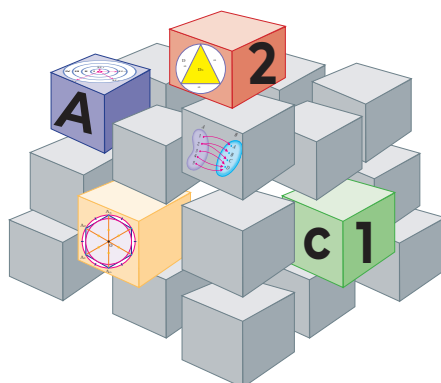


АЛГЕБРА

ВА ИБТИДОИ АНАЛИЗ

10



Китоби дарсӣ барои донишомӯзони синфи 10-уми
мактабҳои таълими миёнаи умумӣ

Вазорати таълими халқи Республикаи Ўзбекистон ба нашр
тавсия намудааст

Нашри нав

ТОШКАНД – 2022

УЎК 512(075.3)

КБК 22.144я72

А 83

Мураттибон:

*Адилбек Заитов, Раъно Хамраева, Бахтиёр Абдиев, Калмирза Сагидуллаев,
Умид Раҳмонов, Балҷан Уринбаева*

Эксперти байналхалқӣ:

Marcelo Staricoff

Муқарризон:

М.А.Мирзаахмедов – дотсенти фанни математикаи мактаби махсусонидашудаи ба номи

Ал Хоразмӣ, номзади илмҳои физика-математика;

Ж.А.Қўйчонов – омӯзгори фанни математикаи мактаби таълими миёнаи умумии
рақами 5-уми ноҳияи Хатирчи вилояти Навоӣ;

Д.Д.Ароев – дотсенти кафедраи математикаи Донишқадаи педагогии давлатии
Қўқанд, PhD.

Алгебра ва ибтидои анализ, синфи 10 (Матн): китоби дарсӣ /А. Заитов (ва диг.). – Тошканд: Маркази таълими Республика, 2022. – 192 саҳ.

Бо ҳамкориҳои ваколатхонаи ЮНИСЕФ дар Ўзбекистон
тайёр карда шудааст.

Дар асоси хулосаи институти математикаи ба номи В.И.Романовскийи академияи Илмҳои Ҷумҳурии
Ўзбекистон такмил дода шуд.

Макети оригиналӣ ва концепсияи дизайнӣ аз ҷониби маркази таълими Республика коркард шудааст.

Аз ҳисоби маблағҳои Бунёди мақсадноки китоби республика чоп шудааст.

АЛОМАТҲОИ ШАРТӢ:



– супоришҳои оддӣ



– супоришҳои мураккабтар



– супоришҳои мураккаб



– мавзӯҳои хурд

ISBN 978-9943-8460-8-1

© Маркази таълими Республика, 2022

МУНДАРИЧА

ТАКРОРЎ

ФУНКСИЯИ КВАДРАТЎ.....	6
НОБАРОБАРИИ КВАДРАТЎ.....	9
АЙНИЯТҲОИ ТРИГОНОМЕТРЎ.....	14
ПРОГРЕССИЯҲОИ АРИФМЕТИКЎ ВА ГЕОМЕТРЎ.....	20

БОБИ 1. ФУНКСИЯҲО

ФУНКСИЯ. УСУЛҲОИ ДОДА ШУДАНИ ФУНКСИЯ.....	24
СОҲАИ МУАЙЯНЎ ВА МАҶМУЎИ ҚИМАТҲОИ ФУНКСИЯ.....	27
АМАЛҲОИ АРИФМЕТИКЎ ОИД БА ФУНКСИЯҲО.....	32
ФУНКСИЯҲОИ МУРАККАБ, БАРЪАКС ВА ДАВРЎ.....	35
ХОСИЯТҲОИ ФУНКСИЯ.....	42
ТАБДИЛДИҲИИ ГРАФИКИИ ЭЛЕМЕНТАРИИ ФУНКСИЯ.....	47
МОДЕЛСОЗИИ ХАТТЎ ВА ГРАФИКЎ.....	55
КОРИ ЛОИҲАВЎ.....	58

БОБИ 2. МУОДИЛАҲОИ РАТСИОНАЛЎ ВА НОБАРОБАРИҲО. МУОДИЛАҲОИ ИРРАТСИОНАЛЎ

МУОДИЛАҲОИ РАТСИОНАЛЎ.....	61
СИСТЕМАҲОИ НОБАРОБАРИҲОИ РАТСИОНАЛЎ.....	70
НОБАРОБАРИҲОИ РАТСИОНАЛЎ.....	74
СИСТЕМАИ НОБАРОБАРИҲОИ РАТСИОНАЛЎ.....	78
МУОДИЛАҲОИ ИРРАТСИОНАЛЎ.....	81
СИСТЕМАИ МУОДИЛАҲОИ ИРРАТСИОНАЛЎ.....	87

БОБИ 3. ФУНКСИЯҲОИ НИШОНДИҲАНДАГӢ ВА ФУНКСИЯҲОИ ЛОГАРИФМӢ

ФУНКСИЯИ НИШОНДИҲАНДАГӢ.....	95
МУОДИЛАҲОИ НИШОНДИҲАНДАГӢ.....	99
НОБАРОБАРИҲОИ НИШОНДИҲАНДАГӢ.....	102
МАФҲУМИ ЛОГАРИФМ. ФУНКСИЯИ ЛОГАРИФМӢ.....	104
ТАБДИЛДИҲИИ АЙНИЯТИИ ИФОДАҲОИ ЛОГАРИФМӢ.....	109
МУОДИЛАҲОИ ЛОГАРИФМӢ.....	116
СИСТЕМАИ МУОДИЛАҲОИ НИШОНДИҲАНДАГӢ ВА ЛОГАРИФМӢ.....	119
НОБАРОБАРИҲОИ ЛОГАРИФМӢ.....	123
ТАТБИҚИ ФУНКСИЯҲОИ НИШОНДИҲАНДАГӢ ВА ЛОГАРИФМӢ	127

БОБИ 4. ФУНКСИЯҲОИ ТРИГОНОМЕТРӢ

ФУНКСИЯҲОИ ТРИГОНОМЕТРӢ. ҚАРАЁНҲОИ ДАВРӢ.....	133
ФУНКСИЯҲОИ ТРИГОНОМЕТРИИ БАРЪАКС.....	139
КОРИ ЛОИҲАВӢ.....	145

БОБИ 5. МУОДИЛА ВА НОБАРОБАРИҲОИ ТРИГОНОМЕТРӢ

МУОДИЛАИ ТРИГОНОМЕТРӢ.....	148
УСУЛҲОИ ҲАЛЛИ БАЪЗЕ МУОДИЛАҲОИ ТРИГОНОМЕТРӢ.....	153
НОБАРОБАРИҲОИ ТРИГОНОМЕТРӢ.....	157

БОБИ 6. НАЗАРИЯИ ЭҲТИМОЛИЯТ

ҲОДИСАҲОИ ТАСОДУФӢ.....	165
ТАЪРИФҲОИ ЭҲТИМОЛИЯТ.....	168

ТАҚРОРӢ.....	178
--------------	-----



ИЛОВАИ ТАЪЛИМӢ
БАРОИ КИТОБИ ДАРСИИ
«АЛГЕБРА ВА ИБТИДОИ
АНАЛИЗ»-И СИНФИ 10



ДАРСИ ВИДЕОӢ БАРОИ
КИТОБИ ДАРСИИ
«АЛГЕБРА ВА ИБТИДОИ
АНАЛИЗ»-И СИНФИ 10



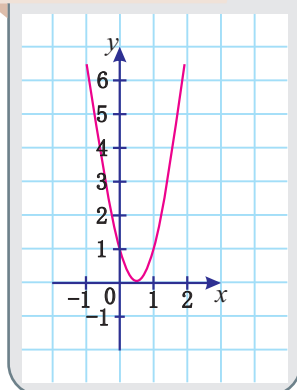
ТАКРОРЎ

- **ФУНКСИЯИ КВАДРАТЎ**
- **НОБАРОБАРИИ КВАДРАТЎ**
- **АЙНИЯТҲОИ ТРИГОНОМЕТРЎ**
- **ПРОГРЕССИЯҲОИ АРИФМЕТИКЎ ВА ГЕОМЕТРЎ**

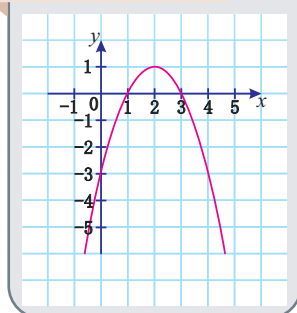
ТАКРОРЎ

ФУНКСИЯИ КВАДРАТЎ

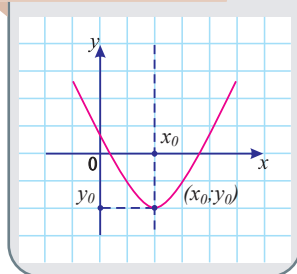
Расми 1



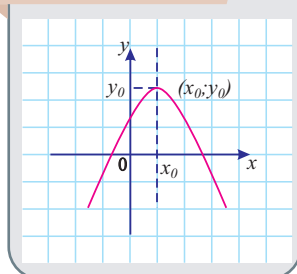
Расми 2



Расми 3



Расми 4



Таърифи функцияи квадратӣ

Таъриф.

Функцияи намуди $y = ax^2 + bx + c$ **функцияи квадратӣ** номида мешавад, ки дар он a, b, c ададҳои ҳақиқии дода шудаанд, $a \neq 0$, x – тағйирёбандаи ҳақиқӣ аст.

Масалан, функцияҳои зерин функцияҳои квадратӣ мебошанд:
 $y = 3x^2 + 2x - 1$, $y = -4x^2 - 5x$, $y = 6x^2 - 3$, $y = 4x^2$, $y = 2 - x^2$.

Графики функцияи квадратӣ

- Графикаи функцияи $y = ax^2 + bx + c$ хати қачест, ки онро **парабола** меноманд. Графикҳои функцияҳои $y = 4x^2 - 4x + 1$ ва $y = -x^2 + 4x - 3$ мутаносибан дар расмҳои 1 ва 2 нишон дода шудаанд.
- $y = ax^2 + bx + c$ шохаҳои парабола дар $a > 0$ (расми 3) ба боло ва дар $a < 0$ ба поён (расми 4) нисбат ба тири ордината равона карда шудааст.
- Координатаҳои $y = ax^2 + bx + c$ қуллай параболаи $(x_0; y_0)$ $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$ ё ки $y_0 = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ бо формулаҳои зерин ҳисоб карда мешаванд:
- Параболаи $y = ax^2 + bx + c$ нисбат ба хати рост симетрӣ буда, аз қуллай он мегузарад, ба тири ордината параллел аст.
- Абсиссаҳои нуқтаҳои буриши параболаи $y = ax^2 + bx + c$ бо тири Ox сифрҳои функцияи квадратӣ мебошанд. Барои ёфтани сифрҳои функцияи квадратӣ ҳалли муодилаи $ax^2 + bx + c = 0$ лозим аст.
- Ординатаи нуқтаи буриши графики функцияи квадратӣ бо тири ордината ба қимати функция дар нуқтаи $x = 0$ баробар аст.

Барои сохтани функцияи квадратии $y = ax^2 + bx + c$:

- Самти шохаҳои параболаро муайян кунед.
- Координатаҳои қуллай параболаи $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$ бо ёрии формулаҳо ёфта мешавад ва дар ҳамвории координатӣ ишора карда мешавад.
- Сифрҳои параболаро ёбед. Агар парабола сифр надошта бошад, яъне агар он бо тири Ox бурида наштавад, одатан ҳар ду нуқтаи парабола нишон дода мешавад, ки нисбат ба тири симметрия симетрӣ мебошанд. Масалан, шумо метавонед нуқтаҳоро бо координатҳо $(0; c)$ ва $(2x_0; c)$ муайян кунед.
- Нуқтаҳои сохташударо бо хати қачи ҳамвор пайваست кунед (агар лозим бошад, шумо метавонед ҳатто бештар нуқтаҳои параболаро созед).



Хосиятҳои функсияи квадратӣ

1. Соҳаи муайяни:

$$D(y) = (-\infty; \infty).$$

2. Маҷмӯи қиматҳо:

а) $a > 0$ бошад, $E(y) = [y_0; \infty)$.

б) $a < 0$ бошад, $E(y) = (-\infty; y_0]$.

3. Қиматҳои калонтарин ва хурдтарин:

а) агар $a > 0$ бошад, пас дар $x = x_0$ функсия ба қимати хурдтарини худ баробар ба $y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$ мерасад. Дар ин ҳолат, функсия аз ҳама муҳим нест.

б) агар $a < 0$ бошад, пас дар $x = x_0$ функсия ба қимати максималии худ баробар ба $y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$ мерасад. Дар ин ҳолат, функсия арзиши хурдтарин надорад.

4. Сифрҳои функсия:

Нишондоди $D = b^2 - 4ac > 0$ – ро дида мебароем.

а) агар $D = b^2 - 4ac > 0$ бошад, функсия дорои ду сифрҳо аст: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ ва $x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$.

б) агар $D = b^2 - 4ac = 0$ бошад, он гоҳ функсияи квадратӣ сифри ягона дорад: $x = \frac{-b}{2a}$.

с) агар $D = b^2 - 4ac < 0$ бошад, он гоҳ функсияи квадратӣ сифр надорад.

5. Фосилаҳои монотонӣ:

а) агар $a > 0$ бошад, он гоҳ функсияи $y = ax^2 + bx + c$ дар фосилаи $(-\infty; x_0]$ кам шуда, дар фосилаи $[x_0; \infty)$ зиёд мешавад;

б) агар $a < 0$ бошад, он гоҳ функсияи $y = ax^2 + bx + c$ дар фосилаи $(-\infty; x_0]$ зиёд шуда, дар фосилаи $[x_0; \infty)$ кам мешавад.

Мисоли 1. Бигзор, функсияи квадратии $y = 3x^2 + 3x - 6$ дода шавад. Хосиятҳои онро нависед ва график созед.

Ҳал.

1. Соҳаи муайяни: $D(y) = (-\infty; \infty)$.

2. $a = 3 > 0$ $x_0 = -\frac{1}{2}$, $y_0 = -6,75$, $E(y) = [-6,75; \infty)$.

3. Функсия ба қимати хурдтарини худ дар $x = -\frac{1}{2}$ $y = -6,75$ соҳиб мешавад. Функсия ба қимати калонтарини худ соҳиб намешавад.

4. $D = 81 > 0$, аз ин рӯ, функсия ду сифр дорад: $x_1 = 1, x_2 = -2$.

5. $x \in (-\infty; -2) \cup (1; \infty)$ ба $y > 0$ ва $x \in (-2; 1)$ ба $y < 0$ мешавад.

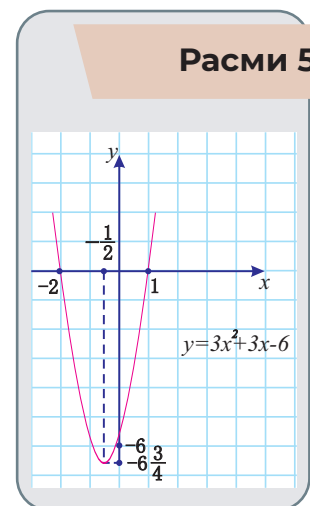
6. Функсия на ҷуфт аст ва на тоқ.

7. Функсия дар фосилаи $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right]$ кам мешавад ва дар фосилаи

$\left[-\frac{1}{2}; \infty\right)$ меафзояд.

Графики функсия дар расми 5 нишон дода шудааст.

Расми 5



ТАКРОРЎ

МИСОЛҲО

1. Кадоме аз функцияҳои зерин квадратӣ аст?
 а) $y = \frac{1}{3}x + 2$ б) $y = -x^2 + 5x + 1$ в) $y = x^2 - x^3$ д) $y = x^2$
2. Қимати функцияи $y = 4x^2 + 7x - 5$, дар $x = -3$ ҳолати будан ба чанд баробар аст?
3. Барои кадом қиматҳои x қимати функцияи $y = -3x^2 + x + 1$ ба -1 баробар аст?
4. Функцияи $y = -5x^2 + x + \sqrt{7}$ барои кадом қиматҳои x муайян карда шудааст?
5. Шумораи -5 -и функцияи $y = x^2 - 5x$ сифр аст?
6. Графикҳои функцияҳоро созед.
 а) $y = x^2$ б) $y = -x^2$ в) $y = 3x^2$
 д) $y = -3x^2 - 5$ е) $y = x^2 - 2x$ ф) $y = -2x^2 + 5x$
7. Сифрҳои функцияҳоро ёбед.
 а) $y = 2x^2 + 5x + 2$ б) $y = 3x^2 + 10x + 3$ в) $y = -2x^2 + x - 5$
8. Маҷмӯи қиматҳои функцияро ёбед.
 а) $y = x^2 + 2$ б) $y = (x - 4)^2 - 1$ в) $y = (x - 5)^2 + 3$ д) $y = 3 - 4x^2$
 е) $y = 3x - x^2$ ф) $y = 3x^2 + 2x$ г) $y = 2x^2 - 8x + 19$ ҳ) $y = -3x^2 - 12x + 1$
9. Қимати x -ро муайян кунед, ки дар он функция қимати калонтарин (ё хурдтарин) худро мегирад. Ин қимати функцияро ҳисоб кунед.
 а) $y = x^2 + 9x + 34$ б) $y = -9x^2 - 3x + 7$ в) $y = -2x^2 - 5x + 1$
10. Барои кадом қиматҳои t функцияи $y = 2x^2 - tx + 8$ сифр надорад?
11. Барои кадом арзишҳои x қиматҳои функцияи $y = 5x^2 - 4x - 1$ манфӣ мебошанд?
12. Оё функцияи $y = x^2 + 6x + 13$ қиматҳои манфӣ мегирад?
13. Оё функцияи $y = -x^2 - 4x - 5$ қиматҳои мусбӣ мегирад?
14. Графики функцияи $y = 6x^2 + 7x + 1$ -ро созед ва мувофиқи график он қиматҳои x -ро нишон диҳед, ки функция барои онҳо қиматҳои мусбат (мутаносибан манфӣ) мегирад.
15. Графики функцияи $y = -x^2 + 4x - 3$ -ро созед. Мувофиқи график фосилаҳои афзоиш ва камшавиро нишон диҳед.
16. Қиматҳои функцияҳои $y = x^2 - 22x + 27$ ва $y = 2x^2 - 20x + 3$ барои кадом қиматҳои x баробаранд?
17. Муодилаи параболаро нависед, агар маълум бошад, ки он аз нуқтаи $(-1; 6)$ мегузарад ва нуқтаи $(1; 2)$ қўллаи он аст.
18. Агар қўллаи параболai $y = x^2 + px + q$ дар нуқтаи $A(1; -2)$ бошад, p ва q -ро ёбед.
19. Агар қўллаи параболai $y = ax^2 + bx + c$ дар нуқтаи $M(-1; -7)$ бошад ва он тири ордината-ро дар нуқтаи $N(0; -4)$ пас a , b , c -ро ёбед.
20. Агар парабола аз нуқтаҳои $A(1; 4)$, $B(-1; 10)$, $C(2; 7)$ гузарад, он гоҳ функцияи $y = ax^2 + bx + c$ -ро ёбед.

НОБАРОБАРИИ КВАДРАТЇ

Таъриф.

Агар дар тарафи чапи нобаробарӣ сеъззогии квадратӣ ва дар тарафи дигар сифр бошад, он гоҳ чунин нобаробарӣ **нобаробарии квадратӣ** (ё **нобаробарии дараҷаи дуоми як тағйирёбанда**) номида мешавад.

Нобаробариҳои $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$ ($a \neq 0$) квадратӣ ва $a \neq 0$ мебошанд.

Ҳалли нобаробарӣ маҷмӯи ҳамаи қиматҳои тағйирёбанда мебошад, ки нобаробарию ба нобаробарии дурусти ададӣ табдил медиҳад.

Ҳалли нобаробарӣ ин ёфтани ҳалли он ё муқаррар кардани набудани ҳалли онҳо мебошад.

Муодилаи квадратиро бо роҳҳои зерин ҳал кардан мумкин аст.



Усули 1. Ҳалли нобаробарии квадратӣ бо роҳи кам кардани он ба системаи нобаробарии хаттӣ

Агар муодилаи $ax^2 + bx + c = 0$ ду решаи гуногун дошта бошад, пас аз гузориши тарафи чап ҳалли нобаробарӣ ба системаи нобаробарии хаттӣ овардан мумкин аст.

Мисоли 1. Нобаробарии $x^2 - 5x + 6 < 0$ -ро ҳал кунед.

Ҳал.

Тарафи чапи нобаробарию ба зарбкунандаҳо ҷудо мекунем:

$$(x-2)(x-3) < 0.$$

$$\text{Ҳолати 1: } \begin{cases} x-2 > 0 \\ x-3 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < 3 \end{cases} \Rightarrow x \in (2; 3).$$

$$\text{Ҳолати 2: } \begin{cases} x-2 < 0 \\ x-3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x > 3 \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset.$$

Ҷавоб: $(2; 3)$.



Усули 2. Ҳалли нобаробарии квадратӣ тавассути графики функцияи квадратӣ

Барои ҳалли нобаробарии квадратӣ, шумо метавонед графики функцияи квадратии мувофиқро кашед ва баъд фосилаҳоеро, ки дар он нобаробариҳои зарурӣ қонеъ мешаванд, муайян кунед.

Барои ба таври графикӣ ҳал кардани нобаробарии квадратӣ чунин амал кардан мумкин аст:

1) самти шохаи параболаро муайян мекунад;

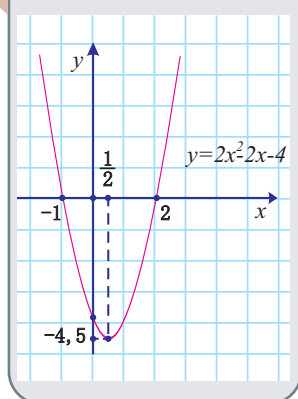
2) сифрҳои функцияро (агар мавҷуд бошад) ё набудани онҳоро муқаррар мекунад;

3) $y = ax^2 + bx + c$ нақшаи параболаро созад;

4) мувофиқи график фосилаҳоеро муайян кунед, ки дар онҳо графики функция нисбат ба тири абсисса баланд ё пасттар аст.

ТАКРОРЎ

Расми 1



Мисоли 2. Нобаробарии $2x^2 - 2x - 4 \geq 0$ -ро ба таври графикӣ ҳал кунед (расми 1).

Ҳал. Графики функцияи $y = 2x^2 - 2x - 4$ -ро месозем. Аввал қуллай параболаро меёбем:

Сипас, дискриминант ..., -ро ҳисоб карда, сифрҳои параболаро меёбем:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{4} = \frac{1}{2}; \quad y_0 = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} - 4 = -4,5.$$

Азбаски графики функция дар фосилаи $(-1; 2)$ зери тири абсциссаҳо ва дар фосилаи $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$ аз тири абсциссаҳо ҷойгир шудааст, пас бо назардошти қатъӣ набудани нобаробарӣ, мо ҳалли худро ба даст меорем.

$$D = b^2 - 4ac = 4 + 32 = 36,$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{4} = \frac{2 \pm 6}{4}, \quad x_1 = -1 \quad x_2 = 2$$

Ҷавоб: $(-\infty; -1] \cup [2; \infty)$.

Ҳангоми ҳалли графикии нобаробарӣ координатаҳои қуллай параболаро ёфтан тамоман шарт нест ва инчунин дар график нишон додани нуқтаҳои буриши парабол бо тири Оу муҳим нест. Муҳимтар аз ҳама ин донишдони самти шохаҳои парабол ва дорони сифр будани функция мебошад.



Усули 3. Ҳалли нобаробарии квадратӣ бо усули фосилавӣ

Агар дар фосилаи $(a; b)$ қаламро аз коғаз набардошта, графики функцияи $y = f(x)$ -ро кашидан мумкин бошад, он гоҳ ин функция дар фосилаи $(a; b)$ пайваستا номида мешавад.

Масалан, функцияҳои $y = kx + b$, $y = ax^2 + bx + c$ дар соҳаҳои муайянии худ пайваस्ताанд.

Мо як хусусияти муҳими функцияҳои пайвастаро бе далел қабул мекунем.

Агар функцияи $f(x)$ дар фосилаи $(a; b)$ пайваستا бошад ва нопадид нашавад, он гоҳ қиматҳои функция дар ин фосила аломати якхела доранд, яъне функция аломати худро дар ин фосила нигоҳ медорад.

Соҳаи муайянии таърифи функцияи квадратиро на бештар аз се фосила $(-\infty; x_1)$, $(x_1; x_2)$, $(x_2; \infty)$, тақсим кардан мумкин аст, дар ин ҷо – сифрҳои функцияи квадратӣ, $x_1 < x_2$ мебошанд. Дар ҳар яке аз ин фосилаҳо функцияи квадратӣ пайваستا буда, нест намешавад, яъне аломати худро нигоҳ медорад. Ин асоси усули *фосилавӣ* барои ҳалли нобаробариҳои квадратӣ бо як номаълум мебошад.

Истифодаи усули фосилавӣ барои ҳалли нобаробариҳои квадратии шакли

$ax^2 + bx + c > 0$ (≥ 0) ва $ax^2 + bx + c < 0$ (≤ 0) фаҳмонед.

Ҳолати 1. $D > 0$. Дар ин ҳолат, функцияи квадратӣ ду сифр дорад x_1 ва x_2 (фарз мекунем, ки $x_1 < x_2$) онҳо соҳаи муайянии функцияи квадратиро ба се қисм тақсим мекунанд $(-\infty; x_1)$, $(x_1; x_2)$, $(x_2; \infty)$ ва дар ҳар яке аз ин фосилаҳо қиматҳои функция аломати доимӣ доранд (“+” ё ки “-”).

Аломатҳои қиматҳои функцияи квадратиро дар фосилаҳои додашуда бо усулҳои гуногун ёфтан мумкин аст:

1) аломати қиматҳои функцияи $y = ax^2 + bx + c$ дар ҳар як фосилаи $(-\infty; x_1)$, $(x_2; \infty)$ бо аломати коэффисиенти a мувофиқ меояд; аломати қиматҳои функцияи $y = ax^2 + bx + c$ дар фосилаи $(x_1; x_2)$ ба аломати коэффисиенти a муқобил аст;

НОБАРОБАРИИ КВАДРАТИ

2) аломати қиматҳои функсияро дар нуқтаи "қулай" дар ҳар як фосила муайян кардан мумкин аст.

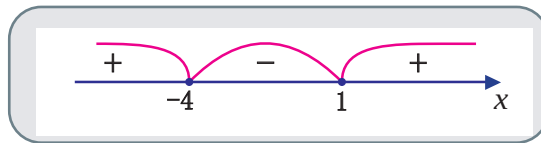
3) функсияи $y = ax^2 + bx + c$ ҳамчун $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ навишта ва пас аз ҳар як фосила аломатҳои зарбкунандаҳои хаттиро ёфтан мумкин аст.

Мисоли 3. Нобаробарии $x^2 + 3x - 4 \leq 0$ -ро бо усули фосилавӣ ҳал кунед.

Ҳал. Тарафи чапи нобаробарию ба зарбкунандаҳо ҷудо мекунем ва сифрҳои онро меёбем: -4 ва 1 . $(x + 4)(x - 1) \leq 0$.

Нуқтаҳои ёфтшударо дар тири ададӣ қайд карда, тири ададию ба фосилаҳо тақсим мекунем. Аломати функсияро дар ҳар як фосила муайян мекунем.

Адомати функсияи $y = x^2 + 3x + 4$ -ро:



Ҷавоб: $[-4; 1]$.

Ҳолати 2. Бигзор $D = 0$ бошад. Он гоҳ функсияи $y = ax^2 + bx + c$ танҳо дар як нуқтаи x_0 нест мешавад. Нуқтаи x_0 тири координатаро ба ду фосила $(-\infty; x_0)$ ва $(x_0; \infty)$ тақсим мекунад. Барои ҳар як $x \neq x_0$ аломати қиматҳои функсияи квадратии $y = ax^2 + bx + c$ бо аломати коэффисиенти a мувофиқ меояд (расми 2, 3).

Ҳолати 3. $D < 0$. Дар ин ҳолат, функсияи $y = a$ сифр надорад.

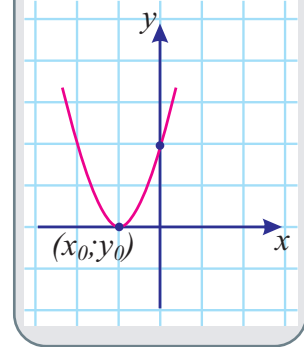
Дар ин ҳолат, барои қиматҳои ихтиёрии x , қиматҳои функсия як аломатро бо аломати коэффисиенти a мегиранд:

- 1) агар $a > 0$ он гоҳ $ax^2 + bx + c > 0$; дар ҳамаи қиматҳои x ;
- 2) агар $a < 0$ то $ax^2 + bx + c < 0$ дар ҳамаи қиматҳои x .

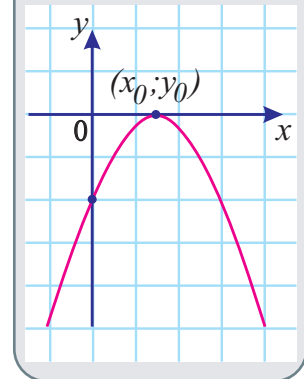
Доништан ва ба кор бурда тавонистани далелҳои зерин муҳим аст:

- 1) барои $a > 0$ ва $D < 0$ ҳалли ҳар як нобаробариҳои $ax^2 + bx + c > 0$ ва $ax^2 + bx + c \geq 0$ маҷмӯи ҳамаи ададҳои ҳақиқӣ мебошад (расми 4);
- 2) барои $a > 0$ ва $D < 0$ ҳалли ҳар як нобаробариҳои $ax^2 + bx + c < 0$ ва $ax^2 + bx + c \leq 0$ маҷмӯи ҳамаи ададҳои ҳақиқӣ мебошад (расми 4);
- 3) барои $a < 0$ ва $D < 0$ ҳалли ҳар як нобаробариҳои $ax^2 + bx + c > 0$ ва $ax^2 + bx + c \geq 0$ маҷмӯи холист (расми 5);
- 4) $a < 0$ ва $D < 0$ буданаш $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$ маҷмӯи ҳамаи ададҳои ҳақиқӣ мебошад (расми 5).

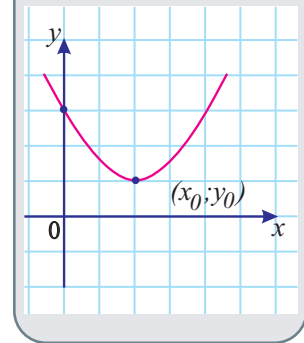
Расми 2



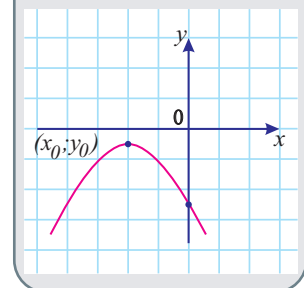
Расми 3



Расми 4



Расми 5



ТАКРОЎ

МИСОЛҲО

1. Кадоме аз ададҳои 0; -2; 3 нобаробарии $-4x^2+5x-5>0$ -ро қаноат мекунад?
2. Нобаробариҳои зеринро бо роҳи овардани онҳо ба системаи нобаробарии хаттӣ ҳал кунед.

a) $(x+4)(2x-3)>0$	b) $x^2+10x-11<0$
c) $(5x-2)(4x+3)\leq 0$	d) $2x^2-5x+2\geq 0$
3. Оё нобаробарҳо баробаранд?

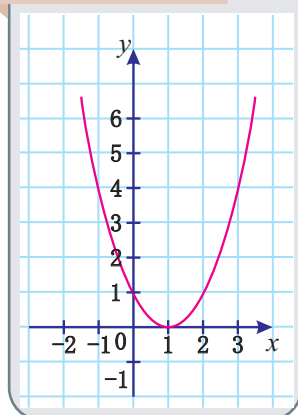
a) $5x^2>2x$ ва $5x>2$	b) $3x^3<7x^2$ ва $3x<7$	c) $\frac{x^2-1}{x}>0$ ва $(x^2-x)(x+1)>0$
------------------------	--------------------------	--
4. Нобаробариҳо ҳал кунед.

a) $x^2>0$	b) $4x^2\geq 0$	c) $x^2<0$
d) $-x^2\leq 0$	e) $x^2+7>0$	f) $5x^2+11\leq 0$
g) $-x^2-5>0$	h) $3x^2-2x<0$	i) $-4x^2+11x<0$
j) $x^2-9x+20<0$	k) $x^2-10x+25>0$	l) $-x^2+6x-8>0$
m) $3x^2-x+2\geq 0$	n) $-9x^2+24x+20>0$	o) $-7\cdot(3-x)^2>0$
5. Якчанд нобаробарии квадратино, ки ҳалли он холиҳо мебошад, созед.

a) $(-\infty; -3)\cup(6; \infty)$	b) $(-\infty; \infty)$
-----------------------------------	------------------------
6. Дарозии сегменти тири Ox - ро, ки ҳалли нобаробарии $x^2+9x\leq -14$ мебошад, ёбед.
7. Нобаробарии $2x^2+7x-15<0$ чанд ададро қонеъ мекунад?
8. Нобаробариҳоро бо усули фосилавӣ ҳал кунед.

a) $x^2+5x-6>0$	b) $-x^2+x+2<0$	c) $x^2+3x+7>0$	d) $x^2+3x+7\leq 0$
e) $-2x^2+5x+3>0$	f) $6x^2-x-2<0$	g) $2x^2+5x+9\leq 0$	h) $49x^2-28x+4\leq 0$

Расми 6



9. Нобаробариҳоро ҳал кунед.

a) $8x^2+3x-5\geq 0$	b) $5x^2-12x+8\leq 0$
c) $49x^2-70x+25>0$	d) $(2x^2+3x+4)(x+3)\geq 0$
e) $(7+6x-x^2)(3x-5)<0$	
10. Нобаробариҳо ба воситаи графики функцияи квадратӣ ҳал кунед.

a) $2x^2+5x-3>0$	b) $4x^2-9x-90>0$
------------------	-------------------
11. Дар расми 6 графики функцияи $y = ax^2 + bx + c$ нишон дода шудааст. Ҳалли нобаробариҳои зеринро ёбед.

a) $ax^2+bx+c>0$	b) $ax^2+bx+c\leq 0$
------------------	----------------------

12. Суммаи ҳамаи ададҳои бутун, ки нобаробариҳо қонеъ мекунад, ёбед.

a) $2x^2 - 9x + 4 < 0$ b) $\frac{x-1}{4} + \frac{3-2x}{2} > \frac{3x+x^2}{8}$
 c) $(5x+7)(x-2) \leq 21x^2 - 11x + 3$

13. $3x(x-2) - 2x(x+4) - (x-16) \leq 0$ чанд адади бутун аз порчаи $[0;9]$ нобаробариҳо қонеъ мекунад?

14. Аз графикаи функцияи $y = -x^2 + 4x - 3$ истифода бурда, ҳалли нобаробариҳои зеринро ёбед.

a) $-x^2 + 4x - 3 > 0$ b) $-x^2 + 4x - 3 \geq 0$ c) $-x^2 + 4x - 3 < 0$ d) $-x^2 + 4x - 3 \leq 0$

15. Барои кадом қиматҳои a муодилаи $ax^2 + 2ax + 4 = 0$ реша надорад?

16. Нобаробариҳо ҳал кунед: $(x-1)^2(x^2-2) < (x-1)^2(6-2x)$

17. Функцияи $f(x) = (x-1)^4(x+1)^3x^2$

a) $f(x) < 0$ b) $f(x) \leq 0$ c) $f(x) > 0$ d) $f(x) \geq 0$

дода шудааст. Ҳама қиматҳои x -ро барои он ёбед.

18. Нобаробариҳо ҳал кунед:

a) $x^2 - 2(b-c)x + a^2 > 0$, дар ҳоле ки a, b, c ҳо - тарафҳои секунҷа мебошанд;

b) $x^2 + (a^2 + b^2 - c^2)x + a^2b^2 > 0$, дар ҳоле ки a, b, c - паҳлӯҳои секунҷа мебошанд.

19. Агар $a^2 + 12b < 0$ бошад, он гоҳ нобаробариҳои $3x^2 - b \leq ax$ -ро ҳал кунед.

20. Агар $b > 0,05a^2$ бошад, пас нобаробариҳои $5x^2 - ax + b > 0$ -ро ҳал кунед.

21. Агар $b^2 \leq 4ac$ ва $a+c > b$ бошад, он гоҳ нобаробариҳои $ax^2 + bx + c \leq 0$ -ро ҳал кунед.

22. Дар кадом қиматҳои c графикҳои функцияҳои $y = cx^2 + x + c$ ва $y = cx + 1 - c$ нуқтаҳои умумӣ надоранд?

23. Дар кадом қиматҳои p графикҳои функцияҳои $y = px^2 - 24x + 1$ ва $y = 12x^2 - 2px - 1$ ҳамдигарро намебурранд?

24. Дар кадом қиматҳои a решаҳои муодилаи $x^2 + 3x + a = 0$ -ро қонеъ мекунад? $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} + 1 > 0$

25. Дар кадом қиматҳои b решаҳои муодилаи $x^2 - 2bx + b + 6 = 0$:

a) манфӣ мебошанд; b) мусбат мебошанд; c) аломатҳои гуногун доранд?

26. Дар кадом қиматҳои a ҳамаи ададҳои ҳақиқӣ нобаробариҳо қонеъ мекунад?

a) $x^2 - (a+2)x + 8a + 1 > 0$ b) $\frac{1}{24}x^2 + ax - a + 1 > 0$

27. Дар кадом қиматҳои b нобаробариҳо ҳал надорад?

a) $x^2 + 2bx + 1 < 0$ b) $bx^2 + 4bx + 5 < 0$ c) $bx^2 + (2b+3)x + b - 1 \geq 0$

ТАКРОРЎ

АЙНИЯТҲОИ ТРИГОНОМЕТРЎ

Айниятҳои асосии тригонометрӣ

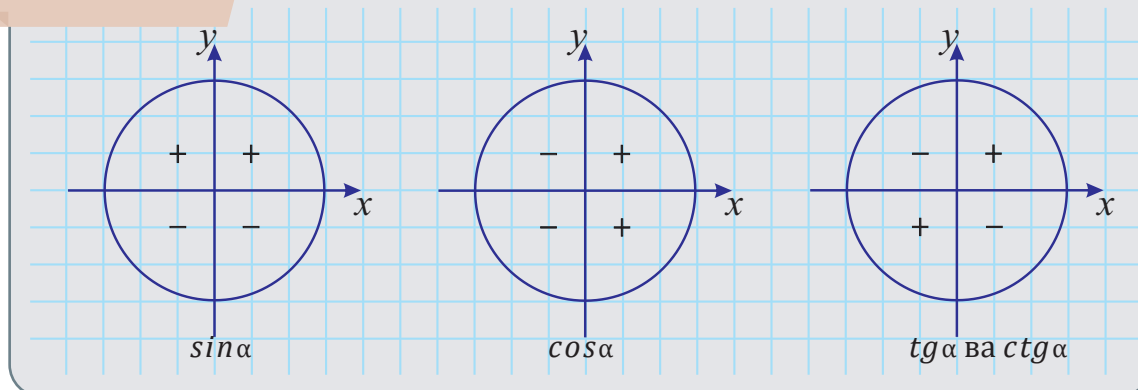
1. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
2. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \cos \alpha \neq 0$
3. $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \sin \alpha \neq 0$
4. $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$
5. $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \cos \alpha \neq 0$
6. $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \sin \alpha \neq 0$

Қиматҳои синус, косинус, тангенс ва котангенс баъзе кунҷҳо

α	$0^\circ (0)$	$30^\circ \left(\frac{\pi}{6}\right)$	$45^\circ \left(\frac{\pi}{4}\right)$	$60^\circ \left(\frac{\pi}{3}\right)$	$90^\circ \left(\frac{\pi}{2}\right)$	$180^\circ (\pi)$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Мавҷуд нест	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	Мавҷуд нест	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	Мавҷуд нест

Аломатҳои синус, косинус, тангенс ва котангенс

Расми 1



Синус, косинус, тангенс ва котангенс кунҷҳои α ва $(-\alpha)$

1. $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$
2. $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$
3. $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$
4. $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$



Формулаҳои табдилдиҳӣ

	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$2\pi - \alpha$	$2\pi + \alpha$
$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$
$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$

Дар формулаҳои табдилдиҳӣ ба намунаи зерин диққат диҳед: агар фарз кунем, ки α ба чоряки якум тааллуқ дорад, пас барои кунҷҳои $\pi \pm \alpha$, $2\pi \pm \alpha$ функцияҳо тағйир намеёбанд ва барои кунҷҳои $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ синус ба косинус табдил меёбад, косинус - ба синус, тангенс - ба котангенс, котангенс - ба тангенс.

Масалан, $\sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2} \pm \alpha\right)$ азбаски шумораи $\frac{\pi}{2}$ - тоқ аст, 3 аст, кунҷи $\frac{3\pi}{2} - \alpha$ ба чоряки сеюм тааллуқ дорад ва аломати $\sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2} \pm \alpha\right)$ манфӣ аст.

Мисоли 1. Ҳисоб кунед.

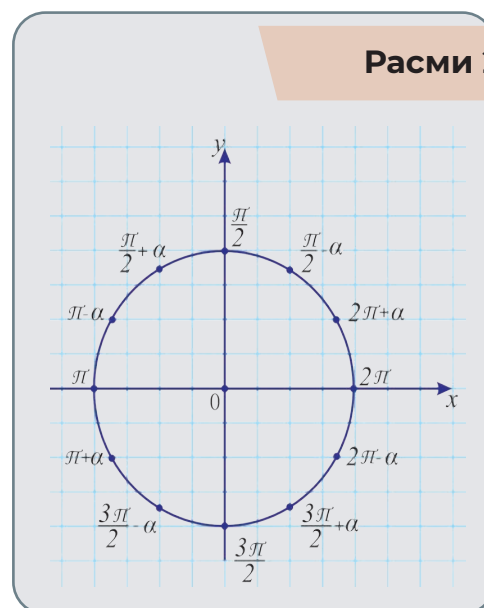
a) $\sin 855^\circ = \sin (9 \cdot 90^\circ + 45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos 2025^\circ = \cos (22 \cdot 90^\circ + 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\operatorname{tg} 1680^\circ = \operatorname{tg} (18 \cdot 90^\circ + 60^\circ) = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$

d) $\operatorname{ctg} 1200^\circ = \operatorname{ctg} (13 \cdot 90^\circ + 30^\circ) = -\operatorname{tg} 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Расми 2



ТАКРОРЎ

◆ Формулаҳои иловагӣ

$$1. \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$$

$$2. \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$$

$$3. \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

$$4. \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$$

$$5. \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$$

$$6. \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$$

$$7. \operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}$$

$$8. \operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta + 1}{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha}$$

◆ Формулаҳои кунчи дукарата

$$1. \sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha$$

$$2. \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$3. \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$4. \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg}\alpha}$$

◆ Формулаҳо барои табдил додани ҷамъ ва фарқияти ба ҳосили зарб

$$1. \sin\alpha + \sin\beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$2. \sin\alpha - \sin\beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$3. \cos\alpha + \cos\beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$4. \cos\alpha - \cos\beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$5. \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}$$

$$6. \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}$$

$$7. \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}$$

$$8. \operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = \frac{-\sin(\alpha - \beta)}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}$$

◆ Формулаҳо барои табдил додани ҳосили зарби ба ҷамъ

$$1. \sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

$$2. \cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$$

$$3. \sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

◆ Формулаҳои камшавӣ

$$1. \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$2. \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$3. \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$$

$$4. \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}$$



Функцияҳои тригонометрии ним аргумент

$$1. \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

$$2. \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$$

$$3. \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

$$4. \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}$$

$$5. \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$6. \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$$



Формулаҳо барои ифодаи $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ рӯи $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$

$$1. \sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$2. \cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$3. \operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$$

МИСОЛҲО

1. Агар $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{3}{4}$ ва $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ пас, $\cos \alpha$ -ро ёбед.

2. Агар $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{5}$ ва $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ бошад, $\sin \alpha$ -ро ёбед.

3. Агар $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{2}$ пас, $\frac{2\sin \alpha + 5\cos \alpha}{3\sin \alpha - 4\cos \alpha}$ -ро ёбед.

4. Содда кунед.

a) $\frac{2\sin^2 \alpha - 1}{2\cos^2 \alpha - 1}$

b) $\frac{\operatorname{ctg}(2\sin^2 \alpha + \operatorname{tg} \alpha)}{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2}$

c) $\frac{1 - \cos^2 \alpha}{\sin^4 \alpha} - \operatorname{ctg}^2 \alpha$

d) $2 - \frac{1 - \sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha}$

5. Ҳисоб кунед.

a) $4\cos 150^\circ - \sin 240^\circ - 3\operatorname{tg} 210^\circ$

b) $2\cos 135^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{ctg} 240^\circ$

c) $\sin 300^\circ - 3\cos 135^\circ + 2\cos 210^\circ$

d) $\operatorname{tg} 150^\circ - \operatorname{ctg} 315^\circ + 5\sin 135^\circ$

6. Ҳисоб кунед.

a) $\operatorname{tg} \frac{7\pi}{6} - 2\operatorname{tg} \frac{5\pi}{3} + 3\operatorname{tg} \frac{11\pi}{6}$

b) $2\cos \frac{4\pi}{3} + \sin \frac{5\pi}{4} - \cos \frac{4\pi}{3}$

c) $20\operatorname{ctg} \frac{3\pi}{2} - \sin \frac{2\pi}{3} + \cos \frac{4\pi}{3}$

d) $\operatorname{ctg} \frac{7\pi}{4} + 2\operatorname{ctg} \frac{4\pi}{3} - 2\cos \frac{5\pi}{6}$

7. Содда кунед.

a) $\frac{1 - \operatorname{tg}(360^\circ - \alpha)\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(270^\circ - \alpha) + \operatorname{tg} \alpha}$

b) $\frac{\cos(90^\circ + \alpha) + \sin(90^\circ - \alpha)}{\cos(270^\circ - \alpha) + \cos(180^\circ + \alpha)}$

ТАКРОЙ

8. Содда кунед:

$$a) \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}\right) - \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\beta}{2}\right)}$$

$$b) \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2a\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2a\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2a\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 2a\right)}$$

9. Айниятро исбот кунед:

$$a) \frac{\sin(\pi - 2\alpha) - 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\sin^2(\pi + \alpha) - \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)} = 2\operatorname{ctg}\alpha$$

$$b) \frac{\sin^4\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) - \cos^2(2\alpha + \pi)}{1 - 3\cos(2\alpha + \pi)} = \frac{\sin^2\alpha}{2}$$

10. Ҳисоб кунед:

$$a) \sin(-43^\circ)\cos 88^\circ + \cos(-43^\circ)\sin 88^\circ$$

$$b) \cos 11^\circ \cos 19^\circ - \sin 19^\circ \sin 11^\circ$$

11. Ҳисоб кунед:

$$a) \sin \frac{2\pi}{7} \cos \frac{3\pi}{14} + \cos \frac{2\pi}{7} \sin \frac{3\pi}{14}$$

$$b) \frac{1 + \operatorname{tg} 33^\circ \operatorname{tg} 78^\circ}{\operatorname{tg} 78^\circ - \operatorname{tg} 33^\circ}$$

12. Ҳисоб кунед:

$$a) \cos\left(-\frac{19\pi}{36}\right)\cos \frac{7\pi}{9} - \sin \frac{7\pi}{9} \sin\left(-\frac{19\pi}{36}\right)$$

$$b) \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{11} \operatorname{tg} \frac{5\pi}{66}}{\operatorname{tg} \frac{5\pi}{66} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{11}}$$

13. Содда кунед:

$$a) \cos(\alpha - \beta) - \sin\alpha \sin\beta$$

$$b) \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)$$

$$c) \sin 4\alpha \cos \alpha - \cos 4\alpha \sin \alpha$$

$$d) \cos \alpha \cos 2\alpha + \sin 2\alpha \sin \alpha$$

$$e) \frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha$$

$$f) \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha$$

14. a) Агар $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ва, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ пас, $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$ -ро ёбед.

b) Агар $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ва, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ пас, $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$ -ро ёбед.

15. Ҳисоб кунед:

$$a) \frac{6\sin 10^\circ \cos 10^\circ}{\sin 20^\circ}$$

$$b) \frac{\sin 88^\circ}{\sin 22^\circ \cos 22^\circ \cos 44^\circ}$$

$$c) \sin \frac{\pi}{12} \left(2\sin^2 \frac{\pi}{24} - 1 \right)$$

16. a) Агар $\cos \alpha = 0,4$ пас, $\cos 2\alpha$ -ро ёбед.

b) Агар $\sin \alpha = -0,7$ пас, $\cos 2\alpha$ -ро ёбед.

17. а) Агар $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ва $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ пас, $\sin 2\alpha$ -ро ёбед.

б) Агар $\sin \alpha = \frac{1}{5}$ ва $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ пас, $\sin 2\alpha$ -ро ёбед.

18. Содда кунед:

а) $2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} (\cos \alpha - 1)$ б) $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$

19. Агар $\operatorname{tg} \alpha = -2$ пас, $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$, $\operatorname{ctg} 2\alpha$ -ро ёбед.

20. а) $\cos 123^\circ \operatorname{tg} 231^\circ \sin 312^\circ$ аломати ифодаро муайян кунед.

б) $\sin \frac{1}{3} \cos \frac{7}{8} \operatorname{tg} 4 \operatorname{ctg} 5,7$ аломати ифодаро муайян кунед.

21. Муқоиса кунед: $\sin 200^\circ$ ва $\sin(-200^\circ)$.

22. Оё баробарии $\sin \alpha = \frac{12}{13}$ ва $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ ҳар ду дар як вақт ҳақиқӣ буда метавонанд?

23. Айниятро исбот кунед:

а) $\left(\sin \alpha + \frac{1}{\sin \alpha} \right)^2 + \left(\cos \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} \right)^2 - (\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha) = 7$ б) $\frac{\operatorname{tg} 3\alpha}{\operatorname{tg}^2 3\alpha - 1} \cdot \frac{1 - \operatorname{ctg}^2 3\alpha}{\operatorname{ctg} 3\alpha} = 1$

24. Ифодаро содда кунед:

а) $\frac{1 - \operatorname{ctg}^2(-\alpha)}{\cos \alpha + \sin(-\alpha)} \cdot \sin(-\alpha) + \operatorname{ctg}(-\alpha)$ б) $\frac{\sin(\alpha - \beta) - \sin(\beta - \alpha)}{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\beta - \alpha)}$

25. Айниятро исбот кунед:

а) $\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right)$ б) $2 \sin 2\alpha \cos 5\alpha = \sin 7\alpha - \sin 3\alpha$.

26. $\cos \alpha = \frac{2}{3}$; $\sin \beta = -\frac{\sqrt{7}}{4}$; $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$; $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$ ёбед, агар $\cos(\alpha + \beta)$ -ро ёбед.

27. Айниятро исбот кунед: $\frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$.

28. Ҳисоб кунед: $\sin(-300^\circ) \cos(-135^\circ) \operatorname{tg}(-210^\circ) \operatorname{ctg}(-120^\circ)$.

29. Агар $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{2}{3}$ пас, $\sin \alpha \cos \alpha$ -ро ёбед.

30. Агар $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{3}$ ва $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ пас, $\sin \alpha + \cos \alpha$ -ро ёбед.

ТАКРОРЎ

ПРОГРЕССИЯҲОИ АРИФМЕТИКӢ ВА ГЕОМЕТРӢ

◆ Прогрессияи арифметикӣ

1. $a_{n+1} = a_n + d, n \in N;$
2. $a_n = a_1 + (n-1)d, n \in N;$
3. $a_n = a_k + (n-k)d, n, k \in N, n > k;$
4. $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, n \in N;$
5. $a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}, n, k \in N, n > k;$

6. Барои $\{a_n\}$ -аъзои прогрессияи арифметики баробарии $\{a_n\}$ $a_n + a_m = a_k + a_l$ ҷой дорад, дар ин ҷо $n + m = k + l$;

7. $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2};$
8. $S_n = \frac{(2a_1 + (n-1)d)n}{2}$ агар $d = 0$ бошад, пас, $S_n = a_1 \cdot n$;
9. $S_n = \frac{(2a_1 + (n-1)d)n}{2}.$

◆ Прогрессияи геометрӣ

1. $b_{n+1} = b_n \cdot q, n \in N;$
2. $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, n \in N;$
3. $b_n = b_k \cdot q^{n-k}, n, k \in N$ ва $n > k$;
4. $b_n^2 = b_{n-k} \cdot b_{n+k}, n, k \in N, n > k;$

5. Барои $\{b_n\}$ -аъзои прогрессияи арифметики баробарии $b_n \cdot b_m = b_k \cdot b_l$ ҷой дорад, дар ин ҷо $n + m = k + l$;

6. $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}, q \neq 1$, агар $q = 1$ пас, $S_n = b_1 \cdot n$;
7. $S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1}, q \neq 1;$

8. Суммаи (ҳамаи истилоҳҳо) прогрессияи геометрии беохир камшаванда:

$$S = \frac{b_1}{1-q}, |q| < 1, q \neq 0.$$

ПРОГРЕССИЯҲОИ АРИФМЕТИКӢ ВА ГЕОМЕТРӢ

МИСОЛҲО

1. Аъзoi ҳаштодуми прогрессияи арифметикиро ёбед, агар $a_1 = -3$ ва $d = 6$ бошад.
2. Пайдарпайи 2, 6, 10, 14, 18, ... прогрессияи арифметикист. Формулаи n -аъзoi онро нависед.
3. Дар прогрессияи арифметикӣ:
 - а) Ёбед $a_7 = -5$, $a_{32} = 70$ агар a_1 ва d ;
 - б) Ёбед $a_5 = 2$, $a_{40} = 142$ агар, a_7 ;
 - с) Ёбед $a_{14} = 5$, $a_{12} = 1$ агар, a_{13} ;
 - д) Ёбед $a_{25} - a_{20} = 10$, $a_{16} = 13$ агар, a_{10} ;
4. Агар дар прогрессияи геометрӣ $b_2 = 4$ ва $b_3 = 6$ бошад, пас, b_7 -ро ёбед.
5. Агар дар прогрессияи геометрӣ $b_1 = 3$ ва $q = -2$ бошад, пас, b_8 -ро ёбед.
6. Дар прогрессияи геометрӣ:
 - а) Агар $b_1 = 18$, $q = \frac{1}{9}$ он гоҳ, b_2 -ро ёбед; б) Агар $b_1 = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$ он гоҳ, b_7 -ро ёбед;
 - с) Агар $b_4 = 8$, $b_8 = 128$ он гоҳ, b_1 ва q -ро ёбед; д) Агар $b_9 = -1$, $q = -1$ он гоҳ, b_1 ва b_{17} -ро ёбед.
7. Агар $b_1 = 3$, $q = 2$ дар прогрессияи геометрӣ, он гоҳ, S_6 -ро ёбед.
8. Агар $b_2 = 6$, $q = 3$ дар прогрессияи геометрӣ, он гоҳ, S_8 -ро ёбед.
9. Дар прогрессияи геометрӣ $b_1 = 4$, $q = \frac{1}{2}$ суммаи 10 аъзoi аввали онро ёбед.
10. Аъзoi якуми прогрессияи геометрии 5, аъзoi шашумаш 1215. Махраҷи онро ёбед.
11. Дар прогрессияи геометрии беохир камшаванда $b_1 = 8$, $q = \frac{1}{2}$ он гоҳ, суммаи онро ёбед.
12. Суммаи прогрессияи геометрии беохир камшаванда 12, 4, $\frac{4}{3}$, ... -ро ёбед.
13. Дар прогрессияи геометрӣ:
 - а) Агар $b_2 = 36$ он гоҳ, q -ро ёбед; б) Агар $b_5 = 36$, $b_7 = 144$ он гоҳ, b_6 -ро ёбед;
 - с) Агар $b_6 = \frac{1}{486}$, $b_8 = \frac{1}{4374}$ он гоҳ, b_7 -ро ёбед.
14. Суммаи прогрессияи геометрии беохир камшаванда 150 аст. Агар $q = \frac{1}{3}$ он гоҳ, b_1 -ро ёбед.
15. Агар дар прогрессияи геометрии беохир камшаванда, $b_1 = \frac{1}{4}$, $S = 16$, пас q -ро ёбед.
16. Дар прогрессияи геометрӣ:
 - а) Агар $b_1 = 3$, $q = 5$ он гоҳ, S_4 -ро ёбед; б) Агар $b_2 = 8$, $b_3 = 4$ он гоҳ, S_6 -ро ёбед;
 - с) Агар $b_1 = -2$, $b_6 = -486$ он гоҳ, S_6 -ро ёбед..



БОБИ 1. ФУНКСИЯҲО

- **ФУНКСИЯ. УСУЛҲОИ ДОДАШУДАНИ ФУНКСИЯ**
- **СОҲАИ МУАЙЯНӢ ВА МАҶМУӢ ҚИМАТҲОИ ФУНКСИЯ**
- **АМАЛҲОИИ АРИФМЕТИКӢ ОИД БА ФУНКСИЯҲО**
- **ФУНКСИЯИ МУРАККАБ. ФУНКСИЯИ БАРӢАКС. ФУНКСИЯИ ДАВРӢ**
- **ХОСИЯТҲОИ ФУНКСИЯ**
- **ТАБДИЛДИҲИИ ЭЛЕМЕНТАРИИ ГРАФИКҲОИ ФУНКСИЯ**
- **МОДЕЛСОЗИИ ХАТТӢ ВА КВАДРАТӢ**
- **КОРҲОИ ЛОИҲАВӢ**

БОБИ 1. ФУНКСИЯҲО

ФУНКСИЯ. УСУЛҲОИ ДОДА ШУДАНИ ФУНКСИЯҲО



Функция

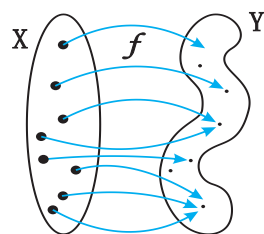
Ҳангоми омӯхтани таносуби бузургҳои дар табиат, истехсолот, иқтисодиёт ва дигар соҳаҳо ба назар гирифташуда функция ном дорад. Мафҳуми функция дорои нақши муҳим мебошад.

Бигзор x ва Y маҷмӯи ададҳо бошанд. Ҳар як нуқтаи $x \in X$ функциаи муқаррарӣ номида мешавад, ки ба нуқтаи ягонаи $y \in Y$ мувофиқат мекунад.

Қоидаҳое, ки функцияро муайян мекунад, бо ҳарфҳои $f, g, \dots$ ишора мешаванд. Нишонаи $y = f(x)$ маънои онро дорад, ки қоидаи f нуқтаи $x \in X$ -ро ба нуқтаи $y \in Y$ пайваст мекунад ва дар ин ҳолат мо мегӯем, ки функциаи X дода шудааст, ки нуқтаҳои маҷмӯи X -ро ба нуқтаҳои маҷмӯи Y мувофиқат мекунад. Дар ин ҷо x **тағйирёбанда** ё **аргументи озод** номида мешавад ва **тағйирёбанда** ё **функциа** вобаста аст. Функциаи f одатан ҳамчун $y = f(x)$ ё ки $f(x)$ ифода карда мешавад.

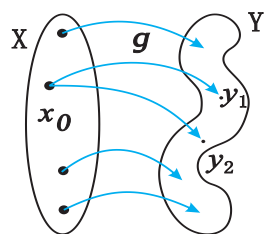
Дар зер баъзе хусусиятҳо оварда шудаанд:

Расми 1



f функциаи муқаррарӣ аст ба ҳар як элементи x маҷмӯи X як элементи ягонаи Y аз маҷмӯи Y мувофиқ меояд.

Қоидае, ки функция (f) аст ва қоидае, ки функция (g) нест



g функциаи муқаррарӣ нест: ба элементи $x_0 \in X$ ду элементи $y_1, y_2 \in Y$ мувофиқ меояд.

1) функциаи хаттӣ: $y = kx + b$

2) функциаи квадратӣ: $y = ax^2 + bx + c$

3) функциаи дараҷагӣ: $y = x^n$

4) функциаи ирратсионалӣ: $y = \sqrt[n]{x^m}$

5) функциаи мутаносибии чаппа: $y = \frac{k}{x}$
(дар ин ҷо $k \neq 0$)

6) функциаи модул: $y = |x|$



Усулҳои дода шудани функция

Функциаҳо бо роҳҳои зерин карда шуданаш мумкин:

1. Тарзи аналитикии муайянкунии функция. Агар функция бо як ё якчанд формула ё муодила дода шуда бошад, он гоҳ гуфта мешавад, ки ин функция ба таври аналитикӣ дода шудааст. Масалан, муодилаи ҳаракати нуқтаи моддӣ $s = 20 - 5t + \frac{1}{4}t^2$ функцияест, ки ба тариқи аналитикӣ дода шудааст.

2. Тарзи ҷадвали муайян кардани функция одатан дар таҷрибаҳои амалӣ робитаи байни тағйирёбандаҳоро муқаррар мекунад. Масалан, тағйироти ҳаррӯзаи ҳароратро дар намуди ҷадвал овардан мумкин аст. Дар ин ҷо соатҳои рӯз тағйирёбандаи озод (яъне аргумент) ва ҳарорат тағйирёбандаи вобаста (яъне функция) мебошанд.

ФУНКСИЯ. УСУЛҲОИ ДОДАШУДАНИ ФУНКСИЯ

Дар ҷадвали зерин тағйирёбии ҳафтаинаи ҳарорати ҳаво рӯзҳои 20 – 26 - январ дар шаҳри Тошканд оварда шудааст.

Таърихи рӯз		20.01	21.01	22.01	23.01	24.01	25.01	26.01
Ҳарорат, $t^{\circ}\text{C}$	Рӯзона	13	9	3	4	6	7	8
	Шабона	- 2	- 3	- 1	- 2	- 3	- 4	- 3

3. Дар баъзе корҳои амалӣ вобастагии тағйирёбандаҳо ба таври графикӣ дода мешавад. Масалан, тағйирёбии моҳона ва солони қурби долларро нисбат ба сӯм ба таври графикӣ ифода кардан мумкин аст. Дар ин ҷо, санаҳо аргумент мебошанд ва қимати доллар нисбат ба сӯм функция аст.



4. Функцияро метавон ҳамчун матн муайян кард. Масалан, дар супориши «Оилаи 4 нафара барои пухтани оши палав 1 килограмм биринҷ сарф мекунад. Агар 2 меҳмон омада бошанд, дар деги оши палав чӣ қадар биринҷ андохтан лозим аст?» Миқдори биринҷи оши палав ба шумораи одамон вобаста аст. Равшан аст, ки шумораи одамон аргумент ва миқдори биринҷ функция аст.

МИСОЛҲО

- Намуди аналитикии функцияи ба тариқи матнӣ додашударо нависед (масалан, функцияе, ки бо матни «аз квадрати аргумент 5-ро бароред» дода шудааст, шакли аналитикии $f(x) = x^2 - 5$ дорад).
 - аргументро ба 3 зарб кунед ва аз он 5 кам кунед;
 - ба квадрати аргумент 2 илова кунед;
 - аз аргумент 1 тарҳ кунед ва сипас онро ба квадрат бардоред;
 - ба аргумент 1 илова кунед ва пас решаи квадратии онро гиред ва ба 2 тақсим кунед.
- Қоидаи матни функция дода шудааст. (а) **аналитикӣ**, (б) **ҷадвалӣ**, (в) намудҳои **графикии** функцияро ёбед:
 - барои ёфтани $f(x)$ аргументро ба 3 тақсим кунед ва сипас $\frac{2}{3}$ -ро илова кунед;
 - барои ёфтани $g(x)$ аз аргумент 4-ро тарҳ карда, сипас ба $\frac{3}{4}$ зарб кунед;
 - бигзор функцияи $T(x)$ маблағи андоз аз маҳсулоти барои x сӯм харидашуда бошад. 8% нархи маҳсулотро ҳисоб кунед, то миқдори андози маҳсулотро ёбед;
 - Бигзор функцияи $V(d)$ қоидаи дарёфти ҳаҷми тўбро бо диаметри d бошад. Барои дарёфти ҳаҷм, π -ро ба дараҷаи сеюми диаметр зарб кунед ва ба 6 тақсим намоед.

БОБИ 1. ФУНКСИЯҲО

3. Чадвали қиматҳои функсияи додашударо пур кунед:

a) $f(x) = 2(x - 1)^2$

x	$f(x)$
-1	
0	
1	
2	
3	

b) $g(x) = |2x+3|$.

x	$g(x)$
-3	
-2	
0	
1	
3	

4. Қиматҳои функсияро дар аргументҳои додашуда ҳисоб кунед.

a) $f(x) = x^2 - 6$ $f(-3), f(3), f(0), f\left(\frac{1}{2}\right)$

b) $f(x) = x^3 + 2x$ $f(-2), f(-1), f(0), f\left(\frac{1}{2}\right)$

c) $f(x) = \frac{|x|}{x}$ $f(-2), f(-1), f(0), f(5), f(x^2), f\left(\frac{1}{x}\right)$

d) $f(x) = \frac{1-2x}{3}$ $f(2), f(-2), f\left(\frac{1}{2}\right), f(a), f(-a), f(a-1)$

e) $h(x) = \frac{x^2+4}{5}$ $h(2), h(-2), h(a), h(-x), h(a-2), h(\sqrt{x})$

f) $f(x) = x^2 + 2x$ $f(0), f(3), f(-3), f(a), f(-x), f\left(\frac{1}{a}\right)$

g) $h(t) = t + \frac{1}{t}$ $h(-1), h(2), h\left(\frac{1}{2}\right), h(x-1), h\left(\frac{1}{x}\right)$

5. Муайян кунед, ки оё муодилаҳои додашуда функсияҳои тағйирёбандаи x мебошанд?

a) $3x - 5y = 7$ b) $3x^2 - y = 5$ c) $x = y^2$ d) $x^2 + (y-1)^2 = 4$

e) $2x - 4y^2 = 3$ f) $2x^2 - 4y^2 = 3$ g) $2xy - 5y^2 = 4$ h) $\sqrt{y} - x = 5$

i) $2|x| + y = 0$ j) $2x + |y| = 0$ k) $x = y^3$ l) $x = y^4$

6. Кадоме аз чадвалҳои зерин функсияҳои x мебошанд?

a)

x	y
-5	-12
9	2
11	2

b)

x	y
-10	-9
$3\frac{1}{2}$	-6
-10	-1

c)

x	y
2	0
-5	-3
-17	7
6	17
11	7

d)

x	y
-4	$3\frac{1}{2}$
$3\frac{1}{2}$	$-3\frac{1}{2}$
$9\frac{3}{5}$	-10

СОҶАИ МУАЙЯНИ ВА МАЧМЎИ ҚИМАТҲОИ ФУНКСИЯ

Соҳаи муайяни ва маҷмӯи қиматҳои функция

Функцияи $y = f(x)$ ба назар гирифта шавад. Маҷмӯи элементҳоеро, ки аргументи x гирифта метавонад, **соҳаи муайяни** функцияи $y = f(x)$ номида мешавад, маҷмӯи ададҳо, ки функцияи y ба он расида метавонад, **маҷмӯи қиматҳои** функцияи $y = f(x)$ номида мешавад ва онҳо мутаносибан ҳамчун $D(f)$ ва $E(f)$ ё ки $D(y)$ ва $E(y)$ ишора мешаванд.

Қадвали соҳаи муайяни ва маҷмӯи қиматҳои баъзе функцияҳо:

Функция	Соҳаи муайяни	Маҷмӯи қиматҳо
1) $y = kx + b$	$D(y) = (-\infty; +\infty)$	$E(y) = (-\infty; +\infty)$
2) $y = x^2$	$D(y) = (-\infty; +\infty)$	$E(y) = [0; +\infty)$
3) $y = x $	$D(y) = (-\infty; +\infty)$	$E(y) = [0; +\infty)$
4) $y = \frac{k}{x}$	$D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
5) $y = \sqrt{x}$	$D(y) = [0; +\infty)$	$E(y) = [0; +\infty)$
6) $y = \sqrt[n]{x}$	$D(y) = [0; +\infty)$	$E(y) = [0; +\infty)$
7) $y = \sqrt[3]{x}$	$D(y) = (-\infty; +\infty)$	$E(y) = (-\infty; +\infty)$
8) $y = \sqrt[n+1]{x}$	$D(y) = (-\infty; +\infty)$	$E(y) = (-\infty; +\infty)$

Барои ҳар як қимати аргументи x , ки ба соҳаи муайяни функцияи $y = f(x)$ тааллуқ надорад, функцияи $y = f(x)$ номуайян хоҳад буд ё ба ибораи дигар, ифодаи $f(x)$ маъно надорад.

Масалан, дар $x = -1$ барои функцияи $y = \sqrt{x}$ будан ва дар $x = 0$ барои функцияи $y = \frac{k}{x}$ мутаносибан маъно надорад.

Мисоли 1. Соҳаи муайяни функцияро ёбед. $y = \frac{1}{x^2 - x}$

Ҳал. Махраҷи ифодаи ратсионалӣ ба сифр баробар шуда наметавонад, яъне.

$$\begin{aligned} x^2 - x &\neq 0 \\ x(x-1) &\neq 0 \\ x &\neq 0 \text{ ва } x \neq 1. \end{aligned}$$

Ин маънои онро дорад, ки аргументи x қиматҳои 0 ва 1-ро гирифта наметавонад. Аз ин рӯ, соҳаи муайяни функция маҷмӯи ҳама ададҳои ҳақиқӣ ба ғайр 0 ва 1 мебошад. $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

Ҷавоб: $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

БОБИ 1. ФУНКСИЯҲО

Мисоли 2. Соҳаи муайянии функцияро ёбед $y = \sqrt{9 - x^2}$.

Ҳал. Ифодаи реша наметавонад манфӣ бошад. Ба ибораи дигар,

$$\begin{aligned} 9 - x^2 &\geq 0 \\ (3 - x)(3 + x) &\geq 0 \\ -3 \leq x &\leq 3. \end{aligned}$$

Ин маънои онро дорад, ки аргументи x танҳо аз порчаи $[-3; 3]$ қиматҳо гирифта метавонад; $D(y) = [-3; 3]$.

Ҷавоб: $D(y) = [-3; 3]$.

Мисоли 3. Соҳаи муайянии функцияро ёбед $y = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$.

Ҳал. Махраҷи функцияи додашуда ифодаи зери решаи квадратиро дар бар мегирад. Ин ифода наметавонад ба сифр баробар бошад, дар айни замон он наметавонад ғайримусбат бошад. Барои ҳамин $x + 1 > 0$

$$x > -1.$$

Ҳамин тавр, соҳаи муайянии функция $D(y) = (-1; \infty)$.

Ҷавоб: $D(y) = (-1; \infty)$.

Графики функция

Функцияи $y = f(x)$ аз маҷмӯи қиматҳои $E(f)$ ба ҳар як элементи X -и соҳаи муайянии он он $D(f)$ як қимати ягонаи $f(x)$ мувофиқ мегузорад. Дар натиҷа ҳар як элементи $x \in D(f)$ дар ҳамвории координатии Oxy нуқтаи ягонаи $(x; f(x))$ -ро муайян мекунад.

Маҷмӯи ҳамаи нуқтаҳои $(x; f(x))$, ки дар ҳамвории координатии Oxy ташкил шудааст, **графики функцияи** $y = f(x)$ номида мешавад.

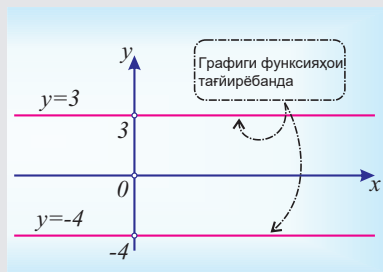
Дар расмҳои 1 ва 2 графикҳои функция нишон дода шудаанд.

Мисоли 4. Графики функцияҳои зеринро созед.

а) $y = x^2$ б) $y = x^3$ д) $y = \sqrt{x}$

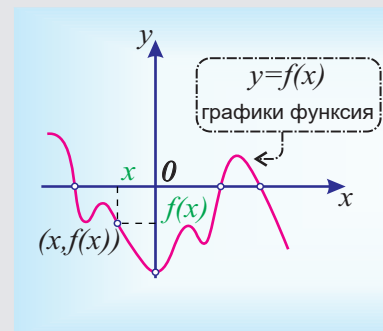
Ҳал. Барои сохтани графикҳои ин функцияҳо мо аввал ҷадвали баъзе қиматҳои онро месозем. Баъд ин нуқтаҳоро дар ҳамвории координатӣ қайд карда, онҳоро бо хати қаси ҳамвор пайваست мекунем.

Расми 1



Графики функция

Расми 2

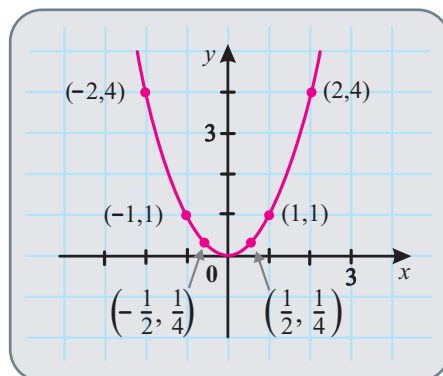


Графики функция

СОҲАИ МУАЙЯНӢ ВА МАҶМУӢ ҚИМАТҲОИ ФУНКСИЯ

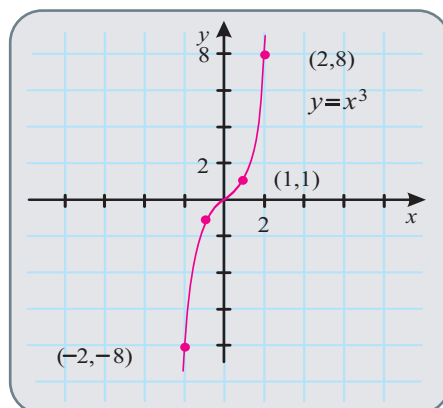
a)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = x^2$	9	4	1	0	1	4	9



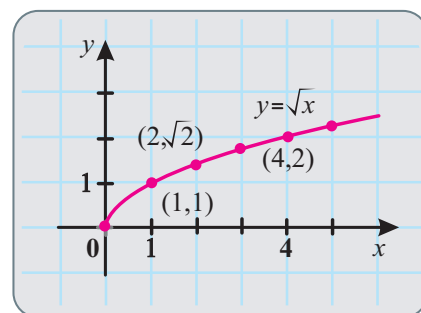
b)

x	-2	-1	-1/2	0	1/2	1	2
$y = x^3$	-8	-1	-1/8	0	1/8	1	8



c)

x	0	1/4	1	2	4	9
$y = \sqrt{x}$	0	1/2	1	$\sqrt{2}$	2	3

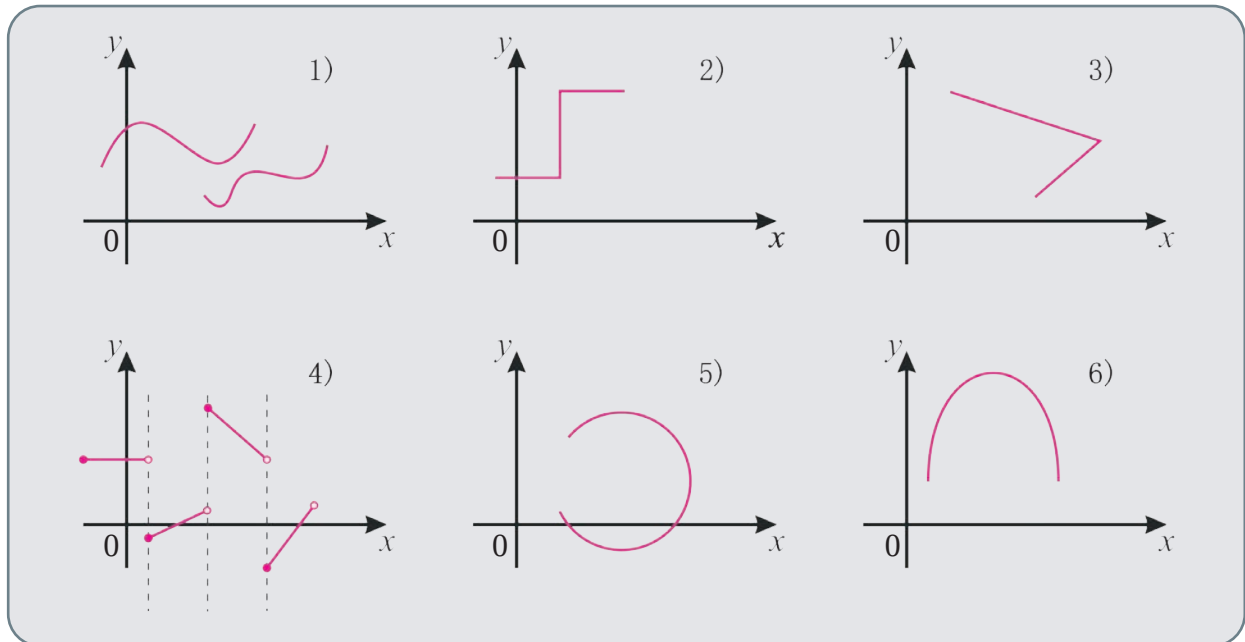


Бояд қайд кард, ки барои он ки хати қачдар ҳамвори Оху, кашидашуда графика функцияи $y = f(x)$, бошад, ҳар як хати параллел ба тири Oy , бояд ин хатро дар на бештар аз як нуқта бурад.

БОБИ 1. ФУНКСИЯҲО

Дар акси ҳол, яъне агар хати рости параллел ба тири Oy , хати қачи додасударо дар зиёда аз як нуқта бурад, он гоҳ ин хати қач графикаи функция буда наметавонад.

Аз хатҳое, ки дар расми зер нишон дода шудаанд, хатҳои 4) ва 6) графикаи функция мебошанд ва хатҳои 1), 2), 3) ва 5) графикаи функция нестанд.



МИСОЛҲО

1. Соҳаи муайянӣ ва маҷмӯи қиматҳои функцияро ёбед.

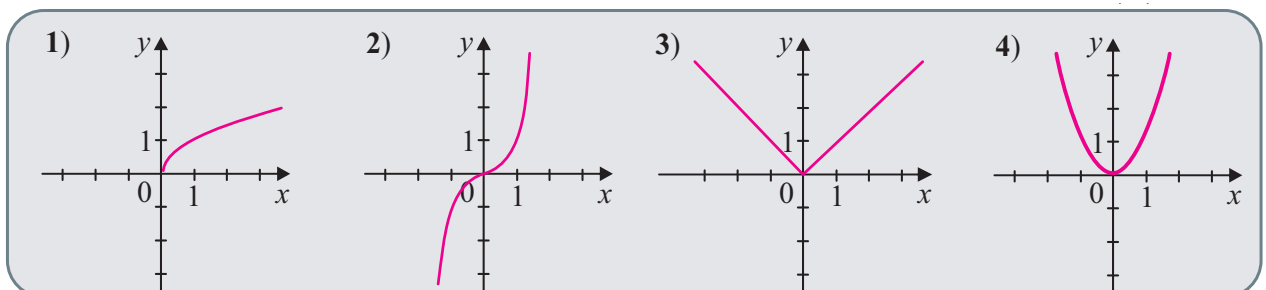
- a) $f(x) = 3x$ b) $f(x) = 3x, 2 \leq x \leq 6$
c) $f(x) = 5x^2 + 2$ d) $f(x) = 5x^2 + 2, 0 \leq x \leq 2$

2. Соҳаи муайянии функцияро ёбед.

- a) $f(x) = \frac{1}{x-3}$ b) $f(x) = \frac{1}{3x-6}$ c) $f(x) = \frac{x+2}{x^2-1}$
d) $f(x) = \frac{x^4}{x^2+x-6}$ e) $f(t) = \sqrt{t+1}$ f) $g(t) = \sqrt{t^2+9}$
g) $f(t) = \sqrt[3]{t-1}$ h) $g(x) = \sqrt{7-3x}$ i) $f(x) = \sqrt{1-2x}$

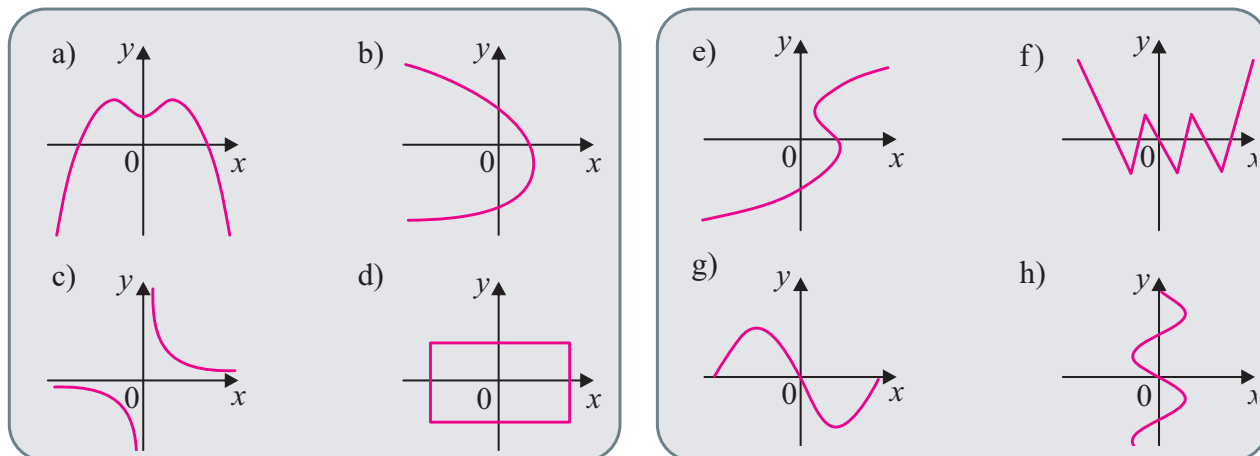
3. Графикаи ба функция мувофиқро нишон диҳед.

- a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = x^3$ c) $f(x) = \sqrt{x}$ d) $f(x) = |x|$

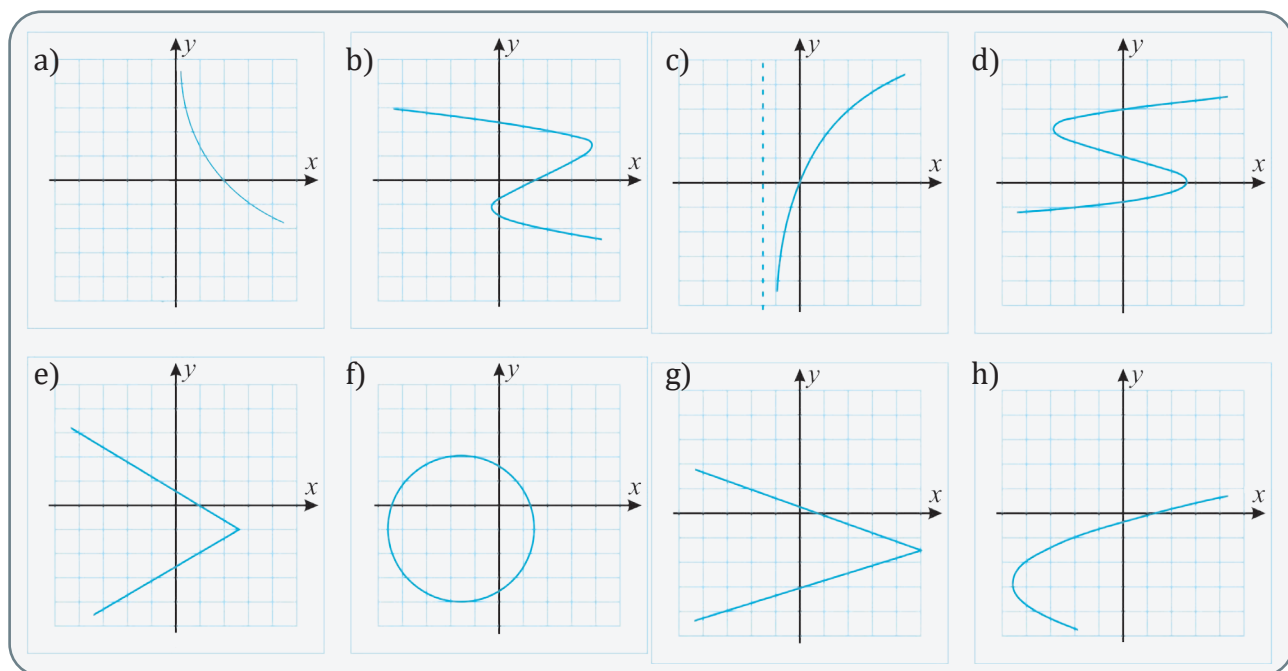


СОҶАИ МУАЙЯНӢ ВА МАҶМӢИ ҚИМАТҲОИ ФУНКЦИЯ

4. Муайян кунед, ки кадоме аз хатҳои додашуда графики функция аст?



5. Муайян кунед, ки кадоме аз хатҳои додашуда графики функция аст?



6. Графики функцияҳои додашударо созед.

a) $f(x) = 8x - x^2$

b) $g(x) = x^2 - x - 20$

c) $h(x) = x^3 - 5x - 4$

7. Чадвали баъзе қиматҳои функцияи додашударо тартиб диҳед ва графики онро кашед.

a) $f(x) = -x^2$

b) $f(x) = x^2 - 4$

c) $g(x) = -(x+1)^2$

d) $r(x) = 3x^4$

e) $r(x) = 1 - x^4$

f) $g(x) = x^3 - 8$

g) $k(x) = \sqrt[3]{-x}$

h) $k(x) = -\sqrt[3]{x}$

i) $f(x) = 1 + \sqrt{x}$

j) $C(t) = \frac{1}{t^2}$

k) $C(t) = -\frac{1}{t+1}$

l) $H(x) = |2x|$

m) $G(x) = |x| + x$

n) $G(x) = |x| - x$

o) $f(x) = |2x - 2|$

БОБИ 1. ФУНКСИЯҲО

АМАЛҲОИ АРИФМЕТИКӢ БО ФУНКСИЯҲО

 АМАЛҲОИ АРИФМЕТИКӢ БО ФУНКСИЯҲО

Амалҳои арифметикиро бо функцияҳо иҷро кардан мумкин аст: сумма (+), тарҳ (−), зарб (×), тақсим (÷).

Бигзор соҳаи муайянии функцияҳои $f(x)$ ва $g(x)$ мутаносибан маҷмӯи A ва B бошанд. Суммаи ин функцияҳо дар маҷмӯи $A \cap B$ функцияест, ки дар ҳар як элементи $x \in A \cap B$ қимати $f(x) + g(x)$ -ро мегирад. Суммаи функцияҳои $f(x)$ ва $g(x)$ ҳамчун $(f+g)(x)$ ифода карда мешавад. Маънои,

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

Фарқият, зарб ва тақсими функцияҳои $f(x)$ ва $g(x)$ -ро ба ҳамин тариқ муайян кардан мумкин аст:

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Диққат диҳед!

1. Агар $A \cap B = \emptyset$, ин амалҳо муайян карда намешаванд.
2. Ҳангоми муайян кардани тақсимои ду функцияи $f(x)$ ва $g(x)$ талаб карда мешавад, ки $g(x) \neq 0$ барои ҳар як элементи x аз $A \cap B$ гирифта шудааст.

МИСОЛҲО

Мисоли 1. Функцияи $f(x) = \frac{1}{x-2}$ ва $g(x) = \sqrt{x}$ дода шудаанд.

а) Функцияҳои $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$ ва $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ соҳаи муайянии онҳоро ёбед.

б) Қиматҳоро ёбед. $(f+g)(4)$, $(f-g)(4)$, $(fg)(4)$ ва $\left(\frac{f}{g}\right)(4)$.

Ҳал: а) Соҳаи муайянии функцияи f маҷмӯи $\{x \mid \text{мебошад } x \neq 2\}$ ва функцияҳои $x \geq 0$ f ва g буриши ин маҷмӯи $\{x \mid x \geq 0 \text{ ва } x \neq 2\} = [0; 2) \cup (2; \infty)$ соҳаи муайянии функцияҳои $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ ва $f:g$ мебошад.

Пас аз муайян кардани соҳаи муайянии онҳо амалҳои зерин иҷро карда мешаванд:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{1}{x-2} + \sqrt{x}$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{1}{x-2} - \sqrt{x}$$

АМАЛҲОИ АРИФМЕТИКӢ ОИД БА ФУНКСИЯҲО

$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{(x-2)\sqrt{x}}.$$

б) Азбаски қимати $x = 4$ ба соҳаи муайяни ҳар як функцияи нав тааллуқ дорад, қиматҳои зерин муайян карда мешаванд:

$$(f+g)(4) = f(4) + g(4) = \frac{1}{4-2} + \sqrt{4} = \frac{5}{2}$$

$$(f-g)(4) = f(4) - g(4) = \frac{1}{4-2} - \sqrt{4} = -\frac{3}{2}$$

$$(fg)(4) = f(4)g(4) = \left(\frac{1}{4-2}\right)\sqrt{4} = 1$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(4) = \frac{f(4)}{g(4)} = \frac{1}{(4-2)\sqrt{4}} = \frac{1}{4}.$$

Мисоли 2. Функцияҳоро ба таври графикӣ созед.

Бигзор графикҳои функцияҳои f ва g дар расми 1 тасвир шуда бошанд. Функцияи $f+g$ -ро бо истифода аз иловаи графикӣ созед.

Ҳал. Маълум аст, ки графики функцияи f аз маҷмӯи

$$\{(x, f(x)) : x \in D(f)\}$$

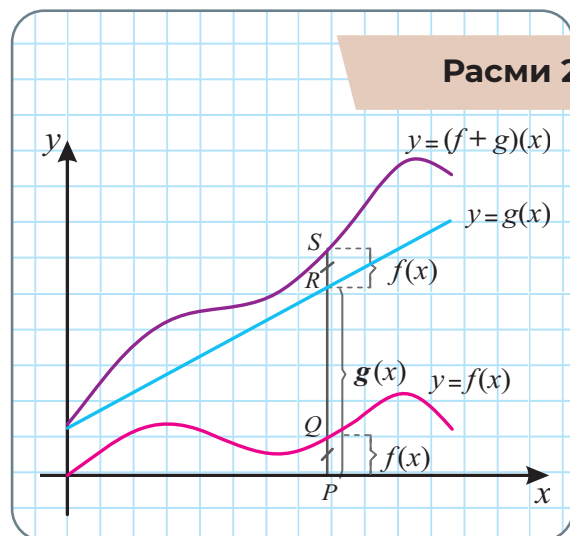
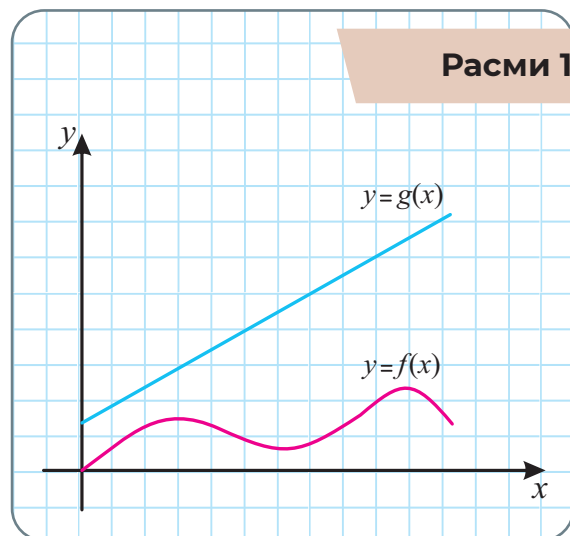
дар ҳамвории Оху иборат аст. Ба ҳамин монанд, маҷмӯи

$$\{(x, g(x)) : x \in D(g)\}$$

графики функцияи g мебошад. Тарзи графикии илова кардани функцияҳои f ва g маънои маҷмӯи

$$\{(x, f(x) + g(x)) : x \in D(f) \cup D(g)\} \text{ -ро дорад.}$$

Дар ин маврид барои ба вуҷуд овардани нуқтаи S -и графики функцияи $f+g$, порчаи RS бо дарозии порчаи PQ дар болои порчаи PR гузошта мешавад ($PQ = RS$).



МИСОЛҲО

1. Функцияҳоро ҷамъ ва тарҳ кунед.

а) $f(x) = 5x+1$, $g(x) = -2x$

б) $f(x) = -3x+3$, $g(x) = -5x+4$

в) $f(x) = 2x+1$, $g(x) = -5x+3$

д) $f(x) = -3x^2+7x$, $g(x) = 2x+4$

БОБИ 1. ФУНКСИЯҲО

2. Функцияҳоро зарб кунед.

- a) $f(x) = -x^2$, $g(x) = -3x + 1$
- b) $f(x) = -3x^2 + 3$, $g(x) = -x$
- c) $f(x) = -x + 3$, $g(x) = 5x + 6$
- d) $f(x) = -4x + 5$, $g(x) = -3x + 1$

3. Функцияҳои $(f + g)(x)$, $(f - g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$ ва $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ соҳаи муайянии онҳоро ёбед.

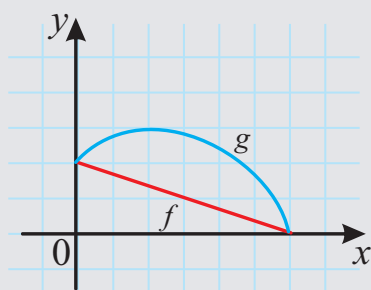
- a) $f(x) = x$, $g(x) = 2x$
- b) $f(x) = x$, $g(x) = \sqrt{x}$
- c) $f(x) = x^2 + x$, $g(x) = x^2$
- d) $f(x) = 3 - x^2$, $g(x) = x^2 - 4$
- e) $f(x) = 5 - x$, $g(x) = x^2 - 3x$
- f) $f(x) = x^2 + 2x$, $g(x) = 3x^2 - 1$
- g) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$, $g(x) = \sqrt{x + 3}$
- h) $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$, $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$
- i) $f(x) = \frac{2}{x}$, $g(x) = \frac{4}{x + 4}$
- j) $f(x) = \frac{2}{x + 1}$, $g(x) = \frac{x}{x + 1}$

4. Соҳаи муайянии функцияҳоро ёбед.

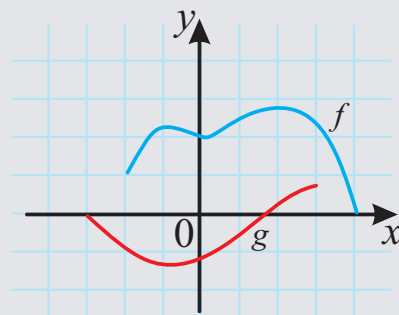
- a) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{3 - x}$
- b) $f(x) = \sqrt{x + 4} - \frac{\sqrt{1 - x}}{x}$
- c) $h(x) = (x - 3)^{-\frac{1}{4}}$
- d) $k(x) = \frac{\sqrt{x + 3}}{x - 1}$

5. Бо истифода аз графикҳо (расми 3-4), графики функцияи $f + g$ -ро бо роҳи илова кардани графикӣ кашед.

Расми 3



Расми 4



ФУНКСИЯҲОИ МУРАККАБ, БАРЪАКС ВА ДАВРӢ

Функцияи мураккаб

Дар натиҷаи истифодаи пайдарпайи функцияҳо пайвастагиҳои нави тағйирёбандаҳо ба вучуд меояд. Агар дар маҷмӯи x функцияи $y = f(x)$, дода шуда бошад ва аргументи x функцияи $x = g(t)$, дар маҷмӯи T муайяншуда бошад, пас дар маҷмӯи T функцияи $y = f(g(t))$ **функцияи мураккаби** муайяншуда номида мешавад.

Масалан, функцияи $y = 2x^2 - 3x$, дар маҷмӯи $x = (-\infty, +\infty)$ ва функцияи, $x = \sqrt{t}$ дар маҷмӯи $T = [0; +\infty)$ дода шуда аст. Он гоҳ функцияи $y = 2t - 3\sqrt{t}$ функцияи $T = [0; +\infty)$ функцияҳои мураккаби $y = 2x^2 - 3x$ ва $x = \sqrt{t}$ мабошанд.

Мисоли 1. Функцияҳои $f(x) = x^2$ ва $g(x) = x - 3$ дода шудаанд:

а) функцияи мураккаби $f(g(x))$ ва $g(f(x))$ ва соҳаи муайянии онро ёбед;

б) Ёбед $f(g(5))$ ва $g(f(7))$.

Ҳал. а) Оё баробариҳои зерин дурустанд:

$$g \text{ аз рӯи таърифи, } f(g(x)) = f(x - 3),$$

$$f \text{ аз рӯи таърифи, } f(g(x)) = (x - 3)^2 \text{ мешавад.}$$

$$f \text{ аз рӯи таърифи, } g(f(x)) = g(x^2),$$

$$g \text{ аз рӯи таърифи, } g(f(x)) = x^2 - 3 \text{ мешавад.}$$

Соҳаи муайянкунии функцияи $f(g(x))$ ва $g(f(x))$ маҷмӯи ададҳои ҳақиқӣ.

б) Дар функцияҳои мураккаби ёфтшуда ба ҷои x , қиматҳои додашударо мегузорем:

$$f(g(5)) = (5 - 3)^2 = 2^2 = 4, \quad g(f(7)) = 7^2 - 3 = 49 - 3 = 46.$$

Мисоли 2. Агар функцияҳои $f(x) = \sqrt{x}$ ва $g(x) = \sqrt{2-x}$ дода шуда бошанд, он гоҳ функцияҳои зерин ва соҳаи муайянии онҳоро ёбед (расми 1).

а) $f(g(x))$

б) $g(f(x))$

с) $f(f(x))$

д) $g(g(x))$

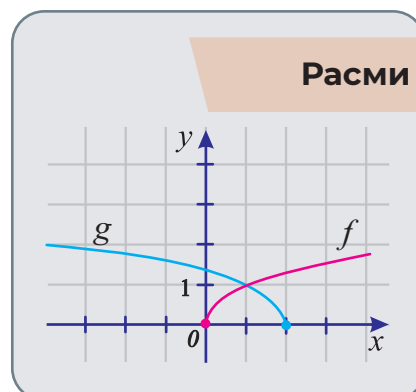
Ҳал. а) Аз рӯи таъриф

$$f(g(x)) = f(\sqrt{2-x}) = \sqrt{\sqrt{2-x}} = \sqrt[4]{2-x} \text{ аз рӯи таърифи } g$$

$$\sqrt[4]{2-x} \text{ Соҳаи муайяни } 2-x \geq 0.$$

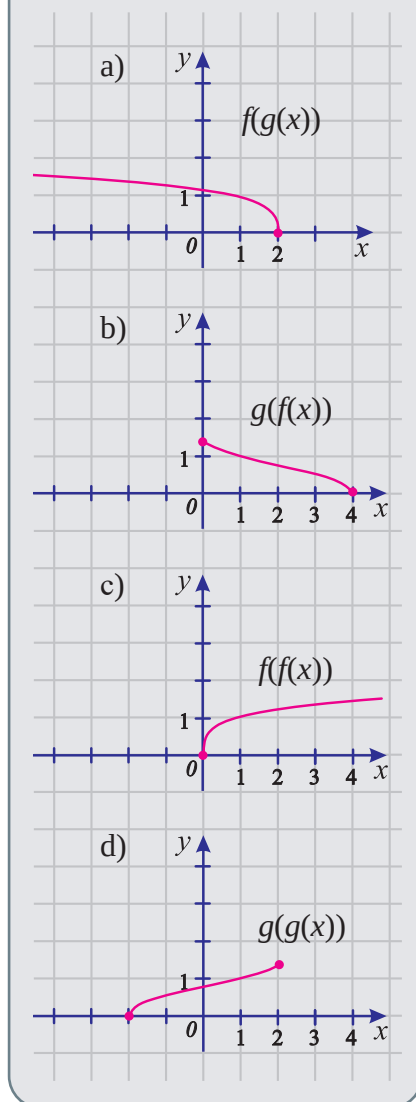
$$\text{аз ин ҷо } x \leq 2.$$

Расми 1



БОБИ 1. ФУНКСИЯҲО

Расми 2



Ҳамин тариқ соҳаи муайянии функцияи $f(g(x)) =$ маҷмӯи $(-\infty; 2]$ аст. (расми 2а).

б) аз шудани f , $g(f(x)) = g(\sqrt{x})$ буда, мувофиқи дода шудани g , $g(f(x)) =$ рӯи дода $\sqrt{2-\sqrt{x}}$ мешавад.

Соҳаи муайянии $\sqrt{x} : x \geq 0$.

Соҳаи муайянии $\sqrt{2-\sqrt{x}} : 2-\sqrt{x} \geq 0$, аз ин ҷо $\sqrt{x} \leq 2$ ёки $x \leq 4$. Пас, $0 \leq x \leq 4$ (расми 2б).

с) f аз рӯи дода шудани, $f(f(x)) = f(\sqrt{x})$ буда, мувофиқи дода шудани f , $f(f(x)) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$ мешавад.

Соҳаи муайянии $\sqrt[4]{x} : [0; \infty)$ (расми 2с).

д) мувофиқи дода шудани g , $g(g(x)) = g(\sqrt{2-x})$ шуда, мувофиқи дода шудани g , $(g(x)) = \sqrt{2-\sqrt{2-x}}$ мешавад.

Соҳаи муайянии $\sqrt{2-\sqrt{2-x}} : 2-x \geq 0$ ва $\sqrt{2-x} \leq 2$ аз ин ҷо $x \leq 2$ ва $x \geq -2 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$, пас соҳаи муайянии, $g(g(x)) : [-2; 2]$ (расми 2д).

Мисоли 3. Функцияи $f(g(h(x)))$ -ро ёбед, агар $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $g(x) = x^{10}$ ва $h(x) = x+3$,

Ҳал. $f(g(h(x))) = f(g(x+3))$ аз рӯи таърифи h ,

$f(g(h(x))) = f((x+3)^{10})$ аз рӯи таърифи g ,

$$f(g(h(x))) = \frac{(x+3)^{10}}{(x+3)^{10}+1} \text{ аз рӯи таърифи } f, \text{ то ҳол}$$

мо ҳолатҳои сохтани функцияҳои мураккабро аз

функцияҳои додашуда дида баромадем. Аммо дар таҳлили математикӣ иҷрои "амали баръакс" - қобилияти фарқ кардани функцияҳои таркибиро аз функцияҳои мураккаб хеле муфид аст. Биёед инро дар мисоли зерин дида бароем.

Мисоли 4. Функцияи $F(x) = \sqrt[4]{x+9}$ дода шудааст. Агар $f(x) = f(g(x))$ бошад, он гоҳ функцияи f ва g -ро ёбед.

Ҳал. Мо метавонем функцияҳои f ва g -ро дар шакли зерин дида бароем: $g(x) = x+9$ ва $f(x) = \sqrt[4]{x}$.

Пас аз рӯи таърифи g , $f(g(x)) = f(x+9)$ аз рӯи таърифи f , $f(g(x)) = \sqrt[4]{x+9}$,

функцияҳои f ва g -ро бо чанд роҳи дигар интиҳоб кардан мумкин аст. Роҳи дигар $f(x) = \sqrt{x}$ ва $g(x) = \sqrt{x+9}$ мебошад.

Мисоли 5. Истифодаи функцияи муракка

КиштӢ ба соҳил параллел бо суръати доимии 20 км/ҳ ҳаракат мекунад. КиштӢ дар соати 12 аз соҳил 5 километр дуртар аз назди маяк гузашт.

а) Масофаи s -ро байни маяк ва киштӢ ба масофаи d пас аз соати 12:00 тайкардаи киштӢ, яъне ҳамчун функцияи зерин нависед:

$$s = f(d).$$

б) d -ро ҳамчун функцияи $d = g(t)$ вобаста ба вақти t аз соати 12:00 нависед.

с) Функцияи мураккаби $f(g(t))$ -ро ёбед. Ин хусусият чӣ маъно дорад?

Ҳал. Ба расми 3 менигарем.

а) Теоремаи Пифагорро истифода бурда, вобастагии масофаи s аз d -ро бо баробарии зерин ба даст меорем.

$$s = f(d) = \sqrt{25 + d^2}.$$

б) Азбаски киштӢ бо суръати доимии 20 км/ҳ ҳаракат мекунад, пас баробарии

$$d = g(t) = 20t$$

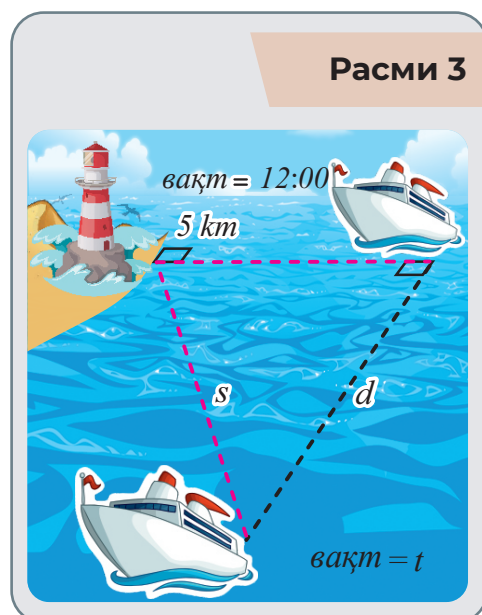
вобастагии масофаи d ба t муқаррар мекунад.

с) Пас:

$$f(g(t)) = f(20t) \text{ аз рӯи таърифи } g,$$

$$f(g(t)) = \sqrt{25 + (20t)^2} \text{ аз рӯи таърифи } f.$$

Функцияи $f(g(t))$ масофаи вобаста ба вақт байни киштӢ ва маяк мебошад.



Расми 3



Функцияи баръакс

Агар муодилаи $f(x) = y$ нисбат ба x ҳалшаванда бошад ва барои ҳар як y решаи ягонаи $g(y)$ дошта бошад, он гоҳ вобастагии $x = g(y)$ **функцияи баръакс** барои функцияи $y = f(x)$ номида мешавад. Ба ҷои навишти $x = g(y)$, аз рӯи қоида $y = g(x)$ истифода бурда мешавад. Одатан функцияи баръакси $y = f(x)$ $y = f^{-1}(x)$ чунин навишта мешавад.

Мисоли 1. Функцияи $y = 3x - 5$ -ро дида мебароем. Биёед x -ро бо ифодаи y ифода кунем:

$$3x - 5 = y \Rightarrow 3x = y + 5 \Rightarrow x = \frac{y + 5}{3}.$$

БОБИ 1. ФУНКСИЯҲО

Дар баробарии охирин бо иваз кардани x ва y , мо функцияи

$$y = \frac{x+5}{3} \text{ -ро мегирем.}$$

Ин функция, функцияи баръакс барои функцияи $f^{-1}(x) = \frac{x+5}{3}$, $y = 3x - 5$ аст.

Шарҳ. Барои функцияи додашудаи $y = f(x)$ ва функцияи баръакси он $y = f^{-1}(x)$ баробарии $D(f^{-1}) = E(f)$ ва $E(f^{-1}) = D(f)$ ҷой дорад.

Диққат! Аҳамият диҳед, $(f(x))^{-1} = \frac{1}{f(x)}$ ки дар он -1 маънои нишондиҳандаро дорад.

Дар навишти $f^{-1}(x)$ адади -1 маънои функцияи баръаксро мефаҳмонад. Умуман, $(f(x))^{-1} \neq f^{-1}(x)$. Масалан: барои функцияи $y = 3x - 5$, $f(x) = 3x - 5$ баробарии $f^{-1}(x) = \frac{x+5}{3}$ ва $(f(x))^{-1} = \frac{1}{3x-5}$ ҷой дорад.

Мисоли 2. Баръакси функцияи додашударо ёбед $f(x) = \frac{x^5 - 3}{2}$.

Ҳал. Функцияро ҳамчун $y = \frac{x^5 - 3}{2}$ аз нав менависем ва x -ро бо воситаи y ифода мекунем:

$$y = \frac{x^5 - 3}{2}$$

$$2y = x^5 - 3$$

$$x^5 = 2y + 3$$

$$x = \sqrt[5]{2y + 3}.$$

Акнун биёед ҷои x ва y -ро иваз кунем: $y = \sqrt[5]{2x + 3}$. Аз ин рӯ, функцияи баръакс ин тавр аст: $f^{-1}(x) = \sqrt[5]{2x + 3}$.

Мисоли 3. Баръакси функцияи додашударо ёбед: $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$.

Ҳал. Функцияро ин тавр менависем: $y = \frac{2x+3}{x-1}$, x -ро бошад, бо воситаи y ифода мекунем:

$$y = \frac{2x+3}{x-1}$$

$$y \cdot (x-1) = 2x+3$$

$$yx - y = 2x+3$$

$$yx - 2x = y+3$$

ФУНКСИЯИ МУРАККАБ. ФУНКСИЯИ БАРЪАКС. ФУНКСИЯИ ДАВРӢ

$$x \cdot (y - 2) = y + 3$$

$$x = \frac{y + 3}{y - 2}$$

Ҳамин тариқ, $f^{-1}(x) = \frac{x + 3}{x - 2}$ функцияи баръакс аст.

Мисоли 4. Сохтани графики функцияи баръакс

Аз рӯи графики функцияи $f(x) = \sqrt{x - 2}$ истифода бурда, графики функцияи f^{-1} -ро созед ва намуди аналитикии онро нависед.

Ҳал.

1. Графики функцияи $y = \sqrt{x - 2}$ дар расми 4 нишон дода шудааст.

2. Графики функцияи f^{-1} бо роҳи симметрии инъикоси графики функцияи f нисбат ба хати ростии $y = x$ сохта мешавад (расми 4).

3. Дар функцияи $y = \sqrt{x - 2}$ x бо воситаи y ифода карда шуда, дар ин $y \geq 0$ ба инобат гирафта мешавад.

$$\sqrt{x - 2} = y$$

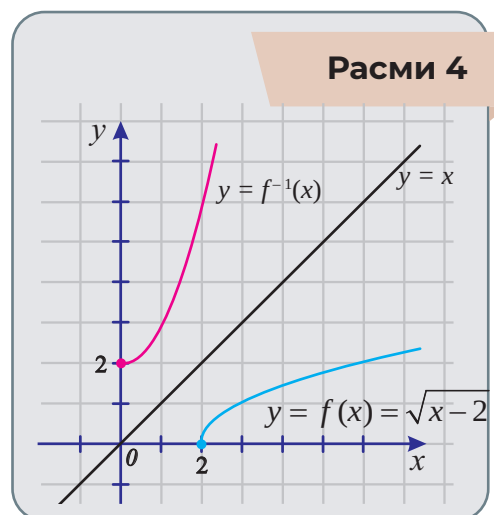
$$x - 2 = y^2$$

$$x = y^2 + 2, \quad y \geq 0.$$

Акнун биед ҷойҳои x ва y -ро иваз мекунем: $y = x^2 + 2, \quad x \geq 0$.

Пас, функцияи баръакс $f^{-1}(x) = x^2 + 2, \quad x \geq 0$ аст.

Графики ин функцияи баръакс $f^{-1}(x)$ шоҳаи ростии параболани $y = x^2 + 2$ мебошад. Инро аз расм дидан мумкин аст.



Функцияхои даврӣ

Бигзор функцияи $y = f(x)$, дода шуда бошад ва $D(f)$ соҳаи муайянии он бошад. Функцияи $y = f(x)$ **функцияи даврӣ** номида мешавад. Агар ҳамин тавр $T \neq 0$, мавҷуд бошад, ки барои ҳар як $x \in D(f)$:

1. Қиматҳои $x - T$ ва $x + T$ -ҳо $D(f)$ тааллуқ доранд,

2. Баробарии $f(x - T) = f(x) = f(x + T), y = f(x)$ -ро қаноат кунанд.

Агар адади T давраи функцияи даврии $y = f(x)$, бошад, пас барои ягон адади бутуни n адади nT низ даври он аст:

$$f(x + nT) = f(x), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Хурдтарин даври мусбати T -и функцияи даврии $y = f(x)$ **даври асосии** он номида мешавад.

Донистани даври функция барои кашидани графики он муфид аст. Дар ин маврид дар як давр сохтани порчаи графики функцияи даврӣ кифоя аст ва ин порчаи графикӣ дар дигар даврҳо такрор мешавад.

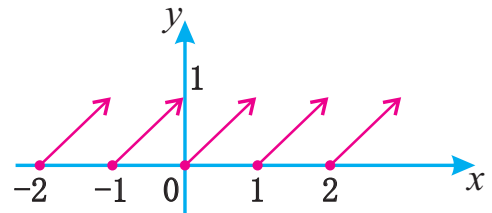
БОБИ 1. ФУНКСИЯҲО

Масалан, қисми касри адади $\{x\}$ - функцияе, ки қисми касри онро бо адади додаи x алоқаманд мекунад - функцияи даврий мебошад (расми 5). Даври асосии он ба $T_0 = 1$ баробар аст, яъне $T_0 = 1$, инчунун $(x+1) \in (-\infty; +\infty)$ барои адади ихтиёрии $x \in (-\infty; +\infty)$ ва баробарии $\{x+1\} = \{x\}$ дуруст аст.

Агар даври асосии функцияи $y = f(x)$ ба T_0 баробар бошад, пас даври асосии функцияи

$$y = kf(ax+b)+c \text{ адади } T_1 = \frac{T_0}{|a|}, (a \neq 0 \text{ мешавд}).$$

Расми 5



Графики функцияи $y = \{x\}$.

МИСОЛҲО

1. Бо истифода аз қиматҳои функцияи мураккабро ёбед $f(x) = 2x - 3$ ва $g(x) = 4 - x^2$.

- | | | | |
|---------------|---------------|---------------|---------------|
| a) $f(g(0))$ | b) $g(f(0))$ | c) $f(f(2))$ | d) $g(g(3))$ |
| e) $f(g(-2))$ | f) $g(f(-2))$ | g) $f(f(-1))$ | h) $g(g(-1))$ |

2. Функцияҳои $f(g(x))$, $g(f(x))$, $f(f(x))$, $g(g(x))$ ва соҳаи муайяни онҳоро ёбед.

- | | |
|--|--|
| a) $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = 4x - 1$ | b) $f(x) = 6x - 5$, $g(x) = \frac{x}{2}$ |
| c) $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 1$ | d) $f(x) = x^3 + 2$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$ |
| e) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = 2x + 4$ | f) $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x - 3}$ |
| g) $f(x) = x $, $g(x) = 2x + 3$ | h) $f(x) = 4 - x$, $g(x) = x + 4 $ |
| i) $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $g(x) = 2x - 1$ | j) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $g(x) = x^2 - 4x$ |
| k) $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $g(x) = \frac{1}{x}$ | l) $f(x) = \frac{2}{x}$, $g(x) = \frac{x}{x+2}$ |

3. Бо истифода аз хосиятҳои функцияҳои $f(x) = 3 - x$ ва $g(x) = x^2 + 1$ -ро ёбед.

- | | | | |
|--------------|--------------|--------------|--------------|
| a) $f(g(x))$ | b) $g(f(x))$ | c) $f(f(x))$ | d) $g(g(x))$ |
|--------------|--------------|--------------|--------------|

4. Функцияи мураккаби $f(g(h(x)))$ -ро созед.

- | |
|---|
| a) $f(x) = x - 1$, $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = x - 1$ |
| b) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x^3$, $h(x) = x^2 + 2$ |

ФУНКСИЯИ МУРАККАБ. ФУНКСИЯИ БАРЪАКС. ФУНКСИЯИ ДАВРӢ

с) $f(x) = x^4 + 1$, $g(x) = x - 5$, $h(x) = \sqrt{x}$

д) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \frac{x}{x-1}$, $h(x) = \sqrt[3]{x}$

5. Аз функцияи мураккаби намуди $f(x) = f(g(x))$ функцияҳои таркибии он f ва g -ро ҷудо кунед.

а) $F(x) = (x-9)^5$

б) $F(x) = \sqrt{x} + 1$

с) $F(x) = \frac{x^2}{x^2 + 4}$

д) $F(x) = \frac{1}{x+3}$

е) $F(x) = |1 - x^3|$

ф) $F(x) = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$

6. Баръакси функцияи додасудан f -ро ёбед.

а) $f(x) = 3x + 5$

б) $f(x) = 7 - 5x$

с) $f(x) = 5 - 4x^3$

д) $f(x) = 3x^3 + 8$

е) $f(x) = \frac{1}{x+2}$

ф) $f(x) = \frac{5}{x-6}$

г) $f(x) = \frac{3-4x}{8x-1}$

х) $f(x) = \frac{3x}{x-2}$

и) $f(x) = \frac{2x+5}{x-7}$

ж) $f(x) = \sqrt{5+8x}$

к) $f(x) = 2 + \sqrt[3]{x}$

л) $f(x) = x^6, x \geq 0$

м) $f(x) = \frac{1}{x^2}, x > 0$

н) $f(x) = 4 - x^2, x \geq 0$

о) $f(x) = x^2 + x, x \geq -\frac{1}{2}$

7. Баръакси додасударо ёбед. Графики функцияи f^{-1} аз функцияи f истифода бурда, кашед.

а) $f(x) = 3x - 6$

б) $f(x) = 16 - x^2, x \geq 0$

с) $f(x) = \sqrt{x+1}$

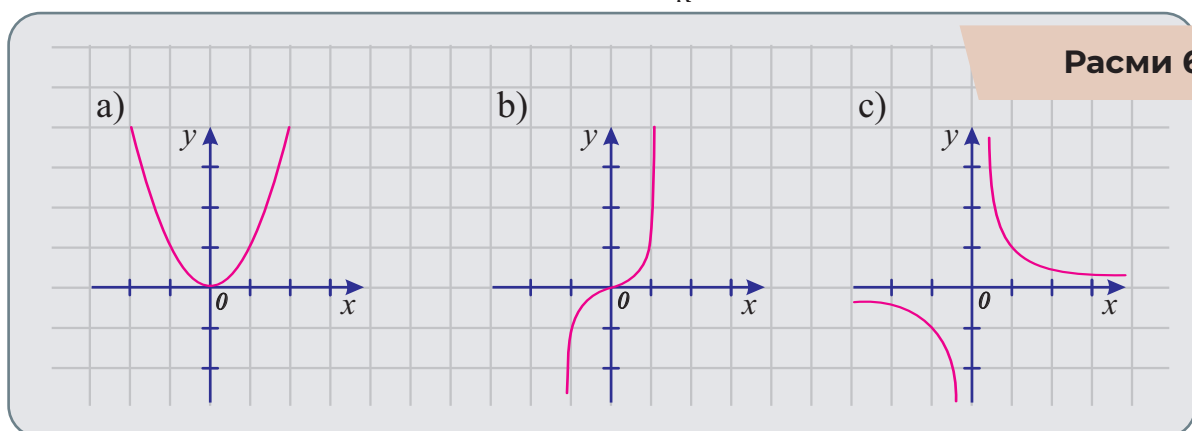
д) $f(x) = x^3$

8. Функцияҳоро, ки ба графикҳои дар расми 6 нишон дода шуда монанданд, ёбед ва графики функцияи баръакси онҳоро созед:

1) $f(x) = x^3$;

2) $f(x) = \frac{1}{x}$;

3) $f(x) = x^2$



9. Ибтот кунед, ки адади $T = \sqrt{2}$ даври функцияи $f(x) = 5 \cos x$ аст.

10. Нишон диҳед, ки функцияҳои зерин даврӣ нестанд.

а) $f(x) = \frac{1}{x-3}$

б) $f(x) = -\frac{2}{x-2}$

с) $f(x) = \frac{x}{x}$

д) $f(x) = x^2 - 4$

е) $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 + 5x + 8}$

ф) $f(x) = \sqrt[3]{x} + 3x - 1$

БОБИ 1. ФУНКСИЯҲО

ХОСИЯТҲОИ ФУНКСИЯ



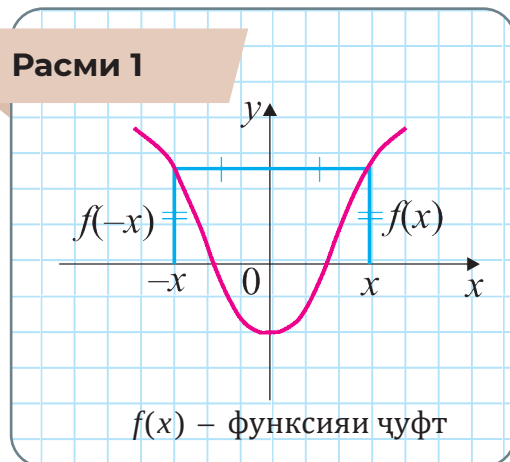
Функсияҳои чуфт ва тоқ

Функсияи $y = f(x)$ -ро дида мебароем, ки соҳаи муайянии $D(f)$ нисбат ба сифр симметрӣ аст. Агар барои нуқтаи ихтиёрии $x \in D(f)$ баробарии $f(-x) = f(x)$ иҷро шавад, $y = f(x)$ **функсияи чуфт** номида мешавад. Графики функсияи чуфт нисбат ба тири Oy симметрӣ аст (расми 1).

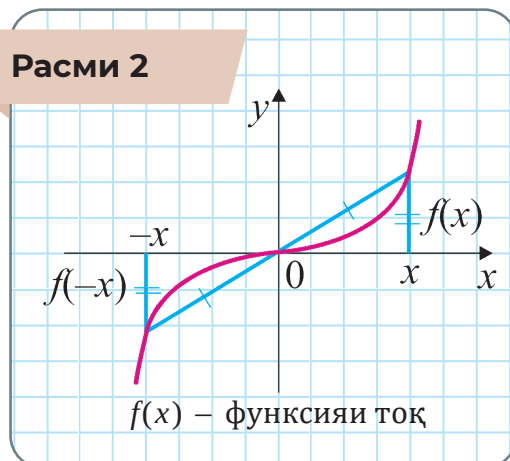
Агар элементи ихтиёрии $x \in D(f)$ баробарии $f(-x) = -f(x)$ -ро қаноат кунад, $y = f(x)$ **функсияи тоқ** номида мешавад. Графики функсияи тоқ нисбат ба ибтидои координата $O(0;0)$ симметрӣ аст (расми 2).

Агар ягонтои ду баробарии дар боло овардашуда қонеъ нашавад, он гоҳ функсияи $y = f(x)$ **на функсияи чуфт ва на тоқ** номида мешавад.

Расми 1



Расми 2



Мисоли 1. Чуфт ё тоқ будани функсияи

$$f(x) = 2x^2 + 5 \text{ -ро санҷед.}$$

Ҳал.

$$f(x) = 2x^2 + 5 \text{ яъне азбаски:}$$

$$f(-x) = 2(-x)^2 + 5 = 2x^2 + 5 = f(x)$$

функсияи $f(x)$ чуфт аст.

Мисоли 2. Чуфт ё тоқ будани функсияи

$$f(x) = 2x^3 + 5x \text{ -ро санҷед.}$$

Ҳал.

$$f(x) = 2x^3 + 5x \quad f(-x) = (-x)^3 + 5(-x) \text{ яъне:}$$

$$f(-x) = 2(-x)^3 + 5(-x) = -(2x^3 + 5x) = -f(x)$$

аз ин рӯ $f(x)$ функсияи тоқ аст.

Мисоли 3. Чуфт ё тоқ будани функсияи

$$f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x + 1 \text{ -ро санҷед.}$$

$$\begin{aligned} \text{Ҳал. } f(-x) &= 2(-x)^3 + 5(-x)^2 - 3(-x) + 1 = \\ &= -(2x^3 - 5x^2 - 3x - 1) \end{aligned}$$

Дар ин маврид $f(-x) \neq f(x)$, $f(-x) \neq -f(x)$ ва аз ин рӯ, функсияи додашуда на чуфт аст ва на тоқ.



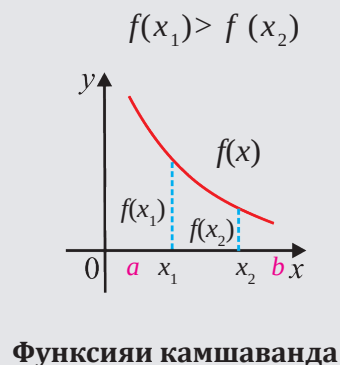
Афзоиш ва камшавии функсия

Бигузор функсияи $y = f(x)$ дар фосилаи $(a; b)$ дода шуда бошад. Агар барои ҳама $x_1, x_2 \in (a; b)$, нобаробарии қаноаткунандаи нобаробарӣ $x_1 < x_2$, иҷро шавад:

- $f(x_1) < f(x_2)$ то, $f(x)$ функсияи $(a; b)$ афзуншаванда номида мешавад;
- $f(x_1) > f(x_2)$ то, $f(x)$ функсияи $(a; b)$ – камшаванда;
- $f(x_1) \geq f(x_2)$ то, $f(x)$ функсияи $(a; b)$ – афзоянда аст;
- $f(x_1) \leq f(x_2)$ то, $f(x)$ функсия дар фосилаи $(a; b)$ камшаванда аст.

Функцияҳои афзоянда, камшаванда камнашаванда ва зиёднашаванда **функцияҳои монотонӣ** номида мешаванд.

Расми 3



◆ Нуқтаҳои экстремум ва экстремуми функция

• Агар:

1) функцияи $f(x)$ дар фосилаи $(a; b)$, ки нуқтаи x_1 ба он тааллуқ дорад, муайян карда шавад;

2) нобаробарии $f(x) < f(x_1)$ дар ҳамаи нуқтаҳои x фосилаи $(a; b)$, ба ғайр аз x_1 қаноат карда шавад, пас нуқтаи x_1 **нуқтаи максимуми функцияи $f(x)$** номида мешавад (расми 4).

Агар $x_1 \in D(f)$ нуқтаи максимуми функцияи $f(x)$, бошад, он гоҳ қимати $f(x_1)$ -и **функция максимуми функцияи $f(x)$** , номида мешавад ва ҳамчун $y_{\max}$ ишора карда мешавад. Пас,

$$y_{\max} = f(x_1).$$

• Агар:

1) функцияи $f(x)$ дар фосилаи $(a; b)$, ки нуқтаи x_2 ба он тааллуқ дорад, муайян карда шавад;

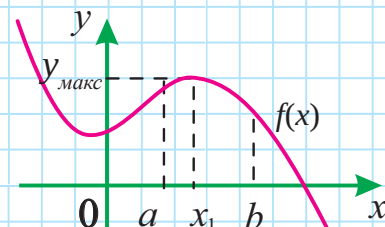
2) нобаробарии $f(x) > f(x_2)$ дар ҳамаи нуқтаҳои x ва фосилаи $(a; b)$, ба ғайр аз x_2 , қаноат карда мешавад, пас нуқтаи x_2 **нуқтаи минимуми функцияи $f(x)$** номида мешавад (расми 5).

Агар $x_2 \in D(f)$ – нуқтаи минимуми функцияи $f(x)$, бошад, он гоҳ қимати $f(x_2)$ -и функция, **минимуми функцияи $f(x)$** , номида мешавад ва ҳамчун $y_{\min}$. Пас,

$$y_{\min} = f(x_2).$$

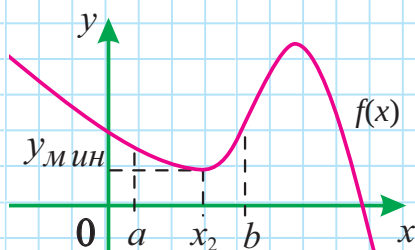
Нуқтаи максималӣ ва минималии функция, **нуқтаи экстремум** номида мешавад.

Расми 4



Барои $f(x)$ дар фосилаи $(a; b)$ нуқтаи минимуми функция – x_1 минимуми функция $y_{\max} = f(x_1)$.

Расми 5



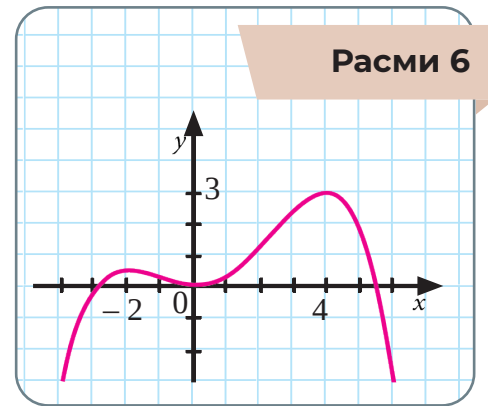
Барои $f(x)$ дар фосилаи $(a; b)$ нуқтаи минимуми функция – x_2 минимуми функция $y_{\min} = f(x_2)$.

БОБИ 1. ФУНКСИЯҲО

Мисоли 4. Графики функцияи $f(x)$ дар расми 6 нишон дода шудааст. Фосилаи афзоиш ва камшавии онро нишон диҳед.

Ҳал.

Аз рӯи расм муайян мекунем, ки функцияи $f(x)$ дар фосилаҳои $(-\infty; -2]$ ва $[0; 4]$, зиёд шуда, дар фосилаҳои $[-2; 0]$ ва $[4; +\infty)$ кам мешавад.



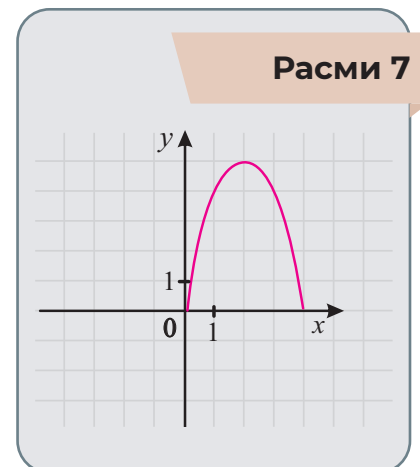
МИСОЛҲО

1. Функцияҳои муқарраршударо барои баробарии ҷуфт ё тоқ санҷед.

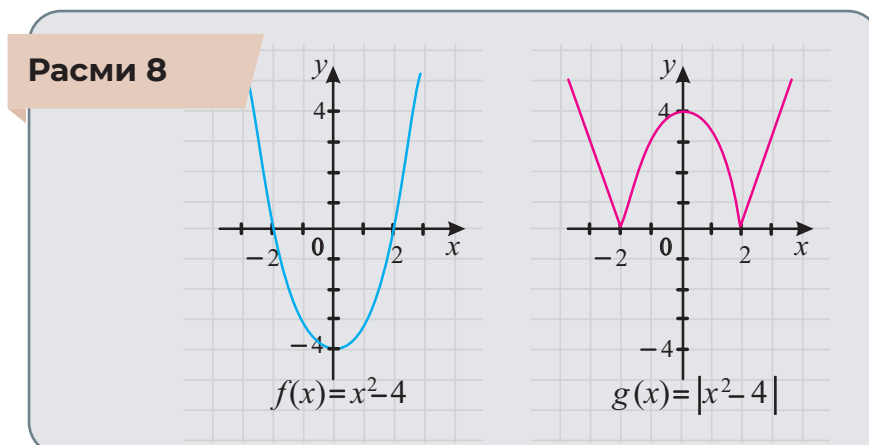
- | | |
|-----------------------------|-----------------------------|
| a) $f(x) = x^4$ | b) $f(x) = x^3$ |
| c) $f(x) = x^2 + x$ | d) $f(x) = x^4 - 4x^2$ |
| e) $f(x) = x^3 - x$ | f) $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + 1$ |
| g) $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x}$ | h) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ |

2. Дар расми 7 графики функция барои порчаи $x \geq 0$ нишон дода шудааст. Дар соҳаи $x < 0$, графике созед, ки:

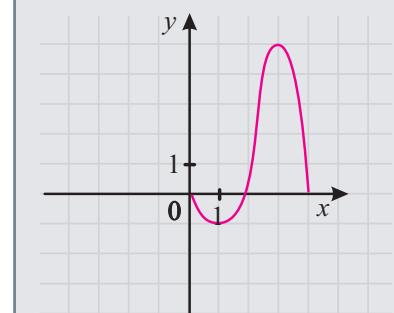
а) функцияи ҷуфт;
б) функцияи тоқ ҳосил шавад:



3. Дар расми 8 графикҳои функцияҳои $f(x) = x^2 - 4$ ва $g(x) = |x^2 - 4|$ нишон дода шудаанд. Фаҳмонед, ки чӣ тавр графики g аз графики f сохта мешавад.



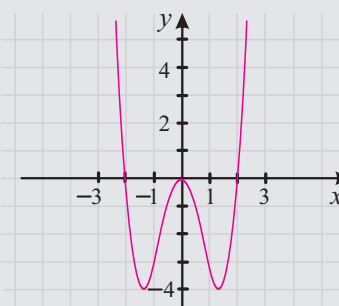
Расми 9



4. Дар расми 9 графики функция дар майдони $x \geq 0$. нишон дода шудааст. Дар майдони $x < 0$, графике созед, ки графики:

- 1) функцияи ҷуфт;
- 2) функцияи тоқ ҳосил шавад.

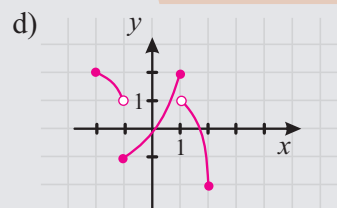
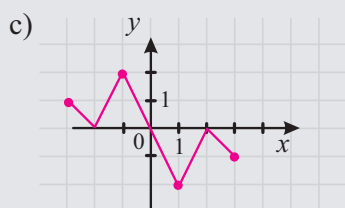
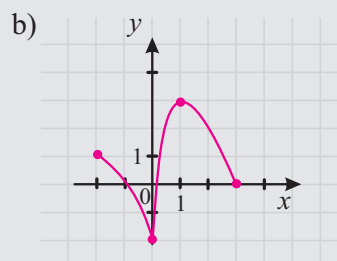
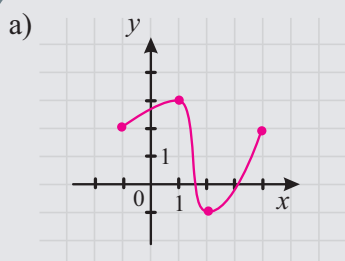
Расми 10



5. Графики функцияи $f(x) = x^4 - 4x^2$ дода шудааст (расми 10). Бо истифода аз ин график, графики функцияи $g(x) = |x^4 - 4x^2|$ -ро созед.

6. Дар расми 11 графики функцияи f дода шудааст. Бо истифода аз ин график муайян кунед:

- 1) соҳаи муайяни ва маҷмӯи қиматҳо;
- 2) фосилаҳои афзоиш ва камшавии функцияи f .



Расми 11

БОБИ 1. ФУНКСИЯҲО

7. Графикаи функцияҳои додашударо сохта, соҳаи муайянӣ ва маҷмӯи қиматҳои онҳоро муайян кунед, фосилаҳои тахминии афзоиш ва камшавиро ёбед.

a) $f(x) = x^2 - 5x$

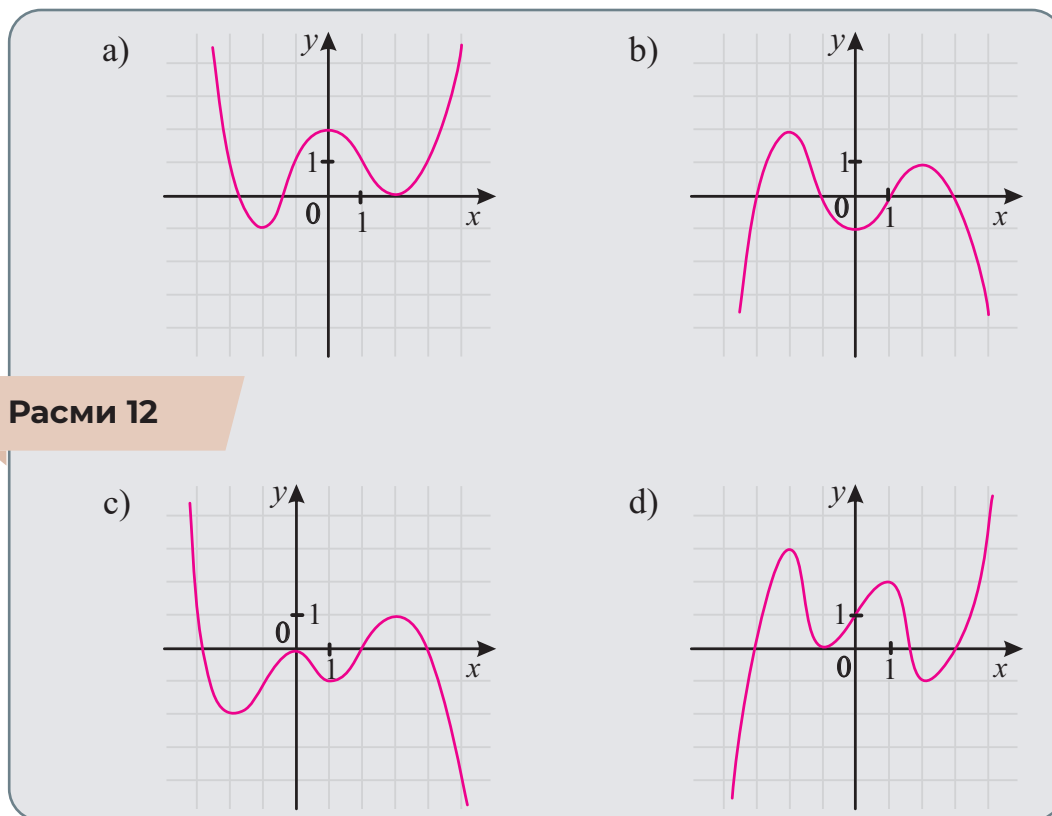
b) $f(x) = x^3 - 4x$

c) $f(x) = x^4 - 16x^2$

8. Графики функции f дода шудааст (расми 12). Бо истифода аз ин график, тахминан:

1) ҳама нуқтаҳои экстремалӣ ва ҳама нуқтаҳои экстремум;

2) фосилаи афзун ва камшавии функцияи f .



Расми 12

9. Нақшаи графики функцияҳои зеринро кашед.

a) Функция дар $(-\infty; 3]$ кам шуда, дар $[3; +\infty)$ афзоиш меёбад;

b) Функция дар $(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$ кам шуда, дар $[0; 1]$ доимӣ аст;

c) Функция дар $(-\infty; -6]$ кам шуда, дар $[-6; 0]$ афзоиш меёбад ва дар $[0; +\infty)$ доимӣ аст;

d) Функция дар $[-5; 10]$ афзоиш меёбад, доимӣ дар $[10; +\infty)$ ва қимати хурдтаринро дар нуқтаи $x = -5$ мегирад.

ТАБДИЛДИҲИИ ЭЛЕМЕНТАРИИ ГРАФИКҲОИ ФУНКСИЯ

Чойивазкунии графики функция

Графики функцияи додашудаи $y = f(x)$ -ро метавон дар ҳамвори Ox чой иваз кард. Чойивазкунии зерини графики функцияро дида мебароем.

1. Чойивазкунии графики функция дар баробари тири Ox .
2. Чойивазкунии графики функция дар баробари тири Oy .
3. Чойивазкунии графики функция ба самти ягон вектор.

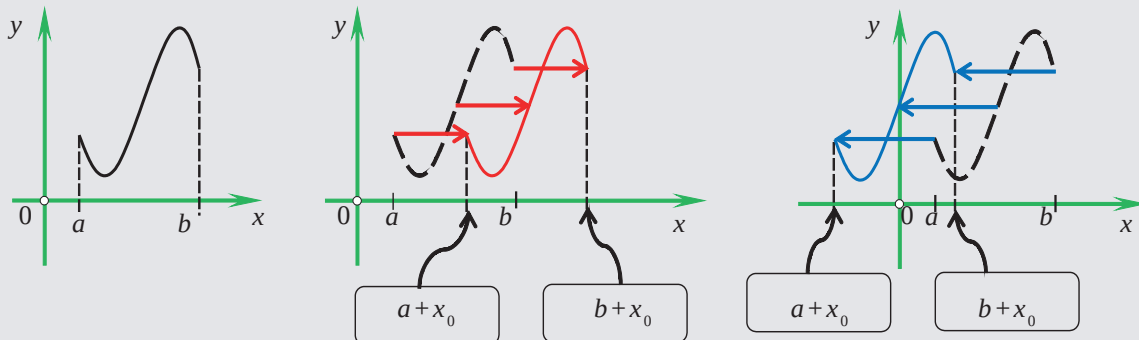
1. Чойивазкунии графики функция дар тири Ox ба x_0 воҳид (расми 1).

а) агар $x_0 > 0$, бошад, он гоҳ график x_0 воҳид ба самти тири Ox ҳаракат мекунад;

б) агар $x_0 < 0$, бошад, он гоҳ график $|x_0|$ воҳид ба муқобили тири Ox мегузарад.

Расми 1

Графики ҳосил шуда функцияи $y = f(x - x_0)$ мебошад.



а) $y = f(x)$ и додашуда графики функция аст.

б) ҳангоми $x_0 > 0$ будан $y = f(x - x_0)$ гра-
фики функция; гарафики функцияи
 $y = f(x)$ функция ба рост x_0 воҳид
гечидааст.

с) ҳангоми $x_0 < 0$ будан $y = f(x - x_0)$
графики функция; гарафики функцияи
 $y = f(x)$ ба чап $|x_0|$ воҳид гечидааст.

Мисоли 1. Бо истифода аз графики функцияи $f(x) = x^2$ функцияҳои зеринро созад.

а) $g(x) = (x + 4)^2$

б) $h(x) = (x - 2)^2$

Ҳал. Чунон ки дар расми 2 нишон дода шудааст.

а) графики функцияи f -ро ба 4 воҳид ба тарафи чап мегузаронем, барои сохтани графики g ;

б) графики функцияи f -ро ба 2 воҳид ба тарафи рост мегузаронем, барои сохтани графики h .

Расми 2



БОБИ 1. ФУНКСИЯҲО

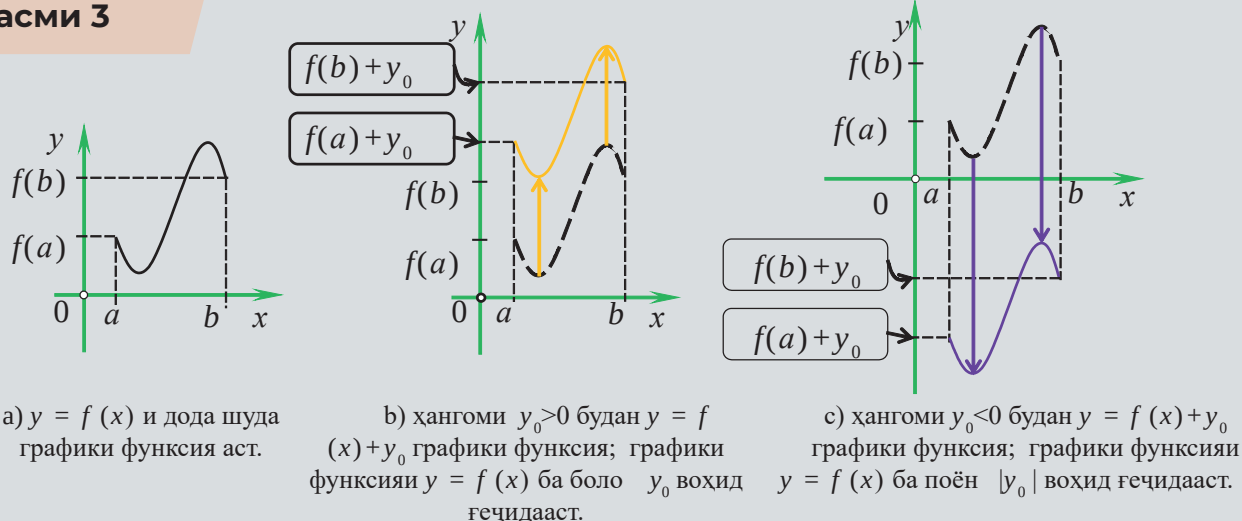
2. Ҷойивазкунии графики функция дар тири Oy ба y_0 воҳид (расми 3).

а) агар $y_0 > 0$, бошад, графики y_0 воҳид ба самти тири Oy ҳаракат мекунад;

б) агар $y_0 < 0$, бошад, он гоҳ график ба муқобили самти тири Oy ба $|y_0|$ воҳид (расми 3).

Расми 3

Графики ҳосил шудаи функцияи $y = f(x) + y_0$ мебошад.



Мисоли 2. Бо истифода аз графики функцияи $f(x) = x^2$ графики функцияҳои зеринро созед.

а) $g(x) = x^2 + 3$ б) $h(x) = x^2 - 2$

Ҳал.

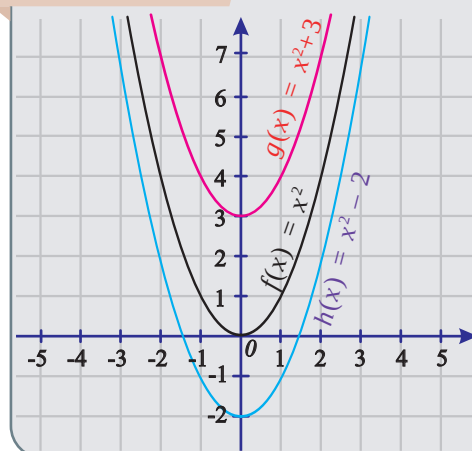
а) Ба инҳо диққат медиҳем:

$$g(x) = x^2 + 3 = f(x) + 3$$

Пас, барои кашидани графики функцияи g , ки дар расми 4 нишон дода шудааст, графики функцияи f -ро ба 3 воҳиди боло мегузaronем.

б) Ҳамин тавр, барои кашидани графики функцияи h , графики функцияи f -ро 2 воҳид ба поён мегузaronем.

Расми 4

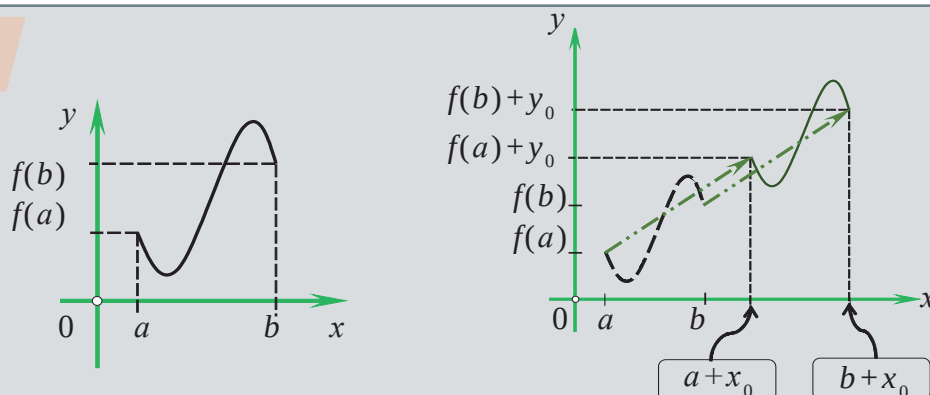


3. Ҷойивазкунии графики функция ба самти вектор $\vec{p} = (x_0; y_0)$ (расми. 5).

а) дар $|x_0|$ воҳид ба самти (агар $x_0 > 0$), ё муқобили самти (агар $x_0 < 0$) тири Ox ;

б) дар $|y_0|$ воҳид ба самти (агар $y_0 > 0$), ё муқобили самти (агар $y_0 < 0$) тири Oy .

Расми 5



ТАБДИЛДИҲИ ЭЛЕМЕНТАРИИ ГРАФИКҲОИ ФУНКСИЯ

Мисоли 3. Графики функцияи $f(x) = \sqrt{x-3} + 4$ -ро созед.

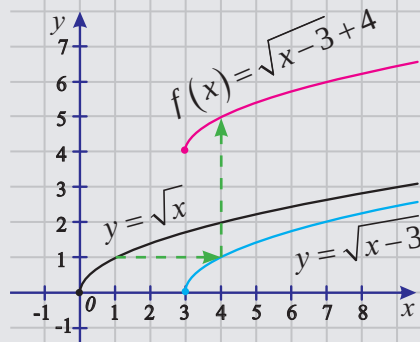
Ҳал.

Биёед, ба кашидани график ба воситаи графики функцияи $y = \sqrt{x}$ шуруъ мекунем. Онро 3 воҳид тарафи рост мегузаронем ва графики функцияи $y = \sqrt{x-3}$ -ро месозем. Пас, ин графикро ба 4 адад боло мегузарем ва графики функцияи $f(x) = \sqrt{x-3} + 4$ -ро ҳосил мекунем (расми 6).



Фишурдан ва дароз кардани графики функцияҳо

Расми 6



Графики функцияи додашудаи $y = f(x)$ метавонад дар ҳамвори Ох деформатсия (фишурда ё дароз) карда шавад. Ду ҳолати муҳимро дида мебароем.

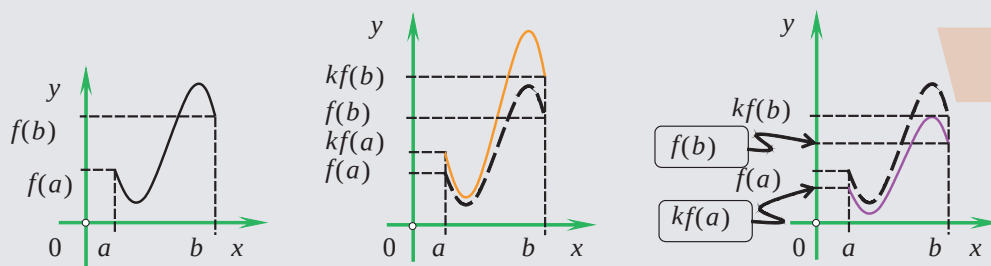
Ҳолати 1. Дар ин ҳолат функцияи додашудаи $y = f(x)$ ба $y = kf(x)$ табдил меёбад (расми 7). Дар он:

а) агар $k > 1$, бошад, пас график аз тири Ох қад-қад тири Оу k маротиба дароз карда мешавад;

б) агар $0 < k < 1$, бошад, он гоҳ график қад-қад тири Оу ба тири Ох k маротиба фишурда мешавад;

с) агар $k < 0$, бошад, пас графики функцияи $y = kf(x)$ ба графики функцияи $y = |k|f(x)$ нисбат ба тири Ох симметр аст.

Сохтани графики $y = kf(x)$



Расми 7

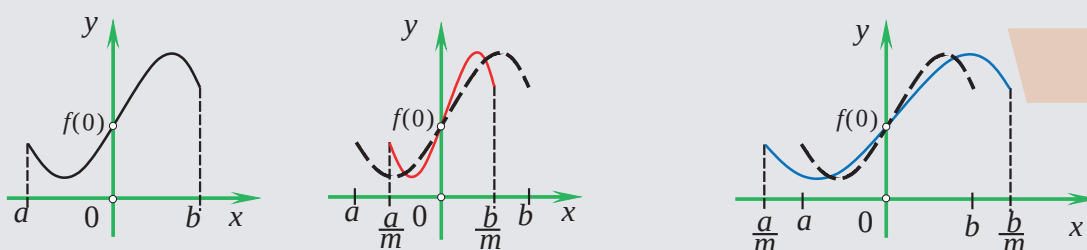
Ҳолати 2. Дар ин ҳолат функцияи додашудаи $y = f(x)$ ба $y = f(mx)$ табдил меёбад (расми 8). Дар он:

а) агар $m > 1$, бошад, он гоҳ график ба тири Оу қад-қад тири Ох m маротиба фишурда мешавад;

б) агар $0 < m < 1$, бошад, пас график аз тири Оу дар баробари тири Ох m маротиба дароз карда мешавад;

с) агар $m < 0$, бошад, пас графики функцияи $y = f(mx)$ ба графики функцияи $y = f(|m|x)$ нисбат ба тири Оу симметр аст.

Ҳосил намудани графики функцияи $y = f(mx)$



Расми 8

БОБИ 1. ФУНКСИЯҲО

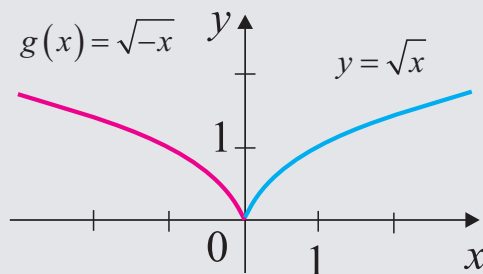
Мисоли 4. Графики функцияҳои зеринро кашед.
 $g(x) = \sqrt{-x}$

Ҳал.

Дар расми 9 аввал графики функцияи $y = \sqrt{x}$ -ро кашед. Пас графики функцияи $g(x) = \sqrt{-x}$ тавассути инъикоси симметрии ин график дар атрофи тири Оу тасвир карда мешавад.

Аҳамият диҳед, ки соҳаи муайяни функцияи: $g(x) = \sqrt{-x}$ аз маҷмӯи $\{x \mid x \leq 0\}$ таъкил мешавад.

Расми 9



Мисоли 5. Бо истифода аз графики функцияи $f(x) = x^2$ дар расми 10 графики функцияҳои зеринро созед.

а) $g(x) = 3x^2$ б) $h(x) = \frac{1}{3}x^2$

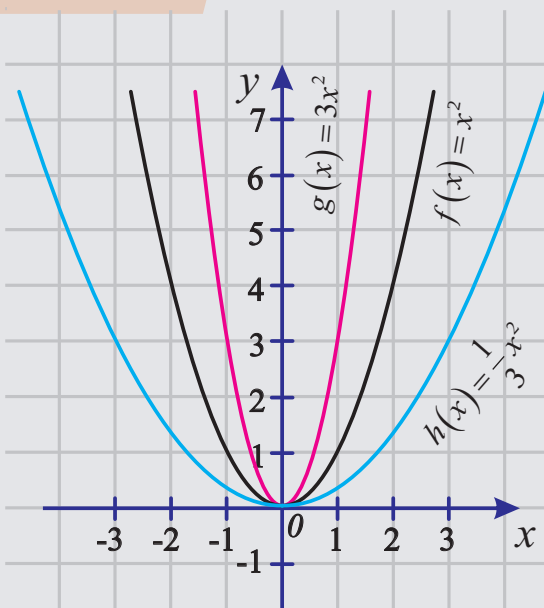
Ҳал.

а) Графики функцияи g бо роҳи зарб задани координатаи y -и ҳар як нуқтаи графики функция ба 3 сохта мешавад. Яъне барои сохтани графики функцияи g графики функцияи f -ро 3 маротиба амудӣ (вертикалӣ) дароз кардан лозим аст. Параболаи ҳосилшуда нисбат ба параболаи аслий "бориктар" аст.

б) Графики функцияи h бо роҳи зарб задани координатаи y -и ҳар як нуқтаи графики функцияи f ба $\frac{1}{3}$ сохта мешавад. Яъне барои

сохтани графҳои функцияи h графики функцияи f -ро ба тири x 3 маротиба амудӣ фишурдан лозим аст. Параболаи ҳосилшуда назар ба параболаи аслий «ғафстар» аст (расми 10).

Расми 10

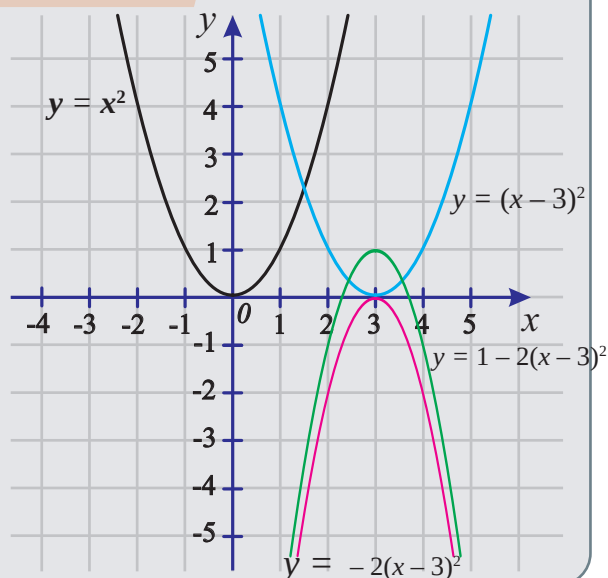


Мисоли 6. Графики функцияи $f(x) = 1 - 2(x - 3)^2$ -ро кашед.

Ҳал.

Аввал графики функцияи $y = x^2$ -ро ба таври уфуқӣ (горизонталӣ) ба 3 воҳиди рост ба тарафи рост мегузаронем ва графики функцияи $y = (x - 3)^2$ -ро мегирем. Баъд ин графикро нисбат ба тири Ох симметрий инъикос карда, пас дукарата дароз карда, графики функцияи $y = -2(x - 3)^2$ -ро мегирем. Ниҳоят, ин графикро як воҳид боло иваз карда, графики функцияи $f(x) = 1 - 2(x - 3)^2$ -ро месозем (расми 11).

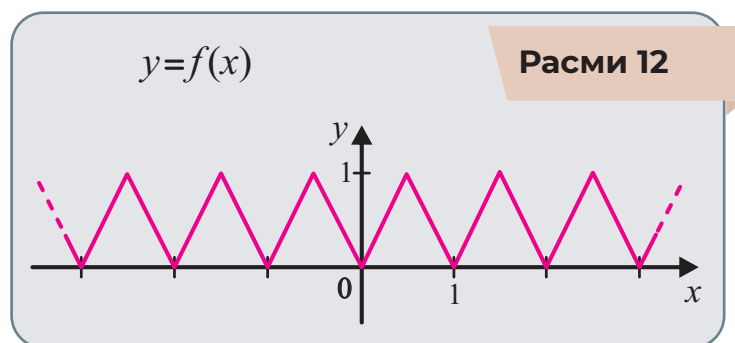
Расми 11



ТАБДИЛДИҲИ ЭЛЕМЕНТАРИИ ГРАФИКҲОИ ФУНКСИЯ

Мисоли 7. Дар расми 12 графика функцияи $y = f(x)$ нишон дода шудааст. Бо истифода аз ин график, графикҳои функцияҳои зеринро кашед.

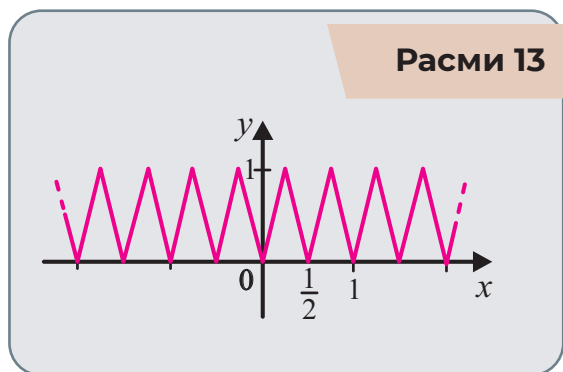
а) $y = f(2x)$; б) $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$.



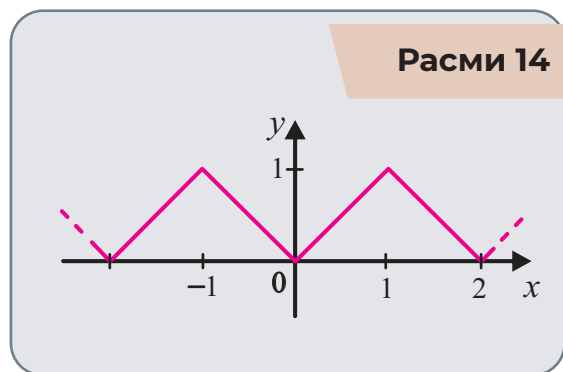
Ҳал.

а) Координатаи x -и ҳар як нуқта ро ба 2 зарб карда, графика функцияи f -ро дар самти уфуқӣ (горизонталӣ) фишурда мекунем (расми 13).

б) Координатаи x -и ҳар як нуқта ро ба $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$ зарб карда, графика функцияи f -ро ба самти уфуқӣ дароз мекунем (расми 14).



$y = f(2x)$



$y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$

МИСОЛҲО

1. Графика функцияи $f(x)$ -ро дониста, тарзи графикаи функцияҳои зеринро фаҳмонед.

а) $y = f(x) - 1$

б) $y = f(x - 2)$

в) $y = f\left(\frac{1}{4}x\right)$

д) $y = f(x) + 4$

е) $y = f(-x)$

ф) $y = 3f(x)$

г) $y = -f(x)$

ҳ) $y = \frac{1}{3}f(x)$

и) $y = f(x - 5) + 2$

ж) $y = f(x + 1) - 1$

к) $y = 4f(x + 1) + 3$

л) $y = f(4x)$

м) $y = -f(x) + 5$

н) $y = 3f(x) - 5$

о) $y = 1 - f(-x)$

БОБИ 1. ФУНКСИЯҲО

2. Фаҳмонед, ки бо кадом тағйиротҳо графики функцияи g аз графики функцияи f ташкил карда мешавад.

a) $f(x) = x^2$, $g(x) = (x+2)^2$

b) $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 + 2$

c) $f(x) = x^3$, $g(x) = (x-4)^3$

d) $f(x) = x^3$, $g(x) = x^3 - 4$

e) $f(x) = |x|$, $g(x) = |x+2| - 2$

f) $f(x) = |x|$, $g(x) = |x-2| + 2$

g) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = -\sqrt{x} + 1$

h) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{-x} + 1$

3. Бо истифода аз графики функцияи $y = x^2$ графики функцияҳои зеринро созед.

a) $g(x) = x^2 + 1$

b) $g(x) = (x-1)^2$

c) $g(x) = -x^2$

d) $g(x) = (x-1)^2 + 3$

4. Бо истифода аз графики функцияи $y = \sqrt{x}$ графики функцияҳои зеринро созед.

a) $g(x) = \sqrt{x-2}$

b) $g(x) = \sqrt{x} + 1$

c) $g(x) = \sqrt{x+2} + 2$

d) $g(x) = -\sqrt{x} + 1$

5. Барои функцияҳои додашуда графикҳои мувофиқро дар расми 15 ёбед.

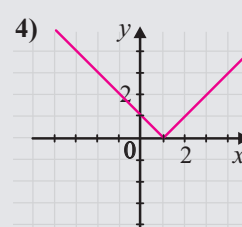
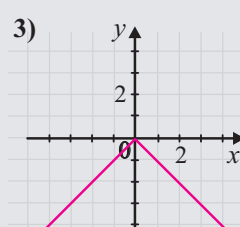
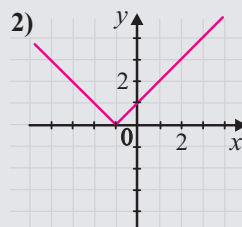
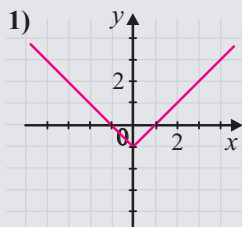
a) $y = |x+1|$

b) $y = |x| - 1$

c) $y = |x-1|$

d) $y = -|x|$

Расми 15



6. Дар графики функцияи стандартӣ графикҳои функцияҳои зеринро бо роҳи тағйир додани мувофиқ созед.

a) $f(x) = x^2 + 3$

b) $f(x) = \sqrt{x} + 1$

c) $f(x) = |x| - 1$

d) $f(x) = \sqrt{x} + 1$

e) $f(x) = (x-5)^2$

f) $f(x) = (x+1)^2$

g) $f(x) = |x+2|$

h) $f(x) = \sqrt{x-4}$

i) $f(x) = -x^3$

j) $f(x) = -|x|$

k) $y = \sqrt[4]{-x}$

l) $y = \sqrt[3]{-x}$

m) $y = \frac{1}{4}x^2$

n) $y = -5\sqrt{x}$

o) $y = 3|x|$

p) $y = \frac{1}{2}|x|$

q) $y = (x-3)^2 + 5$

r) $y = \sqrt{x+4} - 3$

s) $y = 3 - \frac{1}{2}(x-1)^2$

t) $y = 2 - \sqrt{x+1}$

u) $y = |x+2| + 2$

v) $y = 2 - |x|$

w) $y = \frac{1}{2}\sqrt{x+4} - 3$

x) $y = 3 - 2(x-1)^2$

ТАБДИЛДИХИИ ЭЛЕМЕНТАРИИ ГРАФИКҲОИ ФУНКЦИЯ

7. Тағйирот дар пайдарпайи зикршуда ба графики функцияи додашудаи f татбиқ карда мешаванд. Формулаи функцияи ҳосилшударо нависед.

a) $f(x) = x^2$, графики онро 3 воҳид ба поён гузаронед.

b) $f(x) = x^3$, графики онро 5 воҳид ба боло гузаронед.

c) $f(x) = \sqrt{x}$, графики онро 2 воҳид ба тарафи чап гузаронед.

d) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, графики онро 1 воҳид ба тарафи рост гузаронед.

e) $f(x) = |x|$, графики онро 2 воҳид ба чап ва 5 воҳид ба поён гузаронед.

f) $f(x) = |x|$, графики онро нисбат ба тири x симметрий инъикос намуда, онро 4 адад ба рост ва 3 воҳид ба боло гузаронед.

g) $f(x) = \sqrt[4]{x}$, графики онро нисбат ба тири Oy симметрий инъикос намуда, 1 воҳид ба боло гузаронед.

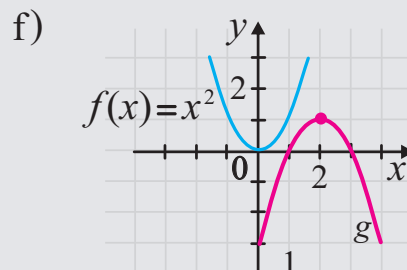
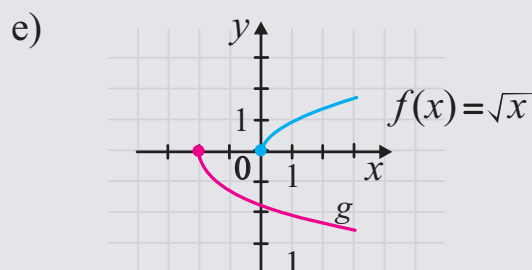
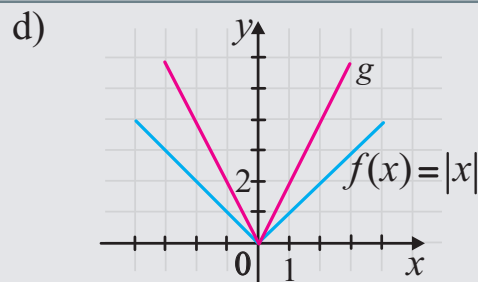
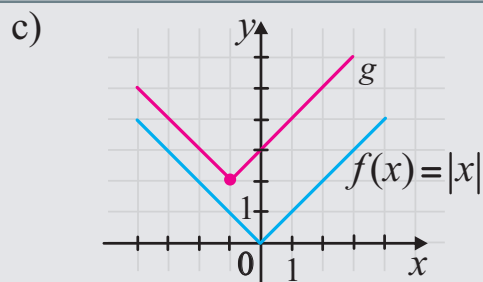
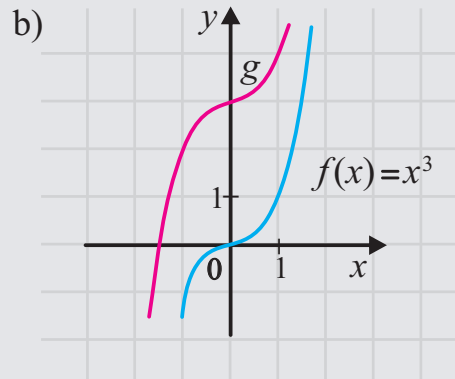
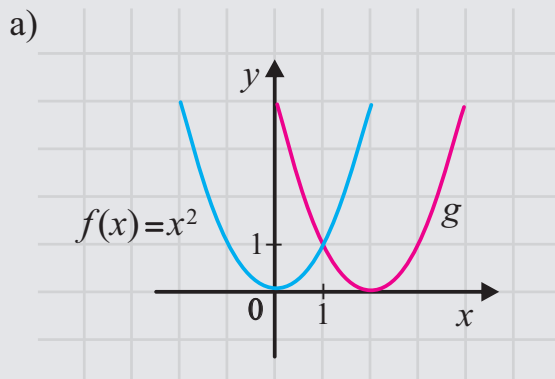
h) $f(x) = x^2$, графики онро 2 воҳид ба чап гузаронед ва онро дар атрофи тири Ox симметрий гардонед.

i) $f(x) = x^2$, графики онро 2 маротиба амудӣ дароз кунед, 2 воҳид ба поён ва 3 воҳид ба рост ҳаракат кунед.

j) графики онро $f(x) = |x|$, $\frac{1}{2}$ амудӣ хурд карда, 1 воҳид ба чап ва 3 воҳид ба боло ҳаракат кунед.

8. Графикҳои функцияҳои f ва g оварда шудаанд (расми 16). Бо истифода аз функцияи f формулаи функцияи g -ро ёбед.

Расми 16



БОБИ 1. ФУНКСИЯҲО

9. Функцияи $y = f(x)$ дода шудааст. Аз расми 17 графикҳои мувофиқи функцияҳои зеринро ёбед.

a) $y = f(x-4)$

b) $y = f(x)+3$

c) $y = 2f(x+6)$

d) $y = -f(2x)$

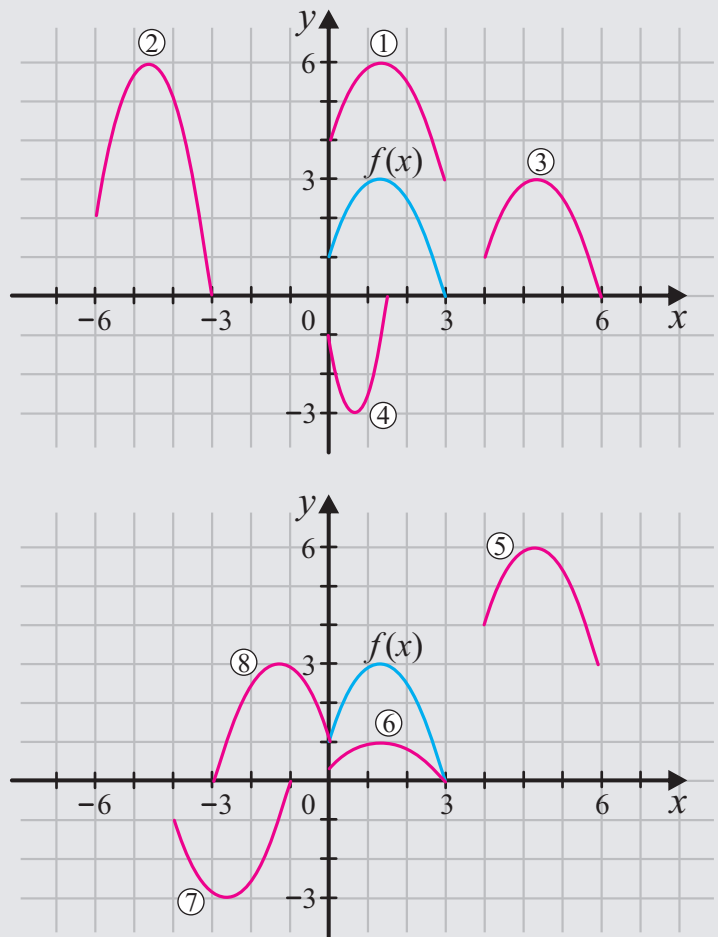
e) $y = \frac{1}{3}f(x)$

f) $y = -f(x+4)$

g) $y = f(x-4)+3$

h) $y = f(-x)$

Расми 17



МОДЕЛСОЗИИ ХАТТӢ ВА КВАДРАТӢ

Моделсозии математикӣ воситаи асосии таҳлили омӯзиши ҷараёнҳои иқтисодӣ мебошад.

Масъалаи зеринро дида мебароем.

Масъалаи 1. Чуқурии калонтаринро ёбед, ки насоси поршенӣ метавонад аз он об кашад.

Ҳал.

Тавре ки шумо медонед, фишори сутуни об дар қубури насос бо формулаи

$$p = \rho gh$$

ҳисоб карда мешавад.

Дар ин ҷо $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ зичии об $g = 10 \text{ m/s}^2$ – шитоби афтиши озод, h баландии сутуни об.

Азбаски насос дар сатҳи замин ҷойгир аст, баландии сутуни обро метавон чуқур номид. Ҳамин тавр, чуқурии обро бо формулаи

$$h = \frac{p}{\rho g}$$

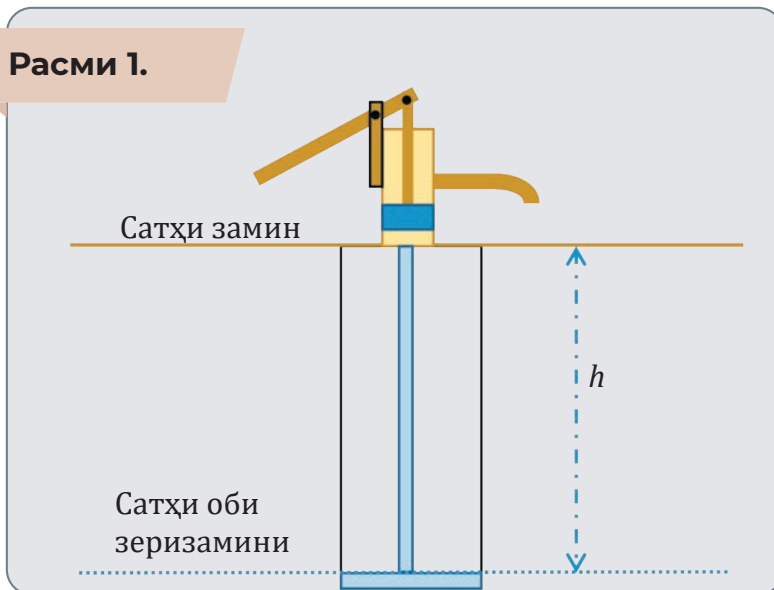
ёфтан мумкин аст.

Соли 1643 дар таҷрибаҳои физики итолиёвӣ Евангелиста Торричеллӣ исбот шуд, ки фишори сутуни об аз фишори атмосфераи $p_0 = 100000 \text{ Па}$ зиёд нест, яъне $p \leq p_0$. Аз ин рӯ, чуқурии обкашӣ дар насоси поршенӣ зиёд буда наметавонад.

$$h = \frac{p}{\rho g} \leq \frac{p_0}{\rho g} = \frac{100000}{1000 \cdot 10} = 10 \text{ m}$$

Ҷавоб: Насоси поршенӣ метавонад обро аз чуқурии максималии 10 метр гирад.

Расми 1.



Тағйирёбандаҳое, ки ба ин модел дохил карда шудаанд, аз дараҷаи аввал мебошанд ва тамоми шартҳои он тавассути амалҳои хаттӣ (ҷамъ ва зарб ба адад) ин тағйирёбандаҳо муқаррар карда мешаванд. Аз ин рӯ, чунин модели математикӣ **моделҳои хаттӣ** номида мешавад. Ҷараёни ба шакли модели хаттӣ овардани масъалаи додашударо **моделсозии хаттӣ** меноманд.

БОБИ 1. ФУНКСИЯҲО

Масъалаи 2. Донишҷӯ ҳамвориин координати Oxy -ро тавре интихоб кардааст, ки хонаи худро ҳамчун ибтидои координата $O(0;0)$ гирифтааст (расми 2). Баъд фаҳмид, ки мактабе, ки ӯ таҳсил мекунад, дар нуқтаи $C(4; 3)$ воқеъ аст. Ӯ ҳисоб кард, ки қисмати хати рости роҳи байни хона ва мактаб тири Ox -ро дар нуқтаи $(6; 0)$ ва тири Oy -ро дар нуқтаи $(0; 4)$ мебурад.

Маълум аст, ки дар мактаб антенаи (мавҷгир) як ширкати мобилӣ насб шудааст. Донишҷӯ ба ёфтани нуқтае дар роҳ таваҷҷӯҳ дошт, ки дар он телефони мобилии мусофири мошине, ки дар роҳ ҳаракат мекунад, мавҷи аз антена барояндаро беҳтар қабул мекунад.

Супориш. Шумо ин масъаларо чӣ гуна ҳал мекардед?

Ҳал. Аён аст, ки дар нуқтаи роҳи наздиктарин ба мактаб, телефони мобилӣ беҳтарин қабул дорад. Барои ҳалли ин масъала муодилаи хати рости тасвирунандани роҳ (AB) тартиб дода, координатаҳои нуқтаи наздиктарини онро ба мактаб ёфтан лозим аст. Барои ин дар асоси гуфтаҳои боло расми вазъият кашида мешавад (*нигаред ба расми 2*).

Сипас муодилаи хати росте, ки аз нуқтаҳои $A(6; 0)$ ва $B(0; 4)$ мегузарад, сохта мешавад. Барои ин координатаҳои нуқтаҳои $A(6; 0)$ ва $B(0; 4)$ -ро ба муодилаи хати рости

$$y = kx + b$$

иваз намуда, муодилаҳои

$$0 = k \cdot 6 + b$$

$$4 = k \cdot 0 + b$$

ҳосил карда мешаванд. Аз инҳо коэффисиентҳои

$$b = 4, \quad k = -\frac{2}{3}$$

пайдо шудаанд. Пас, муодилаи хати рости (AB) намуди

$$y = -\frac{2}{3}x + 4$$

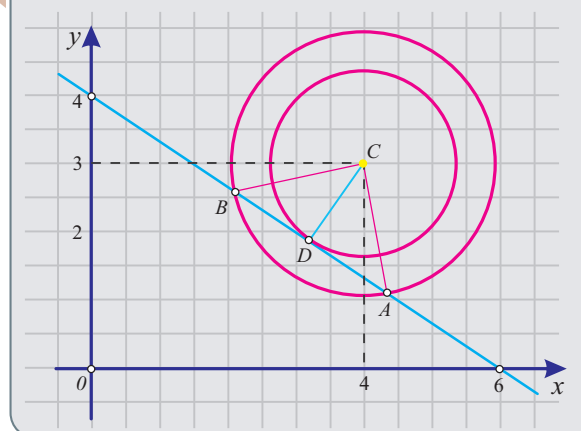
-ро дорад.

Ҳалли масъала ин аст, ки нуқтаи наздиктарини $D(x; y)$ хати рости (AB) ба нуқтаи $C(4; 3)$ дода шавад. Модели математикии ин вазъият чунин навишта мешавад:

$$F = \sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2} \rightarrow \text{дақиқа},$$

$$y = -\frac{2}{3}x + 4$$

Расми 2



Моделҳои математикии ин намуд **моделҳои квадратӣ** номида мешаванд, зеро тағйирёбандаҳои ин модел дорои тартиби якум ва дуум мебошанд. Чараёни ба намуди модели квадратӣ овардани масъалаи додашударо **моделсозии квадратӣ** меноманд.

МИСОЛҲО

1. Барои ҳар як вазифа модели хаттиро нависед:

- Шумо велосипедро бо пардохти ибтидоии 10000 сӯм ва нархи 5000 сӯм дар як соат иҷора гирифтед.
- Сехи таъмири автомобилҳо ба маблағи 50 000 сӯм ва нормайи яксоата 15 000 сӯм муқаррар кардааст.
- Дарозии шамъ 30 см, суръати сӯзиш 1,4 см дар як соат.
- Мутахассиси барномасозӣ барои машварат 75 доллар ва барои як соат пас аз машварат 35 доллар талаб мекунад.
- Ҳарорати ҷорӣ то 25°C, буда, шабона ҳар соат то 2°C дараҷа паст шуданаш дар назар аст.
- Аҳолии деҳа 6791 нафар буда, соле 7 нафар кам мешавад.

2. Муайян кунед, ки оё функсияи ҷадвали додашуда хаттӣ аст ё квадратӣ.

x	0	1	3	4	6
y	5	10	20	25	35

3. Вақте ки тӯб ба боло ва поён мепарад, баландии расидани он пайваستا кам мешавад. Дар ҷадвали зер баландии ҷаҳиш бо мурури замон нишон дода шудааст.

- Функсияи квадратии мувофиқтаринро ёбед.
- Баландии максималиро, ки тӯб мерасад, ёбед.
- Ҳисоб кунед, ки тӯб пас аз 2,5 сония чӣ қадар баланд буд.

t (s)	2	2,2	2,4	2,6	3
h (dyum)	2	16	26	33	42

4. Агар санг аз болои бинои 70 метра партофта шавад, баландии санг ҳамчун функсияи вақт бо функсияи квадратии $h(t) = -5t^2 - 20t + 70$, дода мешавад, ки дар он t бо сония ва баландӣ бо метр ифода ёфтааст. Пас аз чанд сония санг ба замин меафтад?

5. Барои тоза кардани ҳуҷрааш ба Умеда назар ба Чарос ду баробар вақт лозим аст. Моҳичеҳра барои тоза кардани хонаи худ аз Чарос 10 дақиқа бештар вақт сарф мекунад. Дар маҷмӯъ, онҳо 90 дақиқаи худро барои тоза кардани ҳуҷраҳо сарф мекунад. Барои тоза кардани ҳуҷрааш ба Умеда чӣ қадар вақт лозим аст?

6. Дилшод барои марворид ба баҳр ғӯта зад. Чуқурии ғӯтазании он пас аз t сония

$$h(t) = -4t^2 + 4t + 3 \text{ метр буд, } t \geq 0.$$

- Марваридҳо дар чӣ қадар чуқурӣ мебошанд?
- Барои гирифтани марворид ба Дилшод чанд вақт лозим аст?
- Дилшод аз кадом баландӣ ба об ғӯта зад?

7. Зулайхо барои дӯхтани либос супориш гирифт. Агар вай дар як рӯз x курта дӯзад, вай $P(x) = -x^2 + 20x$ сӯм кор мекунад.

- Вай бояд чанд курта дӯзад, то ғоидааш бештар шавад?
- Даромади калонтарин кадом аст?

8. Дар соли 2005 аҳолии Зарафшон ҳудуди 55 000 нафар буд. Дар он вақт шумораи аҳоли соле қариб 2000 нафар меафзуд. Модели хаттӣ созед, то шумораи аҳолии Зарафшонро барои ҳар як соли муайян ёбед. Аҳолии Зарафшон дар соли 2010 чанд буд? Шумораи аҳолии Зарафшонро дар соли 2025 ҳисоб кунед.

БОБИ 1. ФУНКСИЯҲО

КОРИ ЛОИҲАВЇ

Ҳар як график гуфта метавонад

Агар тасвир ҳазорҳо калимаро ифода кунад, пас график ҳадди аққал чанд сатри ҷумларо шарҳ медиҳад. Дарвоқеъ, график баъзан метавонад ҳикояро назар ба бисёр калимаҳо зудтар ва муассиртар нақл кунад. Таъсири харобиовари сукути бозори саҳҳомӣ дар соли 1929 фавран дар диаграммаи Dow Jones Industrial Average (DJIA) намоён аст. Рӯзнамаҳои он вақт чунин графикҳоро ҳамчун роҳи ачибе барои расонидани ҳаҷми зарар нашр мекарданд. Калимаҳо лозим нест, ки маънои тасвирро дар расми 1 ифода кунад.

Расми 1

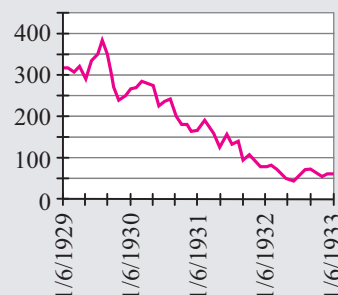


Диаграмма як ҳикояи оддиро нақл мекунад: чизе поён афтидааст – шояд фурӯш, ғоида ё ҳосилнокӣ – ва шахси масъул хеле нигарон аст.

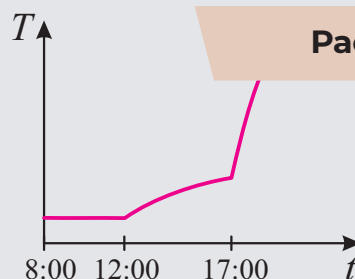
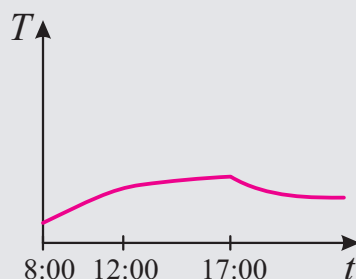
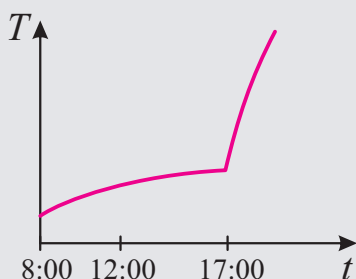
Дар ин лоиҳаи тадқиқотӣ, мо ҳикояҳоеро меомӯзем, ки график ба мо нақл мекунад ва графикеро эҷод мекунем, ки ҳикояро нақл мекунад.

Расми 2

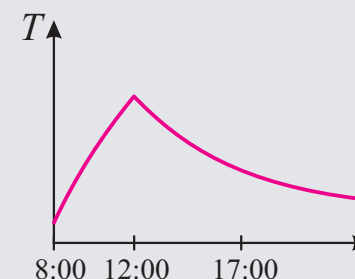


Аз рӯи ҷадвал хондани таърих

1. Дар расми 3 чор қитъаи ҳарорат нисбат ба вақт (аз соати 8:00 пагоҳӣ) ва се қисса нишон дода шудааст.



Расми 3



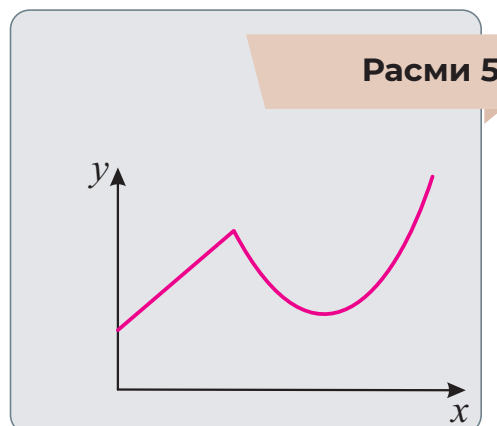
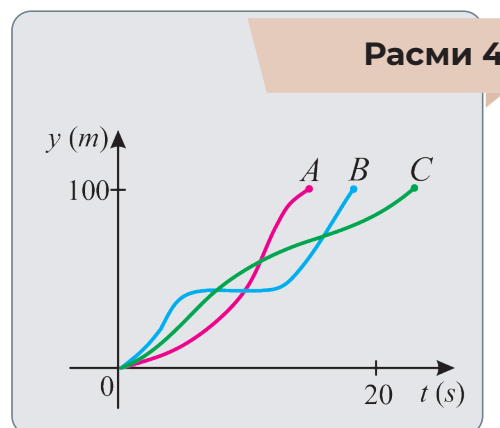
а) ҳар як ҳикояро бо яке аз графикҳо мувофиқат кунед;

б) барои графике, ки ба ягон ҳикоя мувофиқат намекунад, ҳикояи мувофиқ нависед.

Ҳикояи 1	Нисфирӯзӣ гўштро аз яхдон бароварда, рӯи миз гузоштам, то об шавад. Баъд ба хона омадам, онро дар танӯр пухтам.
Ҳикояи 2	Субҳ гўштро аз яхдон бароварда, рӯи миз гузоштам, то об шавад. Баъд ба хона омадам, онро дар танӯр пухтам.
Ҳикояи 3	Субҳ гўштро аз яхдон бароварда, рӯи миз гузоштам, то об шавад. Ман инро фаромӯш карда, дар роҳ аз кор дар қаҳвахона хӯрок мехӯрдм. Вақте ки ман ниҳоят ба хона расидам, ман гўштро дар яхдон гузоштам.

2. Дар давидан ба масофаи 100 метр се нафар даванда иштирок карданд. График дар расми 4 масофаи тайшударо ҳамчун функцияи вақт барои ҳар як даванда нишон медиҳад. Тавсиф кунед, ки график ба шумо дар бораи ин мусобиқа чӣ мегӯяд. Кӣ дар мусобиқа ғолиб омад? Оё ҳама давандагон мусобиқаро анҷом доданд? Ба фикри шумо, бо варзишгари В чӣ шуд?

3. Ҳикояеро созед (дар бораи ҳама гуна вазъият), ки ба ҳикояе, ки дар расм нишон дода шудааст, мувофиқ аст (расми 5).





БОБИ 2. МУОДИЛА ВА НОБАРОВАРИҲОИ РАТСИОНАЛӢ. МУОДИЛАҲОИ ИРРАТСИОНАЛӢ

- МУОДИЛАҲОИ РАТСИОНАЛӢ
- СИСТЕМАИ МУОДИЛАҲОИ РАТСИОНАЛӢ
- НОВАРОВАРИҲОИ РАТСИОНАЛӢ
- СИСТЕМАИ НОВАРОВАРИҲОИ РАТСИОНАЛӢ
- МУОДИЛАИ ИРРАТСИОНАЛӢ
- СИСТЕМАИ МУОДИЛАҲОИ ИРРАТСИОНАЛӢ

МУОДИЛАҲОИ РАТСИОНАЛӢ



Мафҳумҳои асосӣ ва таъриф

Таъриф.

Баробарии намуди $f(x) = g(x)$ **муодилаи дорой як номаълум** номида мешавад (дар ин ҷо $f(x)$ ва $g(x)$ функсияҳои вобаста ба тағйирёбандаи x мебошанд).

Агар ҳангоми дар муодила иваз кардани қимати $x = a$ ва баробарии дурусти ададии $f(a) = g(a)$, ба вучуд омада бошад, он гоҳ қимати a -ро **решаи муодилаи $f(x) = g(x)$** меноманд.

Ҳалли муодила маънои ёфтани тамоми решҳои он ё исботи мавҷуд набудани решаро дорад.

Маҷмӯи ҳамаи решҳои муодила **ҳалли муодила** номида мешавад.

Агар қимати номаълуми x , ки решаи муодила аст, мавҷуд набошад, он гоҳ ифодаи **"Муодила реша надорад"** ё **"Ҳалли муодила маҷмӯи холист"** истифода мешавад, ки онро ҳамчун $x \in \emptyset$ низ навиштан мумкин аст.

Мисоли 1. Муодиларо ҳал кунед $(x+3)(2x-1)(x-2) = 0$.

Ҳал. Тарафи ростии ин муодила ба сифр баробар аст ва тарафи чапаш ҳосили зарби се ифода аст. Азбаски ҳосили зарб танҳо дар сурате ба сифр баробар аст, ки ақаллан яке аз маҷмӯъҳои он ба сифр баробар аст, пас ҳангоми ба сифр баробар будани ҳар яке аз маҷмӯъҳоро алоҳида дида мебароем: $x+3=0$, $2x-1=0$, $x-2=0$. Аз ин муодилаҳои бадастомада мо метавонем решҳои муодиларо муайян кунем.

Ҷавоб: $x_1 = -3$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = 2$,

Мисоли 2. Муодилаеро нависед, ки решаш 0 , -1 ва $\sqrt{2}$ аст.

Ҳал. Навъҳои гуногуни муодилаҳо ҳамчун ҷавоб дода шуданаш мумкин.

Хотиррасон мекунем, ки муодилаи соддатарин шакли

$$x(x+1)(x-\sqrt{2}) = 0 \text{ дорад.}$$

Ин адаҳо низ метавонанд решҳои муодилаи навбатӣ бошанд

$$(x^2 + x^3)(x - \sqrt{2})(x^2 + 3) = 0$$

Таъриф.

Агар ҳамаи решҳои муодилаи $f(x) = g(x)$ решҳои муодилаи $f_1(x) = g_1(x)$, бошанд ва баръакс, ҳамаи решҳои муодилаи $f_1(x) = g_1(x)$ решҳои муодилаи $f(x) = g(x)$, мебошанд, яъне агар ҳалли онҳо ба ҳам мувофиқат кунад, ин гуна муодилаҳоро, **муодилаҳои эквивалентӣ** меноманд.

Мисоли 3. Эквивалентии муодилаҳоро санҷед $3x - 6 = 0$ ва $2x - 1 = 3$.

Ҳал. Муодилаҳои $3x - 6 = 0$ ва $2x - 1 = 3$ баробаранд, зеро $x = 2$ ягона решаи ҳар яке аз ин муодилаҳо мебошад.

Ҳар ду муодилае, ки ҳалли онҳо маҷмӯи холӣ аст, баробаранд.

БОБИ 2. МУОДИЛА ВА НОБАРОБАРИҲОИ РАТСИОНАЛӢ. МУОДИЛАҲОИ ИРРАТСИОНАЛӢ

Муодилаҳои эквивалентӣ ба таври зерин ифода карда мешаванд: $3x - 6 = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 3$.

а) Вақте ки ягон намуди муодила аз як қисми муодила ба қисми дигари муодила бо аломати муқобил гузаронида мешавад.

Масалан, $f(x) = g(x) + t(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = t(x)$.

б) Вақте ки ҳарду тарафи муодила ба рақами ғайри сифр зарб ё тақсим карда мешавад.



Муодилаҳои ратсионалии бутун

Агар функцияҳои $f(x)$ ва $g(x)$ бо ифодаҳои бутуни ратсионалии дода шаванд, он гоҳ муодилаи

$$f(x) = g(x)$$

муодилаи бутуни ратсионалӣ номида мешавад.

Соҳаи муайянии чунин муодила маҷмӯи ҳамаи ададҳои ҳақиқӣ мебошад.

Таъриф.

Муодилаи намуди $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$, $a_0 \neq 0$ муодилаи ратсионалии дараҷаи n -и намуди стандартӣ номида мешавад. Дар ин ҷо $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ коэффисиентҳои мебошанд, истилоҳи озод аст.

Агар $a_0 = 1$ пас, $x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$ муодилаи ратсионалии дараҷаи n -и камшуда номида мешавад.

Маълум аст, ки решаи дараҷаи n , на бештар аз n реша дошта метавонад, бинобар ин, ҳар як муодилаи ратсионалии дараҷаи n -уми шакли стандартӣ низ на бештар аз n реша дорад.

Теорема. Агар решаҳои муодилаи умумии ратсионалии додашуда бо коэффисиентҳои бутун ададҳо бошанд, пас онҳо тақсимкунандагони аъзои озод мебошанд.

Мисоли 4. Муодиларо ҳал кунед $x^4 + 2x^3 = 11x^2 - 4x - 4$.

Ҳал. Аввал онро ба намуди стандартӣ меоварем: $x^4 + 2x^3 - 11x^2 + 4x + 4 = 0$.

Барои боварӣ ҳосил кардан, ки ин муодила решаҳои бутун дорад, мо тақсимкунандаҳои аъзои озоди 4-ро менависем: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$. Ин ададҳоро ба муодила иваз карда, муайян мекунем, ки $x_1 = 1$ ва $x_2 = 2$ решаҳои муодила хоҳанд буд. Аз ин рӯ, бисёраъзогии $x^4 + 2x^3 - 11x^2 + 4x + 4$ ба бисёраъзогии $(x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$ ба бақия тақсим мешавад.

$$\begin{array}{r|l}
 x^4 + 2x^3 - 11x^2 + 4x + 4 & x^2 - 3x + 2 \\
 \underline{x^4 - 3x^3 + 2x^2} & \underline{x^2 + 5x + 2} \\
 5x^3 - 13x^2 + 4x + 4 & \\
 \underline{5x^3 - 15x^2 + 10x} & \\
 2x^2 - 6x + 4 & \\
 \underline{2x^2 - 6x + 4} & \\
 0 &
 \end{array}$$

Муодиларо дар намуди $(x-1)(x-2)(x^2 + 5x + 2) = 0$ аз нав менависем.

Аз ин рӯ, муодилаи ҳосилшуда ба муодилаи додашуда баробар аст. Ҳар як зарбкунандаро ба сифр баробар карда, мо решаҳои муодиларо пайдо мекунем.

Ҷавоб: $x_1 = 1; x_2 = 2, x_{3,4} = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}.$

Мисоли 5. Муодиларо ҳал кунед $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$.

Ҳал. Тақсимкунандаҳои аъзои озод $x^3 - 3x^2 - 13x + 15$. Санҷиши он осон аст, ки 1, -3, 5 решаи муодила аст. Аз ин рӯ, бисёраъзогии тарафи чапи муодила ба таври зайл ба намудҳо ҷудо карда мешавад.

$$x^3 - x^2 - 2x^2 + 2x - 15x + 15 = 0$$

$$x^2(x-1) - 2x(x-1) - 15(x-1) = 0$$

$$(x-1)(x^2 - 2x - 15) = 0$$

$$(x-1)(x-5)(x+3) = 0$$

Ҳар як зарбкунандаро ба сифр баробар карда, решаҳои муодиларо меёбем
 $x_1 = 1, x_2 = 5, x_3 = -3$

Ҷавоб: $x_1 = 1, x_2 = 5, x_3 = -3.$

Мисоли 6. Муодиларо ҳал кунед $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$.

Ҳал. Ин муодила муодилаи тартиби чорум (симметрикӣ) мебошад. Ҳарду тарафи муодиларо ба $x^2 \neq 0$ тақсим мекунем ва муодилаи ба он баробарқувваро мегирем:

$$x^2 - 5x + 8 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 8 = 0$$

$x + \frac{1}{x} = t$ шартҳоро гурӯҳбандӣ карда, муодиларо ба намуди

$$t^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2 \text{ меорем.}$$

Бо дохил кардани ишораҳои $t^2 - 5t + 6 = 0$ муодилаи соҳиб мешавем. Решаҳои ин муодила $t_1 = 2$ ва $t_2 = 3$. Ин қиматҳоро ба аломат иваз намуда, мебинем, ки ҳалли муодилаи додашуда маҷмӯи ҳалли муодилаҳои $x + \frac{1}{x} = 2$ ва $x + \frac{1}{x} = 3$ мебошад.

Ин муодилаҳоро ҳал карда, $x_1 = 1, x_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ ва $x_3 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ -ро меёбем.

Ҷавоб: $x_1 = 1, x_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, x_3 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$

БОБИ 2. МУОДИЛА ВА НОБАРОБАРИҲОИ РАТСИОНАЛӢ. МУОДИЛАҲОИ ИРРАТСИОНАЛӢ

Мисоли 7. Муодиларо ҳал кунед $3x^3 + 4x^2 + 4x + 3 = 0$.

Ҳал. Муодилаи додашуда муодилаи баробари (яъне бо коэффициентҳои симметрии) дараҷаи сеюм аст. Барои ҳалли он тарафи чапи онро ба зарбкунандаҳо ҷудо мекунем ва муодилаи баробарқувваро мегирем:

$$3(x^3 + 1) + 4x(x + 1) = 0$$

$$(x + 1)(3x^2 - 3x + 3 + 4x) = 0$$

$$(x + 1)(3x^2 + x + 3) = 0.$$

Ҳалли муодилаи охирин Суммаи ҳалли ду муодилаи зерин мебошад.

$$x + 1 = 0 \quad \text{ва} \quad 3x^2 + x + 3 = 0.$$

Решаи муодилаи якум $x = -1$, аст ва муодилаи дуюм реша надорад.

Ҷавоб: $x = -1$.



Муодилаҳои касрӣ-ратсионӣ

Муодилаҳое, ки ба намуди $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ овардан мумкин аст, **муодилаҳои ратсионӣ**

касрӣ номида мешаванд (дар ин ҷо $f(x)$ ва $g(x)$ – бисёраъзогӣ дар тағйирёбандаи x мебошанд).

Соҳаи муайянии муодилаи ратсионӣ касрӣ $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ аз тамоми қиматҳои x иборат аст, ки барои он $g(x) \neq 0$ аст.

Қадамҳои ҳалли муодилаҳои ратсионӣ

- Ҳамаи ифодаҳои муодила ба тарафи чапи муодила гузаронида мешаванд;
- Ҳамаи ифодаҳо ба махраҷи умумӣ оварда мешаванд;
- Муодила ба намуди $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ оварда мешавад;
- Сифрҳои ададҳо ёфта мешаванд;
- Соҳаи муайянӣ ёфта мешавад;
- Решаҳои муодила сифрҳои ададҳои ба соҳаи муайянӣ дохилшуда мебошанд.

Ё барои ёфтани роҳи ҳалли муодилаи ратсионӣ $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ он ҳамчун системаи баробарии $\begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$ навишта мешавад ва система ҳал карда мешавад.

Ҳангоми ҳалли муодилаҳои касрӣ-ратсионӣ дар намуди система талаби ба сифр баробар набудани махраҷ муҳим аст. Дар акси ҳол, дар баъзе ҳолатҳо, решаҳои бегона пайдо мешаванд. Масалан, муодилаи $\frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = 0$ -ро дида мебароем.

Ададҳоро ба сифр баробар мекунем ва муодилаи ҳосилшударо ҳал мекунем:

$$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 1.$$

Қимати $x = 1$ -и номаълум ба таърифи муодилаи додашуда дохил карда нашудааст, яъне $x = 1$ решаи бегона аст.

Мисоли 8. Решаи муодиларо ёбед $\frac{2x+3}{x-1} = 0$.

Ҳал. $\begin{cases} 2x+3=0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x=-3 \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1,5 \\ x \neq 1 \end{cases}$

Ҷавоб: $x = -1,5$.

Мисоли 9. Муодиларо ҳал кунед: $\frac{4x+4}{3(x+2)-3} = 0$.

Ҳал. $\begin{cases} 4x+4=0 \\ 3(x+2)-3 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x=-4 \\ 3x+6-3 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x \neq -1 \end{cases}$

Маълум аст, ки қимати x наметавонад ба -1 баробар бошад. Барои ҳамин

Ҷавоб: $x \in \emptyset$.

Мисоли 10. Решаҳои муодиларо ёбед: $\frac{-2x-4}{x^2-4} = \frac{x+5}{x-2}$.

Ҳал. Тамоми ифодаҳои баробарро ба тарафи чап мегузаронем ва ба махраҷи умумӣ меорем.

$$\begin{aligned} \frac{x+5}{x-2} + \frac{2x+4}{x^2-4} = 0 &\Rightarrow \frac{(x+5)(x+2)+2x+4}{x^2-4} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{x^2+7x+10+2x+4}{x^2-4} = \frac{x^2+9x+14}{x^2-4} = 0 \end{aligned}$$

Махраҷи ифодаи касри ратсионалиро ба сифр баробар карда, сифрҳоро меёбем. Аз усули ба зарбкунандаҳо ҷудо кардан истифода бурда метавонем:

$$x^2+9x+14=0 \Rightarrow x=-2; x=-7$$

Мумкин аст, ки $x = -2$ сифри ҳам ҳисобкунак ва ҳам махраҷ аст. Махраҷ ҳеҷ гоҳ сифр нест, бинобарин $x = -2$ наметавонад решаи муодила бошад. $x^2-4=(x-2)(x+2) \neq 0 \Rightarrow x \neq -2; x \neq 2$

Пас муодила як реша дорад: $x = -7$.

Ҷавоб: $x = -7$.

Диққат! Ҳангоми ҳалли муодилаи касрӣ-ратсионалӣ ҳамеша тафтиш кунед, ки сифрҳои сурати он ба соҳаи муайяни муодила тааллуқ доранд!

Мисоли 11. Муодиларо ҳал кунед: $\frac{(x^2-x-56)(x-3)}{x^2+5x+6} = 0$.

Ҳал. Ин муодила ба таври касрӣ - ратсионалӣ аст. Аввал, сифрҳои сурати онро ёбед:

$$\begin{aligned} (x^2-x-56)(x-3) &= 0 \Rightarrow x=3; x^2-x-56=0 \\ D &= (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-56) = 225 = 15^2 \\ x_{1,2} &= \frac{1 \pm 15}{2} \Rightarrow x_1 = 8; x_2 = -7. \end{aligned}$$

3 сифри суръатро ёфтем: $x_1 = 8; x_2 = -7; x_3 = 3$.

Бо иваз кардани ин сифрҳо ба махраҷ, мо боварӣ ҳосил мекунем, ки онҳо сифрҳои махраҷ нестанд.

Ҷавоб: $x_1 = 8; x_2 = -7; x_3 = 3$.

БОБИ 2. МУОДИЛА ВА НОБАРОБАРИҲОИ РАТСИОНАЛӢ. МУОДИЛАҲОИ ИРРАТСИОНАЛӢ

Мисоли 12. Решаҳои муодиларо ёбед.

$$\frac{2}{(x-2)(x+2)} - \frac{1}{x(x-2)} = \frac{4-x}{x(x+2)}$$

Ҳал. Ифодаи тарафи рости муодиларо ба тарафи чап мегузаронем:

$$\frac{2}{(x-2)(x+2)} - \frac{1}{x(x-2)} - \frac{4-x}{x(x+2)} = 0$$

ба махраҷи умумӣ меорем:

$$\frac{2x - (x+2) - (4-x)(x-2)}{x(x-2)(x+2)} = 0$$

Қавсҳоро дар сурат мекушоем ва онро ба муодилаи квадратӣ меорем:

$$\frac{2x - x - 2 - 4x + x^2 + 8 - 2x}{x(x-2)(x+2)} = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 5x + 6}{x(x-2)(x+2)} = 0$$

Сифрҳои суратро меёбем:

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow D = (-5)^2 - 4 \cdot 6 = 1, \quad x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow x_1 = 2; \quad x_2 = 3.$$

Мо дар ин нуқтаҳо қиматҳои махраҷро ҳисоб мекунем. Азбаски $x = 2$ махраҷро сифр мекунад, он решаи бегона аст. Аз ин рӯ, муодила як реша дорад $x = 3$.

Ҷавоб: $x = 3$.

Мисоли 13. Муодиларо ҳал кунед: $x^2 + x + 1 = \frac{15}{x^2 + x + 3}$.

Ҳал. Қиматро дохил мекунем $x^2 + x + 1 = t$. Он гоҳ муодила шакли зеринро мегирад:

$$t = \frac{15}{t+2}$$

$t \neq -2$ -ро ба инобат гирифта, муодилаи зеринро ҳал мекунем:

$$t(t+2) = 15$$

$$t^2 + 2t - 15 = 0$$

$$t_1 = -5; \quad t_2 = 3$$

Ин қиматҳоро ба ҷои t гузошта, муодилаҳои $x^2 + x + 1 = -5$ ва $x^2 + x + 1 = 3$ -ро мегирем. Ҳар яки онҳоро алоҳида ҳал мекунем:

Муодилаи $x^2 + x + 6 = 0 \Rightarrow$ реша надорад; муодилаи, $x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -2; x_2 = 1$ ду реша дорад; Ин решаҳо сифрҳои махраҷ нестанд.

Ҷавоб: $x_1 = -2; x_2 = 1$.

Муодилаҳои ратсионалӣ дар ҳалли масъалаҳои матнӣ низ истифода мешаванд. Дар зер масъалаҳои доир ба ҳаракат ва кор ҳамчун муодилаи ратсионалӣ моделсозӣ ва ҳал карда мешаванд.

Масъала доир ба ҳаракат.

Чархбол дар зарфи 6 соат ба сӯи шомол 120 километр парвоз карда, баргашт. Агар суръати чархбол дар ҳавои бешамол 45 km/h бошад, суръати шомолро ёбед.

Ҳал. Бигзор суръати шамол x km/h бошад. Пас суръати чархбол дар самти шамол $(45 + x)$ km/h ва бар муқобили самти шамол $(45 - x)$ km/h аст. Мувофиқи шарти масъала, чархбол ҳамагӣ 6 соат парвоз кардааст.

$$\frac{120}{45+x} + \frac{120}{45-x} = 6$$

Агар масофаро ба суръат тақсим кунем, вақти умумӣ ба: $\frac{120}{45+x} + \frac{120}{45-x} - 6 = 0$

$$\frac{120(45-x) + 120(45+x) - 6(45+x)(45-x)}{(45+x)(45-x)} = 0$$

суръатро содда менамоем ва ба сифр баробар карда, ҳал мекунем:

$$6x^2 - 1350 = 0$$

$$x^2 = 225$$

$$x_1 = -15; x_2 = 15$$

баробар мешавад.

Азбаски суръати шамол манфӣ буда наметавонад (нисбат ба самти он), $x = -15$ km/h реша шуда наметавонад. Ҳамин тариқ, суръати шамол $x = 15$ km/h аст.

Ҷавоб: Суръати шамол 15 km/h.

Масъала доир ба кор

Ду тракторчӣ киштзорро дар зарфи 4 рӯз якҷоя шудгор мекунад. Агар тракторчии якум ин киштзорро назар ба тракторчии дуюм 6 рӯз кам шудгор кунад, пас ҳар як тракторчӣ ин корро алоҳида чанд рӯз иҷро мекунад?

Ҳал. Бигузор тракторчии 1-ум киштзорро дар x рӯз шудгор кунад. Пас ба тракторчии дуюм барои шудгор кардани ин майдон $(x + 6)$ рӯз лозим аст. Ин чунин маъно дорад, ки тракторчии 1 $\frac{1}{x}$ қисми киштзорро дар 1 рӯз ва тракторчии 2-юм $\frac{1}{x+6}$ қисмро шудгор карда метавонад. Мувофиқи шарт дар $\frac{1}{4}$ ҳиссаи киштзорро якҷоя шудгор мекунад.

Ҳамин тавр.

Ин муодиларо ба муодилаи ратсионалӣ табдил медиҳем $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+6} = \frac{1}{4}$

$$\frac{4(x+6) + 4x - x(x+6)}{4x(x+6)} = 0$$

$$\frac{-x^2 + 2x + 24}{4x(x+6)} = 0$$

Муодилаи ратсионалии ҳосилшуда ба системаи муодилаҳои зерин баробарқувва аст.

Онро ҳал мекунем

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 24 = 0; \\ 4x(x+6) \neq 0; \end{cases} \quad D = (-2)^2 - 4 \cdot (-24) = 100; \quad x_{1,2} = \frac{2 \pm 10}{2} \Rightarrow x_1 = 6; \quad x_2 = -4$$

Қимати $x = -4$ реша буда наметавонад, гарчанде, ки он решаи муодила аст. Ин ба он вобаста аст, ки соҳаи муайянии муодилаи сохташуда аз қиматҳои ғайриманфӣи номаълум иборат аст (рӯзхон, ки пас аз оғози ҳисобкунӣ манфӣ нестанд).

Ҷавоб: Тракторчии 1-ум киштзорро дар зарфи 6 рӯз, тракторчии дуюм бошад, дар $x + 6 = 6 + 6 = 12$ рӯз шудгор мекунад.

МИСОЛҲО

Муодилаҳои касрӣ – ратсионалиро ҳал кунед (1 – 10).

$$1. \frac{1}{x} - \frac{2x}{x+1} = 0$$

$$2. \frac{2y-5}{y+5} = \frac{3y+21}{2y-1}$$

$$3. \frac{5x-7}{x-3} = \frac{4x-3}{x}$$

$$4. \frac{x+1}{2(x-1)} = \frac{9}{2(x+4)} + \frac{1}{x-1}$$

$$5. \frac{2x}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{4x}{x^2-1}$$

$$6. \frac{x^2-2x}{x-2} = x^2-2$$

$$7. \frac{7}{2x+9} - 6 = 5x$$

$$8. \frac{15}{x-2} = \frac{14}{x} + 1$$

$$9. \frac{4}{x-2} + \frac{4}{x+2} = \frac{3}{2}$$

$$10. \frac{3x}{x^2-1} = 2 \left(\frac{2x-1}{x+1} \right)$$

Муодилаҳои касрӣ – ратсионалиро ҳал кунед (11 – 30).

$$11. \frac{1}{x^2-12x+36} + \frac{12}{36-x^2} = \frac{1}{x+6}$$

$$12. \frac{8c-3}{4c^2-2c+1} + \frac{6}{8c^3+1} = \frac{2}{2c+1}$$

$$13. \frac{3x-2}{x-1} + \frac{x-4}{x+3} = \frac{3x^2+1}{(x-1)(x+3)}$$

$$14. \frac{2-3x}{x+1} - \frac{4}{3} \cdot \frac{x+1}{2-3x} = \frac{4}{3}$$

$$15. \frac{x-49}{x+6} + \frac{2x+50}{x+5} = 2$$

$$16. \frac{(x+2)^2-9}{x-1} \cdot (x-5) = -24$$

$$17. (x+4)(x^2-1) = 4x^2+24x - \frac{4x^2+20x}{5x+x^2}$$

$$18. \frac{25x-21}{2x^2+5x-12} = \frac{x-4}{2x-3} - \frac{2x-3}{x+4}$$

$$19. \frac{3}{x^2-2x+1} + \frac{2}{1-x^2} = \frac{1}{1+x}$$

$$20. \frac{6}{x-1} + \frac{6}{(x-1)(x-3)} + \frac{3}{3-x} = 7$$

$$21. \frac{x^5-4x^3}{x-2} = 16+2x^3$$

$$22. \frac{1}{(x-2)(x-3)} - \frac{9}{(x+2)(x-7)} = 1$$

$$23. x^2+x+1 = \frac{15}{x^2+x+3}$$

$$24. \frac{x^2+2}{3x-2} - \frac{3x-2}{x^2+2} = 2\frac{2}{3}$$

$$25. x^2-5x + \frac{24}{x^2-5x} + 10 = 0$$

$$26. \frac{x^2+1}{x} + \frac{x}{x^2+1} = 2\frac{1}{2}$$

$$27. \frac{2}{x^2+3} + \frac{4}{x^2+7} = 1$$

$$28. \frac{1}{x(x+2)} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{12}$$

29.
$$\frac{x^2 - 3x - 1}{x^2 - 2x + 4} = \frac{x^2 - 2x}{x^2 - x + 1}$$

30.
$$\frac{x^2 - 4x - 1}{x^2 - 3x + 5} = \frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 - 2x + 2}$$

31. Масофаи байни ду шаҳр аз дарё 80 километр аст. Барои аз яке аз ин шаҳрҳо ба дигараш рафтан киштӣ 8 соату 20 дақиқа вақт сарф кард. Агар суръати ҷараёни дарё 4 km/h бошад, суръати киштиро дар оби ором ёбед.

32. Агар ду коргар якҷоя кор кунанд, дар зарфи 12 рӯз як корро ба охир мерасонанд. Агар яке аввал кор карда, нисфи корро анҷом дода, ба ҷои он дуюмаш кор кунад, пас дар 25 рӯз кор ба охир мерасад. Агар ҳар як коргар яккаю танҳо кор кунад, ин корро чанд рӯз анҷом медиҳад?

33. Трактори «Белорус» дар зарфи 1 соат 2 гектар ва «Кейс» 7 гектарро дар як соат шудгор карда метавонад. Хоҷагӣ 2 трактори «Белорус» ва 1 «Кейс» дорад. Агар ин тракторҳоро якҷоя истифода баранд, 210 гектар заминро дар чанд рӯз шудгор кардан мумкин аст?

34. Мошин дар қисми 10 километрии роҳи бе асбоби "Радар" бо суръати 120 km/h, дар қисми 25 километраи роҳи бо радар 70 km/h ва дар қисми 35 километри бо суръати 50 km/h ҳаракат кард. Суръати миёнаи ӯро барои тамоми роҳ ёбед.

35. Кореро коргари якум танҳо дар a рӯз иҷро мекунад, коргари дуюм барои иҷрои ҳамин кор нисбат ба коргари дуюм b рӯз зиёд вақт сарф кард.

Агар коргари сеюм назар ба коргари якум танҳо b рӯз тезтар иҷро кунад, ҳамин корро се коргар дар якҷоягӣ дар чанд рӯз иҷро мекунанд?

36. Гурӯҳи сайёҳон бо каиқи мотордор аз истгоҳ ба муқобили ҷараён рафтанд. Онҳо бояд пас аз 4 соату 40 дақиқа баргарданд. Агар суръати қаиқ дар оби ором 12 km/h ва суръати ҷараёни дарё 3 km/h бошад, сайёҳон метавонанд аз истгоҳ чанд километр дур рафта, 2 соат истироҳат кунанд ва дар вақташ баргарданд?

СИСТЕМАИ МУОДИЛАҲОИ РАТСИОНАЛӢ

Ҳалли системаҳои ду муодилаи дорои ду номаълум ба усулҳои маълум ба монанди иловаи алгебравӣ, ҷойивазкунӣ ва тағйирёбии тағйирёбандаҳо асос ёфтааст. Дар хотир доред, ки дар ҳама ифодаҳои касрӣ-ратсионалӣ, ки ба система дохил карда шудаанд, махраҷҳо ба сифр баробар нестанд.



Усули ивазкунӣ

Мисоли 1. Системаи муодилаҳои зеринро бо усули ивазкунӣ ҳал кунед.

$$\begin{cases} 3xy = 21 \\ x - 8y = -1 \end{cases}$$

Ҳал. Аз муодилаи дуюми система $x = 8y - 1$ мегирием.

Ифодаи ҳосилшударо ба x дар муодилаи аввал иваз карда $3(8y - 1)y = 21$ -ро мегирием. Ин муодиларо ҳал мекунем $(8y - 1)y = 7$

Қиматҳои $8y^2 - y - 7 = 0 \Rightarrow y_1 = -\frac{7}{8}; y_2 = 1$ -ро меёбем ва онҳоро ба $x = 8y - 1$ гузошта $\Rightarrow x_1 = -8; x_2 = 7$ буданаширо муайян мекунем.

Ҷавоб: $\left(-8; -\frac{7}{8}\right), (7; 1)$.

Мисоли 2. Системаи муодилаҳои $\begin{cases} 2x^2 + y = 4 \\ x^4 + y^2 = 16 \end{cases}$ -ро бо усули ивазкунӣ ҳал кунед.

Ҷавоб:

$$y = 4 - 2x^2$$

$$x^4 + (4 - 2x^2)^2 = 16$$

$$x^4 + 16 - 16x^2 + 4x^4 = 16$$

$$5x^4 - 16x^2 = 0$$

$$x^2(5x^2 - 16) = 0, \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = \frac{4}{\sqrt{5}}, x_3 = -\frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow y_1 = 4; y_2 = -\frac{12}{5}; y_3 = -\frac{12}{5}$$

Ҷавоб: $(0; 4), \left(\frac{4}{\sqrt{5}}; -2\frac{2}{5}\right), \left(-\frac{4}{\sqrt{5}}; -2\frac{2}{5}\right)$.



Усули Суммаи алгебрӣ

Мисоли 3. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед $\begin{cases} x^2 + y = 27 \\ x - y = 3 \end{cases}$

Ҳал. Ҳарду муодилаи система дорои y номаълум бо коэффисиентҳои муқобил мебошанд. Ҳангоми ҷамъ кардани ин муодилаҳо, аз як номаълум муодила сохта мешавад.

$$+ \begin{cases} x^2 + y = 27 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

$$x^2 + x = 30$$

Муодилаи квадратии $x^2 + x - 30 = 0$ -ро ҳал карда меёбем.

$$x_1 = \frac{-1-11}{2} = -6 \Rightarrow y_1 = -9,$$

$$x_2 = \frac{-1+11}{2} = 5 \Rightarrow y_2 = 2$$

Ҷавоб: $(-6; -9), (5; 2)$.

Мисоли 4. Системаи муодилаҳои бо усули Суммаи алгебравӣ ҳал кунед:

$$\begin{cases} x^3 - y^3 - 3x^2 + 3y^2x = -2 \\ x^2 - x^2y = 1. \end{cases}$$

Ҳал. Муодилаи дуюмро ҳамчун намуда, 3-ро ба муодилаи якум зарб мекунем:

$$+ \begin{cases} x^3 - y^3 - 3x^2 + 3y^2x = -2 \\ 3x^2 - 3x^2y = 3 \end{cases}$$

Системаи муодилаи $x^3 - y^3 - 3x^2y + 3y^2x = 1$ -ро пайдо мекунем:

$$\begin{cases} (x-y)^3 = 1 \\ x^2 - x^2y = 1 \\ \begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 - x^2y = 1 \end{cases} \end{cases}$$

Формулаи зарби мухтасарро дар тарафи чапи муодилаи ҳосил шуда истифода бурда, системаи муодилаи

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ x^2 - x^2(x-1) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x - 1 \\ x^2 - x^3 + x^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x - 1 \\ x^3 - 2x^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = x - 1 \\ (x-1)(x^2 - x - 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 1; \quad x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}; \quad x_3 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \quad \text{-ро соҳиб мешавем}$$

$$y = x - 1. \text{ Аз ин ҷо пайдарпай ба даст меорем, } y_1 = 0, y_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, y_3 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

$$\textbf{Ҷавоб: } (1; 0), \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right), \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right).$$



Усули ивазкунии тағйирёбанда

Мисоли 5. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

$$\begin{cases} x + xy + y = 11 \\ x^2y + xy^2 = 30. \end{cases}$$

Ҳал. Ишоракуниро ба таври зерин дохил мекунем

$$x + y = a \quad \text{ва} \quad xy = b$$

БОБИ 2. МУОДИЛА ВА НОБАРОБАРИҲОИ РАТСИОНАЛӢ. МУОДИЛАҲОИ ИРРАТСИОНАЛӢ

Он гоҳ система чунин намуд мегирад:

$$\begin{cases} a+b=11 \\ ab=30 \end{cases}$$

Ин системаро ҳал карда ба $a_1=6$, $b_1=5$ ва $a_2=5$, $b_2=6$ соҳиб мешавем. Ин қиматҳоро ба ифода гузошта, системаҳои муодилаҳоро ба даст меорем

$$\begin{cases} x+y=6 \\ xy=5 \end{cases} \text{ ва } \begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}$$

Маҷмӯи ҳамаи решаҳои онҳо ҳалли ин системаи муодилаҳо мебошад.

Ҷавоб: $(5;1)$, $(1;5)$, $(2;3)$, $(3;2)$.

МИСОЛҲО

Системаи муодилаҳоро ҳал кунед.

1. $\begin{cases} y-x^2+x=1 \\ x=y-4 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4x^2-y=2 \\ 3x-2y=-1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 4x+3y=-1 \\ 2x^2=y+11 \end{cases}$

4. $\begin{cases} xy=20 \\ x-4y=2 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^2+y^2-2xy=1 \\ x+y=3 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x-y=10 \\ x^2-y^2=20-xy \end{cases}$

7. $\begin{cases} x+y=8 \\ x^2+y^2=36 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x \cdot y=300 \\ x+y=35 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x^2+y^2=74 \\ x+y=12 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x+y=8 \\ xy=15 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x+y=1 \\ x^3+y^3=19 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x^3+8y^3=35 \\ x^2-2xy+4y^2=7 \end{cases}$

13. $\begin{cases} \frac{xy}{x+2y} + \frac{x+2y}{xy} = 2 \\ \frac{xy}{x-2y} + \frac{x-2y}{xy} = 4 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x^2-xy+\frac{1}{4}y^2+x-\frac{1}{2}y=2 \\ \frac{1}{4}x^2+xy+y^2+2y+x=3 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x^2-xy+y^2=19 \\ x^2+xy+y^2=49 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x^2+y^2=x+y \\ x^4+y^4=\frac{1}{2}(x+y)^2 \end{cases}$

17. $\begin{cases} \frac{x-y}{x+y} + 6\frac{x+y}{x-y} = 5 \\ xy=-2 \end{cases}$

18. $\begin{cases} \frac{2x}{y} + \frac{3y}{x} + 6 = \frac{3}{xy} \\ \frac{6y}{x} + \frac{4x}{y} - 1 = \frac{45}{xy} \end{cases}$

$$19. \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5 \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 13 \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} \frac{x+y}{xy} + \frac{xy}{x+y} = 2 \\ \frac{x-y}{xy} + \frac{xy}{x-y} = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} x^3 - y^3 = 61(x-y) \\ (x+1)(y+1) = 12 \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = \frac{9}{2} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} x^4 + y^4 = 17(x+y)^2 \\ xy = 2(x+y) \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} x^2 + y^2 = x - y \\ x^4 + y^4 = \frac{1}{2}(x-y)^2 \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} x^2(1+y+y^2+y^3) = 160 \\ x^2(1-y+y^2-y^3) = -80 \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} 2x^2y^2 - 3y^2 + 5xy - 6 = 0 \\ 3x^2y^2 - 4y^2 + 3xy - 2 = 0 \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} x^3y + xy^3 = \frac{10}{9}(x+y)^2 \\ x^4y + xy^4 = \frac{2}{3}(x+y)^3 \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} \frac{x(y^2+1)}{x^2+y^2} = \frac{3}{5} \\ \frac{y(x^2-1)}{x^2+y^2} = \frac{4}{5} \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} \frac{y^2}{x} + \frac{x^2}{y} = 12 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} xy = 6 \\ yz = 15 \\ zx = 10 \end{cases}$$

НОБАРОБАРИҲОИ РАТСИОНАЛӢ

Ҳалли нобаробариҳои ратсионалӣ ҳамчун ҳалли муодилаҳои ратсионалӣ, аввал тавассути овардани нобаробарӣ ба нобаробарии оддитари баробарқувва ба амал бароварда мешавад. Дар он ба қоидаҳои зерин риоя карда мешаванд:

Қоидаи 1. Аъзоии ихтиёрии нобаробарӣ метавонад аз як қисми нобаробарӣ ба қисми дигар бо аломати муқобил гузаронида шавад.

Қоидаи 2. Ҳарду қисми нобаробарию ба як адади мусбат зарб ё тақсим кардан мумкин аст, дар ин ҳолат, ин нобаробарӣ аломати худро тағйир намедиҳад.

Қоидаи 3. Ҳарду қисми нобаробарию ба як адади манфӣ зарб ё тақсим кардан мумкин аст, ки дар ин ҳолат нобаробарӣ аломати худро бо баръакс иваз мекунад.

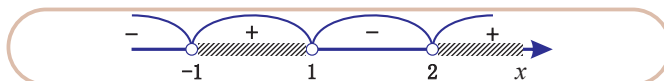
Ҳангоми ҳалли нобаробарии ратсионалӣ аз **усули фосилаҳо** истифода бурдан мумкин аст.

Мислои 1. Нобаробарию ҳал кунед $(x-1)(x+1)(x-2) > 0$.

Ҳал.

1. Тарафи ростии нобаробарӣ ба сифр баробар аст, пас сифрҳои ифодаи тарафи чапро меёбем:

2. Ин қиматҳои x -ро дар тири ададӣ тасвир мекунем ва аломати фосилаҳои ҳосилшударо муайян мекунем.



3. Азбаски аломати нобаробарии мо аз сифр калонтар аст, фосилаҳои дорои аломати мусбат ҳалли нобаробарӣ мебошанд.

Ҷавоб $x \in (-1; 1) \cup (2; \infty)$

Мисоли 2. Нобаробарию ҳал кунед $x^4 - 3 < 2x(2x^2 - x - 2)$.

Ҳал.

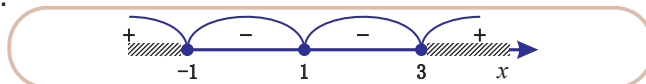
1. Нобаробарии бутуни ратсионалӣ дода шудааст. Барои ҳалли он, пеш аз ҳама, ҳамаи ифодаҳоро ба тарафи чапи муодила мегузаронем:

$$x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x - 3 < 0$$

2. Сифрҳои $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$ -ро аз тарафи чап ёфта, онро ба зарбкунандаҳо ҷудо мекунем.

$$(x-1)^2(x+1)(x-3) \geq 0$$

3. Ин қиматҳоро дар тири ададӣ тасвир карда, аломатҳои тарафи чапро дар фосилаҳои ба даст овардашуда муайян мекунем:



4. Нишондиҳандаи зарбкунандаи $(x-1)^2$ ба ду (шумораи ҷуфт) баробар аст, бинобар ин ҳангоми гузаштан аз 1 дар тири ададӣ аломати он тағйир намеебад.

5. Азбаски аломати нобаробарӣ ($\geq$) аз сифр калон ё баробар аст, пас ҳалли нобаробарӣ фосилаҳои дорои аломати мусбат ва рақами 1 хоҳад буд.

Ҷавоб: $x \in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty) \cup \{1\}$

◆ Нобаробарии касрӣ-ратсионалӣ

Нобаробарии ба намуди $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$, $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$, $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$, $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$ оварда шуда нобаробарии ратсионалӣ-касрӣ номида мешавад. Дар ин ҷо $f(x)$ ва $g(x)$ – биёраъзоғӣ аз тағйирёбандаи x мебошад.

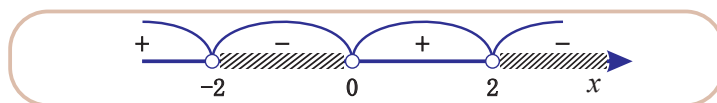
Қадамҳо барои ҳалли нобаробарии касрӣ-ратсионалӣ:

- Сифрҳои суратҳо ёфта мешаванд;
- Соҳаи муайяни (сифрҳои махраҷҳо) ёфта мешаванд;
- Сифрҳо дар тири ададӣ тасвир карда мешаванд;
- Дар фосилаҳои гирифташуда аломатҳои (+ ё -) қисмати $\frac{f(x)}{g(x)}$ қайд карда мешаванд;
- Дар ин ҳолат, тири ададӣ ба фосилаҳо ҷудо мешавад;
- Фосилаҳое, ки аломатҳои онҳо (+ ё -) ба аломати ($>$, $\geq$, $<$, $\leq$) нобаробарӣ мувофиқанд, ҳалли нобаробарӣ мебошанд.

Мисоли 3. Нобаробариро ҳал кунед $\frac{4}{x} - x < 0$.

Ҳал.

1. Тарафи чапро ба махраҷи умумӣ меорем $\frac{4 - x^2}{x} < 0$.
2. Сифрҳои сурат ва махраҷро меёбем $x = 2$, $x = -2$, $x = 0$.
3. Дар тири ададӣ сифрҳоро тасвир мекунем ва аломатҳои тарафи чапро дар фосилаҳо муайян мекунем



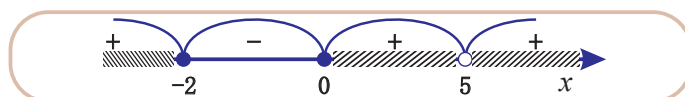
Азбаски аломати $<$ нобаробарӣ аз сифр камтар аст, пас фосилаҳои дорои аломати манфӣ ҳалли нобаробарӣ мебошанд.

Ҷавоб: $x \in (-2; 0) \cup (2; \infty)$.

Мисоли 4. Нобаробариро ҳал кунед $\frac{x(x+2)^3}{(x-5)^2} \geq 0$.

Ҳал.

1. Сифрҳои сурат $x = 0$ ва $x = -2$;
2. Сифри махраҷ $x = 5$.
3. Мо ин қиматҳоро дар тири ададӣ қайд мекунем ва аломатҳои тарафи чапро дар фосилаҳо муайян мекунем. Ба ифодаи $(x - 5)^2$, ки доимиаҷа адади ҷуфт (баробар ба 2) аст, аҳамият медиҳем, бинобар ин фосилаҳои дар ду тарафи адади 5 дар тири ададӣ ҷойгиршуда аломати якхела доранд.



4. Азбаски аломати $\geq$ нобаробарӣ аз сифр калон ё баробар аст, пас фосилаҳои дорои аломатҳои ғайриманфӣ ҳалли нобаробарӣ мебошанд.

Ҷавоб: $x \in (-\infty; -2] \cup [0; 5) \cup (5; \infty)$.

БОБИ 2. МУОДИЛА ВА НОБАРОБАРИҲОИ РАТСИОНАЛӢ. МУОДИЛАҲОИ ИРРАТСИОНАЛӢ

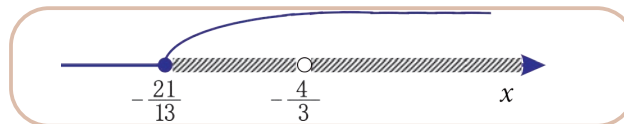
Аҳамият диҳед! Ҳангоми ҳалли нобаробарии намуди $\frac{f(x)}{g(x)} < a$ бо зарб задани ҳарду тараф ба $g(x)$ бо фарз кардани $g(x) \neq 0$ оғоз накунад. Ин амал метавонад боиси ҳалли нодуруст гардад.

Масалан, бигзор нобаробарии бо зарби ду тараф ба $3x+4$ бо фарз $(3x+4) \neq 0$ ҳал карда

шавад. Баъд $\frac{2x-1}{3x+4} \leq 5 \quad | \quad (3x+4) \neq 0$

$$\begin{cases} \frac{2x-1}{3x+4} \cdot (3x+4) \leq 5 \cdot (3x+4) \\ 3x \neq -4 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x-1 \leq 15x+20 \\ x \neq -\frac{4}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -\frac{21}{13} \\ x \neq -\frac{4}{3} \end{cases}$$

Тасвири системаи ҳосил шуда чунин менамояд:



Тасвири системаи ҳосил шуда чунин менамояд, $\left[-\frac{21}{13}; -\frac{4}{3}\right) \cup \left(-\frac{4}{3}; \infty\right)$ ки нодуруст аст.

Вазифа. Кори мустақилона бо нобаробарии зина ба зина, чунон ки дар мисолҳои болой дида шуд, фаҳмонед, ки чаро мисоли охирин дуруст иҷро нашуд.

МИСОЛҲО

Нобаробариро ҳал кунед.

1. $\frac{x+4}{(x+5)x} < 0$

2. $\frac{x-4}{(x-3)x} < 0$

3. $\frac{5+4x}{(x-2)(x+1)} \geq 0$

4. $\frac{4-3x}{(x+2)(x-1)} \geq 0$

5. $\frac{4x+3}{x+2} > 5$

6. $\frac{4x-3}{x-5} > 5$

7. $\frac{25-16x^2}{x^2+4x+4} > 0$

8. $\frac{16-25x^2}{x^2-4x+4} > 0$

9. Бузургтарин ададро муайян кунед, ки нобаробарии $\frac{2x-7}{6} + \frac{7x-2}{3} < 3 - \frac{1-x}{2}$

-ро қаноат мекунад.

10. Суммаи ҳамаи ададҳоеро, ки нобаробариро қаноат мекунад, ёбед $\frac{x-4}{2x+6} \leq 0$,

11. Чанд адади бутуни $(-3;3)$ нобаробарии $\frac{1}{x} < 1$ -ро қонеъ мекунад?

11. Байни калонтарин ва хурдтарин қиматҳои манфии ададҳои ба ҳалли нобаробарии $\frac{(x+3)(x-5)}{x+1} \geq 0$ дохилшавандаро ёбед.

13. Чанд адади бутун ба ҳалли нобаробарии $\frac{(x+4)^2 - 8x - 25}{(x-6)^2} \geq 0$ дохилшуда дар порчаи $[-5;6]$ ҷойгир шудаанд?

14. $\frac{6x-1}{4x+3} \leq \frac{3x-2}{2x-1}$

15. $\frac{5}{-6x+3} + \frac{6x}{1-2x} \geq 0$

16. $\frac{x^2+3x}{49x^2+70x+25} \leq 0$

17. $\frac{6x+1}{4x-3} \leq \frac{3x+2}{2x+1}$

18. $\frac{6}{-4x+2} - \frac{5x}{1-2x} \leq 0$

19. $\frac{49x^2-70x+25}{x^2-3x} \leq 0$

20. $\frac{x^2+3x-2}{(x-1)^2-9} - \frac{3x+1}{3x-12} \leq 0$

21. $\frac{x^2+7x+8}{(x+1)^2-9} - \frac{3x+7}{3x-6} \leq 0$

22. $\frac{1}{2x^2-5x} - \frac{2}{25+10x} + \frac{4}{25-4x^2} \geq 0$

23. $\frac{6}{-4x-x^2} - \frac{2}{x^2-4x} + \frac{x}{x^2-16} \geq 0$

24. $\left(\frac{4}{x^2+4x} + \frac{32-3x}{x^3+64} \right) : \frac{x+8}{x^3-4x^2+16x} \geq \frac{4}{4+x}$

25. $\left(\frac{x^2+2x+4}{4x^2-1} \cdot \frac{2x^2-x}{-x^3+8} - \frac{2-x}{2x^2+x} \right) : \frac{4}{x^2-2x} \geq \frac{4-x}{x+2x^2}$

СИСТЕМАИ НОБАРОБАРИҲОИ РАТСИОНАЛӢ

Марҳилаҳои ҳалли системаҳои нобаробарии ратсионалӣ

- Ҳар як нобаробарӣ алоҳида ҳал карда мешавад;
- Роҳи ҳалли умумии нобаробарӣ, ки ба система дохил мешавад ёфта мешавад (ин марҳила метавонад ба воситаи тасвир дар тири ададӣ анҷом дода шавад).

Мисоли 1. Системаи нобаробариҳоро ҳал кунед
$$\begin{cases} x^2 - 9 \geq 0 \\ 2x - 8 < 0 \end{cases}$$

Ҳал.

$$\begin{cases} x^2 - 9 \geq 0 \\ 2x - 8 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+3)(x-3) \geq 0 \\ x < 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -3] \cup [3; \infty) \\ x < 4 \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty; -3] \cup [3; 4)$$

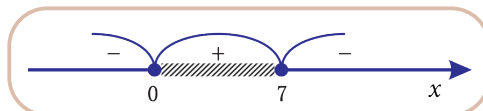
Ҷавоб: $x \in (-\infty; -3] \cup [3; 4)$.

Мисоли 2. Системаи нобаробариҳоро ҳал кунед
$$\begin{cases} 7x - x^2 \geq 0 \\ x^2 - 6x + 5 < 0 \end{cases}$$

Ҳал.

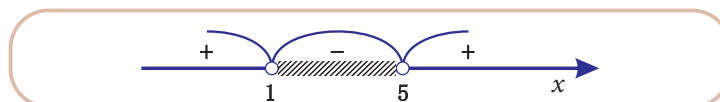
Муодилаи якуми нобаробариҳо ҳал мекунем: $x(7-x) \geq 0$.

Сифрҳои $x = 0$ ва $x = 7$ -ро дар тири ададӣ қайд мекунем ва аломатҳоро дар фосилаҳои ҳосил шуда муайян мекунем.

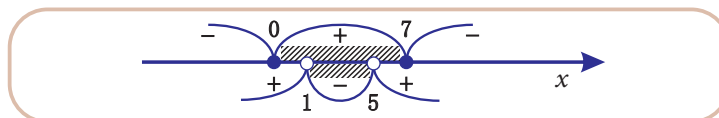


Нобаробарии дууми системаро ҳал мекунем $x^2 - 6x + 5 < 0$.

Сифрҳо $x = 1$ ва $x = 5$ мебошанд. Онҳоро дар тири ададӣ қайд мекунем ва аломатҳоро дар фосилаҳои ҳосилшуда муайян мекунем.



Қисми умумии ҳалли бадастомадаро меёбем. Қисми умумӣ аз фосилае, ки ҳам аз боло ва ҳам аз поён соя карда шудааст, иборат аст.



Ҷавоб: $x \in (1; 5)$.

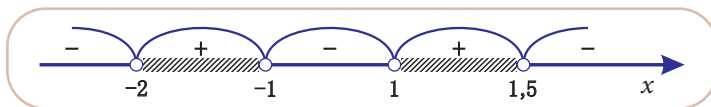
Мисоли 3. Системаи нобаробариҳо ҳал кунед
$$\begin{cases} \frac{(3-2x)(x+2)}{x^2-1} > 0 \\ 1+2x \leq \frac{3}{x} \end{cases}$$

СИСТЕМАИ НОБАРОБАРИҲОИ РАТСИОНАЛӢ

Нобаробарии якуми системаро ҳал мекунем,

$$\frac{(3-2x)(x+2)}{x^2-1} > 0$$

Дар тири ададӣ сифрҳои $x = -2$, $x = -1$, $x = 1$ ва $x = 1,5$ -ро қайд карда, аломатҳоро дар фосилаҳои ҳосилшуда муайян мекунем.

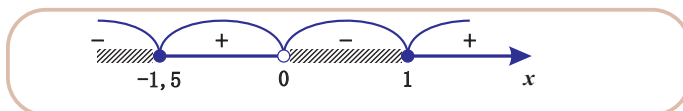


Нобаробарии дуюми системаро ҳал мекунем $1+2x \leq \frac{3}{x}$.

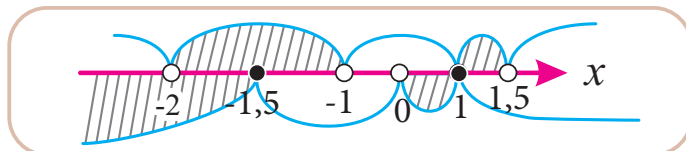
Ҳамаи ифодаҳоро ба тарафи чапи нобаробарӣ гузаронида ва онҳоро ба махраҷи умумӣ меорем.

$$\frac{2x^2+x-3}{x} \leq 0$$

Сифрҳои сурат $x = 1$ ва $x = -1,5$ ва соҳаи муайяни аз ҳама қиматҳои x иборат аст, ки барои он $x \neq 0$ аст. Мо онҳоро дар тири ададӣ қайд мекунем ва аломатҳоро дар фосилаҳои ҳосил шуда муайян мекунем.



Ҳалли ҳарду нобаробариро дар як тири ададӣ тасвир мекунем. Ҳалли система қисми умумии ин ҳалҳо мебошад.



Ҷавоб: $x \in (-2; -1,5]$.

МИСОЛҲО

1. Ҳамаи ададҳои бутуни ба ҳалли системаи нобаробарӣ дохилшавандаро ёбед.

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \begin{cases} 0,2x > -1 \\ -\frac{x}{3} \geq 1 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} \frac{x-1}{2} < \frac{x}{3} \\ \frac{x+1}{2} \geq \frac{x}{5} \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} 1-\frac{x}{4} > x \\ x-\frac{x-4}{5} > 1 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} x-\frac{x}{4} \geq 2 \\ \frac{x-1}{2} + \frac{x-2}{3} > 1 \end{cases} \end{array}$$

2. Системаи нобаробариҳоро ҳал кунед,

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} \frac{x-1}{2} - \frac{x-2}{3} \geq \frac{x-3}{4} - x \\ 1-x > 0,5x-4 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} \frac{5x+7}{6} - \frac{3x}{4} < \frac{11x-7}{12} \\ \frac{1-3x}{2} - \frac{1-4x}{3} \geq \frac{x}{6} - 1 \end{cases} \\ \text{c)} \begin{cases} \frac{2x-1}{6} + \frac{x+2}{3} - \frac{x-8}{2} > x-1 \\ 2-2x > 0,5+0,5 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} \frac{8x+1}{3} > \frac{4x+9}{2} - \frac{x-1}{3} \\ \frac{5x-2}{3} < \frac{2x+13}{2} - \frac{x+2}{3} \end{cases} \end{array}$$

БОБИ 2. МУОДИЛА ВА НОБАРОБАРИҲОИ РАТСИОНАЛӢ. МУОДИЛАҲОИ ИРРАТСИОНАЛӢ

3. Соҳаи муайянии ифодаро ёбед.

a) $\sqrt{(x-3)(x-5)} + \sqrt{(1-x)(7-x)}$ b) $\sqrt{\frac{3x+2}{5-x}} + \sqrt{\frac{4-x}{7-2x}}$

c) $\sqrt{(x-2)(x-3)} + \sqrt{(5-x)(6-x)}$ d) $\sqrt{\frac{4x+1}{x+2}} + \sqrt{\frac{2x+1}{x-7}}$

4. Соҳаи муайянии функцияро ёбед.

a) $y = \sqrt{12-3x} + \sqrt{x+2}$ b) $y = \frac{\sqrt{3-5x-2x^2}}{10x}$ c) $y = \sqrt{15-3x} + \sqrt{4+x}$ d) $y = \frac{\sqrt{-3x^2+12}}{1-5x}$

5. Системаи нобаробариҳоро ҳал кунед.

a) $\begin{cases} \frac{2x+1}{x-2} < 1 \\ \frac{3x+2}{2x-3} > 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{7-3x}{2-5x} \leq 2 \\ \frac{2x+1}{3x-3} > 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \frac{3x-2}{x-2} < 2 \\ \frac{5x+1}{4x-5} \geq 3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \frac{x+3}{3x-1} \leq 1 \\ \frac{2x+5}{x-4} \geq 2 \end{cases}$

6. Системаи нобаробариҳоро ҳал кунед.

a) $\begin{cases} x^2 \leq 9 \\ x > 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x^2 + 7x - 6 \leq 0 \\ 6(x+4) - 3(4-3x) < 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x^2 - 2x + 1 \leq 0 \\ 2(x+3) - (x-8) < 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -2x^2 + 3x - 2 < 0 \\ -3(6x-1) - 2x < x \end{cases}$ e) $\begin{cases} 12(x+2) - 5(5-4x) < 2 \\ 9x^2 - 6x - 8 \leq 0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 3x - 1 < 0 \\ x^2 - 3x + 2 \geq 0 \end{cases}$

7. Суммаи тамоми ададҳои бутуни ба ҳалли система дохилшударо ёбед.

a) $\begin{cases} \frac{9-x^2}{x} \geq 0 \\ 2x-1 \geq 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{(x+5)(x-1)}{x} \geq 0 \\ 10x-1 < 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \frac{(x-2)(x+3)}{x(x+7)} < 0 \\ 20x \geq 20 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \frac{25-x^2}{x} \leq 0 \\ 5x-10 \leq 35 \end{cases}$

8. Системаи нобаробариҳоро ҳал кунед.

a) $\begin{cases} 3x^2 - 5x - 2 < 0 \\ 4 - x^2 > 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x^2 + x + 2 > 0 \\ x^2 < 9 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x^2 + 5x + 10 > 0 \\ x^2 \geq 16 \end{cases}$ d) $\begin{cases} -7x^2 + 5x - 2 > 0 \\ x^2 \leq 25 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \frac{x+7}{x-5} + \frac{3x+1}{2} \geq 0 \\ (5-x)^2 \leq 4 \end{cases}$ f) $\begin{cases} -5x^2 + x - 1 > 0 \\ x^2 > 81 \end{cases}$ g) $\begin{cases} x^2 - 6x + 8 < 0 \\ x^2 - 36 \geq 0 \end{cases}$ h) $\begin{cases} x^2 - 16 \geq 0 \\ x^2 - 7x + 12 \geq 0 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x^2 - 5x + 4 \geq 0 \\ 2x^2 - 5x + 2 \leq 0 \end{cases}$ j) $\begin{cases} x^2 - 9x + 14 < 0 \\ x^2 - 7x - 8 \leq 0 \end{cases}$ k) $\begin{cases} x^2 + 4x + 3 \leq 0 \\ 2x^2 + 5x < 0 \end{cases}$ l) $\begin{cases} \frac{(x-3)^2}{(x-3)(x+1)} \geq 0 \\ (x-4)(x+4) \leq 0 \end{cases}$

МУОДИЛАҲОИ ИРРАТСИОНАЛӢ

Дар муодилаҳои $\sqrt{2x-5} = 7$, $2\sqrt{x}+5 = 8$, $\sqrt[3]{x+3} = -1-x$ номаълумҳо дар зери аломати реша ҷойгиранд. Чунин **муодилаҳоро муодилаҳои** ирратсионалӣ меноманд.

Намунаҳои дигари муодилаҳои ирратсионалӣ, масалан, муодилаҳои $\sqrt{2+\sqrt{x-5}} = \sqrt{13-x}$, $\sqrt[5]{(x+1)^2} - \sqrt[5]{(x-1)^2} = \sqrt[5]{x^2-1}$ мебошанд.

Дар бисёр ҳолатҳо, муодилаҳои ирратсионалӣ бо роҳи овардани онҳо ба муодилаҳои ратсионалӣ, ки натиҷаи онҳо мебошанд, ҳал карда мешаванд. Барои ин, *қадамҳои зерин иҷро карда мешаванд*:

- Барои ба муодилаи ирратсионалӣ табдил додани муодилаи ирратсионалӣ ҳарду тарафи муодилаи додашуда як ё якчанд маротиба ба дараҷаи табиӣ бардоштан лозим аст.
- Муодилаи ратсионалии ҳосилшуда ҳал карда мешавад.
- Решаҳои беруна ҳосил мешаванд.

Пайдо шудани решаҳои беруна бо ба дараҷа бардоштан вобаста аст. Инро теоремаи зерин тасдиқ мекунад.

Теорема. Решаҳои муодилаи $f_1(x) = f_2(x)$, ки барои ба квадрат бардоштани ҳарду тарафи муодилаи $f_1^2(x) = f_2^2(x)$ ҳосил шудааст, аз решаҳои муодилаҳои $f_1(x) = f_2(x)$ ва $f_1(x) = -f_2(x)$ иборат мешавад.

Аз муодила $f_1(x) = f_2(x)$, $f_1^2(x) = f_2^2(x)$ -ро ҳосил мекунем. Ин теорема нишон медиҳад, ки ҳангоми ба квадрат бардоштани муодила решаҳои он нест намешаванд, баръакс решаҳои бегона пайдо мешаванд.

Агар дар муодилаи ирратсионалӣ танҳо як реша иштирок кунад, мо ин решаро дар як қисми муодила мегузорем ва шартҳои боқимондаи муодиларо ба қисми дигар мегузаронем. Сипас ҳарду қисмро ба дараҷа мебардорем, ки муодила аз реша халос шавад. Дар натиҷа муодилаи ратсионалӣ ба вуҷуд меояд. Баъдан, шумо бояд муодилаи натиҷавиро ҳал кунед ва онро бо иваз кардани решаҳои он ба ин муодилаи ирратсионалӣ тафтиш кунед. Агар ягон решаи ёфтшуда муодилаи додашударо қонеъ накунад, он решаи бегона аст.

Мисоли 1. Муодилаи $\sqrt{2x-1} = 5$ -ро ҳал кунед.

Ҳал. Ҳар ду қисми муодиларо ба квадрат мебардорем $2x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}$

Акнун месанҷем, ки ин реша бегона аст ё не $(\sqrt{2x-1})^2 = 5^2$. Аз ин ҷо $x = 13$.

$2x-1 = 25$ баробарии дуруст ҳосил шуд.

Санҷиш: $\sqrt{2 \cdot 13 - 1} = \sqrt{25} = 5$.

Ҷавоб: $x = 13$.

Мисоли 2. Муодиларо ҳал кунед $\sqrt{x^2-x-2} = x-3$.

Ҳал. Ду тарафи муодилаи $\sqrt{x^2-x-2} = x-3$ -ро ба квадрат мебардорем

$$x^2-x-2 = x^2-6x+9 \Rightarrow 5x=11 \Rightarrow x=2,2.$$

Санҷиш: $\sqrt{2,2^2-2,2-2} = 2,2-3$, $\sqrt{0,64} = -0,8$; $0,8 \neq -0,8$. Пас, $x = 2,2$ решаи бегона, муодила ҳал надорад.

Ҷавоб: $\emptyset$.

БОБИ 2. МУОДИЛА ВА НОБАРОБАРИҲОИ РАТСИОНАЛӢ. МУОДИЛАҲОИ ИРРАТСИОНАЛӢ



Ҳалли муодилаҳои ирратсионалӣ:

I. Муодилаи намуди $\sqrt{f(x)} = g(x)$ -ро бо овардани муодила ба системаи ба он баробар

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases} \text{ ҳал карда мешавад.}$$

Мисоли 3. Муодиларо ҳал кунед $\sqrt{3x^2 - 6x + 16} = 2x - 1$,

Ҳал.

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 16} = 2x - 1 \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6x + 16 = (2x - 1)^2 \\ 2x - 1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 6x + 16 = 4x^2 - 4x + 1 \\ 2x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 15 = 0 \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Муодилаи $x^2 + 2x - 15 = 0$, $x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} = \frac{-2 \pm 8}{2}$, $\Rightarrow x_1 = 3$, $x_2 = -5$ -ро ҳал мекунем. Азбаски $x \geq \frac{1}{2}$ пас решаи муодила $x = 3$ аст.

Ҷавоб: $x = 3$.

II. Муодилаи намуди $\sqrt{f(x)} \cdot g(x) = 0$ чунин ҳал карда мешавад баъд муодилаи $f(x) = 0$ -ро ҳал кунед. Якҷоя кардани ҳалли ду муодилаи охирин ҳалли муодилаи додашударо медиҳад.

Қадами 1: $g(x) = 0$ ва $f(x) \geq 0$ Қадами 2: $f(x) = 0$

Мисоли 4. Муодиларо ҳал кунед: $(x^2 - 25)\sqrt{6 - 2x} = 0$.

Ҳал.

$$\text{Қадами 1: } \begin{cases} x^2 - 25 = 0 \\ 6 - 2x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1,2} = \pm 5 \\ x \geq 3 \end{cases} \Rightarrow x = -5 \quad \text{Қадами 2: } 6 - 2x = 0 \Rightarrow x = 3$$

Ҷавоб: $x_1 = -5$; $x_2 = 3$.

III. Муодилаи намуди $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ бо роҳи овардани он ба яке аз системаҳои зерин ҳал карда мешавад.

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \quad \text{ё} \quad \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

Мисоли 5. Муодиларо ҳал кунед: $\sqrt{x+1} = \sqrt{2x-3}$.

Ҳал.

$$\begin{cases} x+1 = 2x-3 \\ 2x-3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x \geq 1,5 \end{cases} \Rightarrow x = 4$$

Ҷавоб: $x = 4$.

Мисоли 6. Муодиларо ҳал кунед $\sqrt{x^2 + 4x} = \sqrt{14 - x}$.

Ҳал.

Ҳар ду қисми муодиларо ба квадрат бардошта, муодилаи ҳосил шударо ҳал мекунем.

$$\left(\sqrt{x^2 + 4x}\right)^2 = \left(\sqrt{14 - x}\right)^2$$

$$x^2 + 4x = 14 - x, \quad x_1 = 2; \quad x_2 = -7.$$

Санчиши фаврӣ, яъне санчиш бо иваз кардани ин қиматҳо ба муодилаи ғайриоддӣ нишон медиҳад, ки ҳеҷ кадоми онҳо решаи бегона нестанд.

Ҷавоб: $x_1 = 2; \quad x_2 = -7$.

IV. Ҳалли муодилаҳои намуди $\sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{g(x)} = 0$ аз якҷоягии ҳалли системаҳо иборат аст:

$$\begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \quad \text{ва} \quad \begin{cases} g(x) = 0 \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

Мисоли 7. Муодиларо ҳал кунед $\sqrt{x^2 - 4} \cdot \sqrt{x + 5} = 0$.

$$1) \begin{cases} x^2 - 4 = 0 \\ x + 5 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1,2} = \pm 2 \\ x \geq -5 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -2; \quad x_2 = 2$$

$$2) \begin{cases} x + 5 = 0 \\ x^2 - 4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x = -5$$

Ҷавоб: $x_1 = 2; \quad x_2 = -2; \quad x_3 = -5$.

Мисоли 8. Муодиларо ҳал кунед $\sqrt{1 - x^2} \cdot \sqrt{x^2 - 9} = 0$.

Ҳал.

Соҳаи муайянии муодиларо меёбем

$$\begin{cases} 1 - x^2 \geq 0, \\ x^2 - 9 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 \leq 1, \\ x^2 \geq 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1, \\ x \leq -3, \quad x \geq 3 \end{cases} \Rightarrow \emptyset$$

Азбаски соҳаи муайянӣ маҷмӯи холист, муодила реша надорад.

Ҷавоб: $\emptyset$.

Мисоли 9. Муодиларо ҳал кунед $\sqrt{3x + 7} - \sqrt{x + 1} = 2$.

Ҳал.

Ҳар ду тарафи муодиларо ба квадрат мебардорем

$$\left(\sqrt{3x + 7} - \sqrt{x + 1}\right)^2 = 2^2$$

$$3x + 7 - 2\sqrt{(3x + 7)(x + 1)} + x + 1 = 4,$$

Муодилаи $\sqrt{(3x + 7)(x + 1)} = 2x + 2$ -ро боз ба квадрат бардошта, муодилаи

$$\sqrt{(3x + 7)(x + 1)} = 2x + 2 \text{ -ро ҳосил мекунем. Аз ин ҷо}$$

БОБИ 2. МУОДИЛА ВА НОБАРОБАРИҲОИ РАТСИОНАЛӢ. МУОДИЛАҲОИ ИРРАТСИОНАЛӢ

$$(3x+7)(x+1)=4x^2+8x+4. \text{ Решаҳои он } x^2-2x-3=0$$

Ин решаҳоро месанҷем. $x_1=-1, x_2=3$.

Санҷиш: $x=-1 \quad \sqrt{3(-1)+7} - \sqrt{-1+1} = 2-0=2.$

$x=3$ ба $\sqrt{3 \cdot 3+7} - \sqrt{3+1} = 4-2=2.$

Ҳамин тавр, ҳарду реша муодилаи додашударо қонеъ мекунад.

Ҷавоб: $x_1 = -1; x_2 = 3.$

Мисоли 10. Муодиларо ҳал кунед $\sqrt{3-2x} + \sqrt{x-7} = 5.$

Ҳал.

Сиҳаи муайянии муодиларо меёбем.

$$\begin{cases} 3-2x \geq 0 \\ x-7 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 1,5 \\ x \geq 7 \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset$$

Азбаски соҳаи муайянӣ маҷмӯи холист, муодила реша надорад.

Ҷавоб: $\emptyset.$

Мисоли 11. Муодиларо ҳал кунед $\sqrt[5]{25+\sqrt{x+13}} - 2 = 0.$

Ҳал. Ин решаҳоро месанҷем. Ҳамин тавр, ҳарду реша муодилаи додашударо қонеъ мекунад.

Ин решаҳоро месанҷем $\sqrt[5]{25+\sqrt{x+13}} = 2 \Rightarrow 25+\sqrt{x+13} = 2^5 \Rightarrow \sqrt{x+13} = 7$

$\sqrt{x+13} = 7, x+13 = 7^2, x = 49 - 13 = 36$

Санҷиш: $\sqrt[5]{25+\sqrt{36+13}} = \sqrt[5]{25+\sqrt{49}} = \sqrt[5]{25+7} = \sqrt[5]{32} = 2$

Ҷавоб: $x = 36.$

Мисоли 12. Муодиларо ҳал кунед $\sqrt{\frac{3x+2}{x}} + \sqrt{\frac{x}{3x+2}} = \frac{5}{2}.$

Ҳал.

1. Агар ишора $\sqrt{\frac{3x+2}{x}} = a$ -ро дохил кунем, он гоҳ, $\sqrt{\frac{x}{3x+2}} = \frac{1}{a}$ ва муодила намуди $a + \frac{1}{a} = \frac{5}{2}$ мегирад. Решаҳои онро меёбем $a_1 = 2$ ва $a_2 = \frac{1}{2}.$

2. Акнун, ба ҷои a қиматҳои пайдошударо ба $\sqrt{\frac{3x+2}{x}} = a$ гузошта $x_1 = 2$ ва $x_2 = -\frac{8}{11}$ -ро пайдо мекунем. $x_1 = 2$ ва $x_2 = -\frac{8}{11}.$

Ҷавоб: $x_1 = 2$ ва $x_2 = -\frac{8}{11}.$

Мисоли 13. Муодиларо ҳал кунед $\sqrt[3]{x^3+4x^2+3x-3} = x+1.$

Ҳал. Ин решаҳоро месанҷем.

$$\sqrt[3]{x^3 + 4x^2 + 3x - 3} = x + 1 \Rightarrow x^3 + 4x^2 + 3x - 3 = (x + 1)^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3 + 4x^2 + 3x - 3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \Rightarrow x^2 - 4 = 0.$$

$$x^2 = 4, x_{1,2} = \pm 2.$$

Санчиш: $x = 2$ ба $\sqrt[3]{2^3 + 4 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 - 3} = 2 + 1, \sqrt[3]{27} = 3.$

$x = -2$ ба $\sqrt[3]{(-2)^3 + 4 \cdot (-2)^2 + 3 \cdot (-2) - 3} = -2 + 1, \sqrt[3]{-1} = -1.$

Ҷавоб: $x = \pm 2.$

Мисоли 14. Муодиларо ҳал кунед $\sqrt{x^2 - 3x + 5} + x^2 = 3x + 7,$

Ҳал.

$$\sqrt{x^2 - 3x + 5} + x^2 = 3x + 7 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 3x + 5} + x^2 - 3x + 5 - 12 = 0$$

Агар мо ишораи $\sqrt{x^2 - 3x + 5} = a$ -ро дохил кунем, он гоҳ муодилаи квадратӣ ба даст меорем, $a^2 + a - 12 = 0.$

$$a^2 + a - 12 = 0 \text{ решаҳои он, } a_1 = 3; a_2 = -4.$$

Дар ҳолати $a = 3$ $\sqrt{x^2 - 3x + 5} = 3, x^2 - 3x + 5 = 9, x^2 - 3x - 4 = 0$ муодиларо ҳал мекунем:

$$x_1 = 4; x_2 = -1.$$

Дар ҳолати $a = -4 \notin [0; \infty)$ муодила маъно надорад $\sqrt{x^2 - 3x + 5} = -4, x_1 = 4; x_2 = -1$

Ҷавоб: $x_1 = 4; x_2 = -1.$

Соҳаи муайянии муодила маҷмӯи ҳамаи қиматҳои номаълум аст, ки барои он ҳамаи қисмҳои муодила маъно доранд. Муодилаи иррационалиро бе ёфтани соҳа дуруст ҳал кардан мумкин аст. Моҳияти охирин ба тафтиш такя мекунад. Дар баъзе муодилаҳо ёфтани соҳаи муайянӣ муфид аст.

Масалан, шумо метавонед худатон тафтиш кунед, ки:

1) ёфтани соҳаи муайянии муодилаи $\sqrt{x^3 + 4x - 1 - 8\sqrt{x^4 - x}} = \sqrt{x^3 - 1} + 2\sqrt{x}$ хеле мушкул ва бефоида аст (беҳтар аст, ки ҳарду тарафи муодиларо ба квадрат бардорем);

2) барои ҳалли муодилаи $\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{2 - x - x^2} = \sqrt{x} - 1$ ёфтани соҳаи муайянии он кифоя аст.

V. Муодилаи $\sqrt{f^2(x)} = f(x)$ ба нобаробарии $f(x) \geq 0$ баробарқувва аст,

Муодилаи $\sqrt{f^2(x)} = -f(x)$ ба нобаробарии $f(x) \leq 0$ баробарқувва аст.

МИСОЛҲО

Муодиларо ҳал кунед.

$$1. \sqrt{5x+2} = 10$$

$$2. \sqrt{4x-6} = 12$$

$$3. \sqrt{10-2x} = 4$$

$$4. \sqrt{-12+7x} = x$$

$$5. \sqrt{x+12} + x = 0$$

$$6. \sqrt{4+3x} = -x$$

$$7. x-3 = \sqrt{9-x}$$

$$8. -x = \sqrt{15-2x}$$

$$9. x-6 = \sqrt{8-x}$$

$$10. \sqrt{\frac{3x-17}{7}} = 4$$

$$11. \sqrt{\frac{11}{6-4x}} = \frac{1}{2}$$

$$12. \sqrt{\frac{4}{5x-2}} = 1$$

$$13. \sqrt{5x-3} = \sqrt{2x}$$

$$14. \sqrt{4-2x} = 2\sqrt{x-1}$$

$$15. \sqrt{x^2-3x+1} = \sqrt{2x-5}$$

$$16. 3x+2\sqrt{2x^2+3x-5} = 12$$

$$17. 3+\sqrt{3x^2-8x+14} = 2x$$

$$18. \sqrt{15x^2-7x+8} = 4x$$

$$19. \sqrt{x^2+x} = 2-x$$

$$20. (x^2-25)\sqrt{6-2x} = 0$$

$$21. (4-x^2)\sqrt{-1-3x} = 0$$

$$22. (x^2-16)(x-3)(x-6)\sqrt{5-x} = 0$$

$$23. (x^2-9x+14)\sqrt{x^2-9} = 0$$

$$24. (x-4) \cdot \sqrt{3+2x-x^2} = 0$$

$$25. \sqrt{5x+4} - \sqrt{x+3} = 1$$

$$26. \sqrt{x-2} + \sqrt{1-x} = 2$$

$$27. \sqrt{x-13} + \sqrt{10-x} = 4$$

$$28. \sqrt{(2x-3)^2} = 2x-3$$

$$29. \sqrt{3x-2} + \sqrt{x-1} = 3$$

$$30. 2\sqrt{x-2} + 2 = \sqrt{3x+1}$$

$$31. \sqrt{x^2+77} - 2\sqrt[4]{x^2+77} - 3 = 0$$

$$32. \sqrt{x} + \sqrt[4]{x} = 12$$

$$33. \sqrt{x} + \sqrt{x-2} = 1-x$$

$$34. \sqrt{x^2+32} = 2\sqrt[4]{x^2+32} + 3$$

$$35. x^2+5x+4-5\sqrt{x^2+5x+28} = 0$$

$$36. x^2 + \sqrt{x^2+2x+8} = 12-2x$$

$$37. \sqrt{x-2} + \sqrt{x-1} = \sqrt{3x-5}$$

$$38. \sqrt{x+2} + \sqrt{x+5} = \sqrt{2x+11}$$

$$39. \sqrt[3]{2-x} = 1-\sqrt{x-1}$$

$$40. \sqrt[3]{7-x} = \sqrt{3-x}$$

СИСТЕМАИ МУОДИЛАҲОИ ИРАТСИОНАЛӢ

Ҳалли системаҳои муодилаҳои иррационалӣ ба қоидаҳои гузариш ба системаҳои баробар ё натиҷаҳо асос меёбад. Усулҳои гуногуни ҳалли системаи муодилаҳои иррационалӣ истифода мешаванд: факторизатсия, бартараф кардани тағйирёбандаҳо, иловаи алгебравӣ, тағйир додани тағйирёбандаҳо ва ғайра.

Мисоли 1. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед.
$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 8 \\ \sqrt{xy} = 7 \end{cases}$$

Ҳал.

Соҳаи муайянии системаи муодилаҳоро меёбем $x \geq 0, y \geq 0$.

Ишора дохил мекунем $\sqrt{x} = a, \sqrt{y} = b$

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 8 \\ \sqrt{xy} = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 8 \\ ab = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 8 - b \\ (8 - b)b = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 8 - b \\ b^2 - 8b + 7 = 0 \end{cases}$$

$b^2 - 8b + 7 = 0$ муодиларо ҳал мекунем, $b_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 28}}{2} = \frac{8 \pm 6}{2}, \Rightarrow b_1 = 7, b_2 = 1$.

Муодилар ҳал мекунем $a_1 = 8 - b_1 = 8 - 7 = 1, \Rightarrow a_1 = 1$.

Дар ҳолати $a_1 = 1, b_1 = 7$ $a_2 = 8 - b_2 = 8 - 1 = 7, \Rightarrow a_2 = 7$. -ро дорем.

Дар ҳолати $a_2 = 7, b_2 = 1, 4) a_1 = 1, b_1 = 7$ ба $\sqrt{x} = 1, \sqrt{y} = 7. \Rightarrow x = 1, y = 49$. -ро дорем.

$a_2 = 7, b_2 = 1$ ба $\sqrt{x} = 7, \sqrt{y} = 1. \Rightarrow x = 49, y = 1$.

Пас, решаҳои системаи ҳосилшуда $(1; 49)$ ва $(49; 1)$ мебошанд.

Санҷиш мегузаронем, ки оё ин ҷуфтҳо решаҳои системаи додашуда мебошанд:

Санҷиш: $x = 1, y = 49$ ба

$$\text{Дар ҳолати } x = 1, y = 49 \begin{cases} \sqrt{1} + \sqrt{49} = 8 \\ \sqrt{49} = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + 7 = 8 \\ 7 = 7 \end{cases}$$

$x = 49, y = 1$ ба

$$\text{Дар ҳолати } x = 49, y = 1 \begin{cases} \sqrt{49} + \sqrt{1} = 8 \\ \sqrt{49} = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7 + 1 = 8 \\ 7 = 7 \end{cases}$$

Ҷавоб: $(1; 49), (49; 1)$.

Мисоли 2. Системаи муодиларо ҳал кунед
$$\begin{cases} x - y = 21 \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 3 \end{cases}$$

Ҳал.

Соҳаи муайянии системаи муодилаҳоро меёбем: $x \geq 0, y \geq 0$.

Формулаи зарби мухтасарро истифода мебарем $x - y = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})$.

БОБИ 2. МУОДИЛА ВА НОБАРОБАРИҲОИ РАТСИОНАЛӢ. МУОДИЛАҲОИ ИРРАТСИОНАЛӢ

$$\begin{cases} x - y = 21 \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 21 \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 21 \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$+ \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 7 \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 5 \\ \sqrt{y} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 25 \\ y = 4. \end{cases}$$

Аз ин рӯ, (25;4) решаи системаи ҳосилшуда мебошад.

Меснаҷем, ки оё он решаи системаи асли аст. Барои $x = 25, y = 4$

$$\begin{cases} 25 - 4 = 21 \\ \sqrt{25} - \sqrt{4} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 21 = 21 \\ 5 - 2 = 3 \end{cases}$$

Санҷиш: $x = 25, y = 4$ ба

Ҷавоб: (25; 4).

Мисоли 3. Системаи муодиларо ҳал кунед $\begin{cases} x + y + \sqrt{x + y} = 20 \\ x^2 + y^2 = 136 \end{cases}$.

Ҳал.

Аввал муодилаи якуми системаи $x + y + \sqrt{x + y} = 20$, -ро ҳал мекунем. Агар аломати $\sqrt{x + y} = a$ -ро дохил кунем, он гоҳ муодилаи квадрати, $a^2 + a - 20 = 0$ ҳосил мешавад.

Азбаски $\sqrt{x + y} \geq 0, a \geq 0, a \in [0; \infty)$.

Муодилаи $a^2 + a - 20 = 0$ -ро ҳал мекунем, $a_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 80}}{2} = \frac{-1 \pm 9}{2}, a_1 = 4, a_2 = -5$.

Азбаски $4 \in [0; \infty), -5 \notin [0; \infty)$. пас, $\sqrt{x + y} = 4$. $x + y = 16$. Дар натиҷа,

$$\text{муодилаи } \begin{cases} x + y + \sqrt{x + y} = 20 \\ x^2 + y^2 = 136 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 16 \\ x^2 + y^2 = 136 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 16 - y \\ (16 - y)^2 + y^2 = 136 \end{cases}$$

$(16 - y)^2 + y^2 = 136 \Rightarrow y^2 - 16y + 60 = 0$ -ро ҳал мекунем.

$$y_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 240}}{2} = \frac{16 \pm 4}{2}, \Rightarrow y_1 = 10, y_2 = 6.$$

Барои $y_1 = 10, y_2 = 6$ ба туфайли $x + y = 16$ мутаносибан, $x_1 = 6, x_2 = 10$ меояд. Ҳалли системаи муодилаҳои ратсионālӣ (10; 6) ва (6; 10).

$$\text{Санҷиш: } \begin{cases} 10 + 6 + \sqrt{10 + 6} = 16 + 4 = 20 \\ 10^2 + 6^2 = 100 + 36 = 136 \end{cases}$$

Ҷавоб: (10; 6), (6; 10).

Мисоли 4. Системаи муодиларо ҳал кунед $\begin{cases} x + y = 28 \\ \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 4 \end{cases}$.

Ҳал.

Соҳаи муайянии системаи муодиларо меёбем: $x \in R, y \in R$.

$\sqrt[3]{x} = a, \sqrt[3]{y} = b$ -ро ифода мекунем. Пас : $x = a^3, y = b^3$.

$$\begin{cases} x + y = 28 \\ \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 + b^3 = 28 \\ a + b = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a+b)(a^2-ab+b^2) = 28 \\ a+b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4(a^2-ab+b^2) = 28 \\ a+b = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2-ab+b^2 = 7 \\ a+b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a+b)^2 - 3ab = 7 \\ a+b = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4^2 - 3ab = 7 \\ a+b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3ab = 9 \\ a+b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab = 3 \\ a+b = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ab = 3 \\ a+b = 4 \end{cases} \text{ аз системаи муодилаи } a_1 = 1, b_1 = 3 \text{ ва } a_2 = 3, b_2 = 1 \text{ -ро соҳиб мешавем.}$$

Барои $a_1 = 1, b_1 = 3$ $\sqrt[3]{x} = a, \sqrt[3]{y} = b, a_1 = 1, b_1 = 3$ -ро дорем.

Аз ин ҷо $\sqrt[3]{x} = 1, \sqrt[3]{y} = 3 \Rightarrow x = 1, y = 27$.

Барои $a_2 = 3, b_2 = 1$ $a_2 = 3, b_2 = 1$ -ро дорем. Аз ин ҷо $\sqrt[3]{x} = 3, \sqrt[3]{y} = 1 \Rightarrow x = 27, y = 1$.

Санҷиш: $x = 1, y = 27$ ё ки $x = 27, y = 1$ ба $\begin{cases} 1 + 27 = 28 \\ \sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{27} = 1 + 3 = 4 \end{cases}$

Ҷавоб: $(1; 27), (27; 1)$.

Мисоли 5. Системаи муодиларо ҳал кунед $\begin{cases} 3x - \sqrt{y+2x} = 1 \\ y + 3x = 5 \end{cases}$.

$$\text{Ҳал. 1) } \begin{cases} 3x - \sqrt{y+2x} = 1 \\ y + 3x = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - \sqrt{y+2x} = 1 \\ y = 5 - 3x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x - \sqrt{5-3x+2x} = 1 \\ y = 5 - 3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{5-x} = 3x - 1 \\ y = 5 - 3x \end{cases}$$

2) Муодилаи $\sqrt{5-x} = 3x-1$ -ро ҳал мекунем. Зеро $\sqrt{5-x} \geq 0$ пас

$$3x-1 \geq 0, \Rightarrow 3x \geq 1, \Rightarrow x \geq \frac{1}{3}, \Rightarrow x \in \left[\frac{1}{3}; \infty\right).$$

Ҳар ду қисми муодилаи $\sqrt{5-x} = 3x-1$ -ро ба квадрат бардошта, муодилаи квадратиро ҳосил мекунем.

$$5-x = (3x-1)^2, \Rightarrow 5-x = 9x^2-6x+1, \Rightarrow 9x^2-5x-4 = 0.$$

БОБИ 2. МУОДИЛА ВА НОБАРОБАРИҲОИ РАТСИОНАЛӢ. МУОДИЛАҲОИ ИРРАТСИОНАЛӢ

Решаҳои муодиларо меёбем:

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+144}}{18} = \frac{5 \pm 13}{18}, \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = -\frac{4}{9}.$$

Зеро $x \in \left[\frac{1}{3}; \infty\right)$ $1 \in \left[\frac{1}{3}; \infty\right)$, $-\frac{4}{9} \notin \left[\frac{1}{3}; \infty\right)$. Аз ин рӯ

барои $x=1$ $y=5-3x=5-3=2$, $y=2$. -ро дорем. Пас, ҷуфти $(1; 2)$ - решаи муодила аст.

- системаи ҳосилшуда аст. Фақат санҷидани он, ки ин ҷуфт решаи системаи асли аст,

боқӣ мемонад. **Санҷиш:** Барои: $(1; 2)$ ба $\begin{cases} 3 \cdot 1 - \sqrt{2+2 \cdot 1} = 3 - \sqrt{4} = 3 - 2 = 1 \\ 2 + 3 \cdot 1 = 5 \end{cases}$ -ро соҳиб мешавем.

Баробариҳои дурусти ададӣ ҳосил шуд.

Ҷавоб: $(1; 2)$.

Мисоли 6. Системаи муодиларо ҳал кунед $\begin{cases} \sqrt{x-2y+2} = 2, \\ \sqrt{y-2x+11} = x-5 \end{cases}$.

Ҳал.

Аз $\sqrt{y-2x+11} \geq 0$ -ро пайдо мекунем ё $x-5 \geq 0$, $x \geq 5$. $x \in [5; \infty)$. Акнун системаи муодилаҳои ирратсионалиро бо роҳи табдили пайдарпай ба системаи муодилаҳои ратсионалӣ меорем.

$$\begin{cases} \sqrt{x-2y+2} = 2, \\ \sqrt{y-2x+11} = x-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\sqrt{x-2y+2})^2 = 4 \\ (\sqrt{y-2x+11})^2 = (x-5)^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-2y+2=4, \\ y-2x+11=x^2-10x+25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y=2, \\ y=x^2-8x+14 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-2(x^2-8x+14)=2, \\ y=x^2-8x+14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2-17x+30=0, \\ y=x^2-8x+14 \end{cases}$$

$$\text{Муодилаи } 2x^2-17x+30=0 \text{ -ро ҳал мекунем решаҳои он, } x_{1,2} = \frac{17 \pm \sqrt{289-240}}{4} = \frac{17 \pm 7}{4},$$

$x_1 = 6$, азбаски $x_2 = \frac{5}{2}$, пас ин қимат $x \in [5; \infty)$ ба решаи бегонаи системаи додашуда оварда мерасонад. Барои, $6 \in [5; \infty)$, $\frac{5}{2} \notin [5; \infty)$. Муодилаи $x_1 = 6$ ба $y_1 = 6^2 - 8 \cdot 6 + 14 = 36 - 48 + 14 = 2$.

$\Rightarrow y_1 = 2$ -ро пайдо мекунем. Ҷуфти $(6; 2)$ - ро, санҷида онро ба системаи асли иваз мекунем:

$$\begin{cases} \sqrt{6-2 \cdot 2+2} = \sqrt{4} = 2, \\ \sqrt{2-2 \cdot 6+11} = 6-5 = 1 \end{cases} \text{ баробариҳои дурусти ададӣ ҳосил шуд.}$$

Ҷавоб: $(6; 2)$.

Мисоли 7. Системаи муодиларо ҳал кунед $\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{2x+y+2} = 7 \\ 3x+2y=23 \end{cases}$.

Ҳал.

Ифодаи $\sqrt{x+y} = a$ ва $\sqrt{2x+y+2} = b$ -ро дохил карда, ҳосил мекунем ки, $a \geq 0$ ва $b \geq 0$ квадрат бардошта муодилаи

$x+y = a^2$ ва $2x+y+2 = b^2$ -ро дором мешавем.

Ин баробариҳоро ҳам мекунем $\begin{cases} x+y = a^2 \\ 2x+y+2 = b^2 \end{cases} \Rightarrow 3x+2y+2 = a^2 + b^2.$

Бо назардошти муодилаи дуҷуми системаи додашуда $3x+2y = 23$. Яъне аз баробарии охири мо $3x+2y+2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 25 = a^2 + b^2$ -ро ҳосил мекунем. Ҳамин тавр, мо метавонем системаи аслиро чунин иваз кунем.

Решаҳои системаи дуҷум ҷуфтҳои $(3; 4)$ ва $(4; 3)$ мебошанд.

Барои $a = 3$ ва $b = 4$ системаи муодилаи

$$\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{2x+y+2} = 7 \\ 3x+2y = 23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = 7 \\ a^2 + b^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow a_1 = 3, b_1 = 4, a_2 = 4, b_2 = 3.$$

$$a_1 = 3, b_1 = 4 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+y} = 3, \\ \sqrt{2x+y+2} = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y = 9, \\ 2x+y+2 = 16 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y = 9 \\ 2x+y = 14 \end{cases} \Rightarrow x = 5, y = 4 \text{ -ро дорем.}$$

$$a_2 = 4, b_2 = 3 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+y} = 4, \\ \sqrt{2x+y+2} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y = 16, \\ 2x+y+2 = 9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y = 16 \\ 2x+y = 7 \end{cases} \Rightarrow x = -9, y = 25 \text{ -ро дорем,}$$

Санҷиш: Барои $(5; 4)$ $\begin{cases} \sqrt{5+4} + \sqrt{2 \cdot 5 + 4 + 2} = 7 \\ 3 \cdot 5 + 2 \cdot 4 = 23 \end{cases}$ -ро дорем, баробариҳои дурусти ададӣ;

Барои $(-9; 25)$ $\begin{cases} \sqrt{(-9)+25} + \sqrt{2 \cdot (-9) + 25 + 2} = 7 \\ 3 \cdot (-9) + 2 \cdot 25 = 23 \end{cases}$ -ро дорем, баробариҳои дурусти ададӣ.

Ҷавоб: $(5; 4), (-9; 25)$

МИСОЛҲО

Системаи муодиларо ҳал кунед.

1. а) $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 4 \\ 2\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 18 \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3\sqrt{x} - \sqrt{y} = 8 \\ \sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 19 \end{cases}$

2. а) $\begin{cases} \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 3 \\ \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 5 \end{cases}$

б) $\begin{cases} \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 1 \\ \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 3 \end{cases}$

БОБИ 2. МУОДИЛА ВА НОБАРОБАРИҲОИ РАТСИОНАЛӢ. МУОДИЛАҲОИ ИРРАТСИОНАЛӢ

$$3. \text{ a) } \begin{cases} 2\sqrt[3]{x} + 3\sqrt[3]{y} = -1 \\ 2\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[3]{y} = -7 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 3\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[3]{y} = 3 \\ 3\sqrt[3]{x} - 2\sqrt[3]{y} = -9 \end{cases}$$

$$4. \text{ a) } \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 26 \\ \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 6 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 5 \\ \sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y} = 1 \end{cases}$$

$$5. \text{ a) } \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9 \\ \sqrt[6]{x} + \sqrt[6]{y} = 3 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 7 \\ \sqrt[6]{x} - \sqrt[6]{y} = 1 \end{cases}$$

$$6. \text{ a) } \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 8 \\ \sqrt{x}\sqrt{y} = 15 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 7 \\ \sqrt{x}\sqrt{y} = 12 \end{cases}$$

$$7. \text{ a) } \begin{cases} \sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 10 \\ \sqrt{x}\sqrt{y} = 8 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2\sqrt{x} - \sqrt{y} = 5 \\ \sqrt{x}\sqrt{y} = 3 \end{cases}$$

$$8. \text{ a) } \begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 4 \\ x - y = 32 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 8 \\ x - y = 16 \end{cases}$$

$$9. \text{ a) } \begin{cases} \sqrt{6+x} - 3\sqrt{3y+4} = -10 \\ 4\sqrt{3y+4} - \sqrt{6+x} = 14 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2\sqrt{x-2} + \sqrt{5y+1} = 8 \\ 3\sqrt{x-2} - 2\sqrt{5y+1} = -2 \end{cases}$$

$$10. \text{ a) } \begin{cases} \sqrt[4]{x+y} - \sqrt[4]{x-y} = 2 \\ \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = 8 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \sqrt[4]{x+y} + \sqrt[4]{x-y} = 4 \\ \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 10 \end{cases}$$

$$11. \text{ a) } \begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 5 \\ x \cdot y = 216 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 3\frac{3}{4} \\ x \cdot y = 1 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = -3 \\ x \cdot y = 8 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 2 \\ x \cdot y = 27 \end{cases}$$

$$12. \text{ a) } \begin{cases} y\sqrt{x} + x\sqrt{y} = 30 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} y\sqrt{x} - x\sqrt{y} = -12 \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1 \end{cases}$$

$$13. a) \begin{cases} y + x - \sqrt{xy} = 7 \\ xy = 9 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x - y + \sqrt{xy} = 20 \\ xy = 64 \end{cases}$$

$$14. a) \begin{cases} \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 3 \\ \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2} = 3 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = -1 \\ \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2} = 7 \end{cases}$$

$$15. a) \begin{cases} 3\sqrt{\frac{x}{y}} + 2\sqrt{\frac{y}{x}} = 5 \\ 4\sqrt{x} + \sqrt{y} = 10 \end{cases}$$

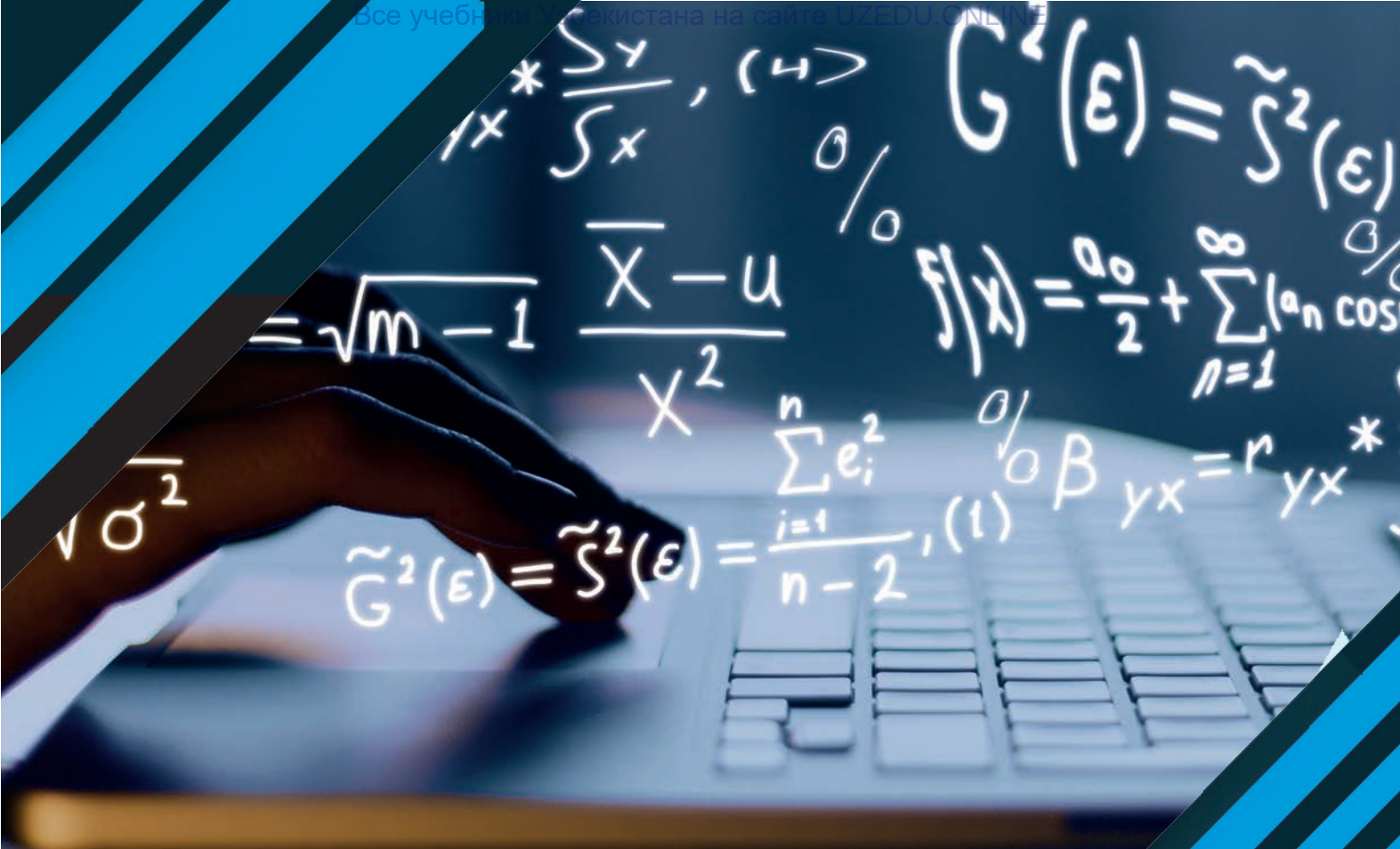
$$b) \begin{cases} 4\sqrt{\frac{x}{y}} + 2\sqrt{\frac{y}{x}} = 9 \\ 7\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 48 \end{cases}$$

$$16. a) \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{10}{3} \\ y^2 + x^2 = 82 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{5}{2} \\ y^2 - x^2 = 15 \end{cases}$$

$$17. a) \begin{cases} 4y + 5x - \sqrt{xy} = 79 \\ 5x - 4y + \sqrt{xy} = 81 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 9y + 2x - \sqrt{xy} = 71 \\ 2x - 9y + \sqrt{xy} = 73 \end{cases}$$



БОБИ 3. ФУНКСИЯҲОИ НИШОНДИҲАНДАГӢ ВА ФУНКСИЯҲОИ ЛОГАРИФМӢ

- ФУНКСИЯИ НИШОНДИҲАНДАГӢ
- МУОДИЛАҲОИ НИШОНДИҲАНДАГӢ
- НОБАРОВАРИҲОИ НИШОНДИҲАНДАГӢ
- МАФҲУМИ ЛОГАРИФМ. ФУНКСИЯИ ЛОГАРИФМӢ
- ТАБДИЛДИҲИИ АЙТИЯТИИ ИФОДАҲОИ ЛОГАРИФМӢ
- МУОДИЛАҲОИ ЛОГАРИФМӢ
- СИСТЕМАИ МУОДИЛАҲОИ НИШОНДИҲАНДАГӢ ВА ЛОГАРИФМӢ
- НОБАРОВАРИҲОИ ЛОГАРИФМӢ
- ТАТБИҚИ ФУНКСИЯҲОИ НИШОНДИҲАНДАГӢ ВА ЛОГАРИФМӢ

ФУНКСИЯИ НИШОНДИХАНДАГӢ

Дар вақтҳои охир аз сатҳи замин баланд шудани ҷанг зуд-зуд мушоҳида карда мешавад. Ибботи шудааст, ки миқдори ҷанг баробари баланд шудани кам мешавад. Вобастагии миқдори ҷанг аз баландӣ бо функцияи нишондиҳандагӣ ифода карда мешавад. Ба ғайр аз ин, ба воситаи функцияҳои нишондиҳандагӣ ҳодисаҳо, аз қабилы зиёдшавии вирусҳо ва пӯсидани моддаҳои радиоактивӣ низ тасвир карда мешаванд.

Агар миқдори ҷангро дар як воҳиди ҳаво бо y ва баландиро бо x – нишон диҳем, он гоҳ вобастагии миқдори ҷангро аз баландӣ бо формулаи $y = p \cdot e^{-qx}$. Дар ин ҷо p, q – бузургҳои маълум буда, **параметрҳо** номида мешаванд, e – адади иррационалӣ буда, **адади Эйлер** номида мешавад. Қимати тахминии он 2,71 аст.

Барои омӯхтани функцияҳои нишондиҳандагӣ донишони хосиятҳои зерин талаб карда мешавад.

$$\begin{array}{lll} 1) a^0 = 1, & a \neq 0 & 2) a^1 = a \\ 3) a^n \cdot a^m = a^{n+m} & & \\ 4) \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} & 5) (a^n)^m = a^{nm} & 6) (ab)^n = a^n \cdot b^n \\ 7) \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, & b \neq 0 & 8) a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \quad a > 0, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z} \end{array}$$

Тавре, ки маълум аст, дараҷаҳои $a^{\frac{m}{n}}$ –ро бо нишондиҳандаи касри $(-3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-3}$ ё a^p бо нишондиҳандаи ҳақиқии p дида баромадан мумкин аст. Барои баъзе қиматҳои p , нишондиҳандаи a^p метавонад бемаънӣ гардад. Масалан, ифодаи $(-3)^{1/2}$ дар маҷмӯи ададҳои ҳақиқӣ маъно надорад. Инчунин, ифодаи $0^{-3} = \frac{1}{0^3} = \frac{1}{0}$ низ номуайян аст. Барои пешгирӣ кардани чунин ҳодисаҳо шарти $a > 0$ дар асоси a дараҷаи a^p бо p ҳақиқӣ гузошта мешавад. Азбаски $1^p = 1$ барои ягон адади ҳақиқии p , дараҷаи асоси 1 ягон маълумоти нав намедиҳад.

Пас, дар асоси гуфтаҳои боло хулосаи зерин баровардан мумкин аст.

Хулоса. Барои он ки дараҷаи a бо нишондиҳандаи ҳақиқии ихтиёрии p қимати муайян гирад, асоси a бояд шартҳои $a > 0$ ва $a \neq 1$ –ро қонеъ кунад.

Адади ҳақиқии a –ро, ки шартҳои $a > 0$ ва $a \neq 1$ –ро қонеъ мекунад, дида мебароем. Функцияи намуди.

$y = a^x$ **функцияи нишондиҳандагӣ** номида мешавад (нишондиҳандаи дараҷа – тағйирёбанда).

● Функцияи нишондиҳандагии $y = a^x$ дорони хосиятҳои зерин аст:

$$D(y) = (-\infty; +\infty)$$

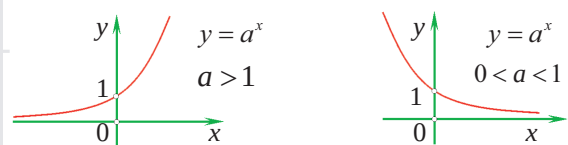
● Соҳаи муайянии функцияи нишондиҳандагии $y = a^x$ аз маҷмӯи ҳамаи ададҳои ҳақиқӣ иборат аст:

$$E(y) = (0; +\infty)$$

● Маҷмӯи қиматҳои функцияи нишондиҳандагии $y = a^x$ аз маҷмӯи ҳамаи ададҳои мусбии ҳақиқӣ иборат аст:

● Функцияи нишондиҳандагии $y = a^x$ бо тири Ox бурида намешавад.

Расми 1



Графики функцияи нишондиҳандагӣ

БОБИ 3. ФУНКСИЯҲОИ НИШОНДИҲАНДАГӢ ВА ЛОГАРИФМӢ

- Функцияи $y = a^x$ бо тири Oy дар нуқтаи $(0; 1)$ мебурад
- Функцияи нишондиҳандаги даврӣ нест, на ҷуфт ва на тоқ аст
- Функцияи $y = a^x$ дар ҳолати $a, 0 < a < 1$ кам мешавад. Фосилаи камшавӣ $(-\infty; +\infty)$,
- Функцияи $y = a^x$ дар ҳолати $a > 1$ меафзояд. Фосилаи афзуншавӣ $y = a^x (-\infty; +\infty)$

Хосияти функцияро гӯед ва графики онро созед.

Мисоли 1. Муқоиса кунед $(0,1)^{\sqrt{2}}$ ва 1.

Ҳал.

Функцияи $1 = (0,1)^0$ ва $y = (0,1)^x$ -ро дида мебароем, ки асоси он дар байни сифр ва як аст. Аз ин рӯ, он камшаванда аст. Бинобар ин, $\sqrt{2} > 0 \Rightarrow (0,1)^{\sqrt{2}} < (0,1)^0 \Rightarrow (0,1)^{\sqrt{2}} < 1$ зеро $0 < \sqrt{2}$.

Ҷавоб: $(0,1)^{\sqrt{2}} < 1$.

Мисоли 2. Кадоме аз ин функцияҳо камшавандаанд $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = e^x$, $y = 2,6^x$

Ҳал.

Аз се функцияи додашуда танҳо дар якумаш асос дар байни 0 то 1 меҳабд, асоси боқимондаҳо аз 1 калонтаранд. Аз ин рӯ, танҳо функцияи $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ камшаванда аст.

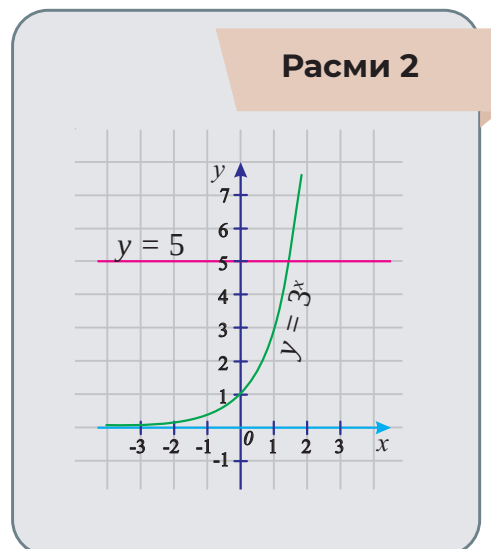
Ҷавоб: $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Мисоли 3. Нишон диҳед, ки муодилаи $3^x = 5$ ҳалли ягона дорад.

Ҳал.

Графики функцияи $y = 3^x$ ва $y = 5$ -ро дар як ҳамворӣ месозем (расми 2).

Аз расм дида мешавад, ки графикҳо дар як нуқта бурида мешаванд. Ин нишон медиҳад, ки муодила ҳалли ягона дорад.



МИСОЛҲО

1. Хосиятҳои функцияро гӯед ва графики онро созед.

- a) $y = 3^x$ b) $y = 0,4^x$ c) $y = 0,8^x$ d) $y = 1,5^x$

2. Маҷмӯи қиматҳои функцияро ёбед,

- a) $y = 3^x$ b) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$
 c) $y = -\left(\frac{1}{3}\right)^x$ d) $y = 4^x + 2$

3. Ифодаҳоро муқоиса кунед,

a) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$ ва 1 b) $3,2^{-\sqrt{2}}$ ва 1 c) $0,7^{\frac{\sqrt{5}}{9}}$ ва $0,7^{\frac{1}{6}}$ d) $5^{-\sqrt{13}}$ ва $\left(\frac{1}{5}\right)^{2,1}$

4. Ҳисоб кунед.

a) $((\sqrt{3})^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}$ b) $3^{1-2\sqrt{3}} \cdot 9^{1+\sqrt{3}}$ c) $64^{\sqrt{2}} : 64^{3\sqrt{2}}$ d) $(5^{\sqrt[3]{16}})^{\sqrt[3]{2}}$

5. Ифодаҳоро содда кунед.

a) $(c^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}$ b) $b^{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^{\sqrt{2}-1}$ c) $x^{\pi} \cdot \sqrt[4]{x^2 : 6x^{4\pi}}$ d) $y^{\sqrt{2}} \cdot y^{1,5} : 6\sqrt[3]{y^{3\sqrt{2}}}$

6. Кадоме аз ин функсияҳо $y = \left(\frac{5}{9}\right)^x$, $y = \pi^x$, $y = 1,7^x$ афзуншавандаанд?

7. Нақшаҳои графикаи функсияҳои зеринро тартиб диҳед.

a) $y = 2^{|x|}$ b) $y = -2^{|x|+1}$ c) $y = 2^{-|x|} - 1$

8. Ифодаҳоро содда кунед.

a) $\frac{a^{2\sqrt{2}} - b^{2\sqrt{3}}}{(a^{\sqrt{2}} - b^{\sqrt{3}})^2} + 1$ b) $\frac{(a^{2\sqrt{3}} - 1)(a^{2\sqrt{3}} + a^{\sqrt{3}} + a^{3\sqrt{3}})}{a^{4\sqrt{3}} - a^{\sqrt{3}}}$
c) $\frac{a^{\sqrt{5}} - b^{\sqrt{7}}}{a^{\frac{2\sqrt{5}}{3}} + a^{\frac{\sqrt{5}}{3}} b^{\frac{\sqrt{7}}{3}} + b^{\frac{2\sqrt{7}}{3}}}$ d) $\sqrt{(x^{\pi} + y^{\pi})^2 - \left(4^{\frac{1}{\pi}} xy\right)^{\pi}}$

9. Кадоме аз ду функсияи зерин афзоиш меёбад ва кадомаш кам мешавад?

a) $y = (\sqrt{2})^x$, $y = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$ b) $y = \left(\frac{\pi}{3}\right)^x$, $y = \left(\frac{3}{\pi}\right)^x$
c) $y = (\sqrt{5} - 2)^x$, $y = \frac{1}{(\sqrt{5} - 2)^x}$ d) $y = (3 - \sqrt{7})^x$, $y = \frac{1}{(3 - \sqrt{7})^x}$

10. Маҷмӯи қиматҳои функсияро ёбед.

a) $y = 3^{x+1} - 3$ b) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 2$ c) $y = |2^x - 2|$ d) $y = 4^{|x|}$

11. Калонтарин ва хурдтарин қиматҳои функсияро ёбед.

a) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x}$ b) $y = 4^{\cos x}$ c) $y = 5 + 3^{|\cos x|}$ d) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{|\sin x|} - 2$

12. Аломати нишондиҳандаҳоро муайян кунед.

a) $3^a = 10$ b) $10^a = 4$ c) $0,3^a = 0,1$ d) $0,7^a = 5$

13. Қимати ифодаҳоро ёбед.

a) $6^{x-1} = 12$, $6^x = ?$ b) $5^{x-3} = 4$, $5^{4-x} = ?$ c) $12^{x+5} = 6$, $12^{-3-x} = ?$

БОБИ 3. ФУНКСИЯҲОИ НИШОНДИҲАНДАГӢ ВА ЛОГАРИФМӢ

14. Дар кадом ҳолатҳо нобаробарии $3^{x_1} > 3^{x_2}$ иҷро мешавад?
15. Иббот кунед, ки пайдарпайии қиматҳои функсияи $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ вақте ки x адади натуралӣ аст, прогрессияи геометрии ташкил медиҳад.

♦ Истифодаи функсияи нишондиҳандагӣ дар ҳаёт

Вақте ки чойники ҷӯшонро аз оташ мегирем, аввал зуд хунук мешавад ва баъд суръати хунукшавӣ суст мешавад. Сабаб дар он аст, ки суръати хунукшавӣ ба фарқи байни ҳарорати чойник ва ҳарорати муҳити атроф вобаста аст. Ҳар қадаре, ки ин фарқият камтар бошад, чойник ҳамон қадар сусттар хунук мешавад. Агар ҳарорати ибтидоии чойник T_0 , ва ҳарорати ҳаво T_1 , бошад, он гоҳ ҳарорати чойник пас аз t сония бо формулаи $T = (T_1 - T_0)e^{-kt} + T_1$ муайян карда мешавад, ки дар он k доимӣ аст.



Истифода дар физика

Вақте ки ашё дар фазои беҳаво (вакуум) озодона меафтад, суръати он меафзояд. Ҳатто дар ҳаво суръати афтидани ҷисмҳои зиёд мешавад, вале аз қимати муайян зиёд нест. Агар қувваи муқовимати ҳаво ба суръати афтиши парашютгар мутаносиб бошад, яъне $f = kv$, пас аз t сония суръати афтиши $\bar{v}$ ба $v = \frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right)$ баробар мешавад, ки m вазни парашютист мебошад.



Афзоиши аҳоли

Тағйирёбии шумораи аҳоли дар кишвар дар як давраи муайян бо формулаи $N = N_0 e^{kt}$ – нишон дода мешавад, ки дар он $t = 0$, a шумораи аҳоли дар вақти t ва ниҳоят, k – доимӣ.



Истифода дар биология

Қонуни такрористехсолкунии олами органикӣ: дар муҳити мусоид барои организм (шумораи ҳайвоноти дарранда кам, миқдори хӯрок кифоя аст) организмҳои зинда мувофиқи қонуни функсияи нишондиҳандагӣ зиёд мешаванд. Масалан, як пашша дар давоми тобистон $8 \cdot 10^{14}$ насли нав тавлид мекунад. Вазни онҳо якчанд миллион тоннаро ташкил мекунад (ва насли ду пашша аз массаи сайёраи мо зиёд мешавад) ва онҳо майдони хеле калонро ишғол мекунанд. Агар онҳо дар намуди як занҷир ҷойгир мешуданд, он гоҳ дарозии ин занҷир аз масофаи аз Замин то Офтоб калонтар мебуд. Аммо дар табиат мавҷуд будани бисёр ҳайвонот ва наботот, ки «душман»-и табиӣ пашша мебошанд, имкон намедиҳад, ки шумораи пашшаҳо ба ин дараҷа зиёд шавад.



МУОДИЛАҲОИ НИШОНДИҲАНДАГӢ

◆ Муодилаҳои нишондиҳандагӣ

Муодилае, ки дар он номуайян дар нишондиҳанда иштирок мекунад, **муодилаи нишондиҳандагӣ** номида мешавад. Масалан,
 $3^x = 9$, $4^x - 9 = 7$, $2^{x+1} = 2^{8-2x}$ муодилаҳои нишондиҳандагӣ мебошанд.

Қимати номаълуме, ки муодиларо ба баробарии дурусти ададӣ табдил медиҳад, **решаи** муодилаи нишондиҳандагӣ номида мешавад.

◆ Муодилаҳои нишондиҳандагӣ ва ҳалли онҳо

Решаи муодилаи $a^x = a^p$ бо x номаълум қимати он $x = p$ мебошад.

Ҳангоми ҳалли муодилаҳои нишондиҳандагӣ қоидаи зерин татбиқ мешавад.

Барои $a > 0$, $a \neq 1$ **решаҳои муодилаи $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ аз **решаҳои муодилаи $f(x) = g(x)$ иборатанд.****

Мисоли 1. Муодиларо ҳал кунед: $2^{x-1} = 16$.

Ҳал.

Муодиларо дар намуди $2^{x-1} = 2^4$ аз нав менависем. Он гоҳ $x - 1 = 4$ Аз ин ҷо $x = 5$

Ҷавоб: $x = 5$.

Мисоли 2. Муодиларо ҳал кунед $3^{2x} \cdot 3^{x^2} = 3^{15}$.

Ҳал.

Муодиларо дар намуди: $3^{2x+x^2} = 3^{15}$ аз нав менависем. Он гоҳ $2x + x^2 = 15$.

$x^2 + 2x - 15 = 0$ **решаҳои ин муодилаи квадратӣ $x_1 = -5$; $x_2 = 3$ мебошанд.**

Ҷавоб: $x_1 = -5$; $x_2 = 3$.

Мисоли 3. Муодиларо ҳал кунед: $(5^{x+1})^x = \left(\frac{5^x}{5^{24}}\right)^{-1}$.

Ҳал.

Муодиларо дар намуди: $5^{x^2+x} = 5^{24-x}$ аз нав менависем. Он гоҳ $x^2 + x = 24 - x$.

$x^2 + 2x - 24 = 0$ **решаҳои ин муодилаи квадратӣ $x_1 = -6$; $x_2 = 4$ мебошанд.**

Ҷавоб: $x_1 = -6$; $x_2 = 4$.

Мисоли 4. Ҳосили зарби **решаҳои муодиларо ёбед** $6^{x^2} + 36 = 2^{1-x^2} \cdot 12^{x^2}$.

Ҳал.

$12^{x^2} = (6 \cdot 2)^{x^2} = 6^{x^2} \cdot 2^{x^2}$ -ро истифода бурда, муодиларо дар намуди:

$6^{x^2} + 36 = 2^{1-x^2} \cdot 6^{x^2} \cdot 2^{x^2}$ ва онро ҳал мекунем.

БОБИ 3. ФУНКСИЯҲОИ НИШОНДИҲАНДАГӢ ВА ЛОГАРИФМӢ

$$\Rightarrow 6^{x^2} + 36 = 2^{1-x^2+x^2} \cdot 6^{x^2} \Rightarrow 6^{x^2} + 36 = 2 \cdot 6^{x^2}; \Rightarrow 6^{x^2} = 36 \Rightarrow 6^{x^2} = 6^2$$

$$x^2 = 2 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$$

Акнун ҳосили зарби решаҳоро меёбем, $x_1 \cdot x_2 = -\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = -2$

Ҷавоб: - 2.

Мисоли 5. Муодиларо ҳал кунед: $3^{2x-1} = 7^{2x-1}$.

Ҳал.

Азбаски нишондиҳандаҳои ифодаҳои ҳарду қисми муодила якхелаанд, мо ҳарду қисми баробарино ба 7^{2x-1} тақсим карда, муодилаи ҳосилшударо ҳал мекунем.

$$\frac{3^{2x-1}}{7^{2x-1}} = \frac{7^{2x-1}}{7^{2x-1}} \Rightarrow \left(\frac{3}{7}\right)^{2x-1} = 1 \Rightarrow \left(\frac{3}{7}\right)^{2x-1} = \left(\frac{3}{7}\right)^0 \Rightarrow 2x-1=0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Ҷавоб: $x = \frac{1}{2}$.

Мисоли 6. Решаи муодиларо ёбед $9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$.

Ҳал.

Муодиларо дар намуди: $\frac{1}{9} \cdot 9^{x^2} - \frac{36}{27} \cdot 3^{x^2} + 3 = 0$ аз нав менависем.

Бо $3^{x^2} = t$ ишора мекунем ва бо шарт, $9^{x^2} = t^2$ муодилаи квадратии ҳосилшуда

$$\frac{1}{9} \cdot t^2 - \frac{4}{3} \cdot t + 3 = 0 \text{ -ро ҳал мекунем } t_1 = 9; t_2 = 3 \text{ -ро ҳал мекунем. Ишораи}$$

$$3^{x^2} = 9 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{2} \text{ ва } 3^{x^2} = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x_{3,4} = \pm 1$$

-ро ба назар гирифта ҳосил мекунем.

Акнун метавонем ҷамъи решаҳоро ёбем: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\sqrt{2} + \sqrt{2} - 1 + 1 = 0$.

Ҷавоб: 0.

МИСОЛҲО

1. Муодилаҳои нишондиҳандагиро ҳал кунед.

a) $3^x \cdot 3 = 81$

b) $4^{3x} \cdot 2^x = 128$

c) $5^{x+1} - 4 \cdot 5^x = 25$

d) $7^x \cdot 8^x = 1$

e) $4^{x^2-3x-4} = 1$

f) $0,3^{2x-1} = 0,09$

g) $2^{2x} = 4^{2\sqrt{3}}$

h) $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x} = 9$

i) $27^x = \frac{1}{3}$

j) $400^x = \frac{1}{20}$

k) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{1}{81}$

l) $0,6^{x+3} = 0,6^{2x-5}$

2. Муодиларо ҳал кунед.

a) $3^x = 81$ b) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{1024}$

c) $7^x = -49$

d) $13^x = -169$

e) $5^x = 0$

f) $8^{2x} = 0$

g) $3^{6-x} = 3^{3x-2}$

h) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x+1} = \left(\frac{7}{3}\right)^{5x-9}$

i) $2^{7x-15} = 2^{9-4x}$

j) $13^{5-2x} = 13^{6x+1}$

k) $2^{x^2+x-0,5} = 4\sqrt{2}$

l) $\left(\frac{4}{9}\right)^x \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} = \frac{2}{3}$

3. $\left(\frac{21}{6}\right)^{29x^2-8x} = \left(\frac{6}{21}\right)^{8x^2-29x}$

4. $\sqrt[3]{5^{2x-3}} = \frac{5}{\sqrt[4]{5}}$

5. $\left(\frac{37}{5}\right)^{71\sqrt{x}-3} = \left(\frac{5}{37}\right)^{3\sqrt{x}-293}$

6. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{x^2-9x} = 1$

7. $2^{x^2-3} \cdot 5^{x^2-3} = 0,01(10^{x-1})^3$

8. $2^{x+1} = 5^{x+1}$

9. $7^{x+2} + 4 \cdot 7^{x-1} = 347$

10. $2 \cdot 3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-2} = 150$

11. $5^{2x} + 5^{2x+2} + 5^{2x+4} = 651$

12. $4 \cdot 7^{x+3} - 7^{x+2} - 3 \cdot 7^{x+1} = 1302$

13. $6 \cdot 2^{x+4} - 4 \cdot 2^{x+3} + 3 \cdot 2^{x+2} = 152$

14. $7^{3x} - 7^{3x-1} = 6$

15. $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$

16. $5 \cdot 25^x - 6 \cdot 5^x + 1 = 0$

17. $9^x + 3 \cdot 3^x - 18 = 0$

18. $3^{2x+3} - 4 \cdot 3^{x+1} + 1 = 0$

19. $(0,25)^{2-x} = \frac{256}{2^{x+3}}$

20. $3^{4\sqrt{x}} - 4 \cdot 3^{2\sqrt{x}} + 3 = 0$

21. $9 \cdot 16^x + 2 \cdot 12^x - 32 \cdot 9^x = 0$

22. $64 \cdot 9^x - 84 \cdot 12^x + 27 \cdot 16^x = 0$

23. $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$

24. $4^{x^2} + 6^{x^2} = 2 \cdot 9^{x^2}$

25. $8^x - 6 \cdot 12^x + 11 \cdot 18^x = 2 \cdot 27^{x+\frac{1}{3}}$

26. $x \cdot 3^{x-1} + 3 \cdot 3^{\sqrt{3-x}} = 3^x + x \cdot 3^{\sqrt{3-x}}$

27. $x^2 \cdot 4^{\sqrt{6-x}} + 4^{2+x} = 16 \cdot 2^{2\sqrt{6-x}} + x^2 \cdot 2^{2x}$

28. $\left(\frac{1}{2}\right)^{2-x} + 2^{x-3} = 80 + \sqrt{4^{x-4}}$

БОБИ 3. ФУНКСИЯҲОИ НИШОНДИҲАНДАГӢ ВА ЛОГАРИФМӢ

НОБАРОБАРИҲОИ НИШОНДИҲАНДАГӢ

Нобаробарии $4^x < 64$, $8^x + 11 > 75$, $2^{x-2} \leq 2^{5+3x}$, $9^x < 7^x$ мисоли нобаробарии нишондиҳандагӣ мебошанд. Дар баробари ин дар нобаробарии мисоли нобаробарии нишондиҳандагӣ мебошанд. Дар баробари ин дар нобаробарии $2^{x-2} \leq 2^{5+3x}$ асосҳои ҳарду қисми он якхеланд (ва ба 2 баробар). Нобаробарии нишондиҳандагӣ, ки дар ҳарду қисм дараҷаҳои асосҳои якхела мавҷуданд, бо роҳи овардани онҳо ба нобаробарии ратсионалӣ ҳал карда мешаванд.

Қадвали зерин нишон медиҳад, ки чӣ гуна нобаробариҳои нишондиҳандагиро бо асосҳои якхела ба нобаробарии ратсионалӣ овардан мумкин аст.

Намудҳои нобаробариҳои нишондиҳандагӣ	$a^{f(x)} \leq a^{g(x)}$	$a^{f(x)} < a^{g(x)}$	$a^{f(x)} > a^{g(x)}$	$a^{f(x)} \geq a^{g(x)}$
Барои $0 < a < 1$	$f(x) \geq g(x)$	$f(x) > g(x)$	$f(x) < g(x)$	$f(x) \leq g(x)$
Барои $a > 1$	$f(x) \leq g(x)$	$f(x) < g(x)$	$f(x) > g(x)$	$f(x) \geq g(x)$

Мисоли 1. Нобаробариро ҳал кунед. : $2^x > 32$.

Ҳал.

Муодиларо дар намуди $2^x > 2^5$ аз нав менависем. Азбаски асос аз як калон аст, яъне $2 > 1$, то $x > 5$.

Ҷавоб: $(5; \infty)$.

Мисоли 2. Нобаробариро ҳал кунед. $\left(\frac{3}{4}\right)^x \geq \frac{16}{9}$

Ҳал.

Муодиларо дар намуди $\left(\frac{3}{4}\right)^x \geq \left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$ менависем. Азбаски

$0 < \frac{3}{4} < 1$ он гоҳ $x \leq -2$.

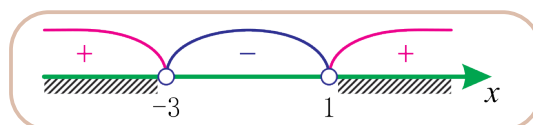
Ҷавоб: $(-\infty; -2]$

Мисоли 3. Нобаробариро ҳал кунед $3^{x^2+2x} > 3^3$.

Ҳал.

Азбаски асос аз як калон аст, пас яъне ҳалли нобаробарии додашуда аз ҳалли нобаробарии $x^2 + 2x > 3$ иборат аст.

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 3 &> 0, \\ (x+3)(x-1) &> 0, \end{aligned}$$



Ҷавоб: $x \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$.

♦ Ҳалли нобаробарӣ бо асосҳои гуногун

$a > 0$, $a \neq 1$ ва $b > 0$, $b \neq 1$ нобаробарии нишондиҳандагии $a^{f(x)} < b^{f(x)}$ бо роҳи овардан ба нобаробарии ба он баробарқувваи $\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} < 1$ ҳал карда мешавад.

МИСОЛҲО

Нобаробарио ҳал кунед.

1. $4^x > 256$

2. $\left(\frac{1}{3}\right)^x \leq \frac{1}{729}$

3. $7^x < -49$

4. $13^x > -169$

5. $5^x < 0$

6. $8^{2x} > 0$

7. $10^x \leq 0$

8. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{x}{2}} > \sqrt{3}$

9. $\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{2x}{15}} < \sqrt[5]{6}$

10. $2^x > \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$

11. Барои кадом ададҳои натуралии n нобаробарии дучандаи $9 \leq 3^n \leq 79$ иҷро карда шудааст?

12. Барои кадом қиматҳои x функсияи $y = 5^x - 5$ қиматҳои мусбат қабул мекунад?

13. Калонтарин қимати бутуни нобаробарии $\left(\frac{4}{9}\right)^x \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x > \left(\frac{2}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-2x}$ -ро ёбед.

14. $3 \cdot 9^{2x-2} > \left(\frac{1}{27}\right)^{3x-1}$

15. $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x-3} > 4^{1-2x}$

16. $2 \cdot 8^{4-5x} < \left(\frac{1}{16}\right)^{x+2}$

17. $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{x+1}{x+2}} > \frac{\sqrt{3}}{2}$

18. $6 \cdot 2^{x+3} - 5 \cdot 2^{x+2} + 4 \cdot 2^x > 128$

19. $7 \cdot 3^{x+4} + 2 \cdot 3^{x+3} - 5 \cdot 3^{x+2} \leq 192$

20. $10 \cdot 3^{x+2} - 4 \cdot 10^{x+2} < 3^{x+4} - 3 \cdot 10^{x+2}$

21. $5^{x+2} - 5^{x+1} > 2^{x+2} + 2^{x+4}$

22. $\left(\frac{3}{4}\right)^{6x+10-x^2} < \frac{27}{64}$

23. $\left(\frac{1}{25}\right)^{2x} < (\sqrt{5})^{x^2+2.75}$

24. $\left(\frac{1}{16}\right)^{x^2} < 8 \cdot \sqrt{2}^{16-2x}$

25. $2^{x^2} > \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-3}$

26. $0,04^x - 26 \cdot (0,2)^x + 25 \leq 0$

27. $25^x - 4 \cdot 5^x - 5 \geq 0$

28. $4^x - 10 \cdot 2^x + 16 < 0$

29. $3^{2x+1} + 1 < 4 \cdot 3^x$

30. Суммаи ҳамаи ададҳои бутуни нобаробарии $3^{8x} - 4 \cdot 3^{4x} \leq -3$ -ро қаноат мекунанд, ёбед.

31. Чандто адад нобаробарии $x^2 \cdot 3^x - 3^{x+1} \leq 0$ -ро қаноат мекунад?

БОБИ 3. ФУНКСИЯҲОИ НИШОНДИҲАНДАГӢ ВА ЛОГАРИФМӢ

МАФҲУМИ ЛОГАРИФМ. ФУНКСИЯИ ЛОГАРИФМӢ

Логарифмҳо дар ҷабҳаҳои гуногуни ҳаёти ҳаррӯза васеъ истифода мешаванд. Масалан, логарифмҳо барои муайян кардани миқдори муайяни пасандози бонкӣ чӣ қадар вақт лозим аст, истифода мешаванд. Ё барои ҳисоб кардани баландии садо муносибати логарифмӣ истифода мешавад.

Барои омӯхтани логарифм ва функцияи логарифмӣ шумо бояд донед:

- 1) функцияҳои нишондиҳандагӣ;
- 2) хосияти функцияҳои нишондиҳандагӣ доништанро талаб карда мекунад.



Мафҳуми логарифм

Мисоли 1. Муодиларо ҳал кунед $3^x = 27$

Ҳал.

$$3^x = 3^3 \Rightarrow x = 3$$

Ҷавоб: $x = 3$.

Мисоли 2. Муодиларо ҳал кунед $2^x = 5$

Ҳал.

Ин муодила реша дорад. Аммо қиматҳои ин реша ратсионалӣ нест. Барои ифодаи решаҳои муодилаҳои ин намуд мафҳуми **логарифм** дохил карда мешавад. Решаи муодилаи додашуда қиматест, ки бо $\log_2 5$ ва ҳамчун логарифмӣ адади 5 дар асоси 2 номида мешавад. Аз ин рӯ, реша, $x = \log_2 5$ аст.

Ҷавоб: $x = \log_2 5$.

Умуман, решаи муодилаи $a^x = b$ баробар аст ба $x = \log_a b$. Дар ин ҷо $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$.

Таъриф.

Логарифми адади мусбати b нисбат ба адади a гуфта нишондиҳандаи дараҷаеро меноманд, ки барои ҳосил кардани адади b асос a -ро ба он бардоштан лозим аст, мегӯянд ва бо $\log_a b$ ишора мекунад. Дар ин ҷо a **асоси логарифм**, b – ифодаи зери логарифм.

Ифодаи $\log_a b$ **дар асои логарифми a бояд b** гӯён хонда мешавад.

Масалан, логарифми ифодаи $\log_2 5$ аз рӯи асоси 2 -юм 5 гӯён хонда мешавад.

Ифодаи $\log_{10} b$ дар намуди мухтасар бо $\log_{10} b = \lg b$ ишора карда мешавад ва логарифми даҳӣ номида мешавад.

Ифодаи $\log_e b$ дар намуди мухтасар $\log_e b = \ln b$, ишора карда мешавад ва логарифми натуралӣ номида мешавад $e \approx 2,71$.

$\lg b = \log_{10} b$ ва $\ln b = \log_e b$.

Агар решаи $\log_a b$ -ро ба ҷои номаълуми x дар муодилаи $a^x = b$ гузорем, баробарии

$$a^{\log_a b} = b \quad (a > 0, a \neq 1, b > 0)$$

ҳосил мешавад, ки **айнияти асосии логарифмӣ** ном дорад.

Мисоли 3. Аз рӯи таъриф қиматҳои ифодаҳоро ҳисоб кунед:

a) $\log_2 32$; b) $\log_3 \frac{1}{9}$; c) $\lg 100$; d) $\ln e^3$.

Ҳал.

a) $\log_2 32 = 5$, $2^5 = 32$ b) $\log_3 \frac{1}{9} = -2$, $3^{-2} = \frac{1}{9}$
c) $\lg 100 = 2$, $10^2 = 100$ d) $\ln e^3 = 3$, $e^3 = e^3$

Ҷавоб: а) 5; б) - 2; с) 2; д) 3.

Мисоли 4. Ҳисоб кунед $\log_{64} 32$.

Ҳал. Қимати ифодаро ба воситаи табдил додани он ба муодилаи $\log_{64} 32 = x$ ва ҳалли он:

$$64^x = 32 \Rightarrow 2^{6x} = 2^5 \Rightarrow 6x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{6}$$

Ҷавоб: $\frac{5}{6}$.

Мисоли 5. Бо истифода аз айнияти асосии логарифмӣ $64^{\log_8 3}$ -ро ҳисоб кунед.

Ҳал.

$$64^{\log_8 3} = (8^2)^{\log_8 3} = (8^{\log_8 3})^2 = 3^2 = 9$$

Ҷавоб: 9.



Функсияи логарифмӣ ва хосиятҳои он, графики он

Адади ҳақиқии a , -ро, ки шартҳои $a > 0$ ва $a \neq 1$ -ро қаноат мекунонад дида мебароем. Функсияи намуди

$$y = \log_a x$$

функсияи логарифмӣ номида мешавад.

Масалан, функсияҳои шакли $y = \log_2 x$, $y = \log_{\frac{1}{3}} x$, $y = \lg x$, $y = \ln x$ функсияҳои логарифмӣ мебошанд.

Функсияҳои логарифмӣ дорои хосиятҳои зерин мебошанд:

● Соҳаи муайянии функсияи логарифмии $y = \log_a x$ аз маҷмӯи ҳама ададҳои мусбати ҳақиқӣ иборат аст;

$$D(y) = (0; +\infty)$$

● Маҷмӯи қиматҳои функсияи логарифмии $y = \log_a x$ маҷмӯи ҳама ададҳои ҳақиқӣ иборат аст;

$$E(y) = (-\infty; +\infty)$$

● Функсияи логарифмии $y = \log_a x$ тири Ox дар нуқтаи $(1; 0)$ мебурад;

● Функсияи логарифмии $y = \log_a x$ тири Oy -ро намебурад;

● Функсияи логарифмӣ даврӣ нест;

● Функсияи логарифмӣ на ҷуфт аст ва на тоқ;

● Функсияи $y = \log_a x$ дар ҳолати $0 < a < 1$ кам мешавад: фосилаи камшавӣ $(0; +\infty)$;

● Функсияи $a > 1$ дар ҳолати $y = \log_a x$ меафзоаяд: фосилаи афзуншавӣ $(0; +\infty)$.

БОБИ 3. ФУНКСИЯҲОИ НИШОНДИҲАНДАГӢ ВА ЛОГАРИФМӢ

Мисоли 6. Муқоиса кунед а) $\log_{0,3} 7$ ва $\log_{0,3} 8$
б) $\log_7 0,28$ ва $\log_7 0,31$.

Ҳал.

Азбаски функцияи $y = \log_{0,3} x$ - камшаванда аст, пас $7 < 8$ то $\log_{0,3} 7 > \log_{0,3} 8$.

Азбаски функцияи $y = \log_7 x$ - афзуншаванда аст, пас $0,28 < 0,31$ то $\log_7 0,28 < \log_7 0,31$

Мисоли 7. Соҳаи муайянии функцияро

муайян кунед: $y = \log_7 (x^2 - 5x + 6)$.

Ҳал.

Ифодаи зери логарифм бояд мусбат бошад. Барои ҳамин

$$x^2 - 5x + 6 > 0 \Rightarrow (x - 2)(x - 3) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty; 2) \cup (3; \infty)$$

Ҷавоб: $D(y) = (-\infty; 2) \cup (3; \infty)$.

Мисоли 8. Соҳаи муайянии функцияро ёбед $y = \log_{4-x} (x^2 - 9)$.

Ҳал.

$$\begin{cases} 4 - x > 0 \\ 4 - x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 4 \\ x \neq 3 \end{cases} \quad x^2 - 9 > 0 \Rightarrow x \in (-\infty; -3) \cup (3; \infty)$$

Ҷавоб: $D(y) = (-\infty; -3) \cup (3; 4)$.

Мисоли 9. Графики функцияро созед:

$$y = -1 + \log_2 (x - 1).$$

Ҳал.

Соҳаи муайяниро меёбем:

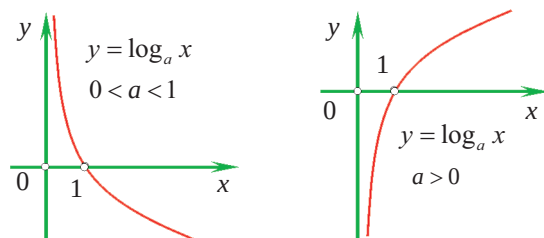
$$x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$$

Ҷадвали баъзе қиматҳоро месозем:

x	2	3	5	9
y	-1	0	1	2

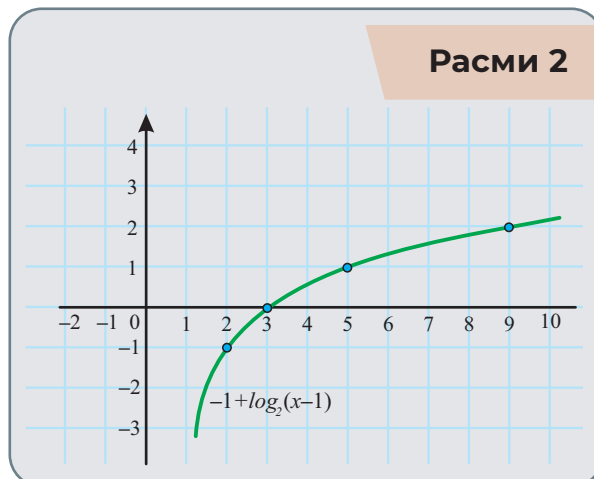
Нуқтаҳои ёфтшударо дар ҳамвории координатӣ нишон дода, мо тавассути онҳо *хаттӣ* каҷи ҳамвор мекашем (*расми 2*).

Расми 1



Графики функцияи логарифми

Расми 2



МИСОЛҲО

1. Муайян кунед, ки функцияҳои додашуда зиёд мешаванд ё кам мешаванд.

a) $y = \log_{0,075} x$

b) $y = \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} x$

c) $y = \lg x$

d) $y = \log_{11} x$

e) $y = -\log_{\frac{1}{e}} x$

f) $y = -\log_{\pi} x$

2. Муқоиса кунед.

a) $\log_e 0,5$ ва $\log_e 0,35$

b) $\log_{0,1} 100$ ва $\log_{0,1} 101$

c) $\log_{\frac{\sqrt{15}}{4}} \sqrt{37}$ ва $\log_{\frac{\sqrt{15}}{4}} 6$

3. Рақамҳоро бо тартиби афзоиш ҷойгир кунед.

a) $a = \log_{\frac{1}{5}} 10$, $b = \log_{\frac{1}{5}} 15$, $c = \log_{\frac{1}{5}} 20$

b) $a = \log_2 5$, $b = \log_{\frac{1}{4}} 3$, $c = \log_{\frac{1}{2}} 3$

c) $a = \log_{\frac{1}{6}} 4$, $b = \log_{\frac{1}{5}} 6$, $c = \log_{\frac{1}{5}} 4$

4. Дурустии гуфтаҳоро бо иваз кардани рақамҳо санҷед.

a) $a > 1$ ва $b > 1$ бошад, $\log_a b > 0$

b) $0 < a < 1$ ва $0 < b < 1$ бошад, $\log_a b > 0$

c) $a > 1$ ва $0 < b < 1$ бошад, $\log_a b < 0$

d) $0 < a < 1$ ва $b > 1$ бошад, $\log_a b < 0$

5. Кадоме аз ин ададҳо мусбатанд?

a) $a = \log_{0,2} 8$

b) $b = \log_3 0,8$

c) $c = \log_{0,9} 9$

d) $d = \log_4 2$

e) $p = \log_{0,9} 0,6$

f) $l = \log_{1,2} \frac{3}{8}$

g) $z = \log_{0,02} 0,001$

h) $p = \log_{|-13,08|} 2022$

i) $q = \log_{|-3|} 3$

6. Нишон диҳед, ки графикҳои функцияҳои $y = \log_2 x$ ва $y = -\log_2 x$ нисбат ба тири абсисса симметрӣ мебошанд.

7. Соҳаи муайянии функцияҳоро ёбед.

a) $y = \log_4 x$

b) $y = \log_2(x - 1)$

c) $y = \log_3(x^2 - 2x - 3)$

d) $y = \log_4(x^2 - 4)$

e) $y = \lg(3 - x)$

f) $y = -\log_2(x^2 + 5x - 6)$

БОБИ 3. ФУНКСИЯҲОИ НИШОНДИҲАНДАГӢ ВА ЛОГАРИФМӢ

8. Графики функцияро созед.

a) $y = \log_3 x$

b) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

c) $y = \lg x$

d) $y = \ln x$

9. Соҳаи муайяни функцияро ёбед.

a) $y = \log_{x^2} (4 - x)$

b) $f(x) = \log_{x^2} (x - 1) + \sqrt{2 - x}$

c) $f(x) = \sqrt{9 - x^2} + \lg(x - 1) - \sqrt{x}$

d) $f(x) = \sqrt{x + 4} + \log_2 (x^2 - 4)$

e) $f(x) = \frac{\log_{x^2+1} (6 - x)}{\sqrt{x + 2}}$

f) $y = \sqrt{2 + \log_{\frac{1}{2}} (3 - x)}$

10. Графики функцияро созед.

a) $y = \log_2 (x - 1)$

b) $y = \log_3 (5x + 1)$

c) $y = \log_4 (1 - x)$

d) $y = \lg(x - 3)$

e) $y = \log_6 (3x - 2)$

f) $y = 1 - \ln x$

g) $y = \log_8 x - 4$

h) $y = \lg x + 3$

i) $y = \log_6 (x - 2) - 1$

11. Дар чанд нуқта графикҳои функцияҳо бурида мешаванд?

a) $y = \log_2 x$; $y = -x + 1$

b) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$; $y = 2x - 5$

c) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$; $y = 4x^2$

d) $y = \log_3 x$; $y = 2 - \frac{1}{3}x^2$

e) $y = 2^x$; $y = \log_{0,5} x$

f) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$; $y = \log_3 x$

АЙНИЯТИ МУХТАСАРИ ИФОДАҲОИ ЛОГАРИФМӢ

Ҳангоми иҷрои амалҳо бо ифодаҳои логарифмӣ ва соддагардонии онҳо, табдилдиҳии айнияти зерин истифода мешаванд. Фарз мекунем, ки ифодаҳои хосиятҳои зерин шартҳои муайян будани логарифмро қонеъ мекунанд.

Аз таърифи логарифм *хосиятҳои* зерин бармеоянд:

$$1^\circ. \log_a 1 = 0.$$

$$2^\circ. \log_a a = 1.$$

3°. Логарифми ҳосили зарб ба суммаи логарифмҳои зарбкунандаҳо баробар аст:
 $a^{\log_a b} = b \quad (a > 0, a \neq 1, b > 0).$

4°. Логарифми ҳосили тақсим ба фарқи байни логарифмҳои тақсимшаванда ва тақсимкунанда баробар аст:

$$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c.$$

5°. Логарифми дараҷа ба ҳосили зарби нишондиҳанда ва логарифми асос баробар аст:

$$\log_a \left(\frac{b}{c} \right) = \log_a b - \log_a c.$$

6°. Формула барои гузаштан аз як асос ба дигараш:

$$\log_a b^p = p \log_a b.$$

Аз хосиятҳои 1 ва 6 баробарии

7°. Бармеояд: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$. Аз хосиятҳои 5 ва 7 баробарии

8°. Бармеояд: $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$. Аз хосиятҳои 5 ва 8 баробарии

9°. Бармеояд: $\log_{a^k} b = \frac{1}{k} \log_a b$.

10°. $\log_{a^k} b^p = \frac{p}{k} \log_a b$.



Ифодаҳои соддаи функцияҳои нишондиҳандагӣ ва логарифмӣ

Мо бо хосиятҳои логарифм ва функцияи логарифмӣ, инчунин дараҷа ва функцияи нишондиҳандагӣ шинос шудем. Ин хосиятҳо барои табдил додани ифодаҳои логарифмӣ ва нишондиҳандагӣ истифода мешаванд.

Мисоли 1. Ҳисоб кунед $\log_3 18 + \log_3 \frac{1}{54}$

Ҳал.

$$\log_3 18 + \log_3 \frac{1}{54} = \log_3 \left(18 \cdot \frac{1}{54} \right) = \log_3 \frac{1}{3} = -1$$

Ҷавоб: -1.

БОБИ 3. ФУНКСИЯҲОИ НИШОНДИҲАНДАГӢ ВА ЛОГАРИФМӢ

Мисоли 2. Ҳисоб кунед $3\log_2 8 - 2\log_3 9$ **Ҳал.**

$$3\log_2 8 - 2\log_3 9 = 3\log_2 2^3 - 2\log_3 3^2 = 3 \cdot 3 \cdot \log_2 2 - 2 \cdot 2 \cdot \log_3 3 = 9 \cdot 1 - 4 \cdot 1 = 5$$

Ҷавоб: 5.**Мисоли 3.** Ҳисоб кунед $10^{1+\lg 5}$.**Ҳал.**

$$10^{1+\lg 5} = 10^1 \cdot 10^{\lg 5} = 10 \cdot 5 = 50$$

Ҷавоб: 50.**Мисоли 4.** Ҳисоб кунед $\log_2 \log_5 \sqrt[8]{5}$.**Ҳал.**

$$\log_2 \log_5 \sqrt[8]{5} = \log_2 \log_5 5^{\frac{1}{8}} = \log_2 \left(\frac{1}{8} \cdot \log_5 5 \right) = \log_2 \frac{1}{8} = \log_2 2^{-3} = -3 \log_2 2 = -3$$

Ҷавоб: - 3.**Мисоли 5.** Ҳисоб кунед $2^{\log_4 (2-\sqrt{3})^2} + 3^{\log_9 (2+\sqrt{3})^2}$.**Ҳал.**

$$\begin{aligned} 2^{\log_4 (2-\sqrt{3})^2} + 3^{\log_9 (2+\sqrt{3})^2} &= 2^{\log_{2^2} (2-\sqrt{3})^2} + 3^{\log_{3^2} (2+\sqrt{3})^2} = 2^{\frac{1}{2} \cdot 2 \log_2 (2-\sqrt{3})} + 3^{\frac{1}{2} \cdot 2 \log_3 (2+\sqrt{3})} = \\ &= 2^{\log_2 (2-\sqrt{3})} + 3^{\log_3 (2+\sqrt{3})} = 2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} = 4. \end{aligned}$$

Ҷавоб: 4.**Мисоли 6.** Ҳисоб кунед $\sqrt{5^{\frac{2}{\log_3 5}} + 0,5^{-\log_2 7}}$ **Ҳал.**

$$\sqrt{5^{\frac{2}{\log_3 5}} + 0,5^{-\log_2 7}} = \sqrt{5^{2 \log_5 3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-\log_2 7}} = \sqrt{5^{\log_5 3^2} + 2^{\log_2 7}} = \sqrt{9 + 7} = \sqrt{16} = 4$$

Ҷавоб: 4.**Мисоли 7.** Ҳисоб кунед $\frac{2}{1+\log_2 5} + \lg 25$ **Ҳал.**

$$\begin{aligned} \frac{2}{1+\log_2 5} + \lg 25 &= \frac{2}{\log_2 2 + \log_2 5} + \lg 25 = \frac{2}{\log_2 (2 \cdot 5)} + \lg 25 = \frac{2}{\log_2 10} + \lg 25 = \\ &= 2 \lg 2 + \lg 25 = \lg 2^2 + \lg 25 = \lg (4 \cdot 25) = \lg 100 = 2 \end{aligned}$$

Ҷавоб: 2.

Мисоли 8. Ҳисоб кунед $3^{2+\log_3 2}$

Ҳал. Формулаҳои $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$ ва $a^{\log_a b} = b$ -ро истифода бурда. Дар натиҷа

$$3^{2+\log_3 2} = 3^2 \cdot 3^{\log_3 2} = 9 \cdot 2 = 18.$$

-ро ҳосил мекунем.

Ҷавоб: 18.

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$$

Ёдовар мешавем, ки амали баръакси логарифм потенциатсия номида мешавад. Ба ибораи дигар, ҷараёни пайдо кардани номаълуми x -ро аз муодилаи $\log_b c$ ва $\log_b a$ потенциатсия меноманд (дар ин ҷо $a > 0$, $a \neq 1$ ва $b > 0$). Дар ин ҳолат, натиҷаи потенциализатсия $x = a^b$ мешавад.

Баробариро исбот мекунем $\log_b c \log_b a = \log_b a \log_b c$ дар исботи ифодаҳои экспоненциалӣ ва логарифмӣ васеъ истифода мешавад. Он иҷрои шартҳои $n \log_p q = \log_p q^n$ ва $\log_b a^{\log_b c} = \log_b c^{\log_b a}$ -ро талаб мекунад. Вақте ки ин шартҳо иҷро мешаванд, ифодаҳои аз рӯи хосияти логарифми $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ айнияти охирин маънои онро дорад.

Ҳарду қисми онро пурқувват карда, баробарӣ ба даст меорем.

Мисоли 9. Агар $a = \sin \frac{\pi}{6}$ он гоҳ $\log_4 a$ ёбед.

Ҳал.

$$a = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \log_4 a = \log_4 \frac{1}{2} = \log_{2^2} 2^1 = -\frac{1}{2} \log_2 2 = -\frac{1}{2} \cdot 1 = -\frac{1}{2}$$

Ҷавоб: $-\frac{1}{2}$.

Мисоли 10. Ҳисоб кунед $\frac{\log_2^2 14 + \log_2 14 \cdot \log_2 7 - 2 \log_2^2 7}{\log_2 14 + 2 \log_2 7}$

Ҳал.

Суратро ба зарбшавандаҳо ҷудо намуда, инҳоро ҳосил мекунем:

$$\begin{aligned} \frac{\log_2^2 14 + \log_2 14 \cdot \log_2 7 - 2 \log_2^2 7}{\log_2 14 + 2 \log_2 7} &= \frac{(\log_2 14 + 2 \log_2 7)(\log_2 14 - \log_2 7)}{\log_2 14 + 2 \log_2 7} = \\ &= \frac{(\log_2 14 + 2 \log_2 7)(\log_2 14 - \log_2 7)}{\log_2 14 + 2 \log_2 7} = \log_2 14 - \log_2 7 = \log_2 \frac{14}{7} = \log_2 2 = 1 \end{aligned}$$

Ҷавоб: 1.

Мисоли 11. Ифодаи $f(x) = \log_4 \frac{x^2}{4} - 2 \log_4 (4x^4)$ -ро содда кунед ва қимати онро ҳангоми $x = -2$ ёбед.

БОБИ 3. ФУНКСИЯҲОИ НИШОНДИҲАНДАГӢ ВА ЛОГАРИФМӢ

Ҳал. Барои маъно доштани ифодаи додашуда $x \neq 0$, лозим аст. Нишон медиҳем

$f(x) = \log_4 \frac{x^2}{4} - 2\log_4 4x^4$. Аз хосиятҳои логарифмҳо муодилаҳои зерин бармеоянд:

$$\begin{aligned} f(x) &= \log_4 \frac{x^2}{4} - 2\log_4 (4x^4) = \log_4 x^2 - \log_4 4 - 2(\log_4 4 + \log_4 x^4) \\ &= 2\log_4 |x| - 1 - 2(1 + 4\log_4 |x|) = -6\log_4 |x| - 3 \end{aligned}$$

$$f(-2) = -6\log_4 |-2| - 3 = -6\log_2 2 - 3 = -\frac{6}{2}\log_2 2 - 3 = -3 - 3 = -6.$$

Ҷавоб: Қимати ифодаи $\log_4 \frac{x^2}{4} - 2\log_4 4x^4$ ҳангоми $x = -2$ ба баробар аст.

Мисоли 12. $a = \log_{98} 112$ -ро бо a ифода кунед, агар $a = \log_{98} 112$ бошад.

Ҳал.

$$a = \log_{98} 112 = \frac{\log_7 112}{\log_7 98} = \frac{\log_7 (7 \cdot 2^4)}{\log_7 (7^2 \cdot 2)} = \frac{\log_7 7 + \log_7 2^4}{\log_7 7^2 + \log_7 2} = \frac{1 + 4\log_7 2}{2 + \log_7 2}$$

$$\frac{1 + 4\log_7 2}{2 + \log_7 2} = a$$

$$1 + 4\log_7 2 = 2a + a\log_7 2$$

$$4\log_7 2 - a\log_7 2 = 2a - 1$$

$$(4 - a)\log_7 2 = 2a - 1$$

$$\log_7 2 = \frac{2a - 1}{4 - a}.$$

МИСОЛҲО

1. Қиматҳои ифодаҳои логарифмиро ёбед.

- | | | | |
|----------------|----------------|----------------|-------------------|
| a) $\log_2 4$ | b) $\log_2 1$ | c) $\log_2 16$ | d) $\log_4 16$ |
| e) $\log_2 64$ | f) $\log_8 64$ | g) $\log_4 64$ | h) $\log_{64} 64$ |

2. Қиматҳои ифодаҳои логарифмиро ёбед.

- | | | | |
|----------------|--------------------|-------------------|------------------------------------|
| a) $\log_5 25$ | b) $\log_{324} 18$ | c) $\log_{128} 4$ | d) $\log_{10}(0,001)$ |
| e) $\log_9 3$ | f) $\lg 1000$ | g) $\ln e$ | h) $\lg\left(\frac{1}{100}\right)$ |

3. Ҳисоб кунед.

- | | | |
|---|------------------------------------|---------------------------------------|
| a) $\log_2 8 + \log_2 4$ | b) $\log_3 6 + \log_3 \frac{3}{2}$ | c) $\log_2 15 - \log_2 \frac{15}{16}$ |
| d) $\log_{\frac{1}{3}} 54 - \log_{\frac{1}{3}} 2$ | e) $\log_{0,2} 75 - \log_{0,2} 3$ | f) $\log_{36} 9 + \log_{36} 4$ |

4. Кадоме аз ададҳои зерин ба се адади дигар баробар нест?

- | | |
|--------------------------------|---------------------------------|
| a) $m = 2\log_2 8 - \log_2 4$ | b) $n = \log_2 400 - 2\log_2 5$ |
| c) $p = \log_5 125 + \log_5 5$ | d) $q = \ln 12e - \ln 2$ |

5. Кадоме аз ададҳо аз 2 хурдтар аст?

a) $M = \log_5 100 - \log_5 4$

b) $N = 4 \log_2 3 - \log_2 9$

c) $P = \log_6 72 - \log_6 2$

d) $Q = \log_4 16 + \log_4 \frac{1}{8}$

6. Ҳисоб кунед.

a) $3 - \lg 50 + \frac{1}{2} \lg 25$

b) $\log_2 32 + \log_{32} 2$

c) $\frac{\log_4 13 + \log_4 25}{\log_{64} 325}$

d) $\frac{\log_4 11 + \log_4 23}{\log_8 253}$

e) $\frac{1}{\log_8 12} + \frac{1}{\log_{18} 12}$

f) $\frac{1}{\log_{45} 15} + \frac{1}{\log_5 15}$

7. Ҳисоб кунед.

a) $81^{\log_3 5}$

b) $4^{-2 \log_{\frac{1}{4}} 3}$

c) $32^{\log_8 27}$

d) $121^{\log_{11} 12}$

e) $3 \log_{\sqrt{8}} 2 + 2^{-2 \log_{\frac{1}{2}} 2}$

f) $3 \log_{\sqrt{64}} 4 + 4^{-2 \log_{\frac{1}{4}} 3}$

8. Қимати ифодаро дар қимати додашуд ҳисоб кунед.

a) $3 \log_{\frac{1}{3}} a, a = 2 \cos \frac{\pi}{6}$

b) $3 \log_{\frac{1}{3}} a, a = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$

c) $4 \log_3 a, a = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$

9. Ҳисоб кунед.

a) $\log_{\frac{1}{3}} \log_3 27$

b) $\log_4 \log_3 \sqrt{81}$

c) $\log_3^2 \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{125}$

10. Ҳисоб кунед.

a) $\frac{2 \log_3 12 - 4 \log_3^2 2 + \log_3^2 12 + 4 \log_3 2}{3 \log_3 12 + 6 \log_3 2}$

b) $\frac{\log_2^2 28 + \log_2 28 \cdot \log_2 7 - 2 \log_2^2 7}{\log_2 28 + 2 \log_2 7}$

c) $\frac{\log_{35}^2 7 - 2 \log_{35} 7 \cdot \log_{35} 5 - 3 \log_{35}^2 5}{2(\log_{35} 7 - 3 \log_{35} 5)}$

d) $\frac{\log_2^2 12 - 2 \log_2 12 + 2 \log_2^2 3 - 3 \log_2 3 \cdot \log_2 12 + 4 \log_2 3}{\log_2 12 - 2 \log_2 3}$

БОБИ 3. ФУНКСИЯҲОИ НИШОНДИҲАНДАГӢ ВА ЛОГАРИФМӢ

11. Соҳаи муайянии функсияро ёбед.

a) $y = \log_2(x + 3)$

b) $y = \log_{0,2}(x^2 - 4x)$

c) $y = \log_{0,7}\left(2x - \frac{1}{8}\right)$

d) $y = \log_2(5 - 3x)$

12. Ба воситаи a ифода кунед.

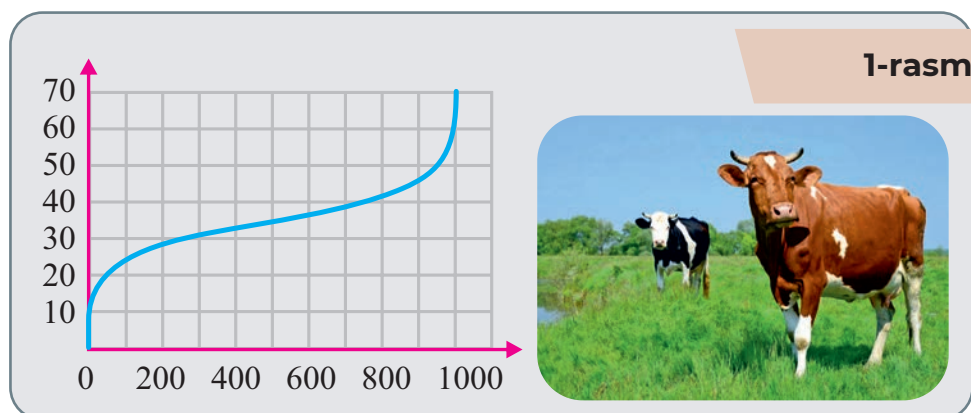
a) $a = \log_2 3, \log_{36} 108 = ?$

b) $a = \log_7 3, \log_{147} 63 = ?$

c) $a = \log_{288} 72, \log_3 2 = ?$

d) $a = \log_{441} 189, \log_3 7 = ?$

13. Агар яке аз 1000 модагов дар рамаи чўпон бемории сироятӣ дошта бошад, он гоҳ вобастагии рӯзҳо t аз бемории n модагов бо формулаи $t = -5 \cdot \ln\left(\frac{1000-n}{999n}\right)$ f моделӣ карда мешавад. 100, 800, 1000 сар модагов баъди чанд рӯз бемор мешавад. Аз рӯи расм хулоса бароред (расми 1).



14. Дар асоси ҷадвалҳо графики функсияро созед.

a)

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y = \log_2 x$	-2	-1	0	1	2	3

b)

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y = \log_{\frac{1}{2}} x$	2	1	0	-1	-2	-3

15. Баръакси функсияҳои додашударо ёбед.

a) $f(x) = 10^x$

b) $f(x) = \log_3(x + 1)$

c) $f(x) = 2 + e^{x+4}$

d) $f(x) = 5 + \log_2(x - 3)$

16. Қиматҳои a ва b -ро ёбед.

a) $\log_3 b = 2$

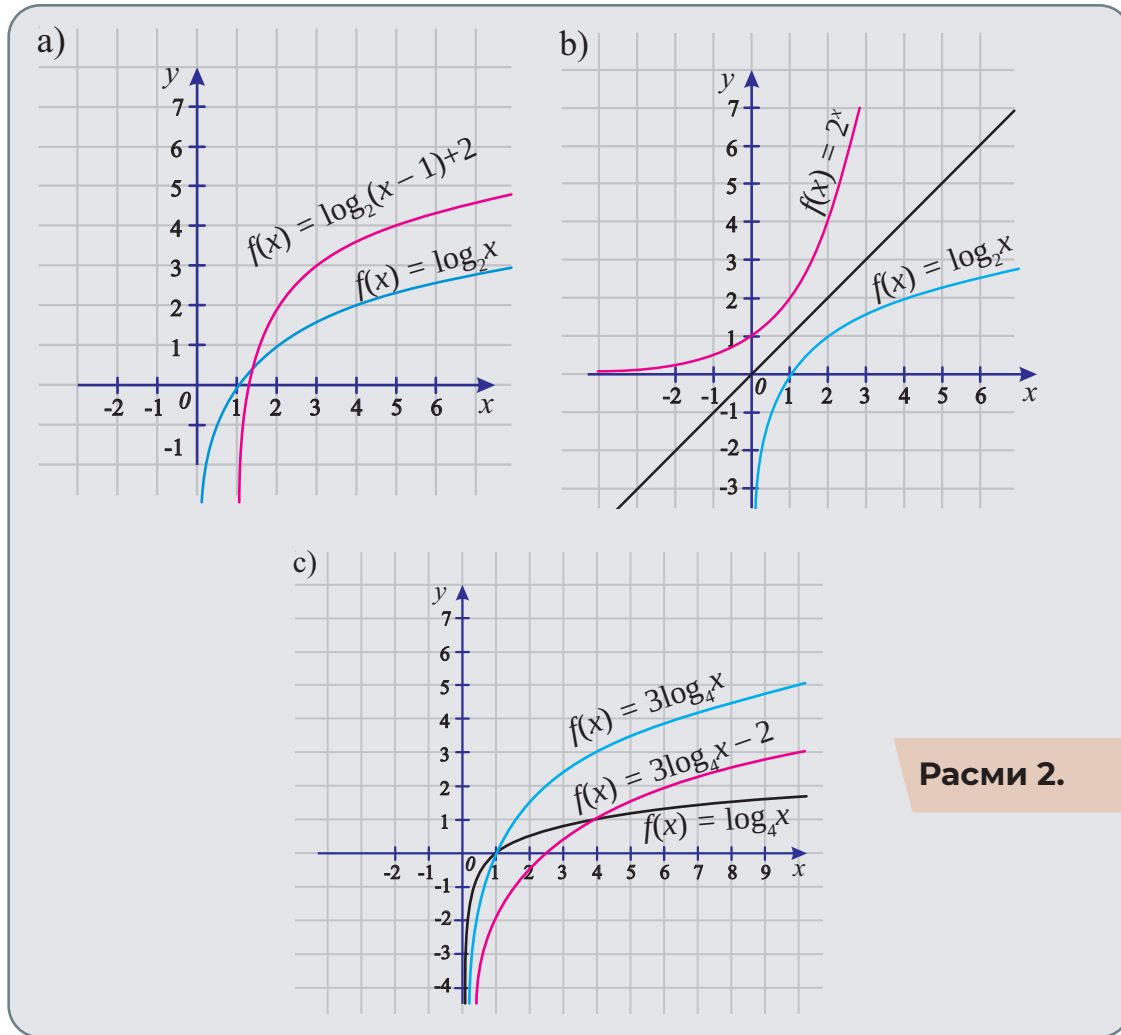
b) $\log_a 8 = 3$

c) $\log b^2 = \lg 4$

d) $\log_a 36 = 2$

17. Графики функсияи $y = \ln e^x$ ва $y = e^{\ln x}$ -ро созед. Монандиҳо ва фарқиятҳоро шарҳ диҳед.

18. Фаҳмонед, ки чӣ гуна тағйирот дар функцияҳо дар расм иҷро карда мешаванд. (расми 2).



Расми 2.



Истифодаи функцияи логарифмӣ дар ҳаёти воқеӣ

Сатҳи шиддатнокии садо

Энергияе, ки мавҷи садо дар як воҳиди вақт тавассути майдони воҳиди сатҳ интиқол медиҳад, *шиддатнокии садо* номида мешавад. Вақте ки садо тавассути муҳити чандирӣ паҳн мешавад, нисбат ба он вақте ки паҳн намешавад, фишори зиёдотӣ ба вучуд меояд, ки онро *фишори садо* меноманд. Шиддати садо ба амплитудайи мавҷи садо ва хосиятҳои муҳит вобаста аст. Шиддати садо бо детсибел (dB) чен карда мешавад.

I – шиддатнокии садо,

I_0 – шиддати нисбии садо,

L – баландии нисбии овоз.

$$L = 10 \log_{10} \left(\frac{I}{I_0} \right) \text{dB}$$

Шиддати садое, ки смартфон ба гӯшмонак интиқол медиҳад, метавонад аз 100 детсибел зиёд бошад. Барои гӯши инсон сатҳи садои на бештар аз 80 детсибел беҳатар ҳисобида мешавад. Аз ин сатҳ аз ҳад зиёд шунидани садо метавонад боиси гум шудани шунавой ё осеб гардад.



БОБИ 3. ФУНКСИЯҲОИ НИШОНДИҲАНДАГӢ ВА ЛОГАРИФМӢ

МУОДИЛАҲОИ ЛОГАРИФМӢ



Муодилаҳои логарифмӣ

Муодилае, ки дар ифодаи зер логарифмӣ ё дар асос дорои номаълум аст, *муодилаи логарифмӣ* номида мешавад. Масалан $\log_2 x = 3$, $\log_x 625 = 2$, $\log_x (x+2) = 2$, $\lg(2x-2) = \lg(x+2)$ мисолҳои муодилаҳои логарифмӣ мебошанд.

Қимати номаълуме, ки муодилаи логарифми додашударо ба баробарии дуруст табдил медиҳад, *решаи муодилаи логарифмӣ* номида мешавад.



Ҳалли муодилаҳои оддии логарифмӣ

Ҳангоми $a > 0$, $a \neq 1$ муодилаи намуди $\log_a x = b$ соддатарин муодилаи логарифмӣ мешавад. Решаи муодила $x = a^b$ мешавад.

Барои ҳалли муодилаҳои логарифмӣ қоидаи зерин истифода мешавад:

Ҳангоми $a > 0$, $a \neq 1$ решаҳои муодилаи $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ аз решаҳои муодилаи $f(x) = g(x)$ иборатанд, ки шартҳои $f(x) > 0$ (ё ки $g(x) > 0$) қонеъ мекунанд.

Дар зер намунаҳои ҳалли муодилаҳои логарифмӣ оварда шудаанд.

Мисоли 1. Муодиларо ҳал кунед $\log_5 x = -2$.

Ҳал.

Ҳангоми ҳалли муодила таърифи логарифмро дар шартҳои зерин истифода мебарем.

$$\log_5 x = -2 \Rightarrow x = 5^{-2} \Rightarrow x = \frac{1}{25}$$

Азбаски $x = \frac{1}{25} > 0$ он гоҳ қимати ёфтшудаи номаълум решаи муодилаи додашуда мешавад.

Ҷавоб: $x = \frac{1}{25}$.

Мисоли 2. Муодилаи логарифмикро ҳал кунед $\log_3 (x^2 - 4) = \log_3 (5x - 8)$.

Ҳал.

Соҳаи муайяниро меёбем.

$$\begin{cases} x^2 - 4 > 0 \\ 5x - 8 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-2)(x+2) > 0 \\ 5x > 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty) \\ x > 1,6 \end{cases} \Rightarrow x \in (2; \infty)$$

Акнун муодиларо ҳал мекунем $x^2 - 4 = 5x - 8$.

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-4) = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 4$$

Қимати номаълуми $x_1 = 1$ ба фосилаи $(2; \infty)$ тааллуқ надорад, аммо қимати $x_2 = 4$ дорад.

Ҳамин тариқ, қимати $x_1 = 1$ – решаи бегона аст ва, $x_2 = 4$ – реша аст.

Ҷавоб: $x = 4$.

Мисоли 3. Муодилаи логарифмикиро ҳал кунед. $\log_5^2 x - 3\log_5 x - 4 = 0$

Ҳал.

Аввал қайд мекунем, ки соҳаи муайянӣ аз ҷониби нобаробарии $x > 0$ бо дохил кардани ифодаи $\log_5 x = t$ -ро ба даст меорем.

$$t^2 - 3t - 4 = 0 \Rightarrow (t+1)(t-4) = 0 \Rightarrow t_1 = -1, t_2 = 4.$$

Пас, $\log_5 x = -1$ ва $\log_5 x = 4$. Аз ин ҷо $x_1 = \frac{1}{5} = 0,2$; $x_2 = 5^4 = 625$.

Ҷавоб: $x_1 = 0,2$; $x_2 = 625$.

Мисоли 4. Муодиларо ҳал кунед: $\log_{x-1} 16 = 2$.

Ҳал.

$$\text{Аввал, } \begin{cases} x-1 > 0 \\ x-1 \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x \neq 2 \end{cases} \Rightarrow x \in (1; 2) \cup (2; \infty)$$

Мо фосилаеро муайян мекунем, ки дар он решаҳои муодила бояд дохил шаванд.

$$\log_{x-1} 16 = 2 \Rightarrow (x-1)^2 = 16$$

$$x-1 = 4 \Rightarrow x_1 = 5$$

$$x-1 = -4 \Rightarrow x_2 = -3$$

Ҷавоб: $x = 5$.

Мисоли 5. Муодиларо ҳал кунед: $\log_5 \log_2 \log_7 x = 0$.

Ҳал.

Ҳангоми ҳалли муодила таърифи логарифмро истифода мебарем.

$$\log_2 \log_7 x = 5^0 \Rightarrow \log_2 \log_7 x = 1 \Rightarrow \log_7 x = 2^1 \Rightarrow x = 7^2 = 49$$

Ҷавоб: $x = 49$.

Мисоли 6. Муодиларо ҳал кунед: $\lg(x^2 - 3) \cdot \lg x = 0$.

Ҳал.

Ҳар як зарбкунандаро ба сифр баробар мекунем ва муодилаҳои ҳосилшударо ҳал мекунем:

$$\lg(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow x^2 - 3 = 1 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 2$$

$$\lg x = 0 \Rightarrow x_3 = 1$$

Маълум аст, ки қиматҳои $x^2 - 3 > 0$ ва $x > 0$ решаҳои бегона ҳастанд ва $x = 2$ - реша мебошанд.

Ҷавоб: $x = 2$.

БОБИ 3. ФУНКСИЯҲОИ НИШОНДИҲАНДАГӢ ВА ЛОГАРИФМӢ

МИСОЛҲО

1. Муодилаи логарифмикиро ҳал кунед.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \log_2 x = -3 & \text{b) } \log_4 2x = \frac{1}{2} & \text{c) } \lg \frac{5x}{2} = 1 \\ \text{d) } \log_{\frac{1}{4}} x = -2 & \text{e) } \log_3 (3x-1) = 2 & \text{f) } \log_7 (x+3) = 2 \\ \text{g) } \log_9 x^3 + \log_{\sqrt{3}} x = 3 & \text{h) } \log_4 (2x-3) = 4 & \text{i) } \log_2 x - 2\log_{\frac{1}{2}} x = 9 \end{array}$$

2. Муодилаи логарифмикиро ҳал кунед.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \log_5 x = 2\log_5 3 + 4\log_{25} 2 & \text{b) } \log_{\frac{1}{2}} (7-8x) = 2 \\ \text{c) } \log_2 x + \log_8 x = 0 & \text{d) } \log_3 x = 9\log_{27} 8 - 3\log_3 4 \\ \text{e) } \log_{0,5} (3x+1) = -2 & \text{f) } \log_{0,2} (x+3) = -1 \\ \text{g) } \log_{0,25} (x+30) = -2 & \text{h) } \log_{\sqrt{3}} (1-2x) = 4 \\ \text{i) } \log_2 \sqrt{x-1} = 1 & \text{j) } \log_3 (x^2 - 4x + 3) = \log_3 (3x+21) \\ \text{k) } \log_3 (2x-5) = \log_3 (20-3x) & \text{l) } \log_7 (9x-1) = \log_7 x \\ \text{m) } \log_3 (2x^2 - 3x) = 2\log_3 x & \text{n) } \lg(2x) = 2\lg(4x-15) \end{array}$$

3. $\lg(3x-11) + \lg(x-27) = 3$

4. $\log_{81} x - 2\log_3 x + 5\log_9 x = 1,5$

5. $\log_3 ((x-1)(2x-1)) = 0$

6. $3\lg x^2 - \lg^2 x = 9$

7. $\log_{\frac{1}{3}} \frac{x^2 + 4x}{2x-3} = 1$

8. $\log_{\frac{3}{4}} \frac{2x-1}{x+2} = 1$

9. $\log_{\pi} (\log_2 (\log_3 3x)) = 0$

10. $\log_2^2 x + 3 = \log_2 x^2$

11. $(x^2 - 6x - 7)\log_2 (3x-1) = 0$

12. $(x^2 - 2x - 15)\lg(4x-3) = 0$

13. $\log_5 (x+4) - \log_5 (1-2x) = -\log_5 (2x+3)$

14. $\log_2^2 x - 5\log_2 x = 4$

15. $\log_3 x + \log_x 9 = 3$

16. $\log_{x+2} 7 + 3\log_7 (x+2) = 4$

17. $\log_3 x \cdot \log_9 x \cdot \log_{27} x \cdot \log_{81} x = \frac{2}{3}$

18. $\log_5 \sqrt{x-9} + \log_5 \sqrt{2x-1} = \log_5 10$

СИСТЕМАИ МУОИДАҲОИ НИШОНДИҲАНДАГӢ ВА ЛОГАРИФМӢ



Системаи муодилаҳои нишондиҳандагӣ ва ҳалли он

Системаи муодилаҳое, ки дар он муодилаҳои ифодаи нишондиҳандагӣ дошта иштирок доранд, **системаи муодилаҳои нишондиҳандагӣ** номида мешаванд. Системаи муодилаҳои нишондиҳандагӣ шаклҳои гуногунро мегирад. Ҳалли ҳар як чунин система муносибати ба худ хосро талаб мекунад. Дар ин маврид хосиятҳои ифодаҳои нишондиҳандагӣ ва логарифмӣ васеъ истифода мешаванд.

Мисоли 1. Системаро ҳал кунед
$$\begin{cases} 3^x = 9^{y+1}, \\ 4y = 5 - x \end{cases}$$

Ҳал.

$9 = 3^2$ истифода мебарем. Баъд $3^x = 3^{2(y+1)}$ аз ин ҷо $x = 2y + 2$. Дар муодилаи дуюми система ба ҷои x иваз кардани $2y + 2$ қимати y -ро меёбем.

$4y = 5 - (2y + 2) \Rightarrow y = \frac{1}{2}$. Акнун, дар баробари $x = 2y + 2$ ро ба ҷои гузошта, қимати $x = 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \Rightarrow x = 3$ -ро меёбем.

Ҷавоб: $\left(3; \frac{1}{2}\right)$.

Мисоли 2. Системаро ҳал кунед
$$\begin{cases} 9^{x+y} = 729, \\ 3^{x-y-1} = 1 \end{cases}$$

Ҳал.

Аз $729 = 9^3$ ва $1 = 3^0$ истифода мебарем. Пас

$$\begin{cases} 9^{x+y} = 9^3, \\ 3^{x-y-1} = 3^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 3, \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow (2; 1).$$

Ҷавоб: $(2; 1)$.

Мисоли 3. Системаро ҳал кунед
$$\begin{cases} x^{y+1} = 27, \\ x^{2y-5} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Ҳал.

Аз муодилаҳои система бармеояд, ки, $x > 0$, $x \neq 1$. Аз ин рӯ, ифодаҳои паҳлӯҳои чап ва рост муодилаҳои якум ва дуюм метавонанд логарифмӣ бошанд. Логарифми ин ифодаҳоро дар асоси 3:

$$\begin{cases} (y+1)\log_3 x = 3, \\ (2y-5)\log_3 x = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_3 x = \frac{3}{y+1}, \\ (2y-5)\frac{3}{y+1} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3, \\ y = 2 \end{cases} \text{-ро мегирем.}$$

Ҷавоб: $(3; 2)$.

БОБИ 3. ФУНКСИЯҲОИ НИШОНДИҲАНДАГӢ ВА ЛОГАРИФМӢ

Мисоли 4. Системаро ҳал кунед
$$\begin{cases} 2^x + 2^y = 5, \\ 2^{x+y} = 4 \end{cases} ..$$

Ҳал.

Аз муодилаи аввал вобастагии $2^y = 5 - 2^x$ -ро меёбем. Бо назардошти баробарии $2^{x+y} = 2^x \cdot 2^y$ аз муодилаи дуюм $2^x \cdot 2^y = 4$ -ро ба даст меорем, аз ин ҷо $2^x(5 - 2^x) = 4$ ва дар охир, муодилаи $2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$ -ро соҳиб мешавем. Фарз мекунем, ки $t = 2^x$ аст ва $t^2 - 5t + 4 = 0$ -ро ба инбат гирифта, муодилаи квадратиро ба даст меорем $t > 0$.

Решаҳои ин муодилаи квадратӣ $t_1 = 1$, $t_2 = 4$ мебошад ва қиматҳои мувофиқи номаълумҳо x ва y мешаванд.

Ҳангоми $t_1 = 1$: $1 = 2^{x_1} \Rightarrow x_1 = 0$; ва $2^{y_1} = 5 - 2^0 = 4, \Rightarrow y_1 = 2$

Ҳангоми $t_2 = 4$: $4 = 2^{x_2} \Rightarrow x_2 = 2$; ва $2^{y_2} = 5 - 2^2 = 1, \Rightarrow y_2 = 0$.

Ҷавоб: $(0; 2)$ ва $(2; 0)$.

Шарҳ. Мисолҳои боло нишон медиҳанд, ки ҳалли ҳар як системаи муодилаҳои нишондиҳандагӣ як навъ муносибати эҷодиро талаб мекунад.



Системаи муодилаҳои логарифмӣ ва ҳалли он

Системаеро, ки муодилаҳои дорои ифодаи логарифмӣ доранд, **системаи муодилаҳои логарифмӣ** меноманд. Системаи муодилаҳои логарифмӣ ба монанди системаи муодилаҳои нишондиҳандагӣ навъҳои зиёд дорад. Ҳангоми ҳалли ҳар яки онҳо хосиятҳои ифодаҳои нишондиҳандагӣ ва логарифмӣ истифода мешаванд ва муносибати махсусро талаб мекунад.

Мисоли 5. Системаро ҳал кунед
$$\begin{cases} \log_9 \frac{x^2}{\sqrt{y}} = \frac{1}{2}, \\ \log_3 xy = 3 \end{cases}$$

Ҳал.

Барои он ки ифодаҳои логарифмикӣ дар система маъно дошта бошанд, нобаробариҳои зерин бояд қонеъ карда шаванд.
$$\begin{cases} \frac{x^2}{\sqrt{y}} > 0, \\ xy > 0 \end{cases}$$
 Нобаробарии $\frac{x^2}{\sqrt{y}} > 0$ танҳо дар ҳолате эътибор

дорад, ки $y > 0$ ва $x \neq 0$ бошад. Бинобар ин, аз нобаробарии дуюм бармеояд, ки Акнун, бо истифода аз $xy > 0$ нобаробарии $x > 0$ ва $y > 0$ истифодаи хосиятҳои логарифм, системаи додашударо метавон ҳамчун $x > 0$ ва $y > 0$ навишт.

$$\begin{cases} \log_9 x^2 - \log_9 \sqrt{y} = \frac{1}{2}, \\ \log_3 x + \log_3 y = 3 \end{cases}$$

Аз муодилаи $\log_9 x^2 = \log_{3^2} x^2 = \log_3 x$ ва $\log_9 \sqrt{y} = \log_{3^2} y^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \log_3 y$ система ба назар мерасад.

$$\begin{cases} \log_3 x - \frac{1}{4} \log_3 y = \frac{1}{2}, \\ \log_3 x + \log_3 y = 3. \end{cases}$$

Муодилаи якумро аз муодилаи дуюм бароварда, $\frac{5}{4} \log_3 y = \frac{5}{2}$ -ро мегирием, аз он баробарии охири бармеояд, ки $\log_3 y = 2 \Rightarrow y = 9$ Ниҳоят, дар муодилаи дуюм, ба ҷои иваз кардани y бо ин қимат, мо номаълуми x -ро пайдо мекунем:

$$\log_3 x + \log_3 9 = 3 \Rightarrow \log_3 x + 2 = 3 \Rightarrow \log_3 x = 1 \Rightarrow x = 3.$$

Ҷавоб: (3; 9).

Мисоли 6. Системаро муодилаҳоро ҳал кунед $\begin{cases} x^{\lg y} = 1000, \\ \log_y x = 3 \end{cases}$.

Ҳал.

Барои он ки ифодаҳои логарифмӣ дар система маъно дошта бошанд, шартҳои $x > 0$, $x \neq 1$, $y > 0$, $y \neq 1$ бояд қонеъ карда шаванд. Баробарии $x^{\lg y} = 1000$ -ро дар асоси 10 логарифмӣ мекунем:

$$\lg x^{\lg y} = \lg 1000 \Rightarrow \lg y \lg x = 3$$

$\log_y x = 3$. Асоси логарифми тарафи чапи баробарию дар муодилаи дуюм бо асоси даҳӣ

$$\text{иваз мекунем: } \log_y x = \frac{\lg x}{\lg y} \Rightarrow \frac{\lg x}{\lg y} = 3 \Rightarrow \lg x = 3 \lg y$$

Дар натиҷа муодилаи $\lg^2 y = 1$ мегирием. Онро ҳал мекунем

$$\lg y = -1 \Rightarrow y = \frac{1}{10}, \quad \lg y = 1 \Rightarrow y = 10$$

Аз баробарии $\lg x = 3 \lg y$ вобастагии $x = y^3$ ба даст оварда, қиматҳои мувофиқро меёбем.

$$y = \frac{1}{10} \Rightarrow x = \frac{1}{1000}$$

$$y = 10 \Rightarrow x = 1000$$

Ҷавоб: $\left(\frac{1}{1000}; \frac{1}{10}\right)$ ва (1000; 10).

Мисоли 7. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед. $\begin{cases} \log_2 (x - y) = 1, \\ 2^x \cdot 3^{y+1} = 72 \end{cases}$.

Ҳал.

Барои муайян кардани система зарур аст, ки шартҳои $x - y > 0$, қонеъ карда шавад, яъне $x > y$ Он гоҳ аз муодилаи аввал вобастагии

$$x - y = 2 \Rightarrow y = x - 2 \text{ бармеояд.}$$

Дар муодилаи дуюми система y -ро бо ифодаи $x - 2$ иваз карда, қимати номаълум x -ро меёбем:

$$2^x \cdot 3^{x-2+1} = 72 \Rightarrow 2^x \cdot 3^x = 3 \cdot 72 \Rightarrow 6^x = 216 \Rightarrow 6^x = 6^3 \Rightarrow x = 3$$

Аз ин ҷо $y = 1$.

Ҷавоб: (3; 1).

БОБИ 3. ФУНКСИЯҲОИ НИШОНДИҲАНДАГӢ ВА ЛОГАРИФМӢ

МИСОЛҲО

1. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед.

$$a) \begin{cases} 3^x \cdot 7^y = 63 \\ 3^x + 7^y = 16 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 9^x - 3 \cdot 5^y = 3 \\ 9^x \cdot 5^y = 18 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 3^y \cdot 2^x = 972 \\ y - x = 3 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 4^{x+y} = 128 \\ 5^{3y-2x-3} = 1 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} 3^{-x} \cdot 2^y = 1152 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} 2^x \cdot 9^y = 648 \\ 3^x \cdot 4^y = 432 \end{cases}$$

$$g) \begin{cases} 3^x \cdot 2^y = \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} \cdot 3^y = 3^x \end{cases}$$

$$h) \begin{cases} 2^y \cdot 8^{-x} = 8\sqrt{2} \\ y + 3x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$i) \begin{cases} 4^{y-1} \cdot 5^x = 6400 \\ y - x = 3 \end{cases}$$

2. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед.

$$a) \begin{cases} \log_7 7x + \log_7 y = 2 \\ y - 5x = 2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \log_2 x - \log_2 y = 4 \\ y - x = 6 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} \log_2 (x^2 + y^2) = 5 \\ \log_2 x + \log_2 y = 4 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} \log_3 2x - \log_3 \left(\frac{2}{y} \right) = 1 \\ 4x - y = 1 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} \log_2 x - \log_4 y = 0 \\ \log_4 x + \log_2 y = 5 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} \log_2 2x + \log_2 \left(\frac{y}{2} \right) = -1 \\ x - y = -\frac{7}{4} \end{cases}$$

3. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед.

$$a) \begin{cases} 3^x - 2^{y^2} = 77 \\ \frac{x}{3^2} - 2^{\frac{y^2}{2}} = 7 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 3 \cdot 2^x - 2^{x+y} = -2 \\ 5 \cdot 2^{x+1} - 2^{x+y+1} = 4 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 9^x - 3 \cdot 2^y = 3 \\ 9^x \cdot 2^y = 18 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} \lg x (\lg x + \lg y) = 2 \\ \lg x - \lg y = 3 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} 3^x \cdot 25^y = 5625 \\ 5^x \cdot 9^y = 2025 \end{cases}$$

4. Масофаи байни нуқтаҳоеро ёбед, ки решаҳои системаро ифода мекунанд $\begin{cases} x^{\sqrt{y}} = y \\ y^{\sqrt{y}} = x^4 \end{cases}$

5. xy -ро ёбед, агар $(x; y)$ - решаи система бошад: $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 972, \\ \log_{\sqrt{3}}(x - y) = 2 \end{cases}$.

6. $x + y$ -ро ёбед, агар $(x; y)$ - решаи система бошад: $\begin{cases} x^{y+1} = 27, \\ x^{2y-5} = \frac{1}{3} \end{cases}$.

НОБАРОБАРИҲОИ ЛОГАРИФМЇ

◆ Нобаробариҳои логарифмӣ

Бигзор $a > 0$ ва $a \neq 1$ бошад. Он гоҳ нобаробариҳои

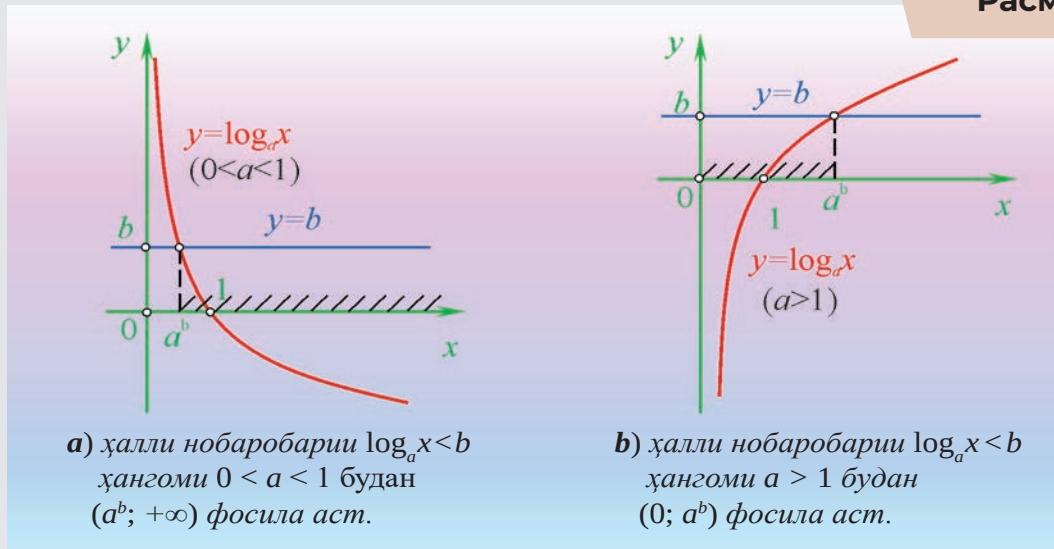
$$\log_a x < b, \log_a x > b, \log_a x \leq b, \log_a x \geq b$$

нобаробариҳои логарифмӣ мебошад. Ҳангоми ҳалли онҳо монотонии функсияи $y = \log_a x$ истифода мешавад.

Нобаробари $\log_a x < b$ -ро дида мебароем. Ҳалли ин нобаробарӣ маҷмӯи чунин қиматҳои тағйирёбанда мебошад, ки барои ин қиматҳои графיקи функсияи $y = \log_a x$ дар системаи координатии Oxy дар зери хати рост $y = b$ меҳобад.

$\log_a x < b$ шарҳи геометрии ҳалли нобаробарӣ

Расми 1



Тасвири геометрии ҳалли нобаробарии $\log_a x > b$, $\log_a x \leq b$, $\log_a x \geq b$ -ро мустақилона диҳед.

◆ Ҳалли нобаробарии логарифмӣ

Ҳалли нобаробарии логарифмӣ $\log_a f(x) < \log_a g(x)$,

Ҳалли системаи $0 < a < 1$ ҳангоми $\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0 \end{cases}$

Ҳалли системаи $\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0 \end{cases}$ ҳангоми $a > 1$ будан, мебошад:

Бо ҳалли нобаробарии $\log_a f(x) \leq \log_a g(x)$, $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ ва $\log_a f(x) \geq \log_a g(x)$ аз ҷадвали зерин шинос шудан мумкин аст.

БОБИ 3. ФУНКСИЯҲОИ НИШОНДИҲАНДАГӢ ВА ЛОГАРИФМӢ

Намуди нобаробарихи логарифмӣ	$\log_a f(x) \leq \log_a g(x)$	$\log_a f(x) < \log_a g(x)$	$\log_a f(x) > \log_a g(x)$	$\log_a f(x) \geq \log_a g(x)$
Ҳангоми $0 < a < 1$	$\begin{cases} f(x) \geq g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$
Ҳангоми $a > 1$	$\begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} f(x) \geq g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$

Мисоли 1. Нобаробариро ҳал кунед $\log_{27} x > \frac{1}{3}$.

Ҳал.

Соҳаи муайянӣ $x > 0$. Асос аз 1 калон. Аз рӯи таърифи логарифм

$$\log_{27} x > \frac{1}{3} \Rightarrow x > 27^{\frac{1}{3}} \Rightarrow x > \sqrt[3]{27} \Rightarrow x > 3 \begin{cases} x > 3 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 3 \Rightarrow x \in (3; \infty)$$

Ҳама қиматҳои номаълум аз ин фосила дар соҳаи муайянӣ меҳобанд.

Ҷавоб: $x \in (3; \infty)$

Мисоли 2. Нобаробариро ҳал кунед $\log_{0,5} (2x-3) > \log_{0,5} (x+1)$.

Ҳал.

Бо назардошти он ки асос аз 1 хурдтар аст, нобаробарии системаи ба он баробарро меоварем ва баъд система ро ҳал мекунем.

$$\begin{cases} 2x-3 < x+1 \\ 2x-3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 4 \\ x > 1,5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 4 \\ x > 1,5 \end{cases} \Rightarrow x \in (1,5; 4)$$

Ҷавоб: $(1,5; 4)$

Мисоли 3. Нобаробариро ҳал кунед $\log_7^2 x - 13\log_7 x + 42 \geq 0$.

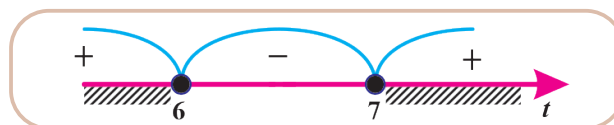
Ҳал.

Ишоракунии $t = \log_7 x$ -ро дохил мекунем. Дар ин

$$t^2 - 13t + 42 \geq 0 -$$

ро ба назар мегирем. Он гоҳ баробарии

$(t-6)(t-7) \geq 0$ соҳиб мешавем. Сифрҳои тарафи чапи нобаробарӣ:



Аломатҳои ифодаи, $t \leq 6$ дар фосилаҳои $t \geq 7$ муайян кунем. $\log_7 x \leq 6$ ё ки $\log_7 x \geq 7$

Ҳамин тариқ, $x \leq 7^6$ ё ки $x \geq 7^7$ Аз ин ҷо, ё. $x > 0$ Пас шарти $x > 0$ -ро қабул карда.

$$x \in (0; 7^6] \cup [7^7; \infty) \text{ мешавад.}$$

Ҷавоб: $x \in (0; 7^6] \cup [7^7; \infty)$.

Нобаробарии намуди $A \cdot \log_a^2 x + B \cdot \log_a x + C < 0$ бо роҳи ба муодилаи квадратӣ овардани он тавассути дохил кардани аломати $\log_a x$ ҳал карда мешавад.

Мисоли 4. Нобаробариро ҳал кунед $\log_3^2 x - 3\log_3 x + 2 \leq 0$.

Ҳал.

Соҳаи муайяни $x > 0$. Ишораи

$\log_3 x = t$ -ро дохил мекунем. Пас нобаробарии квадратӣ ҳосил мешавад.

$t^2 - 3t + 2 \leq 0$ -ро ҳал мекунем:

$(t-1)(t-2) \leq 0$, мувофиқи шарт $1 \leq t \leq 2$

$1 \leq \log_3 x \leq 2 \Rightarrow \log_3 3 \leq \log_3 x \leq \log_3 9 \Rightarrow 3 \leq x \leq 9$

Ҷавоб: $[3; 9]$

Мисоли 5. Нобаробариро ҳал кунед $\log_{x+1} (x^2 + 2x + 1)^{x^2 + 2x + 5} > 4x + 28$.

Ҳал.

Нобаробариро ба монанди

$$\log_{x+1} (x+1)^{2(x^2 + 2x + 5)} > 4x + 28$$

аз нав менависем. Ду ҳолат имконпазир аст.

Ҳолати 1. $0 < x+1 < 1 \Rightarrow -1 < x < 0$

Дар ин ҳолат $2(x^2 + 2x + 5) < 4x + 28 \Rightarrow x^2 + 2x + 5 < 2x + 14 \Rightarrow x^2 - 9 < 0 \Rightarrow x \in (-3; 3)$

Аммо, бо назардошти $-1 < x < 0$, мо ба хулосае омадем, ки дар ин ҳолат нобаробарии додашуда ҳангоми $x \in (-1; 0)$.

Ҳолати 2. Дар ин ҳолат $x+1 > 1 \Rightarrow x > 0$

Дар ин

$$2(x^2 + 2x + 5) > 4x + 28 \Rightarrow x^2 + 2x + 5 > 2x + 14 \Rightarrow x^2 - 9 > 0 \Rightarrow x \in (-\infty; -3) \cup (3; \infty)$$

$x > 0$ аммо, бо назардошти дар ин маврид мо ба хулосае меоем, ки нобаробарии додашуда ҳангоми $x \in (3; \infty)$.

Ҳолатҳои 1 ва 2-ро якҷоя карда, мо мебинем, ки нобаробарии додашуда ҳангоми

$$x \in (-1; 0) \cup (3; \infty) \text{ будан дуруст аст.}$$

Ҷавоб: $x \in (-1; 0) \cup (3; \infty)$.

БОБИ 3. ФУНКСИЯҲОИ НИШОНДИҲАНДАГӢ ВА ЛОГАРИФМӢ

МИСОЛҲО

1. Нобаробарино ҳал кунед.

a) $\log_2 x > 3$

b) $\log_{0,5} x > 2$

c) $\log_2 8 > x$

d) $\log_5 x > 3$

e) $\log_3 x > 4$

f) $\log_3 x \geq \log_6 36$

g) $\log_2 x < \log_{49} 7$

h) $\log_{\frac{1}{5}}(x-5) > -2$

i) $\log_3(x+20) < 3$

j) $\log_3(4x+2) - \log_3 10 < 0$

k) $\log_8 64 > \log_{\frac{1}{5}} x$

l) $\log_4(5-x^2) > 1$

m) $\log_5(3x-2x^2) > 0$

n) $\log_{\frac{1}{2}} x - 9 \leq 0$

o) $5^{\log_5(x-7)} < 4$

2. Чандто қиматҳои бутун нобаробарино қаноат мекунонад $\log_2(4-x) - \log_2 7 < 0$?

3. Нобаробарино ҳал кунед.

a) $\log_{\frac{4}{3}}(x+6) - \log_{\frac{4}{3}} 9 < \log_{\frac{4}{3}} 2 - \log_{\frac{4}{3}} 6$

b) $\log_2(x-1) < \log_2(3x-1)$

c) $\log_{\frac{1}{3}}(2x-4) \geq \log_{\frac{1}{3}}(x+1)$

d) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x-6) \geq -3$

e) $\lg^2 x + 11 \cdot \lg x + 10 < 0$

f) $\log_2^2 x - 6 \log_2 x + 8 \leq 0$

g) $\log_2 \log_{\sqrt{2}}(x+1) < 1$

h) $2 \log_{\frac{1}{5}}(x-2) + 3 \log_5(x-2) < 1$

i) $\log_x x^2 + x > 1$

j) $\lg(x+2) + \lg(x-3) \leq \lg x^2$

4. Нобаробарино ҳал кунед.

a) $\lg 10^{\lg(x^2+21)} > 1 + \lg x$

b) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\log_{0,25}(x^2-5x+8)} \leq 2,5$

c) $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(6^{x+1} - 36^x) \geq -2$

d) $\log_{\frac{x-1}{5x-6}}(\sqrt{6}-2x) > 0$

e) $x^{1+\lg \sqrt{x}} < 0,1^{-2}$

f) $\sqrt{x^{4 \lg x}} < 10x$

5. Ҳалли манфии нобаробарино ёбед $\log_{0,2}(x^4+2x^2+1) > \log_{0,2}(6x^2+1)$.

ТАТБИҚИ ФУНКСИЯҲОИ НИШОНДИҲАНДАГӢ ВА ЛОГАРИФМӢ



Формулаи фоизҳои мураккаб

Фарз мекунем, ки мизоҷ меҳодад каме пул Q_0 қарз гирад. Кредитор метавонад дар мӯҳлати муайян баргардонидани маблағи ибтидоиро бо фоидаи $-1 < x < 0$ талаб намояд. Шумо метавонед як рӯз, ду рӯз, як ҳафта, ду ҳафта, як моҳ, ду моҳ ва ғайраро ҳамчун мӯҳлат қабул кунед. Бинобар ин маблағе, ки қарзгиранда дар давраи муайян бармегардонад

$$Q_1 = Q_0 + P$$

Дар ин ҳолат, миқдор

$$p = \frac{P}{Q_0} \cdot 100\%$$

фоизи пардохти қарз номида мешавад.

1. Формулаи фоизи оддӣ. Агар фоизҳо p тонҳо ба маблағи қарзи Q_0 истифода шаванд, маблағи қарз дар охири мӯҳлати якум, $Q_1 = Q_0 + \frac{p}{100} \cdot Q_0 = \left(1 + \frac{p}{100}\right) Q_0$ мешавад.

Дар ин ҳо $P_1 = \frac{p}{100} \cdot Q_0 = P$ – фоидаи қарздиҳанда дар охири мӯҳлати якум. Маблағи қарз дар охири давраи дуюм $Q_2 = Q_1 + P_1 = \left(1 + \frac{p}{100}\right) Q_0 + \frac{p}{100} Q_0 = \left(1 + \frac{2p}{100}\right) Q_0$ буда, фоидаи

қарз диҳанда дар охири муддати дуюм $P_2 = \frac{np}{100} \cdot Q_0$ (равшан аст, ки $P_n = nP$) мешавад.

Миқдори қарз дар охири муддати сеюм буда, фоидаи қарздиҳанда дар охири муддати

сеюм $P_3 = \frac{np}{100} \cdot Q_0$ (равшан аст, ки $P_n = nP$) мешавад. Ин ҷараёноро n маротиба такрор намуда, миқдори қарз дар муддати n -ум

$$Q_n = \left(1 + \frac{np}{100}\right) Q_0$$

формулаи фоизи оддӣ номида мешавад.

2. Формулаҳои фоизи мураккаб Татбиқи фоизҳо ба пули қарз ва фоида имконпазир аст. Дар ин сурат маблағи қарз дар охири мӯҳлати якум додаси

$$Q_1 = Q_0 + \frac{p}{100} \cdot Q_0 = \left(1 + \frac{p}{100}\right) Q_0.$$

мешавад. Дар он

$$P_1 = \frac{p}{100} \cdot Q_0 = P$$

– Фоидаи қарздиҳанда дар охири муддати якум. Миқдори қарз дар охири муддати дуюм

$$Q_2 = Q_1 + \frac{p}{100} Q_1 = \left(1 + \frac{p}{100}\right) Q_1 = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 Q_0$$

БОБИ 3. ФУНКСИЯҲОИ НИШОНДИҲАНДАГӢ ВА ЛОГАРИФМӢ

мешавад. Ин ҷараёно n -маротиба такрор карда, миқдори қарз дар охири муддати n -ум

$$P_n = Q_n - Q_0 = \left(\left(1 + \frac{P}{100} \right)^n - 1 \right) Q_0 \text{ мешавад.}$$

шудан ёфта мешавад. Чунини ҳисоб кардани фоиз фоизи мураккаб, формулаи баробар мешавад.

$$Q_n = \left(1 + \frac{P}{100} \right)^n Q_0$$

ва фоидаи кредитор дар охири мӯҳлати n -ум баробар аст

$$P_n = Q_n - Q_0 = \left(\left(1 + \frac{P}{100} \right)^n - 1 \right) Q_0$$

Фоизҳое, ки бо ин роҳ ҳисоб карда мешаванд, фоизҳои мураккаб номида мешаванд ва

$$Q_n = \left(1 + \frac{P}{100} \right)^n Q_0 \text{ **формулаи фоизҳои мураккаб** номида мешавад.}$$

Бисёр мисолҳо ва масъалаҳои амалӣ бо истифодаи формулаҳои фоизҳои оддӣ ва мураккаб вучуд доранд. Дар айни замон, ибораҳо ба монанди қарзи кредитӣ ва ипотека маъмуланд. Барои ҳалли масъалаи ҳисоб кардани қарзи ипотека мисол меорем.

Одатан банк қарздиҳанда ва муштарӣ қарзгир аст. Банкҳо барои манзил (ипотека), воситаҳои нақлиёт ё ашёи рӯзгор (телевизор, яхдон, телефони мобилӣ ва ғайра) ба мӯҳлати то чанд сол қарз дода, аз муштарӣ ҳар моҳ пардохти маблағи муайяни қарзро талаб мекунанд.

Мисоли 1. Оилаи ҷавон квартираеро бо нархи ибтидоии 360 000 000 сӯм ба муддати 15 сол бо фоизи солона ба 20 фоиз харид. Пас аз 15 сол чанд пул ба банк бармегардонад? Ин барои банк то чӣ андоза муфид аст?

Ҳал.

Маблағи аввалии 360 000 000 сӯмро ба забони банк қарзи асосӣ меноманд. Дар хотир доред, ки 1 сол аз 12 моҳ иборат аст. Ҳамин тавр, харидор бояд ҳар моҳ ба банк қарзи асосиро ба маблағи

$$\frac{360\,000\,000}{15 \cdot 12} = 2\,000\,000$$

сӯм баргардонад. Фоизҳое, ки дар моҳи аввали пардохт ҳисоб карда шудаанд, ба таври зерин пайдо мешаванд

$$a_1 = 360\,000\,000 \cdot \frac{20\%}{100\%} \cdot \frac{1}{12} = 6\,000\,000 \text{ сӯм.}$$

Ҳамин тавр, дар охири моҳи аввал, харидор бояд маблағи умумии

$$2\,000\,000 + 6\,000\,000 = 8\,000\,000 \text{ сӯмро.}$$

$$360\,000\,000 - 2\,000\,000 = 358\,000\,000 \text{ сӯм онро баргардонад.}$$

Дар охири моҳи дуюм харидор бояд аз қарзи асосӣ ба маблағи 2 000 000 сӯм ва фоизро ба маблағи

$$a_2 = 358\,000\,000 \cdot \frac{20\%}{100\%} \cdot \frac{1}{12} = 596\,667$$

сӯм баргардонад. Ва умуман дар охири моҳи дуюм

$$2\,000\,000 + 5\,966\,667 = 7\,966\,667 \text{ сӯм мешавад.}$$

Пас аз пардохти моҳи $(n - 1)$ - маблағи асосӣ

$$360\,000\,000 - 2\,000\,000 \cdot (n - 1) \text{ сӯм боқӣ мемонад.}$$

ТАТБИҚИ ФУНКСИЯҲОИ НИШОНДИҲАНДАГӢ ВА ЛОГАРИФМӢ

Дар охири моҳи n - муштарӣ ба бонк $2\,000\,000 + a_n$ сӯм пардохт мекунад. Дар ин ҷо a_n – маблағи фоизии моҳи n -ум аст, ки бо формулаи

$$a_n = (360\,000\,000 - 2\,000\,000 \cdot (n-1)) \cdot \frac{20\%}{100\%} \cdot \frac{1}{12} = (181-n) \cdot \frac{100\,000}{3}$$

ҳисоб карда мешавад. $a_1, a_2, \dots, a_n$ прогрессияи камшавандаи арифметикӣ буда, фарқияти он ба

$$d = a_n - a_{n-1} = (181-n) \cdot \frac{100\,000}{3} - (181-(n-1)) \cdot \frac{100\,000}{3} = -\frac{100\,000}{3}, \text{ яъне } d = -\frac{100\,000}{3}$$

баробар аст.

Аён аст, ки 15 сол аз 180 моҳ иборат аст, пас $1 \leq n \leq 180$. Пас

$$a_1 = 6\,000\,000, \quad a_{180} = \frac{100\,000}{3}$$

ва Суммаи 180 аъзои прогрессияи арифметикӣ ба

$$\begin{aligned} S_{180} &= \frac{a_1 + a_{180}}{2} \cdot 180 = \frac{6\,000\,000 + \frac{100\,000}{3}}{2} \cdot 180 = \\ &= \frac{18\,000\,000 + 100\,000}{3} \cdot 90 = 18\,100\,000 \cdot 30 = 543\,000\,000 \end{aligned}$$

сӯм баробар аст.

$$360\,000\,000 + 543\,000\,000 = 903\,000\,000$$

Пас, муштарӣ бояд танҳо $360\,000\,000 + 543\,000\,000 = 903\,000\,000$ сӯмро ба бонк баргардонад. Фоидаи банк $543\,000\,000$ сӯмро ташкил медиҳад.



Таназзули радиоактивӣ

Давраи ним таназзул. Баъзе элементҳои кимиёвӣ аз ядроҳои худ заррачаҳо мебароранд. Чунин элементҳоро *элементҳои радиоактивӣ*, ҷараёни аз ядроҳои онҳо ба вучуд омадани заррачаҳоро **таназзули радиоактивӣ** меноманд. Дар натиҷаи таназзули радиоактивӣ элементҳои аслии кимиёвӣ ба дигар элементҳои кимиёвӣ мубаддал мешавад.

Бигзор массаи элементҳои кимиёвии ибтидоӣ ба m_0 барбар бошад, ва вақти таназзули нисфи он T_1 . Он гоҳ $t_1 = T_1$ – массаи элементест, ки дар тӯли вақт таназзул наёфтааст $m_1 = \frac{m_0}{2}$. Бигзор он вақт лозим аст, ки нисфи массаи m_1 таназзул ёбад T_2 . Маълум аст, ки пас аз вақти $t_2 = T_1 + T_2$ массаи элементҳои таназзул ёфта ба $m_2 = \frac{m_1}{2} = \frac{m_0}{2^2}$ массаи элементҳои таназзул ёфта ба, $m_2 = \frac{m_1}{2} = \frac{m_0}{2^2}$ баробар аст. Бигзор вақти лозим аст, ки барои таназзул ёфтани нисфи массаи, минбаъд, $m_3 = \frac{m_2}{2} = \frac{m_0}{2^3}$ массаи элементест, ки бо мурури вақти $t_3 = T_1 + T_2 + T_3$ таназзул наёфта аст ва бигзор барои таназзул ёфтани нисфи масса вақти T_4 лозим бошад. Барои таназзули нисфи масса бигзор ин ҷараён беохир давом кунад.

БОБИ 3. ФУНКСИЯҲОИ НИШОНДИҲАНДАГӢ ВА ЛОГАРИФМӢ

Дар натиҷаи таҷрибаи чандинсола исбот карда шуд, ки $T_1 = T_2 = T_3 = \dots = T_n = T_{n+1} = \dots$. Ҳамин тариқ, вақт барои таназзули нисфи массаи як элемент доимӣ аст. Ин қимат **даври нимтаназзули элемент** номида мешавад ва бо T ифода карда мешавад:

$$T = T_1 = T_2 = T_3 = \dots = T_n = T_{n+1} = \dots$$

Дар натиҷа баробарии зерин ҳосил мешавад:

$$\begin{aligned} t_1 &= T_1 = T, \\ t_2 &= T_1 + T_2 = 2T, \\ t_3 &= T_1 + T_2 + T_3 = 3T, \dots, \\ t_n &= T_1 + T_2 + T_3 + \dots + T_n = nT \end{aligned}$$

Ҳамин тариқ, массаи элементе, ки массаи ибтидоии m_0 дорад, ки бо мурури замон таназзул наёфтааст $t_n = nT$ баробар аст ба $m_n = \frac{m_0}{2^n} = 2^{-n} m_0$. Агар дар ин ҷо ба назар гирем, ки $n = \frac{t_n}{T}$ аст, баробарии $m_n = 2^{-\frac{t_n}{T}} m_0$ -ро ҳосил мекунем. Ин формула инчунин барои лаҳзаи ихтиёрии вақт эътибор дорад $m(t) = 2^{-\frac{t}{T}} m_0$.

Ҳамин тариқ, массаи элементи радиоактиви вайроннашуда функцияи нишондиҳандагии вақт мебошад.

Мисоли 2. Дар 8 соати аввали шабонарӯз фаъолияти моддаи радиоактивӣ 4 баробар кам шуд. Фаъолияти модда дар давоми рӯз чанд маротиба коҳиш меёбад?

Ҳал. Бигзор массаи ибтидоии моддаи дидашаванда m_0 ва давраи нимпайвастшавӣ T бошад. Пас аз 8 соат, массаи он $m(8) = \frac{m_0}{4}$ шуд. Бо назардошти ин маълумот, нисфи ҳаёти модда бо формулаи зерин ёфта мешавад: $m(t) = 2^{-\frac{t}{T}} m_0$:

$$m(8) = 2^{-\frac{8}{T}} m_0 \Rightarrow \frac{m_0}{4} = 2^{-\frac{8}{T}} m_0 \Rightarrow 2^{\frac{8}{T}} = 2^2 \Rightarrow \frac{8}{T} = 2 \Rightarrow T = 4 \text{ соат.}$$

Акнун, боз бо истифода аз формулаи $m(t) = 2^{-\frac{t}{T}} m_0$ барои t (як рӯз = 24 соат), меёбем, ки фаъолияти моддаи радиоактивӣ дар давоми рӯз чанд маротиба коҳиш ёфтааст: $m(24) = 2^{-\frac{24}{4}} m_0 = 2^{-6} m_0 = \frac{m_0}{64}$.

Ҳамин тавр, дар давоми рӯз фаъолияти моддаи радиоактивӣ 64 баробар кам мешавад.



Андоz аз арзиши иловашуда (ААИ кӯтоҳ)

Шумо бо мафҳуми андоз шиносед. Истеҳсолкунанда ё воридакунандаи мол (яклухт ё чаканафурӯш) бояд ба давлат андози фурӯш супорад. Андоз аз арзиши иловашуда андозест, ки аз ҷониби ҳукумат дар бисёр нуқтаҳои занҷираи таъминот, аз истеҳсолкунанда то фурӯшанда муқаррар карда мешавад. Дар ҳар марҳила, танҳо арзиши иловашуда ба маҳсулот андоз аз фурӯш ситонида мешавад. Вазъияти ниҳони андоз аз фурӯш дар назди истеъмолкунанда боқӣ мемонад.

ААИ андоз аз арзиши иловашуда барои ҳар як интиқоли мол аз истеҳсолкунандаи асли ба фурӯшанда мебошад.

Фарз мекунем, ки меъёри андоз аз арзиши иловашуда 10% аст. Фарз кардем, ки соҳибкор ба маблағи 8 000 000 сӯм мол харид. Баъд аз ӯ 800 ҳазор сӯм (10 фоизи 8 000 000 сӯм) нигоҳ дошта мешавад. Баъд вай ба маблағи 11.500.000 сӯм ҳамин хел молро фурӯхт. Дар баробари ин ба ӯ 1 150 000 сӯм (10 фоизи 11 500 000 сӯм) музд дода мешавад.

Он гоҳ вай бояд ба маблағи $11\,500\,000 - 8\,000\,000 = 3\,500\,000$ сӯм андоз супорад.

МИСОЛҲО

1. Оила баъди ба охир расидани мӯҳлат хонаеро бо нархи ибтидоии 360 000 000 сӯм ба воситаи ипотека ба муддати 20 сол бо 18 фоизи солона ба бонк бармегардонад? Бонк чӣ қадар фоида меорад?
2. Фоизҳои мураккаби қарзи \$5000 барои 3 сол бо 8% дар як солро ёбед.
3. Воҳид 50 миллион сӯм қарз гирифта, аҳд кард, ки барои соли якум 10%, дуюм ва сеюм 12% ва 14% фоиз диҳад. Қарзи умумиро пас аз 3 сол ёбед.
4. Амонатгузор ба банк 100 миллион сӯм гузоштааст. Ба ивази ин вай 133,1 миллион сӯм гирифт. Бонк 10% дар як сол дод. Ӯ пулро дар бонк чанд вақт нигоҳ дошт?
5. Пасандозгузор ба ҳисоби банк 26 миллион сӯм гузарондааст. Баъди 18 моҳ дар ҳисобаш 32 миллион сӯм буд. Меъёри фоизи солона чанд аст?
6. Ман 400 доллар дорам. Дӯстам пешниҳод кард, ки ба бонк сармоягузорӣ кунам. Ман метавонам пасандозҳои худро ба суратҳисоби асҳори хориҷӣ 13% дар як сол ё ба суратҳисоби сумӣ 1% дар як моҳ сармоягузорӣ кунам.
 - а) Агар ман ба суратҳисоби асҳори хориҷӣ пул гузорам, дар як сол чанд пул мегирам?
 - б) Агар ин пулро ба сӯм гузаронам ва ба суратҳисоби сумӣ гузорам, дар як сол чанд доллар мегирам? Доллар ва сӯмро ба назар гиред. Фарз мекунем, ки инфлятсия 10% дар як сол аст.
7. Мурод агар ба маблағи 10 миллион сӯм мол харад, 7% медиҳад. Агар вай ба маблағи 13 миллион сӯм як хел маҳсулот фурӯшад, 9 фоиз музд мегирад. Миқдори андозро, ки Мурод месупорад, фаҳмонед.
8. Агар соҳибкор ба маблағи 7.500.000 сӯм мол фурушад, аз фурӯш ба андозаи 12 фоиз андоз меситонад. Агар вай ба маблағи 180 ҳазор сӯм ААИ супорад, нархи ибтидоиро бо назардошти андози супурдаи соҳибкор ҳисоб кунед.
9. Истеҳсолкунанда нархи маҳсулоти худро 12 000 000 як дона эълон кард. Вай ба яклухтфурӯш 30% тахфиф дод ва яклухтфурӯш дар навбати худ ба фурӯшанда аз нархи эълоншуда 20% тахфиф дод. Агар меъёри андоз аз фурӯш барои маҳсулот 10% бошад ва фурӯшанда онро ба истеъмолкунанда бо нархи эълоншуда фурӯхта бошад, андоз аз арзиши изофашударо, ки яклухтфурӯшон ва фурӯшандагони чакана пардохт кардаанд ёбед.
10. Фурушанда аз савдои яклухт ба маблағи 80 ҳазор сӯм мол мехарад, яклухтфуруш бошад, андози фурӯшро ба андозаи 8 фоиз нигоҳ медорад. Фурушанда нархро 100 000 сӯм муқаррар мекунад ва аз рӯи ҳамин меъёр андози фурӯши истеъмолро мегирад. Як фурӯшанда ба давлат чӣ қадар андоз аз арзиши иловашуда месупорад?



Боби 4. ФУНКСИЯҲОИ ТРИГОНОМЕТРӢ

➤ ФУНКСИЯҲОИ ТРИГОНОМЕТРӢ. ҶАРАЁНҲОИ ДАВРӢ

➤ ФУНКСИЯҲОИ ТРИГОНОМЕТРИИ БАРЪАКС

➤ КОРИ ЛОИҲАВӢ

ФУНКСИЯҲОИ ТРИГОНОМЕТРӢ. ҶАРАӢҲОИ ДАВРӢ

Функсияҳои тригонометрӣ. Ҷараёнҳои даврӣ

Дар табиат, техника, истеҳсолот ва дигар соҳаҳо бисёр ҳодисаю ҷараёнҳое ҳастанд, ки бо мурури замон такрор мешаванд. Масалан, тулӯи офтоб, ивазшавии фаслҳо, ҳаракати поршен дар муҳаррики дарунсӯз ва ғайра бо мурури замон такрор мешавад. Чунин ҷараёнҳоро **ҷараёнҳои даврӣ** меноманд. Ҷараёнҳои даврӣро функсияҳои тригонометрӣ тавсиф мекунамд.

Ҳангоми омӯзиши функсияҳои тригонометрӣ шумо бояд донед:

- 1) андозагирии дараҷаи кунҷ;
- 2) Қисми 60-уми кунҷи 1° ба 1 дақиқа баробар аст (навишти $1'$), қисми 60-уми $1'$ ба 1 сония (нишони $1''$), яъне

$$1' = \frac{1^\circ}{60}, 1'' = \frac{1'}{60} = \frac{1^\circ}{3600}$$

- 3) ченаки радиани кунҷ;
- 4) радиан бузургии беандоза аст;
- 5) формулаи гузариш аз ченаки радиани кунҷ ба андозаи дараҷа, яъне

$$\alpha \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi} \cdot \alpha \right)^\circ$$

- 6) формулаи табдили дараҷаҳо ба радианҳо

$$\alpha^\circ = \left(\frac{\pi}{180} \cdot \alpha \right) \text{ rad}$$

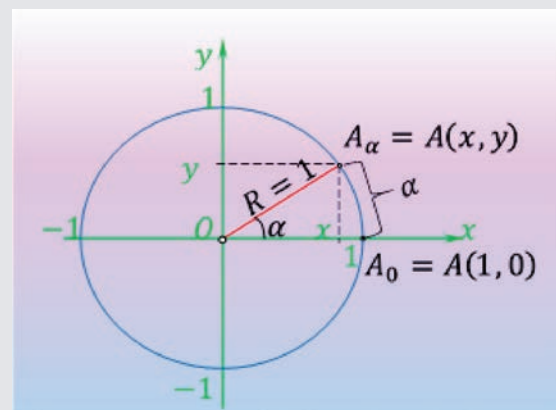
- 7) формулаҳои камшавӣ.

Синус, косинус, тангенс ва котангенс кунҷ

Дар ҳамворие, ки системаи координатаҳои декартии Ox, y , ҷорӣ кардааст, *доираи воҳид* (яъне доирае, ки радиусаш ба 1 баробар аст) дар маркази ибтидоӣ қарор дорад. Як нуқтаро қайд мекунем $A_0 = A(1; 0)$. Дар доира аз нуқтае, ки ба самти муқобили ақрабаки соат (яъне ба самти *мусбӣ*) рост меояд, камони дарозии ба A_0 ба самти муқобили ақрабаки соат (яъне ба самти *мусбӣ*) камони дарозии ба α , баробарро кашида, охири он аз камонро тавассути A_α нишон медиҳем (*расми 1*).

Мувофиқи таърифи ченаки радиани кунҷ, кунҷи A_0OA_α ба радиани α баробар аст:

Расми 1



Воҳиди радиани α бузургии кунҷи доираи дарозии α — и кунҷи камони марказиаш A_0A_α мебошад

БОБИ 4. ФУНКЦИЯҲОИ ТРИГОНОМЕТРӢ

$$\alpha = \angle A_0 O A_\alpha.$$

Ёддошт! Нуқтаи A_α дар ҳамворӣ Ox баъзе координатҳоро соҳиб мешавад.

Фарз мекунем, ки координатаҳои нуқтаи A_α дар ҳамвори Ox чуфт мебошанд $(x; y)$.

Таъриф

- 1) бузургии x косинуси кунҷи α номида мешавад ва бо $\cos \alpha$ ифода карда мешавад;
- 2) бузургии y -ро синуси кунҷи α меноманд ва бо $\sin \alpha$ ифода карда мешавад;
- 3) нисбати $\frac{y}{x}$ тангенс кунҷи α номида мешавад ва бо $\operatorname{tg} \alpha$ ифода карда мешавад;
- 4) нисбати $\frac{x}{y}$ котангенс кунҷи α номида мешавад ва бо $\operatorname{ctg} \alpha$ ифода карда мешавад.

Пас аз рӯи таъриф;

$$\cos \alpha = x, \quad \sin \alpha = y, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y} \quad (1)$$

Ёддошт! Агар ба ҷои доираи воҳид як даври ихтиёрии R -ро баррасӣ кунем, он гоҳ баробарии

$$\cos \alpha = \frac{x}{R}, \quad \sin \alpha = \frac{y}{R}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y} \quad (1')$$

ҳосил мешавад.

Маълум аст, ки дар доира танҳо ду гардиши марказии нуқтаи A_0 тавассути кунҷи додашуда мавҷуд аст:

Гардиши мусбӣ: гардиш ба муқобилиақрабаки соат дар самт иҷро карда мешавад.

Гардиши манфӣ: гардиш ба самти ақрабаки соат иҷро карда мешавад.



Функцияҳои $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ хосиятҳо ва графики онҳо

Ба ҳар як нуқтаи x тири адади Ox нуқтаи A_x давраи воҳидиро, ки бо кунҷи гардиши нуқта A_0 ба вучуд омадааст, таъин мекунем x (агар, $x > 0$ пас гардиш мусбат аст, яъне гардиш муқобили ақрабаки соат $x < 0$, аст, агар, гардиш манфӣ аст, яъне гардиш ба самти ақрабаки соат анҷом дода мешавад). Дар ин ҳолат, метавонед қиматҳои $\cos x$, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ -ро барои нуқтаи A_x доира ҳисоб кунед. Дар натиҷа, мо функцияҳои

$$y = \sin x, y = \cos x, y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x$$

ба даст меорем, ки **функцияҳои тригонометрӣ** номида мешаванд, мутаносибан ба шумораи қиматҳои x , $\cos x$, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$.

Ин функцияҳо даврӣ мебошанд, яъне барои ҳар як $k \in \mathbb{Z}$ баробарӣ иҷро мешавад:

$$\sin(x + 2\pi k) = \sin x$$

$$\cos(x + 2\pi k) = \cos x$$

$$\operatorname{tg}(x + \pi k) = \operatorname{tg} x$$

$$\operatorname{ctg}(x + \pi k) = \operatorname{ctg} x$$

Ҳамин тариқ, даври асосии функцияҳои, $y = \sin x$ ва $y = \cos x$ ба $T_0 = 2\pi$ ва даври асосии функцияҳо ва ба $y = \operatorname{tg} x$ ва $y = \operatorname{ctg} x$ баробар аст $T_0 = \pi$.

Соҳаи муайяни ва маҷмӯи қиматҳои функцияҳои тригонометрӣ:

Функцияи $y = \cos x$ ҷуфт аст:

$$f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x).$$

Функцияҳои $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ тоқ мебошанд:

$$f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$$

$$f(-x) = \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x = -f(x)$$

$$f(-x) = \operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x = -f(x)$$

Барои $y = \sin x$ ва $y = \cos x$, $D(y) = (-\infty; +\infty)$, $E(y) = [-1; 1]$, -ро дорем;

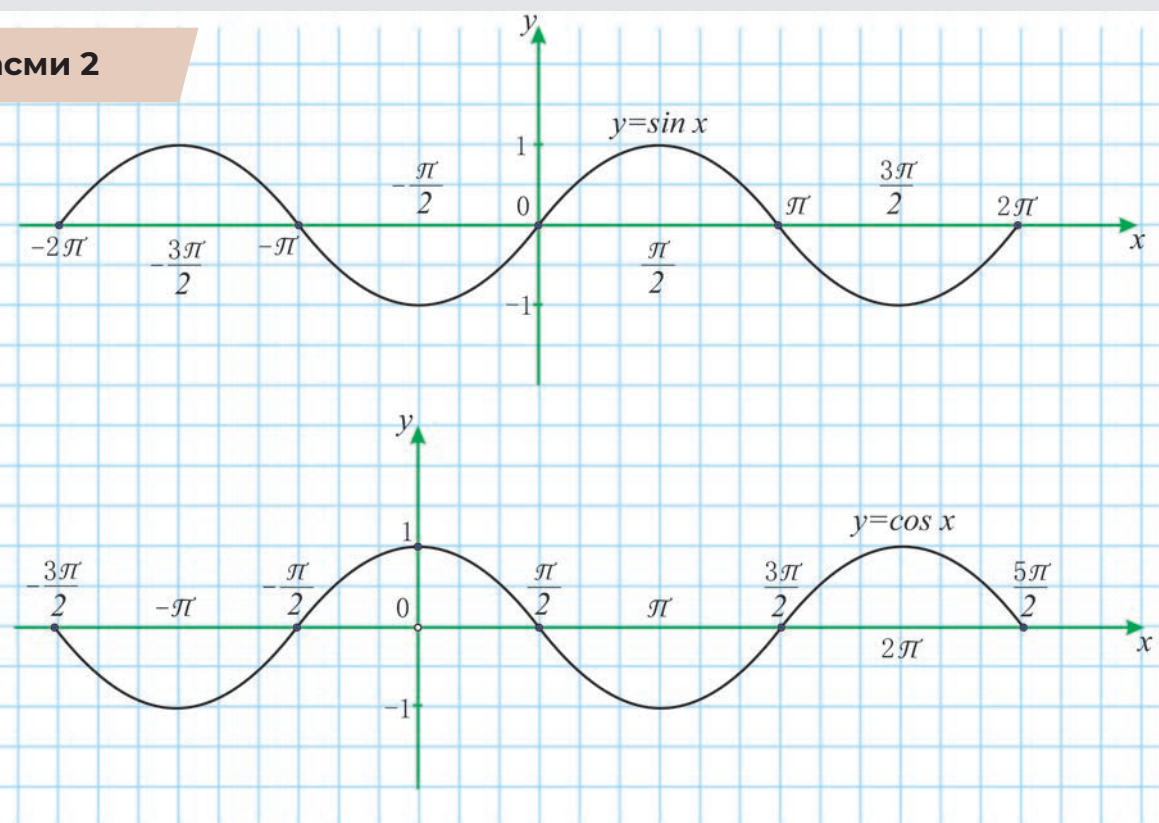
Барои $y = \operatorname{tg} x$, $D(y) = \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, $E(y) = (-\infty; +\infty)$, -ро дорем;

Барои $y = \operatorname{ctg} x$, $D(y) = (\pi k; \pi + \pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$, $E(y) = (-\infty; +\infty)$ -ро дорем;

Графикҳои функцияҳои тригонометрӣ дар расмҳои зерин нишон дода шудаанд.

Аз ин графикҳо хулосаҳои муҳими зерин мебароянд:

Расми 2



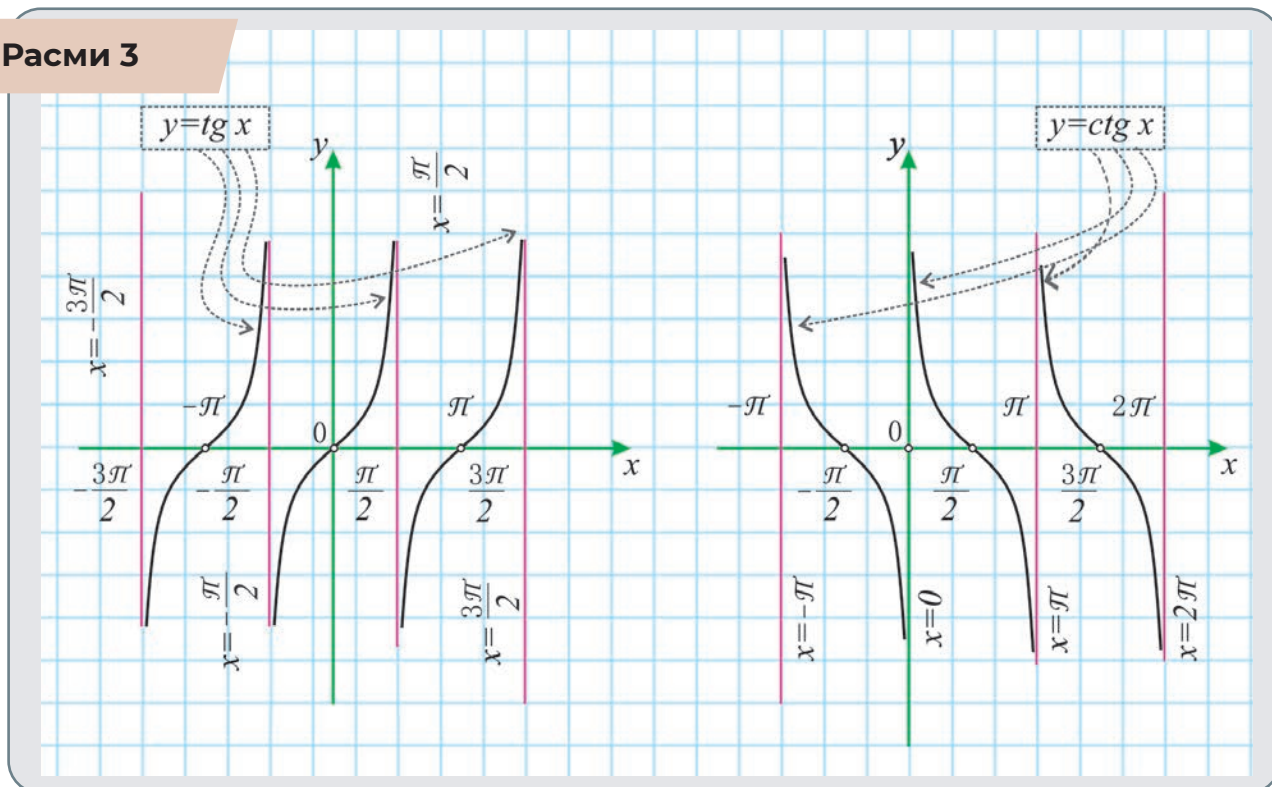
1) функцияи $y = \sin x$ дар фосилаи $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ меафзояд ва ҳар яке аз ин x фосила қимати

ягонро аз y порча $[-1; 1]$ таъин мекунад;

2) функцияи $y = \cos x$ дар фосилаи $[0; \pi]$ кам мешавад ва ба ҳар яки ин x фосила арзиши ягона y -ро аз порчаи $[-1; 1]$ таъин мекунад;

БОБИ 4. ФУНКЦИЯҲОИ ТРИГОНОМЕТРӢ

Расми 3



3) функцияи $y = tg x$ дар фосилаи $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ меафзояд ва ҳар як x аз ин фосила, ба як қимати

y аз фосилаи $(-\infty; +\infty)$ мувофиқат мекунад;

4) функцияи $y = ctg x$ дар фосилаи $(0; \pi)$ кам мешавад ва ҳар яке x аз ин фосила, ба қимати ягона y аз фосила $(-\infty; +\infty)$ мувофиқат мекунад.

Дар хотир доред, ки ҳангоми ҳалли мисолҳо барои ёфтани соҳаи муайянӣ дар баъзе мавридҳо нишон додани он нуқтаҳо кифоя аст, ки дар онҳо функция муайян карда нашудааст.

Мисоли 1. Соҳаи муайянии функцияро ёбед $y = 2tg(3x-1)$.

Ҳал. Азбаски функцияи $y = tg x$ дар нуқтаҳои $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$ муайян карда нашудааст,

функцияи $y = 2tg(3x-1)$ дар қиматҳои $3x-1 = \frac{\pi}{2} + \pi n$ аргумент муайян карда намешавад.

Ин ҳодисаро ба таври зайл ифода мекунам $x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{1}{3} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z$.

Ҷавоб: Функцияи $y = 2tg(3x-1)$ дар ҳама нуқтаҳои хати рақамӣ, ки ба шартҳои $x = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{3} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z$ итоат мекунам.

Мисоли 2. Маҷмӯи қиматҳои функцияро ёбед $y = 2 - \frac{1}{3}\cos(5x-4)$.

Ҳал. Ҳангоми ҳалли ин мисол мо нобаробарии дучанда зеринро истифода мебарем

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

барои ҳамаи қиматҳои эътибор дорад. Пас,

$$-1 \leq \cos(5x - 4) \leq 1$$

Ҳамаи аъзоҳоро ба $-\frac{1}{3}$ зарб мекунем

$$-\frac{1}{3} \leq -\frac{1}{3} \cos(5x - 4) \leq \frac{1}{3}$$

Ба ҳамаи шартҳои нобаробарии охирини дучанда 2 илова мекунем

$$2 - \frac{1}{3} \leq 2 - \frac{1}{3} \cos(5x - 4) \leq 2 + \frac{1}{3}$$

Баъди кам кардан мегирем

$$1\frac{2}{3} \leq y \leq 2\frac{1}{3}.$$

Ҷавоб: Маҷмӯи қиматҳои функсияи додашуда порчаи $\left[1\frac{2}{3}; 2\frac{1}{3}\right]$ ё ба таври дигар,

$$E(y) = \left[1\frac{2}{3}; 2\frac{1}{3}\right].$$

тавре, ки шумо медонед, агар давраи асосии (хурдтарин мусбат) функсияи $y = f(x)$

бошад, пас бузургии $\frac{T}{|k|}$ даври асосии функсияи $y = af(kx + b)$, ($k \neq 0$) аст.

Мисоли 3. Хурдтарин даври мусбати функсияро ёбед $y = 2 \sin\left(\frac{4}{3}x + 7\right)$.

Ҳал. Азбаски даври асосии функсияи $y = \sin x$ даври 2π аст, пас – даври асосии функсия $y = 2 \sin\left(\frac{4}{3}x + 7\right)$.

$$T = \frac{2\pi}{\frac{4}{3}} = \frac{3\pi}{2} \text{ мешавад.}$$

Ҷавоб: Даври асосии функсияи додашуда $\frac{3\pi}{2}$.

МИСОЛҲО

1. Соҳаи муайяни функсияро ёбед.

a) $y = \cos 3x$

b) $y = \sin \frac{2x-1}{5}$

c) $y = \sin \frac{1}{x+5}$

d) $y = \sin \sqrt{\frac{1-x}{x+3}}$

e) $y = \operatorname{tg} 3x$

f) $y = \operatorname{ctg} \frac{2x}{5}$

g) $y = \operatorname{tg} \frac{1}{x}$

2. Маҷмӯи қиматҳои функсияро ёбед.

a) $y = -1 + \cos x$

b) $y = -6 \sin 3x \cos 3x$

c) $y = 2 + \cos x$

d) $y = -3 \sin 2x + 2$

e) $y = 5 \operatorname{tg} 4x$

f) $y = 3 - 4 \cos 5x$

g) $y = -5 + \frac{1}{2} \cos x \sin x$

3. Ҷуфт ё тоқ будани функсияро муайян кунед.

a) $y = 2x \operatorname{tg} x$

b) $y = x^3 - \operatorname{tg}^3 x$

c) $y = \operatorname{tg} x \sin^2 x$

d) $y = \operatorname{tg} 2x + 2 \sin x$

БОБИ 4. ФУНКСИЯҲОИ ТРИГОНОМЕТРИ

е) $y = x^2 + \operatorname{tg}^2 x$; ф) $y = \operatorname{tg} 10 |x|$ г) $y = \frac{x^2 + \cos x}{2}$ ҳ) $y = \frac{\sin x + \cos x}{x+5}$

4. Графики функцияи $y = \sin x$ -ро истифода бурда, графики функцияҳои зеринро созед.

а) $y = -\sin x$ б) $y = 2\sin x$ в) $y = -0,5\sin x$ д) $y = |\sin x|$

е) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ ф) $y = |\sin|x||$ г) $y = 1 + \sin x$ ҳ) $y = \sin 2x$

5. Графики функцияи $y = \cos x$ -ро истифода бурда, графики функцияҳои зеринро созед.

а) $y = -\cos x$ б) $y = 0,5\cos x$ в) $y = \cos 2x$ д) $y = |\cos x|$

е) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ ф) $y = |\cos|x||$ г) $y = 2 - \cos x$ ҳ) $y = \cos 4x$

6. Графики функцияро созед.

а) $y = \operatorname{tg} 2x$ б) $y = \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$ в) $y = 2\operatorname{tg} x$ д) $y = \frac{1}{3}\operatorname{ctg} x$

7. Чуфт ё тоқ будани функцияро муайян кунед.

а) $y = \frac{\cos 2x - \sin^2 x}{x^2}$ б) $y = \operatorname{ctg} 3x + 5\sin x$ в) $y = \sin 5x$
 д) $y = 2\sin^2 x$ е) $y = \sin^2 x + \sin x$ ф) $y = 5\sin^3 x + 2\sin x$

8. Бигзор функцияи $f(x)$ дар фосилаи $(-\infty; \infty)$ муайян карда шуда бошад.

- а) Нишод диҳед, ки функцияи $f(x) + f(-x)$ — чуфт аст;
 б) Нишод диҳед, ки функцияи $f(x) - f(-x)$ — тоқ аст.

9. Хурдтарин даври мусбати функцияро ёбед.

а) $f(x) = \cos(3x+1)$ б) $f(x) = \sin\left(\frac{x}{4} - 3\right)$ в) $f(x) = \operatorname{tg}(2x+1)$
 д) $f(x) = \sin 2\pi x$ е) $f(x) = \cos \sqrt{3x}$ ф) $f(x) = \operatorname{tg}(4\pi x - 3)$

10. Хурдтарин давраи мусбати функцияи $f(x)$ -ро ёбед.:

а) $f(x) = \sin \frac{3x}{2} + \operatorname{tg} 7x$ б) $f(x) = \cos x + 2\sin\left(\frac{3x}{5} + \frac{\pi}{6}\right)$
 в) $f(x) = \operatorname{ctg}(x-1) - 3\sin 3x$ д) $f(x) = \sin 3x + \cos \frac{3x}{4} + \frac{1}{2}\operatorname{tg} \frac{9x}{5}$

11. Нишод диҳед, ки $T = -5\pi$ даври функцияи $f(x) = \sin 6x$ мебошад.

12. Нишод диҳед, ки $T = \pi$ даври функцияи $f(x) = \sqrt{\sin 2x + 1}$ мебошад.

13. Дар кадоме аз функцияҳои зерин давраи мусбати хурдтарин ба π баробар аст?

а) $y = \sin x$ б) $y = \cos x$ в) $y = \operatorname{tg} x$ д) $y = \operatorname{ctg} x$

14. Графики функцияро созед.

а) $y = |\sin x|$ б) $y = |\cos x|$ в) $y = |\operatorname{tg} x|$ д) $y = |\operatorname{ctg} x|$

ФУНКЦИЯҲОИ ТРИГОНОМЕТРИИ БАРЪАКС



Функцияҳои тригонометрии баръакс

Дар ҳаёти ҳаррӯза ҳолатҳое мушоҳида мешаванд, ки биноҳо, пулҳо, мошинҳо, нерӯгоҳҳо, ҳавопаймоҳо ва дигар дастгоҳҳоро вайрон мекунанд, ки ҳамчун як падидаи резонанс тавсиф карда мешаванд. Ҳодисаи резонансӣ дар натиҷаи синхронизатсияи мутақобилаи чараёнҳои даврӣ мушоҳида мешавад. Барои пешгирии ин гуна ҳодисаҳо доништан лозим аст, ки дар кадом қиматҳои аргумент функцияҳои тригонометрӣ қиматҳои пешакӣ муайяншударо мегиранд, яъне функцияҳои тригонометрии баръаксро доништан лозим аст.

Ҳангоми омӯзиши функцияҳои тригонометрии баръакс шумо бояд донед:

- 1) даврии функцияҳои тригонометрӣ ва даврҳои асосии онҳо;
- 2) афзоиши функцияи $y = \sin x$ дар $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ ва он функцияи як ба як байни порчаҳои ва $[-1; 1]$ аст;
- 3) камшавии функцияи $y = \cos x$ дар $[0; \pi]$ ва он функцияи як ба як байни порчаҳои $[0; \pi]$ ва $[-1; 1]$ аст.
- 4) афзоиши функцияи $y = \tan x$ ба $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ ва он функцияи як ба як байни порчаҳои $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ ва $(-\infty; +\infty)$ аст;
- 5) камшавии функцияи $y = \cot x$ ба $(0; \pi)$ он функцияи як ба як байни фосилаҳои $(0; \pi)$ ва $(-\infty; +\infty)$ аст.



Функцияи $y = \arcsin x$ хосият ва графיקи он

Муодилаи $y = \sin x$

нисбат ба дар порчаи $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ ба таври ягона ҳал карда мешавад, ва ин ҳал дар намуди $x = \arcsin y$ навишта мешавад. Ин баробарӣ функцияи $y = \arcsin x$ - рксинус $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ -ро муайян

мекунад (расми 1), ки ҳар як элементи $y \in [-1; 1]$ -ро бо як элементи $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ ро мувофиқат мекунад. Дар муайяние, ки бо ин тарз муайян шудааст, агар аргументро бо, ва функцияро бо, он гоҳ метавонем онро дар шакли зерин аз нав нависем.

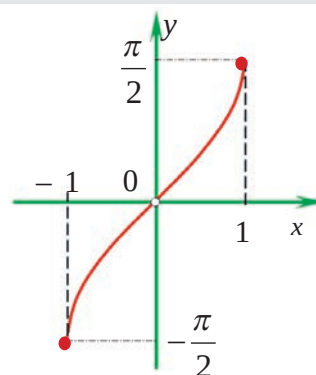
$$y = \arcsin x$$

Функцияи $y = \arcsin x$ функцияи баръакс ба функцияи $y = \sin x$ мебошад:

$$\sin(\arcsin x) = x, \quad x \in [-1; 1]$$

$$\arcsin(\sin x) = x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

Расми 1



Графики функцияи $y = \arcsin x$

БОБИ 4. ФУНКСИЯҲОИ ТРИГОНОМЕТРӢ



Хосияти функцияи $y = \arcsin x$

- $D(y) = [-1; 1]$;
- $E(y) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;
- $y = \arcsin x$ – функцияи афзуншаванда;
- Қимати калонтарини функцияи $y = \arcsin x$ барбар аст ба $\frac{\pi}{2}$ ва қимати хурдтарини он ба $-\frac{\pi}{2}$ баробар аст;
- Графики функцияи $y = \arcsin x$ аз ибтидои координата мегузарад;
- $y = \arcsin x$ – функцияи тоқ, яъне $\arcsin(-x) = -\arcsin x$;
- Функцияи $y = \arcsin x$ даврӣ нест.

Мисоли 1. Қимати ифодаро ёбед: $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ҳал. Бигзор $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = x$ бошад. Дар ин маврид ин вазифаро ба таври дигар гузоштан мумкин аст: аз фосилаи $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ ки баробарии $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ -ро қонеъ мекунад, қимати x -ро ёбед. Маълум аст, ки баробарии $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ҳангоми $x = \frac{\pi}{3}$ ҷой дорад.

Ҷавоб: $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$.

Дар ҷадвали зер баъзе қиматҳои ифодаи $\arcsin x$ нишон дода шудааст.

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$



Функцияи $y = \arccos x$ хосият ва графики он

$$y = \cos x$$

нисбат ба дар порчаи $[0; \pi]$ ба таври ягона ҳал карда мешавад ва ин ҳал дар намуди $x = \arccos y$ навишта мешавад.

Бо ин баробарӣ функцияи $\arccos$ – арккосинус (расми 2) муайян карда мешавад (расми 2), ки ба ҳар як элементи $y \in [-1; 1]$ як элементи ягонаи $x \in [0; \pi]$ мувофиқат мекунад. Дар ифодае, ки бо ин тарз муайян карда мешавад, агар аргументро бо x , ва функцияро бо y нишон диҳем, он гоҳ онро метавонем онро дар шакли зерин аз нав нависем.

$$y = \arccos x$$

Функцияи $y = \arccos x$ функцияи баръакси $y = \cos x$ мебошад:

$$\cos(\arccos x) = x, \quad x \in [-1; 1]$$

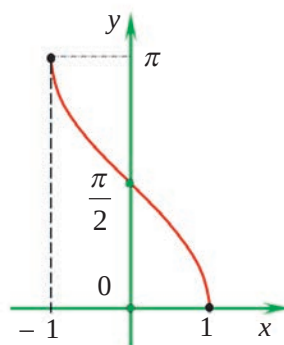
$$\arccos(\cos x) = x, \quad x \in [0; \pi]$$



Хосияти функцияи $y = \arccos x$

- $D(y) = [-1; 1]$;
- $E(y) = [0; \pi]$;
- $y = \arccos x$ – функция камшаванда;
- Қимати калонтарини $y = \arccos x$ ба π баробар аст ва қимати хурдтарини он ба 0 баробар аст;
- Графики функцияи $y = \arccos x$ тири Ox -ро дар нуқтаи $(1; 0)$ бурида мегузарад бо абсисса, $x=1$ ва тири Oy -ро дар нуқтаи $(0; \frac{\pi}{2})$ бо ординатаи $y = \frac{\pi}{2}$.
- Функцияи $y = \arccos x$ – на тоқ, на ҷуфт аст. Бо вучуди ин, дар ин ҷо баробарии $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$ дурус аст;
- Функцияи $y = \arccos x$ даврӣ нест (соҳаи муайяниаш даврӣ нест).

Расми 2



Графики функцияи $y = \arccos x$

Мисоли 2. Қимати ифодаи $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$ -ро ёбед.

Ҳал. Бигузор $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = x$ бошад. Дар ин ҳолат, ин ифода метавонад ба таври дигар гузошта шавад: қимати x -ро аз фосилаи $[0; \pi]$ ки баробарии $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ -ро қаноат мекунад ёбед. Маълум аст, ки баробарии $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ҳангоми $x = \frac{\pi}{4}$ ҷой дорад.

Ҷавоб: $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$

Дар ҷадвали зерин қимати ифодаи $\arccos$ оварда шудааст.

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arccos x$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0



Функцияи $y = \arctg x$ хосияти ва графики он

Муодилаи $y = \arctg x$ нисбат ба x дар фосилаи $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ ягона ҳал карда мешавад ва ин ҳал чунин навишта мешавад. $x = \arctg y$

Бо ин баробарӣ функцияи $\arctg$ арктангенс муайян карда шудааст (расми3), гузоштани ҳар як элементи $R = (-\infty; +\infty)$ мувофиқи элементи ягонаи $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$. Дар муайянкуние, ки бо

ин тарз муайян шудааст, агар аргументро бо x ва функцияро бо y нишон диҳем, он гоҳ онро дар намуди зерин аз нав менависем.

БОБИ 4. ФУНКСИЯҲОИ ТРИГОНОМЕТРӢ

$$y = \arctg x$$

Функцияи $y = \arctg x$ баръакси функцияи $y = \tg x$ мебошад:

$$\tg(\arctg x) = x, \quad x \in (-\infty; +\infty)$$

$$\arctg(\tg x) = x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

Хосияти функцияи $y = \arctg x$

- $D(y) = (-\infty; +\infty)$;
- $E(y) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;
- $y = \arctg x$ – функцияи афзуншаванда аст;

• функцияи $y = \arctg x$ қиматҳои калонтари ва хурдтарин надорад;

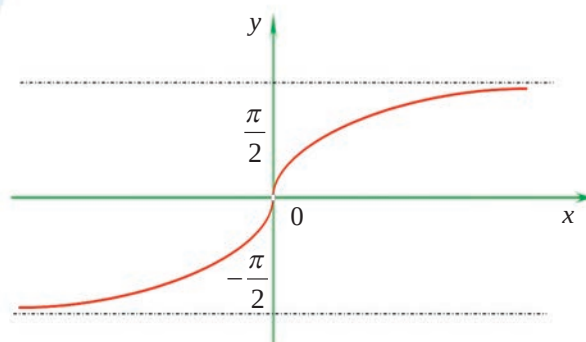
• график функцияи $y = \arctg x$ аз ибтидои координата мегузарад;

- функцияи $y = \arctg x$ – тоқ аст, яъне

$$\arctg(-x) = -\arctg x;$$

- функцияи $y = \arctg x$ даврий нест.

Расми 3



Графики функцияи $y = \arctg x$

Мисоли 3. Қимати ифодаро ёбед: $\arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Ҳал. Бигуздор, $\arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = x$ дода шуда бошад. Қимати x , ки баробарии $\tg x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ -ро қаноат мекунад ёфта шавад.

$$\text{Маълум аст, ки } \tg\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}.$$

Ҷавоб: $\arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$

Дар ҷадвал баъзе қиматҳои ифодаи $\arctg x$ оварда шудааст.

x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\arctg x$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

◆ Функцияи $y = \text{arcctg}x$ хосият ва графиги он

Муодилаи $y = \text{ctg}x$ нисбат ба x дар фосилаи $(0; \pi)$ таври ягона ҳал карда мешавад ва ин ҳал дар намуди

$$x = \text{arcctg}y \text{ навишта мешавад.}$$

Бо ин баробарӣ функцияи arcctg – арккотангенс муайян карда шудааст (расми 4), ба ҳар як $y \in (-\infty; +\infty)$ гузоштаи элементи мувофиқи $x \in (0; \pi)$.

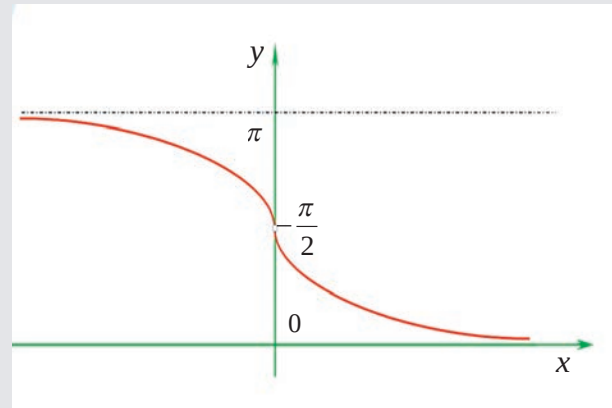
Дар ифодае, ки бо ин тарз муайян шудааст, агар аргументро бо x ва функцияро бо y нишон диҳем он гоҳ метавонем дар намуди зерин нависем

$$y = \text{arcctg}x$$

Функцияи $y = \text{arcctg}x$ баръакси функцияи $y = \text{ctg}x$ мебошад:

$$\text{ctg}(\text{arcctg}x) = x, \quad x \in (-\infty; +\infty), \quad \text{arcctg}(\text{ctg}x) = x, \quad x \in (0; \pi).$$

Расми 4



Графиги функцияи $y = \text{arcctg}x$

◆ Хосияти функцияи $y = \text{arcctg}x$

- $D(y) = (-\infty; +\infty)$;
- $E(y) = (0; \pi)$;
- $y = \text{arcctg}x$ – функцияи камшаванда аст;
- функцияи $y = \text{arcctg}x$ ба қимати калонтарин ва хурдтарин соҳиб нест;
- график функцияи $y = \text{arcctg}x$ тири Ox -ро намебурад, тири Oy -ро дар нуқтаи $(0; \frac{\pi}{2})$ бо ординатаи $y = \frac{\pi}{2}$ мебурад;
- $y = \text{arcctg}x$ – на тоқ асту на ҷуфт. Аммо бо вучуди ин ҷой дорад $\text{arcctg}(-x) = \pi - \text{arcctg}x$
- функцияи $y = \text{arcctg}x$ даврӣ нест.

Мисоли 4. Қимати ифодаро ёбед: $\text{arcctg} \sqrt{3}$.

Ҳал. Бигузор $\text{arcctg} \sqrt{3} = x$ дода шуда бошад. Пас, талаб карда мешавад, ки қимати x -ро, ки баробарии $\text{ctg}x = \sqrt{3}$ -ро қаноат мекунад ёфта шавад. Маълум аст, ки $\text{ctg} \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$

Ҷавоб: $\text{arcctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$.

Дар ҷадвал қимати ифодаи $\text{arcctg} \alpha$ оварда шудааст.

x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\text{arcctg}x$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

БОБИ 4. ФУНКСИЯҲОИ ТРИГОНОМЕТРӢ

МИСОЛҲО

1. Оё ифодаҳои зерин маъно доранд?

a) $\arcsin(\sqrt{3}-1)$

b) $\arcsin(4-\sqrt{5})$

c) $\arccos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

d) $\arccos(\sqrt{2})$

e) $\arctg(\sqrt{2})$

f) $\arctg(-100)$

2. Ҳисоб кунед:

a) $\arcsin\frac{1}{2}$

b) $\arcsin(-1)$

c) $\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}$

d) $\arcsin 0$

e) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$

f) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

g) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

h) $\arccos\frac{1}{2}$

i) $\arccos 0$

j) $\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}$

k) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

l) $\arctg 0$

m) $\arctg(-1)$

n) $\arctg\frac{1}{\sqrt{3}}$

o) $\arctg\sqrt{3}$

p) $\arctg 1$

q) $\arctg(-\sqrt{3})$

r) $\arctg\sqrt{3}$

s) $\arctg(-1)$

t) $\arctg\frac{1}{\sqrt{3}}$

3. Ҳисоб кунед.

a) $\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}-1}-\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}\right)$

b) $\arccos\left(\frac{10+5\sqrt{5}}{\frac{5}{2}(3+\sqrt{5})}-\frac{\frac{5}{2}(3+\sqrt{5})}{10+5\sqrt{5}}\right)$

c) $\arctg\left(\frac{1-2(2+\sqrt{3})}{3+\sqrt{3}}-\frac{1}{1+\sqrt{3}}\right)$

d) $\arctg\left(\frac{1+\sqrt{\frac{7}{3}}-\frac{2}{\sqrt{3}}}{1-\sqrt{\frac{7}{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}}-\frac{1-\sqrt{\frac{7}{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\sqrt{\frac{7}{3}}-\frac{2}{\sqrt{3}}}\right)$

4. Ҳисоб кунед.

a) $\cos(\arctg 2)$

b) $\sin(\arctg 7)$

c) $\cos\left(\arcsin\frac{1}{4}\right)$

d) $\ctg(\arctg 5)$

e) $\sin(\arctg 11)$

f) $\sin\left(\arccos\frac{1}{5}\right)$

g) $\cos(\arctg(-4))$

h) $\ctg(\arcsin(-0,9))$

i) $\sin\left(\arccos\left(-\frac{4}{7}\right)\right)$

j) $\ctg(\arctg(-15))$

k) $\tg(\arccos(-0,3))$

l) $\ctg\left(\arccos\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right)$

5. Ҳисоб кунед.

a) $\cos(2\arcsin 0,2)$

b) $\sin\left(2\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$

c) $\sin(2\arctg\sqrt{26})$

d) $\tg(2\arccos 0,6)$

e) $\tg\left(2\arcsin\frac{7}{9}\right)$

f) $\cos(2\arccos(-0,8))$

g) $\tg(2\arctg(-3))$

h) $\sin(2\arcsin(-0,1))$

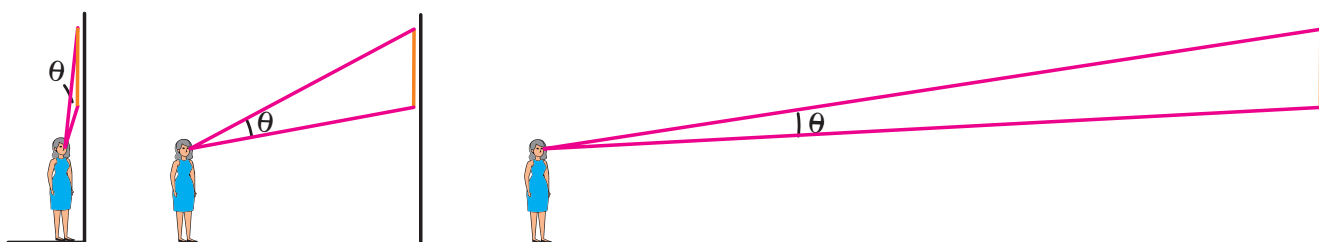
i) $\tg(2\arctg 20)$

КОРИ ЛОИҲАВЇ

ДАР КИНО КУҶО БОЯД НИШАСТ?

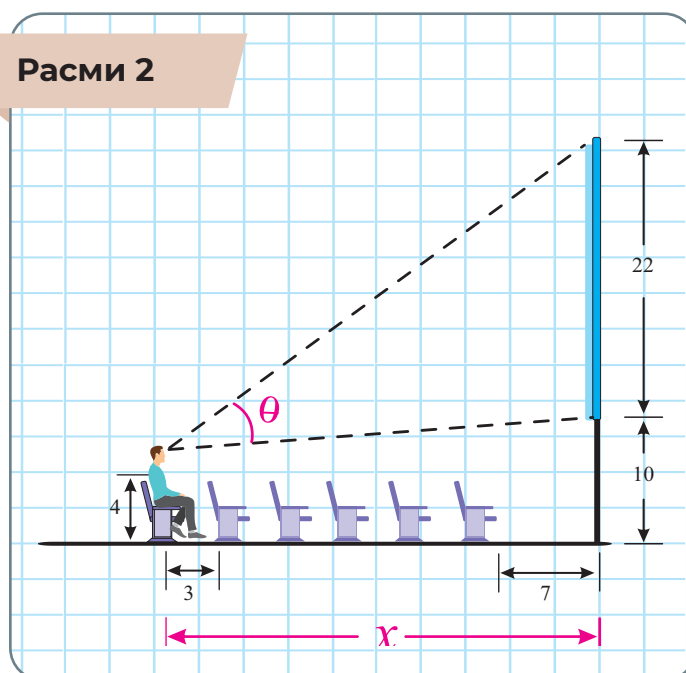
Ҳама медонанд, ки андозаи кунчи объект аз дурии он аз тамошобин вобаста аст. Чӣ қадаре, ки объект дуртар бошад, андозаи кунчи он ҳамон қадар хурдтар аст. Андозаи кунҷи аз рӯи кунчи нигоҳ муайян карда мешавад, ки дар он объект ба тамошобин дар маҷмӯъ намоён аст.

Агар шумо ба тасвир нигоҳ карда истода бошед, шумо бояд чӣ қадар дур бошед, то манзараи беҳтаринро бинед? Агар тасвир аз сатҳи чашм овезон бошад, кунҷи кашишшавӣ ба таври равшан хурд аст, агар шумо аз ҳад наздик ё хеле дур бошед, тавре ки дар расмҳои 1 ва 2 нишон дода шудааст. Ҳамин чиз ҳангоми интихоби ҷой дар кинотеатр рӯй медиҳад.



Мисоли 1. Экран дар кинотеатр 22 фут (1 фут = 0,3048 метр) ва 10 фут аз фарш баланд аст. Қатори якуми курсиҳо аз экран 7 фут ва қаторҳо дар масофаи 3 фут ҷойгиранд. Шумо қарор медиҳед, ки дар як саф бо ҳадди намоён нишинед, яъне дар он ҷо кунҷи экран θ аз қатори шумо ҳадди аксар аст. Фарз мекунем, ки чашмони шумо дар баландии 4 фут аз фарш ҷойгиранд ва шумо дар масофаи x аз экран нишастаед (расми 2).

Расми 2



БОБИ 4. ФУНКСИЯҲОИ ТРИГОНОМЕТРЎ

Супориши 1. Исбот кунед, ки баробарии $\theta = \arctg 28x - \arctg 6x$ дуруст аст.

Супориши 2. Барои ба даст овардани баробарии:

$$\theta = \arctg\left(\frac{22x}{x^2 + 168}\right)$$

формулаи фарқияти тангенсро истифода баред.

Супориши 3. θ -ро ҳамчун функцияи x ба назар гирифта, графики онро созед. Дар ин ҳолат истифодаи иловаи **Geogebra** тавсия дода мешавад. Кадом қимати x θ -ро ба ҳадди аксар мерасонад? Дар кадом қатор нишастан беҳтар аст? Кунчи тамошо дар ин қатор чӣ гуна аст?

Супориши 4. Фарз мекунем, ки аз қатори якум сар карда, фарши толор ба кунчи α ба уфуқ моил шуда, масофаи байни қаторҳо 3, дарозии нишебиро тавре, ки дар расми 3 нишон дода шудааст, ташкил медиҳад ва баробар аст.

Супориши 5. Барои ба даст овардани

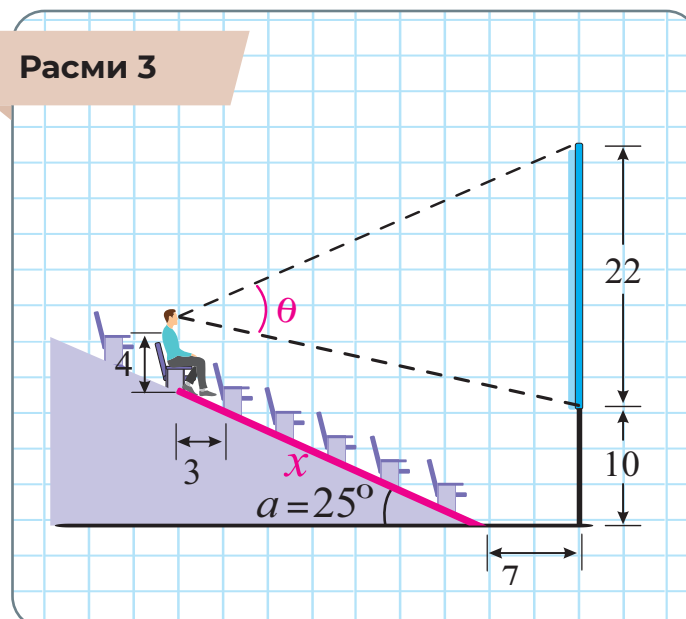
$$\theta = \arccos\left(\frac{a^2 + b^2 - 484}{2ab}\right).$$

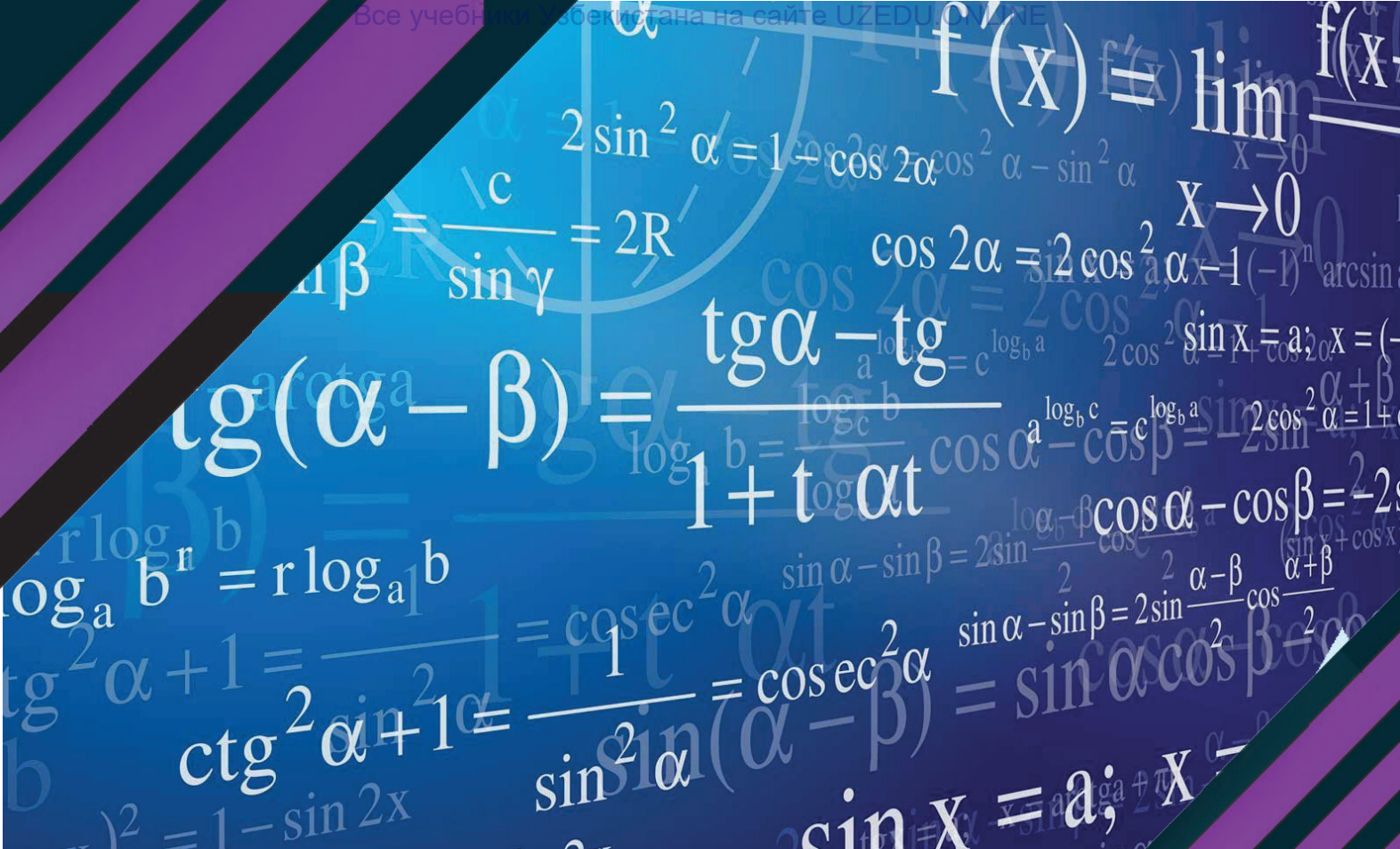
Дар ин ҷо

$$a^2 = (7 + x \cos \alpha)^2 + (28 - x \sin \alpha)^2$$

$$\text{ва } b^2 = (7 + x \cos \alpha)^2 + (x \sin \alpha - 6)^2$$

Супориши 6. Бо истифода аз иловаи графикии **Geogebra** нақшаи θ нисбат ба x ва қимати θ -ро, ки ба x ҳадди аксар мерасонад, ёбед. Дар кадом қатор нишастан беҳтар аст? Кунчи тамошо дар ин қатор чӣ гуна аст?





БОБИ 5. МУОДИЛА ВА НОБАРОВАРҲОИ ТРИГОНОМЕТРӢ

➤ МУОДИЛАҲОИ ТРИГОНОМЕТРӢ

➤ УСУЛҲОИ ҲАЛЛИ БАЪЗЕ МУДИЛАҲОИ ТРИГОНОМЕТРӢ

➤ НОВАРОБАРИҲОИ ТРИГОНОМЕТРӢ

МУОДИЛАҲОИ ТРИГОНОМЕТРӢ

Соддатарин муодилаҳои тригонометрӣ

Донишҷӯи ҳамагонро, ки бо функсияҳои даврӣ тавсиф мешаванд, кай кадом қиматҳоро мегиранд, муҳим аст. Барои ин оддитарин муодилаҳои тригонометрии намуди

$$\sin x = a, \cos x = a, \operatorname{tg} x = a, \operatorname{ctg} x = a$$

-ро бо функсияҳои даврӣ ҳал карда тавонистан лозим аст.

Барои омӯхтани тарзи ҳалли муодилаҳои тригонометрии соддатарин, бояд шартҳои зеринро донем:

- 1) мафҳуми муодила;
- 2) мафҳуми решаи муодила; ҳал – маҷмӯи решаҳои муодила;
- 3) решаҳои беохири функсияҳои тригонометрӣ, зеро ки – онҳо даврианд;
- 4) бо истифода аз формулаҳои кӯтоҳ маҷмӯи беохири решаҳои ёфтшударо ҷамъбаст ва навишта тавонед (дар онҳо барои ҳар як адади бутуни k ифодаи $n = 2k$ адади ҷуфт ва ифодаи $n = 2k + 1$ – адади тоқро ифода мекунад).

Мисоли 1. Муодиларо ҳал кунед $\sin x = \frac{1}{2}$

Ҳал. Маълум аст, ки $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ ғайр аз ин баробарии $\sin x = \frac{1}{2}$ барои қимати $\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$ низ иҷро карда мешавад (расми 1). Азбаски синус функсияи даврии дорои даври асосии 2π аст, пас барои ҳар як адади бутуни k дар

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$$

ва
$$x = \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) + 2\pi n = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$$

$\sin x = \frac{1}{2}$ иҷро карда мешавад (расми 2). Ин ду

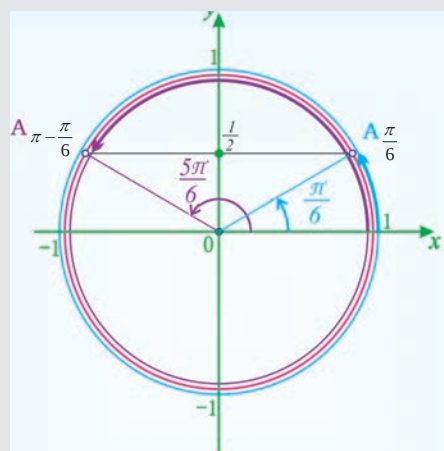
қиматро ба таври зерин ҷамъбаст кардан мумкин аст:

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

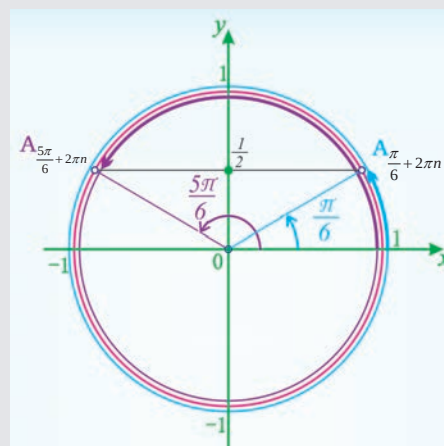
Дар ҳақиқат, агар n ҷуфт бошад, яъне $n = 2k$, он гоҳ мо $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ -ро мегишем; агар тоқ бошад, яъне $n = 2k + 1$ пас, $x = -\frac{\pi}{6} + \pi(2k + 1)$ мешавад. Ҳамин тавр мо ҳалли пурраро гирифтём

Ҷавоб: $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$

Расми 1



Расми 2





Муодилаи намуди $\sin x = a$

$a > 1$ ё ки $a < -1$ бошад, пас муодилаи $\sin x = a$ реша надорад. Аз ин рӯ, дар чунин мавридҳо мегӯянд, ки ҳалли муодила $\sin x = a$ аз маҷмӯи ҳоли иборат аст, $\emptyset$. Агар $-1 \leq a \leq 1$, $\sin x = a$. Агар, он гоҳ ҳалли муодилаи $\sin x = a$ аз ифодаи намуди

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ҳолатҳои махсус

1) $\sin x = -1$ ҳал аз қиматҳои аргумент иборат аст

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

2) $\sin x = 0$ қиматҳо

$$x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

ҳалли худро ташкил медиҳанд.

3) $\sin x = 1$ маҷмӯи қиматҳои аргумент

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

ҳалли ин муодила аст.



Муодилаи намуди $\cos x = a$

Муодилаи намуди $\cos x = a$

Агар $a > 1$ ё $a < -1$ бошад, ба муодилаи $\cos x = a$ реша надорад. Дар ин ҳолат мегӯянд, ки ҳалли муодилаи $\cos x = a$ маҷмӯи холист $\emptyset$.

Агар $-1 \leq a \leq 1$ пас ҳалли муодилаи $\cos x = a$ аз қиматҳои намуди

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \quad \text{иборат аст:}$$

Ҳолатҳои махсус

1) $\cos x = -1$ ҳалли муодила аз қиматҳои номаълум иборат аст:

$$x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

2) $\cos x = 0$ ҳал аз маҷмӯи қиматҳои номаълум иборат аст:

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

3) $\cos x = 1$ ҳал аз маҷмӯи қиматҳои номаълум иборат аст:

$$x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Муодилаи намуди $\operatorname{tg} x = a$

Барои ҳар як адади бутуни n қимати

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n$$

тағйирёбандаи x решаи муодила аст. Дар ин ҳолат муодила намуди

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

мегирад.

БОБИ 5. МУОДИЛА ВА НОБАРОВАРҲОИ ТРИГОНОМЕТРӢ

Мисоли 2. Муодиларо ҳал кунед $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ҳал. Маълум аст, ки $\cos \frac{\pi}{4} = \cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (расми 3). Азбаски косинус – функцияи даврий

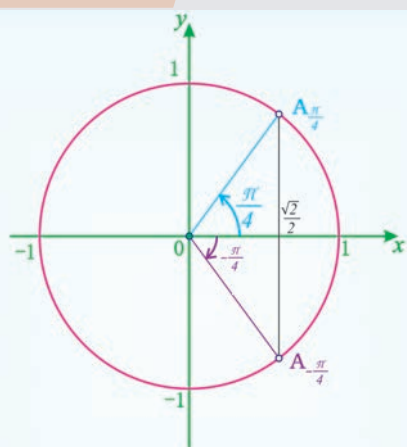
бо даври аст, пас баробарии $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ичро карда мешавад (расми 4) барои ҳамаи қиматҳои

аргументи намуди $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$ ё ки $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$

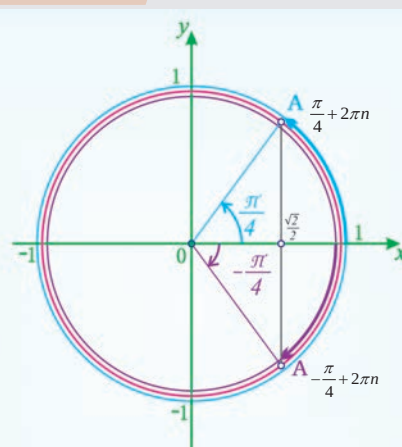
Ин ду муодиларо умумӣ карда, ҳалли муодиларо ба даст меорем.

Ҷавоб: $x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Расми 3



Расми 4



◆ Муодилаи намуди $\operatorname{ctg} x = a$

Барои ҳар як адади бутуни n қимати

$$x = \operatorname{arcc} \operatorname{tg} a + \pi n$$

тағйирёбандаи x решаи муодила аст. Дар ин ҳолат муодила намуди

$$x = \operatorname{arcc} \operatorname{tg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

мегирад.

◆ Ҳолатҳои махсус

1) $\operatorname{ctg} x = -1$. Ҳал аз қиматҳои тағйирёбанда иборат аст $x = \frac{3\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

2) $\operatorname{ctg} x = 0$. Ҳал аз қиматҳои номаълум иборат аст $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

3) $\operatorname{ctg} x = 1$. Ҳал аз маҷмӯи қиматҳои номаълум иборат аст $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Мисоли 3. Муодиларо ҳал кунед $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{7}\right) = -1$

Ҳал.

$$\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{7}\right) = -1, \quad x + \frac{\pi}{7} = \operatorname{arctg}(-1) + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \quad x + \frac{\pi}{7} = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \quad x = -\frac{11\pi}{28} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Ҷавоб: $x = -\frac{11\pi}{28} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$

Мисоли 4. Муодиларо ҳал кунед $\operatorname{ctg} \frac{3x}{2} = \sqrt{3}.$

Ҳал.

$$\operatorname{ctg} \frac{3x}{2} = \sqrt{3}, \quad \frac{3x}{2} = \operatorname{arccotg} \sqrt{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \quad \frac{3x}{2} = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \quad 3x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$$

$$x = \frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Ҷавоб: $x = \frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}\pi k, k \in \mathbb{Z}.$

МИСОЛҲО

1. Муодиларо ҳал кунед.

a) $\sin 2x = 1$

b) $\sin \frac{x}{3} = -1$

c) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = 0$

d) $2\sin 4x = \sqrt{5}$

e) $\sin(4x - 1) = -\frac{\pi}{3}$

f) $\sin x = \frac{1}{2}$

g) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

h) $\sin 4x = 1$

i) $\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

j) $\sin\left(x + \frac{\pi}{7}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

k) $\sin \frac{2x}{3} = -1$

l) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{5}\right) = 0$

m) $\sin(3x + 1) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

n) $\sin(-x) = -\frac{1}{2}$

o) $\sin\left(\frac{3\pi}{4} - x\right) = 1$

2. Муодиларо ҳал кунед.

a) $\cos \frac{2x}{5} = 1$

b) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{7}\right) = -1$

c) $\cos 8x = 0$

d) $\cos 3x = 1, 2$

e) $2\cos(x - 1) = \frac{11}{2}$

f) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

g) $\cos x = -\frac{1}{2}$

h) $\cos x = -1$

i) $\cos \frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

БОБИ 5. МУОДИЛА ВА НОБАРОБАРҲОИ ТРИГОНОМЕТРӢ

j) $\cos\left(x - \frac{\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}$

k) $\cos \frac{3x}{4} = 0$

l) $\cos 4x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

m) $\sqrt{3} + 2\cos \frac{\pi x}{9} = 0$

n) $1 - 2\cos \frac{3\pi x}{4} = 0$

o) $\cos(\pi(x-3)) = 1$

p) $\sin^2 \frac{2}{3}x = \frac{3}{4}$

q) $\cos^2 \frac{3}{2}x = \frac{1}{4}$

r) $2\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3} = 0$

3. Муодиларо ҳал кунед.

a) $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

b) $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

c) $\operatorname{tg} x = -1$

d) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$

e) $\operatorname{tg} \frac{2x}{5} = -\sqrt{3}$

f) $\operatorname{tg}\left(x + \frac{7\pi}{3}\right) = 1$

g) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}(x-1)\right) = 0$

h) $1 - \sqrt{3}\operatorname{tg} \frac{2\pi x}{7} = 0$

i) $\operatorname{tg} 9x = \operatorname{tg} 45^\circ$

j) $\operatorname{tg} 6x = \operatorname{tg} \frac{2\pi}{3}$

k) $3\operatorname{tg}\left(x + \frac{5\pi}{36}\right) + \sqrt{3} = 0$

4. Муодиларо ҳал кунед.

a) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$

b) $\operatorname{ctg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

c) $\operatorname{ctg} 4x = \sin 0^\circ$

d) $\operatorname{ctg}(\pi(2x+3)) = \cos 0^\circ$

e) $\sqrt{3} + \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{5} = 0$

f) $\operatorname{ctg} 7x = -\sqrt{3}$

g) $\operatorname{ctg} \frac{3x}{2} = 1$

h) $\operatorname{ctg} 3x = \sqrt{3}$

i) $\operatorname{ctg}\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = 0$

5. Решаҳои муодиларо дар порчаи додашуда ёбед.

a) $\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}, [0; 2\pi]$

b) $\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}, [-\pi; \pi]$

c) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}, [0; \pi]$

d) $\operatorname{ctg} 4x = -1, [-3\pi; 3\pi]$

6. Барои кадом қиматҳои a баробарии $\operatorname{tg} x = \frac{a+1}{a-1}$ дуруст аст?

7. Барои кадом қиматҳои a баробарии $\sin x = a + \frac{1}{a}$ дуруст аст?

8. Барои кадом қиматҳои a баробарии $5\cos(2x-3) = a - \frac{6}{a}$ т иҷро мешавад?

9. Барои кадом қиматҳои a баробарии $5\sin(x-7) = a - \frac{4}{a}$ иҷро мешавад?

УСУЛИ ҲАЛЛИ БАЪЗЕ МУДИЛАҲОИ ТРИГОНОМЕТРӢ



Муодилаҳои ба муодилаи квадратӣ овардашуда

Мисоли 1. Муодиларо ҳал кунед: $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$.

Ҳал.

Ин муодилаи квадратӣ барои $\sin x$. Агар $\sin x = t$ -ро ишора кунем, он гоҳ $2t^2 - 3t + 1 = 0$ -ро ба даст меорем. Решаҳои он $t_1 = 1$, $t_2 = \frac{1}{2}$. Ин қиматҳоро иваз карда.

$$1) \sin x = 1, x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \quad 2) \sin x = \frac{1}{2}, x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ҷавоб: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Мисоли 2. Муодиларо ҳал кунед: $2\cos^2 x - 5\sin x + 1 = 0$.

Ҳал.

$\cos^2 x$ -ро ба $1 - \sin^2 x$ иваз карда, мо $2(1 - \sin^2 x) - 5\sin x + 1 = 0$ ёки $2\sin^2 x + 5\sin x - 3 = 0$ -ро ба даст меорем.

Ишоракунии $\sin x = y$ дохил карда, муодилаи квадратии $2y^2 + 5y - 3 = 0$ -ро мегирием. Решаҳои онро меёбем $y_1 = -3; y_2 = \frac{1}{2}$.

Ҳангоми $y = -3$ будан, муодилаи $\sin x = -3$ ҳал надорад, чунки $|-3| > 1$ аст.

Ҳангоми $\sin x = \frac{1}{2}$ будан, муодилаи $x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ ҳал дорад.

Ҷавоб: $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Мисоли 3. Муодиларо ҳал кунед: $\operatorname{tg} x - 2\operatorname{ctg} x + 1 = 0$.

Ҳал.

$\operatorname{tg} x - \frac{2}{\operatorname{tg} x} + 1 = 0$ иваз карда, $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 2 = 0$. $\operatorname{tg} x = t$ -ро ба даст меорем. Ҳамаи ифодаҳоро

ба, $t^2 + t - 2 = 0$

$t_1 = 1, t_2 = -2$

1) $\operatorname{tg} x = 1, x = \arctg 1 + \pi n, n \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

2) $\operatorname{tg} x = -2, x = -\arctg 2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Ҷавоб: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, x = -\arctg 2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

БОБИ 5. МУОДИЛА ВА НОБАРОБАРҲОИ ТРИГОНОМЕТРӢ

Мисоли 4. Муодиларо ҳал кунед: $3\sin^2 x + 5\sin x \cos x + 2\cos^2 x = 0$.

Ҳал

Муодиларо дар $\cos^2 x$ ба аъзоҳо тақсим карда, $3tg^2 x + 5tgx + 2 = 0$ -ро соҳиб мешавем.

$tgx = t$ -ро ишора карда, ба муодилаи квадратии $3t^2 + 5t + 2 = 0$ меоем. Решаҳои он $t_1 = \frac{-5-1}{6} = -1$, $t_2 = \frac{-5+1}{6} = -\frac{2}{3}$. Қиматҳои ёфта шударо дар ифода гузошта, меёбем, ки

$$1) tgx = -1, x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$$

$$2) tgx = -\frac{2}{3}, x = -\arctg \frac{2}{3} + \pi n, n \in Z$$

Ҷавоб: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, x = -\arctg \frac{2}{3} + \pi n, n \in Z$.



Муодилаи намуди $a \sin x + b \cos x = c$

Мисоли 5. Муодиларо ҳал кунед: $3\sin x - 2\cos x = 0$.

Ҳал

1) Ҳар ду қисми муодиларо ба $\cos x$ тақсим карда, муодилаи, $3tgx - 2 = 0$ -ро месозем. Муодилаи охирино ҳал мекунем.

$$2) 3tgx - 2 = 0, tgx = \frac{2}{3}, x = \arctg \frac{2}{3} + \pi n, n \in Z.$$

Шарҳ. Хангоми аъзо ба аъзо тақсим кардани муодилаи намуди $a \sin x + b \cos x = 0$ ба $\cos x$ (ё ба $\sin x$) муодилаи ба муодилаи додашуда баробарқувва ҳосил мешавад (зеро баробарии $\cos x = 0$ ва $\sin x = 0$ якҷоя ҳал карда намешаванд).

Ҷавоб: $x = \arctg \frac{2}{3} + \pi n, n \in Z$.

Мисоли 6. Муодиларо ҳал кунед: $2\sin x + \cos x - 2 = 0$.

Ҳал

Мувофиқи формулаҳои $\sin x = 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$, $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$, $2 = 2 \cdot 1 = 2(\sin^2 x + \cos^2 x)$

$$4\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = 2\sin^2 \frac{x}{2} + 2\cos^2 \frac{x}{2} \Rightarrow 3\sin^2 \frac{x}{2} - 4\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} = 0$$

-ро дорем. Ин муодиларо аъзо ба аъзо ба $\cos^2 \frac{x}{2}$ тақсим мекунем. Баъд $3tg^2 \frac{x}{2} - 4tg \frac{x}{2} + 1 = 0$ $tg \frac{x}{2} = t$ ишора карда, муодилаи квадратиро соҳиб мешавем.

$$3t^2 - 4t + 1 = 0, D = 16 - 12 = 4$$

$$t_1 = \frac{4+2}{6} = 1, t_2 = \frac{4-2}{6} = \frac{1}{3}. \quad \text{Қиматҳои ёфта шударо дар ифода гузошта ҳосил мекунем}$$

$$1) tg \frac{x}{2} = 1, x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$$

$$2) tg \frac{x}{2} = \frac{1}{3}, x = 2\arctg \frac{1}{3} + 2\pi n, n \in Z$$

Ҷавоб: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, x = 2\arctg \frac{1}{3} + 2\pi n, n \in Z$.

Мисоли 7. Муодиларо ҳал кунед. $\sin x + \cos x = 1$.

Ҳал.

Ҳар ду тарафи муодиларо ба $\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ тақсим мекунем. Пас

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4}$ -ро ба назар гирифта, муодиларо аз нав менависем ва онро ҳал мекунем

$$\sin \frac{\pi}{4} \sin x + \cos \frac{\pi}{4} \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x - \frac{\pi}{4} = \pm \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 2\pi n, x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ҷавоб: $x = 2\pi n, x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.



Муодилаҳое, ки барои ба зарбкунандаҳо ҷудо кардан имкон медиҳанд.

Мисоли 8. Муодиларо ҳал кунед: $\sin 9x - \sin x = \cos 5x$.

Ҳал.

$$\text{Азбаски } 2 \sin 4x \cos 5x = \cos 5x \Rightarrow \cos 5x (2 \sin 4x - 1) = 0$$

$$1) \cos 5x = 0, x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}$$

$$2) \sin 4x = \frac{1}{2}, 4x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z}$$

Ҷавоб: $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}, x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z}$.

Мисоли 9. Муодиларо ҳал кунед: $2 \sin x \cos x + 5 \sin x + 5 \cos x + 1 = 0$.

Ҳал.

Муодиларо табдил медиҳем $2 \sin x \cos x + 5(\sin x + \cos x) + 1 = 0$. Агар ишораи $\sin x + \cos x = t$ -ро дохил кунем, пас ҳар ду тарафро ба квадрат бардошта, $2 \sin x \cos x = t^2 - 1$ даст меорем.

Акнун муодилаи додашударо дар намуди муодилаи ратсионалӣ менависем ва онро ҳал мекунем:

$$t^2 - 1 + 5t + 1 = 0 \Rightarrow t^2 + 5t = 0 \Rightarrow t(t + 5) = 0 \Rightarrow t_1 = -5; t_2 = 0$$

1) Ҳангоми $\sin x + \cos x = -5$ муодила реша надорад.

2) Муодиларо ҳал мекунем $\sin x + \cos x = 0, \operatorname{tg} x + 1 = 0, \operatorname{tg} x = -1, x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Ҷавоб: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

БОБИ 5. МУОДИЛА ВА НОБАРОБАРҲОИ ТРИГОНОМЕТРЎ

МИСОЛҲО

Муодиларо ҳал кунед.

1. $2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$
2. $\cos^2 x - \cos x - 2 = 0$
3. $2\operatorname{ctg}^2 3x - 3\operatorname{ctg} 3x + 1 = 0$
4. $\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x = 3$
5. $2\cos^2 x + \sin x - 1 = 0$
6. $3\sin^2 2x + 7\cos 2x - 3 = 0$
7. $2\cos x = 1 - \sqrt{\cos x}$
8. $\sin 2x = \cos^4 x - \sin^4 x$
9. $\sin 5x = \frac{2}{3}\cos^2 5x$
10. $\cos^4 \frac{x}{5} + \sin^2 \frac{x}{5} = 1$
11. $3\operatorname{tg} 2x - 2\operatorname{ctg} 2x - 1 = 0$
12. $2\operatorname{tg} x - 2\operatorname{ctg} x = 3$
13. $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 0$
14. $\sin 2x + \cos 2x = 0$
15. $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$
16. $\sqrt{3}\sin\left(x + \frac{\pi}{12}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = 0$
17. $\cos x - \sin x = 1$
18. $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$
19. $\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} = -1$
20. $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{2}$
21. $3\sin x + 4\cos x = 3$
22. $\sin 4x + \cos 4x = 4$
23. $\sin 2x = \cos^4 \frac{x}{2} - \sin^4 \frac{x}{2}$
24. $\cos 2x = \sqrt{2}(\cos x - \sin x)$
25. $\cos 3x \cos 2x = \sin 3x \sin 2x$
26. $\sin 5x \cos 4x - \cos 5x \sin 4x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
27. $\cos 9x - \cos 7x + \cos 3x - \cos x = 0$
28. $\cos 7x + \sin 8x = \cos 3x - \sin 2x$
29. $\sin 3x + \sin 5x = \sin 4x$
30. $\sin 2x \sin 6x = \cos x \cos 3x$
31. $(2\cos x - 3) \cdot \operatorname{ctg} x = 0$
32. $(\operatorname{tg} x - 3)(\cos x - \frac{1}{2}) = 0$
33. $\operatorname{tg} 3x \cos x = 0$
34. $\sin 2x \operatorname{tg} x = 0$
35. $\frac{\cos 2x}{1 + \operatorname{tg} x} = 0$
36. $\frac{1 - 2\cos 2x}{\cos 2x - 2} = 0$
37. $\frac{\operatorname{tg} x}{\sin 5x} = 0$
38. $\frac{\cos x}{1 - \cos 4x} = 0$
39. $|\cos 2x - 1| - 2|\cos 2x + 2| = 0$
40. $\sin^3 x + \cos^4 x = 1$
41. $\cos x \sqrt{\sin x} = 0$
42. $\cos 3x + 2\cos x = 0$
43. $\sin^{13} x + \cos^{13} x = 1$
44. $\sin 9x = 2\sin 3x$

НОБАРОБАРИҲОИ ТРИГОНОМЕТРӢ

Ҳангоми ҳалли оддитарин нобаробарии тригонометрӣ бояд донед:

- 1) ки тири Оу **тири синусҳо** ном дорад;
- 2) ки тири Ох **тири косинусҳо** ном дорад;
- 3) тафсири геометрии муносибатҳои $<, \leq, >, \geq$ байни кунҷҳо;
- 4) ки барои ҳар як арзиши тағйирёбандаи x бешубҳа иҷро шудааст
 $-1 \leq \sin x \leq 1$ ва $-1 \leq \cos x \leq 1$.

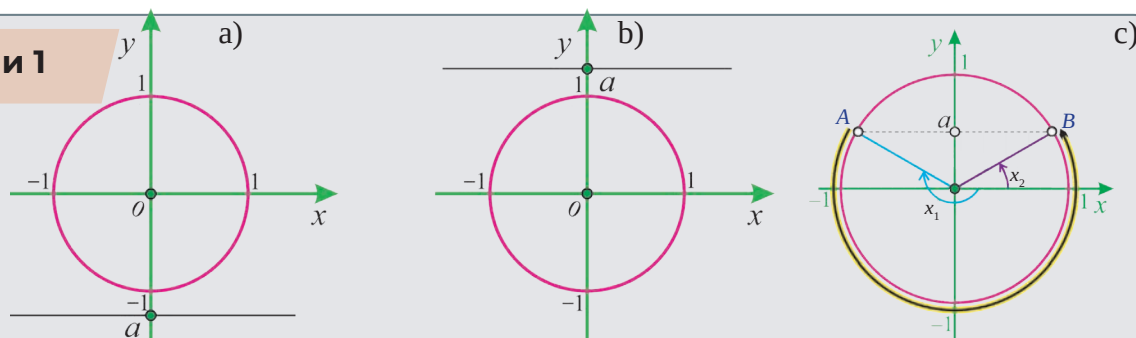
Бигзор $f(x)$ яке аз функсияҳои тригонометрии $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x$ ё $\operatorname{ctg} x$ - фаҳмонад, яъне, бигзор $f(x) = \sin x, f(x) = \cos x, f(x) = \operatorname{tg} x$ ё ки $f(x) = \operatorname{ctg} x$ бошад.

Пас, барои баъзе ададҳои a соддатарин **нобаробарии тригонометрӣ** нобаробарии намуди $f(x) < a, f(x) \leq a, f(x) > a, f(x) \geq a$ мебошанд.

♦ Ҳалли нобаробарии $\sin x < a$ ва $\sin x \leq a$

- 1) Агар $a \leq -1$, ҳалли нобаробарии $\sin x < a$, $\emptyset$ мебошад (расми 1а).
- 2) Агар $a > 1$, ҳалли нобаробарии $\sin x < a$ тири ададии $(-\infty; +\infty)$ аст (расми 1б).
- 3) Агар $a < -1$, ҳалли нобаробарии $\sin x \leq a$ маҷмӯи холист $\emptyset$.
- 4) Агар $a \geq 1$, ҳалли нобаробарии $\sin x \leq a$ тири ададии $(-\infty; +\infty)$ аст.
- 5) Агар $a = -1$, ҳалли нобаробарии $\sin x \leq -1$ маҷмӯи иборат аз қиматҳои тағйирёбандаи $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.
- 6) Агар $a = 1$, он гоҳ нобаробарии $\sin x < 1$ дар ҳамаи нуқтаҳои тири ададии $(-\infty; +\infty)$ иҷро шудааст, ба ғайр аз нуқтаи $x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ мешавад.

Расми 1



- 7) Агар $-1 < a < 1$, ҳалли нобаробарии $\sin x < a$ маҷмӯи он қиматҳои тағйирёбандае мебошад, ки, (расми 1с) барои онҳо баробарии

$$x_1 < x < x_2 \quad x_1 = -\pi - \arcsin a \quad x_2 = \arcsin a$$

$$-\pi - \arcsin a + 2\pi n < x < \arcsin a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \quad \text{иҷро шудааст.}$$

- 8) Агар $-1 < a < 1$, ҳалли нобаробарии $\sin x \leq a$ маҷмӯи он қиматҳои тағйирёбандаи мебошад, ки, (расми 1с) барои онҳо баробарии

$$-\pi - \arcsin a + 2\pi n \leq x \leq \arcsin a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \quad \text{иҷро шудааст.}$$

БОБИ 5. МУОДИЛА ВА НОБАРОВАРҲОИ ТРИГОНОМЕТРИ

Мисоли 1. Нобароварио ҳал кунед $\sin x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ҳал

$$-\pi - \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi n \leq x \leq \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

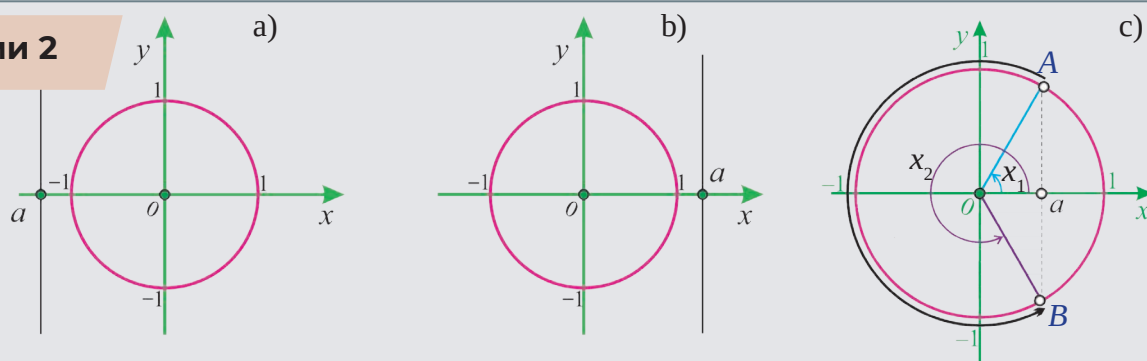
$$-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \leq x \leq -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ҷавоб: $\left[-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; -\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right], n \in \mathbb{Z}.$

◆ Ҳалли нобаровари $\cos x < a$ ва $\cos x \leq a$

- 1) Агар $a \leq -1$ он гоҳ ҳалли нобаровари $\cos x < a$ маҷмӯи холӣ аст $\emptyset$ (расми 2а).
- 2) Агар $a > 1$, он гоҳ ҳалли нобаровари $\cos x < a$ ҳамаи тири ададии $(-\infty; +\infty)$ аст (расми 2б).
- 3) Агар $a < -1$, он гоҳ ҳалли нобаровари $\cos x \leq a$ маҷмӯи холӣ аст $\emptyset$.
- 4) Агар $a = -1$, он гоҳ ҳалли нобаровари $\cos x \leq -1$ маҷмӯи ҳамаи нуқтаҳои $x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ мебошад.
- 5) Агар $a = 1$, он гоҳ ҳалли нобаровари $\cos x < 1$ маҷмӯи ҳамаи он нуқтаҳои $x \neq 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ ҷой дорад.
- 6) Агар $a \geq 1$, он гоҳ ҳалли нобаровари $\cos x \leq a$ ҳамаи тири ададии $(-\infty; +\infty)$ аст (расми 2б).

Расми 2



- 7) Агар $-1 < a < 1$, он гоҳ ҳалли нобаровари $\cos x < a$ маҷмӯи он қиматҳои тағйирёбандаи (расми 2с) x , ки барои он баровари

$$x_1 < x < x_2 \quad x_1 = \arccos a \quad x_2 = 2\pi - \arccos a$$

$$\arccos a + 2\pi n < x < 2\pi - \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \quad \text{ичро шудааст.}$$

- 8) Агар $-1 < a < 1$, он гоҳ ҳалли нобаровари $\cos x \leq a$ маҷмӯи он қиматҳои тағйирёбандаи (расми 2с) x , ки барои он баровари

$$\arccos a + 2\pi n \leq x \leq 2\pi - \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \quad \text{ичро шудааст.}$$

Мисоли 2. Нобаробарио ҳал кунед $\cos x \geq -\frac{1}{2}$

Ҳал

$$-\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n \leq x \leq \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ҷавоб: $\left[-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right], n \in \mathbb{Z}.$



Ҳалли нобаробари $\operatorname{tg} x < a$ ва $\operatorname{tg} x \leq a$

Ҳангоми ҳалли нобаробариҳои $\operatorname{tg} x < a$ ва $\operatorname{tg} x \leq a$ истифодаи графикаи функцияи $y = \operatorname{tg} x$ ба мақсад мувофиқ аст (расми 3).

Аз расми 3 дида мешавад, ки нобаробариҳои $\operatorname{tg} x < a$ ва $\operatorname{tg} x \leq a$ дар қиматҳои x дурустанд, барои онҳо нобаробари

$$-\frac{\pi}{2} < x < \operatorname{arctg} a$$

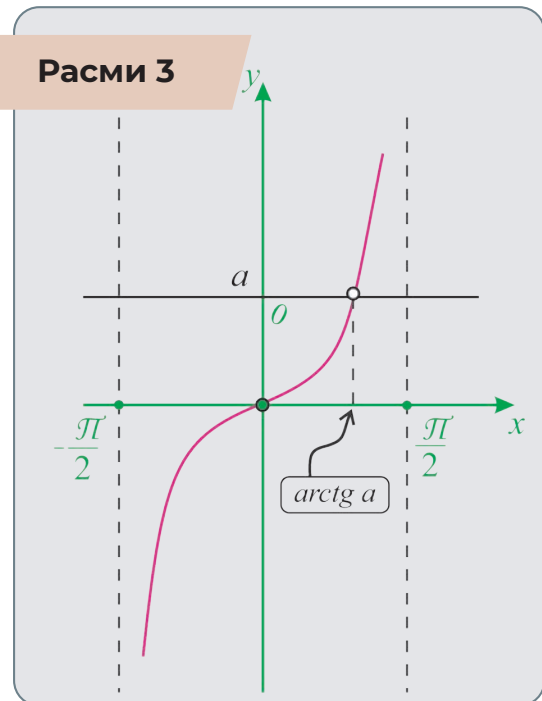
$$-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Азбаски $y = \operatorname{tg} x$ – функцияи даврӣ бо давраи асосист, пас ҳалли нобаробариҳои $\operatorname{tg} x < a$ ва $\operatorname{tg} x \leq a$ маҷмӯи ҳамаи қиматҳои тағйирёбандаи x , мебошанд, ки барои онҳо мутаносибан нобаробариҳои

$$-\frac{\pi}{2} + \pi n < x \leq \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

иҷро мешаванд.

Расми 3



Мисоли 3. Нобаробарио ҳал кунед $\operatorname{tg} \frac{x}{4} \leq -1$.

Ҳал

$$-\frac{\pi}{2} + \pi n < \frac{x}{4} \leq \operatorname{arctg}(-1) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$-\frac{\pi}{2} + \pi n < \frac{x}{4} \leq -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$-2\pi + 4\pi n < x \leq -\pi + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ҷавоб: $(-2\pi + 4\pi n; -\pi + 4\pi n], n \in \mathbb{Z}.$

БОБИ 5. МУОДИЛА ВА НОБАРОБАРҲОИ ТРИГОНОМЕТРӢ

❖ Ҳалли нобаробарии $\operatorname{ctgx} < a$ ва $\operatorname{ctgx} \leq a$

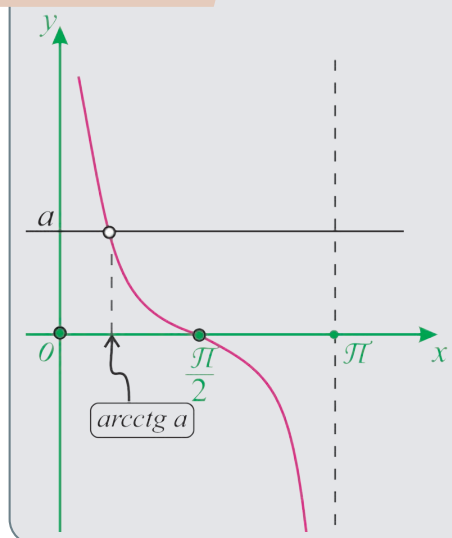
Ҳангоми ҳалли нобаробариҳои $\operatorname{ctgx} < a$ ва $\operatorname{ctgx} \leq a$, $y = \operatorname{ctgx}$ -ро истифода бурдан ба мақсад мувофиқ аст (расми 4).

Аз расми 4 дида мешавад, ки нобаробариҳои $\operatorname{ctgx} < a$ ва $\operatorname{ctgx} \leq a$ дурустанд, барои онҳо нобаробарии $\operatorname{arctga} < x < \pi$ ва $\operatorname{arctga} \leq x < \pi$ мутаносибан иҷро мешавад, Азбаски $y = \operatorname{ctgx}$ – функсияи даврӣ бо даври асосист, пас ҳалли нобаробарии $\operatorname{ctgx} < a$ ва $\operatorname{ctgx} \leq a$ маҷмӯи ҳамаи қиматҳои тағйирёбандаи x мебошад, ки барои онҳо мутаносибан нобаробариҳои

$$\operatorname{arctga} + \pi n < x < \pi + \pi n, n \in \mathbb{Z} \quad \text{ва}$$

$$\operatorname{arctga} + \pi n \leq x < \pi + \pi n, n \in \mathbb{Z} \quad \text{иҷро мешаванд.}$$

Расми 4



Мисоли 4. Нобаробариро ҳал кунед $\operatorname{ctg} \frac{x}{5} < -\sqrt{3}$.

Ҳал

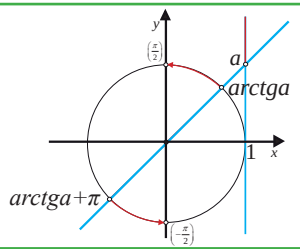
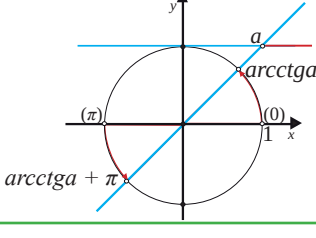
$$\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \pi n < \frac{x}{5} < \pi + \pi n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{5\pi}{6} + \pi n < \frac{x}{5} < \pi + \pi n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\frac{25\pi}{6} + 5\pi n < x < 5\pi + 5\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ҷавоб: $\left(\frac{25\pi}{6} + 5\pi n; 5\pi + 5\pi n \right), n \in \mathbb{Z}.$

❖ Ҳалли баъзе нобаробариҳои тригонометрӣ

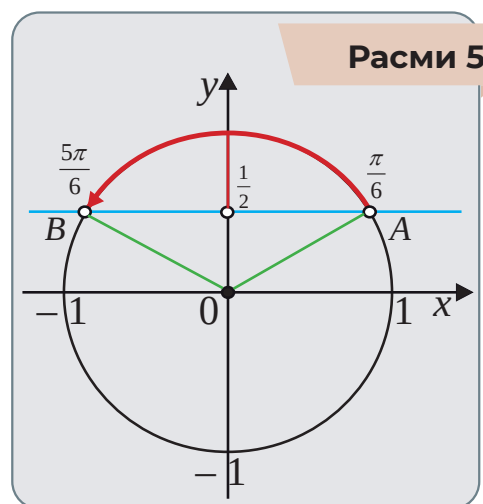
Нобаробарӣ	Ҳал	Тасвир дар доираҳо
$\sin x > a$	$\operatorname{arcsin} a + 2\pi n < x < \pi - \operatorname{arcsin} a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	
$\cos x > a$	$-\operatorname{arccos} a + 2\pi n < x < \operatorname{arccos} a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	

$\operatorname{tg} x > a$	$\operatorname{arctg} a + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	
$\operatorname{ctg} x > a$	$\pi n < x < \operatorname{arcc} \operatorname{ctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	

Мисоли 5. Нобаробариро ҳал кунед $\sin x > \frac{1}{2}$.

Ҳал

Бигзор хати рости $y = \frac{1}{2}$ доираи воҳидиро дар нуқтаҳои зерин бурад (расми 5). Барои қонеъ кардани нобаробарии додашуда, қиматҳои $\sin x$ бояд дар болои ин хати рост қойгир шаванд. Функцияи $y = \sin x$ ва хати рости $y = \frac{1}{2}$ аз нуқтаҳои бурида мешаванд ва кунҷҳои марказии онҳо аз самти мусбати тири абсисса чен карда мешаванд, ки мутаносибан $x = \frac{\pi}{6}$ ва $x = \frac{5\pi}{6}$ мебошанд. Аз расм дида мешавад, ки барои қиматҳои тағйирёбандаи x , ки дар байни $\frac{\pi}{6}$ ва $\frac{5\pi}{6}$ ба таври қатъӣ дохил карда шудааст, нобаробарии додашуда иҷро карда мешавад.



Ҳамин тариқ, дар $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$, $\sin x > \frac{1}{2}$ мешавад. Азбаски функцияи $\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ бо формула ёфта мешавад. $y = \sin x$ – функцияи даврӣ бо давраи асосии 2π , мебошад, ин нобаробарӣ барои ҳамаи қиматҳои тағйирёбанда, ки барои он аст, дуруст боқӣ мемонад барои ҳар як адади бутуни n .

Ҷавоб: $\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Мисоли 6. Нобаробариро ҳал кунед $\cos x \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \sin \frac{\pi}{4} \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ҳал

Формулаи косинуси ҷамъро истифода бурда, тарафи чапи нобаробариро содда мекунем

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

БОБИ 5. МУОДИЛА ВА НОБАРОБАРҲОИ ТРИГОНОМЕТРӢ

Хати рости $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ мекашем (расми 6). Он доираи воҳидиро дар нуқтаҳои мебурад, ки ба қиматҳои $-\frac{3\pi}{4}$ ва $\frac{3\pi}{4}$ тағйирёбандаи $x + \frac{\pi}{4}$ мувофиқанд. Ин маънои онро дорад, вақте ки кунҷи $x + \frac{\pi}{4}$ аз $-\frac{3\pi}{4}$ ба $\frac{3\pi}{4}$ давр мезанад, нобаробарӣ иҷро карда мешавад. Акнун даври будан ва давраи косинусро ба назар гирифта,

$$-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n \leq x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Аз ҳар як аъзои нобаробарии дукарата $\frac{\pi}{4}$ -ро тарҳ мекунем ва: $-\pi + 2\pi n \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ -ро ҳосил мекунем.

Ҷавоб: $x \in \left[-\pi + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right], n \in \mathbb{Z}.$

Мисоли 7. Нобаробарию ҳал кунед $\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 1$
Ҳал

Аз расми 7 бармеояд, ки агар қимати $2x - \frac{\pi}{4}$ шартҳои

$$\frac{\pi}{4} + \pi n \leq 2x - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi}{2} + \pi n \leq 2x < \frac{3\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} < x < \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z} \text{ -ро қаноат кунед, пас.}$$

Ҷавоб: $\left[\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}; \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}\right), n \in \mathbb{Z}$ мешавад.

Мисоли 8. Нобаробарию ҳал кунед $\sin x > \cos x$.

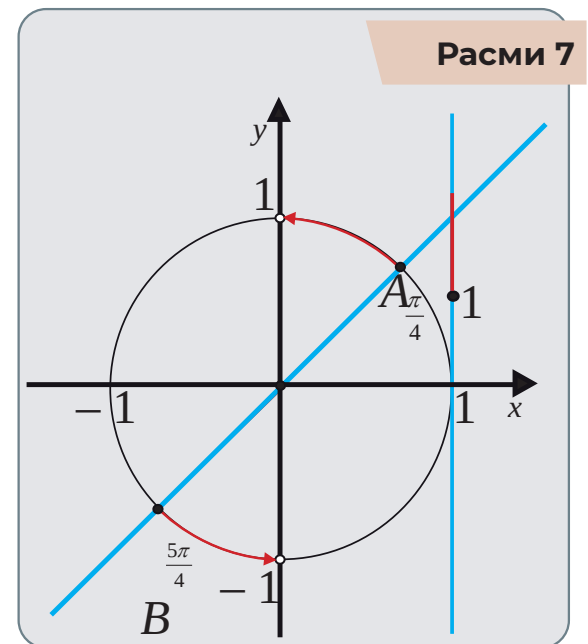
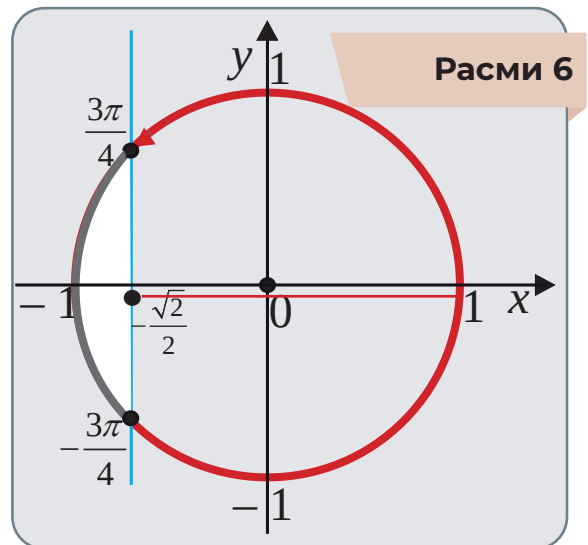
Ҳал. Тарафи рости нобаробарию ба тарафи чап мегузаронем, баъд аз формулаи камшавӣ истифода мебарем.

$$\sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) > 0 \Rightarrow 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cos \frac{\pi}{4} > 0 \Rightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 0$$

$$\arcsin 0 + 2\pi n < x - \frac{\pi}{4} < \pi - \arcsin 0 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$2\pi n < x - \frac{\pi}{4} < \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \text{ -ро ба даст меорем.}$$

Ҷавоб: $\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{5\pi}{4} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}.$



МИСОЛҲО

1. Нобаробариро ҳал кунед.

- | | | | |
|-------------------|-----------------------|-------------------|---------------------|
| a) $\sin x > 1$ | b) $\sin x \geq 1$ | c) $\sin x < 1$ | d) $\sin x \leq 1$ |
| e) $\sin x > -1$ | f) $\sin x \geq -1$ | g) $\sin x < -1$ | h) $\sin x \leq -1$ |
| i) $\sin x > 1,5$ | j) $\sin x \geq -1,2$ | k) $\sin x < 1,1$ | l) $\sin x \leq -2$ |

2. Нобаробариро ҳал кунед.

- | | | | |
|------------------|-----------------------|-------------------|-----------------------|
| a) $\cos x > 1$ | b) $\cos x \geq 1$ | c) $\cos x < 1$ | d) $\cos x \leq 1$ |
| e) $\cos x > -1$ | f) $\cos x \geq -1$ | g) $\cos x < -1$ | h) $\cos x \leq -1$ |
| i) $\cos x > 2$ | j) $\cos x \geq -1,6$ | k) $\cos x < 1,4$ | l) $\cos x \leq -1,7$ |

3. Нобаробариро ҳал кунед.

- | | | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|------------------------------|-----------------------------------|
| a) $\sin 2x \geq 0$ | b) $\cos 3x \leq 0$ | c) $\cos x \leq \frac{1}{2}$ | d) $\sin x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| e) $\cos 2x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ | f) $\sin 3x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ | g) $\sqrt{2} - 2 \sin x > 0$ | h) $2 \cos x + \sqrt{3} \leq 0$ |

4. Нобаробариро ҳал кунед.

- | | |
|--|--|
| a) $\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) < 0$ | b) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \leq 0$ |
| c) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ | d) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) > -\frac{\sqrt{2}}{2}$ |

5. Нобаробариро ҳал кунед.

- | | | |
|---|--|--|
| a) $\operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \geq \sqrt{3}$ | b) $\operatorname{tg}\left(2x - \frac{5\pi}{6}\right) > 0$ | c) $\operatorname{ctg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) > -\frac{\sqrt{3}}{3}$ |
| d) $\operatorname{ctg}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \geq 0$ | e) $\operatorname{ctg}\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) < 0$ | f) $\operatorname{tg}\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) \leq -1$ |

6. Ҳалли нобаробариини $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) < -\frac{1}{2}$ ба порчаи $[0; \pi]$ -ро ёбед.

7. Ҳалли нобаробариини $\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) < -\sqrt{3}$ -ро дар порчаи $\left[-\frac{3}{8}; \frac{21}{8}\right]$ ёбед.

8. Нобаробариро ҳал кунед.

- | | |
|---------------------------------------|--|
| a) $\cos^2 x - 3 \cos x < 0$ | b) $2 \sin^2 x - 5 \sin x + 3 \geq 0$ |
| c) $3 \cos^2 x + 7 \cos x + 4 \leq 0$ | d) $\operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x + 3 < 0$ |

9. Нобаробариро ҳал кунед.

- | | |
|--|---|
| a) $\cos\left(3 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right) < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ | b) $\sin\left(\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right) > -\frac{1}{2}$ |
|--|---|



БОБИ 6. НАЗАРИЯИ ЭҲТИМОЛИЯТ

- **ҲОДИСАҲОИ ТАСОДУФӢ**
- **МУАЙЯНКУНИИ ЭҲТИМОЛИЯТ**
- **ТАКРОРӢ**

ҲОДИСАҲОИ ТАСОДУФӢ

Назарияи эҳтимолият яке аз соҳаҳои асосии математикаи муосир мебошад. Мавзӯи назарияи эҳтимолият омӯзиши қонунҳои ҳодисаҳои тасодуфӣ мебошад. Мафҳумҳои асосии он таҷриба ва ҳодиса мебошанд.

Таҷриба ҳамчун иҷрои маҷмӯи муайяни шартҳо фаҳмида мешавад. Натиҷаи таҷриба **ҳодиса** номида мешавад.

Се намуди ҳодисаҳо вучуд доранд: ғайриимкон (ҳангоми ягон озмоиш рӯй намедихад), муайян (дар давоми ҳар озмоиш рӯй медиҳад) ва тасодуфӣ (метавонад дар натиҷаи озмоиш рӯй диҳад ё не). Муҳимтарин вазифа ҳисоб кардани пайдоиши ҳодисаи тасодуфӣ мебошад.

Ҳар як ҳодисае, ки мувофиқи қонунҳои табиат ва Суммаиёт ба амал меояд, ба ҳодисаи тасодуфӣ вобаста аст. Баъзеи онҳоро пешгӯӣ кардан мумкин аст ва баъзеи онҳо тахминӣ мебошанд: обу ҳаво, нархҳо, фаровонӣ ва ноқоии ҳосил ва ғайраро пешгӯӣ кардан душвор аст.

Дар миёнаҳои асри XVII олимони Паскал, Ферма, Бернулли ба омӯзиши ҳолатҳои алоҳидаи ҳодисаҳои дар бозии қимор мушоҳидашаванда диққати ҷиддӣ дода, қараёнҳоро омӯхта, дар натиҷа дар офаридани илме бо номи назарияи эҳтимолият саҳми калон гузоштанд. Назарияи эҳтимолият дар соҳаҳои гуногун, аз ҷумла иқтисод, биология, тиб, кишоварзӣ, технология ва дигар соҳаҳо васеъ истифода мешавад.

Мушоҳида ё омӯзиши таҷрибавии пайдоиш бо роҳи гузаронидани санҷишҳои муайян анҷом дода мешавад.



Мафҳум дар бораи ҳодиса

Таъриф. Ҳама гуна натиҷа (ё оқибат) -и таҷриба **ҳодиса** номида мешавад. Ҳодисаҳо бо ҳарфҳои калони алифбои латинӣ, ба монанди **A, B, C, ...** нишон дода мешаванд.

Дар ҳаёти оддӣ, амалия ва тадқиқоти илмӣ таҷрибаю санҷишҳо зуд-зуд дучор меоянд, ки натиҷаҳои онҳоро бо боварии комил пешгӯӣ кардан мумкин нест.

Масалан, ҳангоми партофтани танга бо итминони комил гуфтан мумкин нест, ки ин ё он тараф меафтад; маълум нест, ки ҳангоми тирандозӣ ба ҳадаф расидан; ҳангоми партофтани кубик афтидани рақами 6 пешакӣ маълум нест; рақами билети лотерея, ки ба он бурд баромадааст, пешгӯӣ кардан мумкин нест.

Таъриф. Ҳодисаҳое, ки дар натиҷаи санҷиш ҳатман ба вуқӯъ меоянд, **ҳодисаҳои муайян** номида мешаванд ва одатан бо ҳарфи Ω ишора мешаванд.

Масалан, ҳангоми партофтани штамп аз 1 то 6 адад партофта мешавад; мазмуни на бештар аз 1000 ҳарф калимаест, ки зери хатар интиҳоб шудааст; омадани шаб ба рӯз ва ғайра ҳодисаҳои муайян мебошанд.

Таъриф. Ҳодисае, ки дар ягон озмоиш рух намедихад, **ҳодисаи ғайриимкон** номида мешавад ва одатан бо аломати $\emptyset$ ишора мешавад.

Масалан, ду бурд дар як лотерея, ба офтоб фуруд омадани киштии фалакпаймо ва баргаштани он, дар баландии 20 километр парвоз кардани самолёт ва ғайра ҳодисаҳои ғайриимкон мебошанд.

БОБИ 6. НАЗАРИЯИ ЭХТИМОЛИЯТ

Таъриф. Ҳодисае, ки дар натиҷаи санчиш рух дода метавонад ё не, **ҳодисаи тасодуфӣ** номида мешавад.

Масалан, гирифтани тарафи мӯҳр дар партофти танга, задани ҳадаф дар тирандозӣ, бурди билети лотерея, партофтани 6 дар бозии домино ва ғайра ҳодисаҳои тасодуфӣ мебошанд.

Таъриф. Агар рӯй додани як ҳодиса рух додани ҳодисаҳои дигарро рад кунад, пас чунин **ҳодисаҳо номувофиқ** номида мешаванд.

Мисоли 1. Як қисм (детал) аз қуттии қисмҳо (деталҳо) гирифта шуд. Дар ин маврид баровардани қисмҳои хушсифат баровардани қисмҳои пастсифатро рад мекунад ва ё баръакс. Ҳодисаҳои "Натиҷаи қисмҳои сифати баланд" ва Ҳодисаҳои "Баромади қисмҳои сифати паст" мувофиқ нестанд.

Мисоли 2. Вақте ки танга партофта мешавад, гирифтани сарҳо (тарафи мӯҳр) думҳоро (тарафи рақамӣ) рад мекунад. Ҳодисаҳои «ба сар афтидан» ва «афтодан ба дум» ба ҳам мувофиқ нестанд.

Таъриф. Агар ҳодисаҳо новобаста аз рух додани ҳодисаҳои дигар рӯй диҳанд, пас ин гуна **ҳодисаҳо ро воқеаҳои якҷоя** меноманд.

Масалан, «офтоб баромад» ва «рӯзи сард» воқеаҳои мебошанд, ки якҷоя рух дода метавонанд.

Таъриф. Ҳодисае, ки натиҷаи ягонаи озмоишро ифода мекунад, **ҳодисаи элементарӣ** номида мешавад.

Таъриф. Ҳодисаеро, ки ба ҳодисаҳои элементарӣ тақсим кардан мумкин аст, **ҳодисаи мураккаб** номида мешавад.

Таъриф. Агар ягон асосе надошта бошад, ки яке аз якҷанд ҳодисаҳо дар натиҷаи санчиш нисбат ба дигарҳо эҳтимолияти рух додани яке аз якҷанд ҳодисаҳо зиёдтар аст, пас ин гуна ҳодисаҳо, **ҳодисаҳои эҳтимолан якхела** номида мешаванд.

Масалан, ҳангоми партофтани танга, гирифтани сар ё думҳо ё партофтани донаҳои домино, гирифтани яке аз рақамҳо аз як то шаш ҳама ҳодисаҳои эҳтимолии баробар мебошанд.

Таъриф. Ҳодисаи муқобили ҳодисаи A ҳодисаи $\bar{A}$ мебошад, ки аз рӯй надодани ҳодисаи A иборат аст.



Мафҳумҳои ҳодисаҳои вобаста ва мустақил

Таъриф. Агар ба вучуд омадани яке аз ин ду ҳодиса ба рӯй додан ё надодани ҳодисаи дуюм вобаста набошад, ин гуна ҳодисаҳо, **ҳодисаҳои мустақил** меноманд.

Мисоли 3. Тангари ду маротиба мепартоянд, эҳтимолияти ба даст овардани думҳо дар партофти аввал (ҳодисаи A) аз он вобаста нест, ки дар партофти дуюм низ думҳо меояд (ҳодисаи B аз тарафи дигар, эҳтимолияти ба даст овардани сар дар партофти дуюм аз натиҷаи таҷрибаи аввал вобаста нест. Ҳамин тариқ, ҳодисаҳои A ва B мустақил мебошанд.

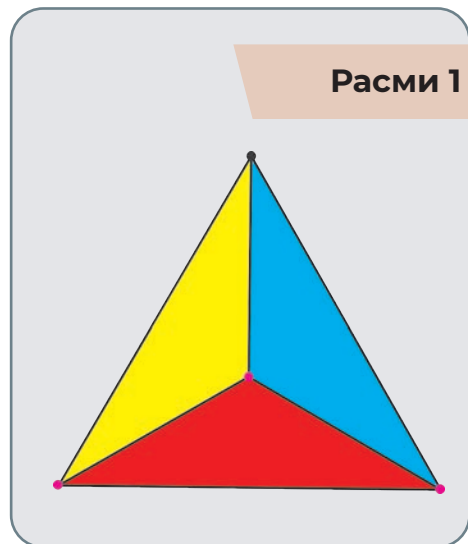
Мисоли 4. Ҳангоми партофтани танга ва донаи домино, бигзор A ҳодисаи сар ва B афтидани холи ҷуфт бошад. Дар ин ҷо A ва B ҳодисаҳои мустақил мебошанд.

Мисоли 5. Ҳангоми партофтани ду донаи домино, бигзор A афтидани якум бошад ва B бошад афтидани донаи дуюм бошад. A ва B ҳодисаҳои мустақил мебошанд.

Таъриф. Агар ягон ду аз якчанд ҳодиса мустақил бошанд, он гоҳ онҳо **мустақили ҷуфт** номида мешаванд.

Мисоли 6. Тангари 3 маротиба партофтанд. Бигзор A , B , C ҳодисаҳои афтодани сар дар кӯшишҳои якум, дуюм ва сеюм бошанд. Маълум аст, ки ҳеҷ ду ҳодисаи дида шуда (яъне $(A$ ва $B)$, $(A$ ва $C)$, $(C$ ва $B)$) мустақил нестанд. Ҳамин тариқ, ҳодисаҳои A , B ва C мустақили ҷуфтанд.

Мисоли 7. Як тарафи тетраэдри муқаррарӣ сурх, дигараш зард, сеюмаш кабуд ва чорум дар ин се ранг аст (*расми 1*). Вақте ки тетраэдр партофта мешавад, сурх ҳодисаи A , зард ҳодисаи B ва кабуд ҳодисаи C мебошад. Ҳама аз он, ҳодисаҳои A , B ва C мустақили ҷуфт мебошанд.



Таъриф. Агар эҳтимолияти ба вучуд омадани яке аз ин ду ҳодиса ба вучуд омадан ё наомадани ҳодисаи дуюм вобаста бошад, пас чунин ҳодисаҳо **вобаста** номида мешаванд.

Мисоли 8. Дар як қуттӣ 80 пуфаки сафед ва 20 пуфаки сиёҳ мавҷуд аст. Як пуфак ба таври тасодуфӣ гирифта мешавад ва онро ба қуттӣ баргардонидан мумкин нест. Агар баромади пуфаки сафед дар кӯшиши аввал ҳодисаи A бошад, пас ҳодисаи B -и баромади пуфаки сафед дар кӯшиши дуюм ба ҳодисаи A вобаста аст. Яъне воқеаҳои A ва B вобастаанд.

БОБИ 6. НАЗАРИЯИ ЭҲТИМОЛИЯТ

МУАЙЯНКУНИИ ЭҲТИМОЛИЯТ

Мафҳуми «эҳтимолият» яке аз мафҳумҳои асосии назарияи эҳтимолият мебошад. Биёед як мисолро дида бароем.

Фарз мекунем, ки 12 тўбчаи якхела дар як зарф хуб омехта шудааст, ки 5-тоаш сурх, 4-тоаш сиёҳ ва 3-тоаш сафед аст. Имконияти сурх ё сиёҳ будани тўби аз зарф кашидашуда аз эҳтимолияти сафед будани он зиёдтар аст. Оё ин имкониятро ададӣ чен кардан мумкин аст? Маълум мешавад, ки мумкин будааст. Ин ададро *эҳтимолияти ҳодиса* меноманд.

Ҳамин тариқ, эҳтимолият ададест, ки эҳтимолияти рух додани ҳодисаро тавсиф мекунад.

Дар назди худ вазифа мегузорем, ки эҳтимолияти он ки тўби кашидашуда сурх ё сиёҳ аст, миқдорӣ муайян кунем. Ҳодисаи A гирифтани тўби сурх ё сиёҳ мебошад. Дар санчиш (санчиш аз гирифтани тўб аз зарф иборат аст) ҳар як натиҷаи имконпазир, яъне ҳар як ҳодисае, ки метавонад рух диҳад, ҳодисаи элементарӣ мебошад. Ҳодисаҳои элементариро бо $E_1, E_2, E_3, E_4, \dots$ ишора кунед. Дар ин мисол 12 ҳодисаи элементарии зерин рух дода метавонанд: E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 – тўби сурх кашида шудааст; E_6, E_7, E_8, E_9 – тўби сиёҳ кашида мешавад; E_{10}, E_{11}, E_{12} – тўби сафед бароварда мешавад.

Дидан осон аст, ки ин натиҷаҳо ягона имконпазир (як тўб ҳатман хориҷ карда мешаванд) ва баробар имконпазир (тўб ба таври тасодуфӣ бароварда мешавад, тўбҳо якхелаанд ва онҳо хуб омехта шудаанд) мебошанд.

Ҳодисаҳои ибтидоӣ, ки ба ҳодисаи интизорӣ оварда мерасонанд, рӯйдодҳои мусоид номида мешаванд. Дар мисол, 9 ҳодисаи элементарии зерин $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7, E_8, E_9$ барои ҳодисаи A (кашидани тўби сурх ё сиёҳ) мусоид мебошанд. Таносуби адади ҳодисаҳои элементарие, ки ба ҳодисаи A афзалият доранд, ба шумораи умумии ҳодисаҳои элементариро эҳтимолияти ҳодисаи A меноманд ва бо $P(A)$ ифода карда мешавад. Дар мисоли дидашаванда ҳамагӣ 12 ҳодисаи элементарӣ мавҷуд аст, ки 9-тои онҳо ба ҳодисаи A тааллуқ доранд. Ҳамин тариқ, эҳтимолияти сурх ё сиёҳ шудани тўби кашидашуда ин аст: $P(A) = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$. Рақами ёфтшуда (эҳтимолият) баҳодиҳии миқдории эҳтимолияти дар супориш баровардани тўби сурх ё сиёхро медиҳад.

Таърифҳои гуногуни эҳтимолият мавҷуданд. Инҳо таърифҳои классикӣ, статистикӣ ва геометрӣ мебошанд.



Таърифи классикии эҳтимолият

Таъриф. Эҳтимолияти ҳодисаи A таносуби адади m ҳодисаҳеост, ки ба пайдоиши A ба адади n аз ҳамаи ҳодисаҳои имконпазири элементарии озмоиш мусоидат мекунанд. Эҳтимолияти ҳодисаи A бо $P(A)$ ишора мешавад. Пас аз рӯи таъриф

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Ҳосиятҳои зерин аз таърифи эҳтимолият бармеоянд.

1. Эҳтимолияти ҳодисаи муайян ба 1 баробар аст. Яъне, $P(\Omega) = 1$.

Дарвоқеъ, агар воқеа муайян бошад, пас ҳар як натиҷаи ибтидоии таҷриба ба пайдоиши он мусоидат мекунад. Дар ин ҳолат, $m=n$ ва аз ин рӯ, $P(\Omega) = \frac{m}{n} = \frac{n}{n} = 1$

Мисоли 1. Дар зарф 20 тўб мавҷуд аст, ки аз 1 то 20 рақам доранд. Як тўб ба таври тасодуфӣ аз зарф бароварда шудааст. Эҳтимолияти ҳадди аксар 20 будани рақами тартибии ин тўб чанд аст (ҳодисаи A)?

Ҳал. Рақами тартибии ҳар як тўб дар зарф аз 20 зиёд нест. Ҳамин тариқ, шумораи ҳодисаҳои элементарие, ки ба пайдоиши ҳодисаи A мусоидат мекунад ва шумораи ҳама ҳодисаҳои элементарии имконпазир баробаранд:

$$m = n = 20 \text{ ва } P(A) = \frac{m}{n} = 1. \text{ Дар ин ҳолат, ҳодисаи } A \text{ аниқ аст.}$$

Ҷавоб: $P(A)=1$.

2. Эҳтимолияти ҳодисаи номумкин ба сифр баробар аст, яъне $P(\emptyset)=0$.

Дарвоқеъ, агар ҳодиса рӯй надихад, ҳеҷ як ҳодисаи ибтидоии санҷиш ба пайдоиши он мусоидат намекунад. Дар ин ҳолат, $m = 0$ ва (дар санҷиш ҳадди аққал як ҳодисаи элементарӣ мавҷуд аст), бинобар ин,

$$P(\emptyset) = \frac{m}{n} = \frac{0}{n} = 0$$

Мисоли 2. Дар як қуттӣ 10 тўб мавҷуд аст, ки 4-тоаш сафед, боқимонда сиёҳ аст. Аз ин қуттӣ ба таври тасодуфӣ як тўб гирифта шуд. Эҳтимолияти тўби сурх будани он чанд аст (ҳодисаи A)?

Ҳал. Дар ин мисол, ҳодисаи A гирифтани тўби сурх аст. Дар қуттӣ тўби сурх мавҷуд нест, бинобар ин шумораи ҳодисаҳои мусоид то фарорасии ҳодиса ба сифр баробар аст, яъне $m = 0$. Дар таҷриба ҳамагӣ 10 ҳодисаи элементарӣ мавҷуд аст, ки ҳар кадоми онҳо аз гирифтани як тўб иборат аст (сафед ё сиёҳ, аммо тўби сурх не), яъне

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{0}{n} = 0. \text{ Дар ин ҳолат, } a \text{ ҳодисаи ғайриимкон аст.}$$

3. Эҳтимолияти ҳодисаи тасодуфӣ адади мусбати байни 0 ва 1 мебошад.

Дарвоқеъ, танҳо як қисми ҳама ҳодисаҳои элементарии таҷриба ба пайдоиши ҳодисаи тасодуфӣ мусоидат мекунад (ки ин ҳодисаи ғайриимкон ва муайян нест). Дар ин маврид $0 < m < n$. Пас $0 < \frac{m}{n} < 1$. Аз ин рӯ, $0 < P(A) < 1$.

Ҳамин тариқ, эҳтимолияти ягон ҳодиса нобаробарии дукаратаи зеринро қонеъ мекунад:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Ҳоло, пеш аз ҳалли мисолҳои зерин, мо як формуларо меорем.

Дар зарф n дона тўб мавҷуд аст, ки аз онҳо n_1 сафед, n_2 сиёҳ, n_3 сурх ва ғайра n_k тўбҳои зард мебошанд. Эҳтимолияти рӯйдоди A , ки аз он иборат аст, ки аз ин зарф m тўб гирифта мешавад, ки аз онҳо m_1 сафед, m_2 сиёҳ, m_3 сурх ва ғайра мебошанд. m_k тўбҳои зард мебошанд ва бо формулаи

$$P(A) = \frac{C_{n_1}^{m_1} \cdot C_{n_2}^{m_2} \cdot C_{n_3}^{m_3} \cdot \dots \cdot C_{n_k}^{m_k}}{C_n^m},$$

Дар хотир доред! $P_n = n!$, $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$, $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

Мисоли 3. Дар як халта 12 тўб мавҷуд аст, ки 3-тоаш сафед, 4-тоаш сиёҳ ва 5-тоаш сурх аст. Як тўб ба таври тасодуфӣ гирифта шуд. Эҳтимолияти сиёҳ будани тўби гирифташударо ёбед (ҳодисаи A).

БОБИ 6. НАЗАРИЯИ ЭҲТИМОЛИЯТ

Ҳал. Миқдори ҳодисаҳои элементарии мусоид $m = 4$ ва шумораи умумии ҳодисаҳои элементарӣ $n = 12$ аст, бинобар ин эҳтимолияти ҳодисаи A чунин аст:

$$\text{Ҷавоб: } P(A) = \frac{m}{n} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Мисоли 4. 2000 билети лотерея фурӯхта шуд. Маълум аст, ки 1 билет 100.000 сӯм бурд мекунад, 4 билет 50.000 сӯмӣ, 10 билет 20.000 сӯмӣ, 20 билет 10.000 сӯмӣ, 165 билет 5000 сӯмӣ, 400 билет маблағи 1000 сӯм бурд дорад ва боқимондаи билетҳо бурди молӣ надорад. Эҳтимолияти ба як билет ба даст овардани камаш 10000 сӯм чӣ гуна аст?

Ҳал. Дар ин ҷо $n = C_{10}^2 = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45$ $m = 1 + 4 + 10 + 20 = 35$, $n = 2000$ аст. Зеро дар 35 билет зиёда аз 10 000 сӯм мавҷуд аст. Барои ҳамин,

$$m = C_6^2 = \frac{5 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 15, \quad P(A) = \frac{m}{n} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}.$$

Мисоли 5. Дар як қуттӣ 10 тӯб мавҷуд аст: 6 сафед ва 4 сиёҳ. 2 тӯб ба таври тасодуфӣ гирифта шуд. Эҳтимолияти сафед будани ҳарду тӯбро ёбед.

Ҳал. Шумораи умумии ҳолатҳои имконпазир дар ин супориш ба

$$n = C_{10}^2 = \frac{10!}{2! \cdot 8!} = \frac{9 \cdot 10}{1 \cdot 2} = 45 \quad m = C_6^2 \cdot C_4^0 = \frac{6!}{2! \cdot 4!} \cdot \frac{4!}{0! \cdot 4!} = 15$$

$$\text{Ҷавоб: } P(A) = \frac{m}{n} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}.$$

Мисоли 6. Дар магазин 6 нафар мардон ва 4 нафар занон кор мекунанд. 7 нафар ба таври тасодуфӣ аз рӯи рақами варақаи ҳисоботӣ интихоб карда шуданд. Эҳтимолияти 3 зан будани интихобшудагонро ёбед.

Ҳал. Шумораи умумии ҳодисаҳои элементарии шумораи интихобшуда 7 аз 10 нафар мебошад. Он аз рӯи формула $n = C_{10}^7 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$ ҳисоб карда мешавад. Акнун бояд

шумораи ҳодисаҳои мусоиди элементариро ёбем. Ин миқдор аз рӯи баробарии $m = C_4^3 \cdot C_6^4 = \frac{4}{1} \cdot \frac{5 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 60$ ҳисоб карда мешавад. Пас, эҳтимолияти ин ҳодиса

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}.$$

Мисоли 7. Дар як раф 2 китоби дарсии математика, 2-то физика ва 2-тоаш аз фанни кимия гузошта шудааст. Эҳтимолияти дар наздики будани китобҳои кимия чӣ гуна аст?

Ҳал. Шумораи ҳамаи ивазкунии 6 китобро $n = P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$ меёбем. Ҳоло, барои ҳисоб кардани шумораи ивазшавии ҳамаи китобҳо, то ки китобҳои кимия дар паҳлӯи якдигар бошанд, мо ду китоби кимияро ҳамчун як ҳисоб мекунем. Ҳамин тариқ, бояд шумораи ҳамаи ивазкунии 5 китобро ёбем. Шумораи ин ивазкуниро меёбем – $P_5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$. Ду китоби кимияро байни худ иваз кардан мумкин аст. Шумораи ивазкунии 2 китоб баробар аст ба $P_2 = 2! = 1 \cdot 2 = 2$. Аз ин ҷо, $m = P_5 \cdot P_2 = 120 \cdot 2 = 240$.

Ҳамин тавр, мувофиқи таърифи классикии эҳтимолият, $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{240}{720} = \frac{1}{3}$.

Мисоли 8. Муштарӣ Ҳангоми зангзанӣ бо телефон се рақами охиринро ба ёд оварда натавонист. Аммо вай медонад, ки ин рақамҳо гуногунанд. Эҳтимолияти зангзании рақами дуруст аз Ҳама кӯшишҳои рақамзанӣ чанд аст?

Ҳал. Ҳодисаи зангзании рақами дурустро Ҳамчун A ва эҳтимолияти онро $P(A)$ нишон медиҳем. Се рақами охиринро бо роҳи A_{10}^3 чидан мумкин аст. Он гоҳ шумораи умумии ҳодисаҳои элементарӣ $n = A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = 8 \cdot 9 \cdot 10 = 720$ мешавад. Рақами телефоне, ки

Муштарӣ ҷустуҷӯ дорад, 1 аз 720 аст. Яъне $m=1$. Мувофиқи таърифи классикии эҳтимолият $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{720}$.

Ҷавоб: $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{720}$



Таърифи статистикий эҳтимолият

Басомади нисбӣ дар баробари эҳтимолият яке аз мафҳумҳои асосии назарияи эҳтимолият мебошад.

Таъриф. Басомади нисбии ҳодиса таносуби шумораи озмоишҳои мебошад, ки дар он ҳодисаи A ба шумораи умумии озмоишҳои воқеан иҷрошуда рух додааст. Ҳодисаи нисбӣ бо $W(A)$ ишора мешавад. Ҳамин тариқ, басомади нисбии ҳодисаи A бо формулаи

$$W(A) = \frac{M}{N} \text{ муайян карда мешавад.}$$

дар ин ҷо M - шумораи озмоишҳо, ки дар он ҳодисаҳои A рух додаанд, N - шумораи умумии озмоишҳои иҷрошуда.

Таъриф. Эҳтимолияти статистикий ҳодиса басомади нисбии ҳодисаи додашуда дар тӯли шумораи зиёди озмоишҳо мебошад.

Ҳангоми муқоисаи таърифҳои эҳтимолият ва басомади нисбӣ, ба хулосаи зерин меоем: муайян кардани эҳтимолият талаб намекунад, ки санҷишҳо воқеан гузаронида шаванд, аммо муайян кардани басомади нисбӣ талаб мекунад, ки санҷишҳо воқеан гузаронида шаванд. Оддӣ карда гӯем, эҳтимолият пеш аз озмоишҳо ҳисоб карда мешавад ва басомади нисбӣ пас аз озмоишҳо ҳисоб карда мешавад.

Агар $M = N$, яъне шумораи санҷишҳои гузаронидашуда ба шумораи рӯйдодҳои ҳодиса баробар бошад, пас ин ҳодиса ҳодисаи бозътимод аст.

Агар $M = 0$ бошад, яъне дар натиҷаи таҷриба воқеа ҳеҷ гоҳ рух надихад, пас ин ҳодиса ҳодисаи имконнопазир аст.

Мисоли 1. Снайпер ба сӯи ҳадаф 30 тир ҳолӣ кард. Агар маълум бошад, ки 23-тои онҳо ба ҳадаф расидаанд, пас басомади нисбии тирҳои ба ҳадаф расидаро ёбед.

Ҳал. 23 тир ба ҳадаф расид, бинобар ин шумораи рӯйдодҳои ҳодиса $M = 23$ ва шумораи умумии тирҳо $N = 30$ аст, бинобар ин, басомади нисбии ин ҳодиса $W(A) = \frac{23}{30}$ аст.

Ҷавоб: $W(A) = \frac{23}{30}$

БОБИ 6. НАЗАРИЯИ ЭХТИМОЛИЯТ

Мисоли 2. Дар байни 1000 адади натуралии аввал басомади нисбии чандкаратаи 5-ро ёбед.

Ҳал. Пайдоиши чандкаратаи 5-ро ҳамчун A ва басомади нисбии онро ҳамчун $W(A)$ ифода мекунем. Миқдори умумии санҷишҳои анҷомдодашуда $N = 1000$ аст ва шумораи ададҳои натуралӣ дар байни 1000 ба 5 тақсимшаванда 200 аст. Бинобар ин $M = 200$ ва басомади нисбии

$$W(A) = \frac{200}{1000} = \frac{1}{5} \quad \text{Ҷавоб: } W(A) = 1/5.$$

Мисоли 3. Дар бораи сайёҳоне, ки аз хориҷи кишвар ба кишвар омадаанд ва шаҳрвандоне, ки аз қаламрави ин кишвар сафар кардаанд (туристони дохилӣ) маълумоти зерин дода шавад.

Солҳо	Миқдори сайёҳони хориҷӣ	Миқдорӣ сайёҳони дохилӣ	Шумораи умумии сайёҳон
2018	610 623	403 989	1 014 612
2019	746 224	348 953	1 095 177
2020	822 558	316 897	1 139 455
2021	774 262	346 103	1 120 365
2022	811 314	351 028	1 162 342
Σ	3 764 981	1 766 970	5 531 951

Басомади нисбии шумораи шаҳрвандони кишварро, ки дар давоми солҳои дидашаванда дар дохили кишвар сафар кардаанд, ёбед.

Ҳал. Ҳодисаеро, ки турист сайёҳи дохилӣ аст, бо A ишора мекунем. Шумораи сайёҳони дохилӣ $M = 1\,766\,970$.

(шумораи озмоишҳои вучуд дорад, ки дар он ҳодисаи A рух додааст). Шумораи умумии сайёҳон $K = 3\,764\,981$.

Маънои шумораи умумии озмоишҳоро дорад. Дар ин ҳолат $N = 1766970 + 3764981 = 5531951$.

$$\text{Ҷавоб: } W = \frac{M}{N} = \frac{1766970}{5531951} \approx 0,3194.$$



Таърифи геометрии эҳтимолият

Майдон (порчаи хат, сатҳ ё ҳаҷм) Ω дода шудааст, ки дар он ҳама нуқтаҳо баробар имконпазиранд. Боварӣ ҳосил кунед, ки нуқтаи ба ин минтақа партофташуда ба он зарба мезанад. Биёед як қисми хурди ω -ро аз ин минтақаи додашуда ҷудо кунем. Бигзор эҳтимолияти зарба задани нуқтае, ки ба минтақаи Ω партофта шудааст, ба минтақаи интиҳобшуда ω дархост карда шавад. Ҳар қадар майдони интиҳобшуда калонтар бошад, эҳтимолияти зарбазанӣ ҳамон қадар зиёд мешавад ва вақте ки майдони ω ба майдони Ω баробар аст, эҳтимолияти зарба ба ҳодисаи муайян табдил меёбад. Аз ин рӯ, эҳтимолияти ба порчаи ω бархӯрдани нуқтаи партофташуда ба андозаи минтақаи ω мустақиман мутаносиб аст ва онро аз нуқтаи назари геометрии шарҳ додан лозим аст. Дар чунин мавридҳо истифода бурдани таърифи геометрии эҳтимолият кулай аст.

Агар ҳодисаи ба минтақаи Ω бархӯрдани нуқтаи партофташуда муайян бошад, пас эҳтимоли бархӯрдани ин нуқта ба порчаи ω аз ин минтақа ҷудошуда ба таносуби андозаи $m(\omega)$ порчаи ω ба андозаи $m(\Omega)$ - ва минтақаи Ω баробар аст:

$$P(A) = \frac{m(\omega)}{m(\Omega)}$$

Дар ин ҷо андозаи майдон метавонад дарозӣ, майдон ё ҳаҷм бошад.

Агар порчаи L -ро ҳамчун минтақаи Ω ва порчаи l -и порчаи L -ро ҳамчун минтақаи ω гирем, он гоҳ эҳтимолияти ба порчаи l партофтани нуқтаи ба порчаи L афтода бо баробарии

$$P(A) = \frac{l}{L} \text{ ҳисоб карда мешавад.}$$

Агар майдони Ω -ро ҳамчун сатҳи S ва майдони ω -ро ҳамчун сатҳи s (ки дар S ҷойгир аст) баррасӣ кунем, он гоҳ эҳтимолияти ба сатҳи S партофтани нуқтаи s мувофиқи формулаи

$$P(A) = \frac{s}{S} \text{ ҳисоб карда мешавад.}$$

Агар минтақаи Ω -ро ҳамчун ҳаҷми V ва минтақаи ω -ро ҳамчун ҳаҷми v гирем, пас эҳтимолияти ба ҳаҷми V партофтани нуқтаи ба ҳаҷми v бо баробарии

$$P(A) = \frac{v}{V} \text{ ҳисоб карда мешавад.}$$

Таърифи геометритро аз рӯи вақт низ метавон шарҳ дод. Агар ҳодиса ногузир дар вақти T ба амал ояд, пас эҳтимолияти рух додани ин ҳодиса дар вақти t ба

$$P(A) = \frac{t}{T} \text{ баробар аст:}$$

Мисоли 1. Нуқта ба доирае, ки радиусаш R аст, партофта мешавад. Эҳтимолияти ба n -кунҷи муқаррарӣ дар доира навишташуда афтодани нуқтаи партофташударо ёбед.

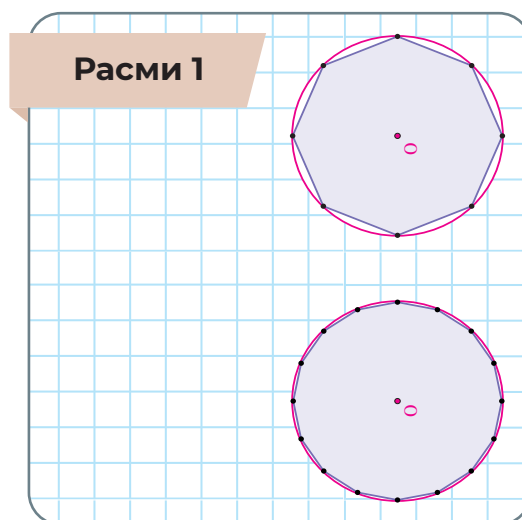
Ҳал. Бигзор $S(D_n)$ – n -майдони n -кунҷа, $S(D)$ – майдони доира бошад (расми 1). Ҳодисаеро, ки нуқта ба n -кунҷаи муқаррарӣ дар доира навишта шудааст, бо B_n ишора мекунем. Пас,

$$P(B_n) = \frac{S(D_n)}{S(D)} = \frac{n \cdot \frac{R^2}{2} \cdot \sin \frac{2\pi}{n}}{\pi R^2} = \frac{n \cdot \sin \frac{2\pi}{n}}{2\pi} = \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}$$

Баъзе ҳолатҳои махсуси ин супоришро дида мебароем.

а) Нуқта ба доираи радиусаш R партофта шудааст. Эҳтимолияти ба секунҷаи муқаррарии дар доира навишташуда афтодани нуқтаи партофташударо ёбед.

Ҳал. Бигзор $S(D_3)$ – майдони секунҷа, $S(D)$ майдони доира бошад (расми 2),



БОБИ 6. НАЗАРИЯИ ЭХТИМОЛИЯТ

B_3 – ҳодисаи зарбаи нуқта дар секунча.

Дар ин ҳолат

$$P(B_3) = \frac{S(D_3)}{S(D)} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4\pi R^2} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \approx 0,4137$$

б) Нуқта ба доираи радиусаш R партофта мешавад. Эҳтимолияти ба чоркунҷаи дар доира навишташуда афтодани нуқтаи партофташударо ёбед.

Ҳал. $S(D_4)$ – майдони квадрат, $S(D)$ – майдони доира бошад (расми 3).

B_4 – ҳодисаи бархӯрдан ба нуқта дар квадрат. Дар ин ҳолат

$$P(B_4) = \frac{S(D_4)}{S(D)} = \frac{2R^2}{\pi R^2} = \frac{2}{\pi} \approx 0,637$$

с) Нуқта ба доирае, ки радиусаш R аст, партофта мешавад. Эҳтимолияти онро пайдо кунед, ки нуқтаи партофташуда дар дохили шашкунҷаи муқаррарии дар доира навишташуда афтода бошад.

Ҳал. Бигзор $S(D_6)$ – майдони шашкунҷа, $S(D)$ – майдони доира (расми 4),

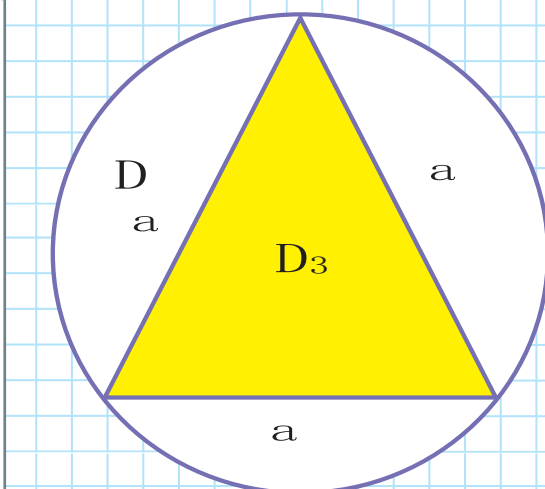
B_6 – ҳодисаи бархӯрдани нуқта дар шашкунҷа. Дар ин ҳолат

$$P(B_6) = \frac{S(D_6)}{S(D)} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{2\pi R^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \approx 0,8274.$$

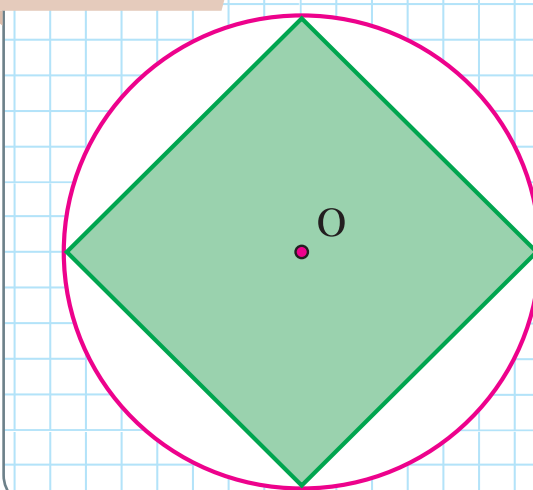
Мисоли 2. Дар порчаи L бо дарозии 30 см порчаи l дарозии 12 см ҷойгир карда мешавад. Эҳтимолияти онро ёбед, ки нуқтаи ба таври тасодуфӣ дар порчаи калон ҷойгиршуда дар порчаи хурд низ афтодааст. Фарз карда мешавад, ки эҳтимолияти ба порчаи l афтодани нуқта ба дарозии он мутаносиб аст ва аз ҷойгиршавии он вобаста нест.

Ҳал. Нуқтаи партофташуда боэътимод ба порчаи L меафтад. Эҳтимолияти $P(E)$ -и ҳодисаи E , яъне нуқтаи ба порчаи l воқеъгардидаро муайян мекунем (расми 5). Дар расм танҳо се ҳолат нишон дода шудааст. Аммо порчаи l метавонад дар ҳама гуна қисми L ҷойгир бошад. Вале, дар ҳама ҳолатҳо, эҳтимолият ҳамон қиматро мегирад, ки ба

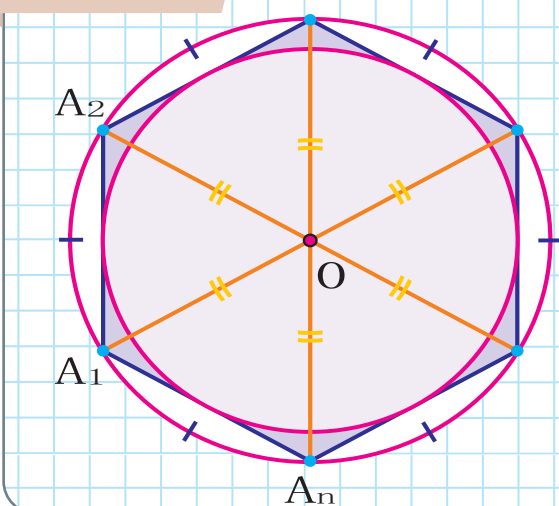
Расми 2



Расми 3



Расми 4



$$P(E) = \frac{l}{L} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5} \text{ баробар аст.}$$

Мисоли 3. Ду дўст аз соати 9 то 10 вохўрдан мехостанд. Пешакї аҳду паймон шуда буд, ки аввалин омада 15 дақиқа дўсташро интизор мешавад. Агар дўсташ дар ин вақт ҳозир нашавад, вай метавонад равад. Эҳтимолияти вохўрии ин ду дўст чанд аст, ки агар онҳо метавонанд дар вақти дилхоҳ аз соати 9 то 10 биёянд ва вақти омадан дар ин вақт тасодуфӣ ва бо ҳам розӣ нашуда бошад?

Ҳал. Бигзор вақти омадани шахси якум x ва вақти омадани шахси дуюм y бошад. Барои вохўрии онҳо иҷрои нобаробарии $|x - y| \leq 15$ зарур ва кофия аст. Биёед x ва y -ро ҳамчун координатҳои декартии ҳамвор бигирем ва дақиқаҳо дар ин тирҳои координатӣ воҳиди ченакҳо бошанд. Ҳамаи лаҳзаҳои имконпазире, ки дар онҳо дўстон вохўранд (пайдоиши ҳодисаи A) ҳамаи нуқтаҳои мураббаъ, ки паҳлӯяш 60 аст, лаҳзаҳои мусоид нуқтаҳои убури майдон мебошанд (расми 6).

Ҳамин тариқ, мувофиқи таърифи геометрии эҳтимолият, эҳтимолияти дилхоҳ ба таносуби майдони $S(D_1)$ қисми сояфкан ба майдони $S(D)$ квадрат баробар аст: $P(A) = \dots$

Майдонҳоро ҳисоб кунем, $S(D_1)$ – ва $S(D)$ –

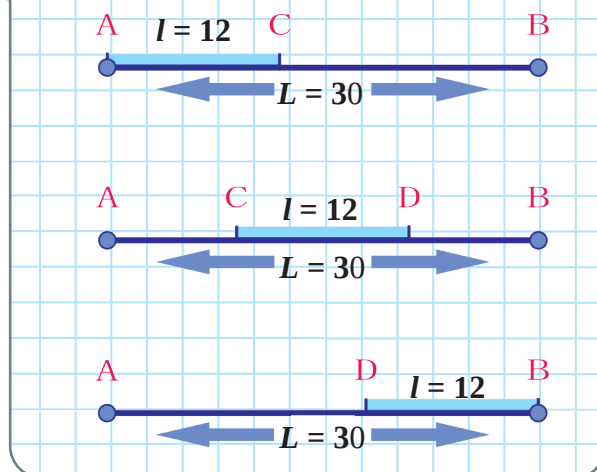
$$S(D_1) = 60 \cdot 60 - 2 \cdot \frac{45 \cdot 45}{2} = 1575$$

$$S(D) = 60 \cdot 60 = 3600.$$

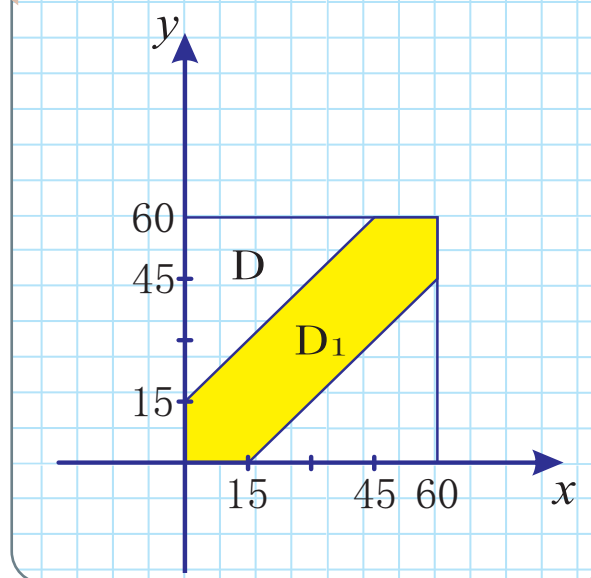
Он гоҳ эҳтимолияти дилхоҳ:

$$P(A) = \frac{S(D_1)}{S(D)} = \frac{1575}{3600} = \frac{7}{16}; \quad P(A) = \frac{7}{16}.$$

Расми 5



Расми 6



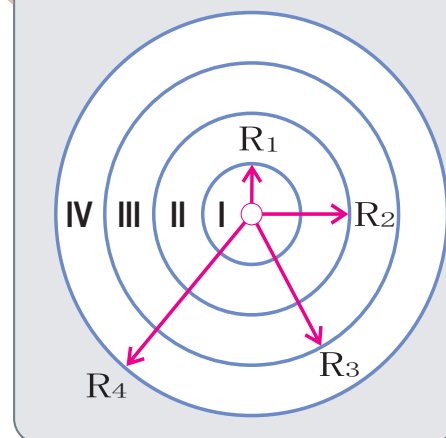
БОБИ 6. НАЗАРИЯИ ЭҲТИМОЛИЯТ

МАШҚҲО

1. Дар лотерея 1000 билет мавҷуд аст. 500-тояш бурд мекунад ва 500-тояш не. Ду билет харида шуд. Эҳтимолияти бурди ҳарду билет чанд аст?
2. Танга ду маротиба партофта мешавад. Эҳтимолияти пайдо шудани сарҳа дар ҳарду ҳолат чӣ гуна аст?
3. Дар рафҳа 20 номгӯй китоб гузошта шудааст. Эҳтимолияти он, ки 5-тои онҳо паҳлӯ ба паҳлӯ ҷойгир шудаанд (ҳодисаи А) чанд аст?
4. Ду зарра партофта мешавад. Суммаи рақамҳои партофташуда адади ҷуфт аст. Эҳтимолияти онро ёбед, ки ҳадди аққал яке аз зарҳа ҳамеша 6-ро мепартояд.
5. Ду дона партоед. Эҳтимолияти Суммаи ададҳои партофташуда 5 ва ҳосили онҳо 4-ро ёбед.
6. Эҳтимолияти онро ёбед, ки ҳангоми партофтани ду зарра Суммаи ададҳои партофташуда ба 7 баробар аст.
7. Дар бораи адади дурақама бо рақамҳои гуногун фикр кунед. Эҳтимолияти адади ба таври тасодуфӣ додашуда рақами пешбинишударо ёбед.
8. Дар як қуттӣ 20 тӯб мавҷуд аст: 10 сиёҳ ва 10 сафед. Як тӯб ба таври тасодуфӣ аз қуттӣ гирифта шуд. Эҳтимолияти чӣ гуна будани ин тӯбро ёбед: а) сафед; б) сиёҳ.
9. Шӯъбаи назорати техникӣ аз 100 адад китоби тасодуфӣ 5 китоби нопураро ошкор кард. Басомади нисбии китобҳои нопураро ёбед.
10. Ба сӯи ҳадаф 20 тир холӣ карда шуд. Гуфта шуд, ки 18 -тои онҳо ба ҳадаф расидаанд. Басомади нисбии расидан ба ҳадафро ёбед.
11. Ҳангоми санҷиши маҷмӯи ашё, басомади нисбии ашёи хуб 0,9 буд. Агар дар маҷмӯъ 200 адад санҷида шуда бошад, пас шумораи ашёҳои мувофиқро ёбед.
12. Вақте аз 920 нафар сокинони шаҳр пурсиданд, ки чӣ тавр ба кор меоянд, маълум шуд, ки 350 нафар бо мошин, 420 нафар бо нақлиёти Суммаиятӣ, 80 нафар бо велосипед ва 70 нафар пиёда сафар мекунад. Басомади нисбии ба кор ояндаҳоро муайян кунед:
 - 1) бо мошин;
 - 2) бо нақлиёти Суммаиятӣ;
 - 3) бо велосипед;
 - 4) пиёда.
13. Дар доирае, ки радиусаш 20 см, яке радиусаш 5 см ва дигаре радиусаш 10 см аст, ду доирае, ки бо ҳам намебурд, кашида мешавад. Эҳтимолияти онро ёбед, ки нуқтае, ки ба таври тасодуфӣ аз дохили доираи калонтар гирифта шудааст, дар дохили яке аз доираҳои хурдтар бошад.
14. Ду рафиқ розӣ шуданд, ки аз соати 10 то 11 дар ҷои муайян вомехӯранд. Шахси аввал 20 дақиқа интизори дуюм мешавад ва баъд меравад. Эҳтимолияти вохӯрии дӯстонро ёбед, агар онҳо дар фосилаи муайяни вақт имкони баробар дошта бошанд.

15. 16. Дар натиҷаи тӯфони саҳт хати телефон дар масофаи 40—70 километр канда шуд. Эҳтимолияти пайдоиши фосила дар байни 50 ва 55 километрро ёбед.
16. Дар доҳили доира як квадрат кашида шудааст. Эҳтимолияти он, ки нуқтае, ки дар доҳили доира ҷойгир шудааст, дар доҳили квадрат бошад, чанд аст?
17. Ҳадаф доираҳои концентрикӣ бо радиусҳои $R_1 = r$, $R_2 = 2r$, $R_3 = 3r$, $R_4 = 4r$ мебошанд. Агар зарбаи найзаи ба ҳадаф андохташуда муайян бошад, пас эҳтимолияти ба ҳар як майдон бархӯрдани найзаро ёбед (расми 7).
18. Дар як вақт ду зарра партофта шуд. Эҳтимолияти панҷ будани Суммаи ададҳои партофташударо ёбед.
19. Дар синф 30 нафар хонандагон таҳсил мекунамд, ки 10 нафари онҳо ба маҳфили математика мераванд. Аз синф ба таври тасодуфӣ шаш донишҷӯ интихоб карда шуданд. Эҳтимолияти онро ёбед, ки ақаллан яке аз онҳо дар маҳфили математика иштирок кунад.
20. Эҳтимолиятро ёбед, ки аз 3 тӯби ба таври тасодуфӣ интихобшуда аз 3 тӯби кабуд ва 4 сабз мешавад 2 тӯби кабуд ва 1 тӯби сабз пайдо мешавад.
21. Эҳтимолияти ба даст овардани як холи мусбатро дар зарраи як бор партофташуда ёбед.
22. Дар вақти кашондан аз 10 ҳазор тарбуз 26-тоаш кафид. Басомади нисбии шумораи тарбузҳои кафидаро ёбед.
23. Дар як қуттӣ 7 тӯби сафед ва 3 сиёҳ мавҷуд аст. Эҳтимолияти сафед будани тӯби ба таври тасодуфӣ гирифташударо ёбед.
24. Муштарӣ, ки ба телефон рақам мечинад, дар охир ду рақамро фаромӯш карда, онҳоро ба таври тасодуфӣ мечинад, танҳо медонист, ки ин рақамҳо гуногунанд. Эҳтимолияти занг задани рақамҳои дурустро ёбед.
25. Дастгоҳ аз 5 элемент иборат буда, 2-тоаш кӯҳна шудааст. Ҳангоми ба кор оғоз кардани дастгоҳ 2 элемент ба таври тасодуфӣ пайваست карда шуданд. Эҳтимолияти пайваст нашудани элементҳои кӯҳнанаашударо ёбед.
26. Дар қуттӣ m тӯби сафед ва n дона сиёҳ мавҷуд аст. Як тӯб аз қуттӣ гирифта мешавад. Эҳтимолияти сафед будани тӯби гирифташударо ёбед.
27. Эҳтимолияти онро ёбед, ки адади натуралие, ки ба таври тасодуфӣ интихоб шудааст, ҳадди аксар 20 бошад ва чандкаратаи 5 бошад.

Расми 7



ТАКРОРЇ

ТАКРОРЇ

ФУНКЦИЯ ВА ХОСИЯТИ ОН

1. Соҳаи муайянии функцияро ёбед.

$$a) f(x) = \frac{x-3}{x^2-4}$$

$$b) y = \sqrt{3x-x^3}$$

$$c) y = \frac{1}{\sqrt{x-5} - \sqrt{9-x}}$$

$$d) y = \sqrt{\frac{(x-1)(3-x)}{x(4-x)}}$$

$$e) y = \sqrt{\frac{x(x+1)}{(x-2)(4-x)}}$$

$$f) y = \sqrt{25-x^2} + \frac{2x-3}{x+1}$$

2. Агар $f(x) = x^2$ ва $g(x) = 2x-1$ пас барои кадом қимат $f(g(x)) = g(f(x))$ ҷой дорад?

3. Агар $f(x+1) = x^2 - 3x + 2$ он гоҳ $f(x) = ?$

4. Агар $f(x) = \sqrt{x^3-1}$ пас $f\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)$ ба чанд баробар аст?

5. Агар $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ пас, $f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{f(x)}$ ба чанд баробар аст?

6. Функцияҳо кадом қиматҳоро мегиранд?

$$a) f(x) = \frac{3}{x-4}$$

$$b) f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

$$c) f(x) = \frac{|x-2|}{x-2} + 2$$

$$d) y = -x^4 + 2x^2 + 5$$

$$e) y = \frac{x^2-4x+9}{x^2-4x+5}$$

$$f) y = \sqrt{x^2-6x+11}$$

7. Кадоме аз функцияҳои зерин ҷуфтанд?

$$a) y = \frac{5x^2}{(x-3)^2}$$

$$b) y = \frac{x(x-2)(x-4)}{x^2-6x+8}$$

$$c) y = x^2 + |x+1|$$

$$d) f(x) = x^3 - \frac{2}{x^3}$$

$$e) y = \begin{cases} -x^2, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$f) y = \sqrt{x^2-6x+11}$$

8. Кадоме аз функцияҳои зерин тоқанд?

$$a) y = 3x^5 + x^3$$

$$b) y = (0,25)^x + (0,25)^{-x}$$

$$c) y = \begin{cases} x, & x < 0 \\ -x, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$d) y = |x| - 1$$

$$e) y = \frac{x^4 - 2x^2}{3x}$$

$$f) y = \sqrt{3-x^2-2x}$$

ФУНКСИЯҲОИ РАТСИОНАЛӢ

Муодиларо ҳал кунед (2-21).

1. Дар кадом қимати t муодилаи $18x+7=5$ ва $18x+7+t=5+t$ баробарқувваанд?

2. $\frac{4x^2-7x-2}{x^2-5x+6}=0$

3. $2+\frac{4}{x^2}=\frac{9}{x}$

4. $1-\frac{15}{x}=\frac{16}{x^2}$

5. $\frac{9}{x}+\frac{13}{2x}=2$

6. $\frac{2}{x-3}=\frac{x}{x+3}$

7. $\frac{x^3-3x^2}{x+2} \cdot \frac{x^2-4}{x^2}=0$

8. $\frac{1-x}{(2-x)(x-3)}+1=\frac{1}{2-x}$

9. $\frac{1}{x^2-9}+\frac{1}{3x-x^2}=\frac{3}{2x+6}$

10. $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2-\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2=0$

11. $\frac{1}{x}+\frac{36}{9x-x^2}-\frac{x-5}{9-x}=0$

12. $\frac{x-49}{50}+\frac{x-50}{49}=\frac{49}{x-50}+\frac{50}{x-49}$

13. $5-\frac{x^2-14x-51}{x^2-x-12}=\frac{3}{x-4}$

14. $\frac{2}{x^2-4}+\frac{x-4}{x^2+2x}=\frac{1}{x^2-2x}$

15. $\frac{30}{x^2-1}-\frac{13}{x^2+x+1}=\frac{18x+7}{x^3-1}$

16. $\frac{x^2-3x}{x-2}+\frac{x-2}{x^2-3x}=2,5$

17. $\frac{4}{x^2-3x+2}-\frac{3}{2x^2-6x+1}+1=0$

18. $\frac{x-2}{x+1}+\frac{4(x+1)}{x-2}=5$

19. $\frac{x^2-x}{x^2-x+1}-\frac{x^2-x+2}{x^2-x-2}=1$

20. $\frac{1}{x^2+2x-3}+\frac{18}{x^2+2x+2}=\frac{18}{x^2+2x+1}$

21. $x^2+\frac{x^2}{(x+1)^2}=\frac{40}{9}$

22. Поезд дар роҳ 30 дақиқа истод. Барои аз рӯи график омадани поезд машинист суръатро дар масофаи 80 километр ба 8 km/h расонд. Поезд аз рӯи график бояд бо кадом суръат ҳаракат мекард?

23. Қайқи мотордор 28 километр ба рафти ҷараён ва 25 километр ба муқобили ҷараён шино кард. Дар айни ҳол вақти дар тамоми сафар сарфшуда ба вақти дар оби ноором тай кардани 54 километр сарфшуда баробар аст. Суръати қайқро дар оби ором ёбед, агар суръати дарё 2 km/h бошад.

Муодиларо ҳал кунед (24-38)

24. $\frac{x}{2}+\frac{2}{x}=\frac{x}{3}+\frac{3}{x}$

25. $\frac{1+x}{6}-\frac{6}{1+x}=\frac{4}{x+1}-\frac{x+1}{4}$

26. $\frac{x-2}{x+2}+\frac{x+2}{x-2}=3\frac{1}{3}$

27. $\frac{2x+1}{2x-1}+\frac{2x-1}{2x+1}=5,2$

28. $\frac{x^2-2x}{x-1}-\frac{2x-1}{1-x}=3$

29. $\frac{2}{x-4}+\frac{4}{x^2-4x}=0,625$

ТАКРОРЎ

$$30.. \frac{(x^2+1)x}{(x^2-x+1)^2} = \frac{10}{9}$$

$$31. \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-3} = \frac{6}{x+6}$$

$$32. x^2 + \frac{1}{x^2} - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4 = 0$$

$$33. x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 6x + 1 = 0$$

$$34. 31\left(\frac{24-5x}{x+1} + \frac{5-6x}{x+4}\right) + 370 = 29\left(\frac{17-7x}{x+2} + \frac{8x+55}{x+3}\right)$$

$$35. \frac{x+3}{4x^2-9} - \frac{3-x}{4x^2+12x+9} = \frac{2}{2x-3}$$

$$36. \frac{30}{x^2-1} + \frac{7-18x}{x^3+1} = \frac{13}{x^2-x+1}$$

$$37. \frac{2x+7}{x^2+5x-6} + \frac{3}{x^2+9x+18} = \frac{1}{x+3}$$

$$38. 2x^4 + x^3 - x^2 + x + 2 = 0$$

СИСТЕМАИ МУОДИЛАҲОИ РАТСИОНАЛӢ

Системаи муодилаҳоро ҳал кунед (1-8).

$$1. \begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2,5 \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x + y + \frac{x}{y} = 9 \\ \frac{(x+y)x}{y} = 20 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2xy - \frac{3x}{y} = 15 \\ xy + \frac{x}{y} = 15 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \frac{1}{x+y} + \frac{2}{x-y} = 3 \\ \frac{3}{x+y} + \frac{4}{x-y} = 7 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{3y}{x} = \frac{1}{2} \\ x^3 - \frac{y^3}{8} = -28 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{25}{12} \\ x^2 - y^2 = 7 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} \frac{4y}{x} + \frac{x}{y} = 5 \\ xy = 4 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x + y = 5 \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = -\frac{13}{6} \end{cases}$$

Системаи муодилаҳоро ҳал кунед (9-13).

$$9. \begin{cases} \frac{2}{2x-y} + \frac{3}{x-2y} = \frac{1}{2} \\ \frac{2}{2x-y} - \frac{1}{x-2y} = \frac{1}{18} \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} \frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{10}{3} \\ 2x^2 + y^2 = 27 \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} \frac{6}{x+y} + \frac{5}{x-y} = 7 \\ \frac{3}{x+y} - \frac{2}{x-y} = -1 \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} \frac{11}{2x-3y} + \frac{18}{3x-2y} = 13 \\ \frac{27}{3x-2y} - \frac{2}{2x-3y} = 1 \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{y}{3} = 3 \\ \frac{x}{2} + \frac{3}{y} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

НОБАРОБАРИИ РАТСИОНАЛЎ

Нобаробарио ҳал кунед.

$$1. (-4x+3)(-5x+4) > 0$$

$$3. (x-2)^2(x-1)(x+7)(x-5) \geq 0$$

$$5. (x^2-1)(x^2+5x+6)(x^2-5x+6) \leq 0$$

$$7. \frac{5x+4}{x-2} < 1$$

$$9. \frac{x-4}{x^2-9x+14} > 0$$

$$11. \frac{x^2+1}{x-3} > 0$$

$$13. (3-\sqrt{10})(2x-7) < 0$$

$$15. \frac{3x-1}{x^2+x+1} \leq 0$$

$$17. \frac{2}{x+2} < \frac{1}{x-3}$$

$$19. \frac{2}{x+3} < \frac{1}{2x-1}$$

$$21. \frac{x^3-5x^2+8x-4}{x-3} \leq 0$$

$$23. \frac{14x(2x+3)}{x+1} < \frac{(9x-30)(2x+3)}{x-4}$$

$$25. (x-3)^2 + \frac{1}{x^2-6x+9} > 2$$

$$2. (x^2-16)^3(x+7) < 0$$

$$4. \frac{(x+6)^3(x-4)}{(7-x)^5} < 0$$

$$6. \left(2x + \frac{1}{x}\right)^2 + 2x + \frac{1}{x} - 12 < 0$$

$$8. \frac{3x+2}{x-3} > 1$$

$$10. \frac{x^4-10x^2+9}{6-2x} < 0$$

$$12. \frac{x+3}{x^2+7} < 0$$

$$14. \frac{(x^2-x-2)^2}{x^2+7x-8} \geq 0$$

$$16. \frac{x^2+2x-15}{3x^2+5x-8} \leq 0$$

$$18. \frac{3}{2-x} > \frac{1}{x+3}$$

$$20. \frac{x+1}{x-2} > \frac{3}{x-2} - \frac{1}{2}$$

$$22. \frac{6}{x-1} \leq \frac{3}{x+1} + \frac{7}{x+2}$$

$$24. \frac{(5x+4)(3x-2)}{x+3} \leq \frac{(3x-2)(x+2)}{1-x}$$

$$26. \frac{2x-3}{4\sqrt{6}-10} > 5+2\sqrt{6}$$

СИСТЕМАИ НОБАРОБАРИҲОИ РАТСИОНАЛЎ

Системаи нобаробариҳоро ҳал кунед.

$$1. \begin{cases} 2x-14 < 0 \\ -3x+9 < 0 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 6x-1 > 9-4x \\ 3-2x < x+16 \end{cases}$$

ТАКРОРЎ

$$3. \begin{cases} 3(2-3x) + 2(3-2x) > x \\ 6 < x^2 - x(x-8) \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x^2 \leq 9 \\ x+1 > 0 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} \frac{5x-4}{4} - \frac{4x+1}{3} \geq \frac{x+2}{4} - 7 \\ \frac{4x}{3} - 1 - \frac{6x+2}{2} > x + \frac{6}{5} \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 13 - \frac{3-7x}{10} + \frac{x+1}{2} < 14 - \frac{7-8x}{2} \\ 7(3x-5) + 4(17-x) > 18 - \frac{5(2x-6)}{2} \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} \frac{3}{4}(x-1) + \frac{7}{8} < \frac{1}{4}(x-1) + \frac{5}{2} \\ \frac{x}{4} - \frac{2x-3}{3} < 2 \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} x^2 + x + 8 < 0 \\ x^2 + 6x + 5 \geq 0 \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} 2-5x \leq 0 \\ x-x^2 \geq 0 \\ -4x^2-5x+21 \geq 0 \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} \frac{2x}{3} - 1 < 3 - 2(1-2x) \\ 3x-5 > 1-2(1-x) \\ 1-2x < 3(2x-1) \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} -2 < 2-x < 1 \\ \frac{x+3}{1-x} \leq \frac{8-x}{x-4} \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} 1 < \left(\frac{2}{3}\right)^n < 3 \\ \left(\frac{3}{4}\right)^n < 1,5 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 5\left(1 - \frac{x-4}{4}\right) - 7(2x-3) > 0 \\ \frac{3x-14}{5} - \frac{3x-10}{20} - 0,7(x+8) < 0 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 4x + \frac{2x-3}{2} > \frac{7x-5}{2} \\ \frac{7x-2}{3} - 2x > \frac{5(x-2)}{4} \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x^2 + 5x - 6 < 0 \\ x+3 \geq 0 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{3x-1}{6} < \frac{2-x}{12} - \frac{x+1}{2} + 3 \\ x > \frac{5x-4}{10} - \frac{3x-1}{5} - 2,5 \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} 5x \geq 2 \\ -0,3x^2 + 4,8 < 0 \\ -2x^2 + 17x + 19 \geq 0 \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} \frac{x-4}{4} - x + 1 < \frac{x-2}{2} - \frac{x-3}{3} \\ 3-x > 2x-10 \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} 7 < 2x+1 < 11 \\ \frac{x+2}{x-5} < \frac{x-6}{x-3} \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} \frac{2}{7} < 2^n < 3 \\ 3^n > 2 \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} \frac{1}{5} < 3^n < 4 \\ 2 < \left(\frac{1}{3}\right)^n < 10 \end{cases}$$

МУОДИЛАҲОИ ИРРАТСИОНАЛЎ

Муодилаҳоро ҳал кунед.

1. $\sqrt{x-1} = -4$

2. $\sqrt{x} = 8$

3. $\sqrt{x} = -16$

4. $\sqrt[3]{x+1} = 2$

5. $\sqrt[4]{x-7} = -3$

6. $\sqrt{x^2+2x-6} \cdot \sqrt{x-9} = 0$

7. $1 + \sqrt{x+3} = 0$

8. $\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1} = 1$

9. $\sqrt{x-4} + \sqrt{x^2-3} = 0$

10. $\sqrt{1+4x-x^2} = x-1$

11. $\sqrt{x-3} + \sqrt{2x+4} = -11$

12. $\sqrt{2x^2+8x+7} - 2 = x$

13. $\sqrt{x^2-7x+12} = 2x-6$

14. $\sqrt{4-x} = \sqrt{x-7}$

15. $\sqrt{3+\sqrt{5-x}} = \sqrt{x}$

16. $\sqrt{4-x} + \sqrt{5+x} = 3$

17. $2\sqrt{x+18} + \sqrt{4x-3} = 15$

18. $\sqrt{x+20} - \sqrt{x-1} = 3$

19. $\sqrt{x-5} + \sqrt{1-x} = 7$

20. $(x^2-5x+6) \cdot \sqrt{2-x} = 0$

21. $(2-x) \cdot \sqrt{x^2-x-20} = 12-6x$

22. $(x-1) \cdot \sqrt{\frac{x-2}{x^2-1}} = 0$

23. $(4x-x^2-3) \cdot \sqrt{x^2-2x} = 0$

24. $\sqrt[3]{9x+1} = 1+3x$

25. $\sqrt{x+5} + \sqrt[4]{x+5} = 12$

26. $x^2+11+\sqrt{x^2+4} = 42$

27. $x^2+5x+\sqrt{x^2+5x-5} = 17$

28. $\sqrt{x^2-x} + \sqrt{2-x-x^2} = \sqrt{x}-1$

29. $\sqrt{4-x} + \sqrt{x-4} = 0$

30. $\sqrt{7-5x} + \sqrt{5x-7} = 29$

31. $\sqrt{\frac{x-1}{2x+1}} + \sqrt{\frac{2x+1}{x-1}} = \frac{10}{3}$

32. $\sqrt{5+2x} = 10-3\sqrt[4]{5+2x}$

33. $\sqrt{3-x} + \sqrt{x-2} = (x-7)^2 \cdot (x-5)$

34. $2\sqrt{x-1} - 5 = \frac{3}{\sqrt{x-1}}$

35. $\frac{\sqrt{x^2-3x-4}}{x+2} = \frac{\sqrt{x^2-3x-4}}{4-x}$

36. $x^2 + \sqrt{x^2+20} = 22$

37. $\sqrt{x^3+4x-1-8\sqrt{x^4-x}} = \sqrt{x^3-1} + 2\sqrt{x}$

38. $6x^2 + 7x\sqrt{1+x} = 24(1+x)$

39. $\sqrt{(x^2+8x)^2} = x^2+8x$

40. $\sqrt{(4x^2-5x)^2} = 5x-4x^2$

41. $\sqrt{x-4}\sqrt{x-4} = 2-\sqrt{x-4}$

42. $\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} - 2} = x - \frac{1}{x}$

ТАКРОРЎ

$$43. \sqrt{5-x} + \sqrt{x-6} = x^2 + 2x$$

$$44. \sqrt{x+6\sqrt{x-9}} + \sqrt{x-6\sqrt{x-9}} = 6$$

$$45. \sqrt{x+8\sqrt{x-16}} + \sqrt{x-8\sqrt{x-16}} = 2\sqrt{x-16}$$

$$46. \frac{\sqrt[4]{x^4-16} + \sqrt[6]{x^3-8}}{3x-x^2-2} = 0$$

СИСТЕМАИ МУОДИЛАҲОИ ИРРАТСИОНАЛӢ

Системаи муодилаҳоро ҳал кунед.

$$1. \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 8 \\ \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = 15 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \sqrt{xy} = 12 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 7 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 6 \\ x - y = 12 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \sqrt{x+3y+6} = 2 \\ \sqrt{2x-y+2} = 1 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 30 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 3\sqrt{x} - \sqrt{y} = 8 \\ \sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 19 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 25y + x = 100 - 10\sqrt{xy}, \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 4, \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} xy = 64 \\ x - y + \sqrt{xy} = 20 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} \sqrt{x+y-1} = 1 \\ \sqrt{x-y+2} = 2y-2 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 7 \\ xy = 9 \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 26 \\ \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 6 \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = -3 \\ xy = 8 \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 3\frac{3}{4} \\ xy = 1 \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 5 \\ \sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y} = 1 \end{cases}$$

$$15. \text{ a) } \begin{cases} 5x + 3\sqrt{xy} + 4y = 12 \\ 3x + 2\sqrt{xy} + 3y = 8 \end{cases}$$

$$\text{ b) } \begin{cases} 2x - 6\sqrt{xy} + 7y = 9 \\ x - 4\sqrt{xy} + 5y = 6 \end{cases}$$

$$16. \text{ a) } \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5 \\ x + y + 4\sqrt{xy} = 37 \end{cases}$$

$$\text{ b) } \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 \\ x + y - 3\sqrt{xy} = 1 \end{cases}$$

$$17. \text{ a) } \begin{cases} x\sqrt{x} + 12y\sqrt{x} = 28 \\ 8y\sqrt{y} + 6x\sqrt{y} = 36 \end{cases}$$

$$\text{ b) } \begin{cases} x\sqrt{x} + 27y\sqrt{x} = 36 \\ 27y\sqrt{y} + 9x\sqrt{y} = 28 \end{cases}$$

МУОДИЛАҲОИ НИШОНДИҲАНДАГЎ

1. Муодиларо ҳал кунед.

$$a) \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{1024}$$

$$b) \left(\frac{5}{4}\right)^{2x-1} = (0,8)^{x-2}$$

$$c) 0,5^{\sqrt{x+1}} \cdot 0,5^{-1} = 0,5^{\sqrt{x}}$$

$$d) 4^{x-1} - 4^{x+1} + 4^{x+2} = 49$$

$$e) 2^{x+1} + 3 \cdot 2^{x-1} - 5 \cdot 2^x + 6 = 0$$

$$f) 5^{x+1} + 3 \cdot 5^{x-1} - 6 \cdot 5^x + 10 = 0$$

2. Муодилаи $49^x + 7^x + 1 = 57$ чанд реша дорад?

3. Решаи калонтарини муодилаи $9^x - 3^{x+1} + 2 = 0$ -ро ёбед.

НОБАРОБАРИҲОИ НИШОНДИҲАНДАГЎ

1. Нобаробариро ҳал кунед.

$$a) \left(\frac{2}{3}\right)^{2x^2-3x} \leq \frac{3}{2}$$

$$b) \left(\frac{1}{7}\right)^{3x+4} \cdot 7\sqrt{7} < \frac{1}{7}$$

$$c) (0,04)^{2x} > (0,2)^{x(3-x)}$$

$$d) 25^x + 5^x > 0$$

$$e) 3^{\frac{x-1}{x+1}} > 27$$

$$f) 3,2^{2(x-\frac{1}{2})} \geq 3,2\sqrt{3,2}$$

$$g) 7^{2x-9} > 7^{3x-6}$$

$$h) 0,5^{4x+3} \leq 0,5^{6x-1}$$

$$i) 2\sqrt{2} \cdot 2^{x-3} \geq \frac{1}{2}$$

2. Чандто ададҳои натуралӣ нобаробариро қонеъ мекунад?

$$a) 8^{-2x+8} > 512$$

$$b) 2^{5x-7} \leq 16$$

$$c) 2^{5x-7} \geq 16$$

$$d) 0,1^{4x-5} > 0,001$$

3. Калонтарин адади бутуни ба ҳал дохилшударо ёбед.

$$a) 2,5^{2x+3} \leq 6,25$$

$$b) 1,1^{5x-3} < 1,21$$

$$c) 0,7^{9x+4} > 0,343$$

$$d) \left(\frac{2}{5}\right)^{7x-9} \geq \frac{8}{125}$$

МАФҲУМИ ЛОГАРИФМ. ФУНКСИЯҲОИ ЛОГАРИФМЎ

1. Графики кадом нуқтаи функция ба $A(-2; -1)$ тааллуқ надорад?

$$1) y = \log_2\left(-\frac{1}{x}\right)$$

$$2) y = \log_2|x|$$

$$3) y = \log_{\frac{1}{2}}|x|$$

$$4) y = -\log_2(-x)$$

2. Соҳаи муайянии функцияро ёбед.

$$a) y = \lg(x+2) + \lg(3-x)$$

$$b) y = \ln(x+|x|)$$

3. Ҳангоми кадом $y = \log_x(x+1)$ функцияи $x \in \{2;3;4;5;6\}$ қимати калонтарин мегирад?

4. Чӣ тавр графики функцияи $y = \log_{\frac{1}{3}}x$ -ро аз графики функцияи $y = \log_3x$ табдил додан мумкин аст?

ТАКРОРЎ

ТАБДИЛДИХИИ МОНАНДИИ ИФОДАҲОИ ЛОГАРИФМЎ

1. Қимати ифодаро ҳисоб кунед.

a) $\log_{12} \sqrt[5]{144}$

b) $\log_3 5 - \log_3 \frac{5}{27}$

c) $\frac{\log_{27} 2}{\log_3 8}$

d) $\frac{\log_{11} 12}{\log_{11} 6} + \frac{\log_5 3}{\log_5 6}$

e) $\frac{3\log_7 2 - \frac{1}{2}\log_7 64}{4\log_5 2 + \frac{1}{3}\log_5 27}$

f) $81^{\frac{1}{\log_5 3}} + 27^{\log_3 4} + 3^{\frac{4}{\log_7 9}}$

g) $\frac{1}{2}\log_3 \log_5 125$

h) $-\log_2 \log_2 \sqrt[4]{2}$

МУОДИЛАҲОИ ЛОГАРИФМЎ

1. Муодиларо ҳал кунед

a) $\log_5 x = 2$

b) $\log_{0,2} x = 4$

c) $\log_{\frac{1}{3}} x = -1$

d) $\log_7 x = \frac{1}{3}$

2. Муодиларо ҳал кунед

a) $\log_3 x + \log_{\frac{1}{3}} x + 2 = 0$

b) $3\log_{\frac{1}{7}} x = \log_{\frac{1}{7}} 9 + \log_{\frac{1}{7}} 3$

c) $\log_2 (3x - 6) = \log_2 (2x - 3)$

d) $\log_6 (14 - 4x) = \log_6 (2x + 2)$

3. Муодиларо ҳал кунед

a) $\log_2^2 \left(x + \frac{1}{x} \right) - 1 = 0$

b) $\log_{\frac{1}{2}}^2 (x^2 + x) + \log_{\frac{1}{2}} (x^2 + x) = 0$

c) $\lg^2 x - \lg x + 1 = \frac{9}{\lg 10x}$

d) $\log_2^2 x + 7\log_2 x + 49 = \frac{-218}{\log_2 \frac{x}{128}}$

4. Муодиларо ҳал кунед

a) $x^{5+\log_2 x} = \frac{1}{16}$

b) $5^{2(\log_5 2 + x)} - 2 = 5^{x+\log_5 2}$

c) $\lg \left(625 \sqrt[5]{5^{x^2+20x+5}} \right) = 0$

d) $x^{\lg 2} + 2^{\lg x} = 4$

5. Муодилаи $\log_2 (x + 4) = -2\log_2 \frac{1}{2-x}$ чанд решаи бутун дорад?

СИСТЕМАИ МУОДИЛАҲОИ НИШОНДИҲАНДАГЎ ВА ЛОГАРИФМЎ

1. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед.

a) $\begin{cases} 3 \cdot 7^x - 3^y = 12 \\ 7^x \cdot 3^y = 15 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3^{-x} \cdot 2^y = \frac{4}{9} \\ x + y = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2^x + 2y = 1 \\ 3y - 6y^2 = 2^{x-1} \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2^x + 2y = 1 \\ 3y - 6y^2 = 2^{x-1} \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3 \cdot 2^x + y = 13 \\ 2^{2x+1} + 3y = 35 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 3 \cdot 7^x + 3^y = 12 \\ 7^x \cdot 3^y = 4 \end{cases}$

2. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед.

$$a) \begin{cases} \log_5 (x+y) = 1 \\ 2^x + 2^y = 12 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \log_4 x + \log_4 y = 1 + \log_4 9 \\ 2^{\frac{x+y}{2}} = 1024 \end{cases}$$

НОБАРОБАРИИ ЛОГАРИФМЎ

1. Нобаробарио ҳал кунед.

$$a) \log_4 (x+5) < 0$$

$$b) \log_3 (2-5x) < 1$$

$$c) \log_{\frac{1}{7}} (x+5) > -1$$

$$d) \log_{0,2} (x-3) + 2 \geq 0$$

$$e) \log_{\frac{1}{2}} (2x+3) > \log_{\frac{1}{2}} (x+1)$$

$$f) \log_{\frac{1}{3}} (x^2 + x + 1) \leq 0$$

$$g) \log_3 (13-4^x) > 2$$

$$h) 2 \log_3 x - \log_x 81 < 2$$

$$i) \log_2 (x-1) + \log_2 (x+1) \geq 3$$

2. Чанд адади натуралии камтар аз 5 нобаробарии $\frac{1}{\log_3 x - 2} > \frac{1}{\log_3 x}$ -ро қонеъ мекунад?

3. Суммаи ададҳои натуралии қонеъкунандаи нобаробарии $2 \log_5 x - \log_x 125 < 1$ -ро ёбед.

4. Чанд адади натуралӣ нобаробарии $\log_x (3-x) > 1$ -ро қонеъ мекунад?

ФУНКЦИЯҲОИ ТРИГОНОМЕТРЎ

1. Соҳаи муайянии функцияҳоро ёбед.

$$a) y = \frac{1}{\sin x}$$

$$b) y = \frac{1}{\cos x}$$

$$c) y = \frac{\cos x}{\sin x - 2 \sin^2 x}$$

$$d) y = \frac{3x}{2 \cos x - 1}$$

$$e) y = \cos x + \sin x$$

$$f) y = \cos x + \operatorname{ctg} x$$

2. Маҷмӯи қиматҳои функцияро ёбед.

$$a) y = 3 \cos x - 1$$

$$b) y = 2 - \sin x$$

$$c) y = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$d) y = 2 \cos^2 x - 1$$

3. Ҷуфт ё тоқ будани функцияро муайян кунед.

$$a) y = \frac{\sin x}{x}$$

$$b) y = x \cos x$$

$$c) y = \sin x + x^2$$

$$d) y = \cos x - x^2$$

4. Хурдтарин даври мусбати функцияро ёбед.

$$a) y = \sin \frac{x}{2}$$

$$b) y = \cos(3x - 1)$$

$$c) y = \operatorname{tg} 2x$$

$$d) y = \cos \frac{x}{3}$$

5. Калонтарин ва хурдтарин қиматҳои функцияро ёбед.

$$a) y = \cos^4 x - \sin^4 x$$

$$b) y = \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$c) y = 1 - 2 |\sin 3x|$$

6. Сифрҳои функцияро ёбед.

$$a) y = \sin x - 2$$

$$b) y = 2 \cos x + 1$$

$$c) y = x \cos x$$

$$d) y = \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right)$$

ТАКРОРЇ

ФУНКСИЯҲОИ ТРИГОНОМЕТРИИ БАРЪАКС

1. Соҳаи муайянии функцияҳоро ёбед.

a) $y = \arccos \frac{2x+3}{4}$

b) $y = \arcsin(2+3x)$

c) $y = \arcsin(3\sqrt{x}+2)$

d) $y = \arccos \frac{4-x}{3}$

2. Муқоиса кунед.

a) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$ ва $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$

b) $\arctg(-1)$ ва $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$

c) $\arccos \sqrt{3}$ ва $\arcsin 1$

d) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ва $\arcsin \frac{1}{2}$

3. Қимати ифодаро ёбед.

a) $2 \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arctg(-1) + \arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\arcsin \frac{1}{2} + 4 \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \arctg(-\sqrt{3})$

c) $\arctg(-\sqrt{3}) + \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arccos 1$

d) $\arcsin 1 - \frac{1}{2} + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 6 \arctg \sqrt{3}$

4. Ҳисоб кунед.

a) $2 \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + 3 \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$

b) $2 \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $2 \arctg 1 + 3 \arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

d) $2 \arctg(-1) + 3 \arctg(\sqrt{3})$

5. Ҳисоб кунед.

a) $\sin\left(\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

b) $\tg\left(\arccos \frac{1}{2}\right)$

c) $\tg\left(\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

d) $\sin(4 \arcsin 1)$

e) $\cos(\arcsin 1)$

f) $\sin\left(\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

МУОДИЛА ВА НОБАРОВАРИҲОИ ТРИГОНОМЕТРЇ

1. Муодиларо дар фосилаи $0 \leq x < 360^\circ$ ҳал кунед.

a) $\sin x = -0,3$

b) $\sin x = 0,15$

c) $\cos x = 0,6$

d) $\cos x = -0,43$

2. Қиматҳои x -ро дар фосилаҳои дода шуда ёбед.

a) $4 \sin x + 2 = 0, 0 \leq x < 2\pi$

b) $\ctg x - \sqrt{3} = 0, 0 \leq x < 2\pi$

c) $2 \sin^2 x + 5 \sin x = 3, 0 \leq x < 2\pi$

d) $\cos 2x = -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \leq x < 2\pi$

3. Муодиларо дар фосилаи $0 \leq x < 360^\circ$ ҳал кунед.

a) $7 - 6 \cos^2 x = 5 \sin x$

b) $7 + 2 \cos x = 8 \sin^2 x$

c) $2 \sin x - 3 \cos x = 0$

4. Муодиларо ҳал кунед.

$$\text{a) } \sin 10x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{b) } \cos 10x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{c) } \operatorname{tg} 10x = \sqrt{3} \quad \text{d) } \operatorname{ctg} 10x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

5. Муодиларо ҳал кунед.

$$\text{a) } \sin 4x \cos 3x \operatorname{tg} 8x = 0 \quad \text{b) } \cos 4x = -\cos 5x \quad \text{c) } \operatorname{tg} 5x = -\operatorname{tg} \frac{x}{3}$$

6. Муодиларо ҳал кунед.

$$\text{a) } 2\sin^2 x + \cos^2 x - 2 = 0 \quad \text{b) } 2\sin^2 x + \cos x = 0 \quad \text{c) } \sin x \cos x = 0$$

7. Муодиларо ҳал кунед.

$$\begin{aligned} \text{a) } \sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x &= 0 & \text{b) } 7\cos^2 x - 3\sin^2 x &= 0 \\ \text{c) } \cos^2 2x - 10\sin 2x \cos 2x + 21\sin^2 2x &= 0 & \text{d) } 8\sin^2 x - \cos^2 x &= 0 \end{aligned}$$

8. Муодиларо ҳал кунед.

$$\begin{aligned} \text{a) } \cos^2 2x + 1 &= 2\cos^2 x & \text{b) } 3\cos^2 x \sin x + 1 &= 3\cos^2 x + \sin x \\ \text{c) } 6\cos^2 x + 6\sin^2 x - 3\cos x - 3 &= 0 & \text{d) } 5\sin^2 x \cos x + 6\cos^2 x - 10\cos x + 6 &= 0 \end{aligned}$$

9. Муодиларо ҳал кунед.

$$\begin{aligned} \text{a) } \cos^2 x + \cos x &= 0 & \text{b) } \cos 3x &= 2\cos 2x - 1 \\ \text{c) } 2\cos^2 x &= 4\sin x \cos x - 1 & \text{d) } \cos^2 x - 3\sin x \cos x &= -1 \end{aligned}$$

10. Муодилаҳоро бо иваз кардани $\sin x + \cos x = t$ ҳал кунед.

$$\text{a) } 2(\sin x + \cos x) + \sin 2x + 1 = 0 \quad \text{b) } \sin x + \cos x = 1 + \frac{\sin 2x}{2}$$

11. Муодиларо ҳал кунед.

$$\text{a) } 2\sin^8 x - 3\cos^8 x = 5 \quad \text{b) } (\cos 2x - \cos 4x)^2 = 4 - 4\cos^2 3x$$

12. Муодилаҳоро бо дохил кардани кунҷи ёрирасон ҳал кунед.

$$\text{a) } 12\cos x - 5\sin x = -13 \quad \text{b) } \sin x + \cos x = \sqrt{2}$$

13. Муодиларо ҳал кунед.

$$\begin{aligned} \text{a) } \sqrt{2} \cos 2x &\leq 1 & \text{b) } 2\sin 3x &> -1 & \text{c) } \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) &\leq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{d) } \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) &\geq \frac{\sqrt{3}}{2} & \text{e) } \sin\left(\frac{x}{4} - 3\right) &< \frac{\sqrt{2}}{2} & \text{f) } \cos\left(\frac{x}{3} + 2\right) &< \frac{1}{2} \end{aligned}$$

14. Муодиларо ҳал кунед.

$$\text{a) } \sin^2 x + 2\sin x > 0 \quad \text{b) } \cos^2 x - \cos x < 0$$

ТАКРОРЎ

НАЗАРИЯИ ЭҲТИМОЛИЯТ

1. Дар лотерея 2000 билет мавҷуд аст, ки ба 400-тоаш бурд мебарояд. Эҳтимолияти бурднокро аз ду чиптаи додашуда танҳо якеро ёбед.
2. Эҳтимолиятро ёбед, ки ҳангоми ғелонидани ду заррача, Суммаи заррачаҳои ғелонда 7 ва ҳосили ҳарби он ба 6 аст баробар аст.
3. Агар аз зарфи дорои 7 тӯби сиёҳ ва 8 тӯби сафед ба таври тасодуфӣ як тӯб гирифта шавад, пас эҳтимолияти пайдо шудани онро ёбед: а) сафед; б) тӯби сиёҳ.
4. Эҳтимолияти ба 3 баробар будани адади натуралӣ, ки аз 25 зиёд нест, ба таври тасодуфӣ интихобшударо ёбед.
5. Аз маҷмӯи 1000 китобе, ки ношир ба таври тасодуфӣ интихоб кардааст, 7-тоаш корношоям баромад. Басомади нисбии китобҳои корношоямро ёбед.
6. Дар як квадрат доира кашида шудааст. Эҳтимолияти дар дохили доира будани нуқтаи дар квадрат ҷойгиршударо ёбед.
7. Ҳангомаи баробар партофтани дуто санги рақамдор суммаи ададҳои маълумшуда эҳтимоли аз шаш хурд буданашро ёбед.
8. Дар як қуттӣ 11 тӯби сафед ва 9 сиёҳ мавҷуд аст. Эҳтимолияти сафед будани 2 аз 4 тӯби ба таври тасодуфӣ гирифташударо ёбед.
9. Дар як коса 7 тӯби сурх ва 13 кабуд мавҷуд аст. Эҳтимолияти якранг будани 2 тӯби ба таври тасодуфӣ интихобшударо ёбед.
10. Дар як қуттӣ 7 тӯби сафед ва 3 сиёҳ мавҷуд аст. Эҳтимолияти онро ёбед, ки 2 тӯби ба таври тасодуфӣ аз он гирифташуда рангҳои гуногун дошта бошанд.
11. Муштарӣ рақами телефонро чида, дар охир се рақамро фаромӯш кардааст. Эҳтимолияти тасодуфии рақами дурустро ёбед.
12. Дар як қуттӣ 100 лампа мавҷуд аст, ки 10-тоаш хомӯш аст. Эҳтимолияти сӯхтагӣ будани 2 лампаро ёбед, агар шумо ба таври тасодуфӣ 4 лампа гиред.
13. Эҳтимолияти онро ёбед, ки 3 тӯби ба таври тасодуфӣ интихобшуда аз 3 тӯби кабуд, 4 сурх ва 5 тӯби сабз рангҳои гуногун дошта бошанд.
14. Агар дар як партияи ашё 250 адад санҷида шавад, ки басомади нисбии мувофиқат ба 0,8 баробар аст, шумораи ашёҳои коршоямро ёбед.
15. Дар халта 5 тӯби кабуд ва 7 зард мавҷуд аст. Эҳтимолияти рангҳои гуногун доштани ду тӯби ба таври тасодуфӣ гирифташуда ёбед.
16. Дар сабад 5 себи сабз, 7 зард ва 8 сурх аст. Эҳтимолияти рангҳои гуногун доштани 3 себи ба таври тасодуфӣ гирифташуда ёбед.
17. Дар қуттӣ 6 зарраи якхела мавҷуд аст. Эҳтимолияти онро ёбед, ки вақте ки ҳамаи зарраҳо як-як гирифта мешаванд, зарҳо бо тартиби камшавӣ меафтанд.
18. Дар як қуттӣ 12 тӯби сафед ва 18 тӯби сурх мавҷуд аст. Эҳтимолияти сурх будани 3-тоаш аз 4 тӯби гирифташуда ёбед.
19. Дар синф 36 нафар хонандагон таҳсил мекунанд, ки 13 нафари онҳо ба маҳфили шоҳмот машғуланд. Эҳтимолияти аз 7 хонандаи ин синф ба маҳфили шоҳмот рафтани ақаллан яке аз онҳоро ёбед.

O'quv nashri

ALGEBRA

VA ANALIZ ASOSLARI

*Umumiy o'rta ta'lim maktablarining
10-sinfi uchun darslik
(Tojik tilida)*

Мутарчим Саидалӣ Авазов
Муҳаррир Абдусалом Эшонқулов
Муҳаррири бадеӣ Сарвар Фармонов
Муҳаррири техникӣ Акмал Сулаймонов
Рассом Иқбол Салоҳиддинов
Дизайнер ва саҳифабанд Рустам Худайбергенов
Мусаҳҳеҳ Чумъаназар Эшонқулов

Ба чопаш 28.09.2022 имзо шуд. Андозаи 60X84 1/8.
Гарнитурани Ариал. Кегели 12 шпондор.
Бо усули офсет чоп шудааст.
Чузъи чопии шартӣ 22,32.
Чузъи нашрию ҳисобӣ 22,10.
Теъдоди нашр 8744 нусха. Фармоиши № 1150.



Дар матбааи «PRINTUZ»-и ЧММ чоп карда шуд.
Шаҳри Тошканд, ноҳияи Миробод,
кӯчаи Қўшқўпрук 28/ хонаи 1.

Чадвали нишондоди ҳолати китоби дарсии ба иҷора диҳанда

№	Ному насаби донишомӯз	Соли хониш	Ҳолати китоб Ҳангоми гирифтани	Имзои роҳбари синф	Ҳолати китоб Ҳангоми супоридани	Имзои роҳбари синф
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Чадвали болой Ҳангоми ба иҷора додан ва дар охири соли хониш баргардонида гирифтани китоб аз тарафи роҳбари синф аз рӯйи меъёрҳои зерин пур карда мешавад:

Нав	Ҳолати китоб Ҳангоми бори аввал супоридани
Хуб	Муқовааш бутун, аз қисми асосии китоб ҷудо нашудааст. Ҳамаи varaқҳо-яш ҳаст, надаридааст, ҷудо нашудааст, дар саҳифаҳо навишт ва хатҳо нест.
Қаноатбахш	Муқова қач шудааст, канорҳояш қоҳида, якчанд хатҳо қашида шудаанд, ҳолати аз қисми асосӣ ҷудошавӣ дорад, аз тарафи истифодабаранда қаноатбахш таъмир гаштааст. Vарақҳои ҷудошудааш аз нав таъмир гашта, дар баъзе саҳифаҳо хат қашида шудаанд.
Ғайриқаноатбахш	Муқова даридааст ва ба рӯйҳояш хат қашида шудааст, аз қисми асосӣ ҷудо шудааст ё ки умуман нест, ғайриқаноатбахш таъмир шудааст. Саҳифаҳо дарида, varaқҳо намерасанд, хат қашида, ранг карда партофта шудааст. Китобро барқарор карда намешавад.