarında eń úlken itibardı oqıwshılarda dóretiwshilik qábiletlerdi rawajlandırıwǵa qaratılıwı lazım. Áne usı dóretiwshilik joybar oqıwshılarǵa ózin kórsete alıw, qálegen tarawda óz dóretiwshilik jumısın jaratıw imkaniyatın beredi. Sonday-aq, dóretiwshilik joybarlar oqıwshılardıń topardaǵı mártebesin asıradı, ózi-ózin bahalawǵa imkan beriw arqalı olardıń dóretiwshilik qábiletlerin rawajlandıradı. Hárqanday dóretiwshilik jumıs onı qollanıw hám klass jámáati menen baylanıstı payda etedi. Áne usı sebepli dóretiwshi joybarlar oqıwshılarda kommunikativ kompetentlikti rawajlandırıwǵa úlken tásir kórsetedi.

Joybarlaw jumısı teması ústinde oqıwshılar bólek-bólek yamasa 3-4 adamlıq topar bolıp islewleri múmkin. Joybarlaw jumısı oqıw jılı aqırında ótkeriletuǵın qorǵaw (kishi konferenciya) menen tawsıladı. Joybarlaw jumısı ústindegi jumıs procesi tómendegi oqıw xızmetlerdi óz ishine alıwı múmkin:

- joybarlaw jumısı boyınsha iskerlikti rejelestiriw;
- wazıypalardı óz ara bólisip alıw;
- oqıw maqsetlerin qoyıw;
- kerekli maǵlıwmatlardı izlep tabıw;
- temaǵa tiyisli mashqalalı jaǵday sheshimlerin qıdırıw;
- sheshimlerden eń maqul túsetuǵının tańlaw hám onı tiykarlaw;
- zárúr jaǵdaylarda sorawlar yamasa tájiriybeler ótkeriw;
- joybarlaw jumısı nátiyjeleri boyınsha esabat tayarlaw;
- óz xızmetlerin talqılaw hám bahalaw;
- joybarlaw jumısın qorǵawı ushın prezentaciya tayarlaw;
- joybarlaw jumısın qorǵaw.

Bul shınıǵıw dawamında oqıwshılarǵa joybarlaw jumısı haqqında maǵlıwmat beriledi. Joybarlaw jumısı temaları oqıwshılar arasında bólistiriledi. Qanday da bir joybarlaw jumısı úlgi sıpatında kórsetiledi.

Joybarlaw jumısınıń úlgili temaları

(bul temalardan tısqarı basqa temalar da usınıs etiliwi múmkin)

1. Evklid geometriyası.
2. Lobachevskiy geometriyası.
3. Kópjaqlılar geometriyası.
4. Mısr piramidalarınıń jumbaqları.
5. Kópjaqlınıń beti.
6. Meniń qalamnıń geografiyası hám geometriyası.
7. Geometriyalıq mozayka.
8. Geometriyalıq paradokslar.
9. Minaralar arxitekturasındaǵı geometriyalıq figuralar.
10. Dálizlerdi proektlestiriw hám bezewde geometriyalıq figuralar.
11. Áyyemgi zergerlikte geometriya.

Stereometriya yamasa keńisliktegi geometriya geometriyanıń túrli keńisliktegi denelerdiń forması, ólshemleri hám qásiyetlerin úyreniwshi bólimi esaplanadı. Ol grek tilinde "stereo" – dene hám "metrio" – ólshew sózlerinen kelip shıqqan hám shın mániste "denelerdi ólshew" degen mánisti ańlatadı. Stereometriyada planimetriya sıyaqlı insannıń ámeliy iskerligi mútájlikleri menen baylanıslı jaǵdayda payda bolǵan hám rawajlanǵan.

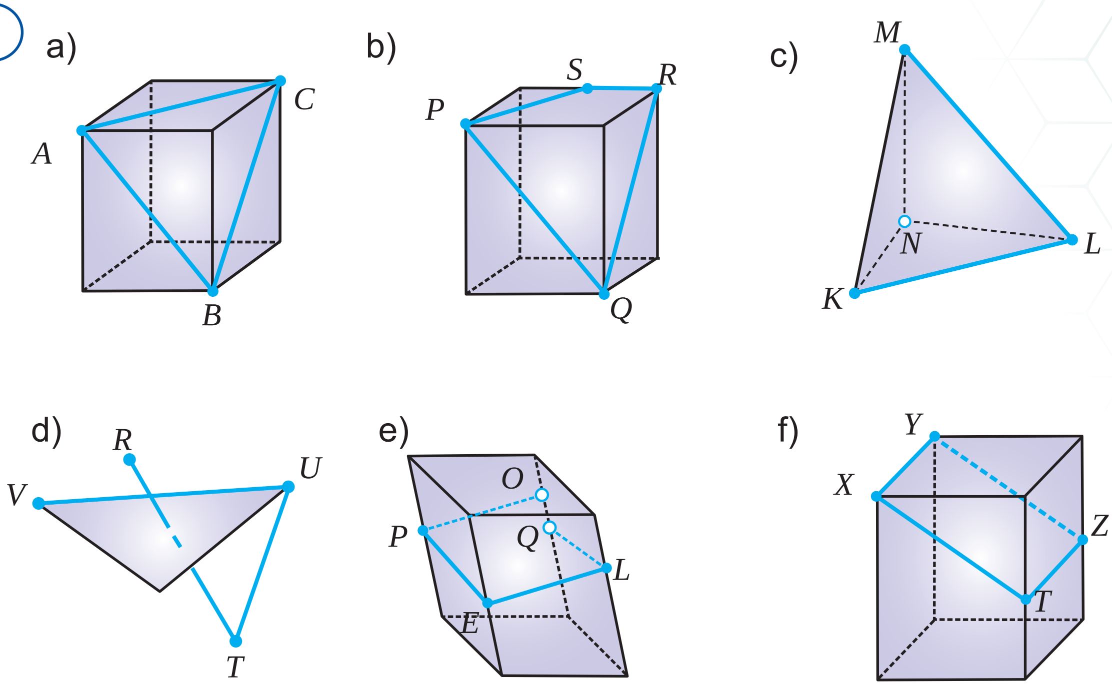
Eń áyyemgi hám eń ataqlı mekteplerden biri – Pifagor mektebi (eramızǵa shekemgi VI-V ásirler), onıń tiykarın salıwshısı Pifagor atı menen atalǵan. Pifagorshılar ózleriniń filosofiyalıq teoriyalarında durıs kópmúyeshliklerden paydalanǵan. Olardıń formaları ámelde barlıq tiykarlarına berilgen. Áyyemgi izertlewshilerdiń: órt - tetraedr, jer (topıraq) - kub, hawa - oktaedr, suw - ikosaedr, pútkil álem - dodekaedr formasına iye dep bilgen.

12. Súwret, háykel hám arxitektura geometriyası.
13. Muzeydegi súwretlerde geometriya.
14. Naǵıslı geometriya.
15. Jay hám imaratlardıń geometriyası hám arxitekturalıq kórinisleri.
16. Keteksheler de geometriya.
17. Oraylıq Aziya arxitekturasında geometriya.
18. Mısr piramidasınıń matematikalıq qásiyetleri.
19. Stereometriyaliq deneler.
20. Tábiyatta simmetriya.
21. Geometriya atamaları sózligi.
22. “Simmetriya ne?” oqıw filmi.
23. “Kópjaqlılardıń kesimi” temasındaǵı didaktikalıq material.
24. Geometriyadan testler kompleksi.
25. “Geometriyalıq gúres” oyını scenariysin dúziw.
26. Ólshem birlikleri haqqında gúrriń - animaciya.
27. “Geometriyalıq hádiyseler” saqna kórinisi scenariysin islep shıǵıw.
28. Geometriyalıq máseleler sheshiw trenajyorı.
29. Geometriyalıq kalkulyator.
30. “Geometriyalıq figuralar” úyretiwshi multimedialı qosımsha.
31. Simmetriya elektron kórgizbeli qural.
32. “Geometriya” oqıw – test baǵdarlaması.
33. Stereometriya boyınsha elektron qollanba.
34. Geometriyanıń kelip shıǵıwı, rawajlanıwı hám insaniyat tárepinen qollanılıwı.
35. Fizikada matematika.
36. Ximiyada matematika.
37. Biologiya hám medicinada matematika.
38. Ekologiyada matematika.
39. Geografiyada matematika.
40. Ekonomikada matematika.
41. Kórkem ónerde matematika.
42. "GeoGebra" baǵdarlamasınan stereometriya sabaqlarında paydalanıw.
43. Stereometriyanı úyreniw ushın paydalı elektron resurslar dizimi.
44. Bahalaw boyınsha xalıqaralıq izertlewlerde stereometriyalıq máseleler.

10 BAPTÍ TÁKIRARLAWĠA TIYISLI ÁMELIY SHÍNÍĠÍWLAR

10.1. 1-súwrette súwretlengen sınıq sızıq tegisliktegi yamasa keńisliktegi me?

1

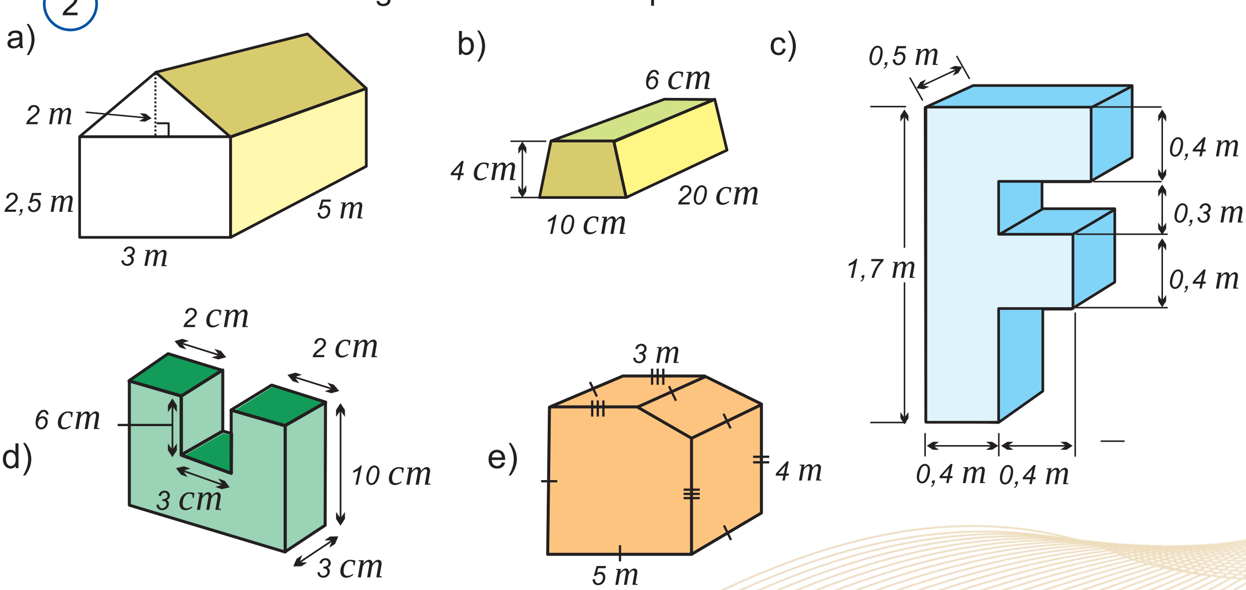


10.2. Durıs tórtmúyeshli piramida ultanı 12 *cm* ge, piramida tóbesin ultan orayı menen tutastırıwshı kesindi uzınlıǵı 16 *cm* ge teń. Piramida: a) qaptal qabırǵası hám apofemasın; b) qaptal betin; c) tolıq betin tabıń.

10.3*. *REFGH* piramida ultanı tárepleri 10 *cm* hám 18 *cm* bolǵan hám maydanı 90 cm^2 qa teń bolǵan *EFGH* parallelogramnan ibarat. Piramida tóbesi – *R* di ultan diagonalları kesilisiw noqatı – *O* menen tutastırıwshı kesindi uzınlıǵı 6 *cm* ge teń hám ol bul diagonallarǵa perpendikulyar. Piramida: a) qaptal qabırǵaların; b) qaptal betin; c) tolıq betin tabıń.

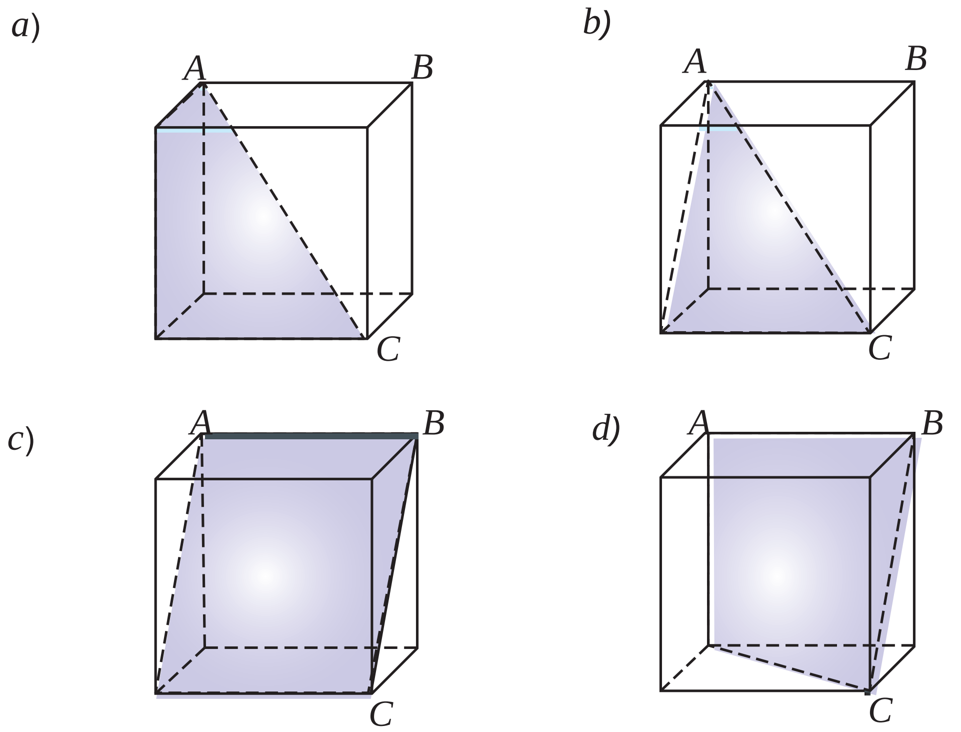
10.4. 2-súwrette súwretlengen denelerdiń tolıq betin tabıń.

2



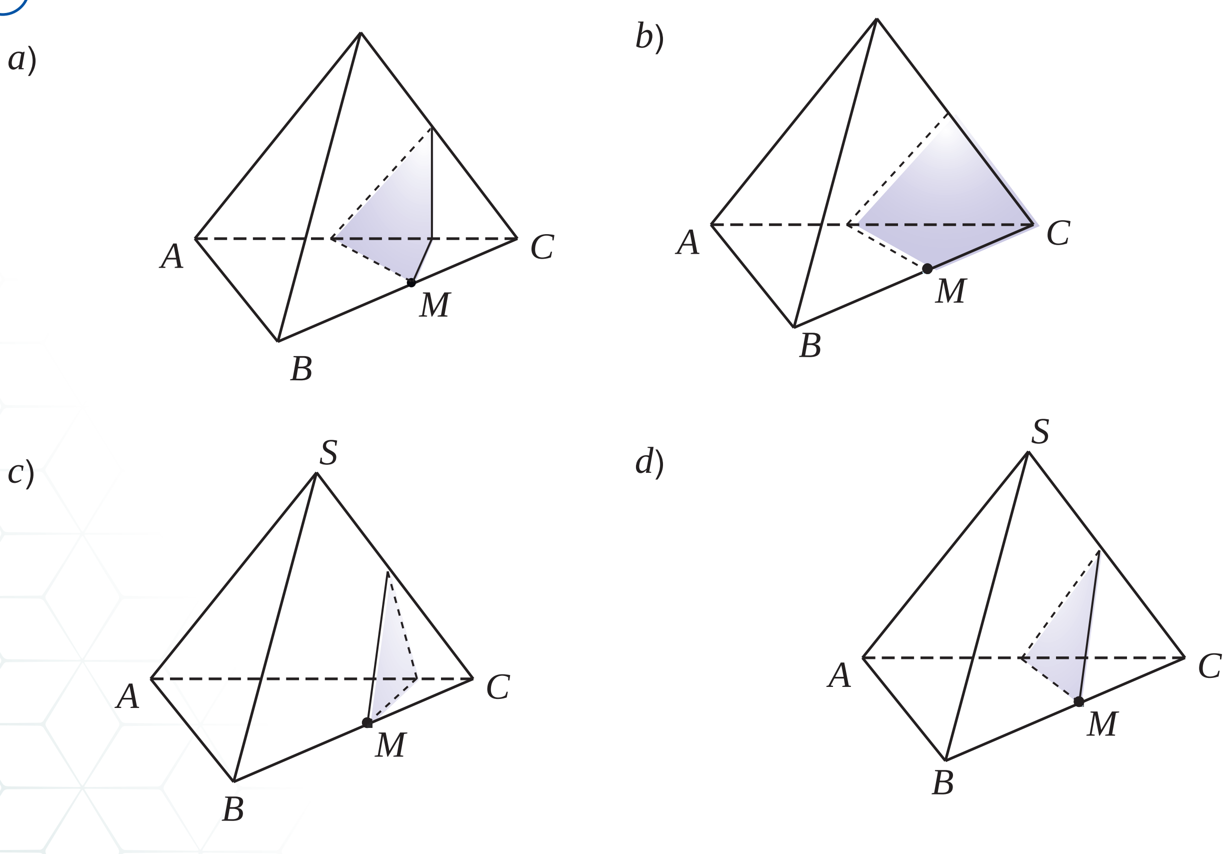
10.5. Kubtı tegislik penen kesken waqıtta kesimde 3-súwrette súwretlengen qaysı jaǵdaylar bolıwı múmkin? Qaysıları bolıwı múmkin emes?

3



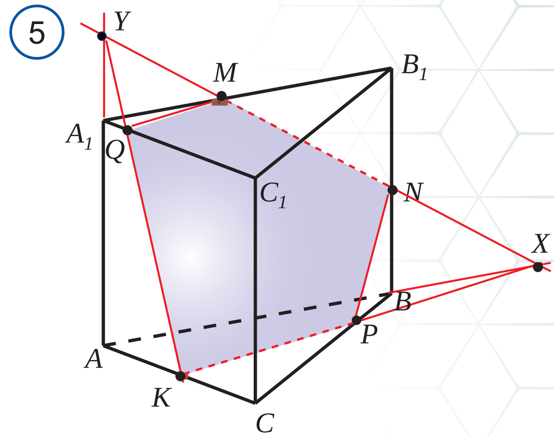
10.6. Qaysı súwrette M noqattan ótetuǵın hám tetraedrdiń SAB jaǵına parallel bolǵan kesim súwretlengen?

4



10.7. Tómendegi algoritm tiykarında prizmanıń berilgen noqatlardan ótetuǵın kesimin jasań hám jasaw procesine anıqlama beriń. $ABCA_1B_1C_1$ prizmanıń M,N,P hám Q noqatlarınan ótetuǵın kesimin jasaw algoritmi:

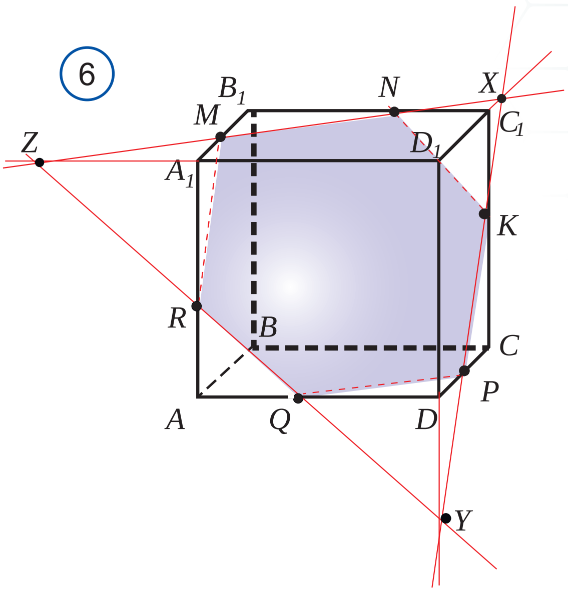
1. $M \leftrightarrow N$, $MN \cap AB = X$
2. $X \leftrightarrow K$, $XK \cap BC = P$
3. $MN \cap AA_1 = Y$
4. $Y \leftrightarrow K$, $YK \cap A_1C_1 = Q$
5. $P \leftrightarrow N$, $Q \leftrightarrow M$
6. $MNKPQ$ izlenip atırǵan kesim boladı.



Bul jerde $M \leftrightarrow N$ belgilew – M hám N noqatlardan ótiwshi tuwrı sızıqtı júrgizemiz, $MN \cap AB = X$ belgilew bolsa MN hám AB tuwrı sızıqlar kesilisiw noqatın X penen belgileymiz degen mánisti ańlatadı.

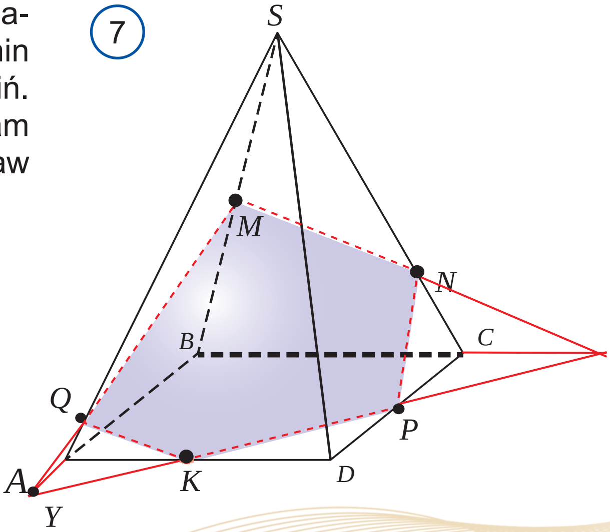
10.8. Tómendegi algoritm tiykarında kubtıń berilgen noqatlardan ótetuǵın kesimin jasań hám jasaw procesine anıqlama beriń. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kubtıń $M \in A_1B_1$, $N \in B_1C_1$ hám $K \in CC_1$ noqatlarınan ótetuǵın kesimin jasaw algoritmi:

1. $M \leftrightarrow N$;
2. $MN \cap D_1C_1 = X$;
3. $N \leftrightarrow K$, $X \leftrightarrow K$;
4. $XK \cap DC = P$;
5. $KP \cap DD_1 = Y$;
6. $MN \cap A_1D_1 = Z$;
7. $Y \leftrightarrow Z$
8. $YZ \cap AD = Q$;
9. $YZ \cap AA_1 = R$;
10. $Q \leftrightarrow P$, $R \leftrightarrow M$;
11. $MNKPQR$ izlenip atırǵan kesim boladı.



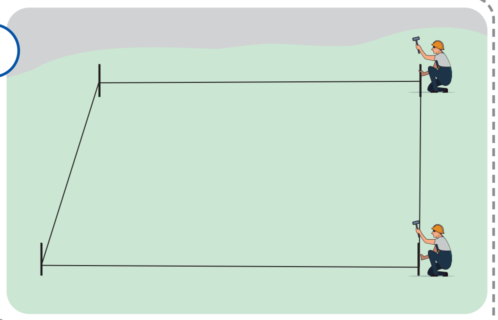
10.9. Tómendegi algoritm tiykarında piramidanıń berilgen noqatlardan ótetuǵın kesimin jasań hám jasaw procesine anıqlama beriń. $SABCD$ piramidanıń $M \in SB$, $N \in SC$ hám $K \in AD$ noqatlarınan ótetuǵın kesimin jasaw algoritmi:

1. $M \leftrightarrow N$
2. $MN \cap BC = X$
3. $X \leftrightarrow K$
4. $XK \cap DC = P$
5. $XK \cap AB = Y$
6. $Y \leftrightarrow M$
8. $YM \cap SA = Q$
9. $P \leftrightarrow N$, $K \leftrightarrow Q$
10. $MNPKQ$ izlenip atırǵan kesim boladı.



Qollanıwlar hám ámeliy kompetenciyalardı qáliplestiriw

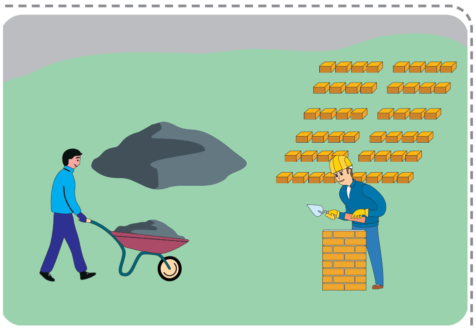
1



1. Ne sebepten qanday da bir imarat ushın jer ornı (tereń) qazıwdan aldın belgilew jumısları kerip tartılǵan sabaq járdeminde orınlanadı? *(1-súwret)*

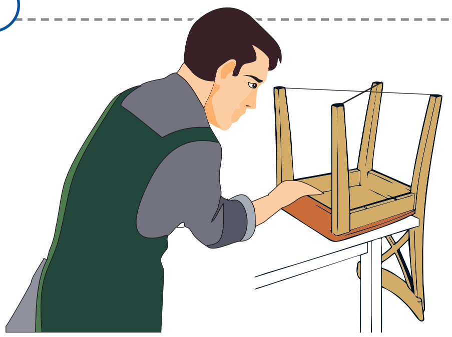
Juwabı: eki tegislik kesilispesi tuwrı sızıqtan ibarat boladı.

2



2. Gerbish quyıw procesinde qálipke ılay salınıp, tegis aǵash bólegi qálip ústinde júrgizilip, ılaydıń awısıq bólegi sıpırıp alıp taslanadı. Bunda ne sebepten gerbishtiń beti tegis shıǵadı? *(2-súwret)*

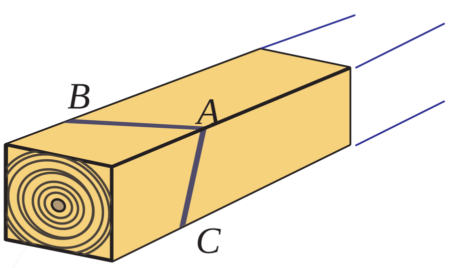
3



3. Jasalǵan stuldıń ayaqları bir tegislikte jatqanlıǵın tekseriw ushın aǵash ustası stuldıń keri ayaqlarına sabaq tartıp tekseredi. Bul usıldı qollap kóriń hám ol nege tiykarlanǵanlıǵın aytıń. *(3-súwret)*

Juwabı: *eki kesilisiwshi sızıq birden-bir tegislikti anıqlaydı.*

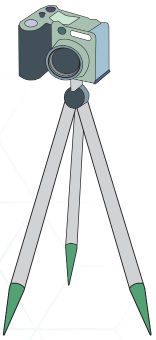
4



4. Bir bólek aǵash taxtanı kesip atırıp aǵash ustası pıshqılaw betiniń tegis bolıwına qalay erisedi? *(4-súwret)*

Juwabı: *aǵash taxtanıń eki qońsılas jaqlarına AB hám AC kesindilerdi sızadı hám kesimdi múmkinshiligi barınsha sol kesimlerden ótetuǵın etip qoyıp, pıshqılawdı orınlaydı. Nátiyjede eki kesilisiwshi tuwrı sızıqtan ótetuǵın tegislik birden-bir bolǵanı ushın pıshqılaw beti tegis shıǵadı.*

5



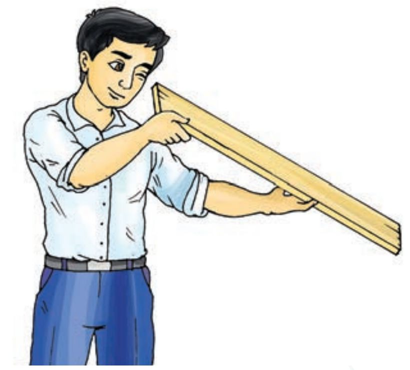
5. Fotoapparattı ornatıw ushın mólsherlengen tag úskene ne sebepten úsh ayaqlı etip jasaladı? *(5-súwret)*

Juwabı: *bir tuwrı sızıqta jatpaǵan úsh noqattan tek bir tegislik ótedi.*

6. Aǵash ustası qayta islengen taxta betiniń tegisligin qalay tekseredi? Bul usıl nege tiykarlanǵan? *(6-súwret)*

Juwabı: *eger tuwrı sızıqtıń eki noqatı tegislikte jatsa, onıń ózi de pútkilliginshe sol tegislikte jatadı.*

6



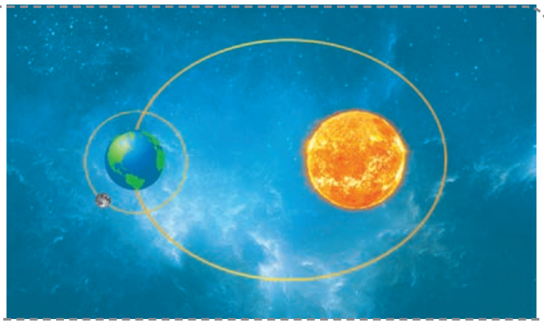
7. Ne sebepten úsh ayaqlı motocikl eki ayaqlıǵa salıstırǵanda biraz turaqlı boladı? *(7-súwret)*

Juwabı: *bir tuwrı sızıqta jatpaǵan úsh noqattan tek bir tegislik ótedi.*

7

8. Quyash, Jer hám Ay orayları bir tegislikte jatıwı múmkin be? Bir tuwrı sızıqta jatıwı múmkin be? Qashan? *(8-súwret)*

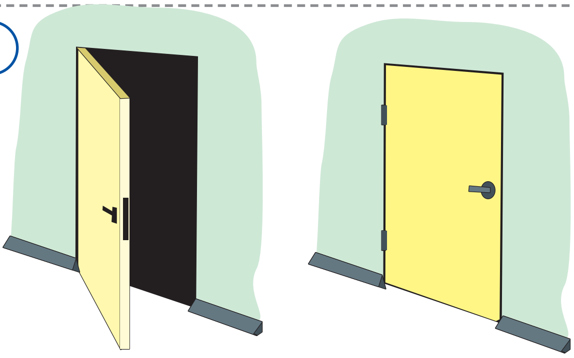
8



9. Ne ushın ashıq esikler samalda háreketke keledi? Ne sebepten bul jaǵday jabıq esiklerde bolmaydı? *(9-súwret)*

Juwabı: *tuwrı sızıq hám onda jatpaǵan noqattan tek bir tegislik ótkeriw múmkin.*

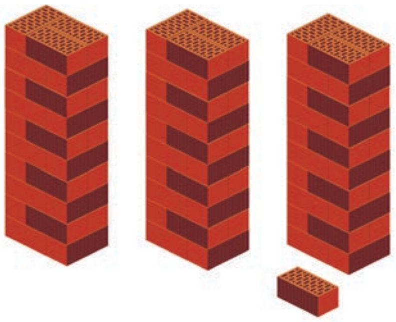
9



10. Kesim tárepi 7 dm bolǵan kvadrattan ibarat, biyikligi 4 m bolǵan 18 baǵananı quriw ushın qansha gerbish kerek boladı? (Gerbishtiń ólshemleri: 1 : 1,5 : 3 dm. Quriw procesinde 5% gerbish shıǵındıǵa ketedi) *(10-súwret)*

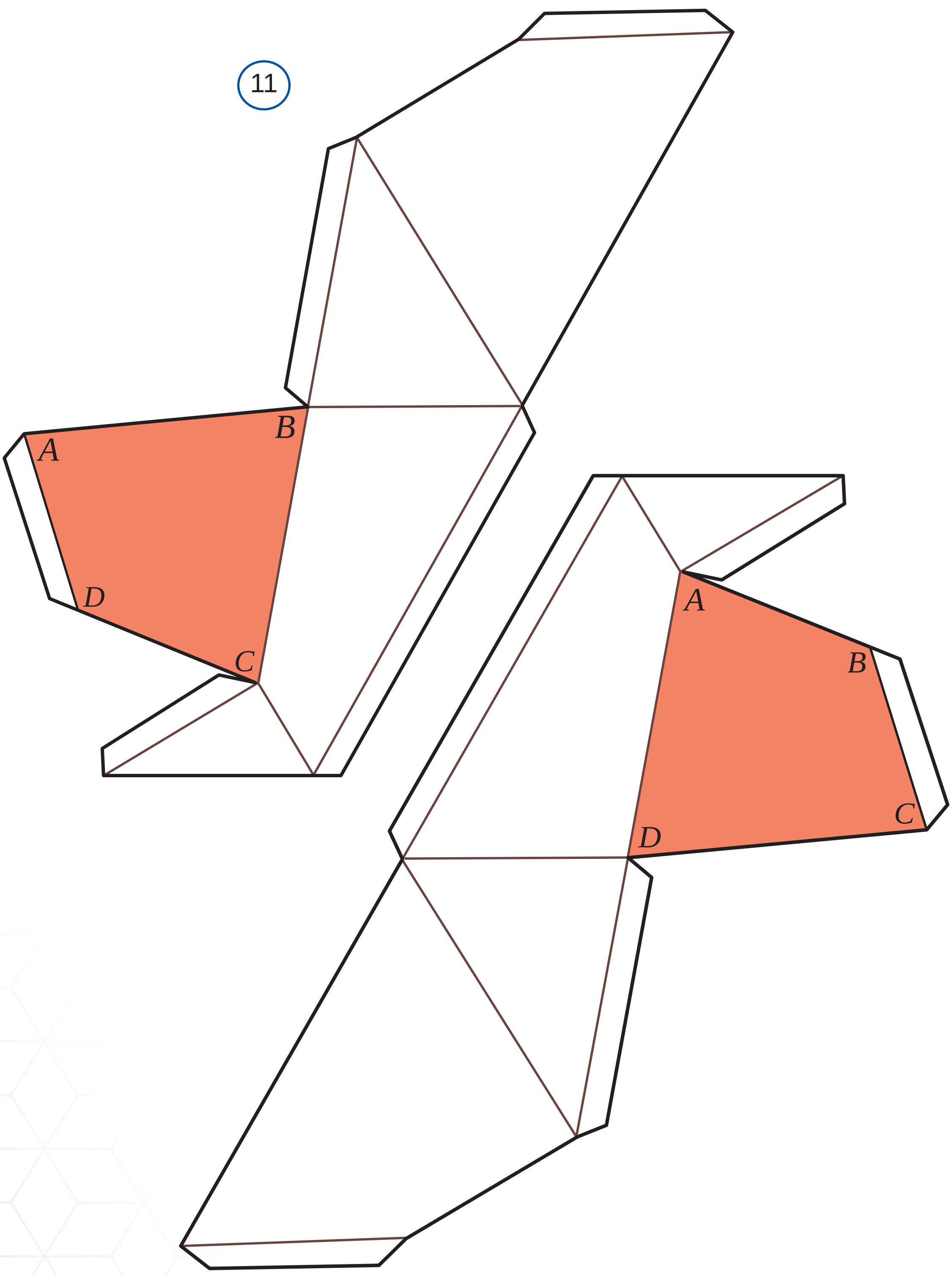
Juwabı: *5760 dana.*

10



Ámeliy jumıs

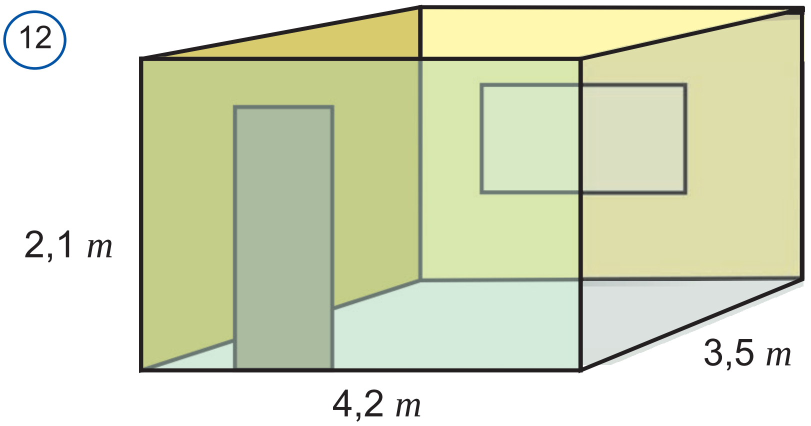
1. 11-súwrette berilgen jayılmalardı qalıń qaǵazǵa sızıp alıń. Olardı qayshı menen qırqıp alıp, tiyisli sızıqlar boyınsha búklep, keyin jelimleń. Nátiyjede tetraedrdiń qanday da tegislik penen keskendegi eki bóleginiń modeli payda boladı. Olardı birlestirip, $ABCD$ kesimli pútin tetraedrdi payda etiń.



2. 12-súwrette súwretlengen bólmeni remontlaw kerek. Bólme ólshemleri 0,8 m hám 2, 2 m bolǵan qapı hám ólshemleri 183 cm hám 91 cm bolǵan áynek bar. Qapınıń eki tárepi de boyalıwı kerek. Kestede eki túrlı boyawdıń bahaları berilgen. Bul maǵlıwmatlardan paydalanıp únemli remontlaw ushın qansha aqsha kerekligin esaplań.

Boyaw túri	**Kólemi**	**Boyaw maydanı**	**Bahası** (sumda)
Diywal ushın	$4\ l$	$16\ m^2$	*32450*
	$2\ l$	$8\ m^2$	*20800*
Qapı ushın	$2\ l$	$10\ m^2$	*23600*
	$1\ l$	$5\ m^2$	*15400*

12

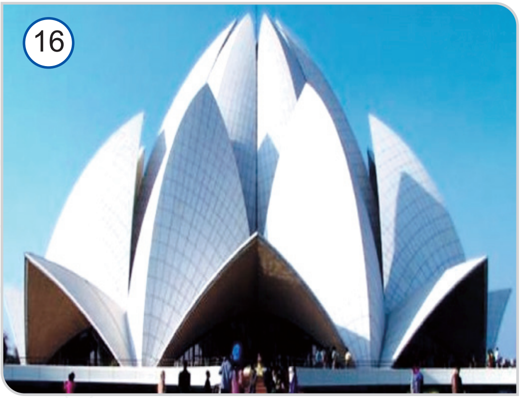


Geometriyalıq gózzallıq

Iri jay hám imaratlardı qurǵan ata-babalarımız úlken geometriyalıq bilim hám potencialǵa iye bolǵan. Bunı bir ǵana Samarqand qalasındaǵı Registan maydanındaǵı tariyxıy esteliklerden de bilip alıw múmkin (13-súwret).

Xiywa qalasındaǵı Ishanqala súwretinde (14-súwret) qanday geometriyalıq figuralardı kórip tursız?

"Taj-Mahal" – Indiyanıń Agra qalasında boburiy húkimdar Shahjáhán qurdirǵan áyyemgi estelik (15-súwret). Onı qurǵan ustalar geometriyadan jetilisken bilimge iye bolǵanlıqları kórinip tur.



Sidney qalası opera teatrı (16-súwret) - Avstraliyadaǵı zamanagóy arxitekturalıq úlgisi. Óziniń ájayıp geometriyalıq kórinisi menen dıqqatqa ılayıq.

17

18

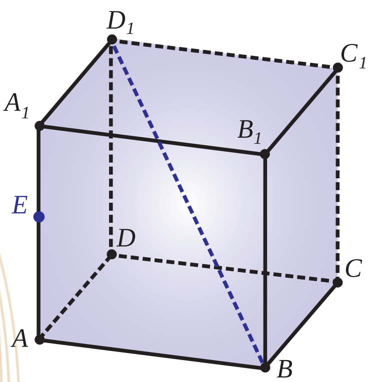
Gózzal geometriyalıq kóz qaras iyesi, Iraklı ataqlı arxitektor hayal – Zaha Hadidtiń joybarı tiykarında Qıtay paytaxtı Pekin qalasında qáddi tiklengen "Galaxy Soho" dem alıw kompleksin ájayıp kórinisinen zawıq almawdıń ilajı joq (17-súwret).

Mámleketimiz paytaxtında qáddin kóterip atırǵan "Tashkent city" kompleksiniń joybarı da adamdı tańlanıwǵa saladı. Bunday ájayıp imaratlardı jaratıwda injener-qurıwshılarǵa qaysı dárejedegi geometriyalıq bilimler kerek bolǵanlıǵın kóz aldımızǵa keltiriw múmkin (18 – 19-súwretler).

19

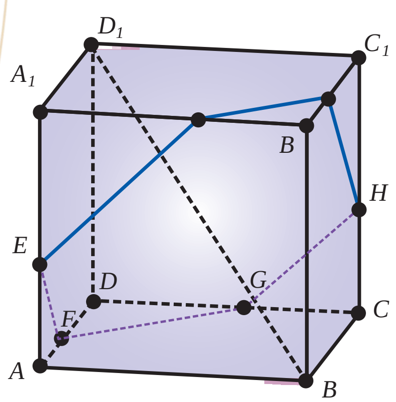
“GeoGebra”nı qollanıp

Kópjaqlılar kesimlerin jasaw



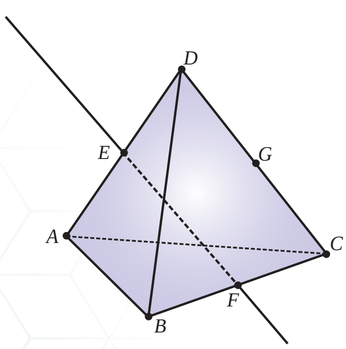
Kubtıń berilgen E noqatınan ótetuǵın hám BD_1 sızıǵına perpendikulyar kesimdi jasań.

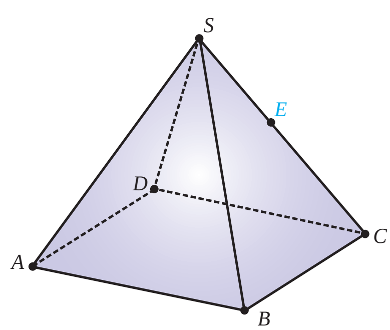
- **Jasaw:**
- “GeoGebra”da jańa ayna ashıń.
- “GeoGebra” interfeysin “**Настройки**”– “**3D Графика**” kórinisine ótkeriń.

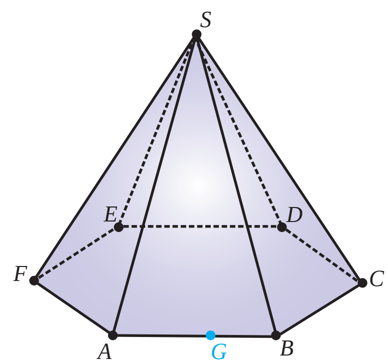


Kesimdi jasaw basqıshları

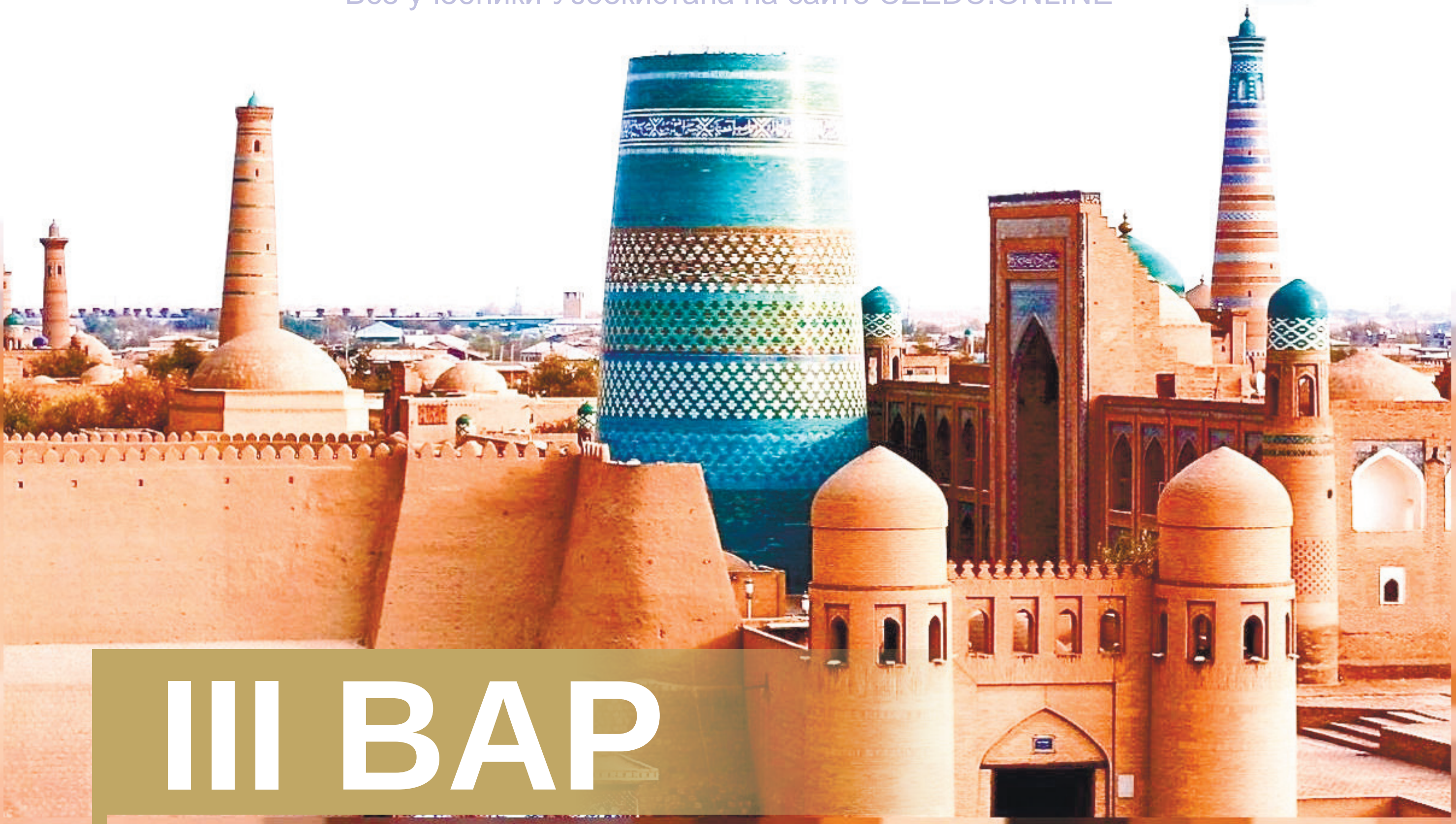
1		Qálegen kub jasaladı
2		Kub AA_1 qabırǵasında E noqat belgilenedi
3		BD_1 sızıq júrgiziledi.
4		E noqat hám BD_1 sızıqtan perpendikulyar tegislik júrgiziledi.
5		Kubtıń E noqatınan ótetuǵın kesim payda etiledi.
6		Tegisliktiń kereksiz bólegi jasırın jaǵdayǵa ótkeriledi.
7		E noqattı qozǵaw arqalı kesim durıs orınlanǵanlıǵı tekseriledi.







1. $ABCD$ durıs tetraedr CD qabırǵalarınıń G ortası hám EF perpendikulyar sızıqtan ótetuǵın tegislik kesimi qanday figura bolıwın anıqlań. Bul jerde E, F noqatlar – AD hám BC qabırǵalarınıń ortası.
2. Durıs tórtmúyeshli piramidanıń SC qabırǵasındaǵı E noqattan ótetuǵın hám sol qabırǵasına perpendikulyar tegislik kesimin sızıń.
3. Durıs altımúyeshli piramidanıń berilgen G noqatınan ótetuǵın hám SAF tegisligine parallel tegislik kesimin sızıń.



III BAP

KEŃISLIKTE TUWRÍ SÍZÍQ HÁM TEGISLIKLERDIŃ PARALLELLIGI

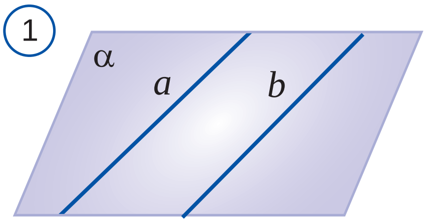
Bul baptı úyreniw nátiyjesinde tómendegi bilim hám kónlikpelerge iye bolasız:

- keńislikte parallel tuwrı sızıqlardı kóz aldımızǵa keltiriw;
- parallel tuwrı sızıqlardıń qásiyetlerin biliw hám olardı dálillewge tiyisli hám ámeliy máseleler sheshiwde qollanıw;
- parallelepipedtiń qásiyetlerin biliw hám olardı máseleler sheshiwde qollanıw;
- ayqısh tuwrı sızıqlardı kóz aldımızǵa keltiriw;
- tuwrı sızıqlardıń ayqıshlıq belgisin biliw hám onı máseleler sheshiwde qollanıw;
- keńislikte tuwrı sızıqlar arasındaǵı múyeshti anıqlaw;
- ayqısh tuwrı sızıqlar arasındaǵı múyeshti anıqlaw;
- perpendikulyar tuwrı sızıqlardı kóz aldımızǵa keltiriw;
- tegislikke parallel tuwrı sızıq anıqlamasın biliw;
- tegislikke parallel tuwrı sızıqlardıń qásiyetlerin biliw hám olardı qollana alıw;
- parallel hám kesilisiwshi tegislikler anıqlamasın biliw;
- eki tegisliktiń parallellik belgisin biliw hám olardan paydalanıw;
- parallel tegisliklerdiń qásiyetlerin biliw hám olardı qollana alıw;
- parallel proekciyanıń qásiyetlerin biliw hám olardı qollana alıw;
- úyrenilgen túsinikler, faktler hám metodlardı tanıs emes yamasa turmıslıq jaǵdaylarda qollana alıw.

11 KEŃISLIKTE TUWRÍ SÍZÍQLARDÍŃ ÓZ ARA JAYLASÍWÍ

Keńislikte parallel tuwrı sızıqlar

1



Keńislikte bir tegislikte jatıp, óz ara kesilispeytuǵın tuwrı sızıqlar parallel tuwrı sızıqlar dep ataladı *(1-súwret)*.

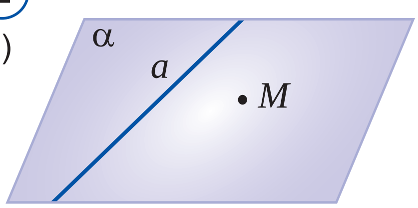
a hám b tuwrı sızıqlardıń parallelligi $a \parallel b$ tárizde jazıladı.

Tegislikte berilgen noqat arqalı berilgen tuwrı sızıqqa birden-bir parallel tuwrı sızıq ótkeriw múmkin. Bunday qásiyet keńislikte de orınlı boladı.

3.1-teorema. Keńislikte berilgen tuwrı sızıqta jatpaytuǵın noqattan sol tuwrı sızıqqa birden-bir parallel tuwrı sızıq ótkeriw múmkin.

2

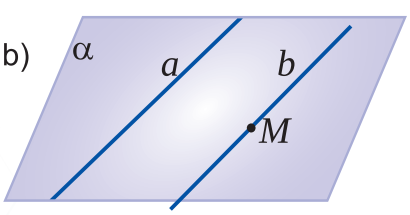
a)



Dálillew. a – berilgen tuwrı sızıq hám M bul tuwrı sızıqta jatpaytuǵın noqat bolsın *(2a-súwret)*. 34-bettegi 1-nátiyje boyınsha, a berilgen tuwrı sızıq hám onda jatpaǵan M noqat arqalı birden-bir α tegislik júrgiziw múmkin. α tegislikte bolsa M noqat arqalı a – berilgen tuwrı sızıqqa parallel birden-bir b – tuwrı sızıqtı ótkeriw múmkin *(2b-súwret)*.

Tap sol b tuwrı sızıq izlengen birden-bir parallel tuwrı sızıq boladı.

b)



Tegislikte eki parallel tuwrı sızıqlardan biri úshinshi tuwrı sızıqtı kesip ótse, olardıń ekinshisi de bul tuwrı sızıqtı kesip ótedi. Soǵan uqsas qásiyet keńislikte de orınlı boladı.

3.2-teorema. Keńislikte eki parallel tuwrı sızıqlardan biri tegislikti kesip ótse, olardıń ekinshisi de bul tegislikti kesip ótedi.

Dálillew. b hám c parallel tuwrı sızıqlar berilgen bolıp, olardıń biri – b tuwrı sızıq β tegislikti M noqatta kesip ótsin *(3-súwret)*. b hám c tuwrı sızıqlar parallel bolǵanı ushın olar bir tegislikte jatadı. Bul β tegislik bolsın.

β hám γ tegislikler ushın M – ulıwma noqat. Ol jaǵdayda S_3 aksioması boyınsha, bul tegislikler bir l tuwrı sızıq boyınsha kesilisedi. Bul tuwrı sızıq γ tegislikte jatadı hám b tuwrı sızıqtı M noqatta kesip ótedi. Sol sebepli bul tuwrı sızıq b tuwrı sızıqqa parallel c tuwrı sızıqtı da N noqatta kesip ótedi.

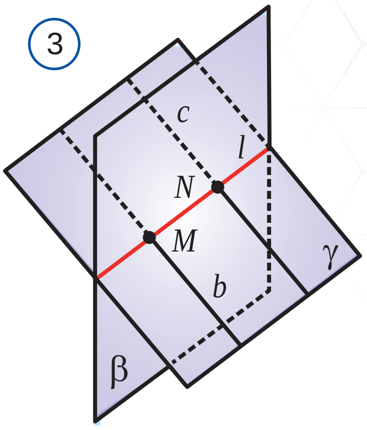
l tuwrı sızıq β tegislikte de jatqanı ushın N noqat β tegislikke de tiyisli boladı. Demek, N noqat - β hám γ tegislikler ushın ulıwma noqat.

Endi c tuwrı sızıqtıń β tegislik penen basqa ulıwma noqatı joq ekenligin kórsetemiz.

Kerisinshe oylaymız. Aytayıq, c tuwrı sızıqtıń β tegislik penen jáne basqa – K ulıwma noqatı bar bolsın. Ol jaǵdayda S_2 aksioması boyınsha, c tuwrı sızıq β tegislikte jatadı. Ol jaǵdayda c tuwrı sızıq β hám γ tegislikler ushın ulıwma boladı. Biraq l tuwrı sızıq edi. Bunnan c tuwrı sızıqtıń l tuwrı sızıq penen ústpe-úst túsiwi kelip shıǵadı. Bunday bolıwı bolsa múmkin emes. Sebebi b tuwrı sızıq c tuwrı sızıqqa parallel hám l tuwrı sızıqtı kesip ótedi.

Qarama-qarsılıq boljawımızdıń nadurıs ekenligin kórsetedi. Planimetriyadan bilgenińizdey, eki tuwrı sızıqtıń hárbiri úshinshi tuwrı sızıqqa parallel bolsa, olar óz ara parallel boladı. Bul qásiyet keńislikte de orınlı bolıp, ol tuwrı sızıqlardıń *parallellik belgisi* dep júritiledi.

3

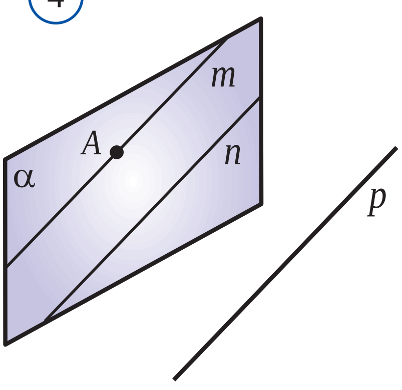


3.3-teorema. Úshinshi tuwrı sızıqqa parallel eki tuwrı sızıq óz ara parallel boladı.

Dálillew. Aytayıq, m hám n tuwrı sızıqlar p tuwrı sızıqqa parallel bolsın*(4-súwret)*. m hám n tuwrı sızıqlardıń bir tegislikte jatıwı hám óz ara kesilispewin, yaǵnıy parallel ekenligin kórsetemiz.

m tuwrı sızıqta A noqattı alamız hám bul noqatta n tuwrı sızıq arqalı α tegislik júrgizemiz. m tuwrı sızıqtıń α tegislikte jatıwın dálilleymiz.

4



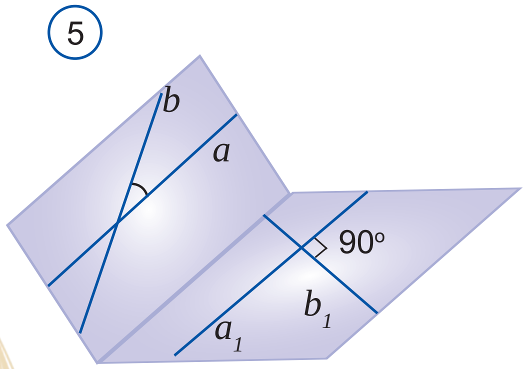
Aytayıq, bunday bolmasın. m tuwrı sızıq α tegislik penen ulıwma noqatqa iye bolǵanlıǵı ushın tegislikti kesip ótedi. Onda 3.2-teorema boyınsha, bul tegislikti m tuwrı sızıqqa parallel bolǵan p tuwrı sızıqtı, p tuwrı sızıqqa parallel bolǵan n tuwrı sızıqtı da kesip ótedi. Biraq bunday bolıwı múmkin emes, sebebi n tuwrı sızıq α tegislikte jatadı.

Demek, m hám n tuwrı sızıqlar α tegislikte jatadı.

Endi bul tuwrı sızıqlardıń kesilispeytuǵın ekenligin dálilleymız.

Jáne kerisinshe oylaymız. m hám n tuwrı sızıqlar qanday da B noqatta kesilissin. Ol jaǵdayda B noqat arqalı p tuwrı sızıqqa parallel eki – m hám n tuwrı sızıqlar ótedi.

3.1-teorema boyınsha bolsa, bunday bolıwı múmkin emes.



Bir tuwrı sızıqta yamasa parallel tuwrı sızıqlarda jatıwshı kesindiler (nurlar) óz ara *parallel kesindiler (nurlar)* dep ataladı.

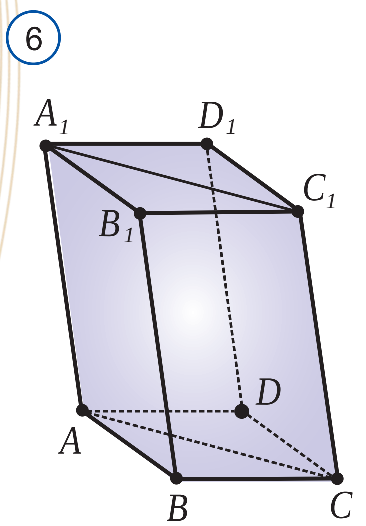
Eki tuwrı sızıqtıń kesilisiwinen payda bolǵan qońsılas múyeshlerdiń kishisi *eki tuwrı sızıq arasındaǵı múyesh* dep ataladı *(5-súwret)*.

Arasındaǵı múyesh 90° qa teń tuwrı sızıqlar *perpendikulyar tuwrı sızıqlar* dep ataladı.

Parallel tuwrı sızıqlar arasındaǵı múyesh 0° qa teń dep esaplanadı.

Endi parallelepipedtiń tómendegi qásiyetlerin dálilleymiz. Onıń ushın II bólimde berilgen parallelepiped hám onıń elementleri anıqlamasın eslewge tuwrı keledi.

Parallelepipedtiń qásiyetleri



Qásiyet 1. ***$ABCDA_1B_1C_1D_1$ parallelepipedte ultan diagonalları hám qaptal qabırǵalarınan dúzilgen ACC_1A_1 tórtmúyeshlik parallelogramnan ibarat boladı*** *(6-súwret).*

Dálillew. Súwrette, parallelepipedtiń ABB_1A_1 hám BCC_1B_1 jaqları anıqlama boyınsha, parallelogramnan ibarat. Bul parallelogramlardıń qarama-qarsı tárepleri óz ara teń boladı.

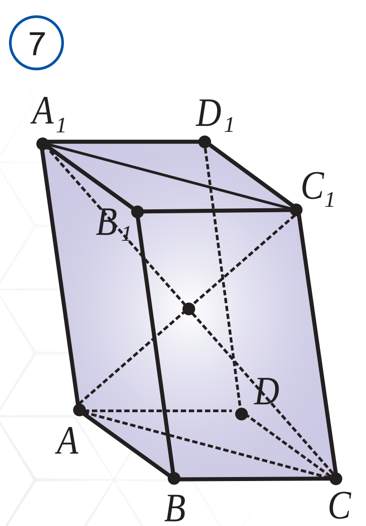
Atap aytqanda, $AB = A_1B_1$ hám $BC = B_1C_1$.

Parallelepipedtiń anıqlaması boyınsha, $AA_1 \parallel BB_1$ hám $BB_1 \parallel CC_1$.

Ol jaǵdayda 3.3-teoremaǵa kóre, $AA_1 \parallel CC_1$ hám $AA_1 = CC_1$ boladı.

Demek, AC_1CA_1 tórtmúyeshlik - parallelogramm.

Qásiyet 2. ***$ABCDA_1B_1C_1D_1$ parallelepipedtiń qarama-qarsı jaqları óz ara teń*** *(6-súwret).*



Dálillew. Joqarıdaǵı qásiyet boyınsha, AC_1CA_1-parallelogramm hám $AC=A_1C_1$.

Onda ABC hám $A_1B_1C_1$ úshmúyeshlikler úsh tárep boyınsha teń bolıp, ABC hám $A_1B_1C_1$ múyeshler de óz ara teń boladı.

Nátiyjede $ABCD$ hám $A_1B_1C_1D_1$ parallelogramlar da óz ara teń boladı.

Basqa qarama-qarsı jaqlardıń teńligi de nátiyjede tastıyıqlanadı.

Qásiyet 3. ***Parallelepipedtiń barlıq diagonalları bir noqatta kesilisedi jáne bul noqatta teń ekige bólinedi*** *(7-súwret).*

Dálillew. 1-qásiyet boyınsha, ACC_1A_1 – parallelogramm. Onda bul parallelogramm diagonalları A_1C hám AC_1 bir noqatta kesilisedi hám kesilisiw noqatında teń ekige bólinedi. Qalǵan diagonallardıń kesilisiwi hám bul noqatta teń ekige bóliniwi usıǵan uqsas dálillenedi.

Másele. Tóbeleri bir tegislikte jatpaytuǵın keńisliktegi tórtmúyeshlik tárepleriniń ortaları parallelogramnıń tóbeleri bolıwın dálilleń.

Dálillew. $ABCD$ – keńisliktegi tórtmúyeshlik hám A_1, B_1, C_1, D_1 tórtmúyeshlik tárepleriniń ortaları bolsın *(8-súwret)*. Onda A_1B_1 kesindi – BC úshmúyeshliktiń AC tárepine parallel orta sızıǵı, C_1D_1 bolsa CD úshmúyeshliktiń AC tárepine parallel orta sızıǵı boladı.

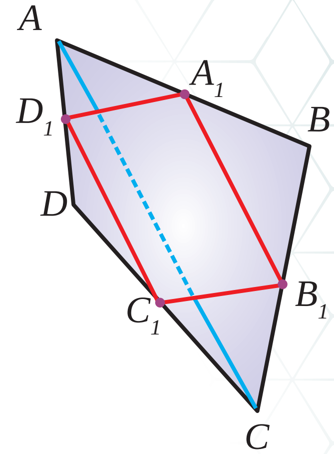
3.3-teorema boyınsha, A_1B_1 hám C_1D_1 tuwrı sızıqlar parallel boladı. Demek, olar bir tegislikte jatadı.

A_1D_1 hám B_1C_1 tuwrı sızıqlardıń parallelligi de tap sonday dálillenedi.

Solay etip, $A_1B_1C_1D_1$ tórtmúyeshlik bir tegislikte jatadı hám onıń qarama-qarsı tárepleri parallel.

Demek, ol parallelogramm boladı.

8

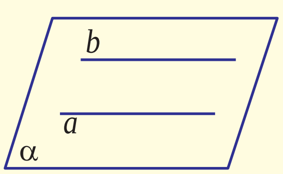
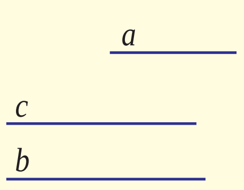
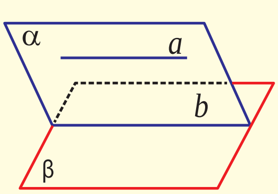
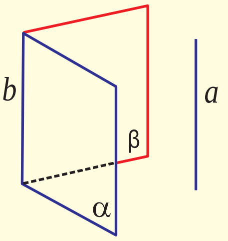


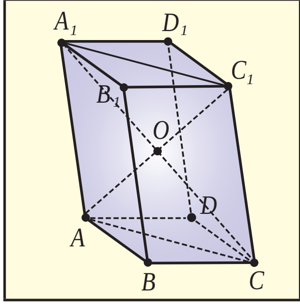
Temaǵa tiyisli sorawlar hám shınıǵıwlar

1. *Parallel tuwrı sızıqlardıń qanday qásiyetlerin bilesiz?*
2. *Tuwrı sızıqlardıń parallellik belgisin aytıń.*
3. *Parallelepipedtiń qanday qásiyetlerin bilesiz?*

Ámeliy shınıǵıw hám qollanıw

11.1. Kestede 11-temanıń tiykarǵı tayanısh maǵlıwmatları keltirilgen. Olardı dıqqat penen úyrenip shıǵıń hám anıqlama beriń.

1. Parallel tuwrı sızıqlar			
Anıqlaması	**Belgileri**		
 $a \parallel b$, a hám b tuwrı sızıqlar bir tegislikte jatıp, óz ara kesilispese, parallel tuwrı sızıqlar dep ataladı.	 Eger $a \parallel b$, $a \parallel c$ bolsa, $b \parallel c$ boladı.	 Eger $\alpha \cap \beta = b$, $a \subset \alpha$ hám $a \parallel \beta$ bolsa, $b \parallel a$ boladı.	 Eger $\alpha \cap \beta = b$, $a \parallel \alpha$ hám $a \parallel \beta$ bolsa, $a \parallel b$ boladı.

2. Parallelepipedtiń qásiyetleri	
	***1-qásiyet.*** Ultanınıń diagonalları hám qaptal qabırǵalarınan dúzilgen tórtmúyeshlik (AA_1C_1C) parallelogramm. ***2-qásiyet.*** Qarama-qarsı jaqları óz ara teń ($AA_1B_1B = DD_1C_1C$). ***3-qásiyet.*** Barlıq diagonalları bir noqatta kesilisedi hám bul noqatta teń ekige bólinedi ($AO = OC_1$, $CO = OA_1$).

9

a)

b)

c)

11.2. 9-súwrette keńislikte parallel tuwrı sızıqlardıń belgilerin anıqlań.

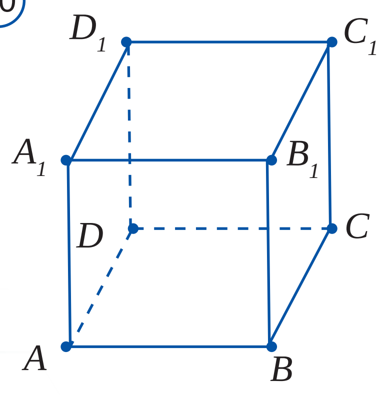
11.3. 10-súwrette súwretlengen a) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ parallelepipedtegi; b) $ABCA_1B_1C_1$ prizmadaǵı parallel qırlar jupların anıqlań.

11.4. Qanday piramidalarda parallel qabırǵalar boladı?

11.5. Belgili bolǵanınday, tegislikte tuwrı sızıq parallel tuwrı sızıqlardan birin kesip ótse, ekinshisin de kesip ótedi. Bul qásiyet keńislikte de orınlı bola ma?

11.6. a hám b tuwrı sızıqlar c tuwrı sızıqqa parallel. a hám b tuwrı sızıqlar óz ara qanday jaylasıwı múmkin?

10



11.7. 10-súwrette súwretlengen $ABCDA_1B_1C_1D_1$ parallelepipedte BC_1 hám AD_1 diagonallar óz ara teń hám parallel ekenligin dálilleń.

11.8. A tóbesi α tegislikte jatqan AB kesindiden C noqat saylanǵan. B hám C noqatlardan ótkerilgen parallel tuwrı sızıqlar α tegislikti sáykes túrde B_1 hám C_1 noqatlarda kesip ótedi. Eger: a) C noqat B kesindiniń ortası hám BB_1= 14 cm; b) $AC:CB$ = 3:2 hám BB_1 = 50 cm bolsa, CC_1 kesindiniń uzınlıǵın tabıń.

11.9. Bir tegislikte jatpaytuǵın $MNOP$ parallelogramm hám EK ultanlı $MNEK$ trapeciya berilgen. 1) PO hám EK tuwrı sızıqlardıń óz ara jaylasıwın anıqlań. 2) Trapeciyanıń ultanları MN= 45 cm, EK= 55 cm ge teń bolıp, oǵan ishley sheńber sızıw múmkin. Trapeciyanıń perimetrin tabıń.

11.10. Tómendegi qásiyetlerdiń qaysıları parallelepipedke tiyisli? Durıs juwaplardı belgileń.

A) Ultan diagonallarınan hám qaptal qabırǵalardan dúzilgen tórtmúyeshlik parallelogramnan ibarat.

B) Qaptal jaqları ultanına perpendikulyar.

C) Ultan diagonallarınan hám qaptal qabırǵalarnan dúzilgen tórtmúyeshlik kvadrattan ibarat boladı.

D) Barlıq diagonalları bir noqatta kesilisedi hám bul noqatta teń ekige bólinedi.

E) Qarama-qarsı qabırǵaları óz ara parallel.

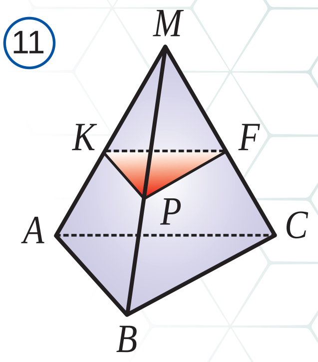
F) Barlıq jaqları tuwrı tórtmúyeshlikten ibarat.

G) Qarama-qarsı jaqları óz ara teń.

H) Qabırǵaları óz ara ayqısh.

J) Qabırǵaları arasında óz ara ayqıshları da bar.

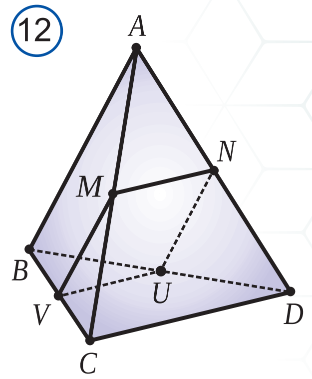
11



11.11. Keńislikte bir tuwrı sızıqqa pependikular bolǵan tuwrı sızıqlar óz ara parallel bola ma?

11.12. 11-súwrette M noqat ABC úshmúyeshliktiń sırtqı oblastında jatır. MA, MB, MC kesindilerdiń ortaları sáykes túrde K, F, P noqatlar menen belgilengen. 1) KP; 2) PF; 3) KF; 4) KM; 5) PM; 6) FM; 7) AB; 8) BC; 9) AC tuwrı sızıqlardan qaysıları óz ara papallel?

12



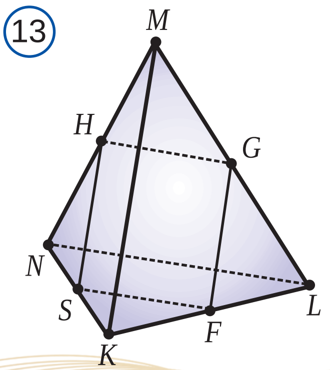
11.13. Tómendegi gáplerdi oqıń. Gáp durıs bolsa "+", nadurıs bolsa "-" belgisin janındaǵı ketekshege qoyıń.

1	Keńislikte tuwrı sızıqqa onda jatpaǵan noqattan oǵan parallel kóplegen tuwrı sızıqlardı ótkeriw múmkin.	
2	Úshinshi tuwrı sızıqqa parallel eki tuwrı sızıq óz ara kesilisedi.	
3	Eger eki tuwrı sızıq tegislikte jatsa, olar kesilisedi.	
4	Tuwrı sızıq hám onda jatpaǵan noqattan ótetuǵın eki tegislik ótkeriw múmkin.	
5	Keńisliktiń tegislikte jatpaǵan noqatınan bul tegislikti kesip ótetuǵın kóplegen tuwrı sızıqlardı ótkeriw múmkin.	

11.14. M, N, U, V noqatlar – $ABCD$ piramidanıń sáykes túrde AC, AD, BD hám BC qırlarınıń ortaları *(12-súwret)*. Eger $AB = 20\ cm$, $CD = 30\ cm$ bolsa, $MNUV$ tórtmúyeshliktiń perimetrin tabıń.

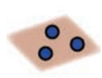
11.15. H, G, F, S noqatlar – $KLMN$ úshmúyeshli piramidanıń sáykes túrde MN, ML, LK hám KN qırlarınıń ortaları *(13-súwret)*. Eger $LK = 18\ mm$, $MN = 22\ mm$ bolsa, $HGFS$ tórtmúyeshliktiń perimetrin tabıń.

13



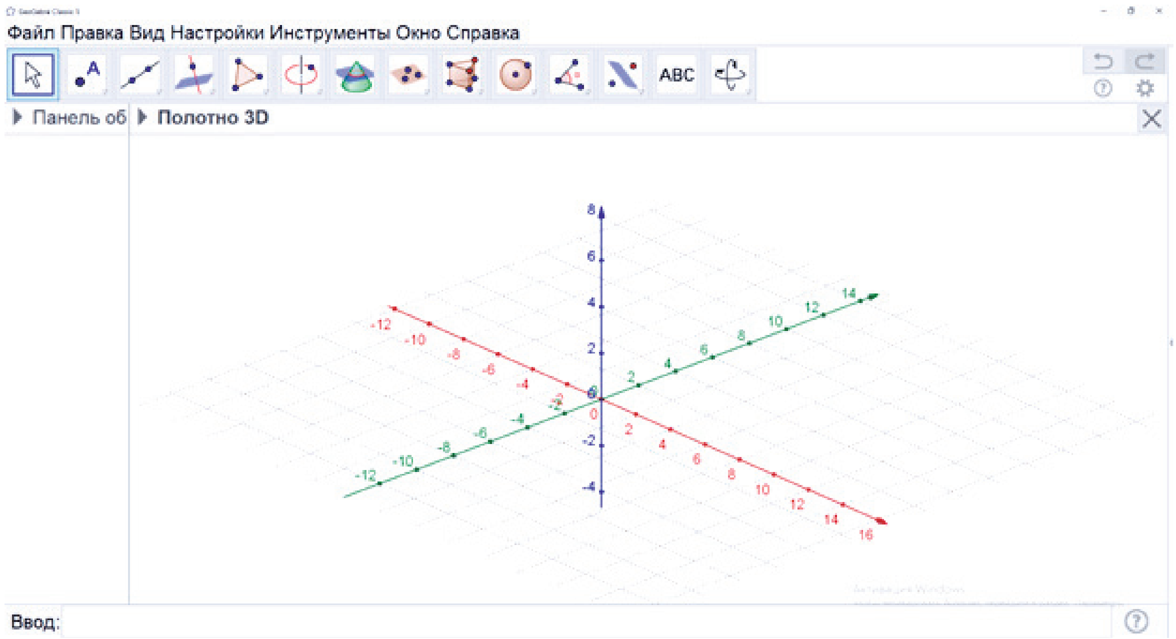
“GeoGebra”nı qollanıp

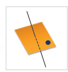
3D kalkulyatorı járdeminde túrli tegisliklerdi jasaw



3D kalkulyatorı úskeneler panelindegi **“Плоскость через три точки”** (“Úsh noqat arqalı tegislik”) qurılması ústine tıshqanshanıń shep túymesi basılsa, jańa aynada onıń basqa jáne 3 imkaniyatı:

- **“Плоскость”** (“Tegislik”),
- **“Перпендикулярная плоскость”** (“Perpendikulyar tegislik”);
- **“Параллельная плоскость”** (“Parallel tegislik”) ashıladı.

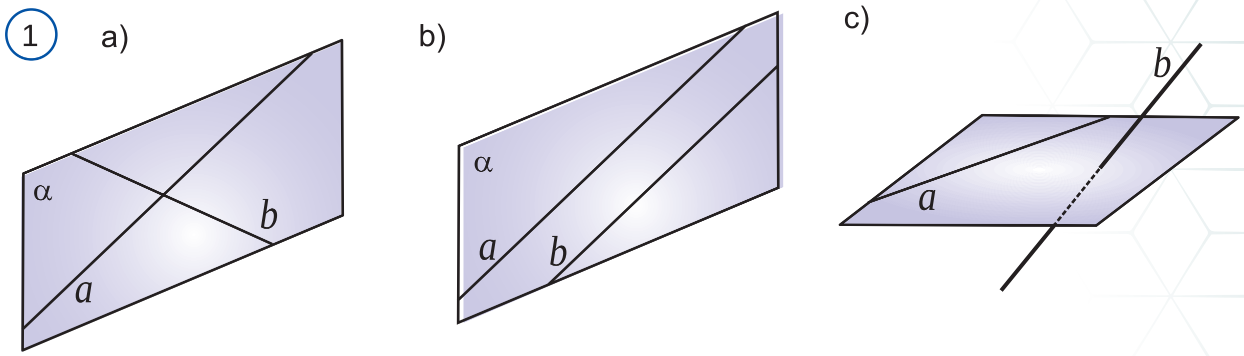


	Bul úskeneler tómendegi wazıypalardı orınlaydı:
	**“Плоскость”** (“Tegislik”) járdeminde tegislik jasaladı.
	**“Перпендикулярная плоскость”** (“Perpendikulyar tegislik”) járdeminde perpendikulyar tegislik jasaladı.
	**“Параллельная плоскость”** (“Parallel tegislik”) járdeminde parallel tegislik jasaladı.

Óz betinshe orınlaw ushın tapsırmalar

1. Qálegen úsh noqat belgileń. Olar arqalı ótetuǵın tegislik jasań.
2. Qanday da bir tegislik jasań, keyin oǵan perpendikulyar tegislik jasań.
3. Qanday da bir tegislik jasań, keyin oǵan parallel tegislik jasań.

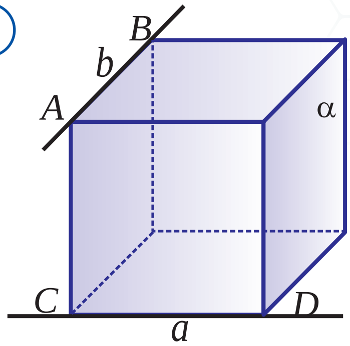
12 AYQÍSH TUWRÍ SÍZÍQLAR



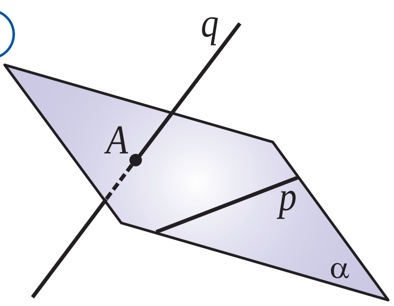
Eger keńislikte eki tuwrı sızıq óz ara kesilisse yamasa óz ara parallel bolsa, olar bir tegislikte jatadı *(1a-hám 1b-súwret)*.

Keńislikte bir tegislikte jatpaytuǵın tuwrı sızıqlar *ayqısh tuwrı sızıqlar* dep ataladı *(1c-súwret)*. a hám b tuwrı sızıqlardıń ayqıshlıǵı $a \dot{-} b$ tárizde ańlatıladı.

Ayqısh tuwrı sızıqlarda jatqan kesindilerdi *ayqısh kesindiler* dep ataymız. 2-súwrette kubtıń AB hám CD ayqısh qabırǵaları kórsetilgen. Ayqısh tuwrı sızıqlardı tómendegi belgisine qaray tanıp alıw múmkin:



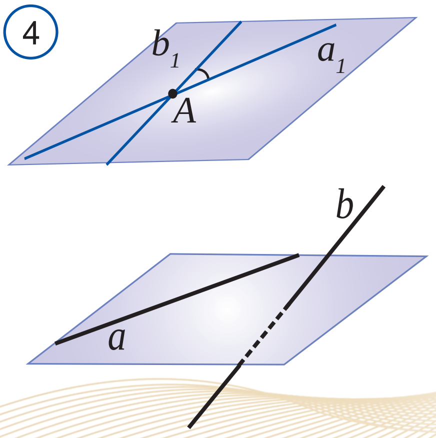
Teorema 3.4. ***Eger eki tuwrı sızıqtan biri qanday da bir tegislikte jatsa, ekinshisi bolsa bul tegislikti birinshi tuwrı sızıqta jatpaǵan noqatta kesip ótse, onda bul tuwrı sızıqlar ayqısh boladı.***

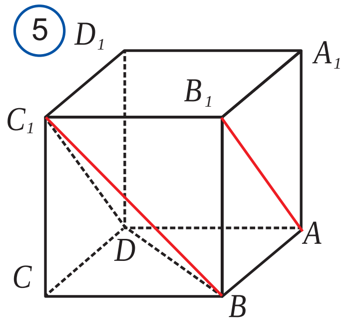


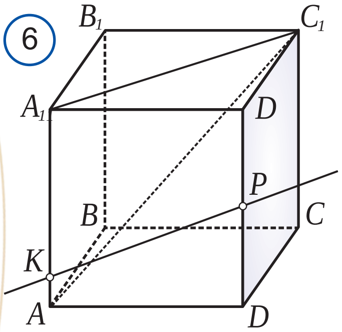
Dálillew. Aytayıq, p tuwrı sızıq α tegislikte jatsın. Q tuwrı sızıq bolsa bul tegislikti p tuwrı sızıqqa tiyisli bolmaǵan A noqatta kesip ótsin *(3-súwret)*. p hám q tuwrı sızıqlardıń ayqısh ekenligin dálilleymiz. Kerisinshe shama menen oylaymız: p hám q tuwrı sızıqlar qanday da bir β tegislikte jatsın. Onda β tegislikte p tuwrı sızıq hám A noqat tiyisli boladı. Óz gezeginde A noqat α tegislikke de tiyisli. Demek, α hám β tegislikler ústpe-úst túsedi. Nátiyjede shárt boyınsha, α tegislikke tiyisli bolmaǵan q tuwrı sızıq bul tegislikke tiyisli bolıp qaldı. Qarama-qarsılıq boljawımızdıń nadurıs ekenligin kórsetedi.

Ayqısh tuwrı sızıqlar arasındaǵı múyesh dep bul tuwrı sızıqlarǵa parallel bolǵan kesilisiwshi tuwrı sızıqlar arasındaǵı múyeshke aytıladı.

Ámelde a hám b ayqısh tuwrı sızıqlar arasındaǵı múyeshti tabıw ushın *(4-súwret)*:







1) qanday da bir A noqat saylanadı;

2) A noqattan ayqısh tuwrı sızıqlarǵa parallel a_1 hám b_1 tuwrı sızıqlar ótkeriledi;

3) bul tuwrı sızıqlar arasındaǵı múyesh ólshenedi. Bul algoritm nátiyjesi – A noqatqa baylanıslı emesligi haqqında oylap kóriń.

Másele. Kubtıń qońsılas jaqlarınıń ayqısh diagonalları arasındaǵı múyeshti tabıń.

Sheshiliwi. Shárt boyınsha, $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – kub qońsılas ABA_1B_1 hám CBC_1B_1 jaqlarınıń AB_1 hám C_1B diagonalları arasındaǵı múyeshti tabıw kerek *(5-súwret)*.

AB_1 ge parallel bolǵan DC_1 diagonaldı júrgizemiz. Onda anıqlama boyınsha, AB_1 hám BC_1 diagonalları arasındaǵı múyesh – DC_1 hám C_1B diagonallar arasındaǵı DC_1B múyeshke teń boladı. DC_1B – teń tárepli úshmúyeshlik.

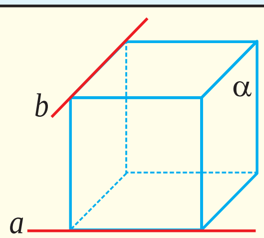
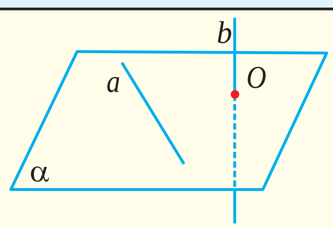
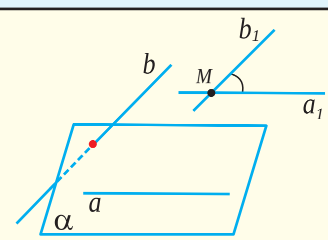
Demek, $DC_1B = 60°$.

Temaǵa tiyisli sorawlar hám shınıǵıwlar

1. Tuwrı sızıqlardıń ayqıshlıq belgisin aytıń.
2. Tuwrı sızıqlar arasındaǵı múyesh qanday anıqlanadı?
3. Ayqısh tuwrı sızıqlar parallel bolıwı múmkin be?
4. Ayqısh tuwrı sızıqlar arasındaǵı múyesh qanday anıqlanadı?
5. Keńislikte tuwrı sızıqlar óz ara qanday jaylasıwı múmkin?
6. Keńislikte óz ara kesilispeytuǵın tuwrı sızıqlar hárdayım da parallel bola ma?

Ámeliy shınıǵıw hám qollanıw

12.1. Kestede 12-temanıń tiykarǵı tayanısh maǵlıwmatları keltirilgen. Olardı dıqqat penen úyrenip shıǵıń hám anıqlama beriń.

1. Ayqısh tuwrı sızıqlar		
Anıqlaması	**Belgileniwi**	**Arasındaǵı múyesh**
 Bir tegislikte jatpaytuǵın tuwrı sızıqlar ayqısh tuwrı sızıqlar dep ataladı hám $a \dot{-} b$ tárizde ańlatıladı.	 Eger $a \subset \alpha$, $\alpha \cap b = O$, $O \notin a$ bolsa, $a \dot{-} b$ boladı.	 *Ayqısh tuwrı sızıqlar arasındaǵı múyesh* dep olarǵa parallel bolǵan, kesilisiwshi tuwrı sızıqlar arasındaǵı múyeshke aytıladı.

12.2. 6-súwrette $ABCDA_1B_1C_1D_1$ tuwrı múyeshli parallelepiped hám onıń AA_1 hám DD_1 qabırǵalarında sáykes túrde K hám P noqatlar súwretlengen. Kestede keltirilgen tuwrı sızıqlardıń óz ara jaylasıwınan kelip shıǵıp, kesteniń sáykes ketekshelerine tiyisli belgi (⊗ – kesilisiw hám ∸ ayqıshlıq) qoyılǵan. Kestedegi qátelerdi tabıń.

	AB	BB_1	A_1D_1
KP	⊗	∸	⊗
C_1A_1	∸	∸	⊗
C_1B	⊗	⊗	∸

12.3. a hám b tuwrı sızıqlar bir tegislikte jatadı. Bul tuwrı sızıqlardıń múmkin bolǵan óz ara jaylasıwların kórsetiń.

A) parallel   B) kesilisedi   C) kesilispeydi

D) ayqısh   E) perpendikulyar

12.4. a) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ parallelepiped; b) $ABCA_1B_1C_1$ prizma; c) $ABCD$ tetraedr; d) $SABCD$ piramidanı sızıń hám ondaǵı ayqısh qabırǵalar jubın anıqlań.

12.5. a tuwrı sızıq b tuwrı sızıqqa, b tuwrı sızıq bolsa c tuwrı sızıqqa ayqısh bolsa, a tuwrı sızıq c tuwrı sızıqqa ayqısh bola ma?

12.6. 7-súwrettegi ayqısh tuwrı sızıqlar belgilerin tabıń.

12.7. 8-súwrette súwretlengen EF hám GH kesindilerdiń óz ara jaylasıwı qanday?

12.8. 9-súwrette súwretlengen EH hám FG kesindiler óz ara kesilisedi me?

12.9. K, Z, M, N noqatlar – sáykes túrde $SABC$ úshmúyeshli durıs piramidanıń SA, AC, BC, SB qabırǵalarınıń ortaları. Eger piramidanıń qaptal qabırǵaları b, ultanınıń tárepi a ǵa teń bolsa, $KZMN$ tórtmúyeshlik perimetrin tabıń.

12.10. 10-súwrettegi $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kubta tómendegi tuwrı sızıqlar arasındaǵı múyeshlerdi tabıń: a) DC hám BC; b) AB hám BB_1; c) AA_1 hám D_1C; d) AA_1 hám D_1C_1; e) A_1C_1 hám AC; f) AB hám B_1D_1.

12.11. XU hám VT tuwrı sızıqlar parallel, XY hám VT tuwrı sızıqlar bolsa ayqısh. Eger: a) $\angle YXU = 40°$; b) $\angle YXU = 135°$; c) $\angle YXU = 90°$ bolsa, XY hám VT tuwrı sızıqlar arasındaǵı múyeshti tabıń.

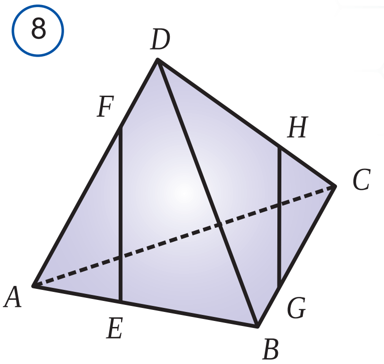
12.12. l tuwrı sızıq $ABCD$ parallelogramnıń BC tárepine parallel hám onıń tegisliginde jatpaydı. l hám CD tuwrı sızıqlar ayqısh ekenligin dálilleń. Eger parallelogramnıń múyeshlerinen biri: a) 58°; b) 133° bolsa, l hám CD tuwrı sızıqlar arasındaǵı múyeshti tabıń.

7

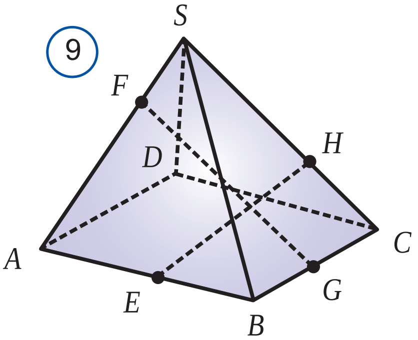
a)

b)

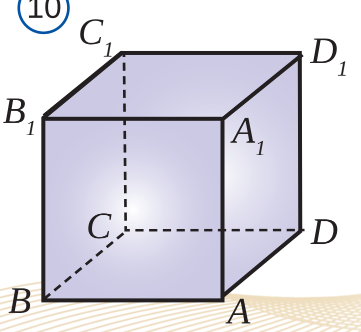
8



9



10

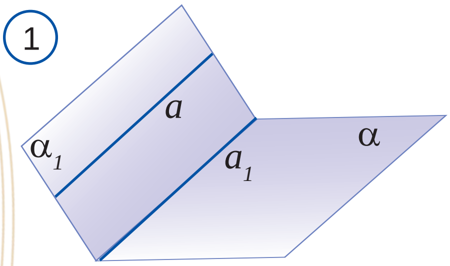


13 KEŃISLIKTE TUWRÍ SÍZÍQ HÁM TEGISLIKLERDIŃ ÓZ ARA JAYLASÍWÍ

Eger tuwrı sızıq penen tegislik kesilispese, *tuwrı sızıq hám tegislik parallel* dep ataladı. Tuwrı sızıq penen tegisliktiń parallelligi tómendegi belgi arqalı anıqlanadı.

3.5-teorema. ***Eger tegislikte jatpaytuǵın tuwrı sızıq sol tegisliktegi qanday da bir tuwrı sızıqqa parallel bolsa, bul tuwrı sızıq tegisliktiń ózine de parallel boladı.***

1



Dálillew. Aytayıq, α – tegislik, a – onda jatpaytuǵın tuwrı sızıq, a_1 bolsa α tegislikte jatqan hám a ǵa parallel tuwrı sızıq bolsın.

a hám A_1 tuwrı sızıqlar arqalı a_1 tegislikti júrgizemiz *(1-súwret)*. Bunnan, α hám α_1 tegislikler a_1 tuwrı sızıq boyınsha kesilisedi.

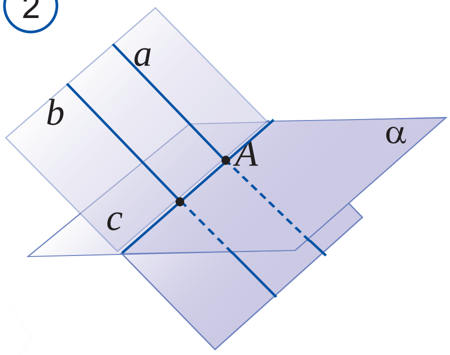
Eger a tuwrı sızıq α tegislikti kesip ótse, onda kesilisiw noqatı a_1 tuwrı sızıqqa tiyisli bolar edi. Biraq bunıń ilajı joq, sebebi a hám a_1 tuwrı sızıqlar óz ara parallel. Solay etip, a tuwrı sızıq α tegislikti kesip óte almaydı.

Demek, a tuwrı sızıq α tegislikke parallel.

Másele. Eger tegislik eki parallel tuwrı sızıqtan birin kesip ótse, ekinshisin de kesip ótiwin dálilleń.

Dálillew. a hám b – eki parallel tuwrı sızıq, α bolsa a tuwrı sızıqtı A noqatta kesip ótetuǵın tegislik bolsın *(2-súwret)*.

2

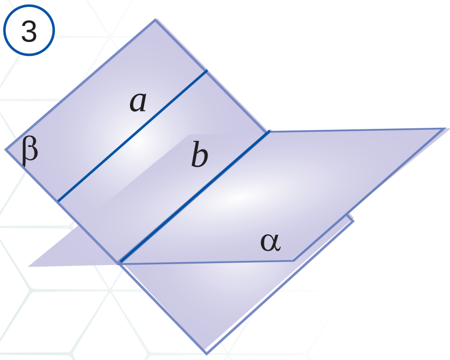


a hám b tuwrı sızıqlardan tegislik ótkeremiz. Ol α tegislikti qanday da bir c tuwrı sızıq boyınsha kesedi. c tuwrı sızıq a tuwrı sızıqtı A noqatta kesip ótedi.

Demek, oǵan parallel bolǵan b tuwrı sızıqtı da kesip ótedi. c tuwrı sızıq α tegislikte jatqanı ushın α tegislik b tuwrı sızıqtı da kesip ótedi.

3.6-teorema. ***Eger bir tegislik ekinshi tegislikke parallel bolǵan tuwrı sızıqtan ótse, bul tegisliklerdiń kesilisiw tuwrı sızıǵı da berilgen tuwrı sızıqqa parallel boladı.***

3



Dálillew. Aytayıq, a tuwrı sızıq α tegislikke parallel hám β tegislikte jatsın. B tuwrı sızıq bolsa α hám β tegisliklerdiń kesilisiw sızıǵı bolsın *(3-súwret)*. Onda a hám b tuwrı sızıqlar β tegislikte jatadı hám óz ara kesilispeydi. Keri jaǵdayda a tuwrı sızıq β tegislikti kesip óter edi.

Demek, a hám b tuwrı sızıqlar óz ara parallel.

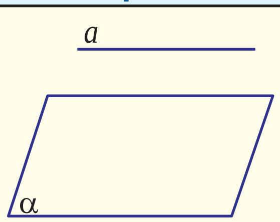
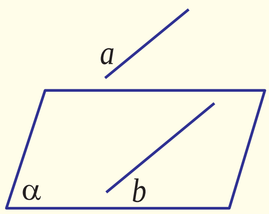
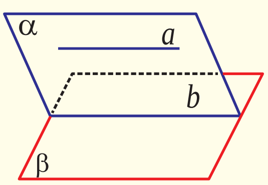
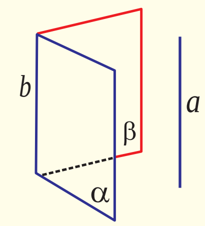
Temaǵa tiyisli sorawlar hám shınıǵıwlar

1. *Tuwrı sızıq hám tegislik keńislikte óz ara qalay jaylasıwı múmkin?*
2. *Tuwrı sızıq hám tegislik qashan parallel boladı?*
3. *Tuwrı sızıqtıń tegislikke parallellik belgisin aytıń.*
4. *Keńislikte tuwrı sızıq hám tegisliklerdiń jaylasıwı menen baylanıslı qanday qásiyetlerdi bilesiz?*

Ámeliy shınıǵıw hám qollanıw

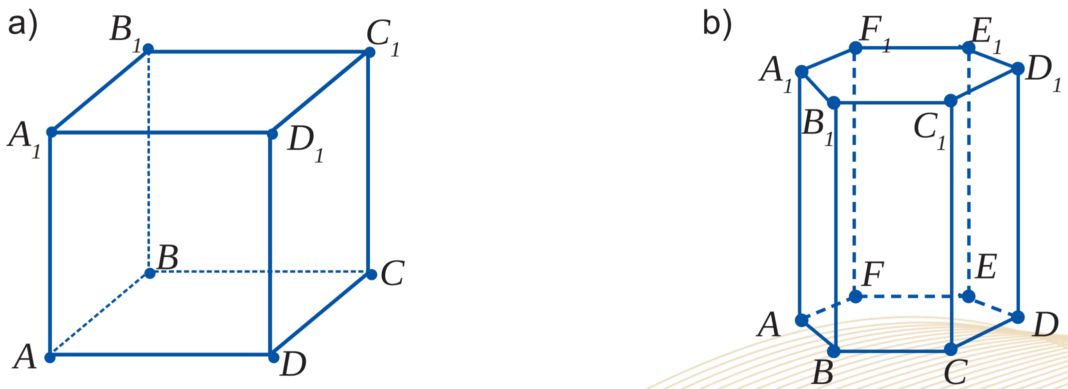
13.1. Kestede 13-temanıń tiykarǵı tayanısh maǵlıwmatları keltirilgen. Olardı dıqqat penen úyrenip shıǵıń hám anıqlama beriń.

a tuwrı sızıq hám α tegislik	kóp ulıwma noqatlarǵa iye.	tuwrı sızıq tegislikte jatadı: $a \subset \alpha$.
	bir ulıwma noqatqa iye.	tuwrı sızıq tegislikti kesedi: $a \otimes \alpha$.
	ulıwma noqatqa iye emes.	tuwrı sızıq tegislikke parallel: $a \parallel \alpha$.

Tuwrı sızıq hám tegisliklerdiń parallelligi			
Anıqlaması	**Belgileniwi**	**Qásiyetleri**	
 Eger a tuwrı sızıq α tegislik penen ulıwma noqatqa iye bolmasa, *tuwrı sızıq hám tegislik parallel* dep ataladı hám $a \parallel \alpha$ tárizde ańlatıladı.	 Eger a tuwrı sızıq α tegislikte jatpasa hám $a \parallel b$, $b \subset \alpha$ bolsa, onda $a \parallel \alpha$ boladı.	 Eger b tuwrı sızıq α hám β tegislikler kesilisiw sızıǵı, $a \subset \alpha$ hám $a \parallel \beta$ bolsa, onda $b \parallel a$ boladı.	 Eger b tuwrı sızıq α hám β tegislikler kesilisiw sızıǵı, $a \parallel \alpha$ hám $a \parallel \beta$ bolsa, $a \parallel b$ boladı.

13.2. Súwretke qarap a) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kubtıń; b) $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ durıs altımúyeshli prizmanıń bir-birine parallel bolǵan qabırǵaların hám jaqların anıqlań *(4-súwret)*.

4



5

13.3. 5-súwrette kombayn súwretlengen. Onıń atız maydanına (tegisligine) salıstırmalı qaysı bólekleri parallel ekenligin anıqlań.

13.4. 6-súwrette súwretlengen aǵash ustaları ásbabı – reysmus járdeminde aǵash taxtanıń qaysı jaǵına salıstırǵanda parallel tuwrı sızıq sızılıp atırǵanlıǵın anıqlań.

13.5. Tómendegi gáplerdi oqıń. Gáp durıs bolsa “+”, nadurıs bolsa, “-” belgisin janındaǵı ketekshege qoyıń.

1	Eger tegislikte jatpaytuǵın tuwrı sızıq sol tegisliktegi qanday da bir tuwrı sızıqqa parallel bolsa, bul tuwrı sızıq tegisliktiń ózine de parallel boladı	
2	Bir tegislikke parallel tuwrı sızıqlar óz ara parallel boladı	
3	Tegislikke parallel tuwrı sızıq bul tegislikte jatqan qálegen tuwrı sızıqqa da parallel boladı.	
4	Eger bir tegislik ekinshi tegislikke parallel bolǵan tuwrı sızıqtan ótse, bul tegisliklerdiń kesilisiw tuwrı sızıǵı da berilgen tuwrı sızıqqa parallel boladı.	
5	Eger tuwrı sızıq penen tegislik kesilispese, tuwrı sızıq hám tegislik *parallel* dep ataladı.	
6	Arasındaǵı múyesh 90° qa teń tuwrı sızıqlar *perpendikulyar tuwrı sızıqlar* dep ataladı.	
7	Ayqısh tuwrı sızıqlar arasındaǵı múyesh dep bul tuwrı sızıqlarǵa parallel bolǵan kesilisiwshi tuwrı sızıqlar arasındaǵı múyeshke aytıladı.	

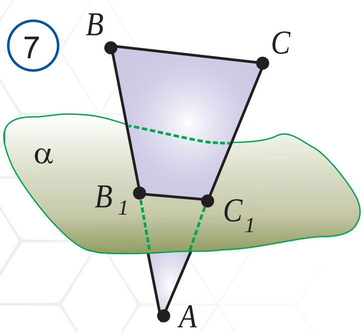
6

13.6. A hám C noqatlar α tegislikte jatadı. B hám D noqatlar β tegislikte jatadı. AC, CD, BD, AB, BC hám AD tuwrı sızıqlardan qaysıları β tegislikti kesip ótedi?

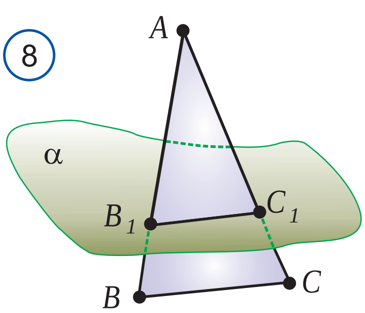
13.7. ABC úshmúyeshlik α tegislikti B_1 hám C_1 noqatlarda kesip ótedi *(7-súwret)*. Eger $AB_1 : BB_1 = 2 : 3$, $BC = 15\ cm$, $BC \parallel B_1C_1$ bolsa, B_1C_1 kesindiniń uzınlıǵın tabıń.

13.8. α tegislik ABC úshmúyeshliktiń AB hám AC tárepleri̇n B_1 hám C_1 noqatlarda kesip ótedi *(8-súwret)*. Eger $AB_1 : BB_1 = 3 : 1$, $B_1C_1 = 12\ cm$, $BC \parallel \alpha$ bolsa, BC kesindiniń uzınlıǵın tabıń.

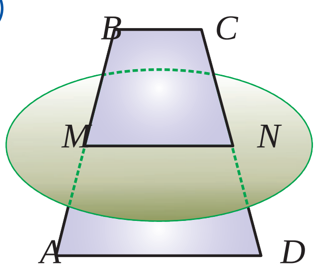
7



8



9



13.9. α tegislik $ABCD$ trapeciyanı onıń AD ultanına parallel hám qaptal tárepleriniń ortası M hám N noqatlarda kesip ótedi *(9-súwret)*. Eger AD = 17 cm, BC = 9 cm bolsa, MN kesindiniń uzınlıǵın tabıń.

13.10. Tegislikke onda jatpaytuǵın noqattan neshe parallel tuwrı sızıq júrgiziw múmkin?

13.11. a tuwrı sızıq α tegislikke parallel. Durıs tastıyıqlawdı tabıń.

A) a tuwrı sızıq α tegisliktiń tek bir tuwrı sızıǵına parallel boladı.

B) a tuwrı sızıq α tegisliktiń bir tuwrı sızıǵınan basqa barlıq tuwrı sızıqlarına ayqısh boladı.

C) α tegislikte a tuwrı sızıqqa parallel hám ayqısh bolǵan kóplegen tuwrı sızıqlar tabıladı.

D) α tegislikte tek bir a tuwrı sızıqqa parallel hám bul tegisliktiń qálegen noqatınan ótetuǵın tuwrı sızıq bar.

13.12. A, B, C, D noqatlar bir tegislikte jatpaydı. M, N, K, Z noqatlar sáykes túrde AD, BD, BC, AC kesindilerdiń ortaları. Eger $CD = AB$ bolsa, MK hám NZ tuwrı sızıqlardıń perpendikulyarlıǵın dálilleń.

13.13. $ABCD$ parallelogramnıń AB hám BC tárepleri α tegislikti kesip ótedi. AD hám DC tuwrı sızıqlar da α tegislikti kesip ótiwin dálilleń.

13.14. ABC hám ABD úshmúyeshlikler bir tegislikte jatpaydı. CD tuwrı sızıqqa parallel bolǵan qálegen tuwrı sızıqtıń bul úshmúyeshlikler tegisligin kesip ótiwin dálilleń.

13.15. Berilgen eki tuwrı sızıqtı kesip ótetuǵın tuwrı sızıqlardıń bir tegislikte jatıwın dálilleń.

13.16. $ABCD$ kvadrattıń C tóbesi arqalı kvadrat tegisliginde jatpaǵan CK tuwrı sızıq ótedi:

a) CK hám AD ayqısh ekenligin dálilleń;

b) CK hám AD arasındaǵı múyeshti tabıń.

13.17. Isbilermen alyuminiyden 10-súwrette súwretlengen záńgini islep shıǵarıwdı rejelestirdi. Záńginiń hárbirinde 7 tekshe bolǵan, bir-birine bekkemlengen eki bólekten ibarat.

1) Záńginiń qaysı bólekleri óz ara parallel hám qaysıları óz ara ayqısh ekenligin anıqlań.

2) Eger záńginiń keńligi 0,5 m, biyikligi keńliginen 3,5 ret uzın ekenligi belgili bolsa, bir záńgini tayarlaw ushın neshe m truba kerek boladı?

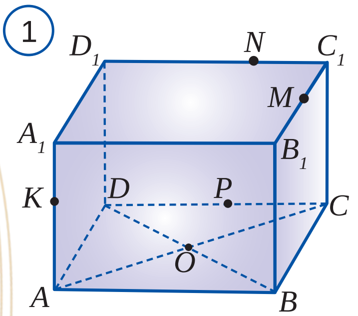
3) 1 m alyuminiy trubanıń bahası 20 000 sum bolsa, bir záńgini islep shıǵarıw ushın qansha sum alyuminiy truba kerek boladı?

Eń sońǵı filosofiya mektebi – Iskandariya mektebi dúnyaǵa eramızǵa shekemgi 300-jıllarda jasaǵan ataqlı alım Evklidti bergen. Geometriyanıń aksiomatikalıq dúzilisi birinshi ret Evklidtiń "Negizler" shıǵarmasınıń on úshinshi kitabında usınıs etilgen. Shama menen eki mıń jıl dawamında bul jumıs geometriyanıń sistemalı kursın úyreniw ushın tiykar bolıp qalıp atır. Ráwiyatlarǵa qaraǵanda, patsha Ptolemey Evklidten geometriyanı úyreniwdiń "Negizler" shıǵarmasındaǵıǵa qaraǵanda qısqalaw hám ańsatlaw usılın tabıw múmkin emes pe, dep soraǵan. Evklid oǵan: "Geometriyada patshalıq jolı joq", dep juwap bergen.

10

ÓZIŃIZDI SÍNAP KÓRIŃ

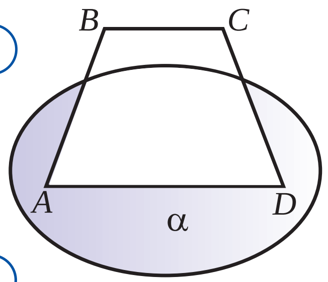
1. 1-súwrette $ABCDA_1B_1C_1D_1$ tuwrı múyeshli parallelepiped hám onıń B_1C_1, C_1D_1, CD hám AA_1 qabırǵalarınıń ortaları – sáykes túrde M, N, P, K noqatlar súwretlengen. O noqat – $ABCD$ ultanı orayı. Kestede keltirilgen tuwrı sızıqlardıń óz ara jaylasıwın súwretten anıqlap, kesteniń sáykes keteksheSine tiyisli belgi ($\otimes$ – kesilisiw, || – parallellik hám $\div$ – ayqıshlıq)ni jazıń.

1


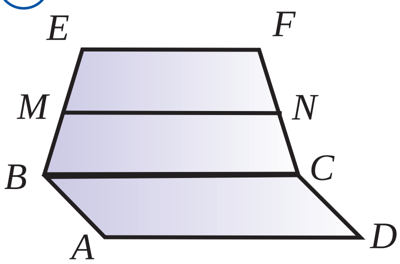
Tuwrı sızıqlar	MN	NP	C_1O	NO
AA_1				
BC_1				
BD				
AC				

2. A, B, C, D noqatlar bir tegislikte jatadı. AB hám CD tuwrı sızıqlar haqqında ne aytıw múmkin?

A) parallel boladı B) kesilisedi C) ayqısh boladı

2


3. $ABCD$ tórtmúyeshliktiń AD tárepi arqalı tegislik ótkerilgen (2-súwret). Eger $\angle BCA = \angle CAD$ bolsa, BC tárep α tegislikke parallel ekenligin dálilleń.

3


4. $ABCD$ kvadrat hám $BEFC$ trapeciya *(3-súwret)* bir tegislikte jatpaydı. M hám N noqatlar – sáykes túrde BE hám FC kesindilerdiń ortası.

1) MN niń AD ǵa parallel ekenligin dálilleń.

2) Eger $AD = 10$ cm, $EF= 6$ cm bolsa, MN di tabıń.

5. $ABCD$ parallelogramnıń AD tárepinde A_1 noqat sonday saylanadı, $DA_1 = 4$ cm. AC diagonalǵa parallel tegislik A_1 noqattan kesip ótedi hám CD tárepti C_1 noqattan kesip ótedi.

1) C_1DA_1 hám ABC úshmúyeshliklerdiń uqsaslıǵın dálilleń.

2) Eger $BC = 10$ cm, $A_1C_1 = 6$ cm bolsa, AC nı tabıń.

6. α tegislik BAC múyesh táreplerin A_1 hám B_1 noqatlarda, oǵan parallel β tegislik bolsa A_2 hám B_2 noqatlarda kesedi. $A_1B_1 = 18$, $AA_1 = 24$, $AA_2 = \frac{1}{2}A_1A_2$ bolsa, A_2B_2 hám AA_2 ni tabıń.

7. FA tuwrı sızıq $ABCD$ parallelogramnıń tóbesinen ótedi hám parallelogramm tegisliginde jatpaydı.

1) FA hám CD ayqısh ekenligin dálilleń.

2) FAB múyeshi 30° bolsa, FA hám CD tuwrı sızıqlar arasındaǵı múyeshti tabıń.

8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kubınıń qabırǵası a ǵa teń. AD_1 tuwrı sızıqtan hám BC kesindi ortasınan ótetuǵın tegislik penen kubtı keskenda payda bolatuǵın kesimdi jasań. Kesimniń maydanın tabıń.

9. Durıs tórtmúyeshli piramidanıń qaptal qabırǵası 8 cm bolıp, ultan tegisligi menen 30° lı múyesh payda etedi. Piramidanıń biyikligin hám qaptal betiniń maydanın tabıń.

10. A, B, C hám D noqatlar bir tegislikte jatpaydı. Eger AB hám BC kesindiler ortaları arasındaǵı aralıq 6 ǵa teń hám $AC = 16$, $BD = 20$ bolsa, AC hám BD tuwrı sızıqlar arasındaǵı múyeshti tabıń.

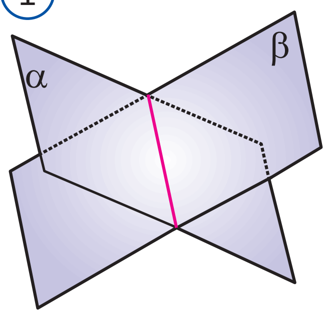
14 KEŃISLIKTE TEGISLIKLERDIŃ ÓZ ARA JAYLASÍWÍ

Eki tegislik yamasa ulıwma noqatqa iye, yamasa ulıwma noqatqa iye bolmawı múmkin. Birinshi jaǵdayda S₃ aksioma boyınsha, bul tegislikler ulıwma tuwrı sızıqqa da iye boladı, yaǵnıy tuwrı sızıq boylap kesilisedi *(1-súwret)*. Ekinshi jaǵdayda tegislikler kesilispeydi *(2-súwret)*.

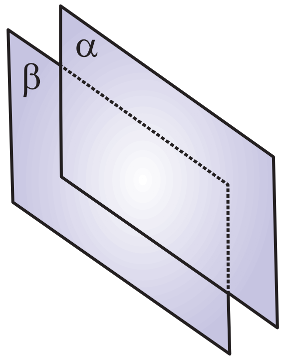
Kesilispeytuǵın tegislikler parallel tegislikler dep ataladı. Parallel tegislikler haqqında bólmeniń polı hám tóbesi, qarama-qarsı diywallar kóz aldımızǵa keliwi múmkin *(3-súwret)*.

Eki tegisliktiń parallelligi tómendegi belgi arqalı anıqlanadı.

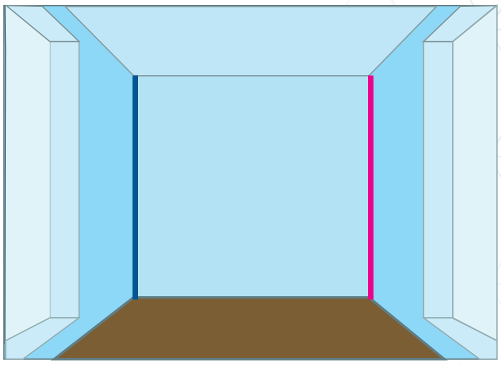
1



2



3



3.7-teorema. Eger bir tegisliktegi kesilisiwshi eki tuwrı sızıq ekinshi tegisliktegi eki tuwrı sızıqqa sáykes túrde parallel bolsa, bul tegislikler parallel boladı.

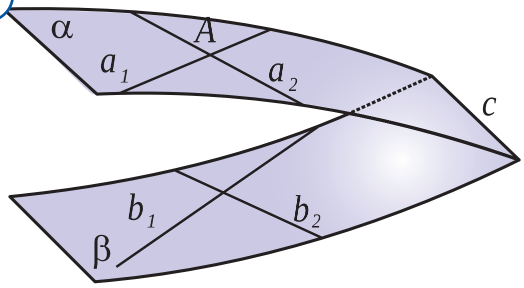
Dálillew. Aytayıq, α hám β – berilgen tegislikler, a hám b – α tegislikte jatqan hám A noqatta kesilisiwshi tuwrı sızıqlar, a_1 hám b_1 bolsa β tegislikte jatqan hám sáykes túrde a hám b tuwrı sızıqlarǵa parallel tuwrı sızıqlar bolsın *(4-súwret)*.

Meyli, α hám β tegislikler óz ara parallel bolmaytuǵının, yaǵnıy qanday da c tuwrı sızıq boylap kesilissin. Onda 3.6 – teorema boyınsha, a_1 hám a_2 tuwrı sızıqlar sáykes túrde b_1 hám b_2 tuwrı sızıqlarǵa parallel bolıp, β tegislikke de parallel boladı. Sol sebepli olar bul tegislikte jatqan c tuwrı sızıqtı da kesip ótpeydi.

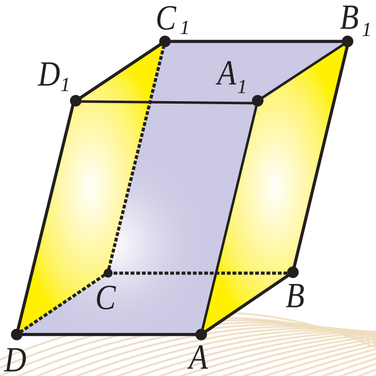
Solay etip, α tegislikte jatqan A noqat arqalı c tuwrı sızıqqa parallel eki: a_1 hám a_2 tuwrı sızıqlar ótedi. Parallellik aksioması boyınsha, bunday bolıwı múmkin emes. Qarama-qarsılıq boljawımızdıń nadurıs ekenligin kórsetedi.

Parallelepipedtiń qaptal jaqları *(5-súwret)* parallel bolıwın bul teoremadan paydalanıp óz betinshe dálilleń.

4

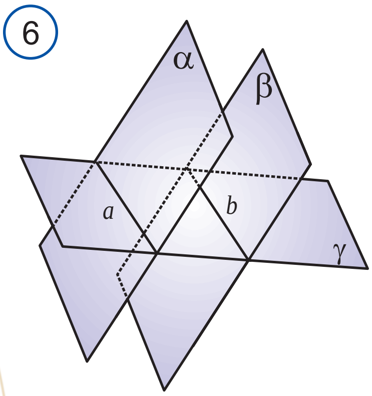


5



***3.8-teorema.* Eki parallel tegisliktiń úshinshi tegislik penen kesilisiw tuwrı sızıqları óz ara parallel boladı.**

6



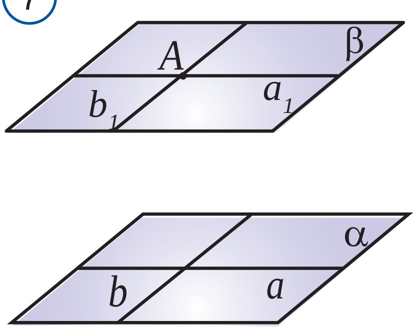
Dálillew. Aytayıq, α hám β parallel tegislikler γ tegislikti sáykes túrde a hám b tuwrı sızıqlar boylap kesip ótsin (*6-súwret*). a hám b tuwrı sızıqlar parallel ekenligin dálilleymiz.

Meyli, a hám b tuwrı sızıqlar qanday da bir Q noqatta kesilissin. Onda Q noqat α tegislikte jatadı, sebebi a tuwrı sızıq α tegislikte jatadı. Sonday-aq, Q noqat β tegislikte jatadı, sebebi b tuwrı sızıq β tegislikte jatadı. Nátiyjede α hám β tegislikler ulıwma Q noqatqa iye bolıp atır. Bul bolsa shárt boyınsha ilajı joq. Qarama-qarsılıq boljawımızdıń nadurıs ekenligin kórsetedi.

***3.9-teorema.* Berilgen tegislikke onnan sırttaǵı noqattan birden-bir parallel tegislik ótkeriw múmkin.**

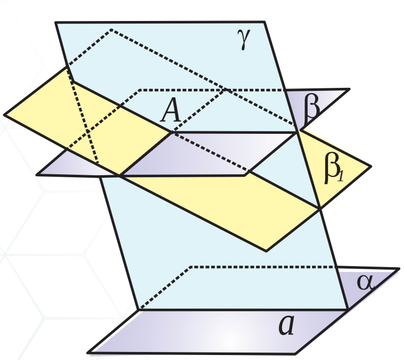
Dálillew. Berilgen α tegislikte kesilisetuǵın eki a, b tuwrı sızıqlardı júrgizemiz. Berilgen A noqattan olarǵa parallel a_1, b_1 tuwrı sızıqlardı ótkeremiz (*7-súwret*). a_1, b_1 tuwrı sızıqlar arqalı β tegislik ótkeremiz. Bul tegislik 3.7-teorema boyınsha, α tegislikke parallel bolıp, izlenip atırǵan tegislik boladı.

7



Endi bul tegisliktiń birden-birligin kórsetemiz. Meyli, α tegislikke parallel jáne bir β_1 tegislik bar bolsın (*8-súwret*). A noqattan hám a tuwrı sızıqtan ótetuǵın γ tegislikti ótkeremiz. Bul tegislik β tegislikti a_1 tuwrı sızıq boylap, β_1 tegislikti a_2 tuwrı sızıq boylap kesip ótedi. a_1, a_2 tuwrı sızıqlar 3.6 – teorema boyınsha a tuwrı sızıqqa parallel boladı. Biraq bunday bolıwı múmkin emes, sebebi tegislikte onda jatpaytuǵın noqattan tek bir parallel tuwrı sızıq ótkeriw múmkin. Qarama-qarsılıq boljawımızdıń nadurıs ekenligin kórsetedi.

8



***3.10-teorema.* Úshinshi tegislikke parallel eki tegislik óz ara parallel boladı.**

Bul teoremanı óz betinshe dálilleń.

***3.11-teorema.* Parallel tegislikler arasındaǵı parallel tuwrı sızıqlar kesindileri teń bolıp tabıladı.**

Dálillew. Aytayıq, α hám β tegislikler k hám l tuwrı sızıqlardan AC hám BD kesindilerdi ajıratsın (*9-súwret*). Bul kesindilerdiń teńligin kórsetemiz. k hám l tuwrı sızıqlardan ótetuǵın γ tegislik parallel tegisliklerdi AC hám BD tuwrı sızıqlar boylap kesip ótedi. Nátiyjede qarama-qarsı tárepleri parallel bolǵan $ABCD$ tórtmúyeshlikke, yaǵnıy parallelogramǵa iye bolamız. Parallelogramnıń qarama-qarsı tárepleri óz ara teń boladı. Atap aytqanda, $AB = CD$.

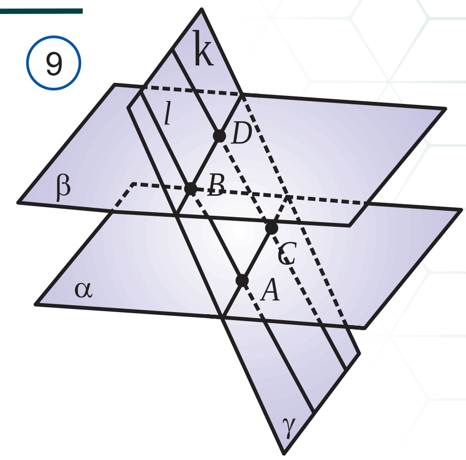
3.12-teorema. ***Úsh parallel tegislikler arasındaǵı qálegen tuwrı sızıqlar kesindileri óz ara proporcional boladı.***

Bul teoremanı da óz betinshe dálilleń.

Temaǵa tiyisli sorawlar hám shınıǵıwlar

1. *Tegislikler keńislikte qanday jaylasıwı múmkin?*
2. *Parallel tegislikler dep qanday tegisliklerge aytıladı?*
3. *Tegisliklerdiń parallellik belgisin aytıń.*
4. *Keńislikte tegisliklerdiń jaylasıwı menen baylanıslı qanday qásiyetlerdi bilesiz?*
5. *Parallelepipedtiń qaptal jaqları parallel bolıwın túsindiriń.*

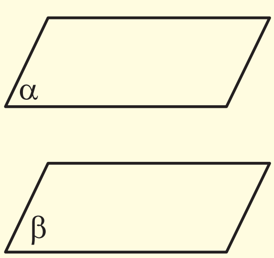
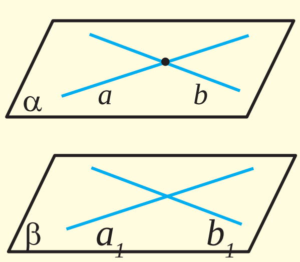
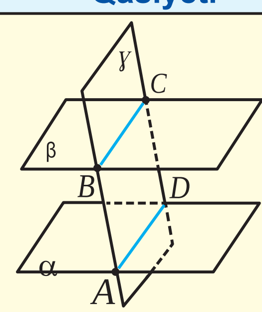
9



Ámeliy shınıǵıw hám qollanıw

14.1. Kestede 14-temanıń tiykarǵı tayanısh maǵlıwmatları keltirilgen. Olardı dıqqat penen úyrenip shıǵıń hám anıqlama beriń.

α hám β tegislikler	Ulıwma noqatqa iye.	Kesilisedi	$\alpha \otimes \beta$
	Ulıwma noqatqa iye emes.	Parallel	$\alpha // \beta$

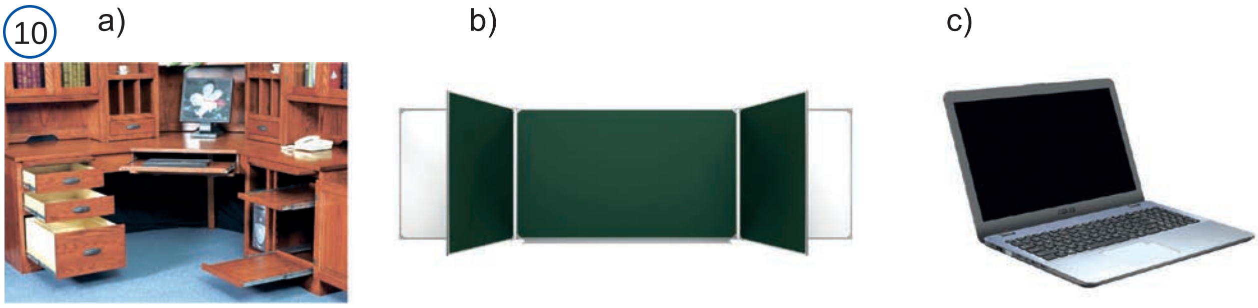
Tegisliklerdiń parallelligi		
Anıqlaması	**Belgilari**	**Qásiyeti**
		
Kesilispeytuǵın α hám β tegislikler parallel tegislikler dep ataladı hám $a \parallel b$ tárizde ańlatıladı.	Eger $a \subset \alpha$, $b \subset \alpha$, $a \otimes b$, $a_1 \subset \beta$, $b_1 \subset \beta$, $a_1 \otimes b_1$, $a \parallel a_1$, $b \parallel b_1$ bolsa, $\alpha \parallel \beta$ boladı.	Eger $\alpha \parallel \beta$ hám γ kesiwshi tegislik, $\alpha \cap \gamma = AD$ hám $\beta \cap \gamma = BC$ bolsa, $AD \parallel BC$ boladı.

14.2. 10-súwretten parallel tegislikler belgisi neler arqalı berilgenligin anıqlań.

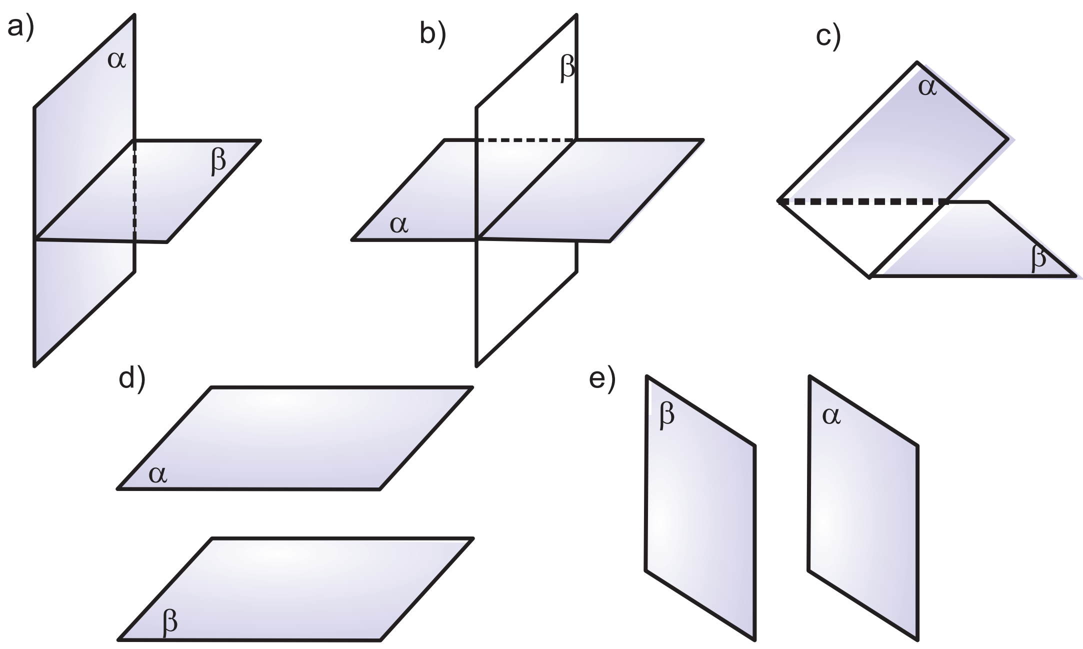
14.3. 1) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ parallelepipedtiń; 2) $ABCA_1B_1C_1$ prizmanıń parallel jaqların anıqlań.

14.4. Qanday da bir ulıwma noqatı bolmaǵan α hám β tegislikler keńislikte qanday jaylasadı?

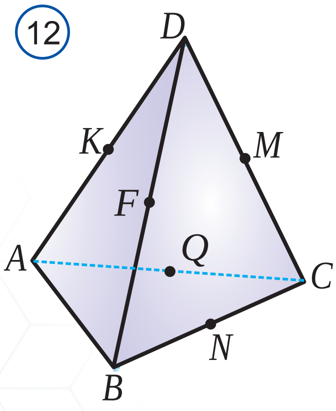
10



11



12



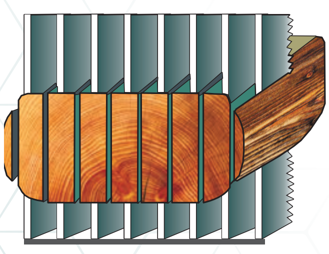
14.5. α hám β tegislikleri parallel. a hám b tuwrı sızıqları α tegislikte jatadı, c hám d tuwrı sızıqlar bolsa β tegislikte jatadı. Tómendegi tastıyıqlardan qaysıları durıs?

A) $\alpha \parallel b$ B) $c \parallel b$ C) $b \parallel \beta$ D) $\beta \parallel a$
E) $c \parallel a$ F) $d \parallel b$ G) $a \parallel \alpha$ H) $d \parallel \alpha$

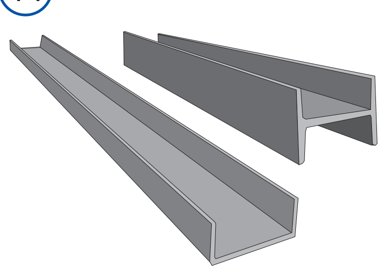
14.6. Kesilisiwshi eki tegislik súwretlengen úsh súwretti kórsetiń *(11-súwret)*.

14.7. K, F, M, N, Q noqatlar 12-súwrette súwretlengen $ABCD$ tetraedr sáykes qabırǵalarınıń ortaları bolsa, a) K noqattan ótetuǵın hám ABC tegislikke parallel; b) BD tuwrı sızıqtan ótetuǵın hám MNQ tegislikke parallel bolǵan tegislikti anıqlań.

13



14

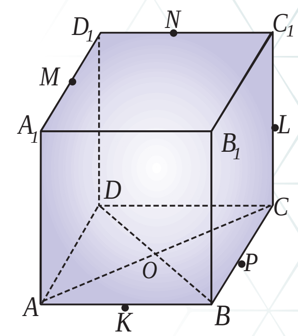


14.8. 13- hám 14-súwretlerden parallel tegisliklerdi anıqlań.

14.9. 15-súwrette $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kub hám onıń bazı qabırǵalarınıń ortaları – M, N, P, K hám L noqatlar súwretlengen. O noqat – $ABCD$ ultan orayı. Kestede keltirilgen tegisliklerdiń óz ara jaylasıwın súwretten anıqlap, kesteniń sáykes ketekshesine tiyisli belgi (⊗ – kesilisiw, || – parallellik)ni jazıń.

Tegislikler	ADC	PLN	MNP	A_1C_1C
$A_1B_1C_1$				
MNK				
MKP				
A_1DC_1				

15



14.10. α hám β tegislikler parallel. Olardıń heshbirine tiyisli bolmaǵan noqattan γ tegislik ótkerilgen. Tuwrı tastıyıqlardı kórsetiń.

a) γ tegislik – α tegislikke parallel bolǵan birden-bir tegislik;

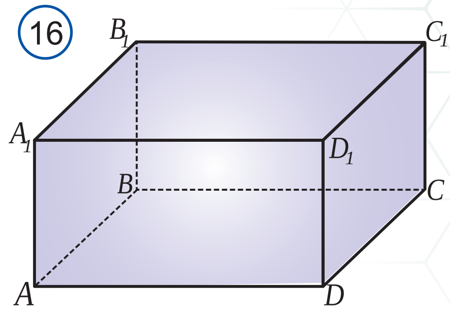
b) γ tegislik – β tegislikti kesip ótetuǵın birden-bir tegislik;

c) γ tegislik – β tegislikke parallel bolǵan birden-bir tegislik;

d) γ tegislik – α tegislikti kesip ótetuǵın birden-bir tegislik;

e) γ tegislik – α tegislikke de, β tegislikke de parallel bolǵan birden-bir tegislik.

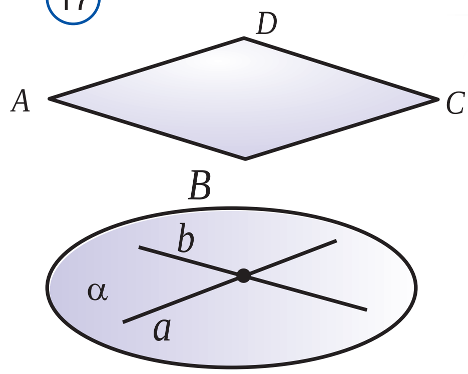
16



14.11. 16-súwrette $ABCDA_1B_1C_1D_1$ tuwrı múyeshli parallelepiped súwretlengen.

a) $A_1B_1C_1D_1$ hám $B_1A_1D_1C_1$; b) ADD_1A_1 hám $ABCD$; c) ABB_1A_1 hám C_1D_1DC; d) $BADC$ hám ABB_1A_1; e) CC_1B_1B hám ADD_1A_1 tegisliklerdiń óz ara jaylasıwın anıqlań.

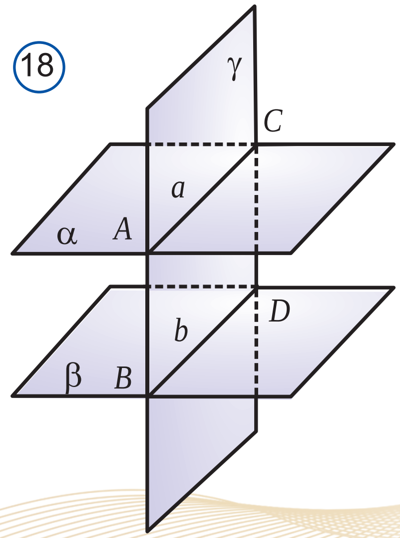
17



14.12. AB, BC kesindiler $ABCD$ parallelogramnıń tárepleri bolıp, olar uyqas túrde a hám b tuwrı sızıqlarǵa parallel *(17-súwret)*. a hám b tuwrı sızıqlar óz ara kesilisedi hám α tegislikke tiyisli. $ABCD$ hám α tegisliklerdiń keńislikte óz ara jaylasıwın anıqlań.

14.13. a hám b ayqısh tuwrı sızıqlar berilgen. a tuwrı sızıqtan ótetuǵın hám β tegislikke parallel bolǵan neshe tegislik ótkeriw múmkin?

18

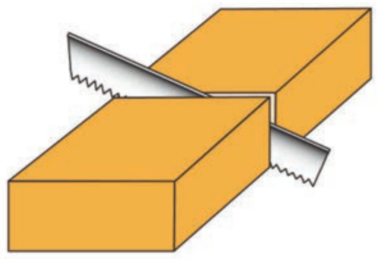


14.14. Eki α hám β tegisliklerdiń kesilisiw sızıǵı úshinshi – γ tegislikke parallel. α hám β tegisliklerdiń keńislikte óz ara jaylasıwın anıqlań.

14.15. AB hám CD parallel tuwrı sızıqlar arqalı ótkerilgen γ tegislik α hám β parallel tegisliklerdi sáykes túrde AC hám BD tuwrı sızıqlar boylap kesip ótedi. Eger BD=15 cm bolsa, AC kesindi uzınlıǵın tabıń. *(18-súwret)*.

14.16. Aǵash taxta bóleginiń barlıq jaqları tuwrı tórtmú-

19



yeshlikten ibarat *(19-súwret)*. Taxtanı qanday bağıtta pıshqılamayıq, hárdayım parallelogramm bolıwın dálilleń.

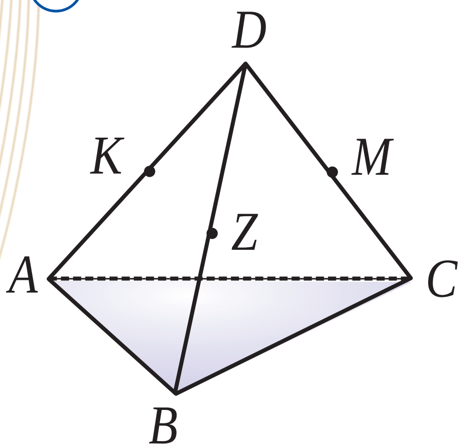
14.17. Qálegen eki ayqısh tuwrı sızıqlar arqalı birden-bir parallel tegislikler jubın júrgiziw múmkinligin dálilleń.

14.18. α hám β tegislikler parallel. α tegislikte jatıwshı qálegen tuwrı sızıq β tegislikke parallel bolıwın dálilleń.

14.19. O noqat – bir tegisikte jatpaytuǵın AA_1, BB_1, CC_1 kesindilerdiń ulıwma ortası. ABC hám $A_1B_1C_1$ tegislikler parallel ekenligin dálilleń.

14.20. $ABCD$ parallelogramm hám onı kespeytuǵın tegislik berilgen. Parallelogramnıń A, B, C, D tóbelerinen tegislikti sáykes túrde A_1, B_1, C_1, D_1 noqatlarda kesip ótetuǵın parallel tuwrı sızıqlar ótkerilgen. Eger $AA_1 = 4\ m$, $BB_1 = 3\ m$ hám $CC_1 = 1\ m$ bolsa, DD_1 kesindi uzınlıǵın tabıń.

20



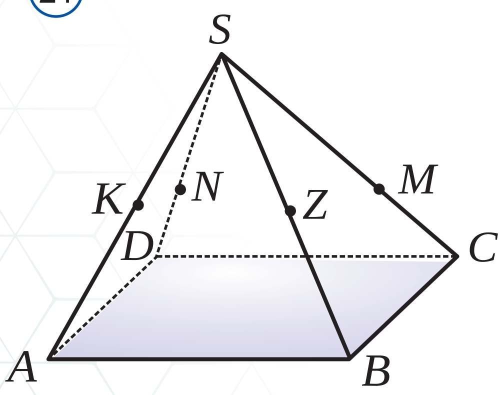
14.21. Eki parallel tegislik berilgen. Bir tegisliktiń A hám B noqatlarınan ekinshi tegislikti A_1 hám B_1 noqatlarda kesip ótetuǵın parallel tuwrı sızıqlar ótkerilgen. Eger $AB = a$ bolsa, A_1B_1 kesindi uzınlıǵın tabıń.

14.22. α hám β tegislikler parallel. α tegisliktiń M hám N noqatlarınan β tegislikti K hám L noqatlarda kesip ótetuǵın parallel tuwrı sızıqlar ótkerilgen. $MNLK$ parallelogramm ekenligin dálilleń. Eger ML=14 cm, NK= 8 cm hám MK:MN= 9:7 bolsa, $MNLK$ tórtmúyeshlik perimetrin tabıń.

14. 23. OF hám OP nurlar α hám β parallel tegisliklerdi sáykes túrde F_1, P_1, F_2, P_2 noqatlarda kesip ótedi. Eger $F_1P_1 = 3\ cm$, $F_2P_2 = 5\ cm$ hám $P_1P_2 = 4\ cm$ bolsa, OP_1 kesindi uzınlıǵın tabıń.

14.24. OA hám OB nurlar α hám β parallel tegisliklerdi sáykes túrde A_1, B_1, A_2, B_2 noqatlarda kesip ótedi. Eger $OA_1 = 16\ cm$, $A_1A_2 = 24\ cm$ hám $A_2B_2 = 50\ cm$ bolsa, A_1B_1 kesindi uzınlıǵın tabıń.

21



14.25. D noqat ABC úshmúyeshlik tegisligine tiyisli emes (20-*súwret*). K, M, Z noqatlar sáykes túrde DA, DB hám DC kesindilerdıń ortası. ABC hám KZM tegisliklerdiń óz ara jaylasıwın anıqlań.

14.26. S noqat $ABCD$ parallelogramm tegisligine tiyisli emes (21-súwret). K, Z, M, N noqatlar sáykes túrde SA, SB, SC hám SD kesindilerge tiyisli. Eger

$SK = AK,\ \ SZ = BZ,\ CM : MC = 2 : 1,$

$SN : ND = 2 : 1$ bolsa, $ABCD$ hám $KZMN$ tegisliklerdiń óz ara jaylasıwın anıqlań.

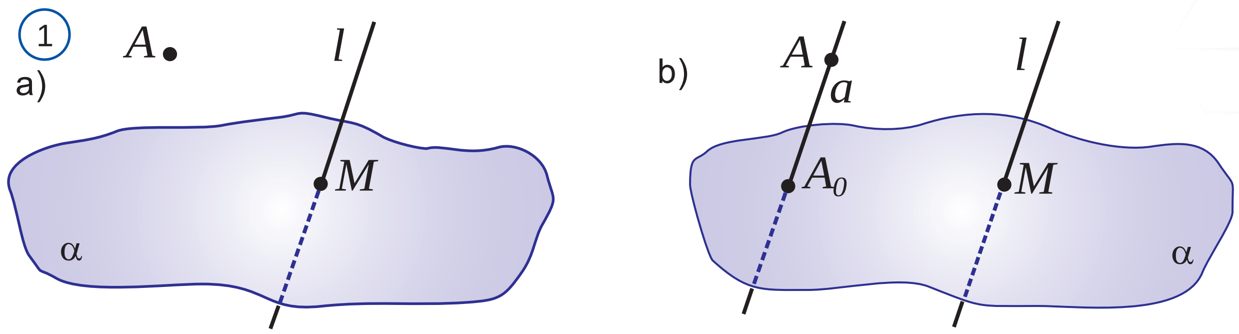
15 KEŃISLIKTE PARALLEL PROEKCIYALAW

Keńisliktegi figuralar túrli usıllar menen tegislikte súwretlenedi. Tómende olar menen tanısamız.

Keńisliktegi figuranı tegislikke parallel proekciyalaw dep sonday sáwlelendiriwge aytıladı, ol jaǵdayda figuranıń hárbir noqatı berilgen proekciyalaw baǵdarına parallel bolǵan tuwrı sızıqlar boylap tegislikke kóshiriledi.

Parallel proekciyalawdı jaqtılıq nurları járdeminde qanday da bir zattıń diywal yamasa poldaǵı sayasına salıstırıw múmkin.

Solay etip, parallel proekciyalawda qanday da bir figura hám *proekciyalaw tegisligi* dep atalıwshı tegislik alınadı hám *proekciyalaw baǵdarı*, yaǵnıy qanday da bir tuwrı sızıq saylanadı. Álbette, bul tuwrı sızıq proekciya tegisligi menen kesilisiwi kerek.

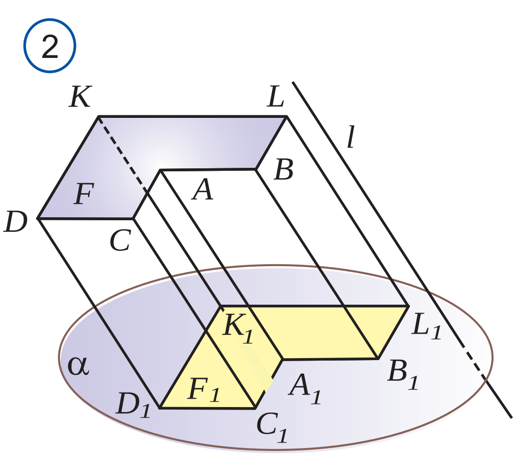


Aytayıq, qálegen α tegislik hám proekciyalaw tuwrı sızıǵı – l hám tegislikte de, tuwrı sızıqta da jatpaytuǵın A noqat berilgen bolsın *(1a-súwret)*. A noqattan α tegislikke l tuwrı sızıqqa parallel bolǵan tuwrı sızıq ótkeremiz. Bul tuwrı sızıq α tegislikti A_0 noqatta kesip ótsin *(1b-súwret)*.

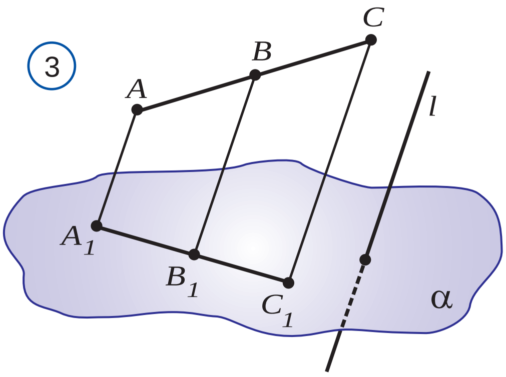
Tabılǵan A_0 noqat A noqattıń α tegislikke parallel proekciyası dep ataladı.

Solay etip, parallel proekciyalawda noqat noqatqa ótedi eken.

Aytayıq, qanday da bir F figuranı α tegislikke l baǵıt boyınsha parallel proekciyalaw kerek bolsın. Onıń ushın F figuranıń qálegen noqatın alamız, onnan l ge parallel tuwrı sızıq ótkeremiz hám onıń α tegislik penen kesilisiw noqatın belgileymiz. Bunday noqatlar α tegislikte qanday da F_1 figuranı payda etedi. Usı F_1 figura F figuranıń α tegisliktegi parallel proekciyası boladı. 2-súwrette F figuranıń α tegislikke proekciyası – F_1 figura súwretlengen.



Parallel proekciyalawdıń tómendegi qásiyetlerin de keltirip ótemiz. Olardı óz betinshe dálillep kóriń.



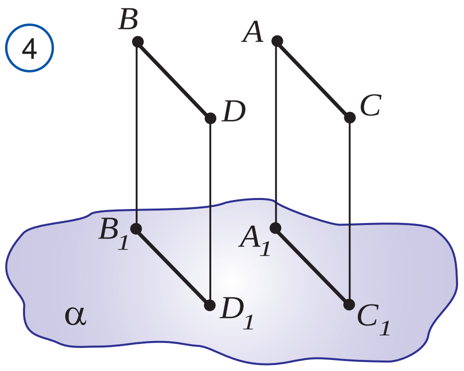
Parallel proekciyalawda kesindi kesindige, tuwrı sızıq tuwrı sızıqqa ótedi.

Parallel tuwrı sızıqlar proekciyaları parallel boladı yamasa ústpe-úst túsedi.

Álbette, bul qásiyetler proekciyalaw baǵdarına parallel bolmaǵan kesindi hám tuwrı sızıqlar ushın orınlı boladı. Endi tómendegi qásiyetlerdi dálilleyik.

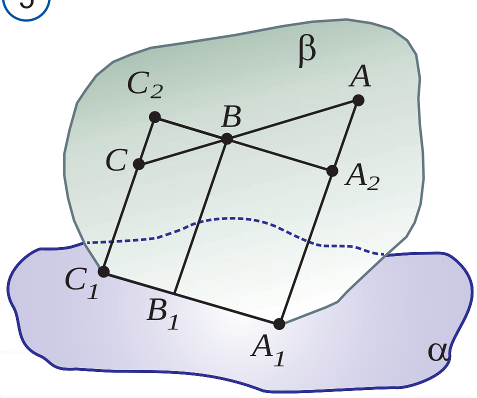
1-qásiyet. *Parallel proekciyalawda figuralardıń tuwrı sızıqlı kesindileri de kesindilerge ótedi.*

Haqıyqattan da, AC kesindiniń noqatların proekciyalaytuǵın barlıq tuwrı sızıqlar α tegislikti A_1C_1 tuwrı sızıq boyınsha kesip ótetuǵın tegislikte jatadı *(3-súwret)*. AC kesindiniń qálegen B noqatı A_1C_1 kesindiniń B_1 noqatına ótedi.



2-qásiyet. *Parallel proekciyalawda figuralardıń parallel kesindileri de parallel kesindilerge ótedi.*

Haqıyqattan da, AC hám BD qanday da bir figuranıń parallel kesindileri bolsın *(4-súwret)*. Olardıń proekciyaları A_1C_1 hám B_1D_1 kesindileri de parallel boladı, sebebi olar eki parallel tegislikti α tegislik penen keskende payda boladı.



3-qásiyet. *Bir tuwrı sızıqta yamasa parallel tuwrı sızıqlarda jatqan kesindiler uzınlıqları qatnası olardıń parallel proekciyaları uzınlıqları qatnasına teń.*

Haqıyqattan da, 5-súwrette AC hám A_1C_1 tuwrı sızıqlar β tegislikte jatadı. AC kesindiniń B noqatınan A_1C_1 ge parallel bolǵan A_2C_2 tuwrı sızıqtı ótkeremiz. Payda bolǵan BAA_2 hám BCC_2 úshmúyeshlikler uqsas boladı. Úshmúyeshliklerdiń uqsaslıǵı hám $A_1B_1=A_2B$ hám $B_1C_1=BC_2$ teńliklerden izlenip atırǵan qatnasta bólemiz: $AB:BC=A_1B_1:B_1C_1$.

Solay etip, parallel proekciyalawda tuwrı sızıqta yamasa parallel tuwrı sızıqlarda jatqan kesindiler uzınlıqları qatnası saqlanadı eken.

Atap aytqanda, kesindiniń ortası proekciya ortasına ótedi.

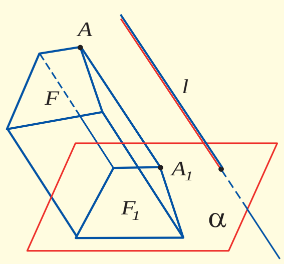
6

Temaǵa tiyisli sorawlar hám shınıǵıwlar

1. Keńisliktegi figuranı tegislikke parallel proekciyalaw dep qanday sáwlelendiriwge aytıladı?
2. Noqattıń tegislikke parallel proekciyası qanday tabıladı?
3. 6-súwrettegi “sayalar teatrı” haywanlardı qanday payda etip atır?
4. Parallel proekciyalaw tegisligi hám proekciyalaw baǵdarı dep nege aytıladı?
5. Parallel proekciyalawdıń qanday qásiyetlerin bilesiz?
6. Parallel proekciyalawdan qay jerde paydalanıw múmkin

Ámeliy shınıǵıw hám qollanıw

15.1. Kestede 15-temanıń tiykarǵı tayanısh maǵlıwmatları keltirilgen. Olardı dıqqat penen úyrenip shıǵıń hám anıqlama beriń.

Parallel proekciyalaw		
Anıqlaması	Parallel proekciyalawda figuralardıń qásiyetleri	
	Saqlanadı	Saqlanbaydı
 F – figura, α-proekciyalaw tegisligi, l-proekciyalaw baǵdarı, F_1 - F figura proekciyası.	1) Figuralardıń klaslarǵa tiyisliligi (noqat noqatqa, tuwrı sızıq tuwrı sızıqqa, kesindi kesindige, úshmúyeshlik úshmúyeshlikke ótedi); 2) noqatlardıń tuwrı sızıqqa tiyisliligi; 3) noqatlardıń tuwrı sızıqta jaylasıwı; 4) tuwrı sızıqlardıń parallelligi; 5) bir yamasa parallel tuwrı sızıqlarda jatqan kesindilerdıń teńligi (yamasa proporcionallıǵı).	1) kesindi uzınlıǵı ; 2) múyeshtiń shaması; 3) tuwrı sızıqlardıń perpendikulyarlıǵı; 4) múyeshler teńligi (proporcionallıǵı); 5) kesilisiwshi tuwrı sızıqlarda jatqan kesindilerdıń teńligi (proporcionallıǵı).

15.2. Parallel proekciyalawda kesindiniń proekciyası: a) kesindi; b) noqat; c) eki noqat; d) nur; e) tuwrı sızıq bolıwı múmkin be?

15.3. Parallel proekciyalawda kvadrattıń proekciyası: a) kvadrat; b) parallelogramm; c) romb; d) tuwrı tórtmúyeshlik; e) trapeciya; f) kesindi bolıwı múmkin be?

15.4. Parallel tegisliklerden birinde jatqan úshmúyeshlik ekinshi tegislikke parallel proekciyalansa, onıń maydanı ózgermeytuǵınlıǵın dálilleń.

15.5. Parallelogramnıń parallel proekciyası trapeciya bolıwı múmkin be? Juwabıńızdı túsindiriń.

15.6. Durıs úshmúyeshliktiń parallel proekciyası durıs úshmúyeshlik bola ma?

15.7. Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń parallel proekciyası tuwrı múyeshli úshmúyeshlik bola ma?

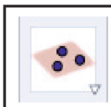
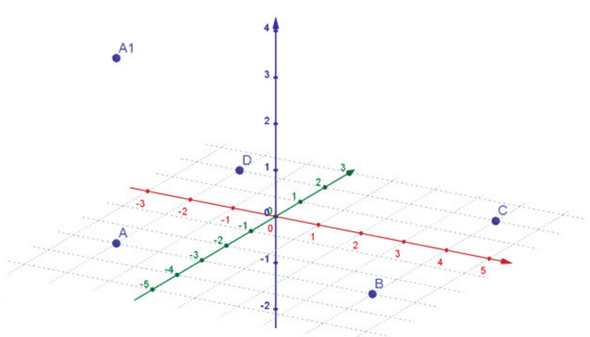
15.8. ABC úshmúyeshliktiń parallel proekciyası $A_1B_1C_1$ úshmúyeshlikten ibarat. Bul proekciyalawda ABC úshmúyeshliktiń: a) medianası; b) biyikligi; c) bissektrisası $A_1B_1C_1$ úshmúyeshliktiń sáykes: a) medianası; b) biyikligi; c) bissektrisasına ótedi me?

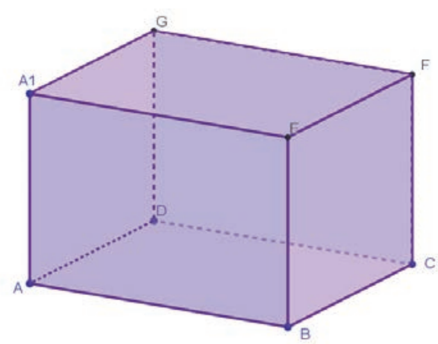
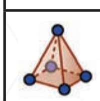
15.9. ABC úshmúyeshliktiń parallel proekciyası $A_1B_1C_1$ úshmúyeshlikten ibarat. Eger $A = 30°$, $BC = 20$ cm bolsa, $A_1 = 30°$, $B_1C_1 = 20$ cm bola ma?

15.10. AB kesindiniń parallel proekciyası A_1B_1 kesindiden ibarat. AB kesindiden alınǵan C noqattıń proekciyası bolsa C_1 noqat. $AB = 48$ cm, $A_1B_1 = 36$ cm. Eger AC kesindi uzınlıǵı: a) 24 cm; b) 12 cm; c) 8 cm; d) 32 cm; e) 36 cm bolsa, A_1C_1 kesindiniń uzınlıǵın tabıń.

"GeoGebra"n qollanıp

3D kalkulyatorı járdeminde tuwrı múyeshli parallelepipedti jasaw

<table>
<tr><td></td><td>Ввод (Kiritiw) qatarı arqalı xOy tegisliginde 4 - A, B, C, D noqatlardı hám xOz tegisliginde bolsa bir A_1 noqattı shep táreptegi súwrette kórsetilgen sıyaqlı etip jasaymız.</td></tr>
<tr><td colspan="2">


</td></tr>
<tr><td></td><td>Призма (Prizma) úskenesin tańlaymız hám izbe-iz A, B, C, D noqatlardı ústine basıp shıǵamız, keyin A_1 noqattı basamız hám nátiyjede oń táreptegi súwrettegi tuwrı múyeshli parallelepipedti payda etemiz.</td></tr>
</table>

Óz betinshe orınlaw ushın tapsırmalar

1. Joqarıda jasalǵan tuwrı múyeshli parallelepipedtiń parallel jaqların anıqlań hám "GeoGebra" 3D kalkulyatorı járdeminde olardıń parallelligin tekseriń.

2. Qanday da bir kub jasań. Onıń parallel jaqların "GeoGebra" 3D kalkulyatorı járdeminde anıqlań.

3. Qanday da bir kub jasań. Onıń qońsılas jaqlarınıń ayqısh diagonalları arasındaǵı múyeshti "GeoGebra" 3D kalkulyatorı járdeminde anıqlań.

16 BAPTÍ TÁKIRARLAWǴA TIYISLI ÁMELIY SHÍNÍǴÍWLAR

16.1. a) Eki tuwrı sızıq; b) tuwrı sızıq hám tegislik; c) eki tegislik neshe ulıwma noqatqa iye bolıwı múmkin?

16.2. a) Eki tuwrı sızıq ; b) tuwrı sızıq hám tegislik; c) eki tegislik; d) úsh tegislik birden-bir ulıwma noqatqa iye bolıwı múmkin be?

16.3. Tórt noqat bir tegislikte jatpaydı. a) olardan úshewi bir tuwrı sızıqta jatıwı múmkin be; b) olar arqalı neshe tegislik ótkeriw múmkin?

16.4. m hám n tuwrı sızıqlar kesilisedi, d tuwrı sızıq bolsa n tuwrı sızıqqa parallel. m hám d tuwrı sızıqlar óz ara qanday jaylasıwı múmkin?

16.5. ABC úshmúyeshliktiń C tóbesinen ótiwshi hám AB tárepke parallel bolǵan neshe tegislik júrgiziw múmkin?

16.6. $ABCD$ hám $ABKZ$ parallelogramlar túrli tegisliklerde jatadı. Parallel tuwrı sızıqlardı kórsetiń.

A) DA hám KB B) CD hám KZ C) BC hám AZ

D) DA hám ZA E) CB hám KB

16.7. A hám C noqatlar α tegislikke, B hám D noqatlar β tegislikke tiyisli. AC, CD, BD, AB, BC, AD tuwrı sızıqlardan qaysıları β tegislikti kesip ótedi?

16.8. AB, AC, KB, KD kesindiler α tegislikti kesip ótedi. AK, AD, BD, KC, CD tuwrı sızıqlardan qaysıları α tegislikti kesip ótedi?

16.9. Bir tegislikte jatpaytuǵın AB, AC hám AD tuwrı sızıqlar α tegislikti B_1, C_1 hám D_1 noqatlarda kesip ótedi. B_1, C_1 hám D_1 noqatlar izbe-iz tutastırılsa, qanday figura payda boladı?

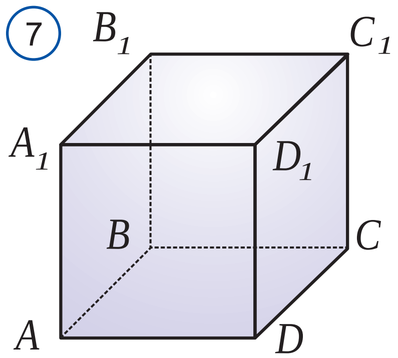
16.10. α tegislikti kesip ótpeytuǵın MN kesindi tóbelerinen hám ortasınan parallel tuwrı sızıqlar ótkerilgen. Eger bul tuwrı sızıqlar α tegislikti sáykes túrde M_1, N_1, hám K_1 noqatlarda kesip ótse hám $KK_1 = 9$ cm, $NN_1 = 15$ cm bolsa, MM_1 kesindi uzınlıǵın tabıń.

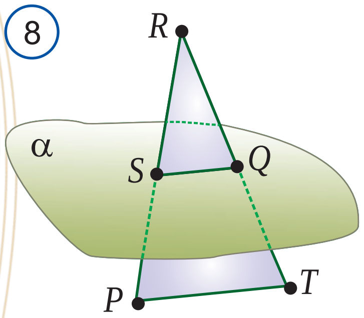
16.11. α tegisliktiń P hám Z noqatlarınan onnan sırtta uzınlıqları $PK = 6$ cm hám $ZM=9$ cm bolǵan parallel kesindiler túsirilgen. MK tuwrı sızıq α tegislikti O noqatta kesip ótedi. Eger $MK = 6$ cm bolsa, MO kesindi uzınlıǵın tabıń.

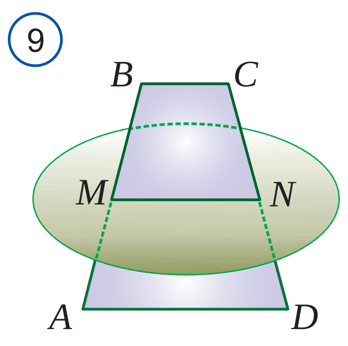
16.12. Parallelogramdı parallel proekciyalawda kvadrat payda bolıwı múmkin be?

16.13. Úshmúyeshliktiń parallel proekciyası berilgen. Bul úshmúyeshlik medianalarınıń proekciyaları qanday jasaladı?

16.14. MNZ úshmúyeshlik hám $MNPS$ (BC – ultan) parallelogramm bir tegislikte jatpaydı. Q hám R noqatlar – CB hám DA kesindilerdiń ortası, M hám N bolsa DP hám CZ kesindilerdiń ortası. MN hám QR tuwrı sızıqlardıń parallel ekenligin dálilleń.







16.15. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kubtıń (7-*súwret*) AA_1D_1D; BB_1C_1C; $ABCD$; DD_1C_1C; $B_1C_1D_1A_1$; ADD_1A_1 jaqlarınan qaysıları A_1B_1 tuwrı sızıqqa parallel boladı?

16.16. PRT úshmúyeshlik berilgen. PT tuwrı sızıqqa parallel α tegislik PR tárepti S noqatta, RT tárepti Q noqatta kesip ótedi (8-*súwret*). Eger $SR= 7$ *cm*, $SQ= 3$ *cm* hám $SP= 35$ *cm* bolsa, PT tárepti tabıń.

16.17. α tegislik $ABCD$ teń qaptallı trapeciya ultanı AD ǵa parallel hám AB, CD tárepler in M hám N noqatlarda kesip ótedi (9-*súwret*). $AD = 20$ *cm*, $MN= 16$ *cm*. Eger M noqat – AB kesindi ortası hám $AB = 8$ *cm* bolsa, trapeciya perimetrin tabıń.

16.18. α tegisliktiń P hám Z noqatlarınan onnan sırtta $PK = 6$ *cm* hám $ZM = 9$ *cm* kesindiler ótkerilgen. MK tuwrı sızıq tegislikti O noqatta kesip ótedi. Eger $MK= 6$ *cm* bolsa, MO aralıqtı tabıń.

16.19. $ABCD$ tuwrı tórtmúyeshliktiń AB tárepi α tegislikke parallel, AD tárepi bolsa bul tegislikke parallel emes. $ABCD$ hám α tegisliklerdiń keńislikte óz ara jaylasıwın anıqlań.

16.20. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ tuwrı múyeshli parallelepipedtiń tómende berilgen jaqlarınan qaysıları $ABCD$ jaǵına parallel boladı?

A) D_1A_1AD B) $D_1A_1B_1C_1$ C) ABB_1A_1 D) D_1C_1CD

16.21. Rombtıń eki diagonalı α tegislikke parallel. Romb tegisligi hám α tegisliklerdiń keńislikte óz ara jaylasıwın anıqlań.

16.22. Kesteniń shep baǵanasında tegisliktegi, oń baǵanasında bolsa keńislikte geometriyalıq figuralardıń bir-birine sáykes bazı qásiyetleri keltirilgen. Olardı kóz aldıńızǵa keltiriń hám qanday uqsaslıqqa iye ekenligin anıqlań, keyin bos ketekshelerdi toltırıń. Tegislik hám keńislikte jáne qanday uqsas qásiyetlerdi keltiriw múmkin?

Tegislikte	Keńislikte
Eger tuwrı sızıqlar ulıwma noqatqa iye bolsa, olar sol noqatta kesilisedi.	Eger tegislikler ulıwma tuwrı sızıqqa iye bolsa, olar sol tuwrı sızıq boyınsha kesilisedi.
Tegisliktiń qanday da bir noqatınan sheksiz kóp tuwrı sızıq ótkeriw múmkin.	
	Tegislikte jatpaytuǵın tuwrı sızıq arqalı berilgen tegislikke parallel bir hám tek bir tegislik júrgiziw múmkin.
Bir tuwrı sızıqqa parallel tuwrı sızıqlar óz ara parallel bolıp tabıladı.	

Ámeliy kompetenciyalardı qáliplestiriwge tiyisli tapsırmalar

1. Temir jol vagonları dóńgelekleriniń kósherleri bir-birine salıstırǵanda qanday jaylasqan *(1-súwret)*?

2. Temir jol vagonları dóńgeleginiń kósheri relslerge salıstırǵanda qanday jaylasqan *(1-súwret)*?

3. Átirapıńızdan parallel hám ayqısh tuwrı sızıqlarǵa mısallar keltiriń.

4. Ne ushın jazıw stolı tartpaları geyde tegis ashılmaydı *(2-súwret)*?

5. Ne ushın nasos porsheni onıń ishinde tegis háreketlenedi *(3-súwret)*?

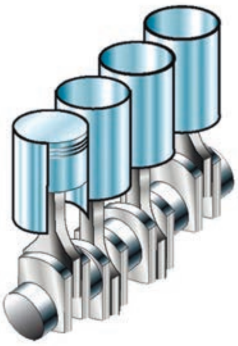
6. Tigiwshilik lentası yamasa qálegenshe uzın tayaq járdeminde dáliz polı shetine qaǵılǵan reykalardıń parallelligin qanday tekseriwge boladı *(4-súwret)*?

7. Aǵashtan islengen brus (taxta) tıń barlıq jaqları tuwrı tórtmúyeshlik formasında. Onı kesesine qabırǵaları boylap qalay keskende de, payda bolǵan barlıq kesimler parallelogramm bolıwın dálilleń *(5-súwret)*.

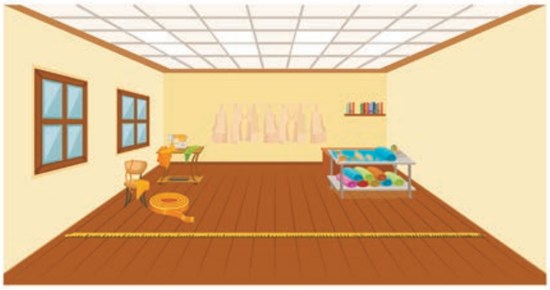
1

2

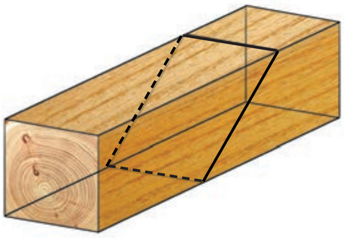
3



4



5

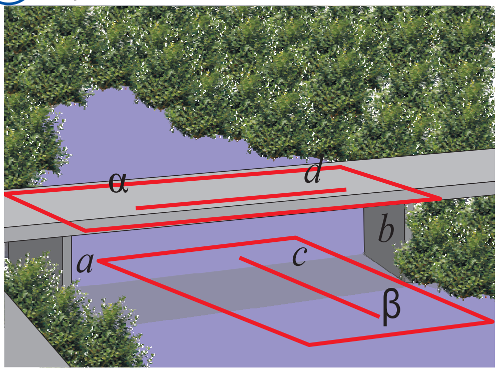


ÓZIŃIZDI SINAP KÓRIŃ

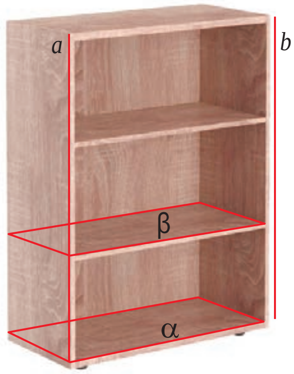
1. Tómendegi gáplerdi oqıń. Gápler mánisinen kelip shıǵıp, olardıń hárdayım, geyde durıs bolıwı yamasa heshqashan durıs bolmawın anıqlań hám “+” belgisin tiyisli baǵanaǵa qoyıń. Juwabıńızdı túsindirip beriń.

	Gáp	Hár-dayım	Geyde	Heshqashan
a	Keńislikte eki tuwrı sızıq kesilispeydi			
b	Keńislikte eki tegislik kesilispeydi.			
c	Keńislikte tuwrı sızıq penen tegislik kesilisedi.			
d	Keńislikte tuwrı sızıqlar ayqısh boladı.			
e	Tegislikte tuwrı sızıqlar ayqısh boladı.			
f	Tegislikti kesetuǵın tuwrı sızıqlar kesilisedi.			
g	Tegislikte parallel tuwrı sızıqlar kesilisedi.			

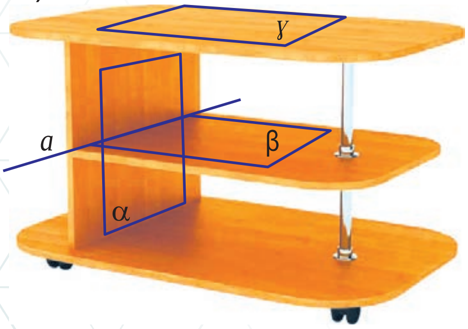
1 a)



b)



c)



2. 1-súwrette bazı obyektler keńisliktegi geometriyalıq figuralar belgisi sıpatında sızıp kórsetilgen. Qanday keńisliktegi geometriyalıq figuralardı kórip atırsız? Olar óz ara qanday jaylasqanlıǵın anıqlap, jazıń.

3. Bir tegislikte jatıp, bir ulıwma noqatqa iye bolǵan tuwrı sızıqlar qalay ataladı?

A) ayqısh B) kesilisiwshi C) parallel

4. Ayqısh tuwrı sızıqlar neshe ulıwma noqatqa iye bolıwı múmkin?

A) 1 B) 0 C) 2

5. Bir tegislikte jatıp, ulıwma noqatqa iye bolmaǵan tuwrı sızıqlar qanday ataladı?

A) ayqısh B) kesilisiwshi C) parallel

6. Tuwrı sızıqtan túrli eki tegislik ótkeriw múmkinligin dálilleń.

7. Bir tegislikte jatpaytuǵın tórt noqat berilgen. Olardıń úshewinen ótetuǵın neshe tegislik júrgiziw múmkin?

8. A, B, C noqatlar berilgen eki tegisliklerdiń hárbirinde jatadı. Bul noqatlardıń bir tegislikte jatıwın dálilleń.

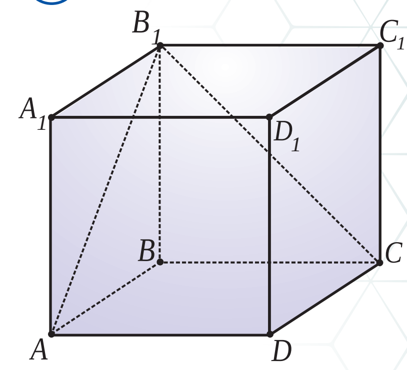
9. a tuwrı sızıq boylap kesilisiwshi eki tegislik berilgen. b tuwrı sızıq olardan birinde jatadı hám ekinshisin kesip ótedi. a hám b tuwrı sızıqlardıń kesilisiwin dálilleń.

10. Úsh tegisliktiń hár ekewi óz ara kesilisedi. Tegisliklerdiń kesilisiw tuwrı sızıqlarınan ekewi qanday da bir noqatta kesilisse, úshinshi kesilisiw sızıǵı da bul noqattan ótiwin dálilleń.

11. Eger keńisliktegi tórtmúyeshliktiń diagonalları kesilisse, onda onıń tóbeleri bir tegislikte jatıwın dálilleń. Súwrette kórsetilgen tuwrı sızıqlar qanday ataladı?

A) ayqısh B) kesilisiwshi C) parallel

2

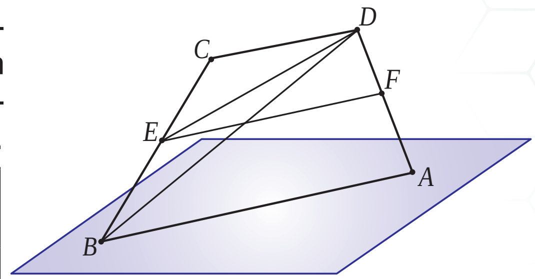


12. $ABCD$ parallelogramnıń A hám C tóbeleri arqalı parallelogramm tegisliginde jatpaytuǵın A_1C hám C_1C parallel tuwrı sızıqlar ótkerildi. A_1AB hám C_1CD tegislikleriniń parallelligin dálilleń.

13. Trapeciyanıń ultanları qanday da tegislikke parallel. Trapeciyanıń tárepleri de sol tegislikke parallel bolıwı múmkin be? Juwabıńızdı túsindiriń.

14. Kvadrattıń A hám B tóbeleri hám diagonalları kesilisiw noqatı – O nıń proekciyaları, B_1 hám O_1 noqatlardan ibarat ekenligi belgili. $ABCD$ kvadrattıń proekciyasın jasań.

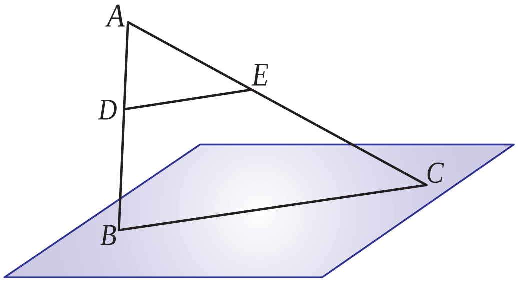
3



15. 2-súwret boyınsha berilgen tuwrı sızıq hám tegisliktiń óz ara qanday jaylasqanlıǵın anıqlań hám olardıń arasına sáykes (⊗ – kesilisiw, || – parallellik, ∸ – ayqısh hám ⊂ – tiyisli) belgilerdi qoyıń.

Tuwrı sızıqlar/ tegislikler	AA_1	BC_1	CC_1	CB_1	AB_1
ADD_1					
AA_1B_1					
ABD					
AA_1D					
BCD					

4

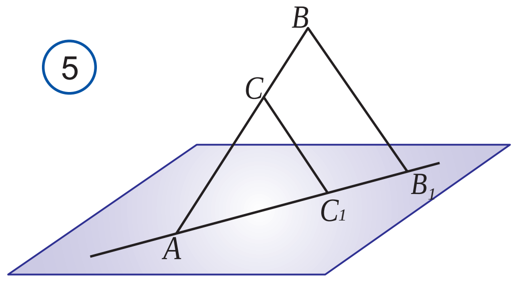


16. 3-súwrettegi $ABCD$ trapeciyanıń AB ultanı α tegislikte jatadı, CD ultanı bolsa α tegislikte jatpaydı. Berilgen tuwrı sızıqlar hám α tegisliktiń óz ara jaylasıwın ańlatatuǵın gáplerdi tolıqtırıń:

a) DB tuwrı sızıq berilgen tegislik penen ulıwma noqatqa iye bolǵanlıǵı ushın ol α tegislik penen _______________;

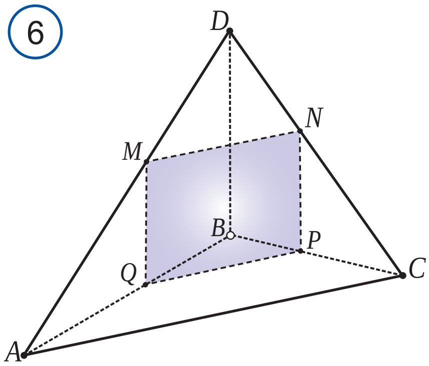
b) trapeciyanıń EF orta sızıǵı onıń ultanlarına parallel bolǵanlıǵı ushın α tegislikke _______________ boladı.

5

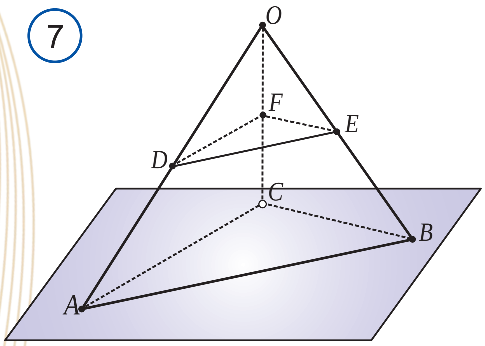


17. 4-súwrettegi ABC úshmúyeshliktiń AB hám AC tareplerinde D hám E noqatlar sonday belgilengen, $DE = 5\ cm$ hám $AD : BD = 3 : 4$. B hám C noqatlardan DE kesindige parallel α tegislik júrgizilgen. BC tárepi uzınlıǵın tabıń.

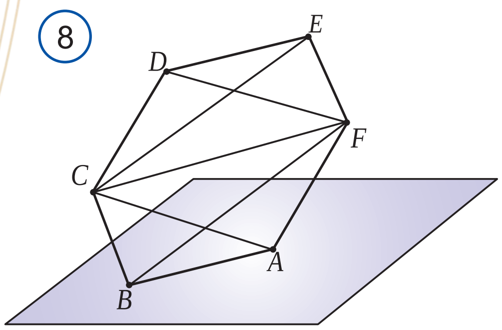
6



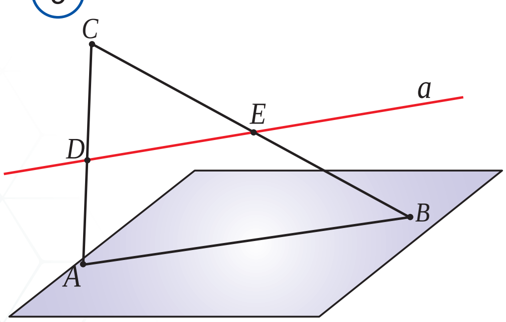
7



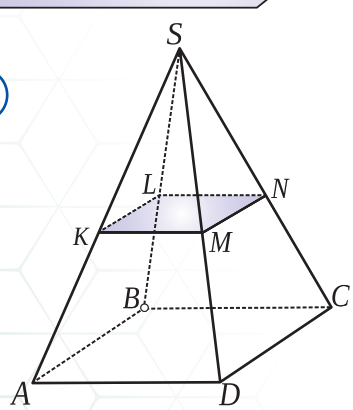
8



9



10



18. 5-súwrettegi C noqat AB kesindige tiyisli. A noqattan tegislik, B hám C noqatlardan bolsa parallel tuwrı sızıqlar ótkerilgen. Bul tuwrı sızıqlar tegislikti sáykes túrde: B_1 hám C_1 noqatlarda kesip ótedi. Eger $AC : BC = 3 : 2$ hám $BB_1 = 9$ bolsa, CC_1 kesindiniń uzınlıǵın tabıń.

19. a hám b parallel tuwrı sızıqlar eki parallel tegislikten birin sáykes túrde A_1 hám B_1 noqatlarda, ekinshisin bolsa A_2 hám B_2 noqatlarda kesip ótedi:

a) A_1B_1 diń A_2B_2 ge parallel ekenligin dálilleń;

b) $\angle A_1A_2B_2 = 140°$ bolsa, $\angle A_2A_1B_1$ di tabıń.

20. α tegislik BAC múyesh tárepleri A_1 hám B_1 noqatlarda, oǵan parallel β tegislik bolsa A_2 hám B_2 noqatlarda kesedi. $A_1B_1 = 8$, $AA_1 = 12$, $AA_2 = 0{,}5A_1A_2$ bolsa, A_2B_2 hám AA_2 ni tabıń.

21. D noqat ABC úshmúyeshlik tegisliginde jatpaydı. K, Z hám M noqatlar – sáykes túrde DA, DB, hám DC kesindilerdiń ortaları. ABC hám KZM tegisliklerdiń keńislikte óz ara jaylasıwın anıqlań.

22. 6-súwrettegi M, N, P, Q noqatlar sáykes túrde AD, CD, BC, AB kesindilerdiń ortası. Eger $AC = 10\ cm$, $BD = 18\ cm$ bolsa, $MNPQ$ tórtmúyeshlik perimetrin tabıń.

23. 7-súwrettegi O noqat ABC úshmúyeshlik tegisliginde jatpaydı. D, E, F noqatlar sáykes túrde AO, BO, CO kesindilerdiń ortası. Eger ABC úshmúyeshlik maydanı 380 cm^2 bolsa, DEF úshmúyeshlik maydanın tabıń.

24. 8-súwrettegi $ABCDEF$ durıs altımúyeshliktiń AB tárepi α tegislikte jatadı. Berilgen α tegislik penen DE, CD hám EC tuwrı sızıqlardıń óz ara jaylasıwın anıqlań.

25. 9-súwrettegi A hám B noqatlar a tegislikte jatadı. C noqat bolsa a tegislikte jatpaydı. AC hám BC kesindiler ortasınan a tuwrı sızıq ótkerilgen. Bul tuwrı sızıq a tegislikke parallel ekenligin dálilleń.

26. 10-súwrettegi $SABCD$ durıs piramida ultanına parallel $KLNM$ tegislik penen kesilgen.

1) BS hám CS; AB hám KL; CS hám KL tuwrı sızıqlar;

2) ASD hám DSC; ABD hám ASC tegisliklerdiń óz ara jaylasıwın anıqlań.

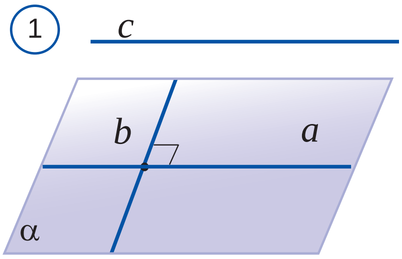
IV BAP

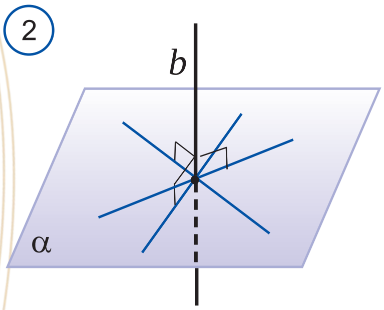
KEŃISLIKTE TUWRÍ SÍZÍQ HÁM TEGISLIKLERDIŃ PERPENDIKULYARLÍǴÍ

Bul baptı úyreniw nátiyjesinde tómendegi bilim hám kónlikpelerge iye bolasız:

- tegislikke perpendikulyar tuwrı sızıqlardı kóz aldıńızǵa keltiriw, olardıń qásiyetlerin, tuwrı sızıqtıń tegislikke perpendikulyarlıq belgisin biliw hám olardı máseleler sheshiwde qollana alıw;
- ulıwmalasqan Pifagor teoremasın biliw hám onı máseleler sheshiwde qollana alıw;
- keńislikte tegislikke túsirilgen perpendikulyar hám qıya haqqında túsinikke iye bolıw hám olardı ámeliy máseleler sheshiwde qollana alıw;
- noqattan tuwrı sızıqqa hám tegislikke, tuwrı sızıqtan oǵan parallel bolǵan tegislikke shekem bolǵan aralıqlardı anıqlap taba alıw;
- parallel tegislikler arasındaǵı, ayqısh tuwrı sızıqlar arasındaǵı aralıqlardı anıqlap taba alıw ;
- úsh perpendikulyar haqqındaǵı teoremanı biliw hám onı máseleler sheshiwde qollana alıw;
- tegislikler arasındaǵı múyeshti sızılmada súwretley alıw hám esaplay alıw;
- keńislikte perpendikulyar tegislikler haqqındaǵı teoremalardı hám tegisliklerdiń perpendikulyarlıq belgilerin máseleler sheshiwde qollana alıw;
- ortogonal proekciya hám olardan texnikada paydalanıw haqqında maǵlıwmatqa iye bolıw;
- kópmúyeshliktiń ortogonal proekciyasınıń maydanın taba alıw.

17 KEŃISLIKTE PERPENDIKULYAR TUWRÍ SÍZÍQ HÁM TEGISLIKLER

1


2


Eskertip ótemiz, keńislikte berilgen eki tuwrı sızıq arasındaǵı múyesh 90° qa teń bolsa, olar óz ara perpendikulyar tuwrı sızıqlar dep ataladı.

Perpendikulyar tuwrı sızıqlar kesilisiwshi hám ayqısh bolıwı múmkin. 1-súwrette a hám b perpendikulyar tuwrı sızıqlar kesilisiwshi, b hám c perpendikulyar tuwrı sızıqlar bolsa ayqısh bolıp tabıladı. a hám b tuwrı sızıqlardıń perpendikulyarlıǵı $a \perp b$ tárizde jazıladı.

Tegisliktegi qálegen tuwrı sızıqqa perpendikulyar bolǵan tuwrı sızıq tegislikke perpendikulyar tuwrı sızıq dep ataladı *(2-súwret)*.

α tegislik hám b tuwrı sızıqlardıń perpendikulyarlıǵı $b \perp \alpha$ tárizde jazıladı.

Átirapıńızdan óz ara perpendikulyar figuralarǵa kóplegen mısallar keltiriw múmkin. Ádette úy diywalları hám ústinleri, minaralar, shıra ústinleri hám baǵanalar jerge salıstırǵanda tik, yaǵnıy perpendikulyar etip qurıladı *(3-súwret)*.

Bólmedegi shkaf, stol hám muzlatqıshlar da polǵa salıstırǵanda tik etip ornatıladı.

3


Endi keńisliktegi perpendikulyar tuwrı sızıqlardıń bazı qásiyetleri haqqında toqtalamız.

Eger a tuwrı sızıq α tegislikte jaylassa yamasa oǵan parallel bolsa, onda α tegislikte jatqan, a tuwrı sızıqqa parallel basqa b tuwrı sızıq ta tabıladı.

Tegislikke perpendikulyar tuwrı sızıq bul tegislikti álbette kesip ótedi.

4.1-teorema. Eger eki tuwrı sızıq tegislikke perpendikulyar bolsa, olar óz ara parallel boladı.

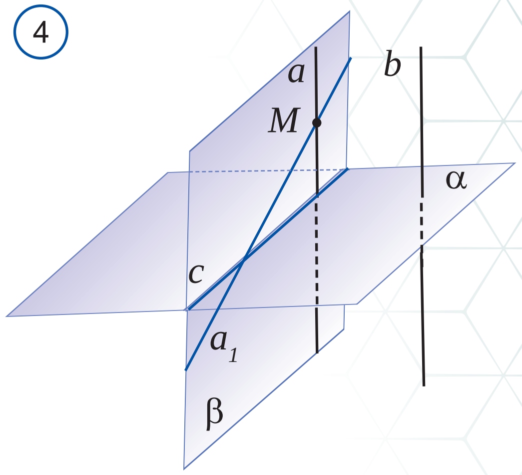
Dálillew. a hám b tuwrı sızıqlar α tegislikke perpendikulyar bolsın *(4-súwret)*. Bul tuwrı sızıqlardıń óz ara parallel ekenligin dálilleymiz.

a tuwrı sızıqtıń qanday da bir M noqatınan b tuwrı sızıqqa parallel a_1 tuwrı sızıqtı ótkeremiz.

Onda $a_1 \perp a$ boladı.

a hám a_1 tuwrı sızıqlardıń ústpe-úst túsiwin kórsetemiz. Aytayıq, onday bolmasın, a hám a_1 tuwrı sızıqlar ústpe-úst túspesin. Ol jaǵdayda a hám a_1 tuwrı sızıqlar jatqan β tegisliktegi M noqattan α hám β tegisliklerdiń kesilisiw sızıǵı – c tuwrı sızıqqa eki - a hám a_1 perpendikulyar tuwrı sızıqlar ótedi. Bunday bolıwı múmkin emes. Qarama-qarsılıq boljawımızdıń nadurıs ekenligin kórsetedi.

4



Demek, a hám b tuwrı sızıqlar óz ara parallel. Endi tuwrı sızıqtıń tegislikke perpendikulyarlıq belgisin keltiremiz.

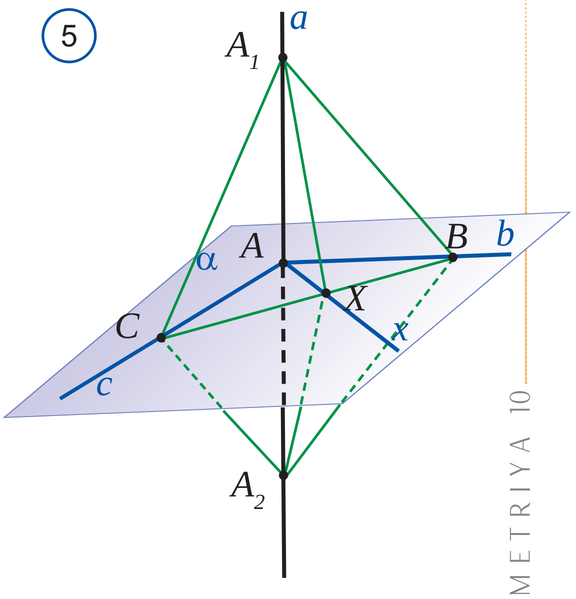
4.2-teorema. Eger tuwrı sızıq tegislikte jatqan eki kesilisiwshi tuwrı sızıqqa perpendikulyar bolsa, ol tegislikke de perpendikulyar boladı.

Dálillew. a tuwrı sızıq α tegislikte jatqan eki – b hám c tuwrı sızıqlarǵa perpendikulyar bolsın. Onda a tuwrı sızıq b hám c tuwrı sızıqlardıń kesilisiw noqatı A arqalı ótedi *(5-súwret)*. a tuwrı sızıqtıń α tegislikke perpendikulyar bolıwın dálilleymiz.

α tegisliktiń A noqatı arqalı qálegen x tuwrı sızıq ótkeremiz hám onıń a tuwrı sızıqqa perpendikulyar bolıwın kórsetemiz. α tegislikte A noqattan ótpeytuǵın, b, c hám x tuwrı sızıqlardı kesip ótetuǵın x tuwrı sızıqtı ótkeremiz. Usı kesilisiw sáykes túrde B, C hám X noqatlar bolsın.

a tuwrı sızıqta A noqattıń túrli tároplerinde AA_1 hám AA_2 teń kesindilerdi qoyamız. Payda bolǵan A_1BA_2 hám A_1CA_2 úshmúyeshlikler teń qaptallı boladı (bunı óz betinshe dálilleń). Bunnan A_1BC hám A_2BC úshmúyeshlikler teń bolıwı kelip shıǵadı (bunı da óz betinshe dálilleń). Bunnan A_1BX hám A_2BX múyeshlerdiń teń bolıwı hám sońında A_1BX hám A_2BX úshmúyeshliklerdiń de teń bolıwı kelip shıǵadı (bunı da óz betinshe dálilleń).

5



Sonlıqtan, $A_1X = A_2X$ boladı. Onda A_1XA_2 úshmúyeshlik teń qaptallı boladı. Sol sebepli onıń XA medianası onıń biyikligi de boladı. Bul bolsa, óz gezeginde, x tuwrı sızıqtıń a tuwrı sızıqqa perpendikulyar bolıwın kórsetedi.

Demek, a tuwrı sızıq α tegislikke perpendikulyar.

Bul teoremadan nátiyje sıpatında tómendegi qásiyetler kelip shıǵadı. Olardı óz betinshe dálilleń.

4.3-teorema. ***Eger tuwrı sızıq eki parallel tegisliktiń birine perpendikulyar bolsa, ekinshisine de perpendikulyar boladı.***

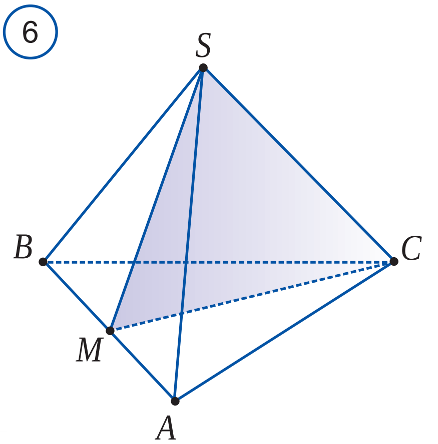
4.4-teorema. ***Eger eki tegislik bir tuwrı sızıqqa perpendikulyar bolsa, olar parallel boladı.***

Tómende "bar bolıw hám birden-birlik teoremaları" dep atalıwshı qásiyetlerdi de óz betinshe dálillew ushın keltiremiz.

4.5-teorema. ***Keńisliktiń qálegen noqatınan berilgen tuwrı sızıqqa perpendikulyar birden-bir tegislik ótkeriw múmkin.***

4.6-teorema. ***Keńisliktiń qálegen noqatınan berilgen tegislikke perpendikulyar birden-bir tuwrı sızıq ótkeriw múmkin.***

6



1-másele. $SABC$ durıs úshmúyeshli piramidada M noqat – AB qabırǵasınıń ortası *(6-súwret)*. AB tuwrı sızıqtıń SMC tegislikke perpendikulyar ekenligin dálilleń.

Dálillew. Shárt boyınsha, $SABC$ piramida durıs bolǵanlıǵı ushın onıń ultanı teń tárepli, qaptal jaqları bolsa teń qaptallı úshmúyeshliklerden ibarat boladı.

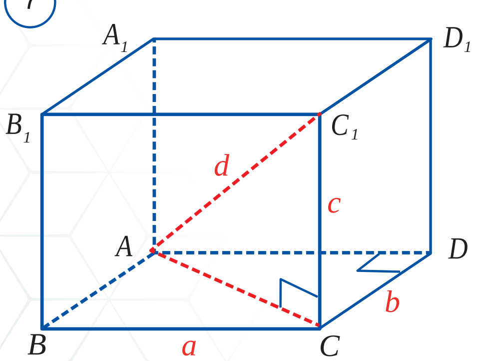
Onda ABC hám ABS úshmúyeshliklerdiń CM hám SM medianaları olardıń biyiklikleri de boladı.

Onda AB tuwrı sızıq ta, CM da SM tuwrı sızıqlarǵa perpendikulyar boladı.

Nátiyjede AB tuwrı sızıq SMC tegislikte jatıwshı eki SM hám CM tuwrı sızıqlarına perpendikulyar ekenligin anıqladıq.

Bul bolsa, 4.2-teorema boyınsha AB tuwrı sızıqtıń SMC tegislikke perpendikulyar ekenligin ańlatadı. Endi tuwrı múyeshli parallelepiped ushın ulıwmalasqan Pifagor teoremasın dálilleymiz. Onıń ushın III bólimde berilgen parallelepipedtiń qásiyetlerin eslewge tuwrı keledi.

7



$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$

4.7-teorema. ***(ulıwmalasqan Pifagor teoreması). Tuwrı múyeshli parallelepiped diagonalınıń kvadratı onıń úsh ólshemi kvadratları qosındısına teń.***

Dálillew. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ tuwrı múyeshli parallelepiped bolsın *(7-súwret)*.

CC_1 qabırǵası $ABCD$ jaqqa perpendikulyar bolǵanlıǵı ushın ACC_1 tuwrı múyeshli úshmúyeshlik boladı. Onda Pifagor teoreması boyınsha,

$A_1C^2 = CC_1^2 + AC^2$. (1)

ADC da tuwrı múyeshli úshmúyeshlik. (Nege?)

Jáne Pifagor teoremasın qollansaq:

$AC^2 = AD^2 + DC^2$. (2)

Onda (1) hám (2) ge kóre:

$A_1C^2 = CC_1^2 + AC^2 = CC_1^2 + AD^2 + DC^2$.

$AD = BC$ bolǵanlıǵı ushın

$A_1C^2 = CC_1^2 + BC^2 + DC^2$.

Eger tuwrı múyeshli parallelepipedtiń diagonalı d, onıń úsh ólshemin a, b hám c háripleri menen belgilesek, ulıwmalasqan Pifagor teoremasın tómendegishe jazıw múmkin:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Temaǵa tiyisli sorawlar hám shınıǵıwlar

1. Keńislikte qanday tuwrı sızıqlar óz ara perpendikulyar boladı?

2. Ayqısh tuwrı sızıqlar perpendikulyar bolıw múmkin be?

3. 7-súwrette qaysı qala súwretlengen? Onda siz qanday tuwrı sızıqlardı hám tegisliklerdi kórip tursız? Súwretten parallel, perpendikulyar hám ayqısh tuwrı sızıqlarǵa mısallar keltiriń.

4. Qanday tuwrı sızıq tegislikke perpendikulyar dep ataladı?

5. Bir tegislikke perpendikulyar tuwrı sızıqlardıń qásiyetlerin aytıń.

6. Tuwrı sızıq hám tegisliklerdiń perpendikulyarlıq belgisin aytıń.

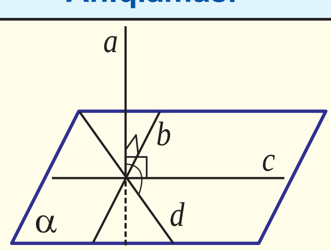
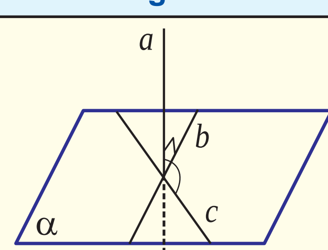
7. Parallel tegisliklerdiń birine perpendikulyar bolǵan tuwrı sızıqtıń qásiyetin aytıń.

8. Bir tuwrı sızıqqa perpendikulyar bolǵan tegisliklerdiń qásiyetin aytıń.

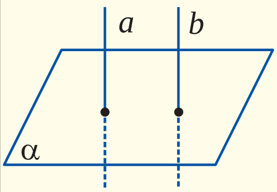
9. Ulıwmalasqan Pifagor teoreması ne haqqında?

Ámeliy shınıǵıw hám qollanıw

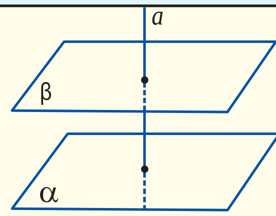
17.1. Kestede 17-temanıń tiykarǵı tayanısh maǵlıwmatları keltirilgen. Olardı dıqqat penen úyrenip shıǵıń hám anıqlama beriń.

Tuwrı sızıqtıń tegislikke perpendikulyarlıǵı	
Anıqlaması	**Belgileniwi**
 Eger qálegen $b \in \alpha$ ushın $a \perp b$ bolsa, $a \perp \alpha$ dep ataladı.	 Eger $b \in \alpha$, $c \in \alpha$ ushın $a \perp b$, $a \perp c$ bolsa, $a \perp \alpha$ boladı.

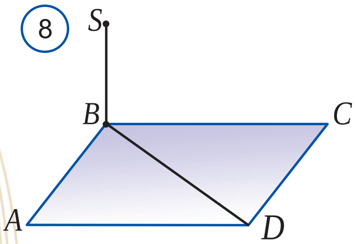
Tegisliklerdiń parallelligi hám perpendikulyarlıǵı arasındaǵı baylanıslar

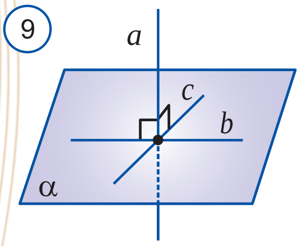


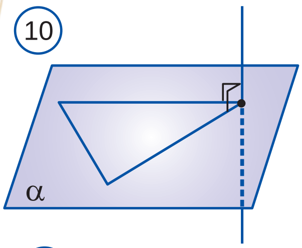
Eger $a \parallel b$, $\alpha \perp a$ bolsa, $\alpha \perp b$ boladı. Eger $\alpha \perp a$, $b \perp \alpha$ bolsa, $a \parallel b$ boladı.

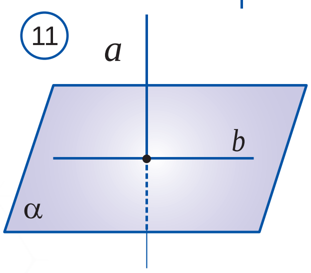


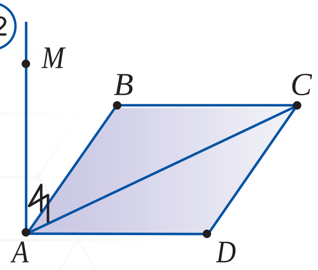
Eger $\alpha \parallel \beta$, $a \perp \beta$ bolsa, $a \perp \alpha$ boladı. Eger $\alpha \perp a$, $\beta \perp a$ bolsa, $\alpha \parallel \beta$ boladı.

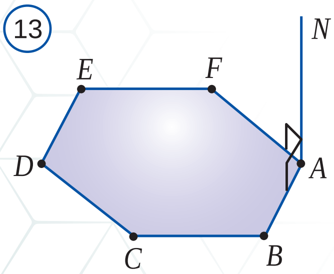
8


9


10


11


12


13


17.2. SB kesindi $ABCD$ parallelogramm tegisligine perpendikulyar *(8-súwret)*. SB kesindi perpendikulyar bolǵan tuwrı sızıqlardı aytıń.

17.3. 9-súwrette α tegislikte jatqan b hám c tuwrı sızıqlarǵa perpendikulyar bolǵan a tuwrı sızıq súwretlengen. $a \perp \alpha$ ekenligin dálilleń.

17.4. 10-súwrettegi tuwrı sızıq úshmúyeshliktiń eki tárepine perpendikulyar. Onıń úshmúyeshlik tegisligine perpendikulyar ekenligin túsindiriń.

17.5. 11-súwrette $a \perp \alpha$. a tuwrı sızıqtıń α tegislikte jatqan b tuwrı sızıqqa da perpendikulyar bolıwın túsindiriń.

17.6. 12-súwrette $ABCD$ tuwrı tórtmúyeshliktiń A tóbesine MA perpendikulyar túsirilgen. Eger $MA \perp AB$ hám $MA \perp AC$ bolsa, $MA \perp AD$ bolıwın túsindiriń.

17.7. 13-súwrette $ABCDEF$ altımúyeshliktiń A tóbesine NA perpendikulyar túsirilgen. Eger $NA \perp AB$ hám $NA \perp AF$ bolsa, a) $NA \perp AC$; b) $NA \perp AD$; c) $NA \perp AE$ bolıwın túsindiriń.

17.8. ABC úshmúyeshliktiń A tóbesinen onıń AB hám AC táreplerine perpendikulyar bolǵan AK tuwrı sızıq júrgizilgen. Bul tuwrı sızıq úshmúyeshliktiń A noqatınan túsirilgen biyikligi, medianası hám bissektrisasına perpendikulyar bolıwın túsindiriń.

17.9. l tuwrı sızıq ABC úshmúyeshliktiń AB hám AC táreplerine perpendikulyar. l tuwrı sızıq hám ABC úshmúyeshlik tegisliginiń óz ara jaylasıwın anıqlań.

A) l tuwrı sızıq ABC tegislikti kesip ótedi, biraq oǵan perpendikulyar emes.

B) l tuwrı sızıq ABC tegislikke tiyisli.

C) l tuwrı sızıq ABC tegislikke perpendikulyar.

D) l tuwrı sızıq ABC tegislikke parallel.

17.10. $ABCDA_1B_1D_1C_1$ tuwrı múyeshli parallelepiped berilgen.

a) DD_1 tuwrı sızıq $ABCD$ jaqqa;

b) AD tuwrı sızıq bolsa DD_1CC_1 jaqqa perpendikulyar bolıwın túsindiriń.

17.11. 14-súwrette $ABCDA_1B_1D_1C_1$ kub berilgen.

a) AB_1D – tuwrı múyeshli úshmúyeshlik;

b) AB_1C_1D – tuwrı tórtmúyeshlik ekenligin túsindiriń.

17.12. CM tuwrı sızıq ABC úshmúyeshlik tegisligine perpendikulyar ($\angle C = 90°$). a) BC tuwrı sızıq AC hám CM tuwrı sızıqlar jatqan tegislikke perpendikulyar; b) AC tuwrı sızıq BC hám CM tuwrı sızıqlar jatqan tegislikke perpendikulyar ekenligin dálilleń.

17.13. CD tuwrı sızıq ABC úshmúyeshliktiń BC tárepine perpendikulyar ($\angle C = 90°$). Óz ara perpendikulyar tuwrı sızıq hám tegisliklerdi anıqlań hám anıqlama beriń.

17.14. 15-súwrettegi ABC hám DBC tuwrı múyeshli úshmúyeshlikler túrli tegisliklerde jaylasqan hám BC tárep boyınsha kesilisedi. Qaysı tuwrı sızıq hám tegislikler óz ara perpendikulyar boladı? Juwabıńızdı túsindiriń.

17.15. KO tuwrı sızıq $ABCD$ parallelogramm tegisligine perpendikulyar *(16-súwret)*. KO tuwrı sızıqqa perpendikulyar tuwrı sızıqtı anıqlań

17.16. MB tuwrı sızıq ABC úshmúyeshliktiń AB hám BC táreplerine perpendikulyar *(17-súwret)*. X noqat AC táreptiń qálegen noqatı bolsa, MBX úshmúyeshlik túrin anıqlań.

17.17. $ABCD$ tórtmúyeshliktiń tárepleri $A_1B_1C_1D_1$ tuwrı tórtmúyeshliginiń tárepleri̇ne sáykes túrde parallel. $ABCD$ tuwrı tórtmúyeshlik ekenligin túsindiriń.

17.18. α tegislik m tuwrı sızıqqa perpendikulyar, m tuwrı sızıq bolsa n tuwrı sızıqqa parallel. α tegisliktiń n tuwrı sızıqqa da perpendikulyar bolıwın dálilleń.

17.19. $ABCD$ trapeciyanıń AB ultanı jatqan tuwrı sızıq α tegislikke perpendikulyar. Bul trapeciyanıń CD ultanı jatqan tuwrı sızıq ta α tegislikke perpendikulyar bolıwın dálilleń.

17.20. Keńisliktegi tuwrı sızıqtıń qálegen noqatınan oǵan perpendikulyar tuwrı sızıq ótkeriw múmkinligin dálilleń.

17.21. Keńisliktegi tuwrı sızıqtıń qálegen noqatınan oǵan eki túrli perpendikulyar tuwrı sızıq ótkeriw múmkinligin dálilleń.

17.22. AB, AC, AD tuwrı sızıqlar jup-jubı menen óz ara perpendikulyar *(18-súwret)*. Eger:

1) $AB = 3$ cm, $BC = 7$ cm, $AD = 1{,}5$ cm;

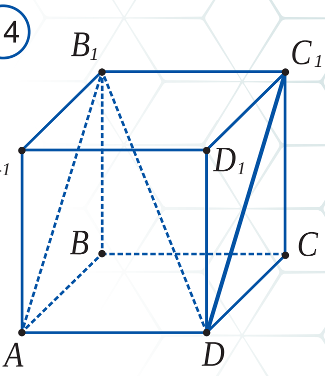
2) $BD = 9$ cm, $BC = 16$ cm, $AD = 5$ cm;

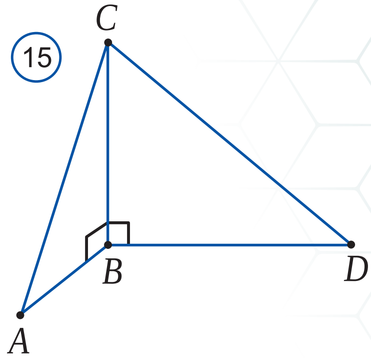
3) $AB = b$ cm, $BC = a$ cm, $AD = d$ cm;

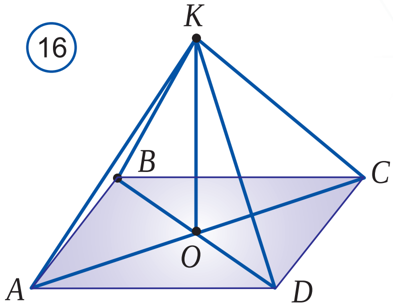
4) $BD = c$ cm, $BC = a$ cm, $AD = d$ cm bolsa, CD kesindi uzınlıǵın tabıń.

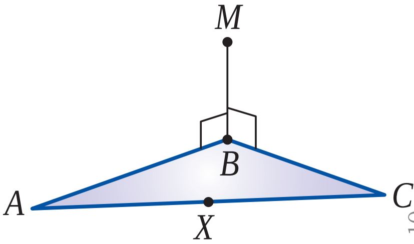
17.23. $ABCD$ tuwrı tórtmúyeshliginiń A tóbesinen onıń tegisligine perpendikulyar AK tuwrı sızıq ótkerilgen. K noqattan tuwrı tórtmúyeshliktiń basqa tóbelerine shekem aralıq 6 m, 7 m, 9 m. AK aralıqtı tabıń.

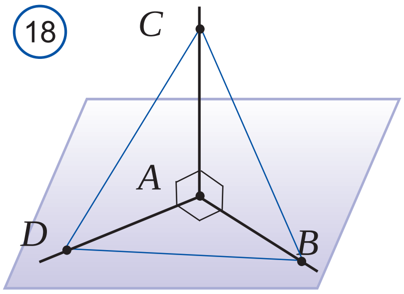
17.24. A hám B noqatlardan α tegislikke perpendikulyar hám onı sáykes túrde C hám D noqatlarda kesetuǵın tuwrı sızıqlar ótkerilgen. Eger $AC = 3$ m, $BD = 2$ m hám $CD = 2{,}4$ m bolsa hám AB kesindi α tegislikti kesip ótpese, A hám B noqatlar arasındaǵı aralıqtı tabıń.

14


15


16


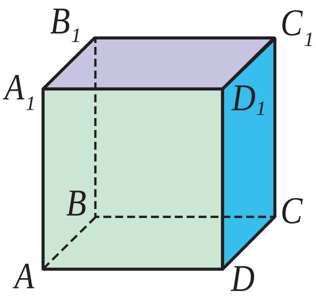
17


18


17.25. 19-súwrette súwretlengen kubtıń qabırǵası: a) 4 *cm*; b) 8 *cm* bolsa, AB_1C úshmúyeshlik perimetrin hám DAC_1 úshmúyeshlik maydanın tabıń.

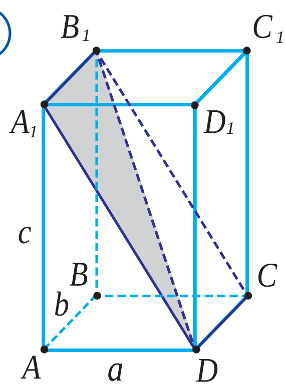
17.26. CM tuwrı sızıq tárepi a ǵa teń bolǵan $ABCD$ kvadrat tegisligine perpendikulyar hám $CM = b$. Eger: a) $a = 2$ *cm*, $b = 1$ *cm*; b) $a = 3$ *cm*, $b = 4$ *cm* bolsa, M noqattan kvadrat tóbelerine shekem bolǵan aralıqlardı tabıń.

17.27. ABC tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń C tóbesi arqalı onıń tegisligine CD perpendikulyar túsirilgen. Eger: a) $AC = 6$ *cm*, $BC = 8$ *cm*, $CD = 12$ *cm*; b) $AC = 12$ *cm*, $BC = 16$ *cm*, $CD = 24$ *cm* bolsa, D noqattan úshmúyeshliktiń gipotenuzası ortasına shekem bolǵan aralıqtı tabıń.

19


17.28. 20-súwrettegi $ABCDA_1B_1D_1C_1$ tuwrı múyeshli parallelepipedtiń ólshemleri: a) $a = 12$ *cm*, $b = 8$ *cm*, $c = 16$ *cm*; b) $a = 5$ *cm*, $b = 10$ *cm*, $c = 12$ *cm* bolsa, A_1B_1D úshmúyeshlik hám A_1B_1CD tórtmúyeshlik maydanın tabıń.

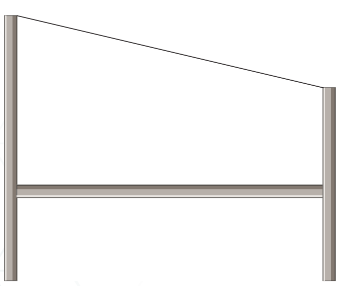
17.29. $ABCDA_1B_1D_1C_1$ tuwrı múyeshli parallelepipedtiń ólshemleri: a) $a = 12$ *cm*, $b = 8$ *cm*, $c = 16$ *cm*; b) $a = 5$ *cm*, $b = 10$ *cm*, $c = 12$ *cm*; d) $a = 2$ *m*, $b = 12$ *m*, $c = 6$ *m* bolsa, onıń diagonalın tabıń.

20


17.30. Durıs tuwrı múyeshli parallelepiped ultanınıń tárepi 4 *cm* hám biyikligi 5 *cm* bolsa, onıń diagonalın tabıń.

17.31. Tuwrı múyeshli parallelepiped ultanınıń tárepleri 12 *cm* hám 8 *cm*, diagonalı 6 *cm* bolsa, onıń biyikligin tabıń.

17.32. ABC tuwrı múyeshli úshmúyeshlik tegisligine onıń C tuwrı múyeshi tóbesi arqalı perpendikulyar túsirilgen. $AD = a$, $BD = b$, $CD = c$ bolsa, ABC úshmúyeshliktiń CM medianasın tabıń.

21


17.33. $ABCD$ tuwrı tórtmúyeshlik tegisligine onıń A tóbesi arqalı AE perpendikulyar túsirilgen. E noqattan tuwrı tórtmúyeshlik qalǵan tóbelerine shekem bolǵan aralıqlar a, b hám c ($a < c$, $b < c$) bolsa, AE kesindi hám tuwrı tórtmúyeshlik tárepleri uzınlıqların tabıń.

17.34. ABC úshmúyeshlikte $\angle C = 90°$ hám $\angle A = 30°$. Úshmúyeshlik tegisligine onıń C tóbesi arqalı CM perpendikulyar túsirilgen. $AC = 18$ *cm*, $CM = 12$ *cm* bolsa, M noqattan AB tuwrı sızıqqa shekemgi bolǵan aralıqtı tabıń.

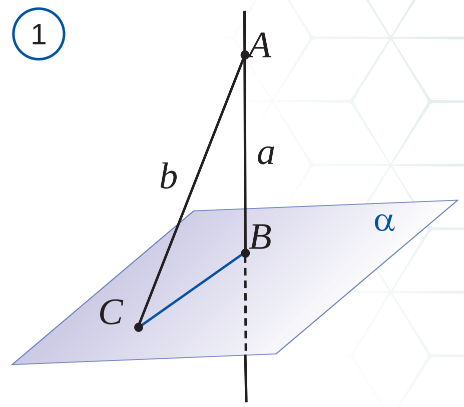
22


17.35. Bir-birine parallel bolǵan baǵanalardıń joqarı tóbeleri arasındaǵı aralıq 3,4 *m* *(21-súwret)*. Baǵanalar bir-biri menen gorizontal tirelgen aǵash járdeminde baylanısqan. Birinshi baǵana biyikligi 5,6 *m*, ekinshi baǵana biyikligi 3,9 *m* bolsa, tirelgen aǵashtıń uzınlıǵın tabıń.

17.36. Uzınlıǵı 15 *m* bolǵan telefon sımı biyikligi 6 *m* bolǵan sım aǵashtan biyikligi 20 *m* bolǵan úyge kerip tartılǵan *(22-súwret)*. Baǵana hám úy arasındaǵı aralıqtı tabıń.

18 KEŃISLIKTE PERPENDIKULYAR, QÍYA HÁM ARALÍQ

α tegislikke onda jatpaytuǵın A noqattan perpendikulyar a tuwrı sızıq ótkeremiz *(1-súwret)*.



Bul tuwrı sızıq tegislikti B noqatta kesip ótsin. Sonıń menen birge, tegisliktiń qanday da bir C noqatın A noqat penen tutastıramız. Nátiyjede payda bolǵan

AB kesindi *tegislikke túsirilgen perpendikulyar,*

AC kesindi *tegislikke túsirilgen qıya*,

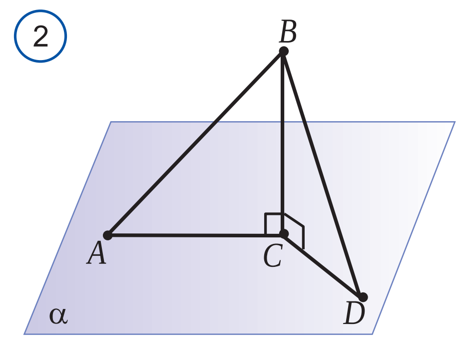
BC kesindi *qıyanıń tegisliktegi proekciyası*,

B noqat *perpendikulyardıń ultanı*,

C noqat *qıyanıń ultanı* dep ataladı. ABC úshmúyeshlik tuwrı múyeshli hám onda AB katet, AC bolsa gipotenuza bolǵanlıǵı ushın hárdayım $AB < AC$ boladı.

Demek, qanday da bir noqattan tegislikke túsirilgen perpendikulyardıń uzınlıǵı sol noqattan ótkerilgen qálegen qıyanıń uzınlıǵınan kishi boladı.

Qanday da bir noqattan tegislikke túsirilgen perpendikulyar, qıyalar hám olardıń proekciyaları haqqındaǵı tómendegi teorema orınlı boladı:



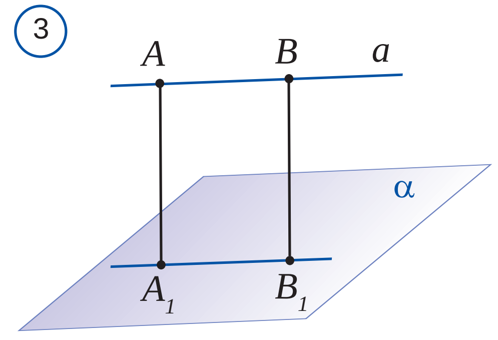
4.8-teorema. ***Eger qanday da bir noqattan tegislikke perpendikulyar hám qıyalar túsirilgen bolsa, onda:*** *(2-súwret)*

a) perpendikulyar uzınlıǵı hárqanday qıya uzınlıǵınan kishi boladı;

b) qaysı qıyanıń proekciyası uzın bolsa, sol qıya uzın boladı;

c) qaysı qıya uzın bolsa, sol qıyanıń proekciyası uzın boladı.

Endi parallel tuwrı sızıqlardıń tómendegi qásiyetin dálilleyik.

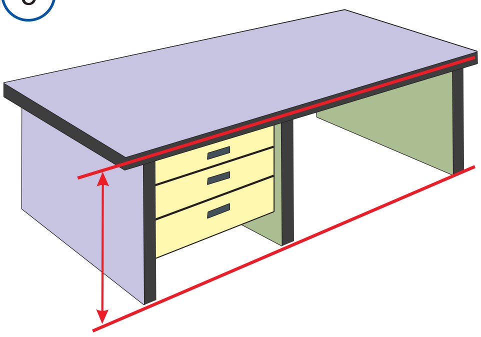


4.9-teorema. ***Eger tuwrı sızıq tegislikke parallel bolsa, onda onıń barlıq noqatları tegislikten teńdey aralıqta boladı.***

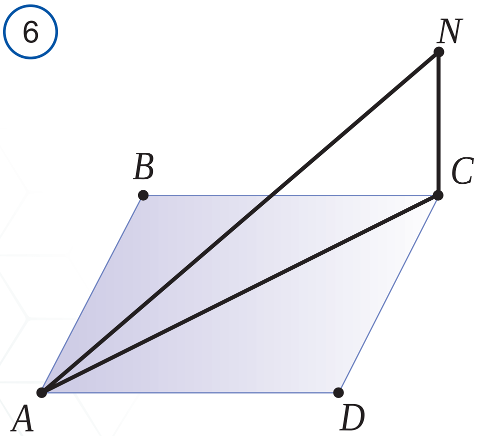
Dálillew. a – berilgen tuwrı sızıq hám α bolsa berilgen tegislik bolsın *(3-súwret)*. a tuwrı sızıqta eki A hám B noqattı alamız. Olardan α – tegislikke perpendikulyarlar túsiremiz. Bul perpendikulyarlar ultanı sáykes túrde A hám B

4

5



6



noqatlar bolsın. Onda A hám B noqatlardan α tegislikke shekemgi bolǵan aralıqlar sáykes túrde AA_1 hám BB_1 kesindiler boladı. 3.6-teorema boyınsha, AA_1 hám BB_1 kesindiler parallel boladı.

Demek, olar bir tegislikte jatadı. Bul tegislik α tegislikti A_1B_1 tuwrı sızıq boylap kesedi.

a tuwrı sızıq A_1B_1 tuwrı sızıqqa parallel boladı, sebebi ol α tegislikti kesip ótpeydi.

Solay etip, ABA_1B_1 tórtmúyeshliktiń qarama-qarsı tárepleri parallel.

Demek, ol parallelogramm. Bul parallelogramda $AA_1 = BB_1$.

Noqattan tegislikke shekemgi aralıq dep noqattan tegislikke túsirilgen perpendikulyar uzınlıǵına aytıladı.

Tashkenttegi saat minarasınıń biyikligi 30 *m* delingende minaranıń tóbesinen onıń ultan tegisligine túsirilgen perpendikulyar uzınlıǵı túsiniledi *(4-súwret)*.

Tuwrı sızıqtan oǵan parallel bolǵan tegislikke shekemgi aralıq dep tuwrı sızıqtıń qálegen noqatınan sol tegislikke shekemgi bolǵan aralıqqa aytıladı.

Tegisliktiń qálegen eki noqatınan oǵan parallel bolǵan tegislikke shekemgi bolǵan aralıqlar birdey boladı.

Eki parallel tegislik arasındaǵı aralıq dep bir tegisliktiń qálegen noqatınan ekinshi tegislikke shekemgi bolǵan aralıqqa aytıladı.

5-súwrette súwretlengen stoldıń biyikligi pol hám stol tegislikleri arasındaǵı aralıqqa teń boladı.

1-másele. $ABCD$ kvadrattıń C tóbesinen ol jatqan tegislikke perpendikulyar CN júrgizilgen *(6-súwret)*. Eger $CN = 6$ *cm*, kvadrat tárepi $4\sqrt{2}$ ge teń bolsa, N noqattan kvadrattıń A tóbesine shekem bolǵan aralıqtı tabıń.

Sheshiliwi. Shar boyınsha, berilgen kvadrattıń tárepi $AD = 4\sqrt{2}$. $ABCD$ kvadrattıń AC diagonalın júrgizemiz hám onıń uzınlıǵın esaplaymız:

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{\left(4\sqrt{2}\right)^2 + \left(4\sqrt{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{16 \cdot 2 + 16 \cdot 2} = \sqrt{64} = 8\ cm;$$

CN tegislikke perpendikulyar bolǵanlıǵı ushın $CN \perp AC$.

Demek, ACN tuwrı múyeshli úshmúyeshlik. onda Pifagor teoreması boyınsha:

$$AC = \sqrt{AC^2 + CN^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10$$

Juwabı: 10 *cm*.

4.10-teorema. Eki ayqısh tuwrı sızıq birden-bir ulıwma perpendikulyarǵa iye boladı.

Dálillew. a hám b ayqısh tuwrı sızıqlar bolsın *(7a-súwret)*. Dáslep ulıwma perpendikulyardıń bar ekenligin kórsetemiz. Bunıń ushın berilgen ayqısh tuwrı sızıqlarda sonday a hám b noqatlardı tańlaw múmkinligin kórsetiwimiz kerek, AB tuwrı sızıq hám a ǵa, hám b ǵa perpendikulyar bolsın.

α tegislik b tuwrı sızıqtan ótetuǵın hám a tuwrı sızıqqa parallel bolsın. a tuwrı sızıqta C noqattı alamız hám onnan α tegislikke CD perpendikulyar túsiremiz. Kesilisiwshi a hám CD tuwrı sızıqlardan β tegislikti ótkeremiz.

a_1 tuwrı sızıq α hám β tegisliklerdiń kesilisiw sızıǵı bolsın *(7 b-súwret)*.

$a_1 \parallel a$ bolǵanlıǵı ushın a_1 hám b tuwrı sızıqlar qanday da B noqatta kesilisedi. B noqattan α tegislikte jatıwshı hám a tuwrı sızıqqa perpendikulyar BA tuwrı sızıqtı shıǵaramız.

Nátiyjede AB hám CD tuwrı sızıqlardıń hár ekewi de α tegislikte jatadı hám a tuwrı sızıqqa perpendikulyar boladı. Sonıń ushın $AB \parallel CD$ hám $AB \perp a$ boladı.

Demek, $AB \perp a$ hám $AB \perp b$, yaǵnıy AB izlenip atırǵan tuwrı sızıq bolıp, ol a hám b ayqısh tuwrı sızıqlardıń hár ekewine de perpendikulyar boladı.

Ulıwma perpendikulyardıń birden-birligin óz betinshe dálilleń.

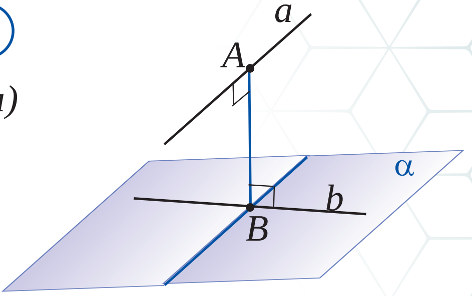
Eki ayqısh tuwrı sızıq arasındaǵı aralıq dep olardıń ulıwma perpendikulyarı uzınlıǵına aytıladı.

Joqarıdaǵı teoremadan tómendegi juwmaq kelip shıǵadı:

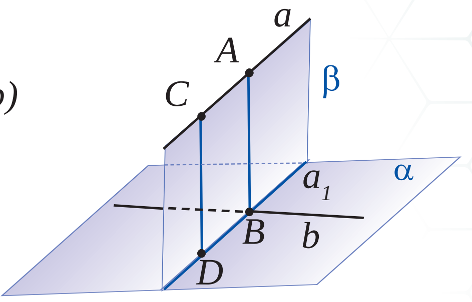
Qásiyet. *Eki ayqısh a hám b tuwrı sızıqlar arasındaǵı aralıq (8-súwret) a tuwrı sızıqtıń qálegen noqatınan b tuwrı sızıq jatqan hám a tuwrı sızıqqa parallel bolǵan α tegislikke shekemgi bolǵan aralıqqa teń boladı.*

7

a)

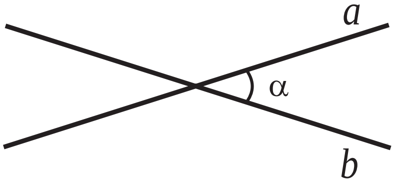


b)

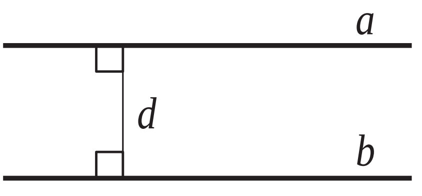


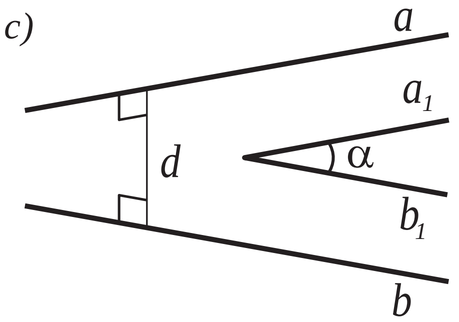
8

a)



b)





Joqarıdaǵılarǵa tiykarlanıp keńislikte eki tuwrı sızıqtıń óz ara jaylasıwın sanlar járdeminde sıpatlawımız múmkin.

Eger keńislikte eki tuwrı sızıq:

- óz ara kesilisse, olar arasındaǵı α múyesh *(8a-súwret)*,
- óz ara parallel bolsa, olar arasındaǵı d aralıq *(8b-súwret)*,
- óz ara ayqısh bolsa, olar arasındaǵı α múyesh hám olar arasındaǵı d aralıq *(8c-súwret)* usı tuwrı sızıqlardıń óz ara jaylasıwın sanlı ańlatadı.

Temaǵa tiyisli sorawlar hám shınıǵıwlar

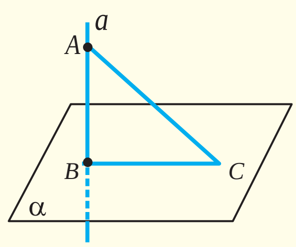
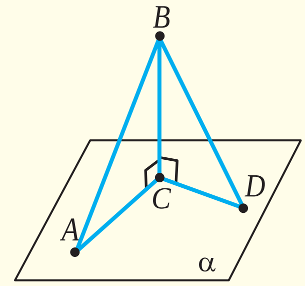
9

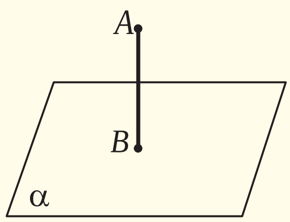
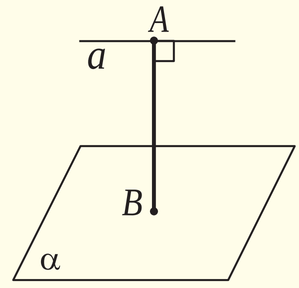
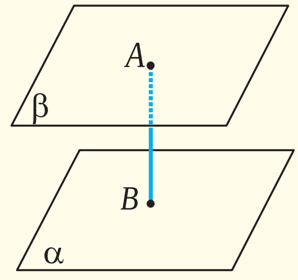
1. *Tegislikke túsirilgen perpendikulyar hám qıyaǵa anıqlama beriń.*
2. *9-súwretlerde ne: a) perpendikulyar; b) qıya sıpatında súwretlengen?*
3. *Qıyanıń tegisliktegi proekciyası dep nege aytıladı?*
4. *Noqattan tegislikke shekemgi bolǵan aralıq qanday anıqlanadı?*
5. *Tegislikke parallel bolǵan tuwrı sızıq hám tegislik arasındaǵı aralıq qanday tabıladı?*
6. *Eki parallel tegislikler arasındaǵı aralıq qanday anıqlanadı?*
7. *Eki ayqısh tuwrı sızıq arasındaǵı aralıq qanday anıqlanadı?*
8. *Keńislikte eki tuwrı sızıqtıń óz ara jaylasıwın qaysı sanlı shamalar anıqlaydı?*

Ámeliy shınığıw hám qollanıw

18.1. Kestede 18-temanıń tiykarǵı tayanısh maǵlıwmatları keltirilgen. Olardı dıqqat penen úyrenip shıǵıń hám anıqlama beriń.

Perpendikulyar hám qıya	
Anıqlaması	**Qásiyetleri**


Eger $a \perp \alpha$, $AB \notin \alpha$ bolsa:
AB – α tegislikke A noqattan túsirilgen perpendikulyar;
AC– qıya,
BC– qıyanıń α tegislikke proekciyası.
	
	$BC < AB$, $BC < BD$;
	eger $AB = BD$ bolsa, $AC = CD$ boladı;
	eger $AC = CD$ bolsa, $AB = BD$ boladı;
	eger $AC > CD$ bolsa, $AB > BD$ boladı.

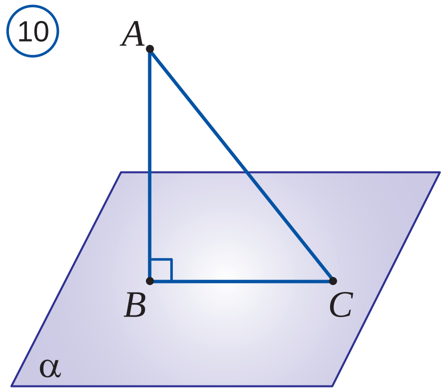
Aralıqlar		
Noqattan tegislikke shekemgi bolǵan aralıq	**Tuwrı sızıqtan tegislikke shekemgi bolǵan aralıq**	**Tegislikler arasındaǵı aralıq**
 $A \notin a$, $AB \perp \alpha$	 $a \parallel \alpha$, $A \in a$, $AB \perp \alpha$	 $\alpha \parallel \beta$, $A \in \beta$, $AB \perp \alpha$

18.2. 10-súwretten a) perpendikulyar; b) qıya: c) perpendikulyar ultanı; d) qıya proekciyasın anıqlań hám jazıń.

18.3. 11-súwretten AD hám DC kesindiler AB hám BC qıyalardıń proekciyası:

a) Eger $AD > DC$ bolsa, qıyalar haqqında ne aytıw múmkin?

b) Eger $AB = BC$ bolsa, proekciyalar haqqında ne aytıw múmkin?

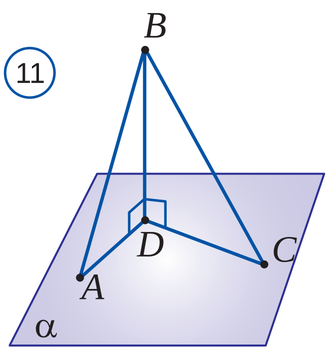


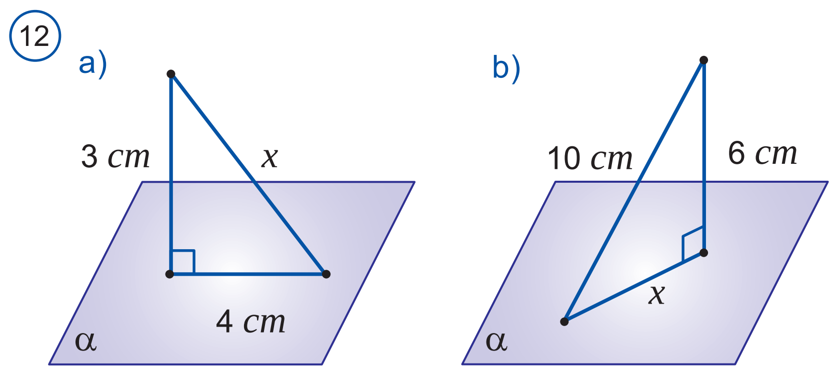
18.4. 12-súwrettegi belgisiz kesindilerdiń uzınlıǵın tabıń.

18.5. 13-súwrette berilgenlerden paydalanıp MA hám MC qıyalar uzınlıqların óz ara salıstırıń.

18.6. AB-perpendikulyar, AC – qıya hám BC – qıya proekciyası bolsa, kesteni berilgenlerden paydalanıp toltırıń.

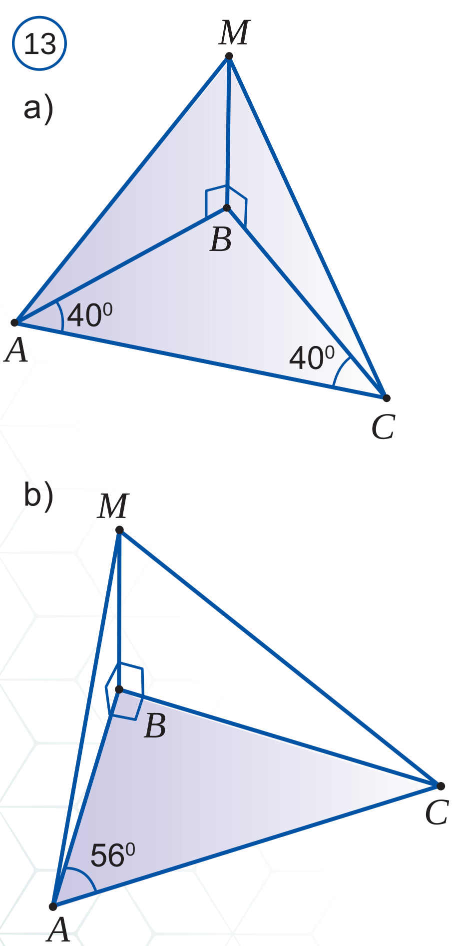
AB	24	15			12
BC	7		24	$4a$	
AC		25	26	$5a$	13





18.7. AB – perpendikulyar, AC – qıya, BC – qıya proekciyası, α – perpendikulyar hám qıya arasındaǵı múyesh bolsa, kesteni berilgenlerden paydalanıp toltırıń.

AB			5	6	14
BC		4			14
AC	6	8		12	
α	30°		45°		



18.8. M noqattan tegislikke óz ara teń MA, MB, MC, MD qıyalar ótkerilgen. $ABCD$ tórtmúyeshlik túri tómendegilerden qaysı biri boladı: a) kvadrat; b) parallelogramm; c) tuwrı tórtmúyeshlik. Juwabıńızdı túsindiriń.

18.9. Eger parallelogramnıń tóbelerinen teńdey uzaqlıqta jatqan noqat bar bolsa, bul parallelogramm tuwrı tórtmúyeshlik ekenligin dálilleń.

18.10. Eger rombtıń tóbelerinen teńdey uzaqlıqta jatqan noqat bar bolsa, bul romb kvadrat ekenligin dálilleń.

18.11. A, B, Q noqatlar α tegislikke tiyisli, M noqat bolsa oǵan tiyisli emes hám $MQ \perp \alpha$. MA, AQ, MQ, BQ, MB kesindilerdiń qaysı biri: a) perpendikulyar; b) qıya; c) qıya proekciyası ekenligin anıqlań.

18.12. A noqattan α tegislikke AB hám AC qıyalar hám AO perpendikulyar ótkerilgen *(14-súwret)*. Eger AB = 2,5 cm, AC = 3 cm bolsa, qıyalardıń proekciyaların óz ara salıstırıń.

18.13. Noqattan tegislikke eki qıya túsirilgen *(14-súwret)*. Eger qıyalardıń biri ekinshisinen 26 cm uzın, proekciyaları bolsa 12 cm hám 40 cm bolsa, bul qıyalardıń uzınlıqların tabıń.

18.14. Úshmúyeshlikke sırtlay sızılǵan sheńber orayınan úshmúyeshlik tegisligine perpendikulyar tuwrı sızıq ótkerilgen. Bul tuwrı sızıqtıń hárbir noqatı úshmúyeshlik tóbelerinen teńdey uzaqlıqta jatıwın dálilleń.

18.15. Maydanı a) 21 cm^2; b) 96 cm^2; c) 44 cm^2; d) 69 cm^2; e) 156 cm^2 bolǵan $ABCD$ kvadrat tegisligine uzınlıǵı 10 cm bolǵan DM perpendikulyar túsirilgen. MA qıyanıń uzınlıǵın tabıń.

18.16. Tuwrı múyeshi C bolǵan ABC úshmúyeshliktiń súyir múyeshi tóbesinen úshmúyeshlik tegisligine perpendikulyar AD tuwrı sızıq júrgizilgen. Eger $AC = c$, $BC = b$ hám $AD = c$ bolsa, D noqattan B hám C tóbelerine shekem bolǵan aralıqlardı tabıń.

18.17. Bir-birinen 4,2 m uzaqlıqta bolǵan vertikal baǵanalardıń joqarı tóbeleri aǵash penen tutastırılǵan. Baǵanalardıń biyiklikleri 5,8 m hám 4,1 m bolsa, aǵashtıń uzınlıǵın tabıń.

18.18. 20 m uzınlıqtaǵı telefon sımı baǵanaǵa jer betinen 8 m biyiklikte bekkemlengen hám odan biyikligi 18 m bolǵan kópqabatlı úy tóbesine kerip tartılǵan. Úy menen baǵana arasındaǵı aralıqtı tabıń.

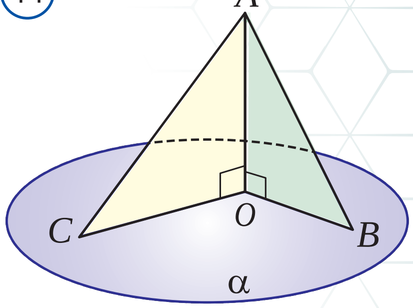
18.19. Tegislikke P noqattan túsirilgen PQ perpendikulyar uzınlıǵı 1 ge, PA hám PB qıyalar uzınlıqları bolsa 2 ge teń. C noqat AB kesindiniń ortası. Eger a) $\angle APB = 90^{\circ}$; b) $\angle APB = b$ bolsa, QC kesindi uzınlıǵın tabıń.

18.20. $ABCD$ parallelogramnıń doǵal B múyeshi tóbesinen onıń tegisligine perpendikulyar bolǵan BH kesindi túsirilgen. Eger AH = 5 cm, $HD = HC$ = 8,5 cm, $AC = 1{,}5\sqrt{33}$ bolsa, parallelogramm táreplerin tabıń.

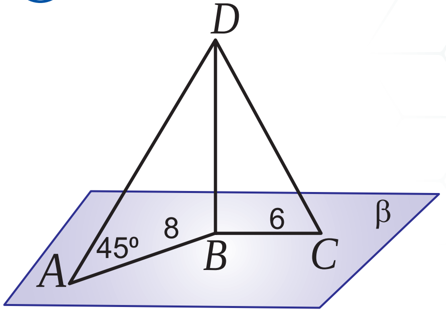
18.21. M noqat tárepi 60 cm bolǵan durıs ABC úshmúyeshliktiń hárbir tóbesinen 40 cm aralıqta jaylasqan. ABC úshmúyeshlik tegisliginen M noqatqa shekemgi bolǵan aralıqtı tabıń.

18.22. α tegislikke BD perpendikulyar *(15-súwret)*, AD hám DC qıyalar túsirilgen. $\angle DCB = 45^{\circ}$, $AB = 8$, $BC = 6$. CD nı tabıń.

14



15



“GeoGebra”nı qollanıp

3D kalkulyatorı járdeminde noqattan tuwrı sızıqqa shekem bolǵan aralıqtı anıqlaw

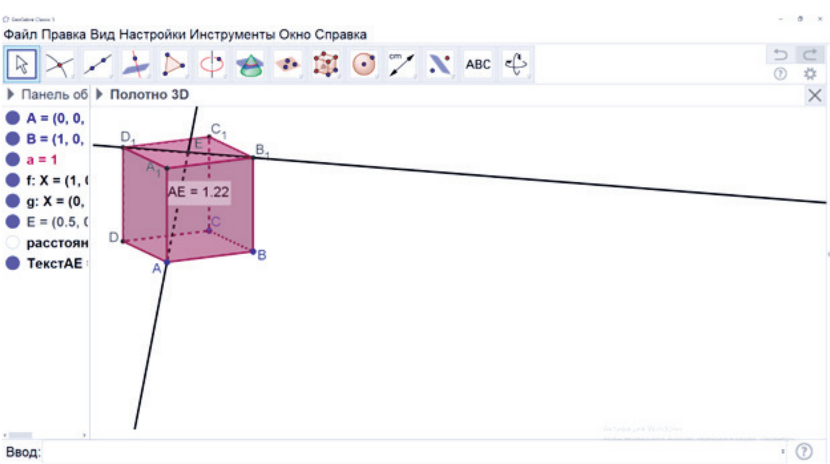
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ birlik kub berilgen. Kubtıń A tóbesinen B_1D_1 tuwrı sızıqqa perpendikulyar túsirilgen. A tóbesinen B_1D_1 tuwrı sızıqqa shekem bolǵan aralıqtı tabıń.

Jasaw:

- “GeoGebra”da jańa ayna ashıń.
- “GeoGebra” interfeysin **“Настройки”** – **“3D Графика”** kórinisine ótkeriń.

Aralıqtı anıqlaw basqıshları

1.		**Ввод** (Kiritiw) qatarı arqalı	$A=(0,0,0)$ noqat jasaladı.
2.		**Ввод** (Kiritiw) qatarı arqalı	$B=(1,0,0)$ noqat jasaladı.
3.		**Куб** (Kub)	Birlik kub jasaladı.
4.		**Переименовать** (Qayta atamalaw)	E, F, G, H noqatlar sáykes túrde A_1, B_1, C_1, D_1 ge ózgertiriledi. Bunıń ushın noqat ústine basıladı hám jańa belgi kiritiledi.
5.		**Прямая** (Tuwrı sızıq)	B_1D_1 tuwrı sızıqqa ótkeriledi
6.		**Перпендикулярная прямая** (Perpendikulyar tuwrı sızıq)	Kubtıń A tóbesinen B_1D_1 tuwrı sızıqqa perpendikulyar túsiriledi
7.		**Пересечение** (Kesilisiw)	B_1D_1 tuwrı sızıq hám júrgizilgen perpendikulyar sızıqlar kesilisiw noqatı – E belgilenedi.
8.	cm	**Расстояние или длина** (aralıq yamasa uzınlıq)	Kubtıń A tóbesi hám E noqatı arasındaǵı aralıq anıqlanadı: AE = 1.22.



Óz betinshe orınlaw ushın tapsırma

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ birlik kub berilgen. Kubtıń A tóbesinen BD_1 tuwrı sızıǵına perpendikulyar túsirilgen. A tóbesinen BD_1 tuwrı sızıqqa shekemgi aralıqtı tabıń.

2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ birlik kubtıń AA_1 jaǵınıń ortası – E den BD_1 sızıǵına perpendikulyar túsirilgen. E noqattan BD_1 sızıqqa shekemgi aralıqtı tabıń.

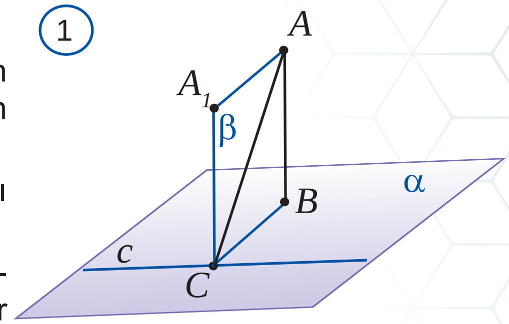
19 ÚSH PERPENDIKULYAR HAQQÍNDAĞÍ TEOREMA

4.11-teorema. ***Eger tegislikke túsirilgen qıyanıń ultanınan ótetuǵın tuwrı sızıq qıyanıń proekciyasına perpendikulyar bolsa, onda ol qıyanıń ózine de perpendikulyar boladı.***

Dálillew. Aytayıq, AB kesindi α tegislikke túsirilgen perpendikulyar, AC kesindi bolsa qıya bolsın.

c tuwrı sızıq bolsa α tegislikte jatıwshı, C noqattan ótetuǵın hám qıya proekciyasına perpendikulyar bolǵan tuwrı sızıq bolsın *(1-súwret)*.

1



AB ǵa parallel A_1C tuwrı sızıqtı júrgizemiz. Bul tuwrı sızıq α tegislikke perpendikulyar boladı.

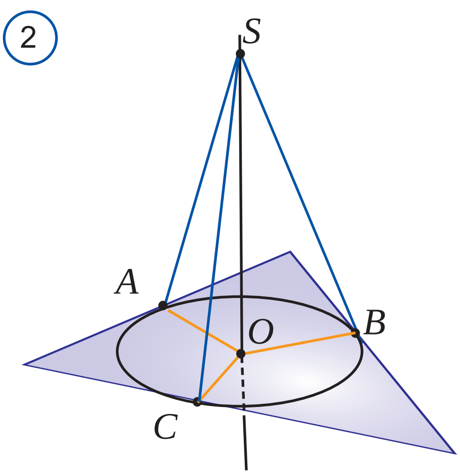
AB hám A_1C tuwrı sızıqlar arqalı β tegislikti júrgizemiz. c tuwrı sızıq CA_1 tuwrı sızıqqa perpendikulyar boladı. Shárt boyınsha, ol CB tuwrı sızıqqa da perpendikulyar edi. Onda c tuwrı sızıq β tegislikke de perpendikulyar boladı.

Demek, c tuwrı sızıq β tegislikte jatqan AC qıyaǵa da perpendikulyar boladı. Usı teoremada úsh perpendikulyarlar haqqında gáp baratırǵanı ushın ol "Úsh perpendikulyar haqqındaǵı teorema" atın alǵan. Bul teoremaǵa keri bolǵan teorema da orınlı boladı. Onı óz betinshe dálilleń.

4.12-teorema. ***Eger tegislikke túsirilgen qıyanıń ultanınan ótetuǵın tuwrı sızıq qıyaǵa perpendikulyar bolsa, onda ol qıyanıń proekciyasına da perpendikulyar boladı.***

1-másele. Úshmúyeshlikke ishley sızılǵan sheńber orayınan úshmúyeshlik tegisligine perpendikulyar tuwrı sızıq júrgizilgen *(2-súwret)*. Bul tuwrı sızıqtıń qálegen noqatı úshmúyeshlik tároplerinen teńdey uzaqlıqta jatıwın dálilleń.

2



Dálillew. Aytayıq, A, B, C – úshmúyeshlik tárepleriniń sheńber menen kesilisiw noqatları, O – sheńber orayı, S bolsa perpendikulyardaǵı qálegen noqat bolsın.

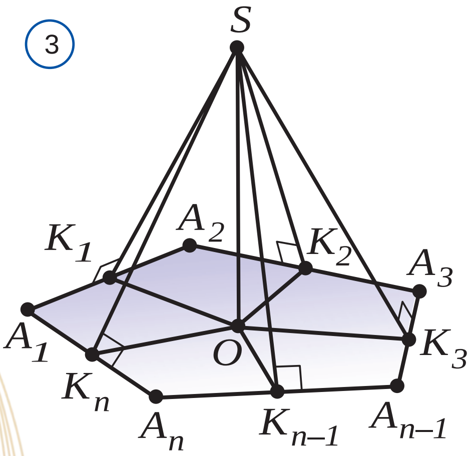
OA úshmúyeshlik tárepine perpendikulyar bolǵanlıǵı ushın úsh perpendikulyar haqqındaǵı teorema boyınsha, OA da bul tárepke perpendikulyar boladı. Onda SAO tuwrı múyeshli úshmúyeshlik boladı. Bul úshmúyeshlikte Pifagor teoreması boyınsha:

$$SA=\sqrt{AO^2+OS^2}=\sqrt{r^2+OS^2}$$

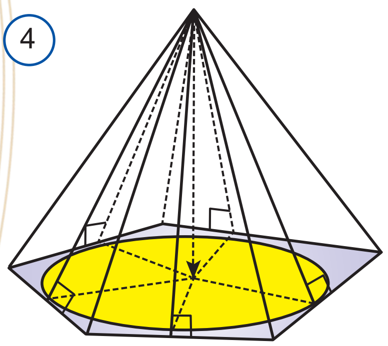
bul jerde r -sheńber radiusı.

Usıǵan uqsas SBO tuwrı múyeshli úshmúyeshlikten $SB=\sqrt{r^2+OS^2}$ hám SCO tuwrı múyeshli úshmúyeshlikten bolsa $SC=\sqrt{r^2+OS^2}$ ekenligin tabamız.

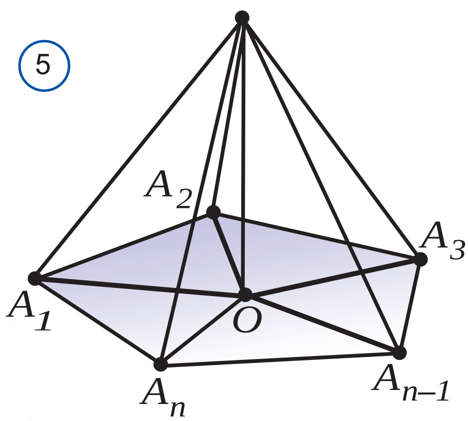
3



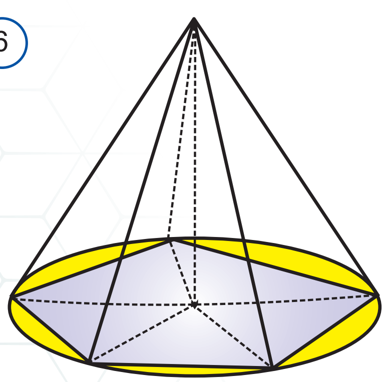
4



5



6



Demek, $SA = SB = SC$.

Bul qásiyettiń qálegen kópmúyeshlik ushın ulıwmalaw jaǵdayların kórip shıǵamız.

2-másele. Keńisliktegi noqat kópmúyeshliktiń táreplerinen teńdey uzaqlıqta jaylasqan bolıp, onnan kópmúyeshlik tegisligine perpendikulyar túsirilgen. Bul perpendikulyar ultanı noqat kópmúyeshlikke ishley sızılǵan sheńber orayı menen ústpe-úst túsiwin dálilleń *(3-súwret)*.

Dálillew. Aytayıq, S – berilgen noqat, $A_1A_2...A_{n-1}A_n$ – berilgen kópmúyeshlik hám O bolsa S noqattan kópmúyeshlik tegisligine túsirilgen perpendikulyar ultanı bolsın.

Onda, shárt boyınsha, SK_1, SK_2,... SK_n – S noqattan kópmúyeshliktiń táreplerine shekem bolǵan aralıqlar (yaǵnıy qaptal jaqlarǵa túsirilgen perpendikulyarlar) óz ara teń boladı: $SK_1 = SK_2 = ... = SK_n$.

O noqattı K_1, K_2,... K_n noqatlar menen tutastırıp shıǵamız. Nátiyjede, SOK_1, SOK_2,.. ., SOK_n – bir SO ulıwma katetke hám teń gipotenuzalarǵa iye tuwrı múyeshli úshmúyeshliklerdi payda etemiz.

Bir kateti hám gepotenuzaları teńligi hám úshmúyeshlikler teńlik belgisi boyınsha bul tuwrı múyeshli úshmúyeshlikler teń boladı.

Onda olardıń ekinshi katetleri – OK_1, OK_2,... OK_n de óz ara teń boladı: $OK_1 = OK_2 = ... = OK_n$.

Bul teńlikler perpendikulyar ultanı – O noqat kópmúyeshlikke ishley sızılǵan sheńber orayı menen ústpe-úst túsiwin kórsetedi.

Bul qásiyetten tómendegi zárúrli juwmaq kelip shıǵadı.

Juwmaq. Eger piramidanıń barlıq qaptal jaqlarınıń biyiklikleri óz ara teń bolsa (yamasa qaptal jaqları ultan tegisligi menen birdey múyesh payda etse), onda bul piramidanıń biyikligi ultanına ishley sızılǵan sheńber orayına túsedi *(4-súwret)*.

3-másele. Keńisliktegi noqat kópmúyeshliktiń tóbelerinen teńdey uzaqlıqta jaylasqan bolıp, onnan kópmúyeshlik tegisligine perpendikulyar túsirilgen. Bul perpendikulyar ultanı kópmúyeshlikke sırtlay sızılǵan sheńber orayı menen ústpe-úst túsiwin óz betinshe dálilleń *(5-súwret)*.

Juwmaq. Eger piramidanıń barlıq qaptal qabırǵaları óz ara teń bolsa (yamasa qaptal qabırǵaları ultan tegisligi menen birdey múyesh payda etse), onda bul piramidanıń biyikligi ultanǵa sırtlay sızılǵan sheńber orayına túsedi *(6-súwret)*.

4-másele. Keńislikte berilgen noqattan tegislikke eki qıya túsirilgen. Bul qıyalardıń biri ekinshisinen 26 *cm* uzın bolıp, olardıń proekciyaları uzınlıǵı sáykes túrde 12 *cm* hám 40 *cm*. Qıyalardıń uzınlıǵın tabıń.

Sheshiliwi. Aytayıq, AB – perpendikulyar, AC hám AD bolsa sáykes qıyalar bolsın *(7-súwret)*.

$AC = x$ *cm* dep alamız. Onda shárt boyınsha:

$AD = x+26$ *cm* boladı.

1) ABC – tuwrı múyeshli úshmúyeshlik. Pifagor teoreması boyınsha:

$AC^2 = AC^2 + AB^2$ yamasa $AB^2 = x^2 + 144$.

2) ABD da tuwrı múyeshli úshmúyeshlik. Pifagor teoreması boyınsha:

$AD^2 = BD^2 + AB^2$ yamasa $AB^2 = (x + 26)^2 - 1600$.

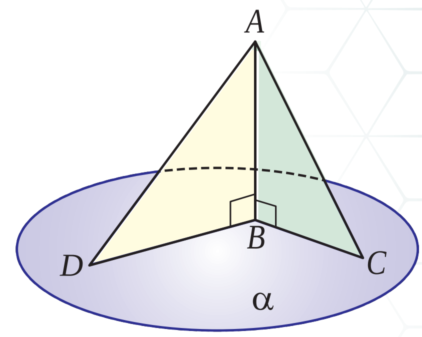
1 hám 2 den $x^2 + 144 = (x + 26)^2 - 1600$ di payda etemiz.

Onnan $x = 16$ *cm* ekenligin anıqlaymız.

Demek, $AC = 15$ *cm*, $AD = x+26 = 41$ (*cm*) boladı.

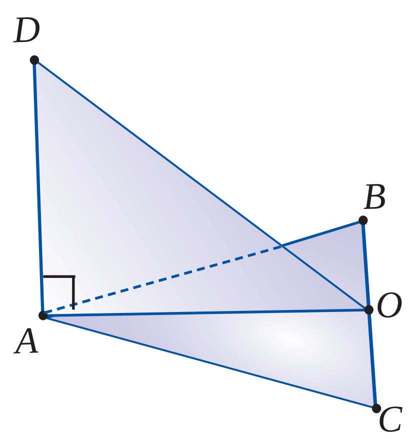
Juwabı: $AC = 15$ *cm*, $AD = 41$ *cm*.

7



5-másele. ABC úshmúyeshlik tegisligine onıń A noqatınan perpendikulyar júrgizilgen *(8-súwret)*. Eger $AB = 13$, $BC = 20$, $AC = 11$ hám $AD = 36$ bolsa, D noqattan BC tuwrı sızıqqa shekemgi bolǵan aralıqtı tabıń.

8



Sheshiliwi. Izlenip atırǵan aralıq D noqattan BC tárepke túsirilgen perpendikulyar uzınlıǵına teń boladı. Bul kesindini túsiriw ushın onıń BC táreptegi ultanın tabıw kerek. Onıń ushın ABC úshmúyeshliktiń A tóbesinen BC tárepine AO biyiklikti túsiremiz: $AO \perp BC$.

Ol jaǵdayda úsh perpendikulyar haqqındaǵı teoremaǵa kóre, $BC \perp DO$ boladı. Demek, DO izlenip atırǵan kesindi eken.

Endi DO kesindiniń uzınlıǵın tabamız. Bul onıń ushın aldın ABC úshmúyeshlik maydanın Geron formulasınan paydalanıp tabamız:

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{20+11+13}{2} = 22;$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

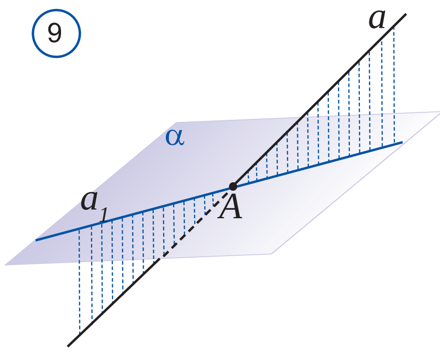
$$= \sqrt{22\cdot(22-20)\cdot(22-11)\cdot(22-13)} = 66$$

$$AO = \frac{2S}{a} = \frac{2\cdot 66}{20} = 6,6$$

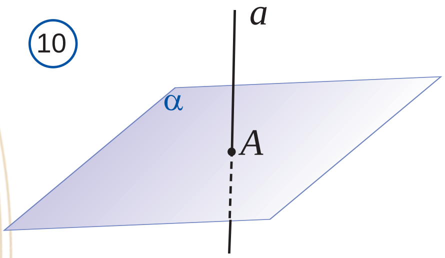
ADO tuwrı múyeshli úshmúyeshlikte Pifagor teoreması boyınsha:

$$DO = \sqrt{AD^2 + AO^2} = \sqrt{36^2 + 6,6^2} = 36,6$$

9



10



Aytayıq, α tegislik hám onı kesip ótetuǵın hám bul tegislikke perpendikulyar bolmaǵan a tuwrı sızıq berilgen bolsın *(9-súwret)*. a tuwrı sızıqtıń hárbir noqatınan perpendikulyarlar túsiremiz. Bul perpendikulyarlardıń ultanları a_1 tuwrı sızıqtı kesedi.

a_1 tuwrı sızıq a tuwrı sızıqtıń α tegisliktegi *proekciyası* dep ataladı.

a tuwrı sızıq hám α tegislik arasındaǵı múyesh dep, tuwrı sızıq penen onıń bul tegisliktegi proekciyası arasındaǵı múyeshke aytıladı.

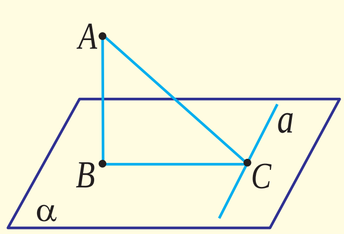
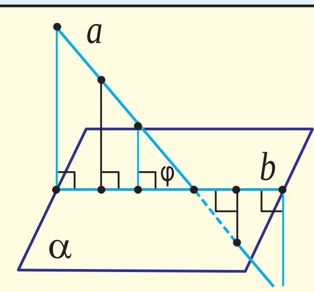
Eger tuwrı sızıq tegislikke perpendikulyar bolsa *(10-súwret)*, ol menen tegislik arasındaǵı múyesh 90° qa, eger parallel bolsa, bul tuwrı sızıq penen tegislik arasındaǵı múyesh 0° qa teń dep alınadı.

Temaǵa tiyisli sorawlar hám shınıǵıwlar

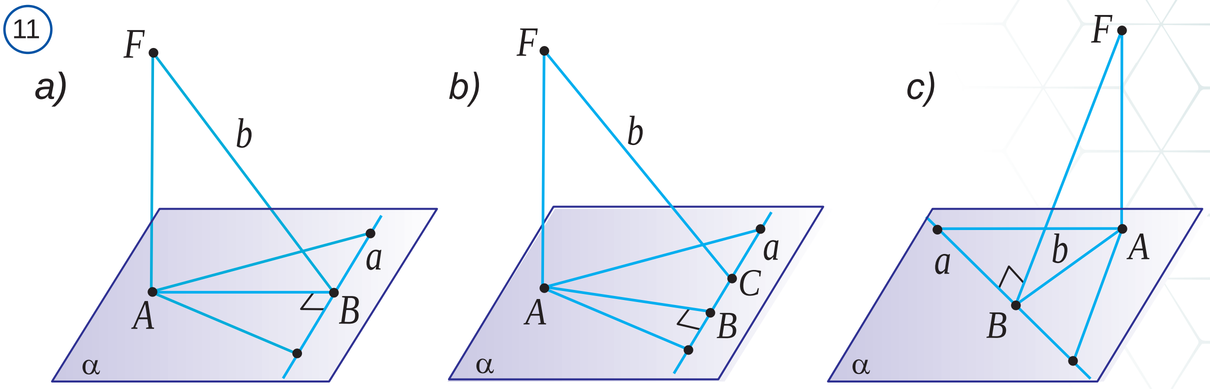
1. *Úsh perpendikulyar haqqındaǵı teoremaǵa túsindirme beriń. Ne sebepten ol sonday atalǵan?*
2. *Úsh perpendikulyar haqqındaǵı teoremaǵa keri teoremanı aytıń hám anıqlama beriń.*
3. *Tuwrı sızıq hám tegislik arasındaǵı múyesh qanday anıqlanadı?*
4. *Tegislik hám oǵan perpendikulyar tuwrı sızıq arasındaǵı múyesh neshe gradus?*

Ámeliy shınıǵıw hám qollanıw

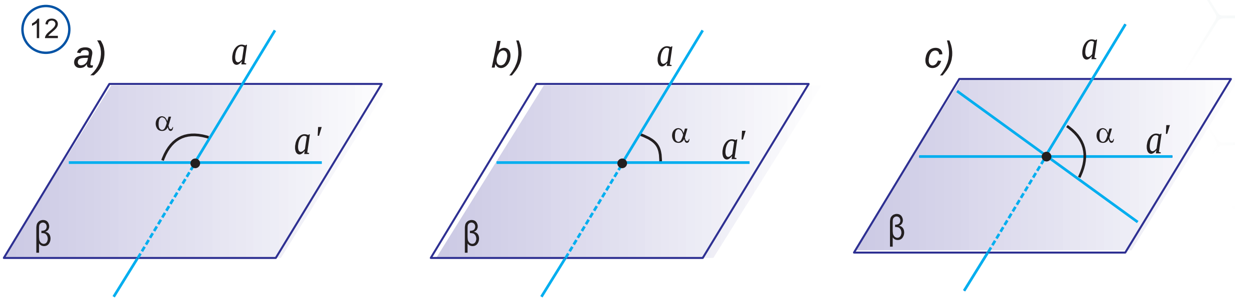
19.1. Kestede 19-temanıń tiykarǵı tayanısh maǵlıwmatları keltirilgen. Olardı dıqqat penen úyrenip shıǵıń hám anıqlama beriń.

Úsh perpendikulyar haqqındaǵı teorema	Tuwrı sızıq hám tegislik arasındaǵı múyesh
 $AB \perp \alpha$ Eger $a \perp BC$ bolsa, $a \perp AC$ boladı. Eger $a \perp AC$ bolsa, $a \perp BC$ boladı.	 b – a nıń α tegisliktegi proekciyası. φ – a hám α tegislik arasındaǵı múyesh.

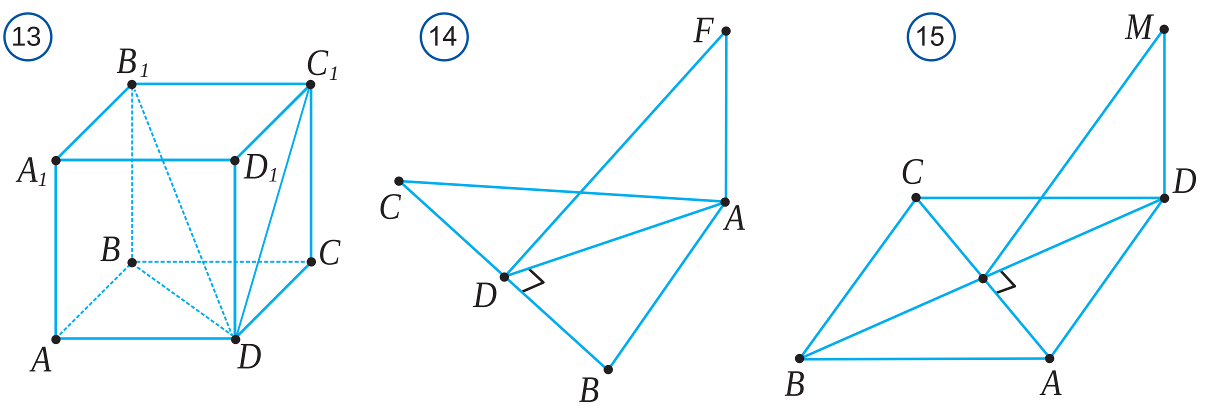
19.2. 11-súwrette $AF \perp \alpha$. a hám b tuwrı sızıqlardıń óz ara jaylasıwın anıqlań.



19.3. 12-súwrette a' tuwrı sızıq – a tuwrı sızıqtıń β tegisliktegi proekciyası. Súwretlerdiń qaysı birinde a tuwrı sızıq hám β tegislik arasındağı α múyesh durıs kórsetilgen?



19.4. 13-súwrette $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kub berilgen. a) DD_1C_1C jağınıń DC_1 diagonalı hám $ABCD$ ultan tegisligi arasındağı; b) kubtıń B_1D diagonalı hám $ABCD$ ultan tegisligi arasındağı; c) kubtıń B_1D diagonalı hám DD_1C_1C jağı tegisligi arasındağı múyeshti anıqlań.



19.5 14- hám 15-súwretlerge tiyisli máseleler dúziń hám olardı sheshiń.

19.6. Tómendegi pikirlerdiń qaysı biri nadurıs?

A) Eger eki tuwrı sızıq bir tegislikke perpendikulyar bolsa, bul tuwrı sızıqlar parallel bolıp tabıladı.

B) Eger tegislikte jatpaytuǵın tuwrı sızıq tegisliktegi qanday da bir tuwrı sızıqqa parallel bolsa, tegislik hám tuwrı sızıq óz ara parallel bolıp tabıladı.

C) Eger tegislikke túsirilgen qıya tegislikte jatıwshı tuwrı sızıqqa perpendikulyar bolsa, onıń proekciyası da tuwrı sızıqqa perpendikulyar boladı.

D) Tegislikte jatıwshı eki tuwrı sızıqqa perpendikulyar bolǵan tuwrı sızıq tegislikke de perpendikulyar boladı.

E) Eki tuwrı sızıqtıń hárbiri úshinshi tuwrı sızıqqa parallel bolsa, bul tuwrı sızıqlar parallel bolıp tabıladı.

19.7. Tómendegi pikirlerdiń qaysı biri nadurıs?

A) Eger tegislik eki parallel tegisliklerden birine perpendikulyar bolsa, onda bul tegislik ekinshi tegislikke de perpendikulyar boladı.

B) Tegislikte jatıwshı kesilisiwshi eki tuwrı sızıqqa perpendikulyar bolǵan tuwrı sızıq tegislikke de perpendikulyar boladı.

C) Keńisliktegi eki tuwrı sızıq úshinshi tuwrı sızıqqa perpendikulyar bolsa, olar óz ara parallel bolıp tabıladı.

D) Eger tegisliktegi tuwrı sızıq tegislikke túsirilgen qıyaǵa perpendikulyar bolsa, bul tuwrı sızıq qıyanıń proekciyasına da perpendikulyar boladı.

E) Eki parallel tegislikti úshinshi tegislik penen keskende payda bolǵan tuwrı sızıqlar óz ara parallel boladı.

19.8. A noqat tárepi a ǵa teń bolǵan teń tárepli úshmúyeshliktiń tóbelerinen a aralıqta jatadı. A noqattan úshmúyeshlik tegisligine shekem bolǵan aralıqtı tabıń.

19.9. α tegisliktiń sırtındaǵı S noqattan oǵan úsh teń SA, SB, SC qıyalar hám SO perpendikulyar ótkerilgen. Perpendikulyardıń O ultanı ABC úshmúyeshlikke sırtlay sızılǵan sheńberdiń orayı bolıwın dálilleń.

19.10. Teń tárepli úshmúyeshliktiń tárepleri 3 m ge teń. Úshmúyeshlik hárbir tóbesinen 2 m aralıqta bolǵan noqattan úshmúyeshlik tegisligine shekem bolǵan aralıqtı tabıń.

19.11. Teń qaptallı úshmúyeshlik ultanı hám biyikligi 4 m ge teń. Berilgen noqat úshmúyeshlik tegisliginen 6 m aralıqta hám onıń tóbelerinen birdey aralıqta jatadı. Sol aralıqtı tabıń.

19.12. A noqattan kvadrattıń tóbelerine shekem bolǵan aralıq a ǵa teń. Kvardattıń tárepi b ǵa teń bolsa, A noqattan kvadrat tegisligine shekem bolǵan aralıqtı tabıń.

19.13. Berilgen noqattan tegislikke júrgizilgen berilgen uzınlıqtaǵı qıyalar ultanlarınıń geometriyalıq ornın tabıń.

19.14. Berilgen noqattan tegislikke uzınlıqları 10 cm hám 17 cm bolǵan eki qıya júrgizilgen. Bul qıyalar proekciyasınıń ayırması 9 cm ge teń. Qıyalar proekciyaların tabıń.

19.15. Noqattan tegislikke eki qıya ótkerilgen. Eger: a) olardan biri ekinshisinen 26 cm uzın, qıyalardıń proekciyaları 12 cm hám 40 cm bolsa; b) qıyalar uzınlıqları 1 : 2 qatnasta bolıp, olardıń proekciyaları 1 cm hám 7 cm ge teń bolsa, qıyalardıń uzınlıqların tabıń.

19.16. α tegislikten d aralıqta jatqan A noqatqa tegislik penen 30° múyesh jasaytuǵın AB hám AC qıyalar júrgizilgen. Olardıń α tegislikke proekciyaları óz ara 120° lı múyeshti jasaydı. BC kesindi uzınlıǵın tabıń.

19.17. Eger tuwrı múyeshli hám teń qaptallı úshmúyeshliktiń katetlerinen biri tegislikke tiyisli, ekinshisi bolsa onıń menen 45° lı múyesh payda etse, gipotenuza bul tegislik penen 30° lı múyesh payda etiwin dálilleń.

19.18. ABC úshmúyeshlik tegisligine MA perpendikulyar túsirilgen. $\angle MBC = 45°$. $\angle ACB = 90°$. $MA = AC$. $\angle AMB$ nı tabıń *(16-súwret)*.

19.19. a qıya α tegislik penen 45° lı múyeshti jasaydı, tegisliktiń b tuwrı sızıǵı bolsa qıya proekciyası menen 45° lı múyeshti jasaydı. a hám b tuwrı sızıqlar arasındaǵı múyeshtiń 60° qa teń ekenligin dálilleń.

19.20. P noqat tárepi a ǵa teń $ABCD$ kvadrattıń hárbir tóbesinen a aralıqta jatadı. Kvadrat tegisligi hám AP tuwrı sızıq arasındaġı múyeshti tabıń.

9.21. Úshmúyeshli piramidanıń barlıq qabırġaları óz ara teń. Piramidanıń qabırġası hám bul qabırġaġa tiyisli bolmaġan jaġı arasındaġı múyeshti tabıń.

19.22. Tuwrı múyeshli parallelepipedtiń ólshemleri a, b hám c ġa teń. Parallelepiped diagonalı menen onıń jaqları diagonalları arasındaġı aralıqtı tabıń.

19.23. $AB \perp \alpha$, $CD \perp \alpha$, $AB = CD$ ekenligi berilgen *(17-súwret)*. $ABCD$ tórtmúyeshlik túrin anıqlań.

19.24. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kub berilgen. $AD \perp DCC_1$ ekenligin dálilleń.

19.25. S noqat $ABCD$ tórtmúyeshlik tegisliginde jatpaydı hám onıń tóbelerinen teń aralıqta jaylasqan. S noqattan ABC tegislikke shekemgi bolġan aralıq 24 cm, AB = 12 cm, BC = 16 cm bolsa, S noqattan tórtmúyeshlik tóbelerine shekemgi bolġan aralıqlardı tabıń.

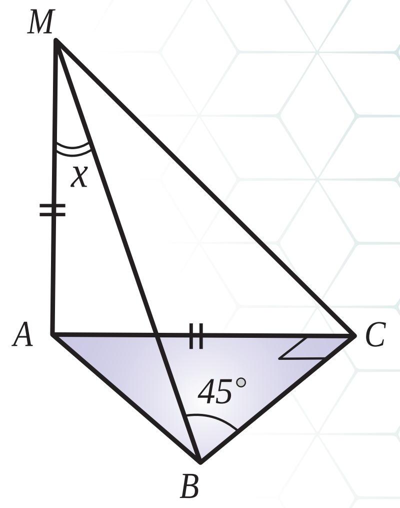
19.27. Noqattan katetleri 15 cm hám 20 cm bolġan tuwrı múyeshli úshmúyeshlik tegisligine, uzınlıġı 16 cm bolġan perpendikulyar júrgizilgen. Perpendikulyardıń ultanı úshmúyeshliktiń tuwrı múyeshli tóbesinde. Bul noqattan gipotenuzaġa shekemgi bolġan aralıqtı tabıń.

19.28. A noqattan α tegislikke tegislik penen 60° múyesh payda etiwshi AB hám AC qıyalar júrgizilgen. Eger $BC = AC = 6$ bolsa, AB nı tabıń.

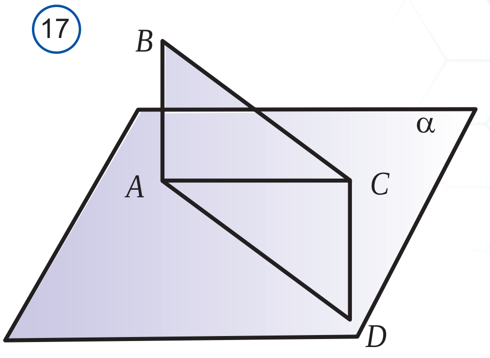
19.29. β tegislikke CD perpendikulyar *(18-súwret)*, AD hám BD qıyalar túsirilgen. $BC = 6$, $AD = 10$, $AC = 8$. $\angle DBC$ ti tabıń.

19.30. 19-súwrette $ABCD$ tuwrı tórtmúyeshlik. MC – tuwrı tórtmúyeshlik tegisligine perpendikulyar. $\angle BAM = 64°$. $\angle BMA$ ti tabıń.

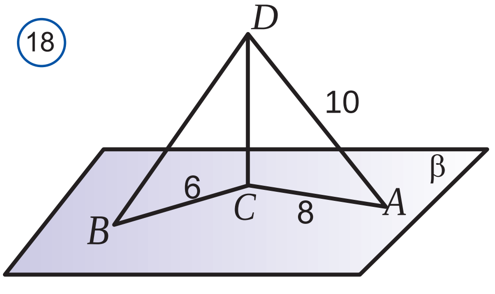
16



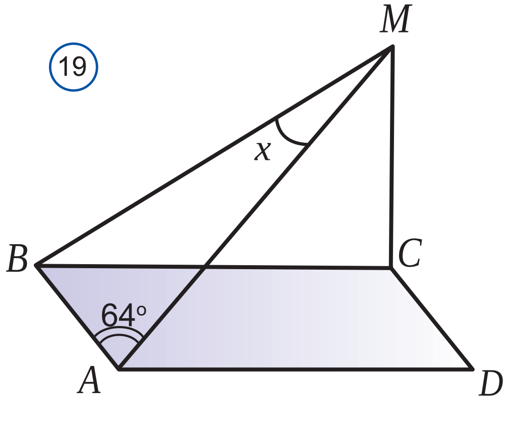
17



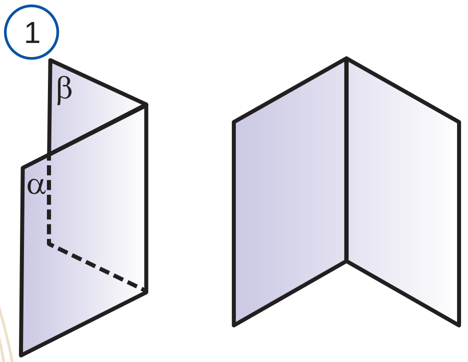
18



19



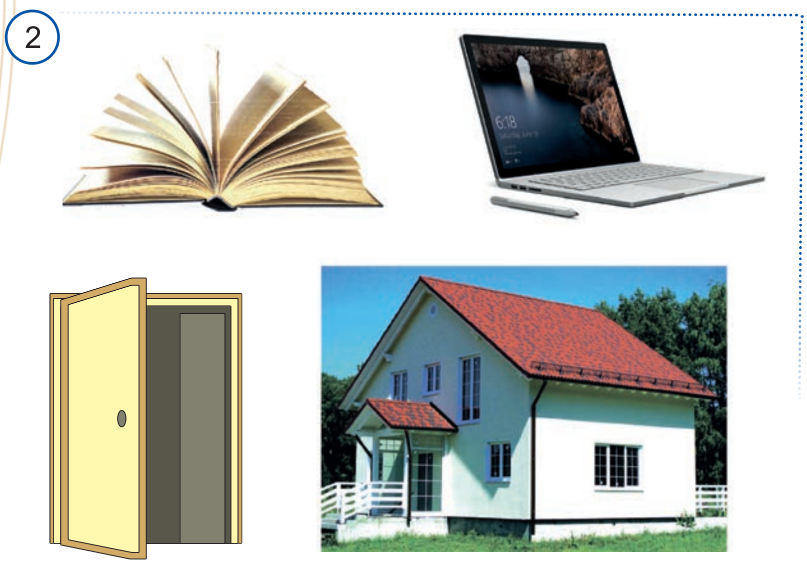
20 KEŃISLIKTE TEGISLIKLERDIŃ PERPENDIKULYARLÍĞÍ

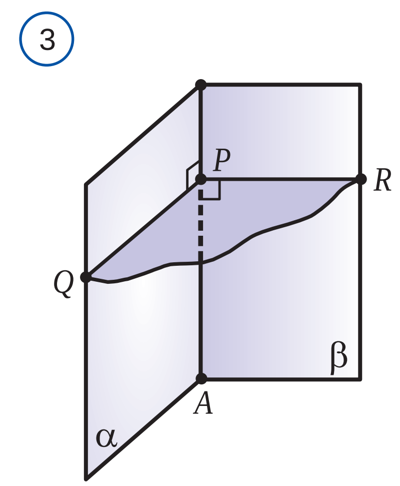


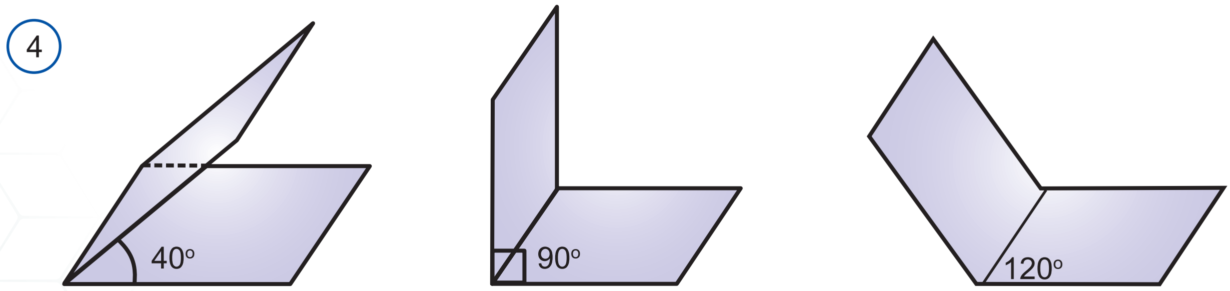
Eki yarımtegislik hám olardı shegaralap turǵan ulıwma tuwrı sızıqtan ibarat geometriyalıq figura *eki jaqlı múyesh* dep ataladı *(1-súwret)*. Yarımtegislikler eki jaqlı múyeshtiń *jaqları*, olardı shegaralaytuǵın tuwrı sızıq bolsa eki jaqlı múyeshtiń *qabırǵası* dep ataladı.

Eki jaqlı múyeshler haqqında átirapımızdaǵı tómendegi zatlar kóz aldımızǵa keledi *(2-súwret)*: kitap, noutbuk, ashıq esik hám jaydıń tóbesi.

Eki jaqlı múyesh qabırǵasınıń qálegen noqatınan onıń jaqlarında jatıwshı hám bul qabırǵaǵa perpendikulyar bolǵan nurlardı júrgizemiz. Bul nurlar payda etken múyesh eki jaqlı múyeshtiń *sızıqlı múyeshi* dep ataladı *(3-súwret)*.



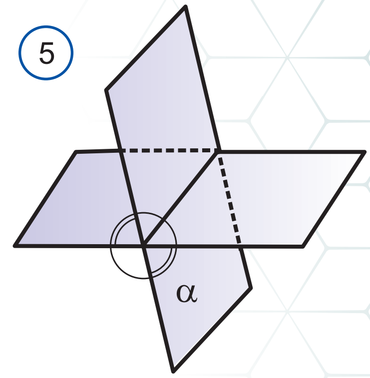




Anıqlamadan kóringenindey, eki jaqlı múyeshtiń sızıqlı múyeshi qabırǵasında saylanǵan noqat penen anıqlanadı hám sheksiz kóp boladı. Solay bolsa da, eki jaqlı múyeshtiń sızıqlı múyeshi shaması qabırǵasında saylanǵan noqatqa baylanıslı emes, yaǵnıy olardıń barlıǵı óz ara teń boladı.

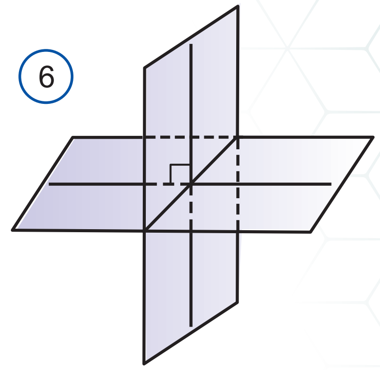
Eki jaqlı múyeshler shaması onıń sızıqlı múyeshi shaması menen anıqlanadı. Sızıqlı múyeshler súyir, tuwrı, doǵal hám jayıq bolıwına qaray eki jaqlı múyeshler de sáykes túrde súyir, tuwrı, doǵal hám jayıq eki jaqlı múyeshlerge ajıratıladı. 4-súwrette hár qıylı eki jaqlı múyeshler súwretlengen.

Eki kesilisiwshi tegislik pútin keńislikti ulıwma qabırǵaǵa iye bolǵan tórt eki jaqlı múyeshke ajıratadı *(5-súwret)*. Bul eki jaqlı múyeshlerdiń biri α ǵa teń bolsa, olardan jáne birewiniń mánisi de α ǵa teń boladı. Qalǵan ekewiniń mánisi bolsa $180^{\circ} - \alpha$ ǵa teń boladı.



Usı eki jaqlı múyeshler ishinde 90° tan kishisi de boladı. Sol múyeshtiń mánisi kesilisiwshi *tegislikler arasındaǵı múyesh* dep alınadı.

Eger eki jaqlı múyeshlerdiń biri tuwrı, yaǵnıy 90° qa teń bolsa, qalǵan úshewi de tuwrı boladı *(6-súwret)*.

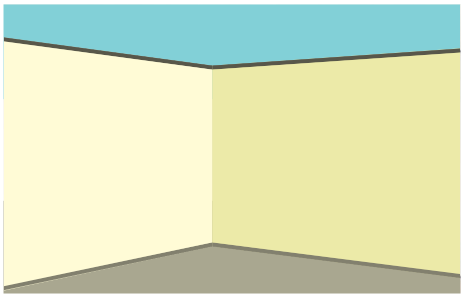


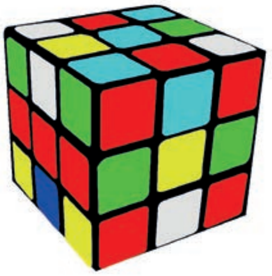
Tuwrı múyesh astında kesilisiwshi tegislikler *perpendikulyar tegislikler* dep ataladı.

Perpendikulyar tegisliklerge átirapıńızdan mısal retinde bólme polı hám diywalları, ulıwma qabırǵaǵa iye bólme diywalları, ulıwma qabırǵaǵa iye rubik kubı jaqları hám jer beti hám úy diywalları hám úydiń bir-birine tutasqan diywalların mısal sıpatında keltiriw múmkin *(7-súwret)*.

α hám β tegisliklerdiń perpendikulyarlıǵı tuwrı sızıqlardaǵı sıyaqlı "$\perp$" belgi járdeminde, $\alpha \perp \beta$ tárizde jazıladı.

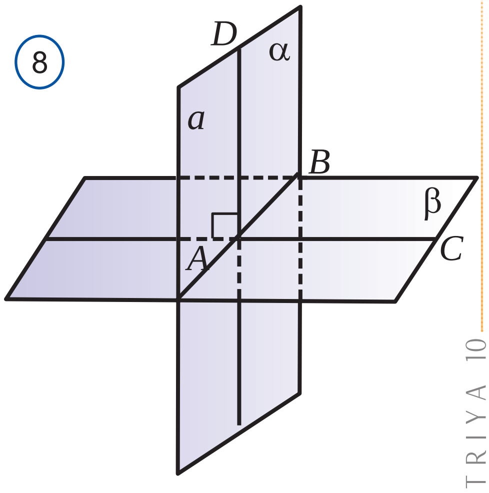
7





Endi perpendikulyar tegisliklerdiń qásiyetlerine toqtalamız. Tómendegi teorema tegisliklerdiń *perpendikulyarlıq belgisi* dep ataladı.

4.13-teorema. Eger tegisliklerden biri ekinshisine perpendikulyar bolǵan tuwrı sızıqtan ótse, bunday tegislikler óz ara perpendikulyar boladı.



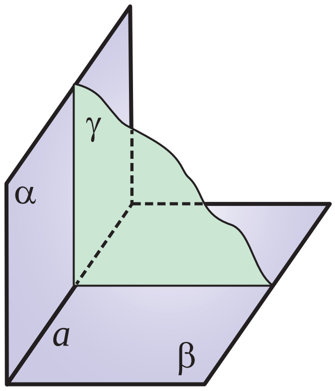
Dálillew. Aytayıq, α hám β tegislikler berilgen bolıp, α tegislik β tegislikke perpendikulyar bolǵan a tuwrı sızıqtan ótsin *(8-súwret)*. β tegislik penen a tuwrı sızıqtıń kesilisiw noqatı A bolsın. $\alpha \perp \beta$ ekenligin dálilleymiz.

α hám β tegislikler AB tuwrı sızıq boylap kesilisedi. Onda $AB \perp a$ boladı, sebebi shártke kóre $\beta \perp a$. β tegislikte jatqan hám AB tuwrı sızıqqa perpendikulyar bolǵan AC tuwrı sızıqtı júrgizemiz.

Nátiyjede payda bolǵan $\angle DAC$ α, β – eki jaqlı múyeshtiń sızıqlı múyeshi boladı. Shárt boyınsha, $a \perp b$. Ol jaǵdayda $\angle DAC$ – tuwrı múyesh. Demek, $\alpha \perp \beta$.

Bul teoremadan tómendegi nátiyje kelip shıǵadı.

9

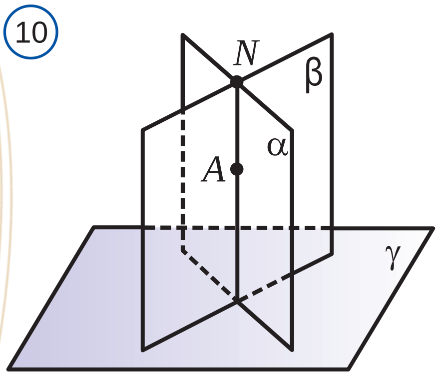


Nátiyje. ***Eger tegislik eki tegisliktiń kesilisiw sızıǵına perpendikulyar bolsa, bul tegisliklerdiń hárbirine de perpendikulyar boladı*** *(9-súwret).*

4.11-teoremaǵa keri teorema da orınlı boladı. Onı dálillewsiz keltiremiz.

4.14-teorema. ***Eger eki perpendikulyar tegisliklerden birewiniń qanday da bir noqatınan ekinshisine perpendikulyar tuwrı sızıq júrgizilse, bul tuwrı sızıq birinshi tegislikte jatadı.***

10

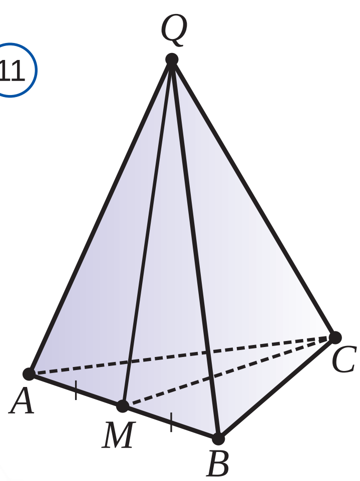


Nátiyje. ***Eger eki perpendikulyar tegislik úshinshi tegislikke perpendikulyar bolsa, olardıń kesilisiw sızıǵı da bul tegislikke perpendikulyar boladı*** *(10-súwret)*.

1-másele. M noqat $QABC$ durıs piramida ultanındaǵı qabırǵasınıń ortası bolsa *(11-súwret)*, QCM tegislik piramida ultanı tegisligi ABC ǵa perpendikulyar ekenligin dálilleń.

Dálillew. AB kesindi teń qaptallı AQB hám ACB úshmúyeshliklerdiń ultanı bolǵanlıǵı ushın bul úshmúyeshlikler medianaları QM hám CM ǵa da perpendikulyar boladı. Sonıń menen birge, AB kesindi QCM tegislikke de perpendikulyar boladı. Onda 4.12-teorema boyınsha, ABC tegislik QCM tegislikke perpendikulyar boladı.

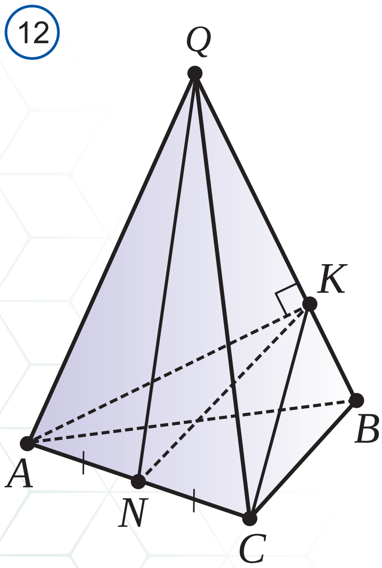
11



2-másele. $QABC$ durıs piramidanıń tóbesindegi tegis AQB múyeshi α ǵa teń. Onıń qaptal qabırǵasındaǵı eki jaqlı múyeshti tabıń *(12-súwret)*.

Sheshiliwi. Aytayıq, N noqat AC qabırǵasınıń ortası, AK bolsa A noqattan BQ qabırǵasına túsirilgen perpendikulyar bolsın. ABQ hám CBQ úshmúyeshliklerdiń teńliginen $CK \perp BQ$ boladı. Sol sebepli AKC múyesh BQ eki jaqlı múyeshtiń sızıqlı múyeshi boladı.

12



AKQ hám ANQ tuwrı múyeshli úshmúyeshliklerden:

$AK = sin\alpha$, $AN = AQ\ sin\frac{\alpha}{2}$ ekenligin tabamız. AKN tuwrı múyeshli úshmúyeshliklerden bolsa:

$$sin\left(\frac{\angle AKC}{2}\right) = \frac{AN}{AK} = \frac{1}{2\cdot cos(\frac{\alpha}{2})}$$ ge iyemiz.

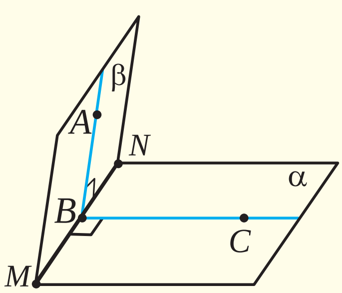
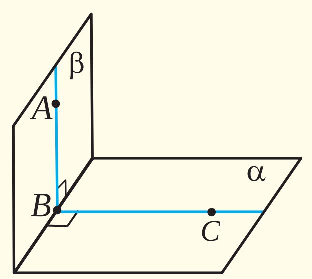
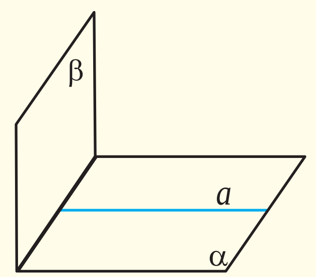
Bunnan $\angle AKC = 2\ arcsin\ \dfrac{1}{2cos(\frac{\alpha}{2})}$.

Temaǵa tiyisli sorawlar hám shınıǵıwlar

1. Eki jaqlı múyesh dep nege aytıladı?
2. Qanday múyesh tegislikler arasındaǵı múyesh dep ataladı?
3. Tuwrı múyesh astında kesilisiwshi tegislikler qanday ataladı?
4. Tegisliklerdiń perpendikulyarlıq belgisin aytıń.
5. Perpendikulyar tegisliklerdiń qásiyetlerin aytıń hám túsindirip beriń.

Ámeliy shınıǵıw hám qollanıw

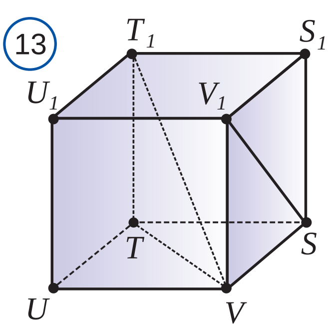
20.1. Kestede 20-temanıń tiykarǵı tayanısh maǵlıwmatları keltirilgen. Olardı dıqqat penen úyrenip shıǵıń hám anıqlama beriń.

Tegisliklerdiń perpendikulyarlıǵı		
Tegislikler arasındaǵı múyesh	**Tegisliklerdiń perpendikulyarlıǵı**	**Tegisliklerdiń perpendikulyarlıq belgisi**
 Eger $AB \perp MN$ hám $CB \perp MN$ bolsa, $\angle ABC$ – α hám β tegislikler arasındaǵı múyesh.	 Eger $\angle ABC = 90^0$ bolsa, α hám β tegislikler *perpendikulyar* dep ataladı.	 Eger $a \subset \alpha$ hám $a \perp \beta$ bolsa, $\alpha \perp \beta$ boladı.

20.2. a) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ tuwrı múyeshli parallelepipedtiń; b) $ABCA_1B_1C_1$ tuwrı prizmanıń perpendikulyar jaqların anıqlań hám tuwrı eki jaqlı múyeshlerin aytıń.

20.3. $STUVS_1T_1U_1V_1$ kubta *(13-súwret):* a) TVT_1 múyesh; b) T_1ST múyesh $T1SVT$ eki jaqlı múyeshtiń sızıqlı múyeshi bola ma? V_1UTS eki jaqlı múyeshtiń mánisin tabıń.

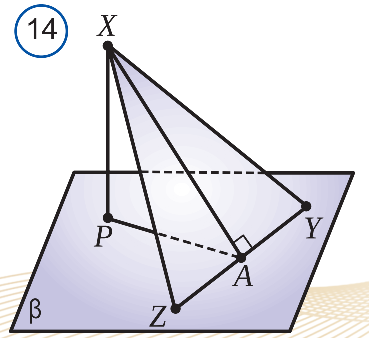
13



20.4. 2 eki jaqli múyeshtiń birewden jaǵı ulıwma, qalǵan jaqları birgelikte tegislikti quraydı. Bul eki jaqlı múyeshlerdiń qosındısı 180° qa teń ekenligin dálilleń.

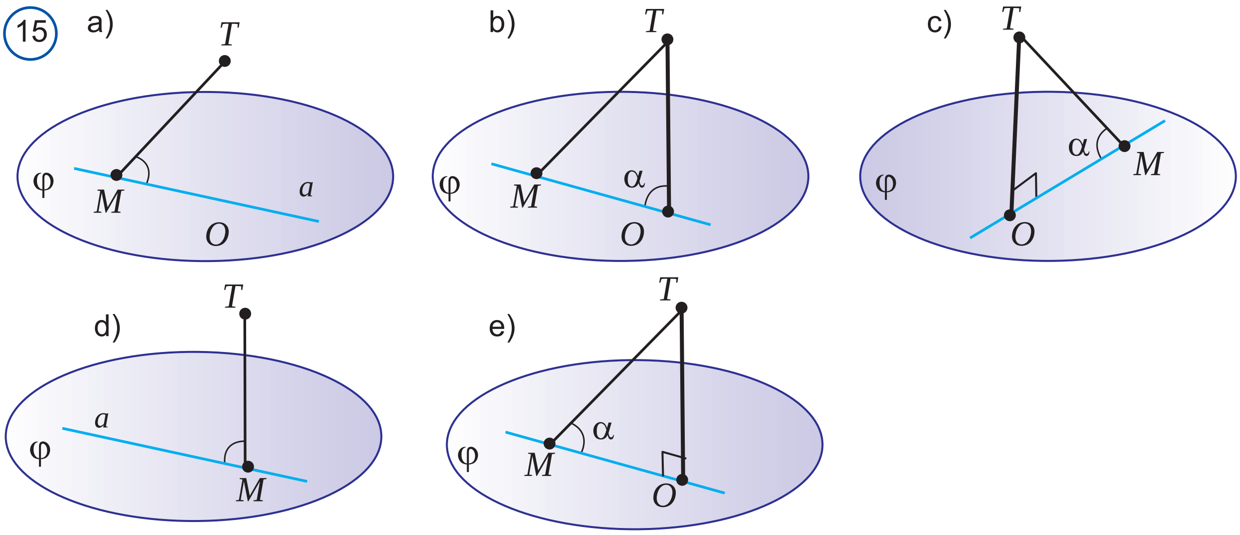
20.5. XYZ úshmúyeshliktiń YZ tárepi β tegislikte jatadı. Onıń X tóbesinen XA biyiklik hám β tegislikke XP perpendikulyar túsirilgen *(14-súwret)*. XAP múyesh $XYZP$ eki jaqlı múyeshtiń sızıqlı múyeshi ekenligin dálilleń.

14

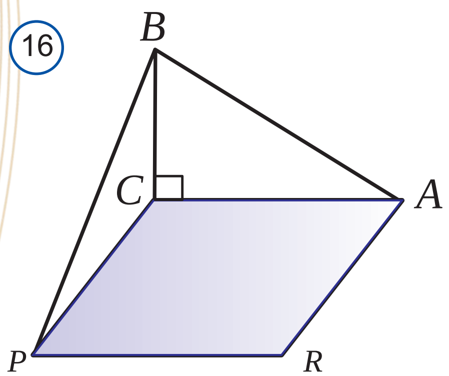


20.6. Úshmúyeshli $ABCD$ piramidanıń CD qabırǵası ABC tegislikke perpendikulyar. $AB = BC = AC = 6$ hám $BD = 3\sqrt{7}$ bolsa, $DACB$, $DABC$, $BDCA$ eki jaqlı múyeshlerdi tabıń.

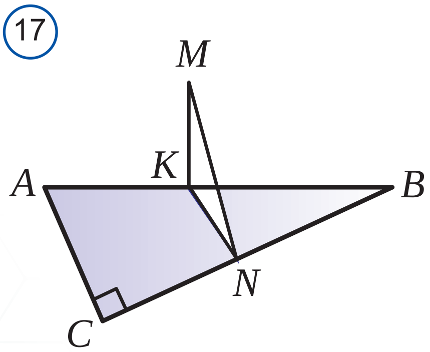
15



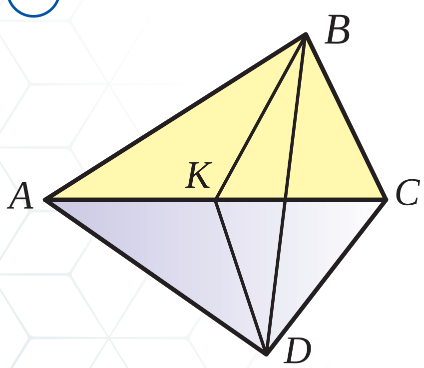
16



17



18



20.7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ durıs parallelepipedtiń AA_1C_1C hám BB_1D_1D diagonal kesimleri óz ara perpendikulyar ekenligin dálilleń.

20.8. T noqattan ϕ tegislikke qıya túsirilgen *(15-súwret)*. Súwretlerdiń qaysılarında tegislik hám qıya arasındağı α múyesh durıs belgilengen?

20.9. Úshmúyeshli $ABCD$ piramida da DAB, $DA\bar{C}$, ACB múyeshler tuwrı, $AC = CB = 5$ hám $DB = 5\sqrt{5}$ bolsa, $ABCD$ eki jaqlı múyeshin tabıń.

20.10. Eki jaqlı múyesh sızıqlı múyeshiniń tegisligi onıń hárbir jağına perpendikulyar ekenligin dálilleń.

20.11. Eki jaqlı múyeshtiń bir jağında jatqan eki noqat onıń qabırğasınan sáykes túrde 51 cm hám 34 cm uzaqlıqta jaylasqan. Bul noqatlardıń birinshisi basqa jağınan 15 cm uzaqlıqta jaylasqanlığı belgili bolsa, sol jaqtan ekinshi noqatqa shekemgi bolğan aralıqtı tabıń.

20.12. ABC tuwrı múyeshli úshmúyeshlik ($\angle C = 90°$) hám $ACPR$ kvadrat tegislikleri óz ara perpendikulyar (*16-súwret*). Kvadrat tárepi 6 cm, úshmúyeshlik gipotenuzası 10 cm. BP kesindi uzınlığın tabıń.

20.13. MK kesindi tuwrı múyeshli ABC úshmúyeshlik ($\angle C = 90°$) tegisligine perpendikulyar *(17-súwret)*. $KN \parallel AC$, $AK = KB$, $AC = 12$ cm, $MK = 8$ cm bolsa, MN kesindi uzınlığın tabıń.

20.14. ABC hám ADC teń qaptallı úshmúyeshlikler tegislikleri perpendikulyar *(18-súwret)*. AC – olardıń ulıwma ultanı. BK kesindi ABC úshmúyeshlik medianası. $BK = 8$ cm, $DK = 15$ cm bolsa, BD kesindi uzınlığın tabıń.

20.15. Durıs tórtmúyeshli piramida ultanınıń tárepi arqalı onıń qarsısındağı qaptal jağına perpendikulyar tegislik júrgizilgen. Ultanınıń tárepi $a = 30$ cm, piramidanıń biyikligi $h = 20$ cm. Payda bolğan kesimniń maydanın anıqlań.

“GeoGebra”nı qollanıp

3D kalkulyatorı járdeminde noqattan tegislikke shekem bolǵan aralıqtı anıqlaw

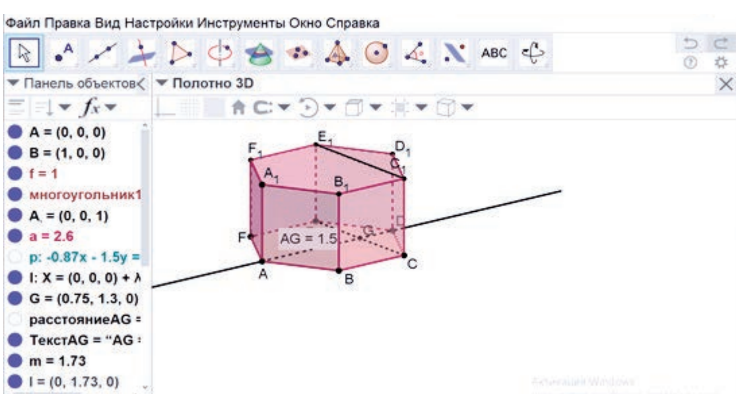
- Barlıq qabırǵaları 1 ge teń bolǵan durıs altımúyeshli prizmanıń A tóbesinen
- CC_1E_1 tegislikke perpendikulyar túsirilgen. Prizmanıń A tóbesinen sol tegislikke shekemgi bolǵan aralıqtı tabıń.

Jasaw :

- “GeoGebra”da jańa ayna ashıń.
- “GeoGebra” interfeysin **“Настройки”** – “**3D Графика”** kórinisine ótkeriń.

Aralıqtı anıqlaw basqıshları

1		**Ввод** (Kiritiw)	A=(0,0,0) noqat jasaladı.
2		**Ввод** (Kiritiw)	B=(1,0,0) noqat jasaladı.
3		**Правильный многоугольник** (durıs kópmúyeshlik)	Tárepi 1 ge teń bolǵan durıs altımúyeshlik jasaladı.
4		**Призма** (Prizma)	Qabırǵası 1 ge teń bolǵan durıs altımúyeshli tuwrı prizma jasaladı.
5		**Переименовать** (Qayta atamalaw)	Tiyisli noqatlar sáykes túrde A_1, B_1,C_1, D_1, E_1, F_1 dep qayta atamalanadı.
6		**Плоскость через 3 точки** (3 noqat arqalı tegislik)	CC_1E_1 tegislik jasaladı.
7		**Перпендикулярная прямая** (Perpendikulyar tuwrı sızıq)	Prizmanıń A tóbesinen CC_1E_1 tegisligine perpendikulyar túsiriledi.
8		**Пересечение** (Kesilisiw)	A noqat hám CC_1E_1 tegislik kesilisiw noqatı – G noqat belgilenedi..
9	cm	**Расстояние или длина** (Aralıq yamasa uzınlıq)	Prizmanıń A tóbesi hám G noqatı arasındaǵı aralıq anıqlanadı: AG = 1,5.



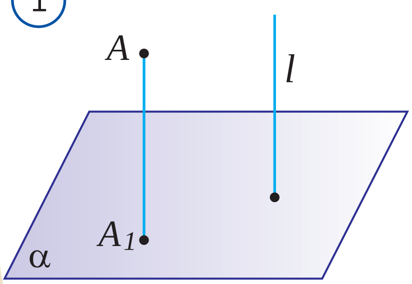
Óz betinshe orınlaw ushın tapsırmalar

1. Barlıq qabırǵaları 1 ge teń bolǵan durıs altımúyeshli prizmanıń A tóbesinen CC_1D_1 tegislikke perpendikulyar uzınlıǵın tabıń.

2. Barlıq qabırǵaları 1 ge teń bolǵan úshmúyeshli tuwrı prizmanıń A_1 tóbesinen AB_1C_1 tegislikke perpendikulyar uzınlıǵın tabıń.

21 KEŃISLIKTE ORTOGONAL PROEKCIYA HÁM ONNAN TEXNIKADA PAYDALANÍW

1



Eger proekciya baǵdarı l proekciyalaw tegisligi α ǵa perpendikulyar bolsa, bunday parallel proekciyalaw *ortogonal proekciyalaw* dep ataladı.

1-súwrette $l \perp \alpha$ bolıp, A noqattıń α tegislikke ortogonal proekciyası – A_1 noqat súwretlengen.

Ortogonal proekciyalawda payda bolǵan figuraǵa berilgen figuranıń *ortogonal proekciyası* yamasa qısqasha *proekciyası* dep aytıladı.

2-súwrette túrli keńisliktegi figuralardıń α tegislikke ortogonal proekciyaları súwretlengen.

Ortogonal proekciyalaw parallel proekciyalawdıń jeke jaǵdayı bolǵanlıǵı ushın parallel proekciyalawdıń barlıq qásiyetleri ortogonal proekciyalawda da orınlı boladı. Ortogonal proekciyalawda:

a) noqat noqatqa, kesindi kesindige, tuwrı sızıq tuwrı sızıqqa ótedi;

b) parallel tuwrı sızıqlar proekciyaları parallel boladı yamasa ústpe-úst túsedi;

c) figuralardıń tuwrı sızıqlı kesimleri proekciyası da kesindilerden ibarat boladı;

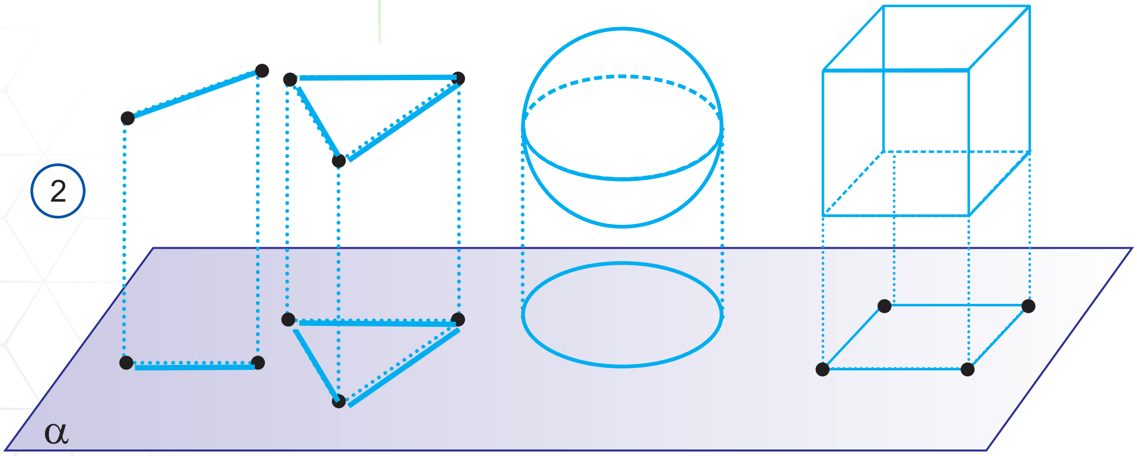
d) figuranıń parallel kesindileri proekciyası da parallel kesindilerden ibarat boladı;

e) bir tuwrı sızıqta yamasa parallel tuwrı sızıqlarda jatqan kesindiler uzınlıqları qatnası olardıń proekciyaları uzınlıqları qatnasına teń boladı, kesindiler uzınlıqları qatnası saqlanadı.

Álbette bul qásiyetler proekciyalaw baǵdarına parallel bolmaǵan kesindi hám tuwrı sızıqlar ushın orınlı boladı.

Ullı italyan alımı Galeleo Galiley sózi menen aytqanda, "geometriya intellektual qábiletimizdi ótkerlewdiń eń kúshli quralı bolıp, durıs pikir júritiw hám oylaw múmkinshiligin beredi".

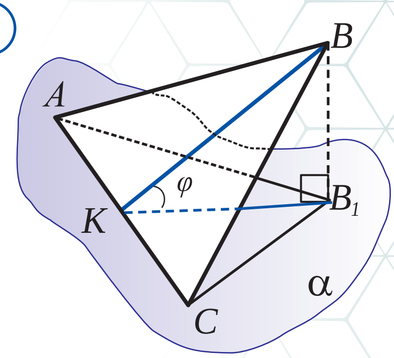
2



Tómende tek ortogonal proekciyaǵa tiyisli bolǵan zárúrli qasiyetti dálilleymiz.

4.15-teorema. ***Kópmúyeshliktiń tegisliktegi ortogonal proekciyasınıń maydanı kópmúyeshlik maydanı menen onıń tegisligi hám proekciya tegisligi arasındaǵı múyesh kosinusınıń kóbeymesine teń.***

3



Dálillew. 1. Dáslep qásiyetti úshmúyeshlik hám onıń qanday da bir tárepinen ótetuǵın tegisliktegi proekciyası ushın qarap shıǵamız. Aytayıq, ABC úshmúyeshliktiń a tegisliktegi proekciyası AB_1C úshmúyeshlik bolsın *(3-súwret)*. ABC úshmúyeshliktiń BK biyikligin túsiremiz. Úsh perpendikulyar haqqındaǵı teorema boyınsha, B_1K kesindi KBB_1 úshmúyeshliktiń biyikligi boladı. BKB_1 múyesh – úshmúyeshlik tegisligi menen proekciya tegisligi arasındaǵı φ múyeshten ibarat boladı. BKB_1 úshmúyeshlikte:

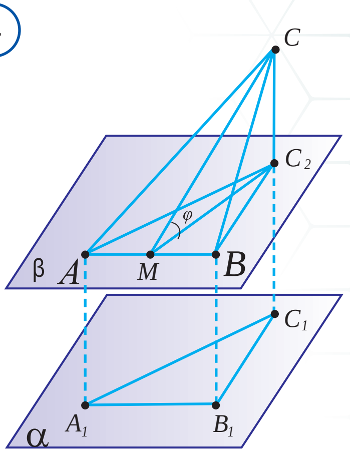
$$KB_1 = KB \cdot cos\varphi.$$

onda: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\, AC \cdot KB, \quad S_{\triangle AB_1C} = \frac{1}{2}$

$$AC \cdot KB_1 = \frac{1}{2}\, AC \cdot KB \cdot cos\varphi = S_{\triangle ABC} \cdot cos\varphi.$$

Nátiyjede $S_{\triangle AB_1C} = S_{\triangle ABC} \cdot cos\varphi$ di payda etemiz.

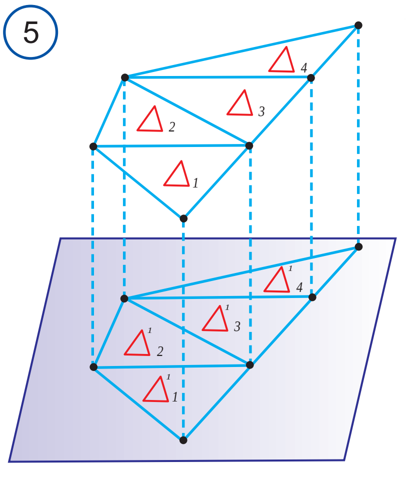
4



2. α tegislik ornına oǵan parallel bolǵan, basqa β tegislik alınǵanda da teorema orınlı boladı *(4-súwret)*. Bul parallel proekciyalaw qásiyetlerinen paydalanıp dálillenedi.

3. Endi ulıwma kópmúyeshlik jaǵdayına keletuǵın bolsaq *(5-súwret)*. Bunda teorema, kópmúyeshlikti diagonalları járdeminde úshmúyeshliklerge bóliw járdeminde joqarıda kórilgen jeke jaǵdayǵa keltirip dálillenedi.

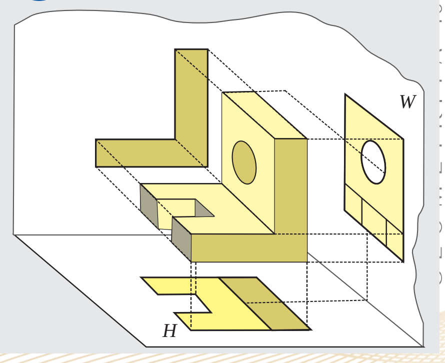
5



Bul proekciyalar qaysı baǵıtta proekciyalanǵanlıǵına qarap *vertikal (tik), gorizontal hám frontal proekciyalar* dep te ataladı.

Ortogonal proekciyadan texnikalıq sızılmalarda hár túrli detallardı proektlestiriwde paydalanıladı. Túrli mashina detalları sızılmaları bir, eki yamasa úsh óz ara perpendikulyar proekciyalar tegisliklerine ortogonal proekciyalaw jolı menen payda etiledi *(6-súwret)*.

6



Máselе. ABC úshmúyeshliktiń ortogonal proekciyası tárepleri 13 cm, 14 cm hám 15 cm bolǵan ACB_1 úshmúyeshlikten ibarat *(3-súwret)*. Úshmúyeshlik tegisligi proekciya tegisligi menen 60°lı múyeshti quraydı. ABC úshmúyeshlik maydanın tabıń.

Sheshiliwi. Belgili bolǵanınday, 4.15-teoremaǵa kóre, úshmúyeshlik proekciyası maydanı $S_{\triangle AB_1C} = S_{\triangle ABC} \cdot cos\varphi$ formula járdeminde tabıladı.

Bul jerde ϕ – úshmúyeshlik tegisligi menen proekciya tegisligi arasındaǵı múyesh.

ACB_1 úshmúyeshlik maydanın Geron formulasınan paydalanıp esaplaymız:

$$p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{13+14+15}{2}=21$$

$$S_{\triangle AB_1C}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=$$

$$=\sqrt{21\cdot(21-13)\cdot(21-14)\cdot(21-15)}=84$$

$$S_{\triangle AB_1C}=\frac{S_{\triangle AB_1C}}{\cos\varphi}=\frac{54}{\cos 60^\circ}=84:\frac{1}{2}=168$$

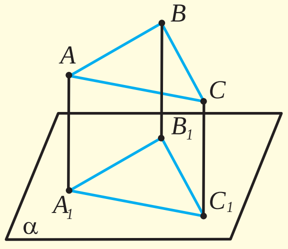
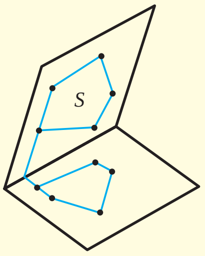
Juwabı: 168 cm^2.

Temaǵa tiyisli sorawlar hám shınıǵıwlar

1. Ortogonal proekciyalaw dep nege aytıladı?
2. Ortogonal proekciyalaw qásiyetlerin sanań.
3. Kópmúyeshliktiń tegisliktegi ortogonal proekciyasınıń maydanı qanday tabıladı?
4. Ortogonal proekciyalawdan texnikada qanday paydalanıladı?

Ámeliy shınıǵıw hám qollanıw

21.1. Kestede 21-temanıń tiykarǵı tayanısh maǵlıwmatları keltirilgen. Olardı dıqqat penen úyrenip shıǵıń hám anıqlama beriń.

Keńislikte ortogonal proekciya	Kópmúyeshlik proekciyasınıń maydanı
 Ortogonal proekciyada: $l \perp a$. l - proekciyalaw baǵdarı; α - proekciyalaw tegisligi	 $S_1 = S \cdot cos\varphi$ S – kópmúyeshlik maydanı; S_1-kópmúyeshlik ortogonal proekciyasınıń maydanı; φ – kóp múyeshlik hám proekciya tegislikleri arasındaǵı múyesh.

21.2. Trapeciyanıń ortogonal proekciyası a) kvadrat; b) kesindi; c) tuwrı tórtmúyeshlik; d) parallelogramm; e) trapeciya bolıwı múmkin be?

21.3. 7-súwretke qarap ortogonal proekciyası tuwrı tórtmúyeshlik bolǵan geometriyalıq figuralardı aytıń.

21.4. A_1B_1 kesindi AB kesindiniń α tegislikke ortogonal proekciyası *(8-súwret)*. Eger $AB = 20\ cm$, $AC = 10\ cm$, $A_1B_1 = 12\ cm$ bolsa, B_1C_1 kesindi uzınlıǵın tabıń.

21.5. Uzınlıǵı 5 cm bolǵan AB kesindiniń ω tegislikke ortogonal proekciyası uzınlıǵı 3 cm bolǵan AC kesindiden ibarat *(9-súwret)*. AB kesindiniń ω tegislikke qıyalanıw múyeshi kosinusın tabıń.

21.6. Tárepi a ǵa teń bolǵan durıs úshmúyeshlik berilgen. Úshmúyeshlik tegisligi menen: a) 30°; b) 45°;c) 60°lı múyesh jasaytuǵın tegislikke onıń ortogonal proekciyası maydanın tabıń.

21.7. Ulıwma AB tárepke iye bolǵan ABC hám ABD teń qaptallı úshmúyeshlikler túrli tegisliklerde jatadı. Eger: a) $AB = 24\ cm$, $AC = 13\ cm$, $AD = 37\ cm$, $CD = 35\ cm$; b) $AB = 32\ cm$, $AC = 65\ cm$, $AD = 20\ cm$, $CD = 63\ cm$ bolsa, ABC úshmúyeshliktiń ABD úshmúyeshlikke ortogonal proekciyası maydanın tabıń. Sonıń menen birge, ABD úsmúyeshliktiń ABC úshmúyeshlikke ortogonal proekciyası maydanın tabıń.

21.8. Eger AB tuwrı sızıqtan C noqatqa shekem bolǵan aralıq *(10-súwret)* C noqattan ABD tegislikke shekem bolǵan aralıqtan eki ret úlken bolsa, ABC hám ABD tegislikler arasındaǵı múyeshti tabıń.

21.9. ABC úshmúyeshlik maydanı 18 cm^2 qa teń *(11-súwret)*. $KC \perp ABC$. Eger ABK hám ABC úshmúyeshlikler tegislikleri arasındaǵı múyesh: a) a= 30°; b) a= 45°; c) a=60° bolsa, ABK úshmúyeshlik maydanın tabıń.

21.10. ABC hám ABD úshmúyeshlikler tegislikleri arasındaǵı múyesh 60° qa teń. Eger $AB = 4\sqrt{3}$ bolsa, CD aralıqtı tabıń.

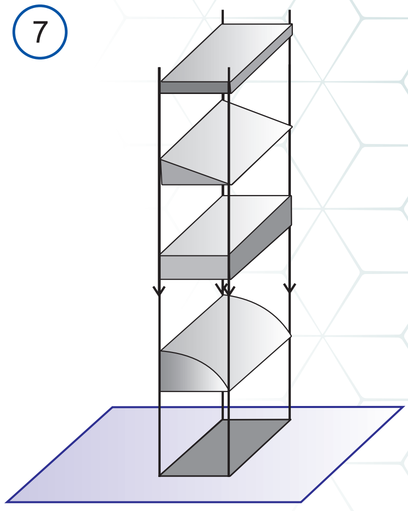
21.11. Tuwrı tórtmúyeshliktiń maydanı 72 ge teń. Onıń tegisliktegi ortogonal proekciyası kvadrattan ibarat. Tegislik hám tuwrı tórtmúyeshlik jatqan tegislik arasındaǵı múyesh 60°qa teń. Kvadrattıń perimetrin tabıń.

21.12. Maydanı 48 cm^2 qa teń bolǵan úshmúyeshliktiń ortogonal proekciyası tárepleri 14 cm, 16 cm hám 6 cm bolǵan úshmúyeshlikten ibarat. Bul úshmúyeshlik tegisligi hám onıń proekciyası arasındaǵı múyeshti esaplań.

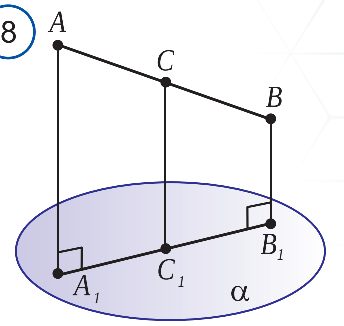
21.13. Maydanı 12 cm^2 qa teń bolǵan úshmúyeshliktiń ortogonal proekciyası tárepleri 13 cm, 14 cm hám 15 cm bolǵan úshmúyeshlikten ibarat. Bul úshmúyeshlik tegisligi hám onıń proekciyası arasındaǵı múyeshti esaplań.

21.14. Ultanı 8 cm hám qaptal tárepi 12 cm bolǵan teń qaptallı úshmúyeshliktiń ortogonal proekciyası tárepleri 8 cm, 6 cm hám 6 cm bolǵan úshmúyeshlikten ibarat. Bul úshmúyeshlik tegisligi hám onıń proekciyası arasındaǵı múyeshti tabıń.

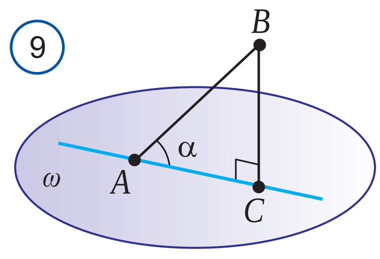
7



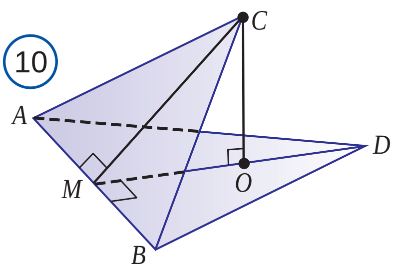
8



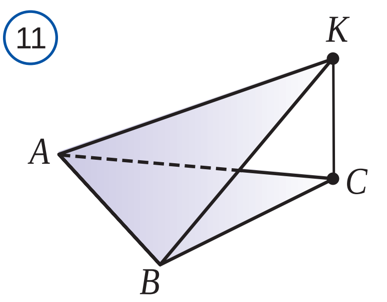
9



10



11



22 BAPTÍ TÁKIRARLAWǴA TIYISLI ÁMELIY SHÍNÍǴÍWLAR

22.1. Tómendegi pikirlerdiń qaysı biri nadurıs?

A) Eger bir tegislikte jatqan eki tuwrı sızıq ekinshi tegislikte jatqan eki tuwrı sızıqqa sáykes túrde parallel bolsa, bul tegislikler parallel bolıp tabıladı.

B) Eger eki tuwrı sızıq úshinshi tuwrı sızıqqa parallel bolsa, olar óz ara parallel bolıp tabıladı.

C) Tegislikte jatqan tuwrı sızıq qıyanıń proekciyasına perpendikulyar bolsa, qıyanıń ózine de perpendikulyar boladı.

D) Tuwrı sızıq tegislikte jatqan eki kesilisiwshi tuwrı sızıqqa perpendikulyar bolsa, bul tuwrı sızıq tegislikke de perpendikulyar boladı.

E) Qıya hám onıń tegisliktegi proekciyası arasındaǵı múyeshlerden eń kishisi qıya hám tegislikler arasındaǵı múyesh dep ataladı.

22.2. Tómendegi pikirlerdiń qaysı biri nadurıs?

A) Eger keńislikte eki tuwrı sızıq úshinshi tuwrı sızıqqa parallel bolsa, olar óz ara parallel bolıp tabıladı.

B) Tegislikte qıyanıń ultanınan onıń proekciyasına perpendikulyar etip ótkerilgen tuwrı sızıq qıyanıń ózine de perpendikulyar boladı.

C) Keńisliktegi úsh noqat arqalı tek bir tegislik ótkeriw múmkin.

D) Tuwrı sızıq yamasa parallel tuwrı sızıqlar kesindilerdiń qatnası parallel proekciyalawda ózgermeydi (proekciyalanatuǵın kesindiler proekciyalaw baǵdarına parallel emes).

E) Tegislikten sırtta jatqan tuwrı sızıq bul tegisliktegi qanday da bir tuwrı sızıqqa parallel bolsa, bul tuwrı sızıq hám tegislik óz ara parallel bolıp tabıladı.

22.3. $ABCD$ tuwrı tórtmúyeshlik tegisligine onıń B tóbesi arqalı BM perpendikulyar túsirilgen. a) AD tuwrı sızıq AB hám BM tuwrı sızıqlar jatqan tegislikke; b) CD tuwrı sızıq BC hám BM tuwrı sızıqlar jatqan tegislikke perpendikulyar bolıwın dálilleń.

22.4. A hám B noqatlardan α tegislikke perpendikulyar hám onı sáykes túrde C hám D noqatlarda kesip ótetuǵın tuwrı sızıq ótkerilgen. Eger $AC = 3\ m$, $BD = 2\ m$ hám $CD=2{,}4\ m$ bolsa hám AB tuwrı sızıq α tegislikti kesip ótpese, A hám B noqatlar arasındaǵı aralıqtı tabıń.

22.5. Tuwrı múyeshli parallelepipedtiń úsh ólshemi boyınsha onıń diagonalı uzınlıǵın tabıń: a) 1, 2, 2; b) 2, 3, 6 ; c) 6, 6, 7.

22.6. Kubtıń qabırǵası a ǵa teń. Kubtıń tóbesinen onıń basqa eki tóbesin tutastırıwshı diagonalı arasındaǵı aralıqtı tabıń.

22.7. Tuwrı múyeshli parallelepiped ultanınıń tárepleri 7 cm hám 24 cm, biyikligi 8 cm. Parallelepiped diagonal kesiminiń maydanın tabıń.

22.8. Tuwrı múyeshli parallelepipedtiń úsh ólshemi boyınsha onıń tolıq beti maydanın tabıń: 10 cm, 22 cm, 16 cm.

22.9. Tuwrı múyeshli parallelepipedtiń biyikligi h, ultanınıń maydanı Q, diagonal kesiminiń maydanı M bolsa, onıń qaptal betiniń maydanın tabıń.

22.10. Tuwrı múyeshli parallelepipedtiń bir tóbesinde ushırasıwshı jaqlarınıń diagonalları: a, b, c ǵa teń *(1-súwret)*. Parallelepipedtiń úsh ólshemi uzınlıqların tabıń.

22.11. Perpendikulyar menen qıya arasındaǵı múyesh 60° qa teń. Perpendikulyardıń uzınlıǵı 20 ǵa teń. Qıyanıń uzınlıǵın tabıń.

22.12. Tegislikke túsirilgen qıya menen perpendikulyar arasındaǵı múyesh 60°, qıyanıń uzınlıǵı $20\sqrt{3}$. Perpendikulyardıń uzınlıǵın tabıń.

22.13. Tegislikke ótkerilgen perpendikulyar menen qıya arasındaǵı múyesh 30°, perpendikulyardıń uzınlıǵı bolsa 10 ǵa teń. Qıyanıń uzınlıǵın tabıń.

22.14. Noqattan tegislikke eki qıya ótkerilgen. Eger qıyalar 1 : 2 ge teń qatnasta bolıp, olardıń proekciyaları 1 hám 7 ge teń bolsa, qıyalardıń uzınlıǵın tabıń.

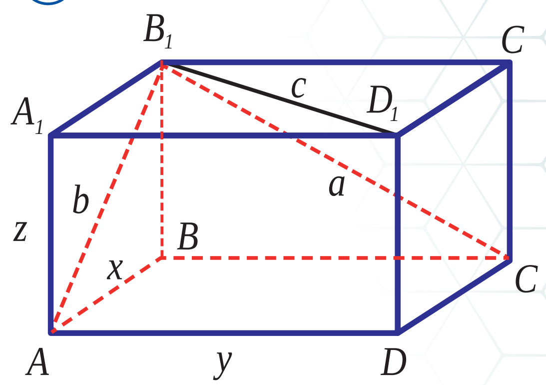
22.15. ABC úshmúyeshliktiń tuwrı múyeshli B tóbesinen úshmúyeshlik tegisligine perpendikulyar tuwrı sızıq b júrgizilgen. AB = 3, BC = 4. B hám AC tuwrı sızıqlar arasındaǵı aralıqtı tabıń.

22.16. Uzınlıqları 10 cm hám 15 cm bolǵan eki kesindiniń tóbeleri óz ara parallel tegisliklerde jatadı. Birinshi kesindiniń tegisliktegi proekciyası 19 cm bolsa, ekinshi kesindiniń proekciyası neshe cm boladı?

22.17. Ólshemleri 12,5 m hám 7,2 m bolǵan úy tóbesi tórt qıya jaqlar menen 2-súwrette kórsetilgen sıyaqlı etip jabılǵan. Hárbir jaq tóbe tegisligi menen 40° lı múyeshti quraydı. a) Hárbir qıya jaq maydanın tabıń; b) Tóbeniń jámi qıya jaqları maydanın tabıń. c) Tóbeni qańıltır menen japqanda onıń 6 payızı ısırap bolıwı belgili bolsa, tóbeni jabıwǵa qansha qańıltır kerek boladı?

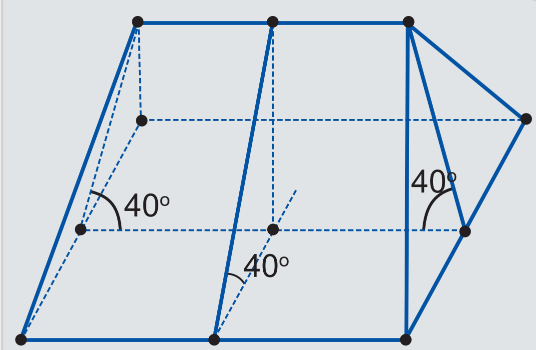
22.18. AB hám CD óz ara 60° lı múyesh payda etip kesilisiwshi eki tegislikte jatqan parallel tuwrı sızıqlar. A hám D noqatlar tegisliklerdiń kesilisiw sızıǵınan 8 cm hám 6,3 cm uzaqlıqta. AB hám CD arasındaǵı aralıqtı tabıń.

1



2

a)



b)

Ámeliy kompetenciyalardı qáliplestiriwge tiyisli máseleler

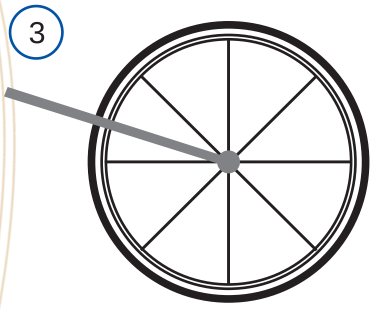
1. Eki qońsılas bólme diywalları tutasqan sızıqtıń polǵa perpendikulyarlıǵın qanday etip ólshew járdeminde tekseriwge boladı?

2. Uzınlıq ólshew ásbabı – ruletka járdeminde baǵananıń tik ekenligin qalay tekseriwge boladı?

3. Dóńgelek kósheri tegisliginiń ol aylanıp atırǵan tegislikke perpendikulyarlıǵın qalay tekseriwge boladı?

4. Ne sebepten qısta tóbeden asılıp túsken muz bóleklerin olardıń qalıńlıǵın esapqa almastan óz ara parallel dep aytıw múmkin be?

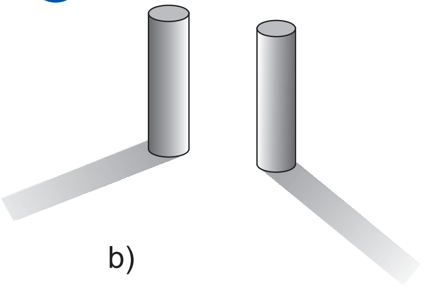
3



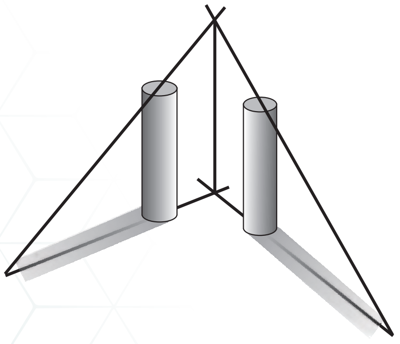
5. Oqıwshı ámeliy jumıs orınladı. Birneshe ornatılǵan baǵanalardıń jerge salıstırǵanda tik ekenligin tekseriw ushın olardan tek birewin tekserdi. Qalǵan baǵanalardıń tik ekenligin tómendegishe tekserdi: barlıq baǵanalardıń biyikligin, olardıń tómengi ultanları hám joqarı tóbeleri arasındaǵı aralıqlardı ólshep qarar qabılladı. Ol bul jumıstı durıs orınladı ma?

6. Ne sebepten esik ashıq yamasa jabıq bolıwına qaramastan polǵa salıstırǵanda perpendikulyar boladı?

4 a)



b)



7. Tuwrı sızıqtıń tegislikke perpendikulyarlıǵına ayqın mısal sıpatında dóńgelek sımları jatqan tegisliktiń dóńgelek kósherine bolǵan jaylasıwın keltiriw múmkin *(3-súwret)*. Kósher dóńgelektiń hárbir sımına perpendikulyar. Háreket dawamında dóńgelek sımları hárbir noqatta kesilisetuǵın kesindilerden ibarat sheńber tegisligin payda etedi. Eger kósher gorizontal jaylasqan bolsa, dóńgelek qanday tegislikte aylanadı? Nege?

Kórsetpe: dóńgelek kósherine perpendikulyar tegislikke perpendikulyar boladı.

8. Biyiklikke sekiriw shınıǵıwı orınlanıp atır. Tosıq tayaqtı belgili biyiklikke ornatıw ushın qabırǵası 25 cm bolǵan kub hám ólshemleri $25\ cm$ x $25\ cm$ x $50\ cm$ bolǵan tuwrı múyeshli parallelepipedlerden paydalanılıp atır. 1) 125 cm; 2) 150 cm; 3) 175 cm biyiklikke sekiriw shınıǵıwların qalay orınlawǵa boladı?

9. 4-súwrette eki vertikal baǵana hám olardıń sayası súwretlengen. Sol maǵlıwmatlardan paydalanıp jaqtılıq deregi (shıra) jaylasqan noqattı hám onıń gorizontal tegislikke proekciyasın tabıń hám tómendegi sorawlarǵa juwap beriń. 1) Baǵanalardıń vertikallıǵınıń áhmiyeti bar ma? 2) Saya túsip atırǵan tegislik gorizontallıǵınıń áhmiyeti bar ma? 3) Súwrette berilgen maǵlıwmatlardıń barlıǵı da zárúrli me?

Sheshiliwi. 4-súwrette tiyisli jasawlar keltirilgen. Jaqtılıq dereginiń ornın tabıwda baǵanalardıń baǵdarı áhmiyetke iye emes, biraq olardıń vertikal ekenligi zárúrli esaplanadı. Eger baǵanalar vertikal hám saya gorizontal tegislikke túsip atırǵan bolsa, máseleni sheshiw ushın súwrettegi bir baǵananıń sayasın hám ekinshi baǵanadan túsip atırǵan sayanıń baǵdarın biliw jetkilikli *(4b-súwret)*.

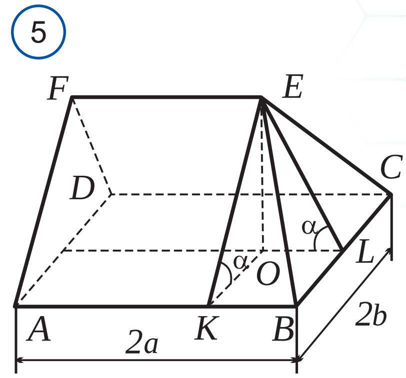
10. Qalıńlıǵı 5 m, maydanı 4 m^2 bolǵan, kvadrat formasındaǵı polat platforma tórt tóbesinen tros sım menen gorizontal asılǵan. Hárbir tros sım uzınlıǵı 2 m. Tros sımlardıń platformaǵa salıstırǵanda iyiliw múyeshin tabıń. Biyikligi 0,9 m, ultanınıń diametri 0,6 m bolǵan cilindr formasındaǵı bakti bul platformaǵa jaylastırıwǵa bola ma?

Juwabı: 45°, bakti jaylastırıwǵa boladı.

11. Suw tórt tárepinen aǵıp túsetuǵın tóbeniń ultanına ortogonal proekciyalanǵan. Tóbeniń qabırǵalarınıń proekciyası tuwrı tórtmúyeshlik formasındaǵı tóbeniń ultanı múyeshiniń bissektrisası bolıwın dálilleń.

12. Ultanı $ABCD$ tuwrı tórtmúyeshlikten ibarat úyge jawın suwı tórt tárepinen aǵıp túsetuǵın tóbeni ornatıw kerek *(5-súwret)*. $AB = 2a$ m, $BC = 2b$ m. Tóbeniń barlıq jaqları ultan tegisligi menen α múyesh payda etedi. Bul tóbeni jabıw ushın qansha qańıltır kerek boladı? Bunda tóbe betiniń maydanınıń k payızı muǵdarına qańıltır shıǵındıǵa ketiwin esapqa alıń.

Juwabı: $4ab(1+0.01k)/\cos\alpha$



13. Tınıq hawada jawın qıyalap jawıp atır. Tuwrı tórtmúyeshlik formasındaǵı faner bólegi járdeminde jawınnıń gorizont tegisligine salıstırǵanda qıyalıǵın qanday anıqlawǵa boladı? Tiyisli sızılmanı sızıń.

Kórsetpe. Faner bólegin sonday jaylastırıw kerek, onıń tegisligi jawın tamshıları háreket traektoriyası hám olardıń gorizontal tegislikke proekciyası anıqlaǵan tegislikke shama menen perpendikulyar bolsın. Sonda gorizontal tegislikte jawın túspeytuǵın tuwrı tórtmúyeshlik payda boladı. Keyin tiyisli kesindilerdiń uzınlıqları ólshenedi hám olar arasındaǵı múyeshtiń tangensi esaplanadı.

14. Maydanı S_1 ge, uzınlıǵı n ge teń bolǵan balalar krovatı ústin eki birdey tuwrı tórtmúyesh formasındaǵı perdeler menen jabıw kerek. Hárbir perdeniń maydanı S_2 ge, uzınlıǵı bolsa krovat uzınlıǵına teń. Hár eki perdeniń joqarı sheti krovat ústinde parallel ornatılǵan hám krovat uzınlıǵına teń sımǵa bekkemlengen. Sımnıń krovattan qanday biyiklikte ornatılǵanlıǵın tabıń. Máseleni tómendegi sanlı shártlerde sheshiń:

n = 1 m 20 cm, S_1 = 6000 cm^2, S_2 = 7800 cm^2. Tiyisli sızılmanı sızıń.

Kórsetpe. $\dfrac{\sqrt{4S_2^2 - S_1^2}}{2n}$. **Juwabı:** 0,5 m.

ÓZIŃIZDI SINAP KÓRIŃ

Testler

1. Qaysı pikir durıs?

A) Eger eki tuwrı sızıqtan biri úshinshi tuwrı sızıqqa perpendikulyar bolsa, ekinshi tuwrı sızıq ta sol tuwrı sızıqqa perpendikulyar boladı.

B) Eger eki tuwrı sızıq úshinshi tuwrı sızıqqa perpendikulyar bolsa,olar parallel.

C) Eger eki tuwrı sızıq tegislikke perpendikulyar bolsa, olar parallel.

2. m tuwrı sızıq α tegislikte jatqan a hám b tuwrı sızıqlarǵa perpendikulyar, biraq m tuwrı sızıq α tegislikke perpendikulyar emes. a hám b tuwrı sızıqlar haqqında ne aytıw múmkin?

A) parallel
B) kesilisedi
C) ayqısh

3. α tegislik $ABCD$ rombtıń A tóbesinen ótedi hám AC diagonalǵa perpendikulyar. Onda BD diagonal...

A) α tegislikke perpendikulyar
B) α tegislikke parallel
C) α tegislikte jatadı

3. α tegislik $ABCD$ rombtıń A tóbesinen ótedi hám AC diagonalına perpendikulyar. Ol jaǵdayda BD diagonal ...

A) α tegislikke perpendikulyar
B) α tegislikke parallel
C) α tegislikte jatadı

4. $a \parallel \alpha$, $b \perp \alpha$. Bunda a hám b tuwrı sızıqlar qanday bolıwı múmkin emes?

A) kesilisiwshi
B) perpendikulyar
C) parallel

5. $ABCD$ parallelogramm, $BD \perp \alpha$, $AC \perp \alpha$ *(1-súwret)*. Ol jaǵdayda $ABCD$ qanday figura bola almaydı?

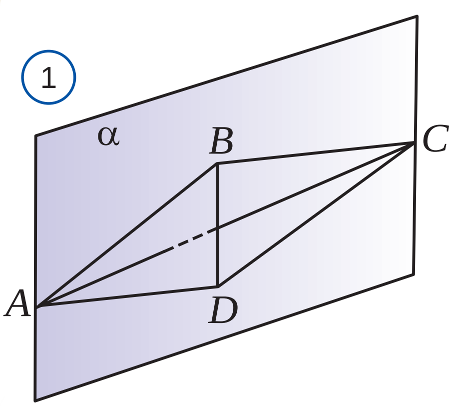
A) tuwrı tórtmúyeshlik
B) kvadrat
C) romb

6. Tuwrı sızıq sheńber tegisligine perpendikulyar boladı, eger ol...

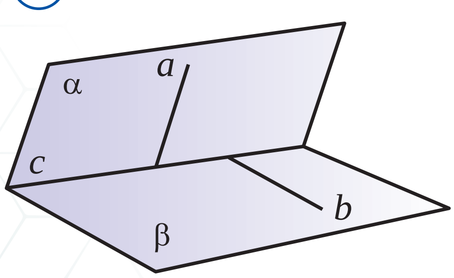
A) eki radiusqa perpendikulyar bolsa
B) eki diametrge perpendikulyar bolsa
C) eki xordaǵa perpendikulyar bolsa

7. $\alpha \cap \beta = c$, $a \in \alpha$, $b \in \beta$ *(2-súwret)*. Qaysı shárt orın-

1



2



lanǵanda, $\angle(ab) - \alpha$ hám β tegislikler arasındaǵı eki jaqlı múyeshtiń sızıqlı múyeshi boladı?

A) $b \perp \alpha$ bolsa
B) $a \perp c$ bolsa
C) $a \perp c,\ b \perp c$ bolsa

8. Qaysı pikir durıs?

A) Eki jaqlı múyeshtiń qabırǵası onıń sızıqlı múyeshi tegisligine perpendikulyar bolıwı múmkin emes.
B) Bir tegislikke perpendikulyar bolǵan eki tegislik parallel bolıwı múmkin emes.
C) Bir tuwrı sızıqqa perpendikulyar bolǵan eki tegislik parallel bola almaydı.

9. $ABC \perp ABD$ *(3-súwret)*. D noqattan ABC tegislikke túsirilgen perpendikulyardıń ultanı...

A) ABC úshmúyeshliktiń sırtında jatadı
B) AB tárepinde jatadı
C) ABC úshmúyeshlik ishinde jatadı

10. Qaysı pikir nadurıs?

1) Eger eki tegislikten biri ekinshi tegislikke perpendikulyar bolǵan sızıqtan ótse, bunday tegislikler perpendikulyar boladı.
2) Eger tegislikler perpendikulyar bolsa, onda olardıń kesilisiw sızıǵı sol tegisliklerdiń birinde jatqan hárqanday tuwrı sızıqqa perpendikulyar boladı.
3) Berilgen eki tegisliktiń kesilisiw sızıǵına perpendikulyar bolǵan tegislik sol tegisliklerdiń hárbirine perpendikulyar.

11. Parallelepipedtiń eki jaqlı múyeshleri sanı neshew?

A) 18
B) 12
C) 24

12. ABC úshmúyeshlikte AN hám CM – biyiklikler *(4-súwret)*. $DO \perp ABC$. $ABCD$ eki jaqlı múyeshtiń gradus ólshemi qaysı múyesh gradus ólshemine teń?

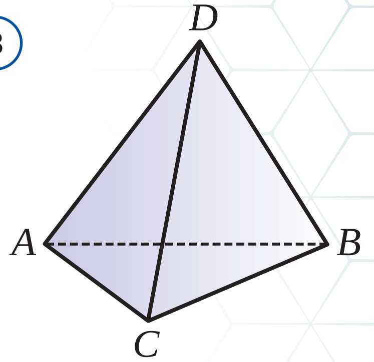
A) ABD
B) AND
C) ACD

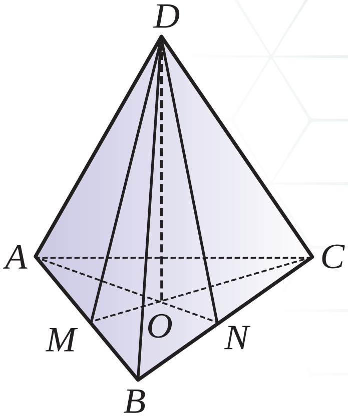
13. $AF \perp \alpha$ *(5-súwret)*. Qaysı teńsizlik orınlı emes?

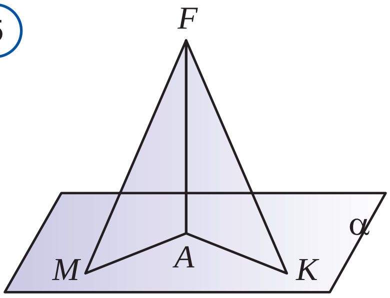
A) $FM > AF$
B) $FA > FK$
C) $AK < FK$

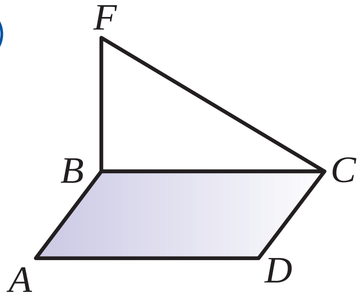
14. $BF \perp ABC$ *(6-súwret)*. $ABCD$ qanday bolsa, CD hám CF tuwrı sızıqlar perpendikulyar boladı?

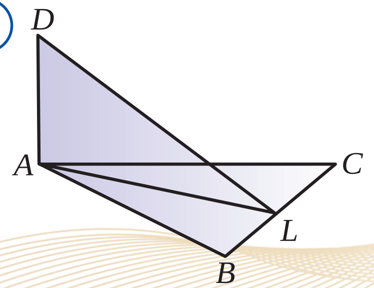
A) tórtmúyeshlik

3


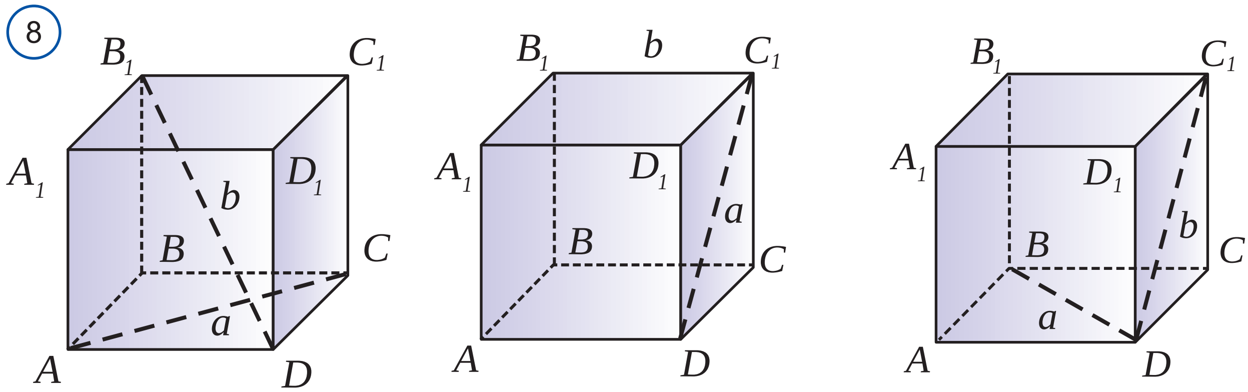
4


5


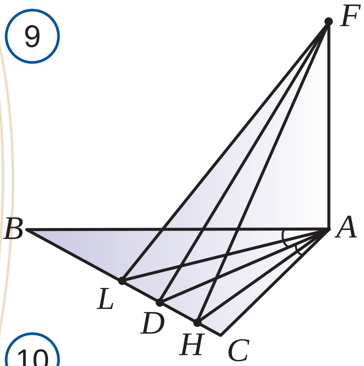
6


7


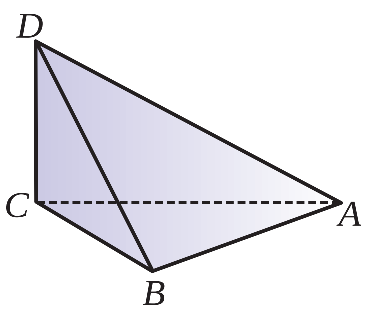
8



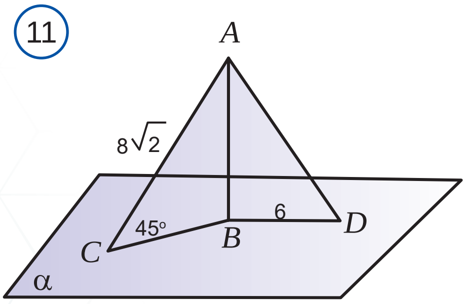
9



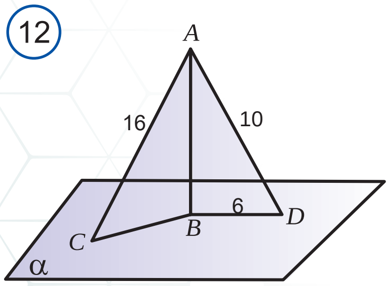
10



11



12



B) romb

C) kvadrat

15. $AD \perp ABC$ *(7-súwret)*. LA qanday bolsa, DL hám BC tuwrı sızıqlar perpendikulyar boladı?

A) bissektrisa

B) mediana

C) biyiklik

16. M noqat ABC úshmúyeshlik tóbelerinen teń aralıqta jaylasqan. M noqattıń ABC tegisliktegi proekciyası qaysı kesindiler kesilisiw noqatınan ibarat boladı?

A) úshmúyeshlik biyikliksleriniń

B) úshmúyeshlik bissektrisalarınıń

C) úshmúyeshlik tárepleri ne túsirilgen orta perpendikulyarlarınıń

17. ABC úshmúyeshlikte AL – mediana, AD – bissektrisa, AH – biyiklik *(9-súwret)*. $AF \perp ABC$. F noqattan BC tuwrı sızıqqa shekem bolǵan aralıq qaysı kesindi uzınlıǵına teń boladı?

A) FM

B) FD

C) FH

18. 8-súwrette $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kub súwretlengen. a hám b tuwrı sızıqlar qaysı súwrette perpendikulyar emes?

19. $ABCD$ tetraedrda *(10-súwret)* $\angle BCD = \angle ACD = 90°$. CD ǵa perpendikulyar bolǵan barlıq qabırǵalardı kórsetiń.

A) AB, CB, CA B) AB, BD, AD

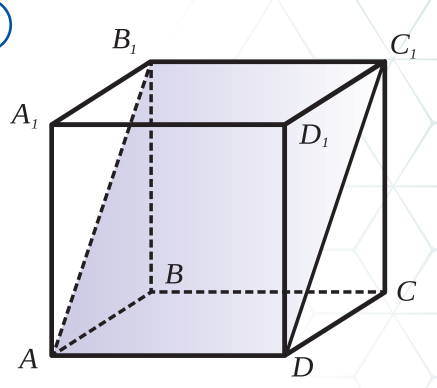
C) CB, CA D) AB

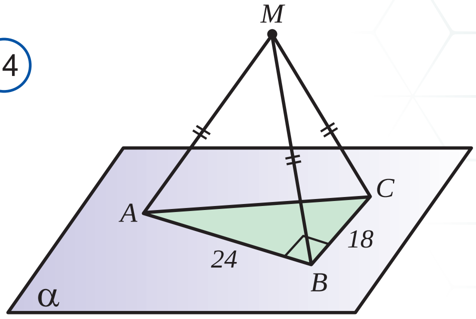
20. α tegislikke A noqattan AB perpendikulyar, AC hám AD qıyalar túsirilgen *(11-súwret)*. $\angle ACB = 45°$, $AC = 8\sqrt{2}$, $BD = 6$. AD nı tabıń.

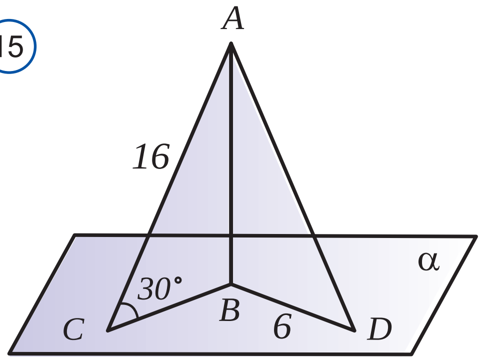
A) $2\sqrt{13}$;
B) 10;
C) 14
D) 4

21. α tegislikke AB perpendikulyar *(12-súwret)*, AD hám AC qıyalar túsirilgen. BD = 6, AD = 10, AC = 16. $\angle ACB$ nı tabıń.

A) 45°
B) 30°
C) 60°
D) 90°







Máseleler

1. KS kesindi ABC úshmúyeshlik tegisligine perpendikulyar, KB kesindi AB ǵa perpendikulyar.

1) ABC tuwrı múyeshli úshmúyeshlik ekenligin dálilleń.

2) KAC hám ABC tegisliklerdiń perpendikulyarlıǵın dálilleń.

3) Eger AC = 14, BC = 6 hám $\angle KBC$ = 45° bolsa, KB kesindi uzınlıǵın tabıń.

2. A noqattan α tegislikke tegislik penen 60° múyesh payda etiwshi AB hám AC qıyalar ótkerilgen. Eger BC = AC = 6 bolsa, AB nı tabıń.

3. KA kesindi ABC tegisligine perpendikulyar. M noqat – BC kesindiniń ortası. KM tuwrı sızıq BC tuwrı sızıqqa perpendikulyar hám $AB = BC$.

1) ABC teń qaptallı úshmúyeshlik ekenligin dálilleń.

2) KBC hám KAM tegislikleriniń perpendikulyarlıǵın dálilleń.

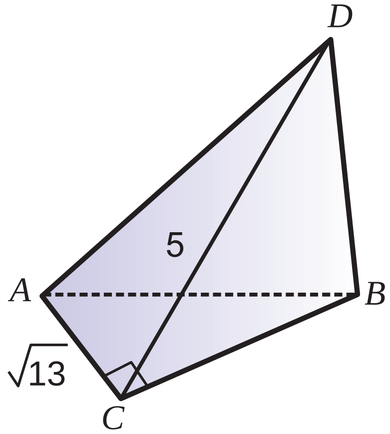
4. Eger BK = 8, KA = 39, BC = 6 bolsa, ABC úshmúyeshliktiń maydanın tabıń.

5. S noqat tuwrı múyeshli úshmúyeshlik tóbelerinen 3 cm uzaqlıqta jaylasqan. AB = 9 bolsa, $SABC$ eki jaqlı múyeshti tabıń.

6. O noqat 60° qa teń ABC múyesh bissektrisasında jatadı. DO kesindi ABC tegisligine perpendikulyar hám $AB = AC$.

1) D noqat A hám C noqatlardan teń aralıqta

16



Geometriya áyyemgi zamanlardan berli adamlarǵa dúnyanı biliwge járdem berip keledi. Mısalı, Jerdiń sheńberi áyyemgi grek alımı Eratosfen tárepinen, adamlar Jerdiń shar tárizli formaǵa iye ekenligin tán alıwlarınan bir neshe ásir aldın anıq esaplap shıǵılǵan. Onıń ushın Eratosfen geometriyalıq qaǵıydalardan paydalanǵan hám zamanagóy ólshewler kórsetiwinshe, ol derlik qáte etpegen – eski hám jańa ólshewler ortasındaǵı parıq áhmiyetsiz bolıp shıqqan. Ol Quyash Syene (Afrikadaǵı qala) tóbesinde turǵanında, 800 km uzaqlıqta jaylasqan Iskandariyadaǵı ǵa qaraǵanda vertikaldan 7^0 qa qıyalanıwın anıqladı. Eratosfen Quyash Jerdiń orayınan 7^0 múyesh astında kórinedi hám sonıń ushın Jer sharınıń sheńberi 360 : 7 x 800 = 41140 km, degen juwmaqqa kelgen.

jatıwın dálilleń.

2) DAC hám DOB tegisliklerdiń perpendikulyarlıǵın dálilleń.

3) $AC = 12$ hám $DO = 8$ bolsa, DB nı tabıń.

7. 13-súwrette kub berilgen. $AD = 42$. AB_1C_1D tegislik hám A_1D_1 tuwrı sızıq arasındaǵı aralıqtı tabıń.

8. ABC hám ADC teń qaptallı úshmúyeshlikler ulıwma AC ultanǵa iye. $BASD$ eki jaqlı múyesh tuwrı. Eger $\angle ACD = 45°$ hám $\angle CAB = 60°$ bolsa, $DCBA$ eki jaqlı múyeshti tabıń.

9. 14-súwrette $\angle ABC = 90°$, $MA = MB = MC$. ABC úshmúyeshlik tegisligi hám M noqat arasındaǵı aralıq 8 ge teń. MA kesindi uzınlıǵın tabıń.

10. SA tuwrı sızıq $ABCD$ tórtmúyeshliginiń tóbesinen ótedi hám onıń AB hám AD tároplerine perpendikulyar. SAD hám ABC tegisliklerdiń perpendikulyarlıǵın dálilleń.

11. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kubınıń qabırǵası 4 ke teń. AB hám CC_1 tuwrı sızıqlar arasındaǵı aralıqtı tabıń.

12. Ulıwma ultanlı ABD hám ABC teń qaptallı úshmúyeshlikler tegislikleri óz ara perpendikulyar. Eger $AD = \sqrt{31}$ cm, $AB = 6$ cm, $\angle ACB = 60°$ bolsa, CD nı tabıń.

13. Perpendikulyar α hám β tegislikler l tuwrı sızıq boylap kesilisedi. α hám β tegisliklerde jatıwshı OA hám OB kesindiler sáykes túrde l tuwrı sızıqqa perpendikulyar hám olardıń ulıwma tóbesi O noqat l tuwrı sızıqta jatadı. Eger $OA = 20$ cm, $OB : AB = 12 : 13$ bolsa, AB nı tabıń.

14. ABC teń qaptallı úshmúyeshliktiń B tóbesi arqalı AC ultanǵa parallel tegislik ótkerildi. Úshmúyeshliktiń maydanı 48 cm^2 qa teń. Eger ultan $AC = 12$ cm hám ol tegislikten 5 cm uzaqlıqta jaylasqan bolsa, úshmúyeshlik qaptal tárepleriniń bul tegislikke qıyalıq múyeshlerin tabıń.

15. $AB \perp \alpha$, $\angle ACB = 30°$, $AC = 16$ cm, $BD = 6$ cm *(15-súwret)*. AD nı tabıń.

16. ABC úshmúyeshlikte $\angle ACB = 90°$, $AB = 5$ cm, $AC = \sqrt{13}$ cm *(16-súwret)*. $BD \perp ABC$, $\angle(CD, ABC) = 30°$. BD perpendikulyar uzınlıǵın tabıń.

V BAP

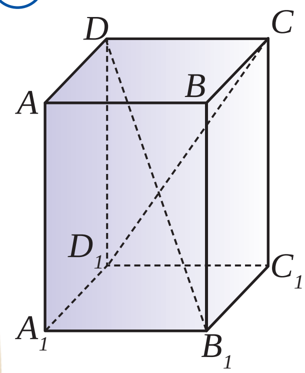
TÁKIRARLAW

Bul baptı úyreniw nátiyjesinde siz 10-klasta qáliplestirilgen bilim hám kónlikpelerińizdi bekkemlep alasız:

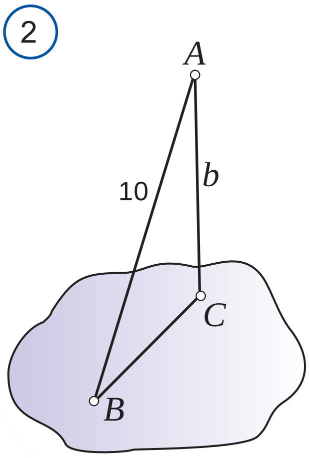
– tegislikke perpendikulyar hám qıyalar;
– tuwrı sızıq penen tegislik arasındaǵı múyesh;
– parallel tuwrı sızıqlar hám tegislikler;
– tegislikke parallel tuwrı sızıq;
– parallel tegislikler;
– perpendikulyar tegislikler.

23 TÁKIRARLAWǴA TIYISLI MÁSELELER

1



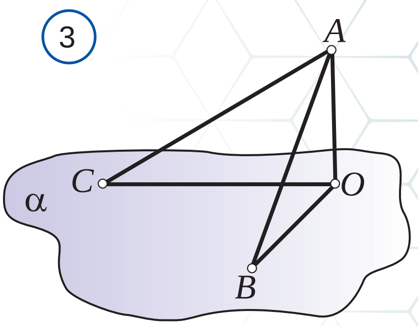
2



1. Tegislikke perpendikulyar hám qıyalar

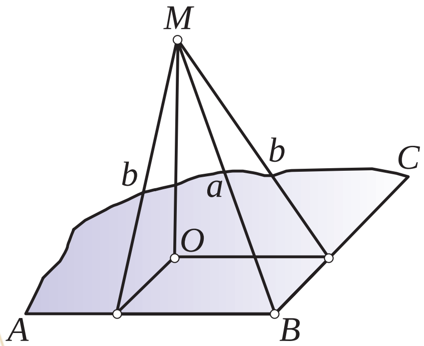
1. 1-súwrette tuwrı múyeshli parallelepiped súwretlengen.
   1) DB_1 hám D_1C tuwrı sızıqlar kesilisedi me? BB_1 hám D_1C tuwrı sızıqlar kesilisedi me?
   2) AO hám B_1C_1 tuwrı sızıqlar arqalı tegislik ótkeriw múmkin be?
   DC hám DB_1 arqalı tegislik ótkeriw múmkin be?
   BC hám AA_1 arqalı tegislik ótkeriw múmkin be?
2. Tuwrı múyeshli parallelepipedtiń qabırǵaları 3 *cm*, 4 *cm* hám 7 *cm*. Bir tóbesinen shıqqan úsh qabırǵa tóbeleri arqalı ótkerilgen kesimniń maydanın tabıń.
3. Durıs prizmanıń ultanı tárepi a ǵa teń bolǵan úshmúyeshlikten ibarat. Prizmanıń biyikligi b ǵa teń. Tómengi ultanı táreplериniń biri hám ústki ultanınıń sol tárep qarsısında jatqan tóbesi arqalı tegislik ótkeriń. Payda bolǵan kesimniń maydanın esaplań.
4. Tuwrı sızıqta alınǵan noqattan sol tuwrı sızıqqa perpendikulyar tegislik ótkeriń.
5. Tuwrı sızıqtan sırtında alınǵan noqattan sol tuwrı sızıqqa perpendikulyar tegislik ótkeriń.
6. Tegislikten b *cm* aralıqta turǵan A noqattan, sol tegislikke uzınlıǵı 10 *cm* bolǵan AB qıya ótkerilgen. Onıń sol tegislikke túsirilgen BC proekciyasın tabıń *(2-súwret)*.
7. Tegislikten sırtında jatqan noqattan berilgen aralıqta turǵan noqatlardıń berilgen tegisliktegi geometriyalıq ornın tabıń.
8. Sheńber orayınan onıń tegisligine perpendikulyar ótkerilgen. Eger perpendikulyardıń uzınlıǵı a ǵa, sheńberdiń maydanı Q ǵa teń bolsa, perpendikulyardıń ústki tóbesinen sheńberdegi noqatqa shekemgi bolǵan aralıqtı anıqlań.
9. Berilgen eki noqattan teń uzaqlıqtaǵı noqatlardıń geometriyalıq ornın tabıń.
10. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ tuwrı múyeshli parallelepipedtiń qaptal qabırǵası AA_1 = 56 *cm*, ultanınıń tárepleri: AB = 33 *cm* hám AO = 40 *cm*. AD hám B_1C_1 qabırǵalarınan ótkerilgen kesimniń maydanın anıqlań.
11. O noqat – tárepi a bolǵan kvadrattıń orayı, OA – kvadrat tegisligine perpendikulyar tuwrı sızıq bolıp, uzınlıǵı b ǵa teń. A noqattan kvadrattıń tóbelerine shekem bolǵan aralıqtı tabıń.
12. α tegislikten d = 4 aralıqta turǵan M noqattan sol tegislikke MA, MB hám MC qıyalar ótkerilgen. Bul qıyalar menen α tegislikke perpendikulyar bolǵan MO tuwrı sızıq arasındaǵı múyeshler: 30°, 45°, 60°. MA, MB hám MC qıyalardıń uzınlıqların anıqlań.

13. α tegislikke qanday da bir M noqattan óz ara teń úsh qıya MA, MB hám MC ótkerilgen. $MA = MB$ hám O noqat – M noqattıń proekciyası. A, B hám C noqatlardıń (qıyalardıń α tegisliktegi ultanları) orayı O noqat bolǵan sheńberde jatıwın kórsetiń.
14. Tegislikke keńisliktiń bir noqatınan uzınlıǵı 20 cm hám 15 cm bolǵan eki qıya ótkerilgen. Birinshi qıyanıń tegisliktegi proekciyası 16 cm. Ekinshi qıyanıń proekciyasın tabıń.
15. Tegislikke keńisliktegi bir noqattan perpendikulyar hám qıya ótkerilgen. Perpendikulyardıń uzınlıǵı 6 cm, qıyanıń uzınlıǵı 9 cm. Perpendikulyardıń qıyaǵa túsirilgen proekciyasın tabıń.
16. Qanday da bir A noqattan berilgen α tegislikke (3-súwret) AO perpendikulyar hám bir-birine teń AB hám AC qıyalar ótkerilgen. Qıyalar perpendikulyar menen $\angle BAO = \angle CAO = 60°$ lı, óz ara bolsa $\angle CAB = 90°$ lı múyesh payda etedi. $AO = 1$ cm. Qıyalardıń ultanları arasındaǵı BC aralıqtı tabıń.



17. Teń qaptallı úshmúyeshliktiń ultanı hám biyikligi 4 cm den. Berilgen noqat úshmúyeshlik tegisliginen b cm aralıqta hám onıń tóbelerinen teńdey aralıqta turadı. Sol aralıqtı tabıń.
18. Teń qaptallı ABC úshmúyeshlik berilgen, onıń ultanı b = 6 cm hám qaptal tárepi a = 5 cm. Úshmúyeshlikke ishley sızılǵan sheńberdiń O orayınan úshmúyeshlik tegisligine OK = 2 cm perpendikulyar ótkerilgen. K noqattan úshmúyeshliktiń táreplerine shekem hám B tóbesine shekemgi bolǵan aralıqtı tabıń.
19. ABC úshmúyeshlikte B múyesh tuwrı bolıp, katet $BC = a$. A tóbesinen úshmúyeshlik tegisligine D perpendikulyar ótkerilgen. D hám C noqatlar arasındaǵı aralıq f ǵa teń bolsa, D noqattan BC katetke shekem bolǵan aralıqtı tabıń.
20. ABC úshmúyeshlikte C – tuwrı múyesh. CD – sol úshmúyeshlik tegisligine ótkerilgen perpendikulyar. D noqat A hám B noqatlar menen tutastırılǵan. Eger CA = 3 dm, BC = 2 dm hám CD = 1 dm bolsa, AOB úshmúyeshliktiń maydanın tabıń.
21. $ABCD$ tuwrı tórtmúyeshliktiń A tóbesinen onıń tegisligine AK perpendikulyar ótkerilgen, onıń K tóbesi tórtmúyeshliktiń basqa tóbelerinen 6 cm, 7 cm hám 9 cm aralıqta jatadı. AK perpendikulyardıń uzınlıǵın tabıń.
22. A hám B noqatlar α tegislikte jatadı. AC hám BE sol tegislikke ótkerilgen perpendikulyarlar bolıp tabıladı. Eger: $AC = a$ hám $BD = b$ bolsa, AD hám BC sızıqlardıń kesilisiwin dálilleń hám olardıń kesilisiw noqatınan α tegislikke shekemgi bolǵan aralıqtı tabıń.

4



Geometriya matematikanıń bólimlerinen biri dep esaplanadı. Biraq Áyyemgi Greklerde “matematika” hám “geometriya” sózleri ortasında teń belgi qoyılğan hám hátte ataqlı Platon mektebiniń kirisiw bólegine "Bul jerge geometriyanı bilmegen adam kirmesin!" degen jazıw jazıp qoyılğan.

23. Berilgen tuwrı múyesh tegisliginen sırtında jatqan M noqat onıń B tóbesinen a uzaqlıqta, hárbir tárepinen bolsa b aralıqta jatadı. Tuwrı múyesh tegisliginen M noqatqa shekem bolǵan MO aralıq qanshaǵa teń (4-súwret)?

24. α tegislikte AB hám CD parallel tuwrı sızıqlar berilgen, olar arasındaǵı aralıq a ǵa teń. α tegislik sırtında AB dan b uzaqlıqta hám CD dan c uzaqlıqta S noqat berilgen. Eger: a) $a = 66$, $b = c = 65$; b) $a = 6$, $b = 25$, $c = 29$ ekenligi belgili bolsa, S noqattan α tegislikke shekem bolǵan aralıqtı anıqlań.

25. Eger tegislikte jatqan múyeshtiń tóbesinen tegislikke múyeshtiń tárepleri menen teń múyeshler payda etetuǵın qıya ótkerilse, bul qıyanıń proekciyası berilgen múyeshtiń bissektrisası bolıwın dálilleń.

2. Tuwrı sızıq penen tegislik arasındaǵı múyesh

1. Tuwrı múyeshli parallelepiped ultanınıń qabırǵaları 4 cm hám 3 cm, parallelepipedtiń biyikligi 5 cm. Onıń diagonalı hám diagonalınıń ultan tegisligi menen payda etken múyeshin tabıń.

2. Tuwrı múyeshli parallelepipedtiń diagonalı parallelepiped ultan tegisligi menen 45° lı múyesh payda etedi. Ultanınıń tárepleri 120 cm hám 209 cm. Parallelepipedtiń biyikligin anıqlań.

3. Durıs tórtmúyeshli piramidanıń biyikligi h, apofemasınıń ultan tegisligine qıyalıq múyeshi 60°. Piramidanıń qaptal qabırǵaların tabıń.

4. Durıs úshmúyeshli piramidanıń qaptal qabırǵası b ǵa teń bolıp, piramida ultanı menen 30° lı múyesh payda etedi. Piramida ultanınıń tárepin tabıń.

5. Qıya a ǵa teń. Eger qıya proekciyalar tegisligi menen: 1) 45°; 2) 60°; 3) 30° lı múyesh payda etse, bul qıyanıń tegisliktegi proekciyası uzınlıǵın tabıń.

6. Noqat tegislikten h uzaqlıqta jaylasqan. Sol noqattan tegislikke ótkerilgen hám ol menen: a) 30°; b), 45°; c) 60° lı múyeshler payda etken qıyanıń uzınlıǵın tabıń.

7. Kesindiniń tegislikke túsirilgen proekciyası onıń ózinen eki ese kishi bolıwı ushın kesindini tegislikke qanday múyesh astında qıya etip ótkeriw kerek.

8. Tegislikten a aralıqta turǵan noqattan oǵan eki qıya ótkerilgen. Bul qıyalar tegislik penen 45° lı múyesh, óz ara bolsa 60° lı múyesh payda etedi. Qıyalardıń tóbeleri arasındaǵı aralıqtı anıqlań.

9. Tegislikten a uzaqlıqta turǵan noqattan tegislik penen 30° lı múyesh jasaytuǵın eki qıya ótkerilgen. Olardıń tegisliktegi proekciyaları óz ara 120° lı múyesh payda

etedi. Qıyalardıń tóbeleri arasındaǵı aralıqtı anıqlań.

10. AB tuwrı sızıq α tegislikte jatadı. B noqattan AB ǵa perpendikulyar BC hám BD tuwrı sızıqlar ótkerilgen. Olar α tegisliktiń bir tárepinde bolıp, oǵan 50° hám 15° qa qıyalanǵan. CBD múyeshti tabıń.
11. Teń qaptallı tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń bir kateti α tegislikte jatıp, ekinshi kateti α tegislik penen 45°lı múyesh payda etedi. Bunda gipotenuza α tegislik penen 30° lı múyesh payda etiwin túsindiriń.
12. Eger AB qıya α tegislik penen 45° lı múyesh payda etse, α tegislikte jatqan AC tuwrı sızıq AB qıyanıń proekciyası menen 45° lı múyesh payda etedi. Onda $\angle BAC$ = 60° bolıwın dálilleń.
13. Eger durıs úshmúyeshli piramidanıń biyikligi ultanınıń tárepine teń bolsa, qaptal qabırǵaları ultan tegisligi menen 60° lı múyesh payda etiwin dálilleń.

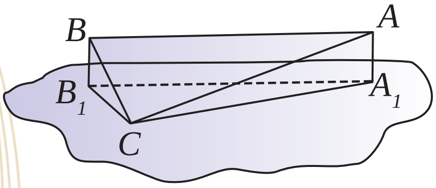
3. Parallel tuwrı sızıqlar hám tegislikler

1. A hám B noqatlar α tegisliktiń sırtında jaylasqan. AC hám BD sol tegislikke perpendikulyar. AC = 3 m, BD = 2 m, CD = 24 dm. A hám B noqatlar arasındaǵı aralıqtı anıqlań.
2. 125 cm uzınlıqtaǵı kesindiniń tóbeleri tegislikten 100 cm hám 56 cm uzaqlıqta. Kesindi proekciyasınıń uzınlıǵın tabıń.
3. α tegisliktiń A noqatınan qıya tuwrı sızıq ótkerilgen hám onda B hám C noqatlar alınǵan. AB = 8 cm hám AC = 14 cm. B noqat α tegislikten 6 cm uzaqlıqta. α tegislikten C noqatqa shekem bolǵan aralıqtı tabıń.
4. 10 cm uzınlıqtaǵı kesindi tegislikti kesedi. Onıń tóbeleri tegislikten 5 cm hám 3 cm uzaqlıqta. Kesindiniń tegisliktegi proekciyasınıń uzınlıǵın tabıń.
5. Kesindi tegislikti kesedi. Onıń tóbeleri tegislikten 8 cm hám 2 cm uzaqlıqta. Kesindiniń ortasınan tegislikke shekem bolǵan aralıqtı tabıń.
6. Tegislik penen kesilispeytuǵın kesindiniń tóbeleri tegislikten 30 cm hám 50 cm uzaqlıqta. Sol kesindini 3 : 7 qatnasta bóliwshi noqat tegislikten qansha uzaqlıqta boladı? (eki jaǵdayın qarań)
7. Durıs úshmúyeshlik tegislikke proekciyalanǵan. Onıń tóbeleri tegislikten 10 dm, 15 dm hám 17 dm uzaqlıqta. Úshmúyeshliktiń orayınan proekciyalar tegisligine shekem bolǵan aralıqtı tabıń.
8. Tegislikke parallel AB kesindi berilgen, onıń uzınlıǵı a ǵa teń. B tóbesi menen ekinshi tóbesiniń A_1 proekciyasın tutastırıwshı BA_1 kesindi tegislik penen 60° lı múyesh payda etedi. BA_1 kesindiniń uzınlıǵın anıqlań.
9. α tegisliktiń A hám B noqatlarınan onıń sırtına óz ara parallel kesindiler sızılǵan: AC = 8 cm hám BD = 6 cm. C hám D noqatlar arqalı ótkerilgen tuwrı sızıq α tegislikti E noqatta kesedi. AB = 4 cm bolsa, BE aralıqtı anıqlań.
10. a ǵa teń AB kesindi α tegislikte jatadı, hárbiri b ǵa teń AC hám BD kesindiler α tegislikte jatpaydı. AC kesindi α tegislikke perpendikulyar, AB ǵa perpendikulyar BD bolsa α tegislik penen 30° lı múyesh payda etedi. CD aralıqtı anıqlań.

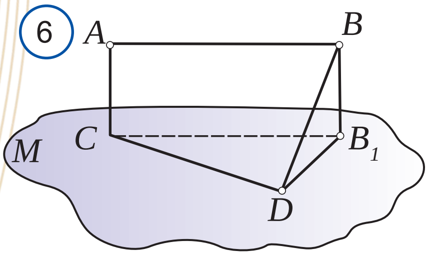
4. Tegislikte parallel tuwrı sızıq

1. a) Berilgen noqattan berilgen tegislikke parallel tuwrı sızıq ótkeriń.
   b) Berilgen noqattan sonday a kesindi ótkeriń, onıń berilgen tegisliktegi proekciyası ózine teń bolsın.
2. Durıs úshmúyeshli prizma ultanınıń a tárepi hám b qaptal qabırǵasına ultanınan prizmanıń qaptal qabırǵası hám kósheri arqalı ótkerilgen kesimniń maydanın tabıń.

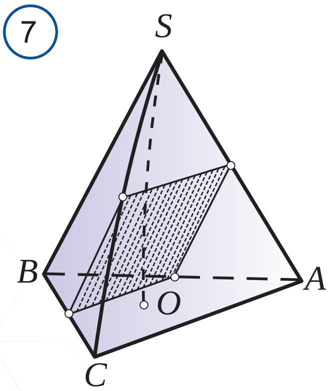
5



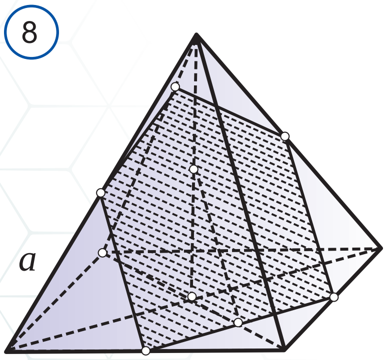
6



7



8



3. Sırtqı A noqattan α tegislikke AB kesindi ótkerilgen. Bul kesindi C noqatta (A dan B ǵa qarap) 3 : 4 qatnasta bólingen hám onnan α tegislikke parallel CD = 2 *cm* kesindi ótkerilgen. α tegislikke D noqat arqalı ADE kesindi ótkerilgen. B hám E noqatlar arasındaǵı aralıqtı tabıń.
4. AB hám CD – bir-biri menen kesilisken eki tegisliktegi parallel kesindiler. AE hám DF tegisliklerdiń kesilisiw sızıǵına ótkerilgen perpendikulyarlar bolıp tabıladı. AD = 5 *cm* hám EF = 4 *cm* bolsa, AB hám CD tuwrı sızıqlar arasındaǵı aralıqtı tabıń.
5. $ABCD$ parallelogramnıń A hám D tóbeleri M tegislikte, B hám C tóbeleri onıń sırtında, AD = 10 *cm*, AB = 15 *cm*, AC hám BD diagonalları M tegisliktegi proekciyaları sáykes túrde 13,5 *cm* hám 10,5 *cm* ge teń. Diagonallardı anıqlań.
6. Romb tárepleriniń biri arqalı qarama-qarsı tárepten 4 *cm* aralıqta tegislik ótkerilgen. Romb diagonallarınıń sol tegisliktegi proekciyaları 8 *cm* hám 2 *cm*. Romb tárepleriniń proekciyaların tabıń.
7. Tuwrı múyeshli ABC úshmúyeshliktiń C tuwrı múyeshi tóbesinen gipotenuzaǵa parallel hám onnan 1 *dm* aralıqta tegislik ótkerilgen *(5-súwret)*. Katetlerdiń bul tegisliktegi proekciyaları 3 *dm* hám 5 *dm*, Gipotenuzanıń sol tegisliktegi proekciyasın anıqlań.
8. AB hám CD – bir-birinen 28 *cm* aralıqtaǵı, α tegislikte jatqan eki parallel sızıq, EF – sırtqı tuwrı sızıq, AB ǵa parallel hám AB dan 17 *cm*, α tegislikten bolsa 15 *cm* uzaqlıqta, EF penen CD arasındaǵı aralıqtı tabıń (eki jaǵdaydı qarań).
9. α tegislikke parallel AB kesindiniń tóbelerinen sol tegislikke AC perpendikulyar hám $BD \perp AB$ qıya ótkerilgen. Eger $AB = a$, $AC = b$ hám $BD = c$ bolsa, CD aralıqtı anıqlań *(6-súwret)*.
10. Durıs tórtmúyeshli piramida ultanınıń diagonalı arqalı qaptal qabırǵasına parallel tegislik ótkeriń. Ultanınıń tárepi a ǵa teń, qaptal qabırǵası bolsa b ǵa teń. Payda bolǵan kesimniń maydanın anıqlań.
11. Durıs úshmúyeshli $SABC$ piramida ultanınıń tárepi a, qaptal qabırǵası bolsa b. Bul piramidanıń AB hám BC qabırǵaları ortasınan SB qabırǵasına parallel tegislik ótkeriń. Payda bolǵan kesimniń maydanın tabıń *(7-súwret)*.
12. Durıs tórtmúyeshli piramidanıń hárbir qabırǵası a ǵa teń. Ultanınıń eki qońsılas tárepi ortalarınan hám biyikliginiń ortasınan tegislik ótkeriń hám onıń maydanın tabıń *(8-súwret)*.

5. Parallel tegislikler

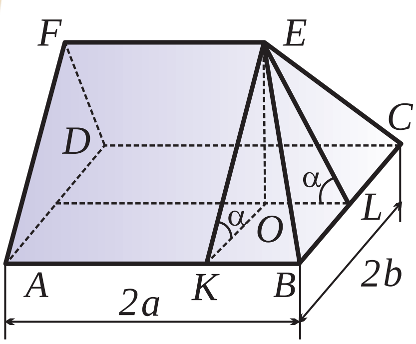
1. Berilgen noqattan berilgen tegislikke parallel tegislik ótkeriń.
2. Qabırǵası a ǵa teń bolǵan kubqa sonday tegislik ótkerilsin, bul tegislik ústki ultanınıń eki qońsılas tárepi ortalarınan hám tómengi ultanınıń orayınan ótsin. Kesimniń perimetrin esaplań.
3. Eki parallel tegislik aralıǵı 8 dm. Uzınlıǵı 10 dm bolǵan kesindiniń tóbeleri sol tegisliklerge tirelgen. Kesindiniń hárbir tegislikke túsirilgen proekciyasın anıqlań.
4. α hám β tegislikler parallel. α tegisliktiń A hám B noqatlarınan β tegislikke AC = 37 cm hám BD = 125 cm qıyalar júrgizilgen. AC qıyanıń tegisliklerden birindegi proekciyası 12 cm. BD qıyanıń proekciyası uzınlıǵın tabıń.
5. Eki parallel tegislik arasına 4 m uzınlıqta perpendikulyar hám 6 m uzınlıqta qıya júrgizilgen. Hárbir tegislikte olardıń tóbeleri arasındaǵı aralıq 3 m den. Perpendikulyar menen qıyanıń ortaları arasındaǵı aralıqtı tabıń.
6. Qosındısı c ǵa teń bolǵan eki kesindiniń tóbeleri eki parallel tegislikke tireledi. Olardıń proekciyaları a hám b bolsa, kesindiler uzınlıqların tabıń.
7. Eki parallel tegislik α hám β arasına AC hám BD kesindiler ótkerilgen (A hám B noqatlar α tegislikte jatadı). AC = 13 cm, BD = 15 cm, AC hám BD nıń berilgen tegisliklerden birindegi proekciyaları uzınlıqlarınıń qosındısı 14 cm. Bul proekciyalardıń uzınlıqların hám tegislikler arasındaǵı aralıqtı tabıń.
8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kubtıń AA_1 hám CC_1 qarama-qarsı qabırǵalarınıń K hám L ortaları tuwrı sızıqlar arqalı kubtıń B hám D_1 tóbeleri menen tutastırılǵan. Kubtıń qabırǵası a ǵa teń. Payda etilgen $KBLD_1$ tórtmúyeshliktiń tárepleri hám diagonalların tabıń hám ol figuranı anıqlań.
9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kubta tártip penen tómendegi qabırǵalardıń ortaların tutastırıń: AA_1, A_1B_1, B_1C_1, C_1C, CD, DA hám AA_1. Payda bolǵan figuranıń durıs altımúyeshlik ekenligin dálilleń. Eger kubtıń qabırǵası a ǵa teń bolsa, altımúyeshlik maydanın tabıń.
10. Durıs prizmanıń ultanı tárepi 3 dm li altımúyeshlikten ibarat. Prizmanıń biyikligi 13 dm. Prizmanıń ústki hám astıngı ultanlarınıń eki qarama-qarsı tárepi arqalı ótkerilgen kesimniń maydanın tabıń.

6. Perpendikulyar tegislikler

1. Tuwrı prizmanıń ultanı ABC teń qaptallı úshmúyeshlik bolıp, onıń AB hám BC tárepleri 7 cm den, úshinshi – AC tárepi bolsa 2 cm. AC tárep arqalı ultan tegisligi menen 30° lı múyesh jasap, qarsısındaǵı qaptal qabırǵa menen D noqatta kesilisiwshi tegislik ótkerilgen. Alınǵan kesimniń maydanın hám qaptal qabırǵasınıń BD kesindisin anıqlań.
2. Eki teń qaptallı úshmúyeshlik ulıwma ultanǵa iye, olardıń tegislikleri bolsa bir-birine salıstırǵanda 60° qıyalanǵan. Ulıwma ultan 16 cm ge teń. Bir úshmúyeshliktiń qaptal tárepi 17 cm ge teń, ekinshisiniń qaptal tárepleri bolsa óz ara perpendikulyar. Úshmúyeshliklerdiń tóbeleri arasındaǵı aralıqtı anıqlań.
3. Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń katetleri 7 cm hám 24 cm. Gipotenuza arqalı ótetuǵın hám úshmúyeshlik tegisligi menen 30° lı múyesh jasaytuǵın tegislik ótkerilgen. Sol tegislikten tuwrı múyesh tóbesine shekem bolǵan aralıqtı tabıń.
4. AB tuwrı sızıq α tegislikke parallel bolıp, odan a uzaqlıqta jaylasqan. AB arqalı β tegislik ótedi, bul tegislik α tegislik penen 45° lı múyesh payda etedi. β tegislikte AB menen 45° lı múyesh payda etiwshi tuwrı sızıq ótkerilgen. Sol tuwrı sızıqtıń AB menen α tegislik arasındaǵı kesindini tabıń.

5. Berilgen tegislikke perpendikulyar bolǵan hám sol tegislikte berilgen tuwrı sızıq penen kesilisetuǵın tuwrı sızıqlardıń geometriyalıq ornın tabıń.
6. Berilgen noqattan basqa bir tegislikke perpendikulyar tegislik ótkeriń.
7. AB – óz ara perpendikulyar bolǵan α hám β tegisliklerdiń kesilisken tuwrı sızıǵı. CD bolsa α tegisliktegi kesindi bolıp, AB ǵa parallel hám onnan 60 cm aralıqta turadı. β tegisliktegi E noqat AB dan 91 cm aralıqta turadı. E den CD ǵa shekem bolǵan aralıqtı tabıń.
8. AB tuwrı sızıq óz ara perpendikulyar tegisliklerdegi A hám B noqatlardı tutastıradı. A hám B noqatlardan tegisliklerdiń kesilisken sızıǵına túsirilgen perpendikulyarlar sáykes túrde a hám b ǵa teń. Olardıń ultanları arasındaǵı aralıq bolsa c ǵa teń. AB kesindiniń uzınlıǵın hám onıń berilgen tegisliklerge túsirilgen proekciyalarınıń uzınlıqların tabıń.
9. Durıs altımúyeshli piramidanıń qaptal qabırǵası 8 dm ge, ultanınıń tárepi bolsa 4 dm ge teń. Ultanınıń eki qońsılas tárepi ortaları arqalı ultanǵa perpendikulyar tegislik ótkerilgen. Kesimniń maydanın tabıń.
10. Ultanı $ABCD$ tuwrı tórtmúyeshlikten ibarat úyge jawın suwı tórt tárepinen aǵıp túsetuǵın tóbeni jabıw kerek (*9-súwret*). AB = 18 m, BC = 12 m. Tóbeniń barlıq jaqları ultan tegisligi menen 40º lı múyesh jasaydı. Eger tóbeniń 1 m^2 ın jabıw ushın 15 cherepica isletilse, tóbeni jabıw ushın neshe dana cherepica kerek boladı?

9



Ámeliy kompetenciyalardı qáliplestiriwge tiyisli máseleler

1. Altıjaqlı qálem hám ashılǵan kitap járdeminde tuwrı sızıqlar arasındaǵı, tuwrı sızıq hám tegislik arasındaǵı, tegislikler arasındaǵı múyeshlerdiń belgilerin kórsetiń.
2. Eki simmertiya kósherine iye, 9-súwrette súwretlengen tóbeden jawın suwı qaysı baǵıtlarda aǵıp túsiwin anıqlań.
3. Jaqınına barıp bolmaytuǵın minaranıń biyikligin anıqlaw ushın qanday ólshewlerdi ámelge asırıw kerek?
4. Biyikligi belgili, biraq jaqınına barıp bolmaytuǵın imaratqa shekem bolǵan aralıqtı tabıw ushın qanday ólshewlerdi ámelge asırıw kerek?
5. Nege sayalar túste joǵaladı?
6. Terek tóbesine shıqpastan onıń biyikligin qanday ólshewge boladı?
7. Dóńgelek stolǵa tárepi a ǵa teń bolǵan kvadrat figuradaǵı úlken dasturqan tóselgen. Dóńgelektiń orayı kvadrat

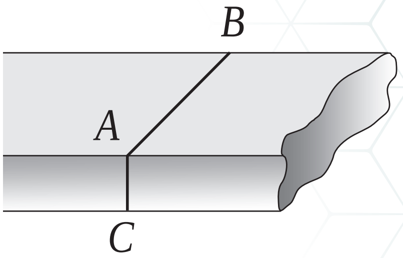
orayı menen ústpe-úst túsedi. Dasturqannıń tóbeleri onıń tárepleri ortalarına salıstırǵanda polǵa qanshelli jaqınıraq?

Juwabı: $a \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{2} \approx 0{,}207\, a$.

8. Diywallarınıń tik ekenligi shulqul (bir ushına tas baylanǵan sabaq) menen tekseriledi. Shulquldıń sabaǵı diywalǵa qanshelli jabısıp parallel tursa, sonshelli diywal tik degen sheshimge kelinedi. Bul qarar qanshelli durıs? Bul tekseriw usılı nege tiykarlanǵan?

9. Pıshqılaw beti kesiletuǵın taxtanıń barlıq qabırǵalarına perpendikulyar bolıwın támiyinlew ushın (10-súwret) taxta betinde pıshqılaw sızıqların qalay belgilew kerek?

10



10. Bólmeniń qońsılas diywalları óz ara perpendikulyarlıǵın tekseriw ushın Pifagor teoremasınan qalay paydalanıwǵa boladı?

11. Baǵananıń tik ekenligi baǵana ultanı menen bir tuwrı sızıqta jatpaǵan eki noqattan gúzetip tekseriledi. Bunday tekseriw usılın túsindiriń.

Kórsetpe. *Tuwrı sızıq hám tegisliktiń perpendikulyarlıq belgisinen paydalanıń.*

12. Barıp bolmaytuǵın tóbeliktegi noqatta biyik baǵana ornatılǵan. Shulqul járdeminde onıń tik ekenligin qalay tekseriwge boladı.

Sheshiliwi. *Baǵananıń qanday da bir vertikal tuwrı sızıq penen bir tegislikte jatıwın hám basqa vertikal tuwrı sızıq penen bir (basqa) tegislikte jatıwın kórsetiw jetkilikli boladı. Shulquldı aldımızǵa sonday qoyamız, onıń hám baǵananıń joqarı tóbeleri hám kózimiz bir tuwrı sızıqta jatqanda shulqul sabaǵı hám baǵana bir tuwrı sızıqta jatsın. Bul usıl tómendegilerge tiykarlanǵan:*

1) vertikal baǵana qálegen vertikal tuwrı sızıq penen bir tegislikte jatıwı kerek;

2) eger eki parallel tuwrı sızıq eki kesilisiwshi tegislikte jatsa, bul tuwrı sızıqlar tegisliklerdiń kesilisiw sızıǵına da parallel boladı.

13. Eki vertikal jaylasqan tegis ayna berilgen. Bul aynalardıń biriniń betine parallel bolǵan, gorizontal nur ekinshi aynadan birinshi ayna betine perpendikulyar bolǵan tuwrı sızıq boyınsha qaytadı. Aynalar arasındaǵı múyeshti tabıń.

Kórsetpe. *Jaqtılıqtıń qaytıw nızamınan paydalanıń.*

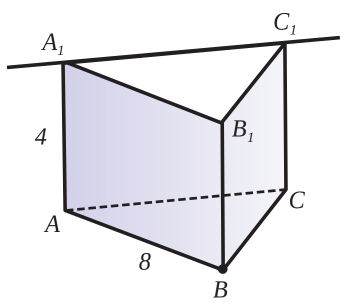
Juwabı: *45°.*

14. Gorizontal nur eki vertikal jaylasqan tegis aynalardan qaytıp atır. Dáslep nur birinshi ayna betine parallel bolǵan bolsa, eki ret sáwleleniw nátiyjesinde ekinshi ayna tegisligine parallel bolıp qalıp atır. Aynalar arasındaǵı múyeshti tabıń.

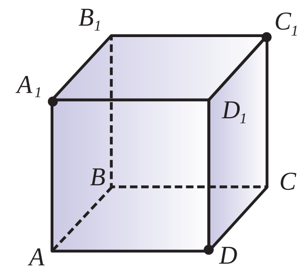
Juwabı: 60°.

ÓZIŃIZDI SÍNAP KÓRIŃ

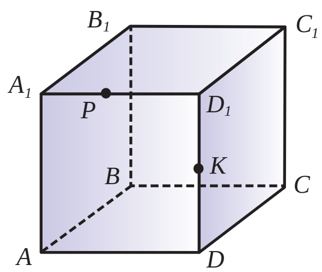
1. Durıs úshmúyeshli prizma berilgen. Onıń A_1C_1 qabırǵası hám B tóbesinen ótetuǵın kesim maydanın tabıń.



2. Kubtıń tolıq beti 12 ge teń. Onıń A_1, C_1 hám D tóbesinen ótetuǵın kesimi maydanın tabıń.

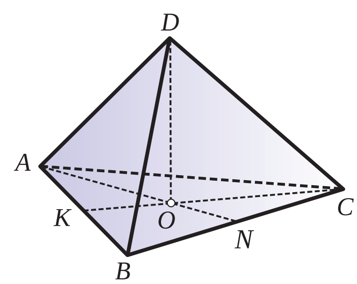


3. PK tuwrı sızıq qaysı tuwrı sızıqlardı kesip ótedi?



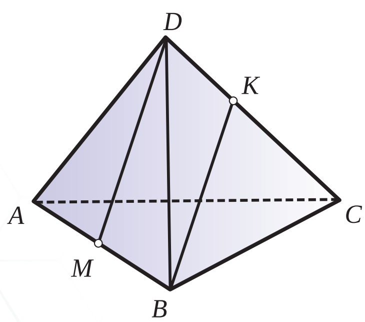
A) A_1B_1 hám DC
B) A_1D_1 hám DD_1
C) A_1B_1 hám AD
D) D_1C_1

4. AOD tegislik BDC tegislikti qaysı tuwrı sızıq boylap kesip ótedi?



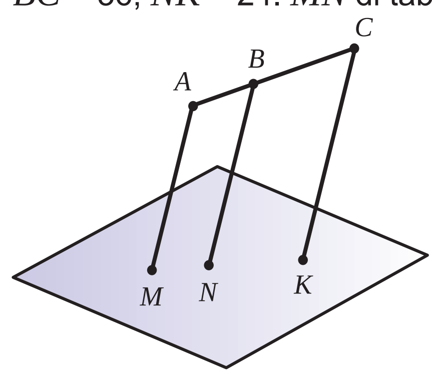
A) DO
B) AN
C) DN
D) DC

5. Durıs pikirdi kórsetiń: MD tuwrı sızıq...

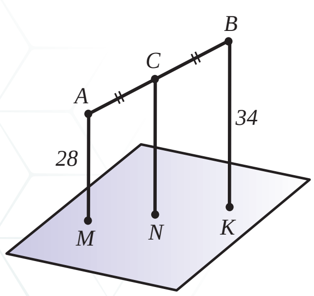


A) BK tuwrı sızıqtı kesip ótedi
B) BK tuwrı sızıqqa parallel
C) BK tuwrı sızıqqa ayqısh
D) BKC tegislik penen kesilispeydi

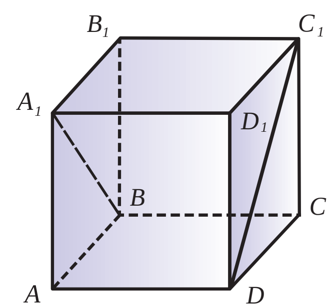
6. Súwrette $AM \parallel BN \parallel CK$, $AB = 18$, $BC = 36$, $NK = 24$. MN di tabıń.



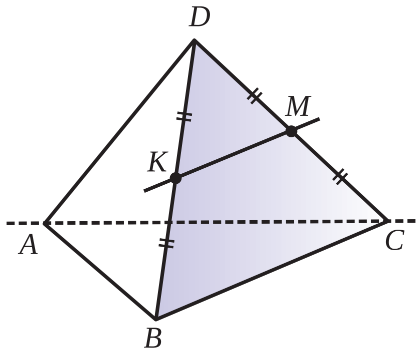
7. Súwrette $AM \parallel CN \parallel BK$, $AM = 28$, $BK = 34$. CN di tabıń.



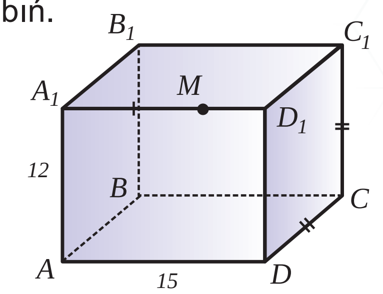
8. Kub berilgen. BA_1 hám DC_1 tuwrı sızıqlar arasındaǵı múyeshti tabıń.



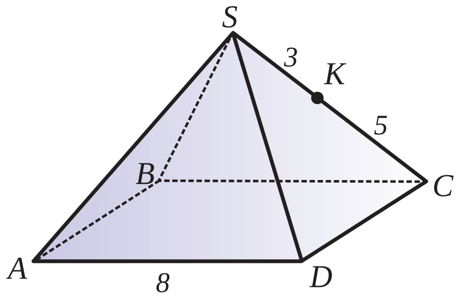
9. Durıs tetraedr berilgen. KM hám AC tuwrı sızıqlar arasındaǵı múyeshti tabıń.



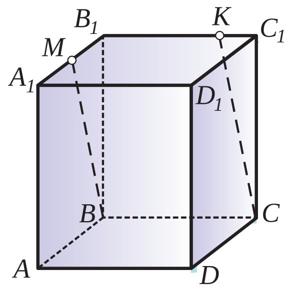
10. Tuwrı múyeshli parallelepiped berilgen. $DC = CC_1$, $A_1M : MD_1 = 2 : 1$, $AA_1 = 12$, $AD = 15$. Parallelepipedtiń CDM tegislik penen kesimi perimetrin tabıń.



11. $SABCD$ – durıs piramida. $KC = 5$, $KS = 3$, $AD = 8$. Piramidanıń ADK tegislik penen kesimi perimetrin tabıń.

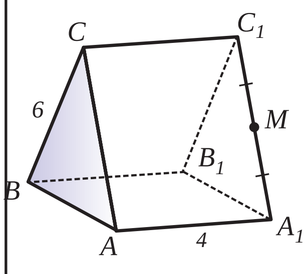


12. AOD tegislik BDC tegislikti qaysı tuwrı sızıq boylap kesip ótedi?



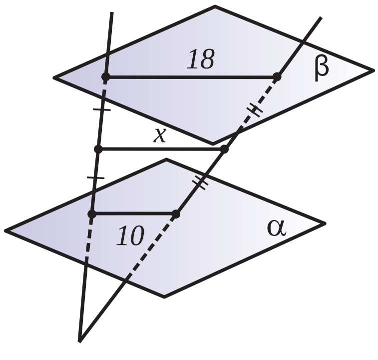
A) AA_1D_1 tegislikti kesip ótedi
B) BM tuwrı sızıqqa parallel
C) AA_1B_1 tegislikke parallel
D) ABA_1 tegislikti kesip ótedi.

13. Durıs prizma berilgen. $BC = 6$, $AA_1 = 4$. Prizmanıń BMC tegislik penen kesimi perimetrin tabıń.

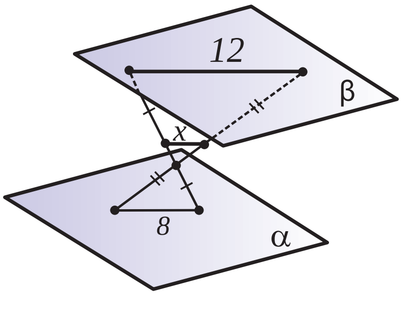


A) AA_1D_1 tegislikti kesip ótedi
B) BM tuwrı sızıqqa parallel
C) AA_1B_1 tegislikke parallel
D) ABA_1 tegislikti kesip ótedi.

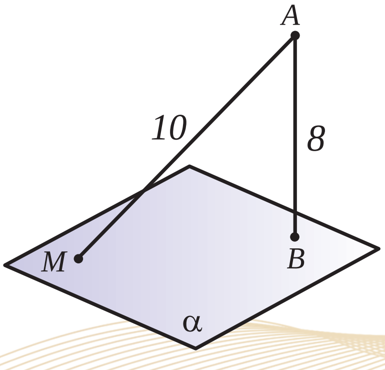
14. $\alpha \parallel \beta$. $x = ?$



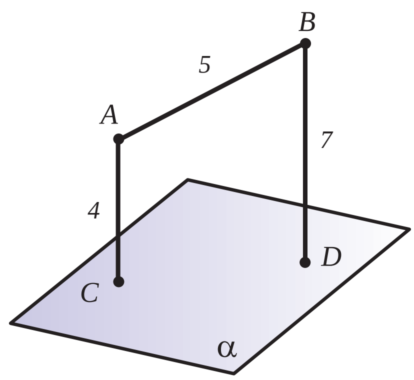
15. $\alpha \parallel \beta$. $x = ?$



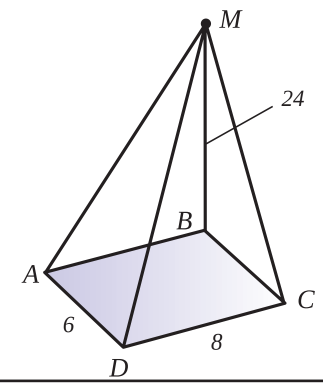
16. $AB \perp \alpha$. $MB = ?$



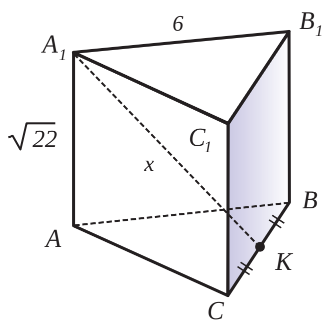
17. $AC \perp \alpha$, $BD \perp \alpha$. CD = ?



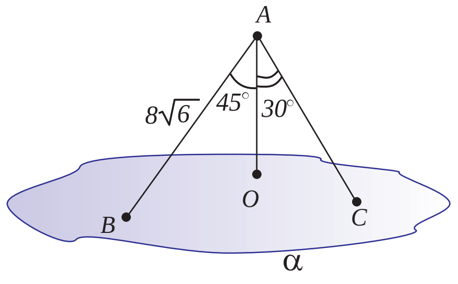
18. $ABCD$ – tuwrı tórtmúyeshlik.
$MB \perp AB$, $MB \perp BC$. MD = ?



19. Durıs piramida berilgen. A_1K nı tabıń.



20. $AO \perp \alpha$, $AB = 8\sqrt{6}$, $\angle SAO = 45°$.
$\angle CAO = 30°$. OC = ?



21. Kubtıń bir tóbesinen shıqqan úsh qabırǵasınıń tóbelerinen ótetuǵın tegislik ótkeriń. Kubtıń qabırǵası a ǵa teń. Kesimniń maydanın esaplań.

22. Teń tárepli úshmúyeshliktiń tárepi 3 cm. Úshmúyeshliktiń hárbir tóbesinen 2 cm uzaqlıqtaǵı noqat penen onıń tegisligi arasındaǵı aralıqtı tabıń.

23. Teń qaptallı úshmúyeshliktiń AC ultanı α tegislikte jatadı. Eger $AB = 5$, $AC = 6$ hám úshmúyeshlik tegisligi menen α tegislik arasındaǵı eki jaqlı múyesh 60° qa teń bolsa, b noqattan α tegislikke shekemgi bolǵan aralıqtı tabıń.

24. 10 cm uzınlıqtaǵı kesindi tegislikti kesedi. Onıń tóbeleri tegislikten 3 cm hám 2 cm uzaqlıqta. Berilgen kesindi menen tegislik arasındaǵı múyeshti tabıń.

25. $ABCD$ trapeciyanıń DA ultanı α tegislikte, CB ultanı bolsa odan 5 cm uzaqlıqta. Eger $DA : CB = 7 : 3$ bolsa, α tegislikten sol trapeciya diagonalları kesilisken M noqatına shekem bolǵan aralıqtı tabıń.

26. AB kesindi α tegislikke parallel. AC hám BD kesindiler α tegislikke ótkerilgen eki teń qıya bolıp, AB kesindige perpendikulyar hám odan túrli baǵıtta ótkerilgen. AB = 2 cm bolıp, α tegislikten 7 cm uzaqlıqta turadı, AC hám BD kesindilerdiń hárbiri 8 cm den. CD aralıqtı anıqlań.

27. AB tuwrı sızıq – 90° qa teń eki jaqlı múyeshtiń qabırǵası. AA_1 hám BB_1 tuwrı sızıqlar bul múyeshtiń túrli jaqlarına tiyisli.

$AA_1 \parallel BB_1$, BB_1 kesindi AB ǵa perpendikulyar. AA_1 hám BB_1 tuwrı sızıqlardıń kesilisiwin dálilleń. Bul tuwrı sızıqlar arasındaǵı múyeshti tabıń.

28. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kubta AB_1C_1D hám A_1D_1CB kesimler tegislikleri arasındaǵı sızıqlı múyeshti jasań hám gradus ólshemin tabıń.

29. Durıs tetraedrdiń qabırǵası a ǵa teń. AB qabırǵadan ótip, onı 1 : 3 qatnasta bóletuǵın hám BC qabırǵaǵa parallel tegislik penen keskende payda bolatuǵın kesimdi jasań. Kesimniń maydanın tabıń.

30. Tuwrı parallelepipedtiń ultanı diagonalları 48 hám 20 cm bolǵan rombtan ibarat. Parallelepipedtiń úlken diagonalı ultan tegisligi menen $45°$ lı múyesh payda etedi. Onıń tolıq beti maydanın tabıń.

31. Piramidanıń ultanı maydanı $16\sqrt{3}$ ke teń bolǵan tuwrı múyeshli úshmúyeshlikten ibarat. Eki qaptal jaqları ultan tegisligine perpendikulyar, úshinshisi bolsa ultanı menen $45°$ li múyeshti jasaydı. Piramida qabırǵalarınıń uzınlıǵın hám qaptal betiniń maydanın tabıń.

32. Tuwrı prizma ultanı katetleri 12 cm hám 9 cm bolǵan tuwrı múyeshli úshmúyeshlikten ibarat. Eger prizmanıń qaptal qabırǵasınan ótetuǵın eń kishi kesim kvadrat bolsa, onıń qaptal beti maydanın tabıń.

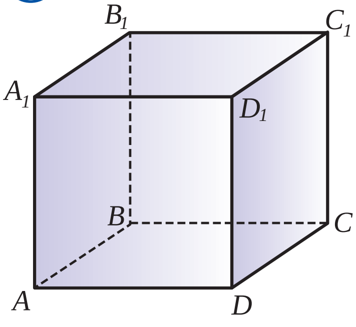
33. Piramidanıń ultanı kishi diagonalı d hám doǵal múyeshi α bolǵan rombtan ibarat. Piramida ultanındaǵı barlıq eki jaqlı múyeshler b ǵa teń. Piramidanıń qaptal beti maydanın tabıń.

34. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kubtıń qabırǵası a ǵa teń. Kubtı AA_1, AD, A_1B_1 qabırǵalarınıń ortasınan ótetuǵın tegislik penen keskende payda bolǵan kesimdi jasań.

35. 1-súwret boyınsha, berilgen tuwrı sızıqlardıń óz ara qanday jaylasqanlıǵın anıqlań hám olardıń arasına sáykes (⊗ – kesilisedi, || – parallellik, $\dot{-}$ – ayqıshlıq) belgilerdi qoyıń.

Tuwrı sızıqlar	AA_1	BC_1	CC_1	CB_1	AB_1
AD					
A_1B_1					
AB					
A_1D					
BD					

1



36. 1-súwrettegi tuwrı sızıq hám tegislik óz ara qanday jaylasqanlıǵın anıqlań hám olardıń arasına sáykes (⊗ – kesilisedi, || – parallellik, $\dot{-}$ – ayqıshlıq hám ⊂ – tiyisli) belgilerdi qoyıń.

Tuwrı sızıqlar/ Tegislikler	AA_1	BC_1	CC_1	CB_1	AB_1
ADD_1					

AA_1B_1					
ABD					
AA_1D					
BCD					

37. Berilgen tegislikke bir noqattan perpendikulyar hám qıya ótkerilgen. Olardıń arasındaǵı múyesh 45°. Perpendikulyardıń uzınlıǵı a ǵa teń. Qıyanıń uzınlıǵın tabıń.

38. Tegislikke berilgen noqattan hárbiri 2 cm ge teń eki qıya ótkerilgen. Olar arasındaǵı múyesh 60°, proekciyaları arasındaǵı múyesh bolsa tuwrı múyesh. Berilgen noqat penen tegislik arasındaǵı aralıqtı tabıń.

39. Berilgen tegislikke bir noqattan eki teń qıya ótkerilgen. Olar arasındaǵı múyesh 60°, proekciyaları arasındaǵı múyesh tuwrı. Hárbir qıya hám onıń proekciyası arasındaǵı múyeshlerdi tabıń.

40. Tuwrı múyeshli ABC úshmúyeshliktiń katetleri – 15 m hám 20 m. Tuwrı múyeshtiń C tóbesinen bul úshmúyeshlik tegisligine perpendikulyar etip CD = 35 m kesindi júrgizilgen. D noqattan AB gipotenuzaǵa shekem bolǵan aralıqtı tabıń.

41. Úshmúyeshliktiń tárepleri: 10 cm, 17 cm hám 21 cm. Sol úshmúyeshliktiń úlken múyeshi tóbesinen onıń tegisligine 16 cm uzınlıqta perpendikulyar ótkerilgen. Onıń tóbelerinen úshmúyeshliktiń úlken tárepine shekem bolǵan aralıqlardı anıqlań.

42. ABC úshmúyeshliktiń A tóbesinen onıń tegisligi sırtında AD tuwrı sızıq júrgizilgen, ol tuwrı sızıq AB hám AC tárepler menen teń súyir múyeshler payda etedi. Eger AB = 51 m, AC = 34 m hám BC = 30 m bolsa, AD tuwrı sızıqtıń úshmúyeshlik tegisligine túsirilgen proekciyası BC tárepti qanday bóleklerge ajıratadı?

43. Tegislikten a uzaqlıqta turǵan noqattan eki qıya júrgizilgen, bul qıyalar tegislik penen 45° lı hám 30° lı múyesh, óz ara bolsa tuwrı múyesh payda etedi. Qıyalardıń tóbeleri arasındaǵı aralıqtı anıqlań.

44. Berilgen noqattan berilgen tuwrı sızıqqa parallel tegislik ótkeriń. Bunday tegisliklerden neshewin ótkeriw múmkin?

45. Tegislik hám oǵan parallel tuwrı sızıq berilgen. Tegislikte alınǵan noqat arqalı berilgen tuwrı sızıqqa parallel etip, sol tegislikte tuwrı sızıq ótkeriń.

46. Eki parallel tegislik arasındaǵı eki tuwrı sızıq kesindisiniń uzınlıqları 51 cm hám 53 cm. Olardıń bul tegisliklerden birine túsirilgen proekciyalarınıń qatnası 6 : 7 sıyaqlı. Berilgen tegislikler arasındaǵı aralıqtı anıqlań.

47. Keńislikte eki tuwrı múyesh sonday jaylasqan, olardıń sáykes tárepleri bir-birine parallel hám birdey baǵıtlanǵan hám olardıń tóbelerin tutastırıwshı kesindige perpendikulyar bolıp tabıladı. Bul kesindiniń uzınlıǵı a ǵa teń. Bir múyeshiniń bir tárepinde onıń tóbesinen baslap b kesindi ajıratılǵan. Ekinshi múyeshtiń oǵan parallel bolmaǵan tárepinde c kesindi ajıratılǵan. Sol kesindilerdiń tóbeleri arasındaǵı aralıqtı anıqlań.

48. Qaptal jaqları kvadrat bolǵan durıs altımúyeshli prizma tómengi ultanınıń bir tárepi hám joqarǵı ultanınıń oǵan qarsı jatqan tárepi arqalı ótken tegislik penen kesilgen. Ultanınıń tárepi a ǵa teń. Payda etilgen kesimniń maydanın tabıń.

49. ABC úshmúyeshlik tárepleri: AB = 9, BC = 6 hám AC = 5. AC tárep arqalı úshmúyeshlik tegisligi menen 45° lı múyesh payda etiwshi α tegislik ótedi. α tegislik penen B tóbesi arasındaǵı aralıqtı tabıń.

50. Berilgen tuwrı sızıqtan ekinshi bir tegislikke perpendikulyar tegislik ótkeriń. Neshe sonday tegislik ótkeriw múmkin?

GEOMETRIYAǴA TIYISLI TIYKARǴÍ MAǴLÍWMATLAR

I. Planimetriya

1.1. Múyeshler hám tuwrı sızıqlar

Parallel hám kesilisiwshi tuwrı sızıqlar

Tegislikte eki tuwrı sızıq yamasa parallel *(1-súwret)* yamasa kesilisiwshi *(2-súwret)* bolıwı múmkin.

Qońsılas hám vertikal múyeshler

Qońsılas múyeshler qosındısı 180° qa teń *(3-súwret)*. Vertikal múyeshler teń *(4-súwret)*.

Eki tuwrı sızıqtı úshinshi tuwrı sızıq keskende payda bolatuǵın múyeshler *(5-súwret)*:

1) ∠1 hám ∠5, ∠2 hám ∠6, ∠3 hám ∠7, ∠4 hám ∠8 – *sáykes múyeshler*;

2) ∠3 hám ∠6, ∠4 hám ∠5 – ishki *bir táreplemeli múyeshler;*

3) ∠3 hám ∠5, ∠4 hám ∠6 – ishki *ayqısh múyeshler* dep ataladı.

Tuwrı sızıqlardıń parallellik belgileri

Eger eki tuwrı sızıqtı úshinshi tuwrı sızıq keskende *(5-súwret)*,

1) ishki ayqısh múyeshler teń bolsa yamasa;

2) sáykes múyeshler teń bolsa yamasa;

3) ishki bir tárepleme múyeshler qosındısı 180° qa teń bolsa, berilgen tuwrı sızıqlar parallel boladı.

Parallel tuwrı sızıqlardıń qásiyetleri:

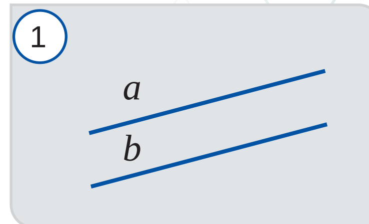
Eger eki parallel tuwrı sızıqtı úshinshi tuwrı sızıq kesip ótse *(5-súwret)*:

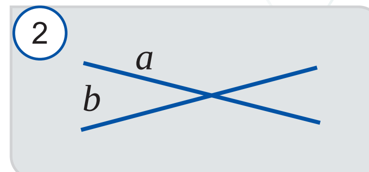
1) ishki ayqısh múyeshler teń boladı;

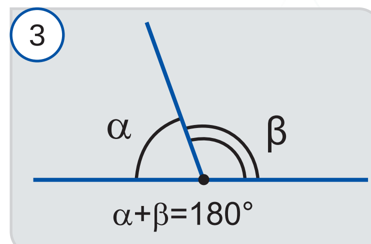
2) sáykes múyeshler teń boladı;

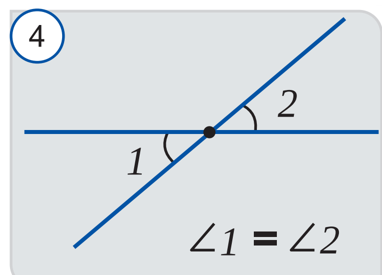
3) ishki bir tárepleme múyeshler qosındısı 180° qa teń boladı.

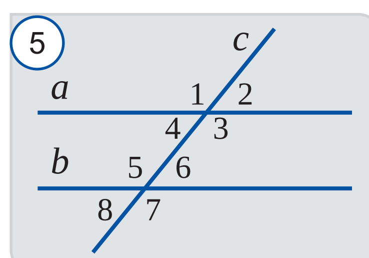
Eger $a \parallel b$ hám $a \parallel c$ bolsa, $b \parallel c$ boladı.

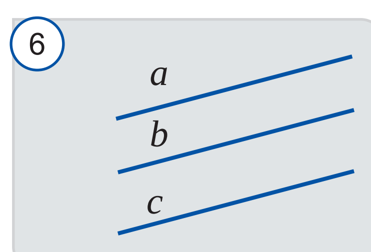




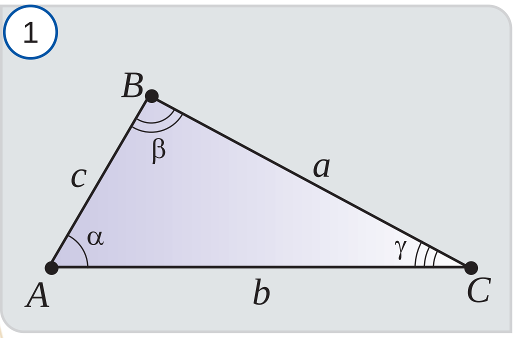








1.2. Úshmúyeshlikler



1°. Tiykarǵı túsinikler

Tegislikte bir tuwrı sızıqta jatpaytuǵın úsh noqat berilgen bolsın. Sol noqatlardıń hár ekewin kesindiler menen tutastıramız. Payda bolǵan figuraǵa *úshmúyeshlik* dep aytıladı. Noqatlar úshmúyeshliktiń tóbeleri, kesindiler bolsa tárepleri dep aytıladı. Belgileniwi:

A, B, C – tóbeler, a, b, c – tárepler *(1-súwret)*.

Úshmúyeshlik úsh ishki múyeshke iye: $\angle BAC$, $\angle CBA$, $\angle ACB$.

Belgileniwi: α, β, γ.

Úshmúyeshliktiń orta sızıǵı – onıń eki tárepi ortaların tutastırıwshı kesindi.

Mediana – úshmúyeshlik tóbesin onıń qarsısındaǵı táreptiń ortası menen tutastırıwshı kesindi. Úshmúyeshlikte 3 mediana bolıp, olar m_a, m_b, m_c sıyaqlı belgilenedi.

Bissektrisa – úshmúyeshlik tóbesin onıń qarsısındaǵı tárep penen tutastırıwshı hám sol tóbedegi múyesh bissektrisasında jatıwshı kesindi. Úshmúyeshlikte úsh bissektrisa bolıp, olar l_a, l_b, l_c sıyaqlı belgilenedi.

Biyiklik – úshmúyeshlik tóbesinen onıń qarsısındaǵı tárep jatqan tuwrı sızıqqa túsirilgen perpendikulyar. Úshmúyeshlikte úsh biyiklik bolıp, olar h_a, h_b, h_c sıyaqlı belgilenedi. Orta sızıq – eki tárep ortaların tutastırıwshı kesindi. Orta sızıqlar sanı da úshew.

Perimetr – úsh tárepi uzınlıqları qosındısı. Belgileniwi: P

Úshmúyeshlikler táreplerine qaray úsh túrge ajıratıladı: a) teń tárepli $(a=b=c)$; b) teń qaptallı (a, b, c lardıń qanday da ekewi teń); c) túrli tárepli (a, b, c lardıń heshbir ekewi teń emes).

Úshmúyeshliktiń úsh tárepine urınıp ótetuǵın sheńber oǵan *ishley sızılǵan sheńber* dep ataladı (bunday sheńber bar hám birden-bir). Ishley sızılǵan sheńber radiusı r arqalı belgilenedi.

Úshmúyeshliktiń úsh tóbesinen ótetuǵın sheńber oǵan *sırtlay sızılǵan sheńber* dep ataladı hám onıń radiusı R arqalı belgilenedi (bunday sheńber bar hám birden-bir).

2°. Tiykarǵı qatnaslar

1) $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Úshmúyeshliktiń ishki múyeshleri qosındısı 180° qa teń.

2) Úsh mediana bir noqatta kesilisedi. Bul noqatta medianani 2:1 qatnasta bóledi. Mediana úshmúyeshlikti maydanları teń eki úshmúyeshlikke ajıratadı. Medianalar

uzınlıqları: $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$; $m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$; $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$.

formulalardan tabıladı.

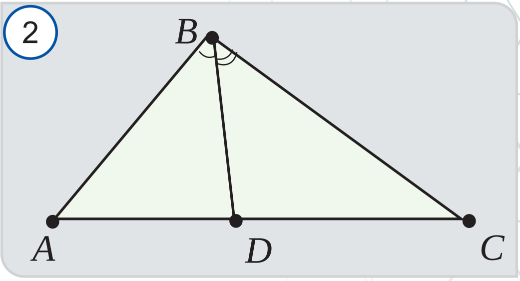
3) Úsh bissektrisa bir noqatta kesilisedi. Bul noqat ishley sızılǵan sheńber orayı boladı. Bissektrisa ózi túsirilgen tárepti qalǵan táreplerge proporcional bóleklerge ajıratadı *(2-súwrette)*.

BD bissektrisa bolsa, $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DC}$.

Bissektrisa uzınlıqların bul formulalardan tabıw múmkin.

$$l_a = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{p(p-a)}; \qquad l_b = \frac{2\sqrt{ac}}{a+c}\sqrt{p(p-b)};$$

$$l_c = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\sqrt{p(p-c)}, \text{ bu yerda } p = a+b+c.$$



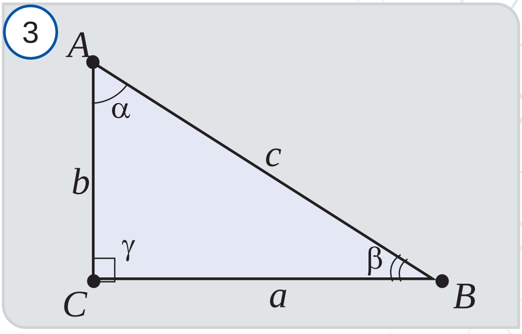
4) Úshmúyeshlik biyiklikleri yamasa olardıń dawamları bir noqatta kesilisedi. Biyiklik uzınlıqların

$$h_a = \frac{2S}{a}; \quad h_b = \frac{2S}{b}; \quad h_c = \frac{2S}{c};$$

formulalardan tabıw múmkin.

Bul jerde S – úshmúyeshlik maydanı.

5) Úshmúyeshlik tárepleriniń orta perpendikulyarı bir noqatta kesilisedi. Bul noqat úshmúyeshlikke sırtlay sızılǵan sheńber orayı boladı.



6) Úshmúyeshliktiń orta sızıǵı úshinshi tárepke parallel hám onıń yarımına teń.

7) Sinuslar teoreması:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

8) Kosinuslar teoreması:

$a^2=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot cos\alpha$; $\quad b^2=a^2+c^2-2\cdot a\cdot c\cdot cos\beta$; $\quad c^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot cos\gamma$

9) Úshmúyeshlik maydanın esaplaw formulaları:

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c; \qquad S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}bc\sin\beta.$$

10) Geron formulası:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}; \qquad p = \frac{a+b+c}{2}; \qquad S = \frac{abc}{4R}; \qquad S = pr.$$

3°. Zárúrli dara jaǵdaylarda

a) *Tuwrı múyeshli úshmúyeshlik* (3-*súwret*).

$\angle\gamma=90°$, $\alpha+\beta=90°$, AC hám BC – hám BC katetler, AB – gipotenuza.

Pifagor teoreması: $a^2+b^2=c^2$.

$$S = \frac{1}{2}ab; \qquad R = \frac{c}{2}; \qquad r = \frac{a+b+c}{2};$$

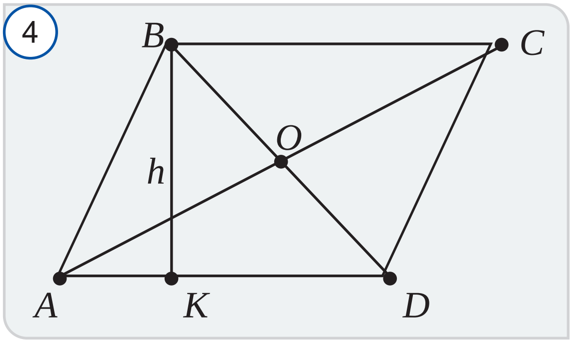
$$\frac{a}{c} = \sin\alpha; \qquad \frac{a}{c} = \cos\beta; \qquad \frac{b}{c} = \sin\beta; \qquad \frac{b}{c} = \cos\alpha;$$

$$\frac{a}{b} = tg\alpha; \qquad \frac{a}{b} = ctg\beta; \qquad \frac{b}{a} = ctg\alpha; \qquad \frac{b}{b} = tg\beta.$$

b) *Teń tárepli úshmúyeshlik*.

$$\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ; \qquad S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}; \qquad r = \frac{a\sqrt{3}}{6}; \qquad R = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

1.3. Tórtmúyeshlikler



1°. Parallelogramm

Qarama-qarsı tárepleri parallel bolǵan tórtmúyeshlik parallelogramm dep ataladı *(4-súwret)*.

Qońsılas bolmaǵan tóbelerdi tutastırıwshı kesindi diagonal dep ataladı.

AB hám CD; AD hám BC parallel tárepler;
BD hám AC diagonallar.

Tiykarǵı qásiyetleri hám qatnasları

1) Diagonallar kesilisiw noqatı parallelogramnıń simmetriya orayı boladı.
2) Qarama-qarsı táreplerdiń uzınlıqları óz ara teń: $AB = CD$ hám $AD = BC$.
3) Parallelogramnıń qarama-qarsı múyeshleri óz ara teń:
$\angle BAD = \angle BCD$ hám $\angle ABC = \angle ADC$.
4) Qońsılas múyeshler qosındısı 180° qa teń.
5) Diagonallar kesilisiw noqatında teń ekige bólinedi: $BO = OD$ hám $AO = OC$.
6) Tárepleri kvadratlarınıń qosındısı diagonalları kvadratlarınıń qosındısına teń:
$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2$ yamasa $2\cdot(AB^2 + BC^2) = AC^2 + BD^2$.
7) Parallelogramm maydanı: a) $S=ah_a$, bul jerde: $a = AD$ tárep, $h_a = BK$ – biyiklik.
b) $S = absin\alpha$, bul jerde: $b=AB$ – tárep, $\alpha=\angle BAD$ – AB hám AD tárepler arasındaǵı múyesh.

2°. Romb

Barlıq tárepleri óz ara teń bolǵan parallelogramm *romb* dep ataladı.

Parallelogramm ushın orınlı bolǵan barlıq qásiyetler romb ushın da orınlı.

Rombtıń qosımsha qásiyetleri:

1) Romb diagonalları óz ara perpendikulyar.
2) Romb diagonalları ishki múyeshlerdiń bissektrisaları boladı.
3) Romb maydanı: $S = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2$, bul jerde: d_1, d_2 – romb diagonalları.

3°. Tuwrı tórtmúyeshlik

Barlıq múyeshleri 90° qa teń bolǵan parallelogramm *tuwrı tórtmúyeshlik* dep ataladı.

1) Tuwrı tórtmúyeshlik diagonalları óz ara teń.
2) Tuwrı tórtmúyeshlik maydanı: $S = ab$, bul jerde a hám b – tuwrı tórtmúyeshliktiń qońsılas tárepleri.

4°. Kvadrat

Barlıq tárepleri óz ara teń bolǵan tuwrı tórtmúyeshlik kvadrat dep ataladı.

Romb hám tuwrı tórtmúyeshlikler ushın orınlı bolǵan barlıq qásiyetler kvadrat ushın da orınlı. Eger a – kvadrat tárepi, d – diagonal bolsa:

$$S = a^2; \quad S = \frac{d^2}{2}; \quad d = a\sqrt{2}.$$

5°. Trapeciya

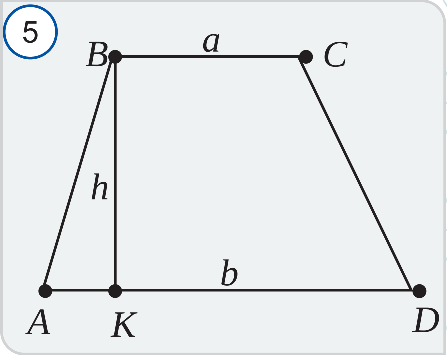
Ultanlar dep atalıwshı eki tárepi óz ara parallel hám *qaptal tárepler* dep atalıwshı qalǵan eki tárepi bolsa parallel bolmaǵan tórtmúyeshlik *trapeciya* dep ataladı.

Qaptal tárepler ortaların tutastırıwshı kesindi trapeciyanıń *orta sızıǵı* dep ataladı.

Tiykarǵı qásiyetler:

1) trapeciya orta sızıǵı ultanlarǵa parallel hám ultanlar qosındısınıń yarımına teń boladı;

2) trapeciya maydanı $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$, bul jerde a hám b – ultanlar, h – biyiklik (*5-súwret*).

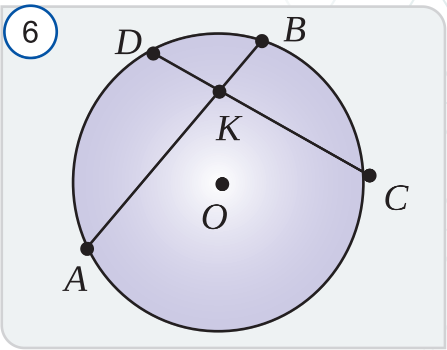


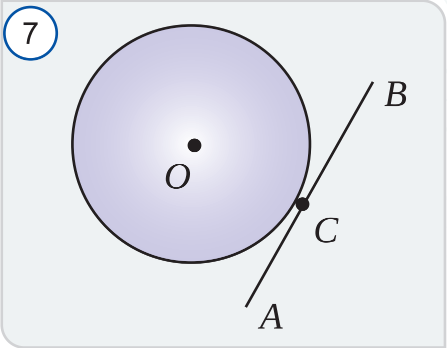
1.4. Sheńber, dóńgelek

1°. Ońsan R hám tegislikte O noqat berilgen bolsın. O noqattan R aralıqta jaylasqan noqatlardan quralǵan figura sheńber dep ataladı. O noqat sheńber orayı, oray menen sheńberdegi noqattı tutastırıwshı kesindi *radius*, R san bolsa *radius uzınlıǵı* dep ataladı.

Sheńberdegi eki noqattı tutastırıwshı kesindi *xorda*, oraydan ótetuǵın xorda bolsa *diametr* dep ataladı.

Tegisliktiń sheńber menen shegaralanǵan shekli bólegi *dóńgelek* dep ataladı.





Tiykarǵı qatnaslar:

1) $D = 2R$, bul jerde: d – diametr uzınlıǵı.

2) $L = 2\pi R$ – sheńber uzınlıǵı.

3) $S = \pi R^2$ – dóńgelek maydanı.

4) AB hám CD xordalar K noqatta kesilisse (*6-súwret*), $AK \cdot KB = CK \cdot KD$ qatnas orınlanadı.

5) xordanı teń ekige bóliwshi diametr sol xordaǵa perpendikulyar bolıp tabıladı.

6) Teń xordalar oraydan teń aralıqlarda jaylasqan hám, kerisinshe, oraydan teń aralıqta jaylasqan xordalar óz ara teń.

2°. Urınba

Sheńber (yamasa dóńgelek) menen birden-bir ulıwma noqatqa iye bolǵan tuwrı sızıq *urınba* dep ataladı. Noqat bolsa urınıw *noqatı* dep ataladı *(7-súwret)*.

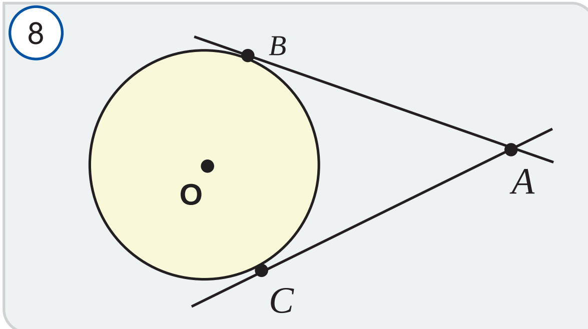
Sheńber menen 2 ulıwma noqatqa iye bolǵan tuwrı sızıq *kesiwshi* dep ataladı.

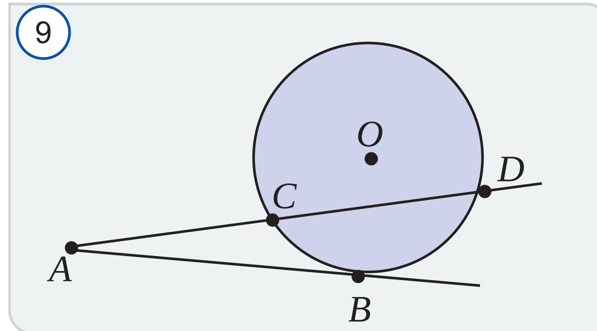
Urınbanıń qásiyetleri:

1) Urınıw noqatına ótkerilgen radius urınbaǵa perpendikulyar bolıp tabıladı.

2) Dóńgelek sırtındaǵı noqattan sol dóńgelekke eki urınba ótkeriw múmkin, bul urınbalardıń kesindileri óz ara teń *(8-súwret)*: $AB = AC$.

3) Eger AC kesiwshi bolıp, sheńberdi C hám D noqatlarda kesip ótse, AB urınba bolsa, $AB^2 = AD \cdot AC$ teńlik orınlı (*9-súwret*).





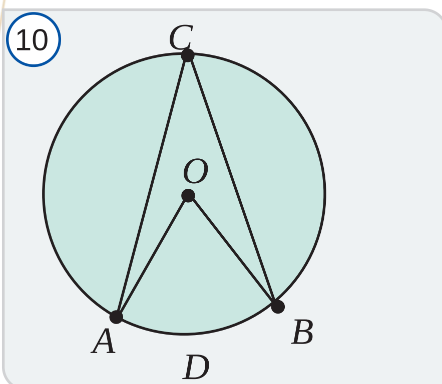
3°. Oraylıq hám ishley sızılǵan múyeshler

Sheńberdegi eki noqat járdeminde sheńber eki bólekke ajıraladı. Bul bólekler *doǵalar* dep ataladı.Belgileniwi: ADB, ACB.

AOB múyesh ADB doǵaǵa tirelgen *oraylıq múyesh* (*10-súwret*), ACB múyesh bolsa ADB doǵaǵa tirelgen hám sheńberge *ishley sızılǵan múyesh* dep ataladı. Bul múyeshler arasında

$\angle ACB = \frac{1}{2} \cdot \angle AOB$ qatnas orınlı.

Sonlıqtan, yarım sheńberge tirelgen ishki múyesh *tuwrı múyesh* boladı (*11-súwret*). Bir doǵaǵa tirelgen sheńberge ishley sızılǵan múyeshler óz ara teń boladı.



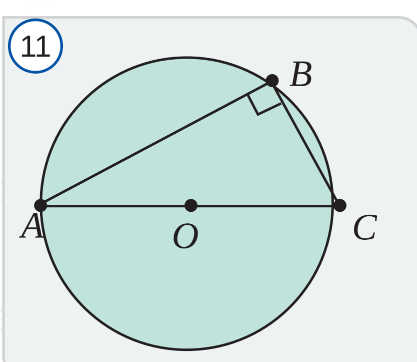
4°. Sektor hám segment

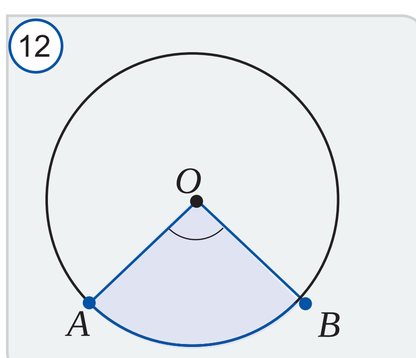
Sheńberdiń eki radius penen shegaralanǵan bólegi *sektor* dep ataladı (*12-súwret*). Sektor doǵasınıń uzınlıǵı:

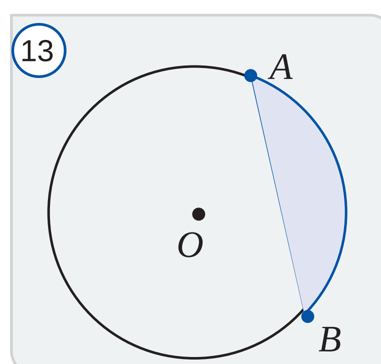
$l = \frac{\pi R\alpha}{180^\circ}$, bul jerde α – oraylıq múyeshtiń gradus ólshemi.

Sektor maydanı: $S = \frac{\pi R^2\alpha}{360^\circ}$; $S = \frac{1}{2} \cdot R \cdot l.$

Segment – sheńberdiń xorda hám sol xorda tirelgen doǵa menen shegaralanǵan bólegi (*13-súwret*).







Sektor maydanı: $S = S_{sektor} \pm S_{\Delta} = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot \alpha \pm \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot \sin\alpha.$

1.5. Durıs kópmúyeshlikler

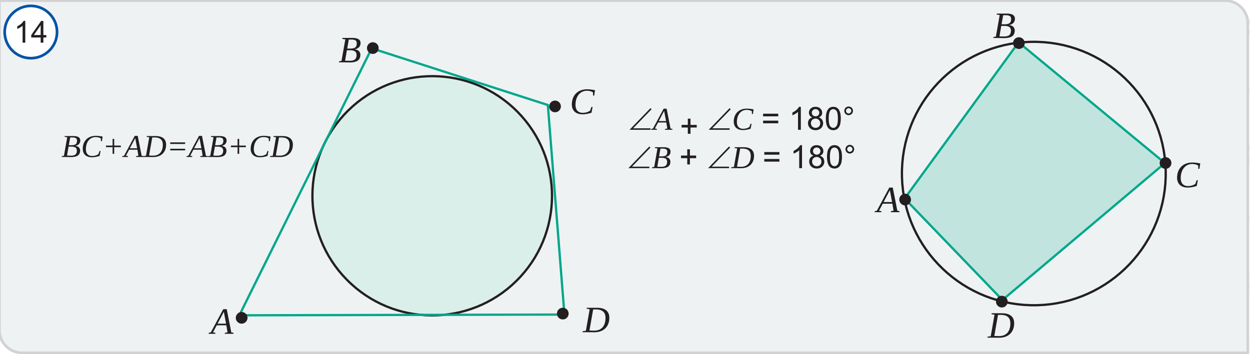
Durıs n múyeshliktiń tárepi a_n, perimetri P_n, maydanı S_n, ishley sızılǵan sheńber radiusı r_n, sırtlay sızılǵan sheńber radiusı R_n, ishki múyeshi α_n bolsa,

$$P_n = n \cdot a_n; \quad S_n = \frac{1}{2} \cdot P_n \cdot r_n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot a_n \cdot r_n; \quad \alpha_n = \frac{(n-2) \cdot 180°}{n}$$

$$R_n = \frac{a_n}{2\sin\frac{180°}{n}}; \quad r_n = \frac{a_n}{2 \cdot tg\frac{180°}{n}}$$

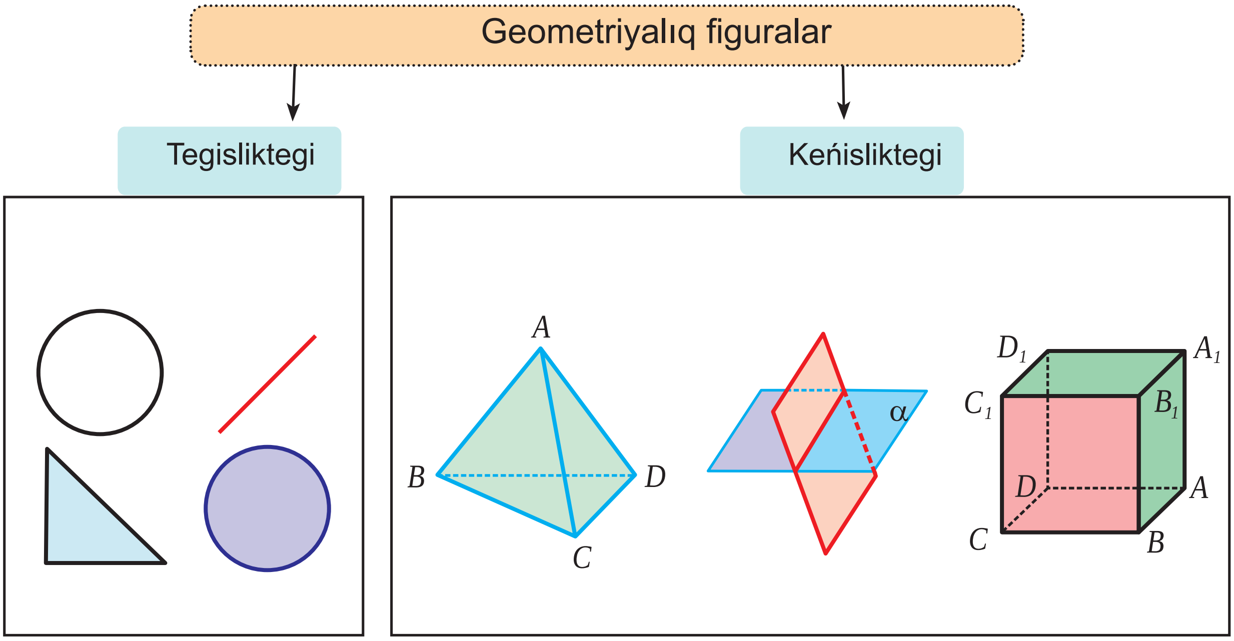
Sheńberge sırtlay hám ishley sızılǵan tórtmúyeshlikler *(14-súwret)*.

14



II. Stereometriya

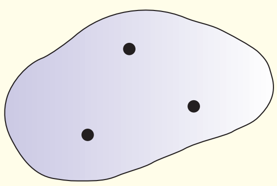
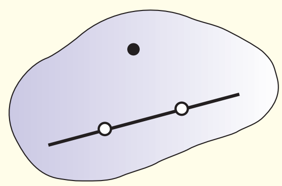
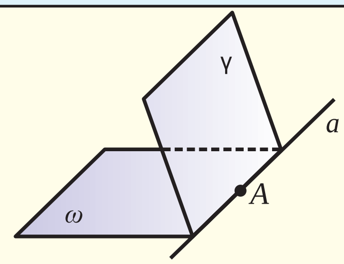
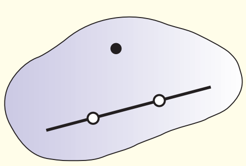
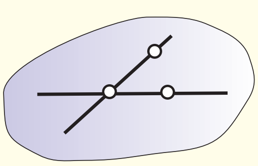
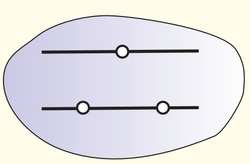
Keńislikte geometriyalıq figuralar tegislikte tolıq jatqan yamasa jatpaǵanlıǵına qaray tegis hám keńisliktegi figuralarǵa ajıratıladı.



2.1. Stereometriyanıń tiykarǵı túsinikleri

Geometriyanıń *stereometriya* bólimi keńisliktegi geometriyalıq figuralardıń (yamasa denelerdiń) qásiyetlerin úyrenedi. *Stereometriya* sózi grek tilinen alınǵan bolıp, *stereos* – "keńisliktegi" metreo – "ólsheymen" degen mánisti ańlatadı.

Keńisliktegi tiykarǵı geometriyalıq figuralar noqat, tuwrı sızıq hám tegislik bolıp tabıladı. Olar stereometriyanıń tiykarǵı túsinikleri bolıp, olarǵa anıqlama berilmeydi.

Stereometriya aksiomaları hám olardan kelip shıǵıwshı nátiyjeler		
 **S_1 aksioma.** Bir tuwrı sızıqta jatpaytuǵın úsh noqat arqalı bir hám tek bir tegislik ótkeriw múmkin.	 **S_2 aksioma.** Eger tuwrı sızıqtıń eki noqatı bir tegislikte jatsa, onda onıń barlıq noqatları sol tegislikte jatadı.	 **S_3 aksioma.** Eger eki tegislik ulıwma noqatqa iye bolsa, onda olar sol noqattan ótetuǵın ulıwma tuwrı sızıqqa da iye boladı.
 **1-nátiyje.** Tuwrı sızıq hám onda jatpaytuǵın noqat arqalı bir hám tek bir tegislik ótkeriw múmkin.	 **2-nátiyje.** Kesilisiwshi eki tuwrı sızıq arqalı tek ǵana bir tegislik ótkeriw múmkin.	 **3-nátiyje.** Parallel eki tuwrı sızıq arqalı bir hám tek bir tegislik ótkeriw múmkin.

2.2. Keńislikte tuwrı sızıq hám tegisliklerdiń jaylasıwı

Keńislikte tuwrı sızıqlar

Keńislikte eki tuwrı sızıq bir tegislikte jatıwı yamasa jatpawı múmkin.

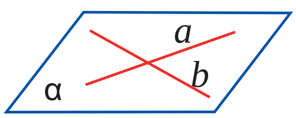
Bir tegislikte jatqan hám tek bir ulıwma noqatqa iye bolǵan tuwrı sızıqlar *kesilisiwshi tuwrı sızıqlar* dep ataladı.

Bir tegislikte jatqan hám óz ara kesilispeytuǵın tuwrı sızıqlar bolsa *parallel tuwrı sızıqlar* dep ataladı.

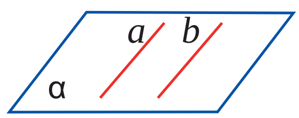
Keńislikte bir tegislikte jatpaytuǵın eki tuwrı sızıq *ayqısh tuwrı sızıqlar* dep ataladı.

Keńislikte a hám b tuwrı sızıqlar

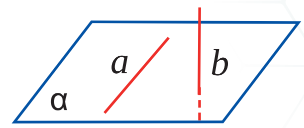
- Bir tegislikte jatadı
  - Kesilisedi



  - Parallel



- Bir tegislikte jatpaydı
  - Ayqısh

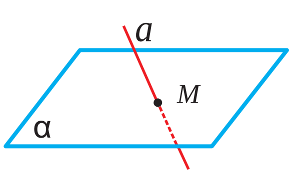


Keńislikte tuwrı sızıqlar hám tegislikler

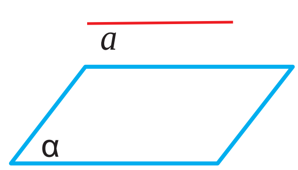
Tuwrı sızıq tegislikte jatıwı, onı kesip ótiwi yamasa kesip ótpewi, yaǵnıy tegislikke parallel bolıwı múmkin.

Keńislikte tuwrı sızıq hám tegislik

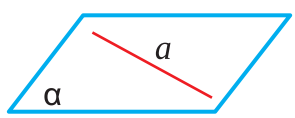
- Bir kesilisiw noqatına iye
  - Kesilisedi



- Kesilisiw noqatına iye emes
  - Parallel



- Eki kesilisiw noqatına iye
  - Bir tegislikte jatadı

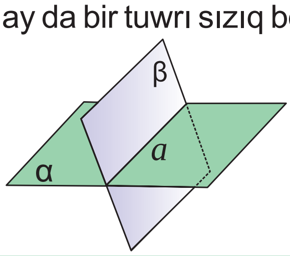


Keńislikte tegislikler

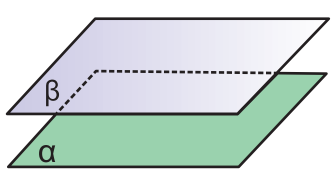
Keńislikte tegislikler qanday da bir tuwrı sızıq boylap kesilisiwi yamasa ulıwma noqatqa iye bolmawı, yaǵnıy óz ara parallel bolıwı múmkin.

Keńislikte tegislikler

- Kesilisedi (qanday da bir tuwrı sızıq boylap)



- Parallel (ulıwma noqatqa iye emes)



Figuralar	Keńislikte tuwrı sızıqlardıń óz ara jaylasıwı		
a hám *b* tuwrı sızıqlar	Bir tegislikte jatadı	Bir ulıwma noqatqa iye	Kesilisiwshi: $a \otimes b$
		Ulıwma noqatqa iye emes	Parallel: $a \parallel b$
	Bir tegislikte jatpaydı.		Ayqısh: $a \dot{-} b$

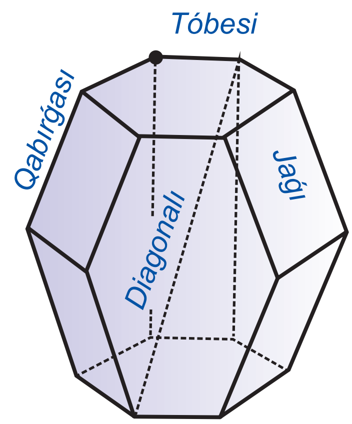
Figuralar	Keńislikte tuwrı sızıq hám tegisliklerdiń óz ara jaylasıwı		
a tuwrı sızıq hám α tegislik	*a* tuwrı sızıq α tegislikte jatpaydı.	*a* tuwrı sızıq α tegislik penen bir ulıwma noqatqa iye.	Kesilisiwshi: $a \otimes \alpha$
		a tuwrı sızıq α tegislik penen bir ulıwma noqatqa iye emes.	Parallel: $a \parallel \alpha$
	a tuwrı sızıq α tegislikte jatadı.		$a \subset \alpha$

Figuralar	Keńislikte tuwrı sızıqlardıń óz ara jaylasıwı	
α hám β tegislikler	Ulıwma noqatqa iye.	Kesilisiwshi: $\alpha \cap \beta = a$ tuwrı sızıq.
	Ulıwma noqatqa iye emes.	Parallel: $\alpha \parallel \beta$.

2.3. Kópjaqlılar

Keńisliktegi dene hám kópjaqlı

Keńisliktegi denelerdi qanday da materiallıq dene iyelegen bolmıstıń bólegi sıpatında kóz aldımızǵa keltiriw múmkin. Keńisliktegi deneni onıń beti shegaralap turadı. Beti tegis kópmúyeshlikten ibarat dene *kópjaqlı* dep ataladı.

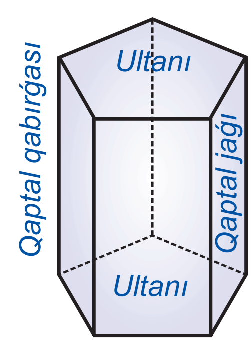


Prizma

Prizma dep eki jaǵı teń kópmúyeshliklerden ibarat, parallel tegisliklerde jatıwshı hám qalǵan barlıq qabırǵaları óz ara parallel kópjaqlıǵa aytıladı.

Durıs prizma ultanları durıs kópmúyeshliklerden ibarat tuwrı prizmaǵa aytıladı.

Tuwrı prizmanıń qaptal beti ultanınıń perimetri menen biyikligi kóbeymesine teń.



Parallelepiped

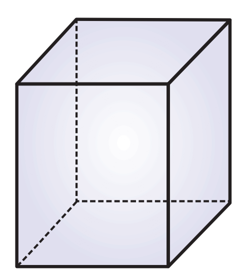
Ultanı parallelogramnan ibarat prizma *parallelepiped* dep ataladı. Onıń barlıq altı jaǵı parallelogramnan ibarat.

Parallepipedtiń qásiyetleri

1) Parallelepipedtiń diagonalları ortaları onıń *simmetriya orayı* dep ataladı.

2) Parallelepipedtiń qarama-qarsı jaqları teń hám parallel.

3) Parallepipedtiń barlıq tórt diagonalı da bir noqatta kesilisedi hám kesilisiw noqatında teń ekige bólinedi.



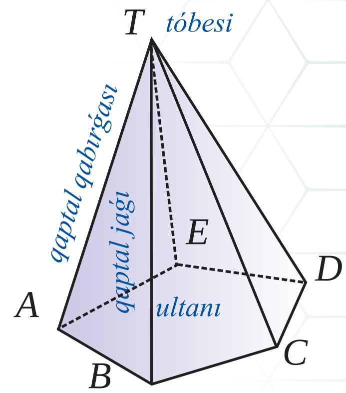
Qaptal qabırǵaları ultan tegisligine perpendikulyar parallelepiped *tuwrı parallelepiped* dep ataladı.

Tuwrı múyeshli parallelepiped tuwrı parallelepiped bolıp, ultanları tuwrı tórtmúyeshliklerden ibarat. Tuwrı múyeshli parallelepipedtiń qabırǵaları teń bolsa, bunday parallelepiped *kub* dep ataladı.

Kubtıń barlıq jaqları teń kvadratlardan ibarat.

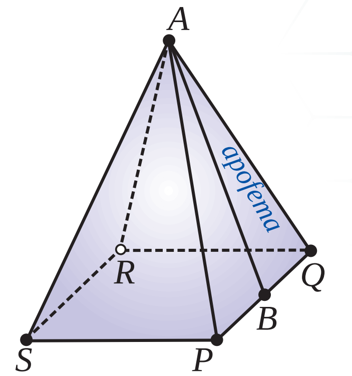
Piramida

Piramida dep onıń bir jaǵı qálegen kópmúyeshlikten, qalǵan jaqları ulıwma tóbege iye bolǵan úshmúyeshliklerden ibarat kópjaqlıǵa aytıladı.



Piramidanıń biyikligi dep piramidanıń tóbesinen ultan tegisligine túsirilgen perpendikulyarǵa aytıladı.

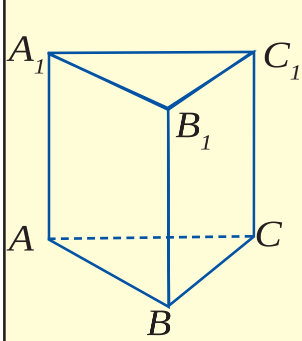
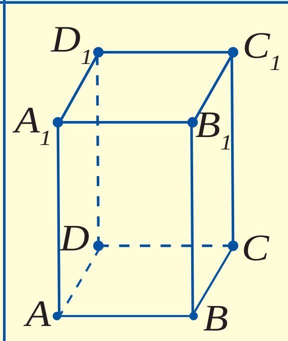
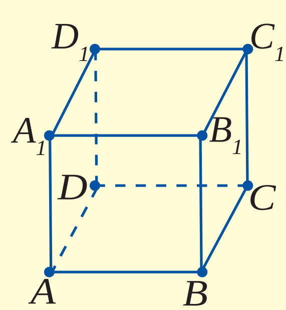
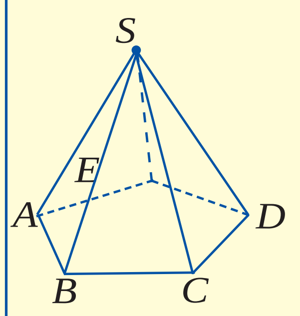
Durıs piramida dep ultanı durıs kópmúyeshlikten ibarat bolıp, biyikligi ultanınıń orayına túsiwshi piramidaǵa aytıladı. Durıs piramidanıń barlıq qaptal qabırǵaları bir-birine teń; barlıq qaptal jaqları teń qaptallı úshmúyeshlikler bolıp tabıladı.

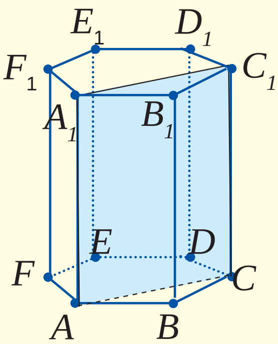
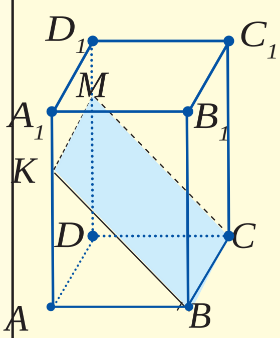
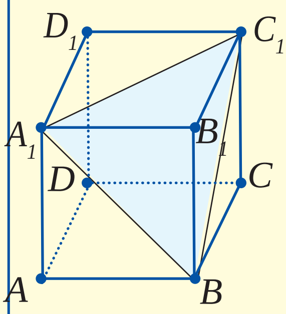
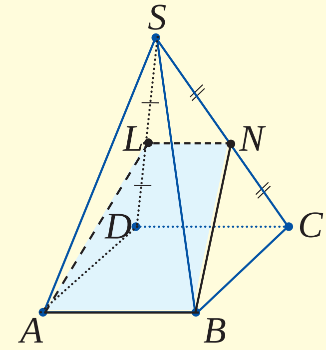


Eger piramidanıń ultanı n múyeshten ibarat bolsa, onda bunday piramida *n múyeshli piramida* dep ataladı. Úshmúyeshli *piramida tetraedr* dep ataladı.

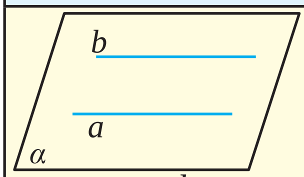
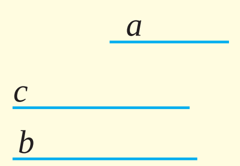
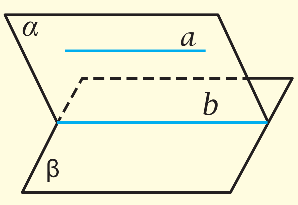
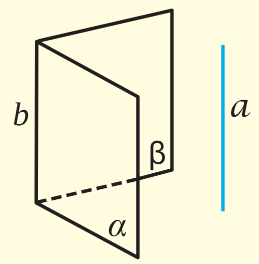
Eger tetraedrdiń barlıq qabırǵaları teń bolsa, bunday tetraedr durıs tetraedr dep ataladı. Durıs piramidanıń qaptal beti tómendegi formula járdeminde esaplanadı:

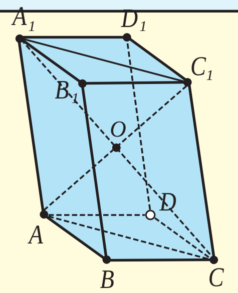
$S_{qaptal} = P \cdot h$, bul jerde P – piramida ultanınıń perimetri, h – apofema.

Kópjaqlı			
Prizma	**Tuwrı múyeshli parallelepiped**	**Kub**	**Piramida**
 Ultanları – kópmúyeshlik, jaqları – parallelogramlar	 Ultanları – tuwrı tórtmúyeshlik, jaqları –tuwrı tórtmúyeshlikler.	 Ultanları – kvadrat, jaqları – kvadrat.	 Ultanı – kópmúyeshlik, jaqları – úshmúyeshlik.

Kópjaqlılardıń ápiwayı kesimleri			
Kópmúyeshlik prizma	**Tuwrı múyeshli parallelepiped**	**Kub**	**Piramida**
 $ACC_1 - A, C, C_1$ noqatlardan óte-tuǵın, kesiwshi tegislik; ACC_1A_1 – kesim.	 CBK – K noqat hám CB tuwrı sızıqtan ótetuǵın, kesiwshi tegislik; $CBKM$ – kesim.	 A_1BC_1 – BC_1 hám BA_1 tuwrı sızıqlardan ótetuǵın, kesiwshi tegislik; A_1C_1B – kesim.	 ABN – AB hám LN parallel tuwrı sızıqlardan ótetuǵın, kesiwshi tegislik; $ABNL$ – kesim.

2.4. Keńislik tuwrı sızıqlar hám tegisliklerdiń parallelligi

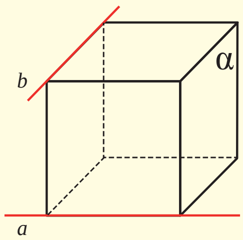
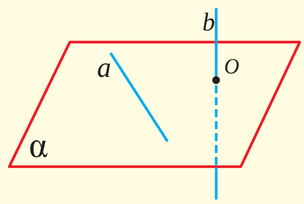
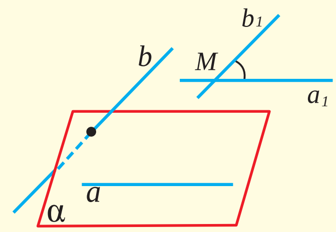
Parallel tuwrı sızıqlar			
Anıqlaması	**Belgileri**		
 $a \parallel b$, a hám b tuwrı sızıqlar bir tegislikte jatıp, óz ara kesilispese, *parallel tuwrı sızıqlar* dep ataladı.	 Eger $a \parallel b$, $a \parallel c$ bolsa, $b \parallel c$ boladı.	 Eger $\alpha \cap \beta = b$, $a \subset \alpha$ hám $a \parallel \beta$ bolsa, $b \parallel a$ boladı.	 Eger $\alpha \cap \beta = b$, $a \parallel \alpha$ hám $a \parallel \beta$ bolsa, $a \parallel b$ boladı.

Parallelepipedtiń qásiyetleri	
	1-qásiyet. Ultanınıń diagonalları hám qaptal qabırǵalarınan dúzilgen tórtmúyeshlik (AA_1C_1C) parallelogramm. 2-qásiyet. Qarama-qarsı jaqları óz ara teń ($AA_1B_1B = DD_1C_1C$). 3-qásiyet. Barlıq diagonalları bir noqatta kesilisedi hám bul noqatta teń ekige bólinedi ($AO = OC_1$, $CO = OA_1$).

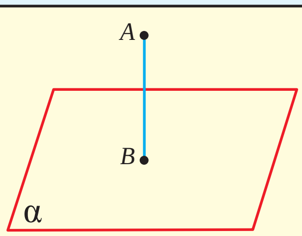
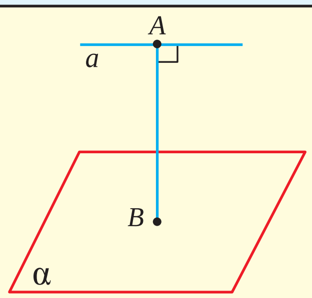
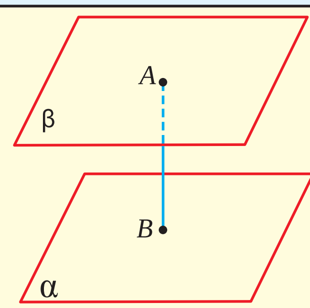
2.5. Keńislikte tuwrı sızıqlar hám tegisliklerdiń perpendikulyarlıǵı

Tuwrı sızıq hám tegisliktiń perpendikulyarlıǵı

Eger tegislikti kesip ótetuǵın tuwrı sızıq tegisliktegi sol kesilisiw noqatınan ótetuǵın qálegen tuwrı sızıqqa perpendikulyar bolsa, onda tuwrı sızıq sol tegislikke *perpendikulyar* dep ataladı.

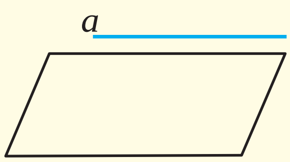
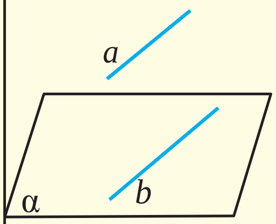
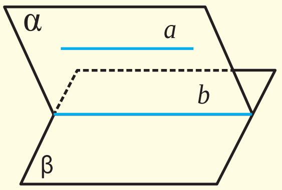
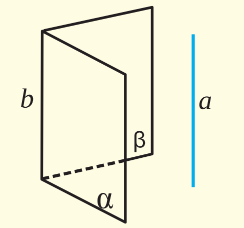
Ayqısh tuwrı sızıqlar		
Anıqlaması	**Belgileniwi**	**Arasındaǵı múyesh**
 Bir tegislikte jatpaytuǵın tuwrı sızıqlar *ayqısh tuwrı sızıqlar* dep ataladı hám $a \dot{-} b$ tárizde ańlatıladı.	 Eger $a \subset \alpha$, $\alpha \cap b = O$, $O \notin a$ bolsa, $a \dot{-} b$ boladı.	 *Ayqısh tuwrı sızıqlar arasındaǵı múyesh* dep olarǵa parallel bolǵan, kesilisiwshi tuwrı sızıqlar arasındaǵı múyeshke aytıladı.

Figuralar	**Keńislikte tuwrı sızıqlardıń óz ara jaylasıwı**		
a hám b tuwrı sızıqlar	Bir tegislikte jatadı	Bir ulıwma noqatqa iye.	Kesilisiwshi: $a \otimes b$.
		Ulıwma noqatqa iye emes.	Parallel: $a \parallel b$.
	Bir tegislikte jatpaydı		Ayqısh: $a \dot{-} b$.

Keńislikte aralıqlar		
Noqattan tegislikke shekemgi bolǵan aralıq	**Tuwrı sızıqtan tegislikke shekemgi bolǵan aralıq**	**Tegislikler arasındaǵı aralıq**
 $A \notin \alpha$ $AB \perp \alpha$	 $a \parallel \alpha$, $A \in a$, $AB \perp \alpha$	 $\alpha \parallel \beta$, $A \in \beta$, $AB \perp \alpha$

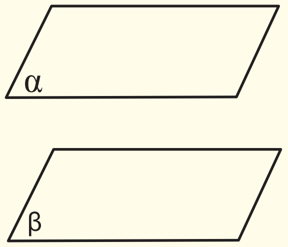
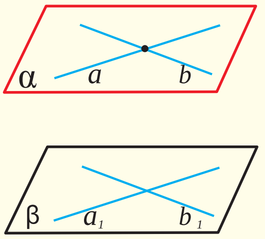
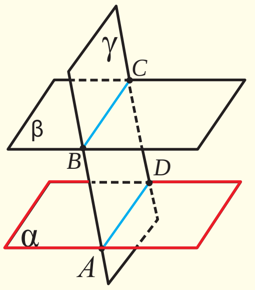
Keńislikte tuwrı sızıq hám tegisliklerdiń parallelligi

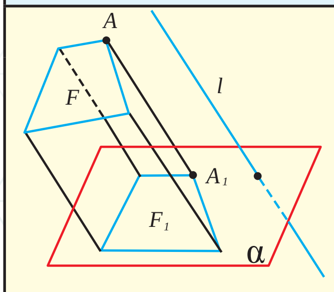
a tuwrı sızıq hám α tegislik	kóp ulıwma noqatlarǵa iye.	Tuwrı sızıq tegislikte jatadı: $a \subset \alpha$.
	bir ulıwma noqatqa iye.	Tuwrı sızıq tegislikti kesedi: $a \otimes \alpha$.
	ulıwma noqatqa iye emes.	Tuwrı sızıq tegislikke parallel: $a \parallel \alpha$.

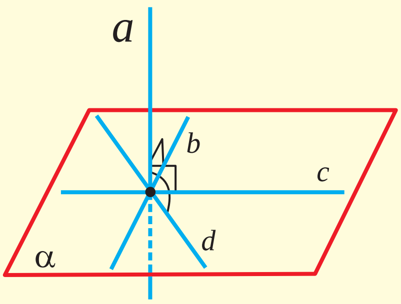
Anıqlaması	Belgileri	Qásiyetleri	
 Eger a tuwrı sızıq α tegislik penen ulıwma noqatqa iye bolmasa, *tuwrı sızıq hám tegislik parallel* dep ataladı hám $a \parallel \alpha$ tárizde belgilenedi.	 Eger a tuwrı sızıq - α tegislikte jatpasa hám $a \parallel b$, $b \subset \alpha$ bolsa, onda $a \parallel \alpha$ boladı.	 Eger b tuwrı sızıq - α hám β tegislikler kesilisiw sızıǵı, $a \subset \alpha$ hám $a \parallel \beta$ bolsa, onda $b \parallel a$ boladı.	 Eger b tuwrı sızıq – α hám β tegislikler kesilisiw sızıǵı, $a \parallel \alpha$ hám $a \parallel \beta$ bolsa, $a \parallel b$ boladı.

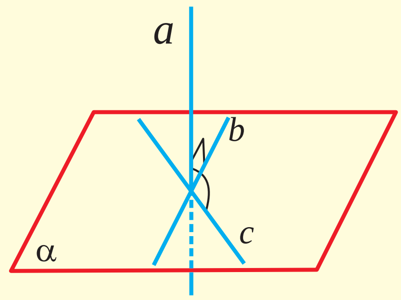
Keńislikte tegisliklerdiń parallelligi

α hám β tegislikler	Ulıwma noqatqa iye.	Kesilisedi: $\alpha \otimes \beta$.
	Ulıwma noqatqa iye emes.	Parallel: $\alpha \parallel \beta$.

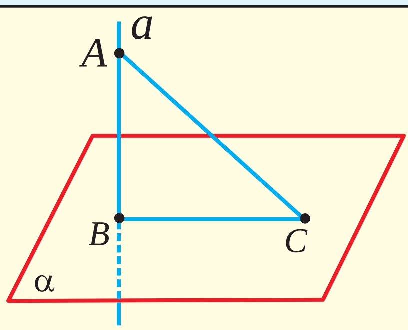
Anıqlaması	Belgileri	Qásiyetleri
 Kesilispeytuǵın α hám β tegislikler parallel tegislikler dep ataladı hám $\alpha \parallel \beta$ tárizde belgilenedi.	 Eger $a \subset \alpha$, $b \subset \alpha$, $a \otimes b$, $a_1 \subset \beta$, $b_1 \subset \beta$, $a_1 \otimes b_1$, $a \parallel a_1$, $b \parallel b_1$ bolsa, $\alpha \parallel \beta$ boladı.	 Eger $\alpha \parallel \beta$ hám γ kesiwshi tegislik, $\alpha \cap \gamma = AD$ hám $\beta \cap \gamma = BC$ bolsa, $AD \parallel BC$ boladı.

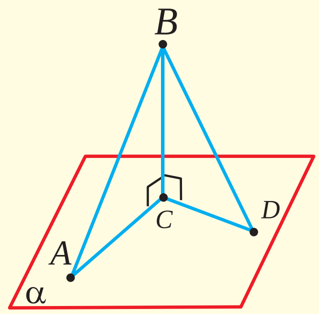
Parallel proekciyalaw		
Anıqlaması	Parallel proekciyalawda figuralardıń qásiyetleri	
	Saqlanadı	Saqlanbaydı
 F – figura, α – proekciyalaw tegisligi, l – proekciyalaw baǵdarı, F_1 – F figura proekciyası.	1)noqat noqatqa, tuwrı sızıq tuwrı sızıqqa, kesindi kesindige, úshmúyeshlik úshmúyeshlikke ótedi; 2) noqatlardıń tuwrı sızıqqa tiyisliligi; 3) noqatlardıń tuwrı sızıqqa salıstırǵanda jaylasıwı; 4) tuwrı sızıqlardıń parallelligi; 5) bir yamasa parallel tuwrı sızıqlarda jatqan kesindilerdiń teńligi (yamasa proporcionallıǵı)	1) kesindi uzınlıǵı; 2) múyesh shaması; 3) tuwrı sızıqlardıń perpendikulyarlıǵı; 4) múyeshler teńligi (proporcionallıǵı); 5) kesilisiwshi tuwrı sızıqlarda jatqan kesindilerdiń teńligi (proporcionallıǵı).

<table>
<tr><th colspan="2">Tuwrı sızıqtıń tegislikke perpendikulyarlıǵı</th></tr>
<tr><th>Anıqlaması</th><th>Belgisi</th></tr>
<tr><td>

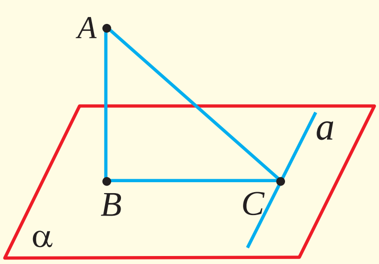
Eger qálegen $b \in \alpha$ ushın $a \perp b$ bolsa,
$a \perp \alpha$ dep ataladı.</td>
<td>

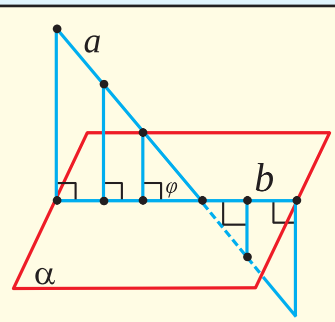
Eger $b \in \alpha$, $c \in \alpha$ ushın
$a \perp b$, $a \perp c$ bolsa, $a \perp \alpha$ boladı.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">Perpendikulyar hám qıya</th></tr>
<tr><th>Anıqlaması</th><th>Qásiyeti</th></tr>
<tr><td>

Eger $a \perp \alpha$, $AB \notin \alpha$ bolsa,
AB – α tegislikke A noqattan túsirilgen perpendikulyar; AC – qıya, BC – qıyanıń α tegislikke proekciyası.</td>
<td>

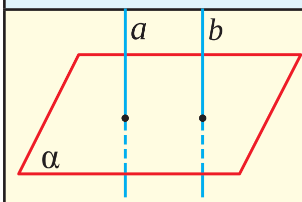
$BC < AB$, $BC < BD$.
Eger $AB = BD$ bolsa, $AC = CD$ boladı.
Eger $AC = CD$ bolsa, $AB = BD$ boladı.
Eger $AC > CD$ bolsa, $AB > BD$ boladı.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Úsh perpendikulyar haqqındaǵı teorema</th><th>Tuwrı sızıq hám tegislik arasındaǵı múyesh</th></tr>
<tr><td>

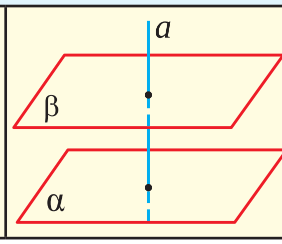
$AB \perp \alpha$
Eger $a \perp BC$ bolsa, $a \perp AC$ boladı.
Eger $a \perp AC$ bolsa, $a \perp BC$ boladı.</td>
<td>

b – a nıń α tegisliktegi proekciyası.
φ – a hám α tegislik arasındaǵı múyesh.</td></tr>
</table>

Tegisliklerdiń parallelligi hám perpendikulyarlığı arasındağı baylanıslar



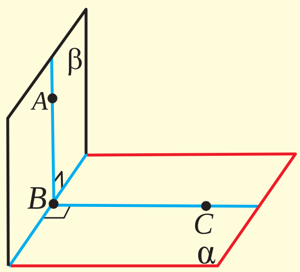
Eger $a \parallel b$, $\alpha \perp a$ bolsa, $\alpha \perp b$ boladı.
Eger $\alpha \perp a$, $b \perp \alpha$ bolsa, $a \parallel b$ boladı.



Eger $\alpha \parallel \beta$, $a \perp \beta$ bolsa, $a \perp \alpha$ boladı.
Eger $\alpha \perp a$, $\beta \perp a$ bolsa, $\alpha \parallel \beta$ boladı.

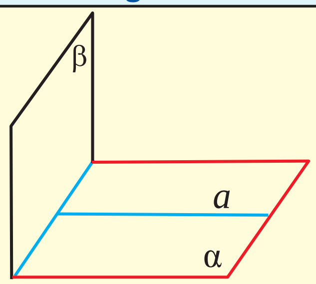
Tegisliklerdiń perpendikulyarlığı

Anıqlaması



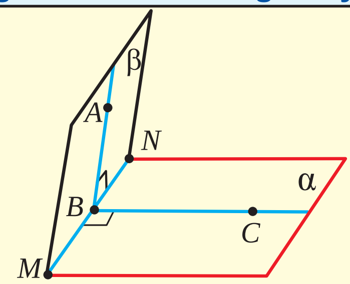
Eger $\angle ABC = 90^\circ$ bolsa, α hám β tegislikler perpendikulyar dep ataladı.

Belgisi

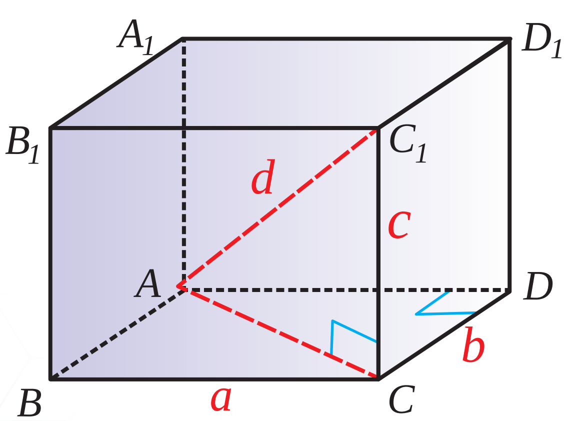


Eger $a \subset \alpha$ hám $a \perp \beta$ bolsa, $\alpha \perp \beta$ boladı.

Tegislikler arasındağı múyesh



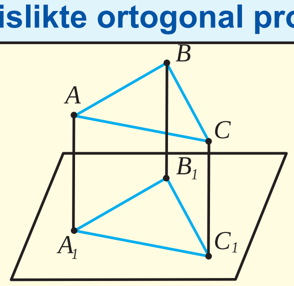
Eger $AB \perp MN$ hám $CB \perp MN$ bolsa, $\angle ABC$ – α hám β tegislikler arasındağı múyesh.



Ulıwmalasqan Pifagor teoreması

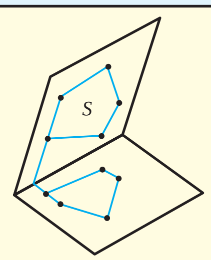
$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Keńislikte ortogonal proekciya



Ortogonal proekciyada: $l \perp \alpha$.
l – proekciyalaw bağıtı;
α- proekciyalaw tegisligi.

Kópmúyeshlik proekciyasınıń maydanı



$$S_1 = S \cdot \cos\varphi$$

S – kópmúyeshlik maydanı;
S_1 – kópmúyeshlik proekciyasınıń maydanı;
φ – kópmúyeshlik hám proekciya tegislikleri arasındağı múyesh.

O‘quv nashri

GEOMETRIYA

Umumiy o‘rta ta’lim maktablarining
10-sinfi uchun darslik

(Qoraqalpoq tilida)

Awdarmashı - Sarsenbay Gulmanov
Redaktor – Zamira Janibekova
TexnikalIq redaktor – Akmal Sulaymonov
Korrektor – Zulfiya Otambetova
Betlewshi dizayner Ixvoldin Salohitdinov
Súwretshi Umid Sulaymonov

Original-maketten basıwǵa ruqsat etilgen waqtı __.__.2022. Qaǵaz formatı 60x84 1/8.
“Arial” garniturası. Ofset baspa usılda basıldı. Shártli baspa tabaq 22,32.
Baspa tabaq 19,43. Nusqası __________. Buyurtpa N______.

Ijaraǵa beriletuǵın sabaqlıq jaǵdayın kórsetiwshi keste

№	Oqıwshınıń atı hám familiyasi	Oqıw jılı	Sabaqlıqtıń alınǵandaǵı jaǵdayı	Klass bas-shısınıń qolı	Sabaqlıqtıń tapsırǵan-daǵı jaǵdayı	Klass bas-shısınıń qolı
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Sabaqlıq ijaraǵa berilip oqıw jılı aqırında qaytarıp alınǵanda joqarıdaǵı keste klass basshısı tárepinen tómendegi bahalaw ólshemlerine tiykarlanıp toltırıladı:

Jańa	Sabaqlıqtıń birinshi ret paydalanıwǵa berilgendegi jaǵdayı.
Jaqsı	Kitaptıń sırtqı beti pútin, sabaqlıqtıń tiykarǵı bóliminen ajıratılǵan. Barlıq betleri bar, jırtılmaǵan, betleri almastırılmaǵan, betlerinde jazıw hám sızıq joq.
Qanaatlandırarlı	Kitaptıń sırtqı beti jelingen, biraz sızılıp, shetleri qayrılǵan, sabaqlıqtıń tiykarǵı bóliminen alınıp qalıw jaǵdayı bar, paydalanıwshı tárepinen qanaatlanarlı qálpine keltirilgen. Alınǵan betler qayta islengen, ayırım betler sızılǵan.
Qanaatlandırarsız	Kitaptıń sırtqı betine sızılǵan, jırtılǵan tiykarǵı bólimnen ajıratılǵan yamasa pútkilley joq, qanaatlandırarsız islengen. Betleri jırtılǵan, betleri tolıq emes, sızıp, boyap taslanǵan. Sabaqlıqtı qayta tiklewge bolmaydı.