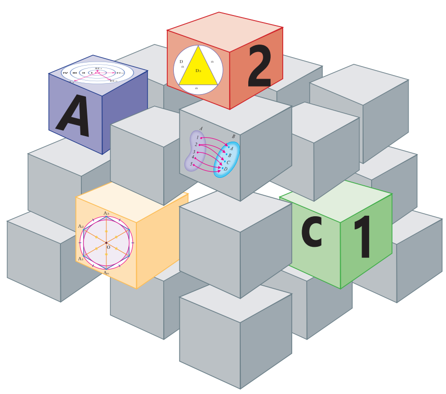
ALGEBRA

HÁM ANALIZ TIYKARLARÍ 10



Ulıwma orta bilimlendiriw mektepleriniń 10-klası ushın sabaqlıq

Ózbekstan Respublikası Xalıq bilimlendiriw ministrligi baspaǵa usınıs etken

Jańa basılım

TASHKENT–2022

UÓK 51(075.3)
KBK 22.14ya72
A 51

Dúziwshiler:

Adilbek Zaitov, Rano Hamrayeva, Kalmurza Sagidullayev, Umid Rahmanov, Baxtiyar Abdiyev, Baljan Urinbayeva

Xalıqaralıq ekspert:

Marcelo Staricoff

Pikir bildiriwshiler:

M. A. Mirzaahmedov – Muhammad al-Xarezmiy atındağı qánigelestirilgen mektebi matematika páni muğallimi, fizika-matematika pánleri kandidatı, docent.

J. A. Qoyjanov – Náwayı wálayatı Xatırshı rayonındağı 5-sanlı ulıwma orta bilim beriw mektebi matematika páni muğallimi.

D. D. Aroyev – Qoqan mámleketlik pedagogikalıq institutı matematika kafedrası docenti, PhD.

Algebra hám analiz tiykarları [Tekst]: 10-klası ushın sabaqlıq / A. Zaitov [hám basq.] – Tashkent: Respublikalıq bilimlendiriw orayı, 2022. – 192 b.

UNICEFtiń Ózbekstandağı wákilligi
menen birgelikte tayarlandı.

Ózbekstan Respublikası Ilimler akademiyası V. I. Romanovskiy atındağı
Matematika institutı juwmağı tiykarında tolıqtırıldı.

Original maket hám dizayn koncepciyası
Respublikalıq bilimlendiriw orayı tárepinen islendi.

Respublika maqsetli kitap qorı qarjıları esabınan basıp shığarıldı.

SHÁRTLI BELGILER:

– ańsat tapsırmalar.

– quramalıraq tapsırmalar.

– quramalı tapsırmalar.

– kishi temalar.

ISBN 978-9943-8457-2-5

MAZMUNÍ

TÁKIRARLAW

1-BAP. FUNKCIYALAR

2-BAP. RACIONAL TEŃLEMELER HÁM TEŃSIZLIKLER. IRRACIONAL TEŃLEMELER

10-KLASS "ALGEBRA HÁM ANALIZ TIYKARLARÍ" SABAQLÍĞÍ USHÍN BILIMLENDIRIW QOSÍM-SHASÍ

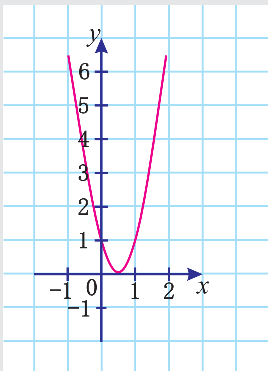
10-KLASS "ALGEBRA HÁM ANALIZ TIYKARLARÍ" SABAQLÍĞÍ USHÍN VIDEOSABAQLAR

TÁKIRARLAW

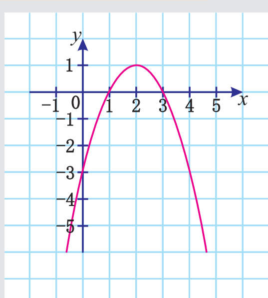
- KVADRAT FUNKCIYA
- KVADRAT TEŃSIZLIK
- TRIGONOMETRIYALÍQ BIRDEYLIKLER
- ARIFMETIKALÍQ HÁM GEOMETRIYALÍQ PROGRESSIYALAR

KVADRAT FUNKCIYA

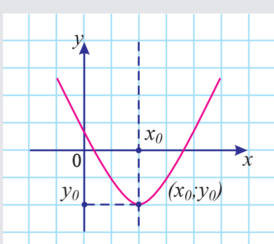
1-súwret



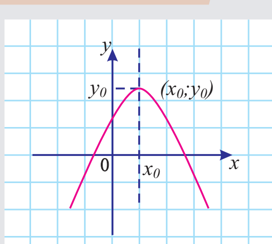
2-súwret



3-súwret



4-súwret



Kvadrat funkciyanıń anıqlaması

Anıqlama

$y = ax^2 + bx + c$ kórinisindegi funkciya ***kvadrat funkciya*** dep ataladı, bul jerde *a*, *b*, *c* – berilgen haqıyqıy sanlar, $a \neq 0$, *x* – haqıyqıy ózgeriwshi.

Máselen, tómendegi funkciyalar kvadrat funkciyalar boladı:

$y = 3x^2 + 2x - 1$, $y = -4x^2 - 5x$, $y = 6x^2 - 3$, $y = 4x^2$, $y = 2 - x^2$.

Kvadrat funkciyanıń grafigi

1. $y = ax^2 + bx + c$ kvadrat funkciyanıń grafigi *parabola* dep atalatuǵın iymek sızıqtan ibarat boladı. 1-súwrette $y = 4x^2 - 4x + 1$ hám 2-súwrette $y = -x^2 + 4x - 3$ funkciyalardıń grafikleri kórsetilgen.
2. $y = ax^2 + bx + c$ parabola shaqaları $a > 0$ bolǵanda (3-*súwret*) ordinata kósheri boyınsha joqarıǵa baǵıtlanǵan, $a < 0$ (4-*súwret*) bolsa tómenge baǵıtlanǵan boladı.
3. $y = ax^2 + bx + c$ parabola tóbesiniń $(x_0; y_0)$ koordinataları $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$ yamasa $y_0 = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ formulalar menen esaplanadı.
4. $y = ax^2 + bx + c$ parabola óziniń tóbesi arqalı ótiwshi hám ordinata kósherine parallel tuwrı sızıqqa qarata simmetriyalı boladı.
5. $y = ax^2 + bx + c$ parabolanıń *Ox* kósheri menen kesilisiw noqatlarınıń abscissaları kvadrat funkciyanıń nólleri boladı. Kvadrat funkciya nóllerin tabıw ushın $ax^2 + bx + c = 0$ teńlemeni sheshiw kerek.
6. Kvadrat funkciyanıń *Oy* kósheri menen kesilisiw noqatınıń ordinatası funkciyanıń $x = 0$ noqattaǵı mánisinen ibarat.

$y = ax^2 + bx + c$ kvadrat funkciyanıń grafigin sızıw ushın:

1. Parabola shaqalarınıń baǵıtı anıqlanadı.
2. Parabola tóbesiniń koordinataları $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$ formulalar járdeminde tabıladı hám koordinata tegisliginde belgilenedi.
3. Parabolanıń abscissa kósheri menen kesilisiw noqatları (nólleri) tabıladı. Eger funkciya nólleri bolmasa, ol jaǵdayda ádette parabolanıń simmetriya kósherine qarata simmetriyalı bolǵan eki noqatı tabıladı. Máselen, parabolanıń *Oy* kósheri menen noqatı (0; *c*) hám oǵan simmetriyalı bolǵan ($2x_0$; *c*) noqatı tabıladı.
4. Jasalǵan noqatlar úzliksiz iymek sızıq penen tutastırıladı (parabolanıń grafigin anıǵıraq sızıw ushın jáne birneshe noqatın jasaw maqsetke muwapıq boladı).

Kvadrat funkciyanıń qásiyetleri

1. Anıqlanıw oblastı:

$D(y)=(-\infty;\infty)$.

2. Mánisler kópligi:

a) Eger $a>0$ bolsa, $E(y)=[y_0;\infty)$;

b) Eger $a<0$ bolsa, $E(y)=(-\infty;y_0]$.

3. Eń úlken hám eń kishi mánisleri:

a) Eger $a>0$ bolsa, $x=x_0$ noqatta eń kishi mániske iye boladı hám bul mánis $y_0=ax_0^2+bx_0+c$ ǵa teń boladı, al eń úlken mániske bolsa iye bolmaydı;

b) Eger $a<0$ bolsa, $x=x_0$ noqatta eń úlken mániske iye boladı hám bul mánis $y_0=ax_0^2+bx_0+c$ ǵa teń boladı, al eń kishi mániske bolsa iye bolmaydı.

4. Funkciyanıń nólleri:

a) Eger $D=b^2-4ac>0$ bolsa, funkciya eki nóllerge iye: $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ hám $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$;

b) Eger $D=b^2-4ac=0$ bolsa, funkciya tek ǵana bir (óz ara teń bolǵan eki) nólge iye: $x=\dfrac{-b}{2a}$;

c) Eger $D=b^2-4ac<0$ bolsa, funkciya nóllerge iye emes.

5. Monotonlıq aralıqları:

a) Eger $a>0$ bolsa, $y=ax^2+bx+c$ funkciya $(-\infty;x_0]$ intervalda kemeyiwshi, $[x_0;\infty)$ intervalda ósiwshi boladı;

b) Eger $a<0$ bolsa, $y=ax^2+bx+c$ funkciya $(-\infty;x_0]$ intervalda ósiwshi, $[x_0;\infty)$ intervalda kemeyiwshi boladı (bul jerde x_0 – parabola tóbesiniń abscissası).

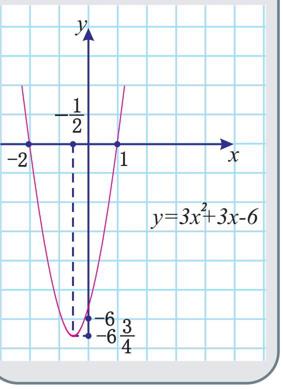
1-mısal. $y=3x^2+3x-6$ kvadrat funkciya berilgen bolsın. Onıń qásiyetlerin jazıń hám grafigin sızıp kórsetiń.

Sheshiliwi:

1. Anıqlanıw oblastı: $D(y)=(-\infty;\infty)$.
2. $a=3>0$ hám $x_0=-\dfrac{1}{2}$, $y_0=-6,75$, $E(y)=[-6,75;\infty)$.
3. $x=-\dfrac{1}{2}$ bolǵanda, eń kishi mánisi $y=-6,75$ ke teń, eń úlken mániske iye bolmaydı.
4. $D=81>0$, demek, nólleri ekew: $x_1=1, x_2=-2$.
5. $x\in(-\infty;-2)\cup(1;\infty)$ da $y>0$ hám $x\in(-2;1)$ da $y<0$ boladı.
6. Funkciya jup ta, taq ta emes.
7. Funkciya $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right]$ aralıqta kemeyiwshi, $\left[-\dfrac{1}{2};\infty\right)$ aralıqta ósiwshi boladı.

Funkciyanıń grafigi 5-súwrette kórsetilgen.

5-súwret



MÍSALLAR

1. Qaysı funkciyalar kvadrat funkciya boladı?

a) $y=\frac{1}{3}x+2$ b) $y = -x^2 + 5x + 1$ c) $y=x^2-x^3$ d) $y = x^2$

2. $x=-3$ bolǵanda, $y=4x^2+7x-5$ funkciyanıń mánisi neshege teń boladı?

3. x tıń qanday mánislerinde $y=-3x^2+x+1$ funkciyanıń mánisi -1 ge teń boladı?

4. $y=-5x^2+x+\sqrt{7}$ funkciya x tıń qanday mánislerinde anıqlanǵan?

5. -5 sanı $y=x^2-5x$ funkciyanıń nóli boladı ma?

6. Funkciyanıń grafigin sızıń.

a) $y=x^2$ b) $y=-x^2$ c) $y=3x^2$

d) $y=-3x^2-5$ e) $y=x^2-2x$ f) $y=-2x^2+5x$

7. Funkciya nóllerin tabıń.

a) $y=2x^2+5x+2$ b) $y=3x^2+10x+3$ c) $y=-2x^2+x-5$

8. Funkciyanıń mánisler kópligin tabıń.

a) $y=x^2+2$ b) $y=(x-4)^2-1$ c) $y=(x-5)^2+3$ d) $y=3-4x^2$

e) $y=3x-x^2$ f) $y=3x^2+2x$ g) $y=2x^2-8x+19$ h) $y=-3x^2-12x+1$

9. x tıń qanday mánislerinde funkciya eń úlken (yamasa eń kishi) mánis qabıl etiwin anıqlań hám onı tabıń.

a) $y=x^2+9x+34$ b) $y=-9x^2-3x+7$ c) $y=-2x^2-5x+1$

10. t nıń qanday mánislerinde $y=2x^2-tx+8$ funkciyanıń nólleri bolmaydı?

11. x tıń qanday mánislerinde $y=5x^2-4x-1$ funkciyanıń mánisleri teris boladı?

12. $y=x^2+6x+13$ funkciya teris mánislerdi qabıl ete aladı ma?

13. $y=-x^2-4x-5$ funkciya oń mánislerdi qabıl ete aladı ma?

14. $y=6x^2+7x+1$ funkciyanıń grafigin sızıń hám grafik boyınsha funkciyanıń mánisleri oń, teris bolatuǵın x tıń mánislerin tabıń.

15. $y=-x^2+4x-3$ funkciyanıń grafigin sızıń. Grafik járdeminde funkciyanıń ósiw hám kemeyiw aralıqların tabıń.

16. x tıń qanday mánislerinde $y=x^2-22x+27$ hám $y=2x^2-20x+3$ funkciyalardıń mánisleri teń boladı?

17. Eger parabolanıń grafigi $(-1;\ 6)$ noqat arqalı ótiwi hám onıń tóbesi $(1;\ 2)$ noqatta ekenligi belgili bolsa, parabolanıń teńlemesin dúziń.

18. $y=x^2+px+q$ parabolanıń tóbesi $A(1;\ -2)$ bolsa, p hám q koefficientlerin tabıń.

19. Eger $y=ax^2+bx+c$ parabolanıń tóbesi $M(-1;\ -7)$ hám parabola ordinatalar kósheri menen $N(0;\ -4)$ noqatta kesilisse, a, b, c lardı tabıń.

20. $A(1;\ 4)$, $B(-1;\ 10)$, $C(2;\ 7)$ noqatlardan ótiwshi $y=ax^2+bx+c$ funkciyanı tabıń.

KVADRAT TEŃSIZLIK

Anıqlama

Eger teńsizliktiń shep tárepinde kvadrat úshaǵzalı, oń tárepinde nól turǵan bolsa, bunday teńsizlik ***kvadrat*** (***bir belgisizli ekinshi dárejeli***) ***teńsizlik*** dep ataladı.

$ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c<0$, $ax^2+bx+c\geq 0$, $ax^2+bx+c\leq 0$ $(a\neq 0)$ teńsizlikler kvadrat teńsizlikler boladı, bul jerde a, b, c – berilgen sanlar, x – belgisiz san.

Teńsizliktiń sheshimi dep belgisizdiń usı teńsizlikti durıs sanlı teńsizlikke aylandıratuǵın barlıq mánisleri kópligine aytıladı.

Teńsizlikti sheshiw onıń sheshimin tabıw yamasa sheshimi joq ekenligin kórsetiw.

Kvadrat teńsizlikti tómendegi usıllar menen sheshiw múmkin:

1-usıl. Sızıqlı teńsizlikler sistemasına keltirip sheshiw

Eger $ax^2+bx+c=0$ kvadrat teńleme eki túrli sheshimge iye bolsa, ol jaǵdayda kvadrat teńsizlikti sheshiwdi birinshi dárejeli teńsizlikler sistemasın sheshiwge keltiriw múmkin.

1-mısal. $x^2-5x+6<0$ teńsizlikti sheshiń.

Sheshiliwi. Teńsizliktiń shep tárepin kóbeytiwshilerge jikleymiz:

$$(x-2)(x-3)<0.$$

1-jaǵday: $\begin{cases} x-2>0 \\ x-3<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>2 \\ x<3 \end{cases} \Rightarrow x\in(2;3).$

2-jaǵday: $\begin{cases} x-2<0 \\ x-3>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<2 \\ x>3 \end{cases} \Rightarrow x\in\varnothing.$

Juwabı: (2; 3).

2-usıl. Kvadrat teńsizlikti kvadrat funkciyanıń grafigi járdeminde sheshiw

Kvadrat teńsizliklerdi kvadrat funkciyanıń grafigin sızıp, keyin grafik boyınsha bul funkciya oń yamasa teris mánislerdi qabıl etetuǵın aralıqlardı tawıp sheshiw múmkin.

Kvadrat teńsizlikti grafik usılda sheshiw ushın:

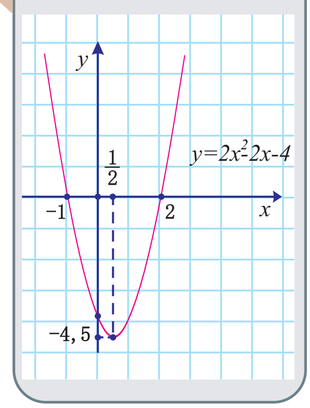
1) parabola shaqalarınıń baǵıtı anıqlanadı;

2) funkciyanıń nólleri (eger olar bar bolsa) tabıladı yamasa olardıń joq ekenligi anıqlanadı;

3) $y = ax^2 + bx + c$ funkciya grafiginiń eskizi sızıladı;

4) grafik boyınsha funkciya oń yamasa teris mánisler qabıl etetuǵın aralıqları kórsetiledi.

1-súwret



2-mısal. $2x^2-2x-4\geq 0$ teńsizlikti kvadrat funkciyanıń grafigi járdeminde sheshiń.

Sheshiliwi: $y=2x^2-2x-4$ funkciyanıń grafigin sızamız (1-*súwret*).

Dáslep parabolanıń tóbesin tabamız:

$$x_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{-2}{4}=\frac{1}{2};\quad y_0=2\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\cdot\frac{1}{2}-4=-4{,}5.$$

Keyin $D=b^2-4ac=4+32=36$ diskriminanttı esaplap, parabolanıń nóllerin tabamız:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{2\pm\sqrt{36}}{4}=\frac{2\pm 6}{4},$$

$$x_1=-1,\ x_2=2.$$

Juwabı: $(-\infty;-1]\cup[2;\infty)$.

Teńsizlikti bul usılda sheshiwde, parabola tóbesiniń koordinataların tabıw ulıwma alǵanda shárt emes, sonday-aq parabolanıń *Oy* kósheri menen kesilisiw noqatlarınıń grafikte kórsetiliwi de shárt emes. Eń baslısı, parabola shaqalarınıń baǵıtın hám funkciyanıń nólleri bar yamasa joq ekenligin biliwden ibarat.

3-usıl. Kvadrat teńsizlikti aralıqlar (intervallar) usılı menen sheshiw

Eger qanday da bir $(a;\,b)$ aralıqta $y=f(x)$ funkciyanıń grafigin qálemdi qaǵazdan úzbesten sızıw múmkin bolsa, bul funkciya $(a;\,b)$ aralıqta úzliksiz dep ataladı.

Máselen, $y=kx+b$, $y=ax^2+bx+c$ funkciyalar óz anıqlanıw oblastında úzliksiz funkciyalar boladı.

Úzliksiz funkciyalardıń ayrıqsha bir qásiyetin dálillewsiz qabıl etemiz.

Eger $f(x)$ funkciya $(a;\,b)$ aralıqta úzliksiz bolsa hám nólge teń bolmasa, ol jaǵdayda bul aralıqta funkciyanıń mánisleri birdey belgige iye boladı, yaǵnıy usı aralıqta funkciya óz belgisin saqlaydı.

Kvadrat funkciyanıń anıqlanıw oblastın onıń x_1 hám x_2 nólleri járdeminde úsh $(-\infty;\,x_1)$, $(x_1;\,x_2)$, $(x_2;\,+\infty)$ aralıqlarǵa ajıratıw múmkin (bul jerde $x_1<x_2$). Bul aralıqlardıń hárbirinde kvadrat funkciya úzliksiz hám nólge teń bolmaydı, yaǵnıy óz belgisin saqlaydı. Bir belgisizge iye teńsizliklerdi sheshiwdiń ***aralıqlar usılı*** tap usınday qásiyetlerge tiykarlanǵan.

Kvadrat teńsizliklerdi sheshiwde aralıqlar usılınıń qollanılıwın kórip shıǵamız.

1-jaǵday. $D>0$. Bul jaǵdayda kvadrat funkciyanıń nólleri dep atalatuǵın eki haqıyqıy x_1 hám x_2 $(x_1<x_2)$ sanlar bar boladı. Olar kvadrat funkciyanıń anıqlanıw oblastın: $(-\infty;\,x_1)$, $(x_1;\,x_2)$, $(x_2;\,+\infty)$ aralıqlarǵa ajıratadı hám bul aralıqlardıń hárbirinde funkciyanıń mánisleri turaqlı belgige ("+" yamasa "–") iye boladı.

Kvadrat funkciya mánisleriniń payda etilgen aralıqlardaǵı belgisin hár túrli usıllar menen tabıw múmkin:

1) $y=ax^2+bx+c$ funkciya mánisiniń $(-\infty;\,x_1)$, $(x_2;\,\infty)$ aralıqlardıń hárbirindegi belgisi a koefficienttiń belgisi menen birdey, al $(x_1;\,x_2)$ aralıqtaǵı belgisi bolsa a koefficient belgisine qarama-qarsı boladı;

2) funkciya mánisleriniń belgisin hárbir aralıqtaǵı “qolaylı” noqatta anıqlaw múmkin;

3) $y = ax^2 + bx + c$ funkciyanı $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ kóriniste jazıp, hárbir aralıqta sızıqlı kóbeytiwshilerdiń belgilerin tabıw arqalı anıqlaw múmkin.

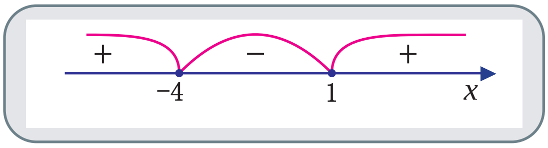
3-mısal. $x^2 + 3x - 4 \le 0$ teńsizlikti aralıqlar usılı menen sheshiń.

Sheshiliwi. Teńsizliktiń shep tárepin kóbeytiwshilerge jikleymiz:

$$(x+4)(x-1) \le 0$$

Onıń nólleri: – 4 hám 1.

Tabılǵan noqatlardı sanlar kósherinde belgileymiz hám sanlar kósherin aralıqlarǵa ajıratamız. Hárbir aralıqta $y = x^2 + 3x - 4$ funkciyanıń belgisin anıqlaymız:

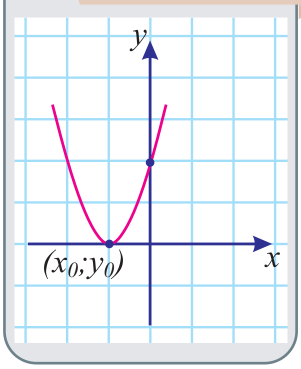


Berilgen mısal shártinde funkciya óziniń oń bolmaǵan mánislerine qaysı aralıqta erisiwi soralǵanı ushın sheshim [–4; 1] boladı.

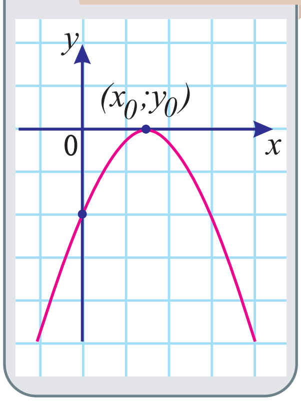
Juwabı: [–4; 1]

2-jaǵday. $D = 0$ bolsın. Ol jaǵdayda $y = ax^2 + bx + c$ funkciya tek ǵana bir x_0 noqatta nólge aylanadı. x_0 noqat koordinata kósherin eki $(-\infty; x_0)$ hám $(x_0; \infty)$ aralıqlarǵa ajıratadı. Hárbir $x \ne x_0$ ushın $y=ax^2 + bx + c$ kvadrat funkciya mánisleriniń belgisi a koefficienttiń belgisi menen birdey boladı (2, 3-*súwretler*).

2-súwret



3-súwret



3-jaǵday. $D < 0$. Ol jaǵdayda $y = ax^2 + bx + c$ kvadrat funkciya nóllerge iye bolmaydı.

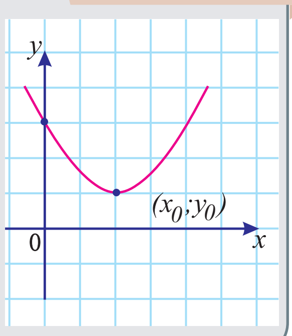
Bul jaǵdayda x tıń qálegen mánislerinde funkciya a koefficienttiń belgisi menen ústpe-úst túsetuǵın birdey belgige iye mánislerdi qabıl etedi:

1) eger $a > 0$ bolsa, x tıń qálegen mánisinde $ax^2 + bx + c > 0$;
2) eger $a < 0$ bolsa, x tıń qálegen mánisinde $ax^2 + bx + c < 0$.

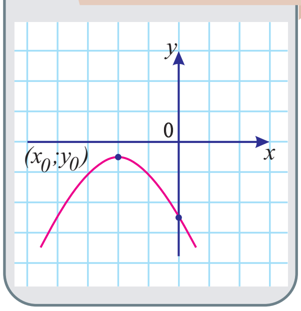
Tómendegilerdi biliw hám qollana alıw kerek:

1) $a > 0$ hám $D < 0$ bolǵanda $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \ge 0$ teńsizliklerdiń sheshimleri barlıq haqıyqıy sanlar kópliginen ibarat boladı (4-*súwret*).
2) $a > 0$ hám $D < 0$ bolǵanda $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \le 0$ teńsizliklerdiń sheshimleri bos kóplikten ibarat (4-*súwret*).
3) $a < 0$ hám $D < 0$ bolǵanda $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \ge 0$ teńsizliklerdiń sheshimleri bos kóplikten ibarat (5-*súwret*).
4) $a < 0$ hám $D < 0$ bolǵanda $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \le 0$ teńsizliklerdiń sheshimleri barlıq haqıyqıy sanlar kópliginen ibarat boladı (5-*súwret*).

4-súwret



5-súwret



MÍSALLAR

1. 0; –2; 3 sanlarınan qaysıları – $4x^2+5x-5>0$ teńsizlikti qanaatlandıradı?

2. Tómendegi teńsizliklerdi sızıqlı teńsizlikler sistemasına keltirip sheshiń.

a) $(x+4)(2x-3)>0$ b) $x^2+10x-11<0$

c) $(5x-2)(4x+3)\le 0$ d) $2x^2-5x+2\ge 0$

3. Teńsizlikler teń kúshli boladı ma?

a) $5x^2>2x$ hám $5x>2$ b) $3x^3<7x^2$ hám $3x<7$ c) $\frac{x^2-1}{x}>0$ hám $(x^2-x)(x+1)>0$

4. Teńsizliklerdi sheshiń.

a) $x^2>0$ b) $4x^2\ge 0$ c) $x^2<0$

d) $-x^2\le 0$ e) $x^2+7>0$ f) $5x^2+11\le 0$

g) $-x^2-5>0$ h) $3x^2-2x<0$ i) $-4x^2+11x<0$

j) $x^2-9x+20<0$ k) $x^2-10x+25>0$ l) $-x^2+6x-8>0$

m) $3x^2-x+2\ge 0$ n) $-9x^2+24x+20>0$ o) $-7\cdot(3-x)^2>0$

5. Sheshimi berilgen aralıqlardan ibarat bolǵan qanday da bir kvadrat teńsizlik dúziń.

a) $(-\infty;-3)\cup(6;\infty)$ b) $(-\infty;\ \infty)$

6. Abscissa kósherinde $x^2+9x\le -14$ teńsizliktiń sheshimi bolǵan kesindi uzınlıǵın tabıń.

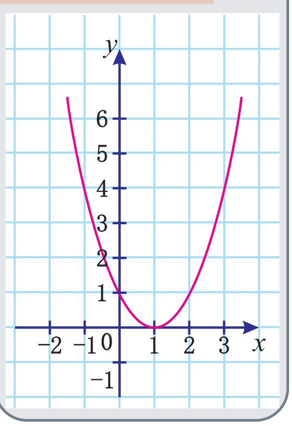
7. Neshe pútin san $2x^2+7x-15<0$ teńsizlikti qanaatlandıradı?

8. Teńsizlikti aralıqlar usılı menen sheshiń.

a) $x^2+5x-6>0$ b) $-x^2+x+2<0$ c) $x^2+3x+7>0$ d) $x^2+3x+7\le 0$

e) $-2x^2+5x+3>0$ f) $6x^2-x-2<0$ g) $2x^2+5x+9\le 0$ h) $49x^2-28x+4\le 0$

6-súwret



9. Teńsizliklerdi sheshiń.

a) $8x^2+3x-5\ge 0$ b) $5x^2-12x+8\le 0$

c) $49x^2-70x+25>0$ d) $(2x^2+3x+4)(x+3)\ge 0$

e) $(7+6x-x^2)(3x-5)<0$

10. Teńsizlikti kvadrat funkciyanıń grafigi járdeminde sheshiń.

a) $2x^2+5x-3>0$ b) $4x^2-9x-90>0$

11. 6-súwrette $y=ax^2+bx+c$ funkciyanıń grafigi súwretlengen. Tómendegi teńsizliklerdiń sheshimin tabıń.

a) $ax^2+bx+c>0$ b) $ax^2+bx+c\le 0$

12. Teńsizliktiń barlıq pútin sheshimleri qosındısın tabıń.

a) $2x^2-9x+4<0$ b) $\frac{x-1}{4}+\frac{3-2x}{2}>\frac{3x+x^2}{8}$

c) $(5x+7)(x-2)\le 21x^2-11x+3$

13. $3x(x-2)-2x(x+4)-(x-16)\le 0$ teńsizliktiń $[0;9]$ kesindige tiyisli bolǵan neshe pútin sheshimi bar?

14. $y=-x^2+4x-3$ funkciyanıń grafigi járdeminde, tómendegi teńsizliklerdiń sheshimin tabıń.

a) $-x^2+4x-3>0$ b) $-x^2+4x-3\ge 0$ c) $-x^2+4x-3<0$ d) $-x^2+4x-3\le 0$

15. a nıń qanday mánislerinde $ax^2+2ax+4=0$ teńleme korenlerge iye bolmaydı?

16. Teńsizlikti sheshiń: $(x-1)^2(x^2-2)<(x-1)^2(6-2x)$

17. $f(x)=(x-1)^4(x+1)^3x^2$ funkciya berilgen.

a) $f(x)<0$ b) $f(x)\le 0$ c) $f(x)>0$ d) $f(x)\ge 0$

bolatuǵın x tıń barlıq mánislerin tabıń.

18. Teńsizliklerdi sheshiń:

a) $x^2-2(b-c)x+a^2>0$, bul jerde a,b,c lar úshmúyeshliktiń tárepleri;

b) $x^2+(a^2+b^2-c^2)x+a^2b^2>0$, bul jerde a,b,c lar úshmúyeshliktiń tárepleri.

19. Eger $a^2+12b<0$ bolsa, $3x^2-b\le ax$ tı sheshiń.

20. Eger $b>0{,}05a^2$ bolsa, $5x^2-ax+b>0$ di sheshiń.

21. Eger $b^2\le 4ac$ hám $a+c>b$ bolsa, $ax^2+bx+c\le 0$ di sheshiń.

22. c nıń qanday mánislerinde $y=cx^2-x+c$ hám $y=cx+1-c$ funkciyalar grafikleri ulıwma noqatqa iye bolmaydı?

23. p nıń qanday mánislerinde $y=px^2-24x+1$ hám $y=12x^2-2px-1$ funkciyalar grafigi kesilispeydi?

24. a nıń qanday mánislerinde $x^2+3x+a=0$ teńlemeniń korenleri $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}+1>0$ shártti qanaatlandıradı?

25. b nıń qanday mánislerinde $x^2-2bx+b+6=0$ teńlemeniń:

a) sheshimleri teris; b) sheshimleri oń; c) sheshimleri hár túrli belgige iye boladı?

26. a nıń qanday mánislerinde barlıq haqıyqıy sanlar teńsizlikti qanaatlandıradı?

a) $x^2-(a+2)x+8a+1>0$ b) $\frac{1}{24}x^2+ax-a+1>0$

27. b nıń qanday mánislerinde teńsizlik sheshimge iye emes?

a) $x^2+2bx+1<0$ b) $bx^2+4bx+5<0$ c) $bx^2+(2b+3)x+b-1\ge 0$

TRIGONOMETRIYALÍQ BIRDEYLIKLER

Tiykarǵí trigonometriyalıq birdeylikler

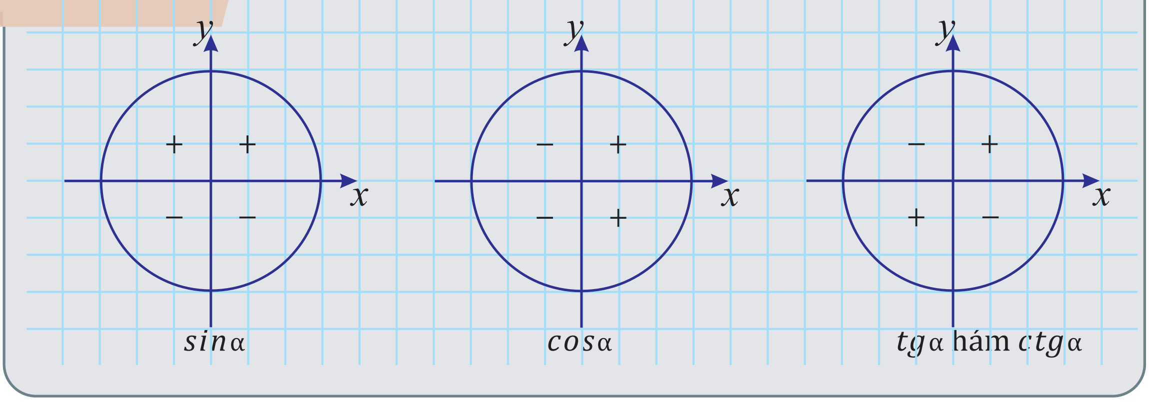
1. $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$
2. $tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}$, $cos\alpha \neq 0$
3. $ctg\alpha = \frac{cos\alpha}{sin\alpha}$, $sin\alpha \neq 0$
4. $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$
5. $1 + tg^2\alpha = \frac{1}{cos^2\alpha}$, $cos\alpha \neq 0$
6. $1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{sin^2\alpha}$, $sin\alpha \neq 0$

Berilgen múyeshlerdiń sinusı, kosinusı, tangensi hám kotangensiniń mánisleri

α	$0^0\,(0)$	$30°\left(\frac{\pi}{6}\right)$	$45°\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$60°\left(\frac{\pi}{3}\right)$	$90°\left(\frac{\pi}{2}\right)$	$180°(\pi)$
$sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1
$tg\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Anıq emes	0
$ctg\alpha$	Anıq emes	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	Anıq emes

Sinus, kosinus, tangens hám kotangenstiń belgileri

1-súwret



α hám (–α) múyeshlerdiń sinusı, kosinusı, tangensi hám kotangensi

1. $sin(-\alpha) = -sin\alpha$
2. $cos(-\alpha) = cos\alpha$
3. $tg(-\alpha) = -tg\alpha$
4. $ctg(-\alpha) = -ctg\alpha$

Keltiriw formulaları

	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$
$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
$tg\,\alpha$	$ctg\,\alpha$	$-ctg\,\alpha$	$-tg\,\alpha$	$tg\,\alpha$	$ctg\,\alpha$	$-ctg\,\alpha$	$-tg\,\alpha$	$tg\,\alpha$
$ctg\,\alpha$	$tg\,\alpha$	$-tg\,\alpha$	$-ctg\,\alpha$	$ctg\,\alpha$	$tg\,\alpha$	$-tg\,\alpha$	$-ctg\,\alpha$	$ctg\,\alpha$

Keltiriw formulalarındaǵı usı qaǵıydaǵa itibar qaratıń: eger α nı I sherekke tiyisli dep alsaq, $\pi\pm\alpha$, $2\pi\pm\alpha$ múyeshler ushın keltiriw formulalarında funkciyanıń atı ózgermeydi, $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$, $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$ múyeshler ushın bolsa sinus kosinusqa, kosinus sinusqa, tangens kotangenske, kotangens tangenske ózgeredi.

Máselen, $\sin\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)$ nı qarasaq, $\frac{\pi}{2}$ sanın ańlatatuǵın natural san n – jup bolsa, funkciyanıń atı ózgermeydi; taq bolsa, funkciyanıń atı ózgeredi. Belgini anıqlaw bolsa $n\cdot\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ múyesh qaysı sherekke tiyisli ekenligi hám bul sherekte sinustiń belgisi qanday ekenligine qarap anıqlanadı.

1-mısal. Esaplań.

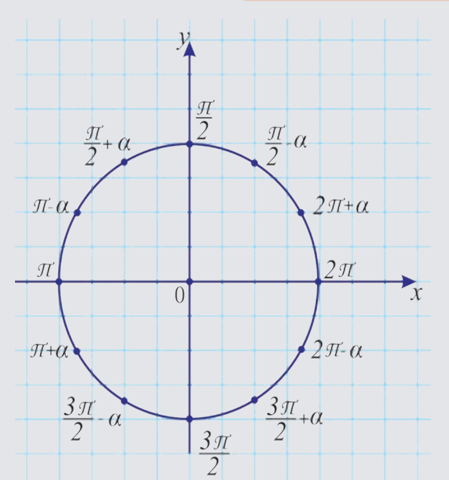
a) $\sin 855^\circ = \sin(9\cdot 90^\circ + 45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos 2025^\circ = \cos(22\cdot 90^\circ + 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $tg\,1680^\circ = tg(18\cdot 90^\circ + 60^\circ) = tg\,60^\circ = \sqrt{3}$

d) $ctg\,1200^\circ = ctg(13\cdot 90^\circ + 30^\circ) = -tg\,30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

2-súwret



Qosıw formulaları

1. $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$
2. $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$
3. $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
4. $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$
5. $tg(\alpha+\beta)=\dfrac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}$
6. $tg(\alpha-\beta)=\dfrac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha tg\beta}$
7. $ctg(\alpha+\beta)=\dfrac{ctg\alpha ctg\beta-1}{ctg\alpha+ctg\beta}$
8. $ctg(\alpha-\beta)=\dfrac{ctg\alpha ctg\beta+1}{ctg\beta-ctg\alpha}$

Qos múyesh formulaları

1. $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$
2. $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$
3. $tg2\alpha=\dfrac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$
4. $ctg2\alpha=\dfrac{ctg^2\alpha-1}{2ctg\alpha}$

Qosındını hám ayırmanı kóbeymege almastırıw formulaları

1. $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
2. $\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$
3. $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
4. $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
5. $tg\alpha+tg\beta=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$
6. $tg\alpha-tg\beta=\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$
7. $ctg\alpha+ctg\beta=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$
8. $ctg\alpha-ctg\beta=\dfrac{-\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$

Kóbeymeni qosındıǵa almastırıw formulaları

1. $\sin\alpha\cdot\cos\beta=\dfrac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))$
2. $\cos\alpha\cdot\cos\beta=\dfrac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))$
3. $\sin\alpha\cdot\sin\beta=\dfrac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$

Dárejesin páseytiriw formulaları

1. $\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$
2. $\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$
3. $tg^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$
4. $ctg^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}$

Yarım múyesh formulaları

1. $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$
2. $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$
3. $tg^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$
4. $ctg^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$
5. $tg\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$
6. $ctg\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $tg\alpha$ lardı $tg\frac{\alpha}{2}$ arqalı ańlatıw formulaları

1. $\sin\alpha=\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$
2. $\cos\alpha=\frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$
3. $tg\alpha=\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}$

MÍSALLAR

1. Eger $ctg\alpha=-\frac{3}{4}$ hám $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$ bolsa, $\cos\alpha$ nı tabıń.

2. Eger $tg\alpha=-\sqrt{5}$ hám $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ bolsa, $\sin\alpha$ nı tabıń.

3. Eger $tg\alpha=\frac{3}{2}$ bolsa, $\frac{2\sin\alpha+5\cos\alpha}{3\sin\alpha-4\cos\alpha}$ nı tabıń.

4. Ápiwayılastırıń .

a) $\frac{2\sin^2\alpha-1}{2\cos^2\alpha-1}$ b) $\frac{ctg\alpha\,(2\sin^2\alpha+tg\alpha)}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}$ c) $\frac{1-\cos^2\alpha}{\sin^4\alpha}-ctg^2\alpha$ d) $2-\frac{1-\sin^4\alpha}{\cos^2\alpha}$

5. Esaplań.

a) $4\cos150°-\sin240°-3tg210°$ b) $2\cos135°+tg60°-ctg240°$

c) $\sin300°-3\cos135°+2\cos210°$ d) $tg150°-ctg315°+5\sin135°$

6. Esaplań.

a) $tg\frac{7\pi}{6}-2tg\frac{5\pi}{3}+3tg\frac{11\pi}{6}$ b) $2\cos\frac{4\pi}{3}+\sin\frac{5\pi}{4}-\cos\frac{4\pi}{3}$

c) $20ctg\frac{3\pi}{2}-\sin\frac{2\pi}{3}+\cos\frac{4\pi}{3}$ d) $ctg\frac{7\pi}{4}+2ctg\frac{4\pi}{3}-2\cos\frac{5\pi}{6}$

7. Ápiwayılastırıń.

a) $\frac{1-tg(360°-\alpha)tg\alpha}{tg(270°-\alpha)+tg\alpha}$ b) $\frac{\cos(90°+\alpha)+\sin(90°-\alpha)}{\cos(270°-\alpha)+\cos(180°+\alpha)}$

8. Ápiwayılastırıń.

a) $\dfrac{sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\beta\right)}{tg^2\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\beta}{2}\right)-ctg^2\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\beta}{2}\right)}$ b) $\dfrac{cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-2a\right)+sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+2a\right)}{cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+2a\right)+sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-2a\right)}$

9. Birdeylikti dálilleń.

a) $\dfrac{sin(\pi-2\alpha)-2sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}{sin^2(\pi+\alpha)-cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}=2ctg\alpha$ b) $\dfrac{sin^4\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)-cos^2(2\alpha+\pi)}{1-3cos(2\alpha+\pi)}=\dfrac{sin^2\alpha}{2}$

10. Esaplań.

a) $sin(-43°)cos88°+cos(-43°)sin88°$ b) $cos11°cos19°-sin19°sin11°$

11. Esaplań.

a) $sin\dfrac{2\pi}{7}cos\dfrac{3\pi}{14}+cos\dfrac{2\pi}{7}sin\dfrac{3\pi}{14}$ b) $\dfrac{1+tg33°tg78°}{tg78°-tg33°}$

12. Esaplań.

a) $cos\left(-\dfrac{19\pi}{36}\right)cos\dfrac{7\pi}{9}-sin\dfrac{7\pi}{9}sin\left(-\dfrac{19\pi}{36}\right)$ b) $\dfrac{1-tg\dfrac{\pi}{11}tg\dfrac{5\pi}{66}}{tg\dfrac{5\pi}{66}+tg\dfrac{\pi}{11}}$

13. Ápiwayılastırıń .

a) $cos(\alpha-\beta)-sin\alpha sin\beta$ b) $sin(\alpha-\beta)+sin(\alpha+\beta)$

c) $sin4\alpha\, cos\alpha-cos4\alpha\, sin\alpha$ d) $cos\alpha\, cos2\alpha+sin2\alpha\, sin\alpha$

e) $\dfrac{1}{2}cos\alpha+\dfrac{\sqrt{3}}{2}sin\alpha$ f) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}cos\alpha-\dfrac{\sqrt{2}}{2}sin\alpha$

14. a) $cos\alpha=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ hám $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$ bolsa, $cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$ ti tabıń.

b) $cos\alpha=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ hám $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$ bolsa, $sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)$ nı tabıń.

15. Esaplań.

a) $\dfrac{6sin10°cos10°}{sin20°}$ b) $\dfrac{sin88°}{sin22°cos22°cos44°}$ c) $sin\dfrac{\pi}{12}\left(2sin^2\dfrac{\pi}{24}-1\right)$

16. a) Eger $cos\alpha=0,4$ bolsa, $cos2\alpha$ nı tabıń.

b) Eger $sin\alpha=-0,7$ bolsa, $cos2\alpha$ nı tabıń.

17. a) Eger $cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ hám $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ bolsa, $sin2\alpha$ nı tabıń.

b) Eger $sin\alpha = \frac{1}{5}$ hám $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ bolsa, $sin2\alpha$ nı tabıń.

18. Ápiwayılastırıń:

a) $2cos^2\frac{\alpha}{2}(cos\,\alpha - 1)$ b) $\frac{sin2\alpha}{1+cos2\alpha}$

19. Eger $tg\alpha = -2$ bolsa, $sin2\alpha$, $cos2\alpha$, $tg2\alpha$, $ctg2\alpha$ lardı tabıń.

20. a) $\cos123^0 \text{tg}231^0 \sin312^0$ ańlatpanıń belgisin anıqlań.

b) $sin\frac{1}{3}cos\frac{7}{8}tg4ctg5,7$ ańlatpanıń belgisin anıqlań.

21. Sanlardı salıstırıń: $sin200°$ hám $sin(-200°)$.

22. $sin\,\alpha = \frac{12}{13}$ hám $cos\,\alpha = \frac{5}{13}$ teńliklerdiń ekewi de bir waqıtta orınlı bolıwı múmkin be?

23. Birdeylikti dálilleń.

a) $\left(sin\,\alpha + \frac{1}{sin\,\alpha}\right)^2 + \left(cos\,\alpha + \frac{1}{cos\,\alpha}\right)^2 - \left(tg^2\alpha + ctg^2\alpha\right) = 7$ b) $\frac{tg3\alpha}{tg^2 3\alpha - 1} \cdot \frac{1-ctg^2 3\alpha}{ctg3\alpha} = 1$

24. Ańlatpanı ápiwayılastırıń.

a) $\frac{1-ctg^2(-\alpha)}{cos\,\alpha + sin(-\alpha)} \cdot sin(-\alpha) + ctg(-\alpha)$ b) $\frac{sin(\alpha-\beta) - sin(\beta-\alpha)}{cos(\alpha-\beta) + cos(\beta-\alpha)}$

25. Birdeylikti dálilleń:

a) $sin\alpha + cos\alpha = \sqrt{2}\,cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$ b) $2sin2\alpha cos5\alpha = sin7\alpha - sin3\alpha$.

26. $cos\,\alpha = \frac{2}{3}$; $sin\beta = -\frac{\sqrt{7}}{4}$; $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$; $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$ bolsa, $cos(\alpha+\beta)$ nı tabıń.

27. Birdeylikti dálilleń: $\frac{tg\alpha - tg\beta}{tg\alpha + tg\beta} = \frac{sin(\alpha-\beta)}{sin(\alpha+\beta)}$.

28. Esaplań: $sin(-300^0)cos(-135^0)tg(-210^0)ctg(-120^0)$.

29. Eger $sina + cosa = \frac{2}{3}$ bolsa, $sinacosa$ nı tabıń.

30. Eger $sinacosa = \frac{1}{3}$ hám $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$ bolsa, $sina + cosa$ nı tabıń.

ARIFMETIKALÍQ HÁM GEOMETRIYALÍQ PROGRESSIYA

Arifmetikalıq progressiya

1. $a_{n+1} = a_n + d$, $n \in N$;
2. $a_n = a_1 + (n-1)d$, $n \in N$;
3. $a_n = a_k + (n-k)d$, $n, k \in N$, $n > k$;
4. $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, $n \in N$;
5. $a_n = \dfrac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$, $n, k \in N$, $n > k$;
6. $\{a_n\}$ – arifmetikalıq progressiya aǵzaları ushın $a_n + a_m = a_k + a_l$ teńlik orınlı, bul jerde $n+m = k+l$;
7. $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$;
8. $S_n = \dfrac{(2a_1 + (n-1)d)n}{2}$.

Geometriyalıq progressiya

1. $b_{n+1} = b_n \cdot q$, $n \in N$;
2. $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, $n \in N$;
3. $b_n = b_k \cdot q^{n-k}$, $n, k \in N$ va $n > k$;
4. $b_n^2 = b_{n-k} \cdot b_{n+k}$, $n, k \in N$, $n > k$;
5. $\{b_n\}$ geometriyalıq progressiyanıń aǵzaları ushın $b_n \cdot b_m = b_k \cdot b_l$ teńlik orınlı, bul jerde $n+m = k+l$;
6. $S_n = \dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}$, $q \neq 1$, eger $q = 1$ bolsa, $S_n = b_1 \cdot n$;
7. $S_n = \dfrac{b_n q - b_1}{q-1}$, $q \neq 1$;
8. Sheksiz kemeyiwshi geometriyalıq progressiyanıń (barlıq aǵzaları) qosındısı:

$$S = \frac{b_1}{1-q}, \ |q| < 1, q \neq 0.$$

MÍSALLAR

1. Eger $a_1 = -3$ hám $d = 6$ bolsa, arifmetikalıq progressiyanıń sekseninshi aǵzasın tabıń.

2. 2, 6, 10, 14, 18, ... izbe-izlik arifmetikalıq progressiyanı payda etedi. Onıń n-aǵzası formulasın jazıń.

3. Arifmetikalıq progressiyada:

a) $a_7 = -5,\ a_{32} = 70$ bolsa, a_1 hám d nı;

b) $a_5 = 2,\ a_{40} = 142$ bolsa, a_7 ni;

c) $a_{14} = 5,\ a_{12} = 1$ bolsa, a_{13} ti;

d) $a_{25} - a_{20} = 10,\ a_{16} = 13$ bolsa, a_{10} dı tabıń.

4. Eger geometriyalıq progressiyada $b_2 = 4$ hám $b_3 = 6$ bolsa, b_7 ni tabıń.

5. Eger geometriyalıq progressiyada $b_1 = 3$ hám $q = -2$ bolsa, b_8 di tabıń.

6. Geometriyalıq progressiyada:

a) $b_1 = 18,\ q = \frac{1}{9}$ bolsa, b_2 ni;

b) $b_1 = \frac{1}{2},\ q = \frac{1}{2}$ bolsa, b_7 ni;

c) $b_4 = 8,\ b_8 = 128$ bolsa, b_1 hám q dı;

d) $b_9 = -1,\ q = -1$ bolsa, b_1 hám b_{17} ni tabıń.

7. Geometriyalıq progressiyada $b_1 = 3,\ q = 2$ bolsa, S_6 nı tabıń.

8. Geometriyalıq progressiyada $b_2 = 6,\ q = 3$ bolsa, S_8 di tabıń.

9. Geometriyalıq progressiyada $b_1 = 4,\ q = \frac{1}{2}$ bolsa, dáslepki 10 aǵzası qosındısın tabıń.

10. Geometriyalıq progressiyanıń birinshi aǵzası 5, altınshı aǵzası 1215 ke teń. Usı progressiyanıń bólimin tabıń.

11. Sheksiz kemeyiwshi geometriyalıq progressiyada $b_1 = 8,\ q = \frac{1}{2}$ bolsa, onıń qosındısın tabıń.

12. $12,\ 4,\ \frac{4}{3}, \ldots$ sheksiz kemeyiwshi geometriyalıq progressiyanıń qosındısın tabıń.

13. Geometriyalıq progressiyada:

a) $b_1 = 24,\ b_2 = 36$ bolsa, q dı tabıń

b) $b_5 = 36,\ b_7 = 144$ bolsa, b_6 nı tabıń

c) $b_6 = \frac{1}{486},\ b_8 = \frac{1}{4374}$ bolsa, b_7 ni tabıń

14. Sheksiz kemeyiwshi geometriyalıq progressiyanıń qosındısı 150 ge teń. Eger $q = \frac{1}{3}$ bolsa, b_1 di tabıń.

15. Sheksiz kemeyiwshi geometriyalıq progressiyada $b_1 = \frac{1}{4},\ S = 16$ bolsa, q dı tabıń.

16. Geometriyalıq progressiyada:

a) $b_1 = 3,\ q = 5$ bolsa, S_4 ti tabıń

b) $b_2 = 8,\ b_3 = 4$ bolsa, S_6 nı tabıń

c) $b_1 = 5,\ q = 3,\ S_n = 200$ bolsa, n di tabıń

d) $b_1 = -2,\ b_6 = -486$ bolsa, S_6 nı tabıń

17. Geometriyalıq progressiyada $q=-\frac{1}{2}$, $S_8=\frac{85}{64}$ bolsa, b_1 di tabıń.

18. Arifmetikalıq progressiyanıń n-ağzasınıń formulasın jazıń.

a) $a_1=5,\ a_2=-5$ b) $a_1=-3,\ a_6=12$ c) $a_1=6,\ a_{10}=33$

19. Arifmetikalıq progressiyanıń tórtinshi hám altınshı ağzaları sáykes túrde 16 hám 19 ğa teń bolsa, birinshi ağzasın tabıń.

20. Dáslepki 25 natural sanlar qosındısın tabıń.

21. (a_n) arifmetikalıq progressiyada $a_3+a_7=5$ hám $a_4=1$ bolsa, onıń dáslepki on ağzasınıń qosındısın tabıń.

22. Arifmetikalıq progressiyada $a_1=-20{,}7$, $d=1{,}8$ bolsa, neshinshi ağzasınan baslap progressiyanıń barlıq ağzaları oń boladı?

23. Arifmetikalıq progressiyada $a_{12}+a_{15}=20$ bolsa, S_{26} nı tabıń.

24. Arifmetikalıq progressiyada $a_2+a_6=44$, $a_5-a_1=20$ bolsa, a_{100} di tabıń.

25. Arifmetikalıq progressiyanıń úshinshi hám toğızınshı ağzaları qosındısı 8 ge teń. Usı progressiyanıń dáslepki on bir ağzasınıń qosındısın tabıń.

26. Arifmetikalıq progressiyada $S_n=3n^2+n$ bolsa, a_1 hám d nı tabıń.

27. Ósiwshi geometriyalıq progressiyada $b_{12}=4b_{10}$ hám $b_3=6$ bolsa, b_7 ni tabıń.

28. Geometriyalıq progressiyada $b_5=\sqrt[3]{2}$. Usı progressiyanıń dáslepki toğız ağzası kóbeymesin tabıń.

29. Geometriyalıq progressiyada $S_4=10\frac{5}{8}$, $S_5=42\frac{5}{8}$, $b_1=\frac{1}{8}$ bolsa, q dı tabıń.

30. Geometriyalıq progressiyada $b_1=1$ hám $b_3+b_5=90$ bolsa, q dı tabıń.

31. Úsh x, y hám 12 sanları kemeyiwshi geometriyalıq progressiyanı payda etedi. Eger 12 niń ornına 9 qoyılsa, arifmetikalıq progressiya payda boladı. $x+y$ ti tabıń.

32. Geometriyalıq progressiyada $b_2\cdot b_4\cdot b_6=216$ hám $b_3=12$. Usı progressiyanıń dáslepki altı ağzaları qosındısın tabıń.

33. Sheksiz kemeyiwshi geometriyalıq progressiyanıń taq orınlarda turğan barlıq ağzalarınıń qosındısı 36 ğa teń. Jup orınlarda turğan barlıq ağzalarınıń qosındısı 12 ge teń. Usı progressiyanıń bólimin hám ekinshi ağzasın tabıń.

34. Sheksiz kemeyiwshi geometriyalıq progressiyanıń birinshi hám tórtinshi ağzalarınıń qosındısı 54, ekinshi hám úshinshi ağzalarınıń qosındısı 36 ğa teń. Usı progressiyanıń qosındısın tabıń.

35. Arifmetikalıq progressiyada:

a) $a_1=-3,\ a_3\cdot a_7=24$ bolsa, S_{12} ni; b) $a_2+a_9=20$ bolsa, S_{10} dı;

c) $a_3+a_6=19$ bolsa, S_8 di; d) $S_4=-28$, $S_6=58$ bolsa, S_{16} nı tabıń.

1-BAP. FUNKCIYALAR

- FUNKCIYA. FUNKCIYANÍŃ BERILIW USÍLLARÍ
- FUNKCIYANÍŃ ANÍQLANÍW OBLASTÍ HÁM MÁNISLER KÓPLIGI
- FUNKCIYALAR ÚSTINDE ARIFMETIKALÍQ ÁMELLER
- QURAMALÍ, KERI, PERIODLÍ FUNKCIYALAR
- FUNKCIYANÍŃ QÁSIYETLERI
- FUNKCIYANÍŃ GRAFIGI ÚSTINDE ÁPIWAYÍ ALMASTÍRÍWLAR
- SÍZÍQLÍ HÁM KVADRATLÍ MODELLESTIRIWLER
- JOYBARLAW JUMÍSÍ

FUNKCIYA. FUNKCIYANÍŃ BERILIW USÍLLARÍ

Funkciya

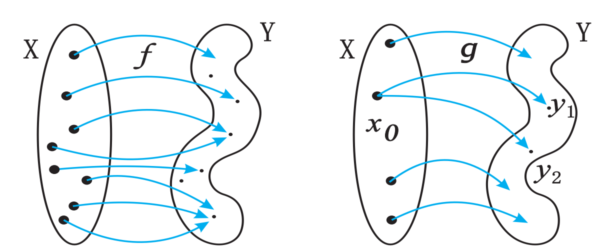
Tábiyat, óndiris, ekonomika hám basqa tarawlarda ayırım shamalar arasındaǵı baylanıslardı úyreniwde ***funkciya*** túsinigi júda úlken áhmiyetke iye.

X hám Y – sanlı kóplikler bolsın. Hárbir $x \in X$ noqatqa tek ǵana bir $y \in Y$ noqattı sáykes qoyıwshı nızamlılıq ***funkciya*** dep ataladı.

Funkciyanı anıqlawshı nızamlılıqlar $f, g, \ldots$ háripleri arqalı belgilenedi. $y = f(x)$ jazıw f nızamlılıq $x \in X$ noqatqa $y \in Y$ noqattı sáykes qoyǵanlıǵın ańlatadı hám bul jaǵdayda X kópliktiń noqatların Y kópliktiń noqatlarına sáykes qoyıwshı f funkciya berilgen dep ataladı. Bul jerde x ***erkli ózgeriwshi*** yamasa ***argument***, y bolsa ***erksiz ózgeriwshi*** yamasa ***funkciya*** dep júritiledi. f funkciya ádette $y = f(x)$ yamasa $f(x)$ kórinislerde ańlatıladı.

Tómende ayırım funkciyalar keltirilgen:

1-súwret



f nızamlılıq funkciya boladı: X tıń hárbir x elementine Y tan tek ǵana bir y element sáykes qoyılǵan.

g nızamlılıq funkciya emes: $x_0 \in X$ elementke eki $y_1, y_2 \in Y$ elementler sáykes qoyılǵan.

Funkciya bolatuǵın (f) hám funkciya bolmaytuǵın (g) nızamlılıqlar

1) *sızıqlı funkciya*: $y = kx + b$

2) *kvadrat funkciya*: $y = ax^2 + bx + c$

3) *dárejeli funkciya*: $y = x^n$

4) *bólshek dárejeli funkciya*: $y = \sqrt[n]{x^m}$

5) *keri proporcionallıq funkciyası*: $y = \dfrac{k}{x}$ (bul jerde $k \neq 0$)

6) *modulli funkciya*: $y = |x|$

Funkciyanıń beriliw usılları

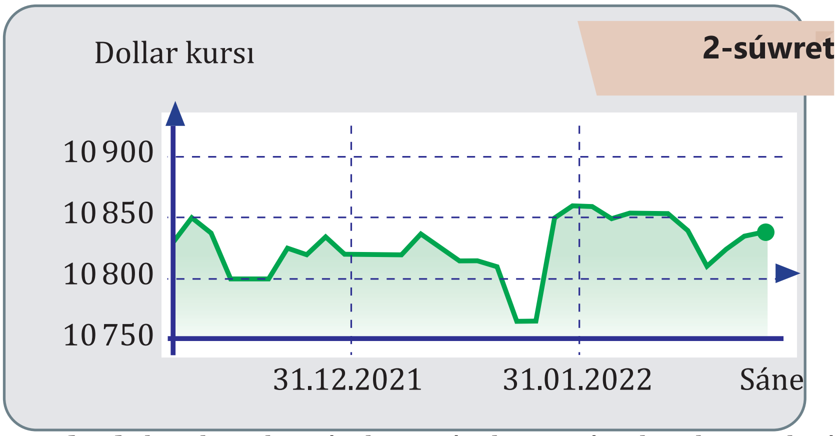
Funkciyalar tómendegi usıllarda beriliwi múmkin:

1. Funkciya beriliwiniń ***analitikalıq usılı.*** Eger funkciya bir yamasa birneshe formula yamasa teńlemeler menen berilgen bolsa, ol jaǵdayda bul funkciya analitikalıq usılda berilgen dep ataladı. Máselen, materiallıq noqattıń háreket teńlemesi $s = 20 - 5t + \frac{1}{4}t^2$ analitikalıq usılda berilgen funkciyaǵa mısal bola aladı.
2. Funkciya beriliwiniń ***keste usılı*** ádette ámeliy tájiriybelerde ózgeriwshiler arasındaǵı óz ara baylanıslılıqtı ornatadı. Máselen, temperaturanıń kúnlik ózgeri-

wi keste usılında beriliwi múmkin. Bul jerde künler erkli ózgeriwshi (yaǵnıy argument), temperatura bolsa erksiz ózgeriwshi (yaǵnıy funkciya) boladı. Tashkent qalasında 2022-jıl 20–26-yanvar kúnleri hawa temperaturasınıń háptelik ózgeriwi tómendegi kestede keltirilgen.

Sáne		20.01.2022	21.01.2022	22.01.2022	23.01.2022	24.01.2022	25.01.2022	26.01.2022
Temperatura, t °C	Kúndiz	13	9	3	4	6	7	8
	Túnde	–2	–3	–1	–2	–3	–4	–3

3. Ayırım ámeliy jumıslarda ózgeriwshilerdiń baylanıslılıǵı ***grafikalıq usılda*** beriledi. Máselen, dollardıń sumǵa salıstırǵandaǵı kursınıń aylıq, jıllıq ózgeriwi grafikalıq usılda ańlatılıwı múmkin. Bul jerde sáneler *argument*, dollardıń sumǵa salıstırǵandaǵı kursı *funkciya* boladı.



2-súwret

4. Funkciya ***tekst usılında*** beriliwi de múmkin. Máselen: 4 aǵzadan ibarat shańaraq palaw pisiriw ushın 1 kg gúrish sarplaydı. Úyge 2 miyman kelgende qazanǵa palaw pisiriw ushın neshe kg gúrish kerek boladı? Bul máselede pisiriletuǵın palawdaǵı gúrish muǵdarı úydegi adamlar sanına baylanıslı bolıp, adamlar sanı argument, gúrish muǵdarı funkciya boladı.

MÍSALLAR

1. Tekst penen berilgen funkciyanıń analitikalıq kórinisin jazıń. Máselen, "argumenttiń kvadratınan 5 ti ayırıń" dep aytılıwı tómendegi funkciyanı beredi: $f(x) = x^2 - 5$.

a) argumentti 3 ke kóbeytip, onnan 5 ti ayırıń;

b) argumenttiń kvadratına 2 ni qosıń;

c) argumentten 1 di ayırıp, keyin kvadratqa kóteriń;

d) argumentke 1 di qosıń, keyin kvadrat korenin tawıp, 6 ǵa bóliń.

2. Tekst usılda berilgen funkciyanıń ***analitikalıq***, ***keste*** hám ***grafikalıq*** kórinisin tabıń:

a) $f(x)$ ti tabıw ushın argumentti 3 ke bóliń, keyin $\frac{2}{3}$ ni qosıń.

b) $g(x)$ ti tabıw ushın argumentten 4 ti ayırıń, keyin $\frac{3}{4}$ ke kóbeytiń.

c) $T(x)$ funkciya x sumǵa satıp alınǵan ónimniń salıq muǵdarı funkciyası bolsın, salıq muǵdarın tabıw ushın ónim bahasınıń 8% ın esaplań;

d) $V(d)$ funkciya d diametrli shardıń kólemin tabıw funkciyası bolsın, kólemdi tabıw ushın diametrdiń 3-dárejesin π ǵa kóbeytip 6 ǵa bóliń.

3. Berilgen funkciyalar ushın mánisler kestesin toltırıń:

a) $f(x) = 2(x-1)^2$

x	$f(x)$
−1	
0	
1	
2	
3	

b) $g(x) = |2x+3|$.

x	$g(x)$
-3	
-2	
0	
1	
3	

4. Funkciyanıń berilgen argumenttegi mánisin tabıń.

a) $f(x) = x^2-6$ $\qquad f(-3),\ f(3),\ f(0),\ f\left(\frac{1}{2}\right)$

b) $f(x) = x^3+2x$ $\qquad f(-2),\ f(-1),\ f(0),\ f\left(\frac{1}{2}\right)$

c) $f(x)=\frac{|x|}{x}$ $\qquad f(-2), f(-1), f(0), f(5), f(x^2), f\left(\frac{1}{x}\right)$

d) $f(x)=\frac{1-2x}{3}$ $\qquad f(2), f(-2), f\left(\frac{1}{2}\right), f(a), f(-a), f(a-1)$

e) $h(x)=\frac{x^2+4}{5}$ $\qquad h(2), h(-2), h(a), h(-x), h(a-2), h(\sqrt{x})$

f) $f(x)=x^2+2x$ $\qquad f(0), f(3), f(-3), f(a), f(-x), f\left(\frac{1}{a}\right)$

g) $h(t)=t+\frac{1}{t}$ $\qquad h(-1),\ h(2),\ h\left(\frac{1}{2}\right),\ h(x-1),\ h\left(\frac{1}{x}\right)$

5. Berilgen teńliklerden qaysıları x ózgeriwshili funkciya bola aladı?

a) $3x-5y=7$ b) $3x^2-y=5$ c) $x=y^2$ d) $x^2+(y-1)^2=4$

e) $2x-4y^2=3$ f) $2x^2-4y^2=3$ g) $2xy-5y^2=4$ h) $\sqrt{y}-x=5$

i) $2|x|+y=0$ j) $2x+|y|=0$ k) $x=y^3$ l) $x=y^4$

6. Tómendegi kestelerden qaysı biri x ózgeriwshili funkciya bola aladı?

a)

x	y
−5	−12
9	2
11	2

b)

x	y
−10	−9
$3\frac{1}{2}$	−6
−10	−1

c)

x	y
2	0
−5	−3
−17	7
6	17
11	7

d)

x	y
−4	$3\frac{1}{2}$
$3\frac{1}{2}$	$-3\frac{1}{2}$
$9\frac{3}{5}$	−10

FUNKCIYANÍŃ ANÍQLANÍW OBLASTÍ HÁM MÁNISLER KÓPLIGI

Funkciyanıń anıqlanıw oblastı hám mánisler kópligi

$y = f(x)$ funkciyada x argument qabıl etiwi múmkin bolǵan sanlar kópligi berilgen funkciyanıń ***anıqlanıw oblastı***, y funkciya qabıl etiwi múmkin bolǵan sanlar kópligi berilgen funkciyanıń ***mánisler kópligi*** dep ataladı hám olar sáykes túrde $D(f)$ hám $E(f)$, yamasa $D(y)$ hám $E(y)$ kórinisinde belgilenedi.

Bazı funkciyalar ushın anıqlanıw oblastı hám mánisler kópligi kestesi:

Funkciya	Anıqlanıw oblastı	Mánisler kópligi
1) $y = kx + b$	$D(y) = (-\infty; +\infty)$	$E(y) = (-\infty; +\infty)$
2) $y = x^2$	$D(y) = (-\infty; +\infty)$	$E(y) = [0; +\infty)$
3) $y = \|x\|$	$D(y) = (-\infty; +\infty)$	$E(y) = [0; +\infty)$
4) $y = \dfrac{k}{x}$	$D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
5) $y = \sqrt{x}$	$D(y) = [0; +\infty)$	$E(y) = [0; +\infty)$
6) $y = \sqrt[2n]{x}$	$D(y) = [0; +\infty)$	$E(y) = [0; +\infty)$
7) $y = \sqrt[3]{x}$	$D(y) = (-\infty; +\infty)$	$E(y) = (-\infty; +\infty)$
8) $y = \sqrt[2n+1]{x}$	$D(y) = (-\infty; +\infty)$	$E(y) = (-\infty; +\infty)$

x argumenttiń $y = f(x)$ funkciyanıń anıqlanıw oblastına tiyisli bolmaǵan hárqanday mánisinde $y = f(x)$ funkciya anıqlanbaǵan boladı, basqasha aytqanda, $f(x)$ funkciya mániske iye bolmaydı. Máselen, $y = \sqrt{x}$ funkciya ushın $x = -1$ bolǵanda; $y = \dfrac{k}{x}$ funkciya ushın $x = 0$ bolǵanda mániske iye emes.

1-mısal. $y = \dfrac{1}{x^2 - x}$ funkciyanıń anıqlanıw oblastın tabıń.

Sheshiliwi. Racional ańlatpanıń bólimi nólge teń bolıwı múmkin emes, yaǵnıy:

$$x^2 - x \neq 0$$
$$x(x-1) \neq 0$$
$$x \neq 0 \text{ hám } x \neq 1.$$

Demek, x argument 0 hám 1 mánislerdi qabıl ete almaydı. Sonıń ushın berilgen funkciyanıń anıqlanıw oblastı $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

Juwabı: $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

2-mısal. $y=\sqrt{9-x^2}$ funkciyanıń anıqlanıw oblastın tabıń.

Sheshiliwi. Kvadrat koren astındağı ańlatpa teris bolmaydı. Yağnıy:

$$9-x^2\geq 0$$

$$(3-x)(3+x)\geq 0$$

$$-3\leq x\leq 3.$$

Demek, x argument tek ğana [–3; 3] kesindiden mánis qabıl ete aladı. Sonıń ushın funkciyanıń anıqlanıw oblastı: $D(y)=[-3;3]$.

Juwabı: $D(y)=[-3;3]$.

3-mısal. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ funkciyanıń anıqlanıw oblastın tabıń.

Sheshiliwi. Berilgen funkciya bóliminde kvadrat koren astındağı ańlatpa berilgen, bul ańlatpa nólge teń bolıwı múmkin emes hám nólden kishi bolmawı kerek. Sonıń ushın,

$$x+1>0$$

$$x>-1.$$

Demek, funkciyanıń anıqlanıw oblastı $D(y)=(-1;\infty)$.

Juwabı: $D(y)=(-1;\infty)$.

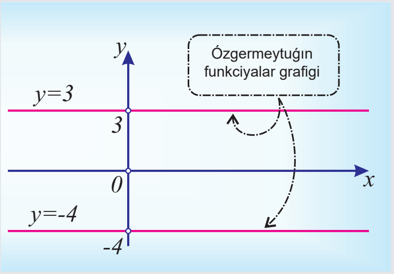
Funkciyanıń grafigi

$y=f(x)$ funkciya óziniń $D(f)$ anıqlanıw oblastınan alınğan hárbir x elementke $E(f)$ mánisler kópliginen tek ğana bir $f(x)$ mánisti sáykes qoyadı. Nátiyjede hárbir $x\in D(f)$ element Oxy koordinatalar tegisliginde tek ğana bir $(x, f(x))$ noqattı anıqlaydı.

Oxy koordinatalar tegisliginde payda etilgen barlıq $(x, f(x))$ noqatlar kópligi $y=f(x)$ ***funkciyanıń grafigi*** dep ataladı.

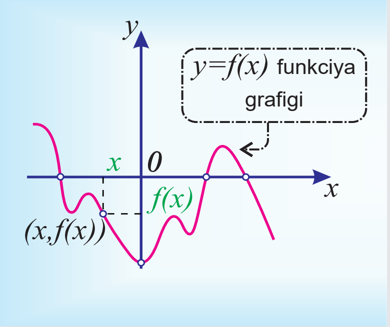
1-, 2-súwretlerde funkciya grafikleri súwretlengen.

1-súwret



Funkciyanıń grafigi

2-súwret



Funkciyanıń grafigi

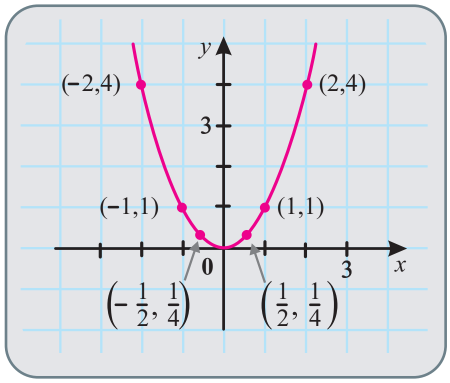
4-mısal. Tómendegi funkciyalardıń grafiklerin sızıń.

$a)\ y=x^2$ $\qquad b)\ y=x^3$ $\qquad d)\ y=\sqrt{x}$

Sheshiliwi. Bul funkciyalardıń grafiklerin sızıw ushın dáslep mánisler kestesin dúzip alamız. Keyin bul noqatlardı koordinata tegisliginde belgileymiz hám olardı iymek sızıq penen tutastıramız.

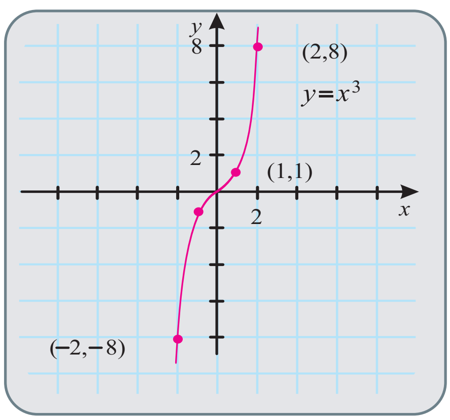
a)

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$y = x^2$	9	4	1	0	1	4	9



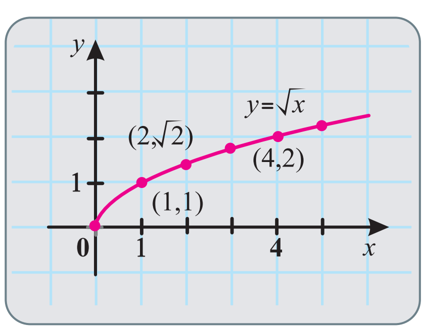
b)

x	–2	–1	–1/2	0	1/2	1	2
$y = x^3$	–8	–1	–1/8	0	1/8	1	8



c)

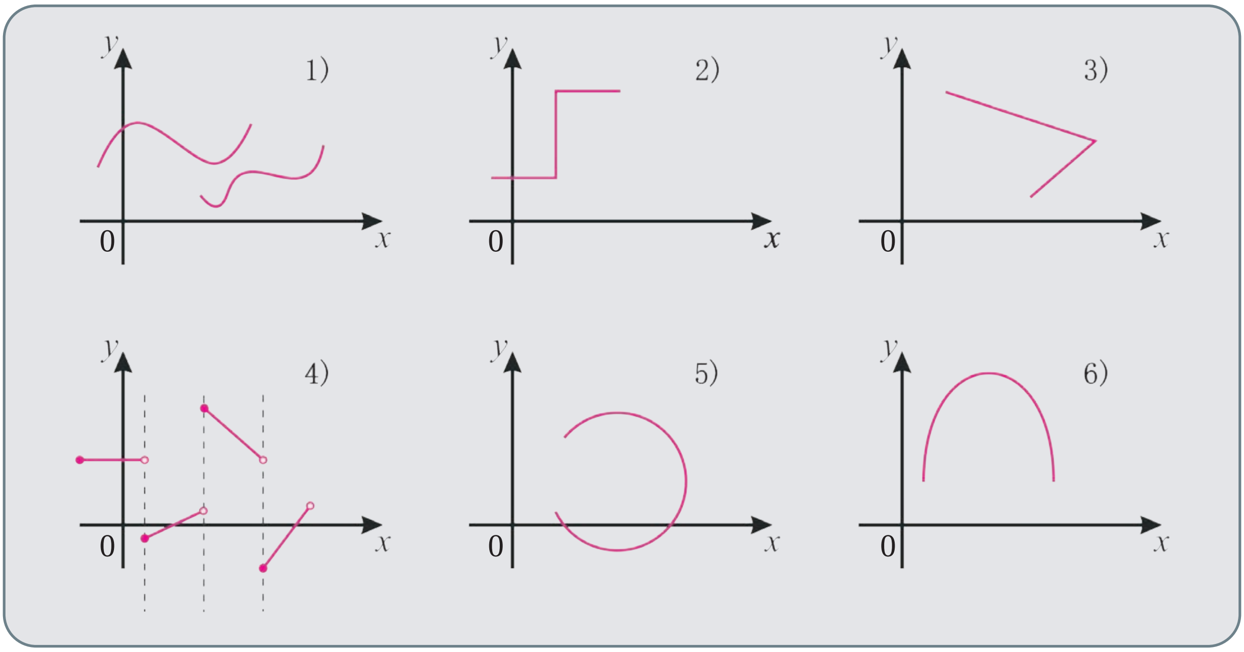
x	0	1/4	1	2	4	9
$y = \sqrt{x}$	0	1/2	1	$\sqrt{2}$	2	3



Oy kósherine parallel qálegen tuwrı sızıq berilgen grafikti birewden artıq bolmaǵan noqatta kesip ótse, Oxy tegisliginde súwretlengen sızıq $y = f(x)$ funkciyanıń grafigi boladı.

Eger Oy kósherine parallel qanday da bir tuwrı sızıq berilgen sızıqtı birewden artıq noqatta kesip ótse, Oxy tegisliginde súwretlengen sızıq $y=f(x)$ funkciyanıń grafigi bola almaydı.

Tómendegi súwrette keltirilgen sızıqlardan 4-hám 6-sızıqlar qanday da bir funkciyanıń grafigi boladı, 1-, 2-, 3- hám 5-sızıqlar bolsa funkciyanıń grafigi bolmaydı.



MÍSALLAR

1. Funkciyanıń anıqlanıw oblastın hám mánisler kópligin tabıń.

a) $f(x)=3x$ b) $f(x)=3x$, $2\le x\le 6$

c) $f(x)=5x^2+2$ d) $f(x)=5x^2+2,\ 0\le x\le 2$

2. Funkciyanıń anıqlanıw oblastın tabıń.

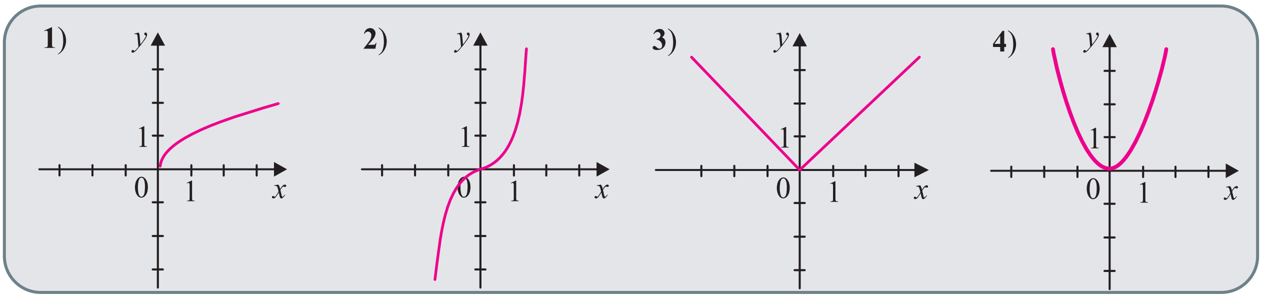
a) $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$ b) $f(x)=\dfrac{1}{3x-6}$ c) $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-1}$

d) $f(x)=\dfrac{x^4}{x^2+x-6}$ e) $f(t)=\sqrt{t+1}$ f) $g(t)=\sqrt{t^2+9}$

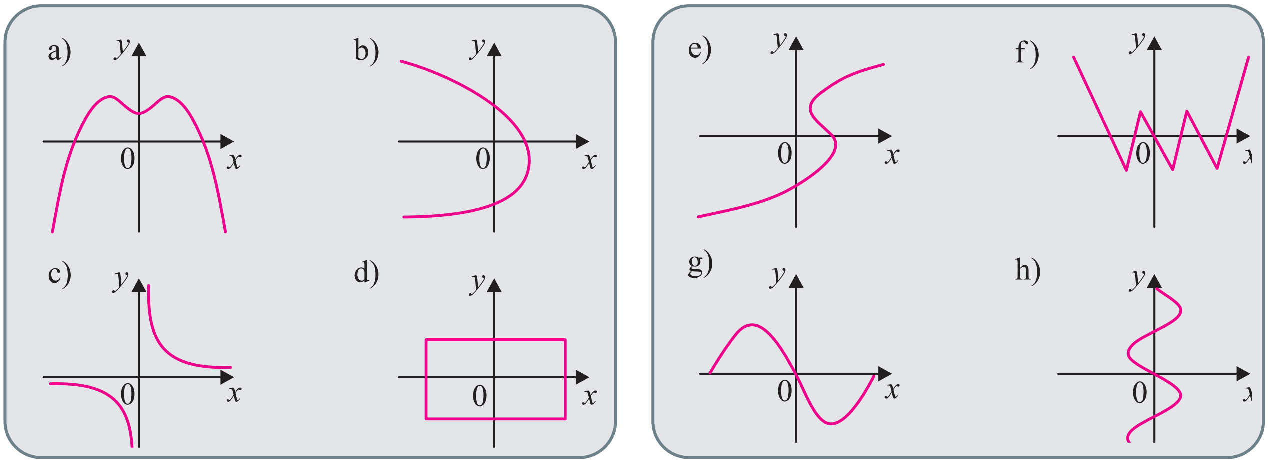
g) $f(t)=\sqrt[3]{t-1}$ h) $g(x)=\sqrt{7-3x}$ i) $f(x)=\sqrt{1-2x}$

3. Funkciyaǵa sáykes grafikti anıqlań.

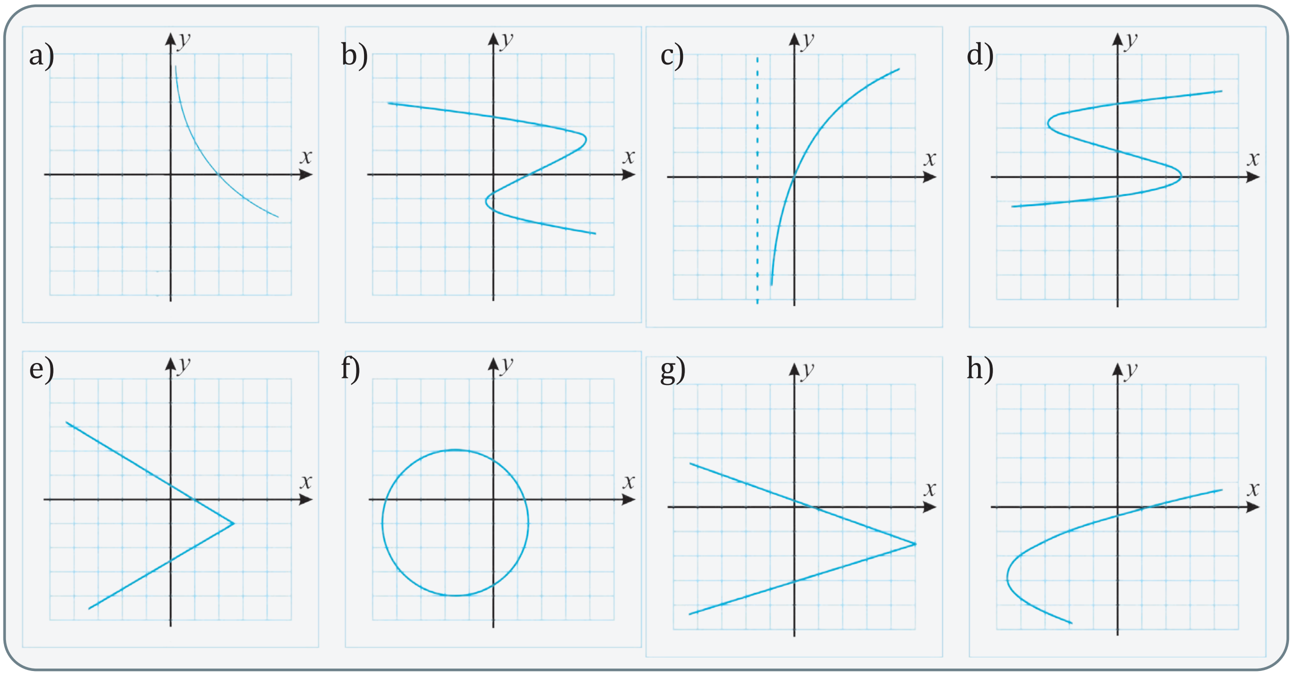
a) $f(x)=x^2$ b) $f(x)=x^3$ c) $f(x)=\sqrt{x}$ d) $f(x)=|x|$



4. Berilgenlerden qaysıları funkciya grafigi bola aladı?



5. Berilgenlerden qaysıları funkciya grafigi bola almaydı?



6. Berilgen funkciyalardıń grafiklerin sızıń.

a) $f(x)=8x-x^2$ b) $g(x)=x^2-x-20$ c) $h(x)=x^3-5x-4$

7. Berilgen funkciyalardıń mánisler kestesin dúziń hám grafigin sızıń.

a) $f(x)=-x^2$ b) $f(x)=x^2-4$ c) $g(x)=-(x+1)^2$

d) $r(x)=3x^4$ e) $r(x)=1-x^4$ f) $g(x)=x^3-8$

g) $k(x)=\sqrt[3]{-x}$ h) $k(x)=-\sqrt[3]{x}$ i) $f(x)=1+\sqrt{x}$

j) $C(t)=\dfrac{1}{t^2}$ k) $C(t)=-\dfrac{1}{t+1}$ l) $H(x)=|2x|$

m) $G(x)=|x|+x$ n) $G(x)=|x|-x$ o) $f(x)=|2x-2|$

FUNKCIYALAR ÚSTINDE ARIFMETIKALÍQ ÁMELLER

Funkciyalar ústinde arifmetikalıq ámeller

Funkciyalar ústinde qosıw (+), alıw (−), kóbeytiw (×), bóliw (÷) arifmetikalıq ámellerin orınlaw múmkin.

$f(x)$ hám $g(x)$ funkciyalardıń anıqlanıw oblastları sáykes túrde A hám B kóplikler bolsın. Bul funkciyalardıń $A \cap B$ kópliktegi ***qosındısı*** dep hárbir $x \in A \cap B$ elementte $f(x) + g(x)$ mánisti qabıl etetuǵın funkciyaǵa aytıladı. $f(x)$ hám $g(x)$ funkciyalardıń qosındısı $(f+g)(x)$ kórinisinde belgilenedi. Demek:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x).$$

Tap usıǵan uqsas usılda, $f(x)$ hám $g(x)$ funkciyalardıń ***ayırması***, ***kóbeymesi***, ***qatnasın*** de anıqlaw múmkin:

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Dıqqat etiń!

1. $A \cap B = \varnothing$ bolsa, bul ámeller anıqlanbaydı.

2. Eki $f(x)$ hám $g(x)$ funkciyalardıń bóliniwin anıqlawda X kóplikten alınǵan hárbir x element ushın $g(x) \neq 0$ bolıwı talap etiledi.

MÍSALLAR

1-mısal. $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ hám $g(x) = \sqrt{x}$ funkciyalar berilgen.

a) $(f+g)(x), (f-g)(x), (f \cdot g)(x)$ hám $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$ funkciyalardı hám olardıń anıqlanıw oblastın tabıń.

b) $(f+g)(4), (f-g)(4), (fg)(4)$ hám $\left(\dfrac{f}{g}\right)(4)$ ti tabıń.

Sheshiliwi. a) f funkciyanıń anıqlanıw oblastı $x \neq 2$, g funkciyanıń anıqlanıw oblastı bolsa $x \geq 0$. f hám g funkciyalardıń anıqlanıw oblastları kesilispesi $[0; 2) \cup (2; \infty)$ boladı.

Ol jaǵdayda, olar ústinde ámeller tómendegishe orınlanadı:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{1}{x-2} + \sqrt{x}$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{1}{x-2} - \sqrt{x}$$

$$(fg)(x)=f(x)g(x)=\frac{\sqrt{x}}{x-2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{1}{(x-2)\sqrt{x}}.$$

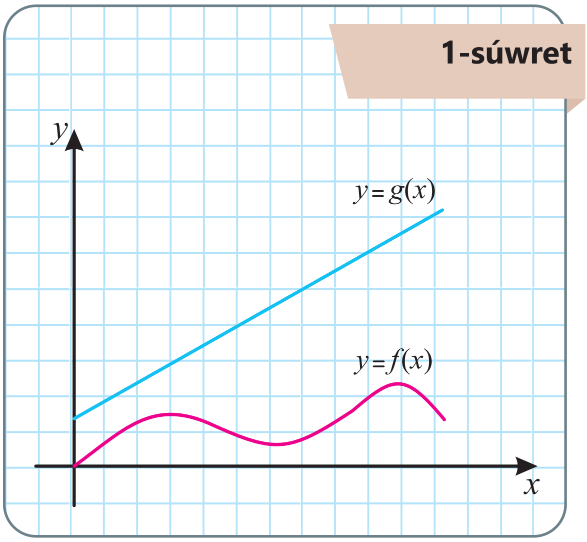
b) $x = 4$ mánis hárbir jańa funkciyanıń anıqlanıw oblastına tiyisli ekenliginen tómendegi mánisler anıqlanǵan:

$$(f+g)(4)=f(4)+g(4)=\frac{1}{4-2}+\sqrt{4}=\frac{5}{2}$$

$$(f-g)(4)=f(4)-g(4)=\frac{1}{4-2}-\sqrt{4}=-\frac{3}{2}$$

$$(fg)(4)=f(4)g(4)=\left(\frac{1}{4-2}\right)\sqrt{4}=1$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(4)=\frac{f(4)}{g(4)}=\frac{1}{(4-2)\sqrt{4}}=\frac{1}{4}.$$



1-súwret

2-mısal. Funkciyalardı grafikalıq usılda qosıw.

f hám g funkciyalardıń grafigi 1-súwrette berilgen bolsın. Grafikalıq usılda qosıw járdeminde $f + g$ funkciyanıń grafigin sızıń.

Sheshiliwi. f funkciyanıń grafigi Oxy tegisliktegi

$$\{(x, f(x)) : x \in D(f)\}$$

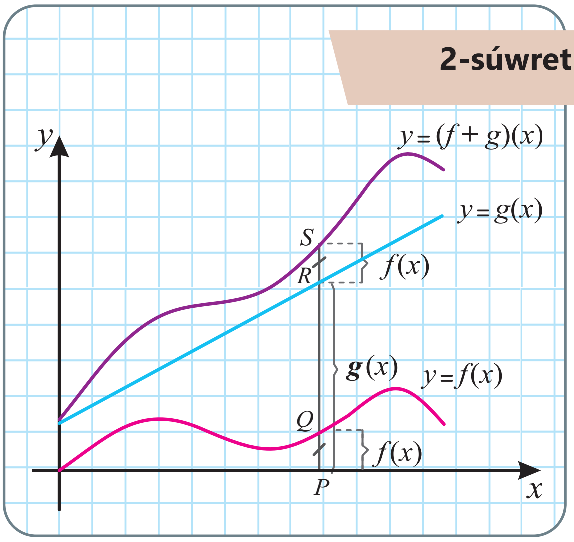
köplikten ibarat ekenligi belgili. Sonday-aq,

$$\{(x, g(x)) : x \in D(g)\}$$

kóplik g funkciyanıń grafigi boladı. f hám g funkciyalardı qosıwdıń grafikalıq usılı degende usı kóplik túsiniledi:

$$\{(x, f(x) + g(x)) : x \in D(f) \cap D(g)\}.$$

PQ kesindi PR kesindiniń joqarısına $f + g$ funkciyanıń S noqatın payda etiw ushın nusqalap kóshirilgen ($PQ = RS$).



2-súwret

MÍSALLAR

1. Funkciyalardı qosıń hám alıń.

a) $f(x)=5x+1,\ g(x)=-2x$

b) $f(x)=-3x+3,\ g(x)=-5x+4$

c) $f(x)=2x+1,\ g(x)=-5x+3$

d) $f(x)=-3x^2+7x,\ g(x)=2x+4$

2. Funkciyalardı kóbeytiń.

a) $f(x)=-x^2$, $g(x)=-3x+1$

b) $f(x)=-3x^2+3$, $g(x)=-x$

c) $f(x)=-x+3$, $g(x)=5x+6$

d) $f(x)=-4x+5$, $g(x)=-3x+1$

3. $(f+g)(x),(f-g)(x),(f\cdot g)(x)$ hám $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ funkciyalardı hám olardıń anıqlanıw oblastın tabıń.

a) $f(x)=x,\ g(x)=2x$

b) $f(x)=x,\ g(x)=\sqrt{x}$

c) $f(x)=x^2+x,\ g(x)=x^2$

d) $f(x)=3-x^2,\ g(x)=x^2-4$

e) $f(x)=5-x,\ g(x)=x^2-3x$

f) $f(x)=x^2+2x,\ g(x)=3x^2-1$

g) $f(x)=\sqrt{25-x^2},\ g(x)=\sqrt{x+3}$

h) $f(x)=\sqrt{16-x^2},\ g(x)=\sqrt{x^2-1}$

i) $f(x)=\dfrac{2}{x},\ g(x)=\dfrac{4}{x+4}$

j) $f(x)=\dfrac{2}{x+1},\ g(x)=\dfrac{x}{x+1}$

4. Funkciyalardıń anıqlanıw oblastın tabıń.

a) $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{3-x}$

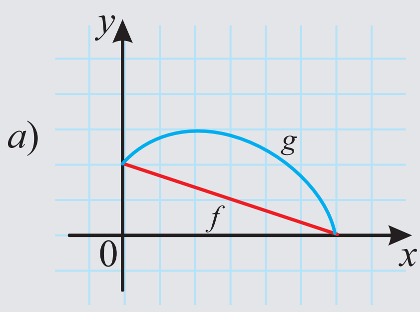
b) $f(x)=\sqrt{x+4}-\dfrac{\sqrt{1-x}}{x}$

c) $h(x)=(x-3)^{-\frac{1}{4}}$

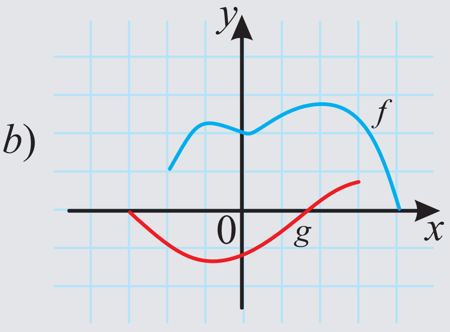
d) $k(x)=\dfrac{\sqrt{x+3}}{x-1}$

5. Grafikten paydalanıp qosıw járdeminde $f+g$ funkciyanıń grafigin sızıń (3-4-*súwretler*).

3-súwret



4-súwret



QURAMALÍ, KERI, PERIODLÍ FUNKCIYALAR

Quramalı funkciya

Funkciyalardı izbe-iz qollanıw nátiyjesinde ózgeriwshilerdiń jańa baylanısları payda boladı. Eger X kóplikte $y = f(x)$ funkciya berilgen bolıp, x argument T kóplikte anıqlanǵan qanday da bir $x = g(t)$ funkciya bolsa, ol jaǵdayda T kóplikte $y = f(g(t))$ ***quramalı funkciya*** anıqlanǵan dep ataladı.

Máselen, $y = 2x^2-3x$ funkciya $X = (-\infty; +\infty)$ kóplikte, $x=\sqrt{t}$ funkciya bolsa $T=[0;+\infty)$ kóplikte berilgen bolsın. Ol jaǵdayda, $y=2t-3\sqrt{t}$ funkciya $T=[0;+\infty)$ kóplikte $y=2x^2-3x$ hám $x=\sqrt{t}$ funkciyalardıń quramalı funkciyası boladı.

1-mısal. $f(x)=x^2$ hám $g(x)=x-3$ funkciyalar berilgen:

a) $f(g(x))$ hám $g(f(x))$ quramalı funkciyalardı hám olardıń anıqlanıw oblastın tabıń;

b) $f(g(5))$ hám $g(f(7))$ ni tabıń.

Sheshiliwi. a) Tómendegi teńlikler orınlı:

g funkciyanıń beriliwi boyınsha, $f(g(x)) = f(x-3)$,

f funkciyanıń beriliwi boyınsha, $f(g(x)) = (x-3)^2$ boladı.

f funkciyanıń beriliwi boyınsha, $g(f(x)) = g(x^2)$,

g funkciyanıń beriliwi boyınsha, $g(f(x)) = x^2-3$ boladı.

$f(g(x))$ hám $g(f(x))$ funkciyanıń anıqlanıw oblastı haqıyqıy sanlar kópligi.

b) Tabılǵan quramalı funkciyalarda x tıń ornına berilgen mánisti qoyamız:

$f(g(5)) = (5-3)^2 = 2^2 = 4,\qquad g(f(7)) = 7^2 - 3 = 49 - 3 = 46.$

2-mısal. Eger $f(x)=\sqrt{x}$ hám $g(x)=\sqrt{2-x}$ berilgen bolsa, tómendegi funkciyalardı hám olardıń anıqlanıw oblastların tabıń (1-*súwret*).

a) $f(g(x))$ b) $g(f(x))$

c) $f(f(x))$ d) $g(g(x))$

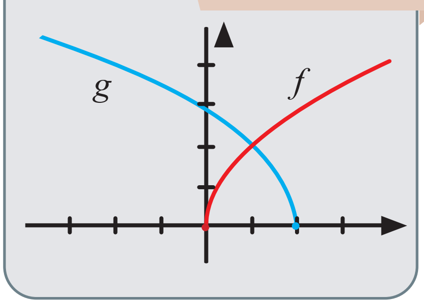
Sheshiliwi. a) Quramalı funkciya anıqlaması hám f hám g funkciyalardıń beriliwi boyınsha,

$$f(g(x)) = f\left(\sqrt{2-x}\right)=\sqrt{\sqrt{2-x}} = \sqrt[4]{2-x} \text{ boladı.}$$

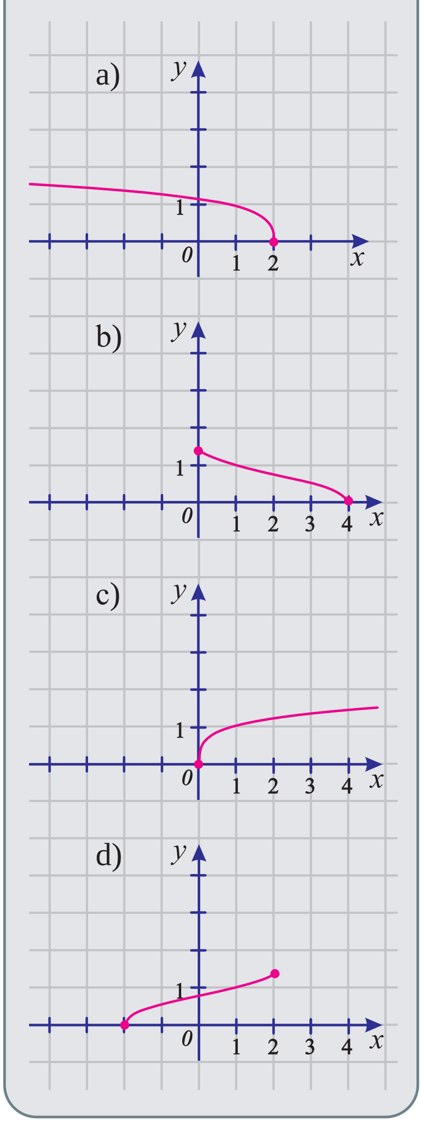
$\sqrt[4]{2-x}$ ańlatpanıń anıqlanıw oblastı $2-x\ge 0$.

Bunnan, $x \le 2$.

1-súwret



2-súwret



Demek, $f(g(x))$ tıń anıqlanıw oblastı $(-\infty;\ 2]$ aralıqtan ibarat (2a-*súwret*).

b) f tiń beriliwi boyınsha, $g(f(x)) = g\left(\sqrt{x}\right)$ bolıp, g nıń beriliwi boyınsha, $g(f(x)) = \sqrt{2-\sqrt{x}}$ boladı.

$\sqrt{x}$ tıń anıqlanıw oblastı: $x \geq 0$.

$\sqrt{2-\sqrt{x}}$ tıń anıqlanıw oblastı: $2-\sqrt{x} \geq 0$, bunnan,

$\sqrt{x} \leq 2$, yamasa $x \leq 4$. Demek, $0 \leq x \leq 4$ (2b-*súwret*).

c) f tiń beriliwi boyınsha, $f(f(x)) = f\left(\sqrt{x}\right)$ bolıp, f tiń beriliwi boyınsha, $f(f(x)) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$ boladı.

$\sqrt[4]{x}$ tıń anıqlanıw oblastı: $[0;\ \infty)$ (2c-*súwret*).

d) g nıń beriliwi boyınsha, $g(g(x)) = g\left(\sqrt{2-x}\right)$ bolıp, g nıń beriliwi boyınsha, $g(g(x)) = \sqrt{2-\sqrt{2-x}}$ boladı.

$\sqrt{2-\sqrt{2-x}}$ tıń anıqlanıw oblastı: $2-x \geq 0$ hám $\sqrt{2-x} \leq 2$

Bunnan $x \leq 2$ hám $x \geq -2 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$, demek, $g(g(x))$ tıń anıqlanıw oblastı: $[-2;\ 2]$ (2d-*súwret*).

3-mısal. $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, $g(x) = x^{10}$ hám $h(x) = x+3$ bolsa, $f(g(h(x)))$ tı tabıń.

Sheshiliwi. h tıń beriliwi boyınsha,

$f(g(h(x))) = f\left(g(x+3)\right)$ bolıp, g funkciyanıń beriliwi boyınsha, $f(g(h(x))) = f\left((x+3)^{10}\right)$,

f funkciyanıń beriliwi boyınsha, $f(g(h(x))) = \dfrac{(x+3)^{10}}{(x+3)^{10}+1}$ boladı.

4-mısal. $F(x) = \sqrt[4]{x+9}$ funkciya berilgen. Eger $F(x) = f(g(x))$ bolatuǵın, f hám g funkciyalarǵa mısal keltiriń.

Sheshiliwi. f hám g funkciyalardı tómendegi kóriniste alıwımız múmkin: $g(x) = x+9$ hám $f(x) = \sqrt[4]{x}$.

Bul jerde, g nıń beriliwi boyınsha, $f(g(x)) = f(x+9)$ bolıp, f tiń beriliwi boyınsha, $f(g(x)) = \sqrt[4]{x+9}$ boladı.

Usı tapsırma shártin qanaatlandırıwshı f hám g funkciyalardı birneshe variantlarda tańlap alıw múmkin. Solardan jáne birewi $f(x)=\sqrt{x}$ hám $g(x)=\sqrt{x+9}$.

5-mısal. Quramalı funkciyanıń qollanılıwı.

Keme 20 km/h turaqlı tezlikte qırǵaqqa parallel túrde háreketlenbekte. Keme mayaktıń aldınan saat 12:00 de, qırǵaqtan 5 km uzaqlıqta ótedi.

a) Mayak hám keme arasındaǵı s aralıqtı kemeniń saat 12:00 den keyin júrgen aralıǵı d ǵa baylanıslı funkciyası kórinisinde jazıń:

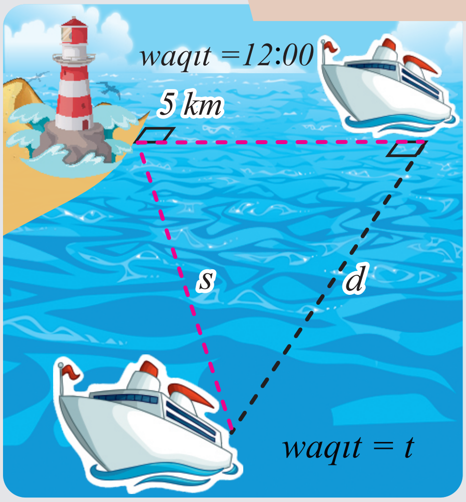
$$s=f(d).$$

b) d nı saat 12:00 den keyin ótken waqıt t (saat)ǵa baylanıslı funkciyası kórinisinde jazıń:

$$d=g(t).$$

c) $f(g(t))$ quramalı funkciyanı tabıń. Bul funkciya neni ańlatadı?

3-súwret



Sheshiliwi. 3-súwretke qaraymız.

a) s hám d aralıqlardıń baylanıslılıǵın Pifagor teoreması járdeminde kórsetemiz. Basqasha aytqanda, s tiń d ǵa baylanıslı funkciya ekenligin tómendegishe ańlatamız:

$$s=f(d)=\sqrt{25+d^2}.$$

b) keme 20 km/h turaqlı tezlikte háreketlenip atırǵanı ushın, d aralıqtıń t waqıtqa baylanıslılıǵı

$$d=g(t)=20t$$

kórinisindegi funkciya arqalı ańlatılıwı múmkin.

c) solay etip:

g nıń beriliwi boyınsha, $f(g(t))=f(20t)$ bolıp,

f funkciyanıń beriliwi boyınsha, $f(g(t))=\sqrt{25+(20t)^2}$ boladı. Bul jerde $f(g(t))$ funkciya keme hám mayak arasındaǵı aralıqtıń waqıtqa baylanıslı funkciyasın ańlatadı.

Keri funkciya

Eger $f(x)=y$ teńleme hárbir y ushın x qa qaraǵanda tek ǵana bir $g(y)$ korenge iye bolsa, ol jaǵdayda $x=g(y)$ funkciya $y=f(x)$ funkciyaǵa ***keri funkciya*** dep ataladı. $x=g(y)$ funkciyanıń ornına ádettegi belgilewler boyınsha, $y=g(x)$ jazıwı isletiledi. $y=f(x)$ funkciyaǵa keri funkciya $y=f^{-1}(x)$ kórinisinde jazıladı.

1-mısal. $y=3x-5$ funkciyanı qarayıq. Bul jerden x tı y arqalı ańlatayıq:

$$3x-5=y \Rightarrow 3x=y+5 \Rightarrow x=\frac{y+5}{3}.$$

Aqırǵı teńlikte x hám y lerdiń orınların almastırıp:

$$y=\frac{x+5}{3}$$

funkciyaǵa iye bolamız. Demek, $f^{-1}(x)=\frac{x+5}{3}$ funkciya $y=3x-5$ funkciyaǵa keri funkciya boladı.

Esletpe. Berilgen $y=f(x)$ funkciya hám oǵan keri $y=f^{-1}(x)$ funkciya ushın $D(f^{-1})=E(f)$ hám $E(f^{-1})=D(f)$ boladı.

Dıqqat etiń! $(f(x))^{-1}=\frac{1}{f(x)}$ bolıp, bul teńliktegi (-1) dáreje kórsetkishin ańlatadı. $f^{-1}(x)$ jazıwdaǵı (-1) bolsa keri funkciyanı bildiredi. Ulıwma alǵanda, $(f(x))^{-1} \neq f^{-1}(x)$.
Máselen:
$f(x)=3x-5$ funkciya ushın $f^{-1}(x)=\frac{x+5}{3}$ hám $(f(x))^{-1}=\frac{1}{3x-5}$ boladı.

2-mısal. Berilgen funkciyanıń keri funkciyasın tabıń: $f(x)=\frac{x^5-3}{2}$.

Sheshiliwi. Funkciyanı $y=\frac{x^5-3}{2}$ kórinisinde jazıp alamız hám x tı y arqalı ańlatamız:

$$y=\frac{x^5-3}{2}$$

$$2y=x^5-3$$

$$x^5=2y+3$$

$$x=\sqrt[5]{2y+3}.$$

Endi x hám y lerdiń ornın almastıramız: $y=\sqrt[5]{2x+3}$. Demek, keri funkciya tómendegishe: $f^{-1}(x)=\sqrt[5]{2x+3}$.

3-mısal. Berilgen funkciyanıń keri funkciyasın tabıń: $f(x)=\frac{2x+3}{x-1}$.

Sheshiliwi. Funkciyanı tómendegishe jazıp alamız: $y=\frac{2x+3}{x-1}$ hám x tı y arqalı ańlatamız:

$$y=\frac{2x+3}{x-1}$$

$$y\cdot(x-1)=2x+3$$

$$yx-y=2x+3$$

$$yx-2x=y+3$$

$$x \cdot (y-2) = y+3$$

$$x = \frac{y+3}{y-2}$$

Demek, $f^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{x-2}$ keri funkciya boladı.

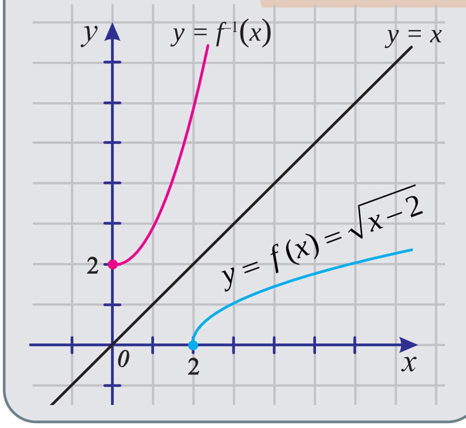
4-mısal. Keri funkciyanıń grafigin sızıw.

$f(x) = \sqrt{x-2}$ funkciyanıń grafiginen paydalanıp, f^{-1} funkciyanıń grafigin sızıń hám onıń analitikalıq kórinisin jazıń.

Sheshiliwi.

1. $y = \sqrt{x-2}$ funkciyanıń grafigi 4-súwrette keltirilgen.

2. f^{-1} funkciyanıń grafigi f funkciyanıń grafigin $y = x$ tuwrı sızıqqa qaraǵanda simmetriyalı sáwlelendiriw járdeminde sızıladı (4-*súwret*).



4-súwret

3. $y = \sqrt{x-2}$ funkciyada x tı y arqalı ańlatıladı, bul jerde $y \geq 0$ ekenligi inabatqa alınadı.

$$\sqrt{x-2} = y$$

$$x - 2 = y^2$$

$$x = y^2 + 2, \ y \geq 0.$$

Endi x hám y lerdiń ornın almastıramız: $y = x^2 + 2$, $x \geq 0$.

Demek, keri funkciya $f^{-1}(x) = x^2 + 2$ boladı eken, $x \geq 0$.

Bul tabılǵan f^{-1} keri funkciya $y = x^2 + 2$ parabolanıń oń shaqasınan ibarat. Bunı grafikten de kóriwge boladı.

Periodlı funkciyalar

$D(f)$ berilgen $y = f(x)$ funkciyanıń anıqlanıw oblastı bolsın. Sonday $T \neq 0$ tabılıp, hárbir $x \in D(f)$ ushın:

1. $x - T$ hám $x + T$ lar $D(f)$ ke tiyisli,
2. $f(x-T) = f(x) = f(x+T)$ qatnaslar orınlansa, onda $y = f(x)$ ***periodlı funkciya*** dep ataladı.

Eger T sanı $y = f(x)$ funkciyanıń periodı bolsa, onda hárbir n pútin san ushın nT sanı da $y = f(x)$ funkciyanıń periodı boladı:

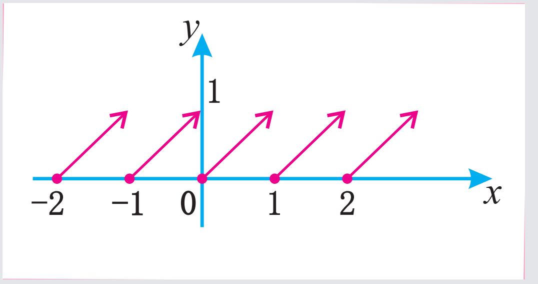
$$f(x + nT) = f(x), \ n \in \mathbb{Z}.$$

Eń kishi oń T period $f(x)$ funkciyanıń ***tiykarǵı periodı*** dep júritiledi.

Periodlı funkciyanıń grafigin bir period aralıǵında sızıw jeterli boladı, basqa period aralıqlarında usı grafik tákirarlanadı.

Máselen, sannıń bólshek bólegi $\{x\}$ – berilgen x sanǵa onıń bólshek bólegin sáykes qoyıwshı funkciya (5-*súwret*) – periodlı funkciya boladı. Onıń tiykarǵı periodı $T_0=1$, yaǵnıy qálegen $x\in(-\infty;+\infty)$ san ushın $(x+1)\in(-\infty;+\infty)$ hám $\{x+1\}=\{x\}$ qatnaslar orınlı boladı.

5-súwret



$y=\{x\}$ funkciya grafigi

Eger $y=f(x)$ funkciyanıń tiykarǵı periodı T_0 bolsa, onda $y=kf(ax+b)+c$ funkciyanıń tiykarǵı periodı $T_1=\dfrac{T_0}{|a|}$ boladı $(a\neq0)$.

MÍSALLAR

1. $f(x)=2x-3$ hám $g(x)=4-x^2$ tan paydalanıp quramalı funkciyalardıń mánisin tabıń.

a) $f(g(0))$ b) $g(f(0))$ c) $f(f(2))$ d) $g(g(3))$

e) $f(g(-2))$ f) $g(f(-2))$ g) $f(f(-1))$ h) $g(g(-1))$

2. $f(g(x))$, $g(f(x))$, $f(f(x))$ hám $g(g(x))$ funkciyalardı hám olardıń anıqlanıw oblastın tabıń.

a) $f(x)=2x+3,\ g(x)=4x-1$ b) $f(x)=6x-5,\ g(x)=\dfrac{x}{2}$

c) $f(x)=x^2,\ g(x)=x+1$ d) $f(x)=x^3+2,\ g(x)=\sqrt[3]{x}$

e) $f(x)=\dfrac{1}{x},\ g(x)=2x+4$ f) $f(x)=x^2,\ g(x)=\sqrt{x-3}$

g) $f(x)=|x|,\ g(x)=2x+3$ h) $f(x)=4-x,\ g(x)=|x+4|$

i) $f(x)=\dfrac{x}{x+1},\ g(x)=2x-1$ j) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}},\ g(x)=x^2-4x$

k) $f(x)=\dfrac{x}{x+1},\ g(x)=\dfrac{1}{x}$ l) $f(x)=\dfrac{2}{x},\ g(x)=\dfrac{x}{x+2}$

3. $f(x)=3-x$ hám $g(x)=x^2+1$ den paydalanıp, funkciyalardı tabıń.

a) $f(g(x))$ b) $g(f(x))$ c) $f(f(x))$ d) $g(g(x))$

4. $f(g(h(x)))$ quramalı funkciyanı tabıń.

a) $f(x)=x-1,\ g(x)=\sqrt{x},\ h(x)=x-1$

b) $f(x)=\dfrac{1}{x},\ g(x)=x^3,\ h(x)=x^2+2$

c) $f(x)=x^4+1$, $g(x)=x-5$, $h(x)=\sqrt{x}$

d) $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=\dfrac{x}{x-1}$, $h(x)=\sqrt[3]{x}$

5. $F(x) = f(g(x))$ teńlikti qanaatlandıratuǵın f hám g ápiwayı funkciyalarǵa mısallar keltiriń.

a) $F(x)=(x-9)^5$ b) $F(x)=\sqrt{x}+1$ c) $F(x)=\dfrac{x^2}{x^2+4}$

d) $F(x)=\dfrac{1}{x+3}$ e) $F(x)=\left|1-x^3\right|$ f) $F(x)=\sqrt{1+\sqrt{x}}$

6. Berilgen f funkciyaǵa keri funkciyanı tabıń.

a) $f(x)=3x+5$ b) $f(x)=7-5x$ c) $f(x)=5-4x^3$

d) $f(x)=3x^3+8$ e) $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ f) $f(x)=\dfrac{5}{x-6}$

g) $f(x)=\dfrac{3-4x}{8x-1}$ h) $f(x)=\dfrac{3x}{x-2}$ i) $f(x)=\dfrac{2x+5}{x-7}$

j) $f(x)=\sqrt{5+8x}$ k) $f(x)=2+\sqrt[3]{x}$ l) $f(x)=x^6$, $x\ge 0$

m) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$, $x>0$ n) $f(x)=4-x^2$, $x\ge 0$ o) $f(x)=x^2+x$, $x\ge -\dfrac{1}{2}$

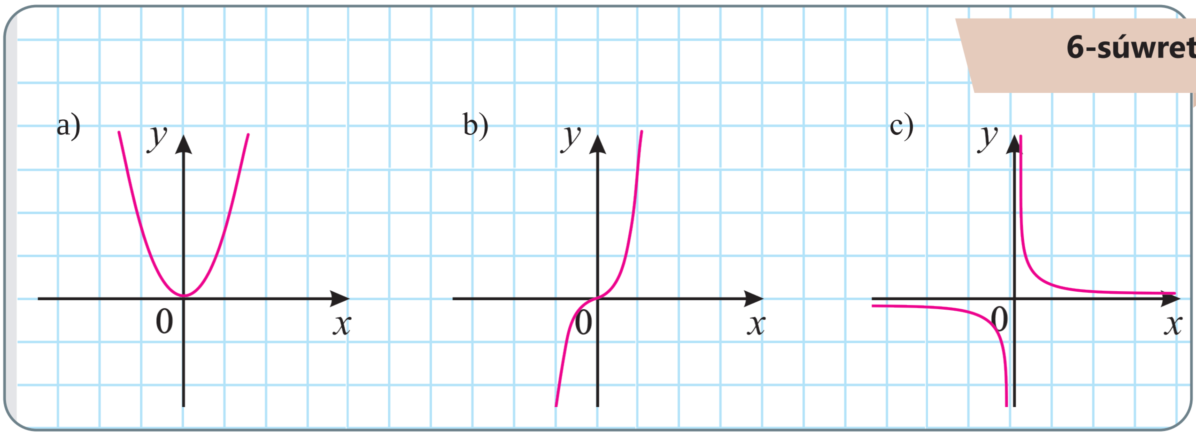
7. Berilgen funkciyaǵa keri funkciyanı tabıń. f funkciya grafiginen paydalanıp, keri funkciya grafigin sızıń.

a) $f(x)=3x-6$ b) $f(x)=16-x^2$, $x\ge 0$

c) $f(x)=\sqrt{x+1}$ d) $f(x)=x^3$

8. 6-súwrette berilgen grafiklerge sáykes funkciyalardı tańlań hám olarǵa keri funkciya grafigin sızıń:

$$1)\ f(x)=x^3;\quad 2)\ f(x)=\frac{1}{x};\quad 3)\ f(x)=x^2$$



6-súwret

9. $T=\sqrt{2}$ san $f(x)=5$ funkciyanıń periodı bolıwın dálilleń.

10. Berilgen funkciyalar periodlı emesligin kórsetiń.

a) $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$ b) $f(x)=-\dfrac{2}{x-2}$ c) $f(x)=\dfrac{x}{x}$

d) $f(x)=x^2-4$ e) $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x^2+5x+8}$ f) $f(x)=\sqrt[3]{x}+3x-1$

FUNKCIYANÍŃ QÁSIYETLERI

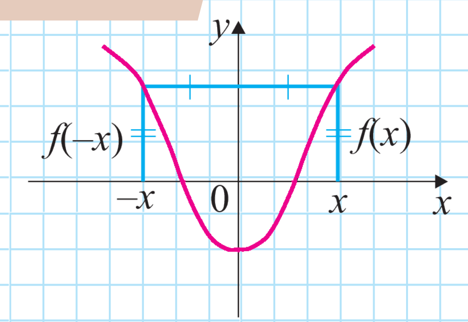
Jup hám taq funkciyalar

Qálegen $x \in D(f)$ ushın $f(-x) = f(x)$ teńlik orınlansa, onda $f(x)$ ***jup funkciya*** dep ataladı. Jup funkciyanıń grafigi Oy kósherine qarata simmetriyalı boladı (1-*súwret*).

Qálegen $x \in D(f)$ ushın $f(-x) = -f(x)$ teńlik orınlansa, onda $f(x)$ ***taq funkciya*** dep ataladı. Taq funkciyanıń grafigi koordinata basına qarata simmetriyalı boladı (2-*súwret*).

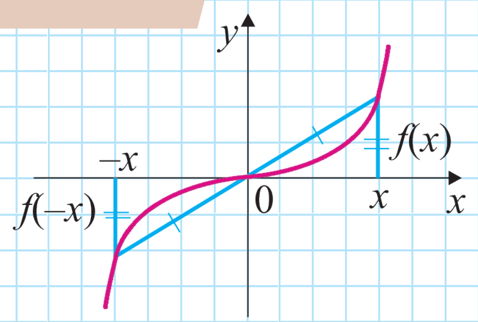
Joqarıdağı eki teńlikten birewi de orınlanbasa, onda $f(x)$ ***jup ta emes***, ***taq ta emes funkciya*** dep ataladı.

1-súwret



$f(x)$ – jup funkciya

2-súwret



$f(x)$ – taq funkciya

1-mısal. $f(x) = 2x^2 + 5$ funkciyanıń jup yamasa taq ekenligin tekseriń.

Sheshiliwi.

$f(x) = 2x^2 + 5$ funkciya ushın:

$$f(-x) = 2(-x)^2 + 5 = 2x^2 + 5 = f(x)$$

ekenliginen $f(x)$ funkciya jup funkciya boladı.

2-mısal. $f(x) = 2x^3 + 5x$ funkciyanıń jup yamasa taq ekenligin tekseriń.

Sheshiliwi.

$f(x) = 2x^3 + 5x$ funkciya ushın:

$$f(-x) = 2(-x)^3 + 5(-x) = -\left(2x^3 + 5x\right) = -f(x)$$

ekenliginen $f(x)$ funkciya taq funkciya boladı.

3-mısal. $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x + 1$ funkciyanıń jup yamasa taq ekenligin tekseriń.

Sheshiliwi.

$$f(-x) = 2(-x)^3 + 5(-x)^2 - 3(-x) + 1 =$$

$$= -\left(2x^3 - 5x^2 - 3x - 1\right)$$

Demek, $f(-x) \neq f(x)$, $f(-x) \neq -f(x)$ bolıp, bul funkciya jup ta emes, taq ta emes eken.

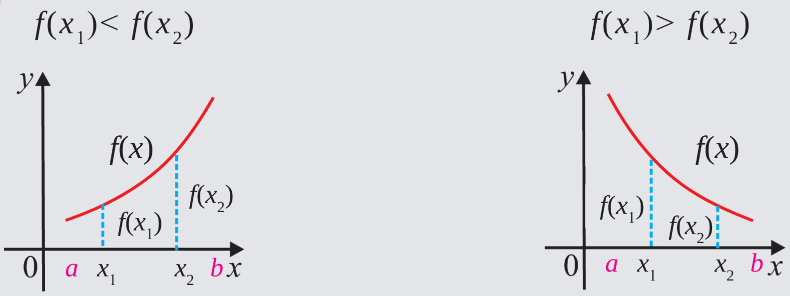
Funkciyalardıń ósiwi hám kemeyiwi

$f(x)$ funkciya $(a; b)$ aralıqta anıqlanǵan bolıp, $x_1 < x_2$ shártti qanaatlandırıwshı barlıq $x_1, x_2 \in (a; b)$ lar ushın:

- $f(x_1) < f(x_2)$ bolsa, $f(x)$ funkciya $(a; b)$ aralıqta ósiwshi;
- $f(x_1) > f(x_2)$ bolsa, $f(x)$ funkciya $(a; b)$ aralıqta kemeyiwshi;
- $f(x_1) \geq f(x_2)$ bolsa, $f(x)$ funkciya $(a; b)$ aralıqta óspeytuǵın;
- $f(x_1) \leq f(x_2)$ bolsa, $f(x)$ funkciya $(a; b)$ aralıqta kemeymeytuǵın funkciya dep ataladı.

Ósiwshi, kemeyiwshi, óspeytuǵın hám kemeymeytuǵın funkciyalar ulıwma atama menen ***monoton funkciyalar*** dep ataladı.

3-súwret



Ósiwshi funkciya **Kemeyiwshi funkciya**

Funkciyanıń ekstremum noqatları hám ekstremumları

- Eger:

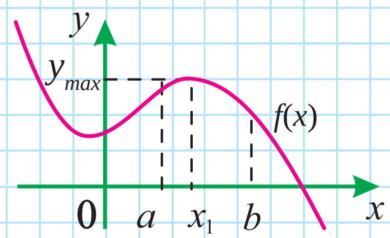
1) $f(x)$ funkciya x_1 noqat tiyisli bolǵan qanday da bir $(a;\ b)$ intervalda anıqlanǵan bolıp;

2) $(a;\ b)$ intervaldıń x_1 den parıqlı barlıq x noqatlarında $f(x)< f(x_1)$ shárt orınlansa, ol jaǵdayda x_1 noqat $f(x)$ ***funkciyanıń maksimum noqatı*** dep ataladı (4-*súwret*).

Eger $x_1 \in D(f)$ noqat $f(x)$ funkciya ushın maksimum noqat bolsa, ol jaǵdayda $f(x)$ funkciyanıń x_1 noqattaǵı $f(x_1)$ mánisi ***funkciyanıń maksimumı*** dep ataladı hám $y_{\max}$ kórinisinde belgilenedi. Demek,

$$y_{\max} = f(x_1).$$

4-súwret



$f(x)$ ushın $(a;\ b)$ intervalda
x_1 – funkciyanıń maksimum noqatı;
$y_{max} = f(x_1)$ – funkciyanıń maksimumı

- Eger:

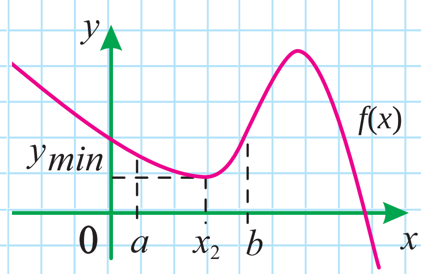
1) $f(x)$ funkciya x_2 tiyisli bolǵan qanday da bir $(a;\ b)$ intervalda anıqlanǵan bolıp;

2) $(a;\ b)$ intervaldıń x_2 den parıqlı barlıq x noqatlarında $f(x)> f(x_2)$ shárt orınlansa, ol jaǵdayda x_2 noqat $f(x)$ ***funkciyanıń minimum noqatı*** dep ataladı (5-*súwret*).

Eger $x_2 \in X$ noqat $f(x)$ funkciya ushın minimum noqat bolsa, ol jaǵdayda $f(x)$ funkciyanıń x_2 noqattaǵı $f(x_2)$ mánisi $f(x)$ ***funkciyanıń minimumı*** dep ataladı hám $y_{\min}$ kórinisinde begilenedi. Demek,

$$y_{\min} = f(x_2).$$

5-súwret



$f(x)$ ushın $(a;\ b)$ intervalda
x_2 – funkciyanıń minimum noqatı;
$y_{\min} = f(x_2)$ – funkciyanıń minimumı.

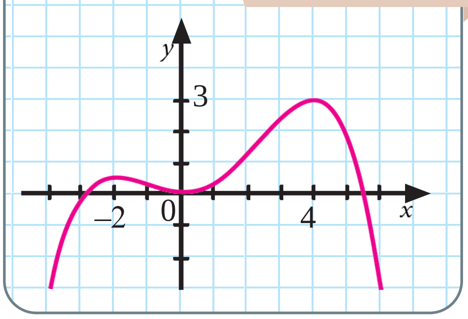
Funkciyanıń maksimum hám minimum noqatları ***ekstremum noqatları*** dep ataladı. Funkciyanıń ***ekstremum noqatlardaǵı*** mánisleri funkciya ***ekstremumları*** dep ataladı.

4-mısal. $f(x)$ funkciyanıń grafigi 6-súwrette keltirilgen. Funkciyanıń ósiw hám kemeyiw aralıqların tabıń.

Sheshiliwi.

$f(x)$ funkciyanıń grafiginen, funkciya $(-\infty;-2]$ hám $[0;\ 4]$ aralıqlarda ósiwin, $[-2;\ 0]$ hám $[4;\infty)$ aralıqlarda kemeyiwin anıqlaymız.

6-súwret



MÍSALLAR

1. Berilgen funkciyalardıń jup yamasa taq ekenligin tekseriń.

a) $f(x)=x^4$ b) $f(x)=x^3$

c) $f(x)=x^2+x$ d) $f(x)=x^4-4x^2$

e) $f(x)=x^3-x$ f) $f(x)=3x^3+2x^2+1$

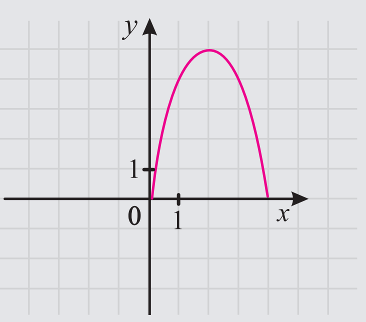
g) $f(x)=1-\sqrt[3]{x}$ h) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$

2. 7-súwrette $x\geq 0$ oblast ushın funkciyanıń grafigi berilgen. $x<0$ oblastta grafikti sonday sızıń:

1) jup funkciya;

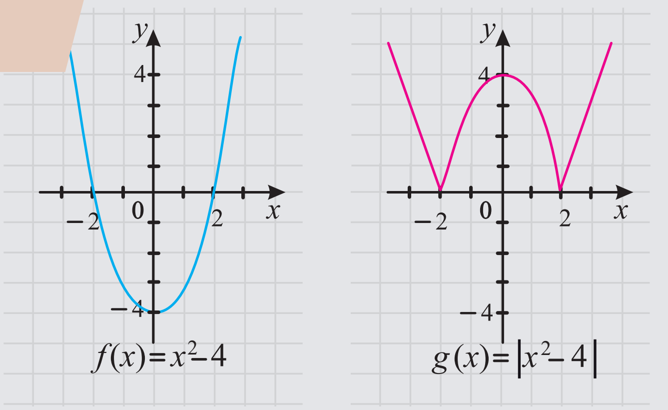
2) taq funkciya grafigi payda bolsın.

7-súwret

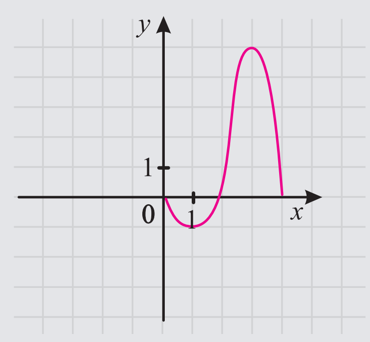


3. 8-súwrette $f(x)=x^2-4$ hám $g(x)=|x^2-4|$ funkciya grafikleri berilgen. $g(x)$ funkciyanıń grafigi $f(x)$ funkciyanıń grafiginen qalay payda etilgenligin túsindirip beriń.

8-súwret



9-súwret

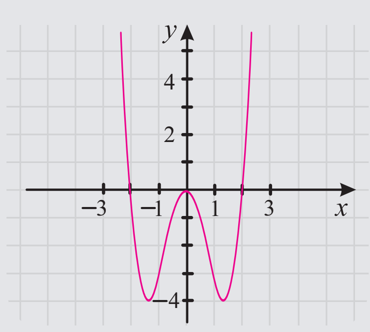


4. 9-súwrette $x \geq 0$ oblast ushın funkciyanıń grafigi berilgen. $x < 0$ oblastta grafikti sonday sızıń:

1) jup funkciya;

2) taq funkciya grafigi payda bolsın.

10-súwret

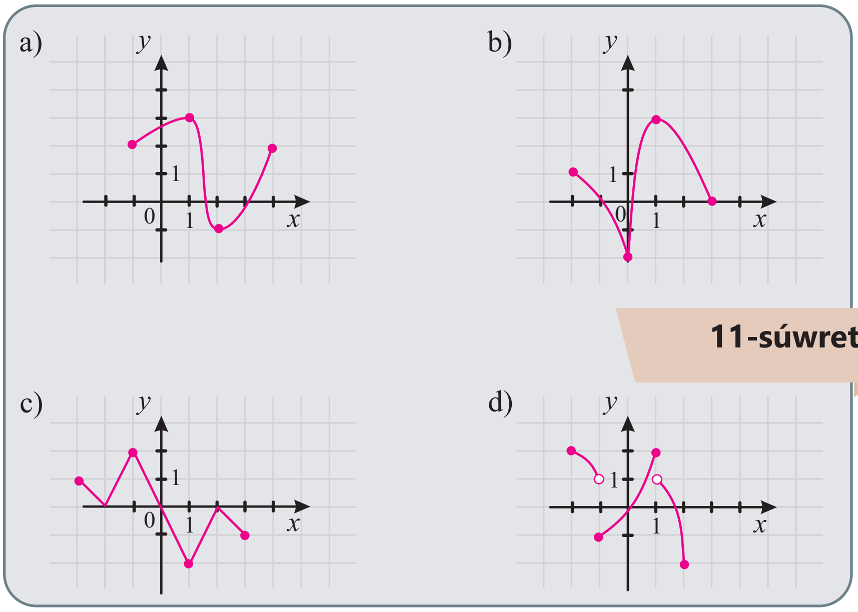


5. $f(x) = x^4 - 4x^2$ funkciyanıń grafigi berilgen (10-*súwret*). Odan paydalanıp, $g(x) = |x^4 - 4x^2|$ funkciyanıń grafigin sızıń.

6. 11-súwrette f funkciyanıń grafigi berilgen. Bul grafikten paydalanıp tómendegilerdi anıqlań:

1) f funkciyanıń anıqlanıw oblastın hám mánisler kópligin.

2) f tiń ósiw hám kemeyiw aralıqların.



11-súwret

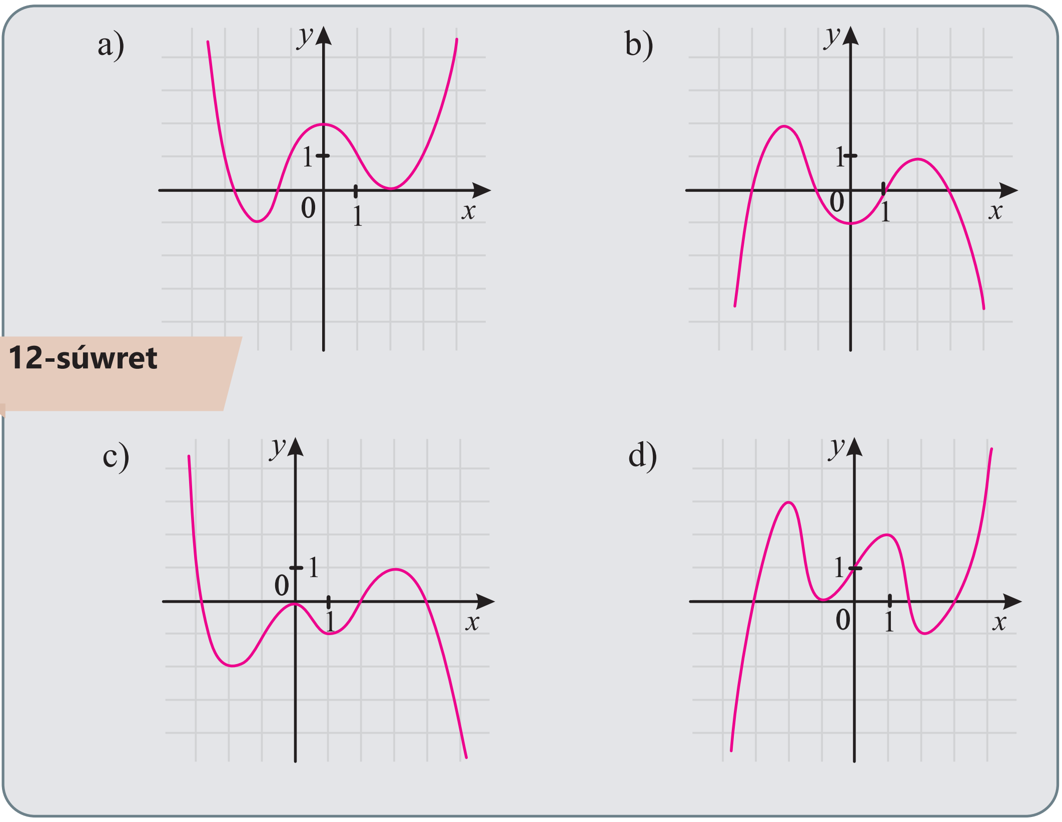
7. Berilgen funkciyalardıń grafigin sızıń, anıqlanıw oblastın hám mánisler kópligin anıqlań, ósiw hám kemeyiw aralıqların shama menen tabıń.

a) $f(x)=x^2-5x$ b) $f(x)=x^3-4x$ c) $f(x)=x^4-16x^2$

8. f funkciyanıń grafigi 12-súwrette berilgen. Bul grafikten paydalanıp tómendegilerdi shama menen anıqlań:

1) funkciyanıń barlıq ekstremum noqatların hám ekstremumların;

2) funkciyanıń ósiw hám kemeyiw aralıqların.



12-súwret

9. Tómendegi maǵlıwmatlar tiykarında funkciya grafiginiń eskizin sızıń.

a) $(-\infty;3]$ kemeyedi, $[3;+\infty)$ ósedi;

b) $(-\infty;0]\cup[1;+\infty]$ kemeyedi, $[0;1]$ ózgermeydi;

c) $(-\infty;-6]$ kemeyedi, $[-6;0]$ ósedi hám $[0;+\infty)$ ózgermeydi;

d) $[-5;10]$ ósedi, $[10;+\infty)$ ózgermeydi hám $x=-5$ te eń kishi mánisti qabıl etedi.

FUNKCIYA GRAFIGI ÚSTINDE ÁPIWAYÍ ALMASTÍRÍWLAR

Funkciya grafigin jıljıtıw

Berilgen $f(x)$ funkciyanıń grafigin Oxy tegisliginde jıljıtıw múmkin. Funkciya grafiginiń tómende keltiriletuǵın jıljıtıwların kórip ótemiz.

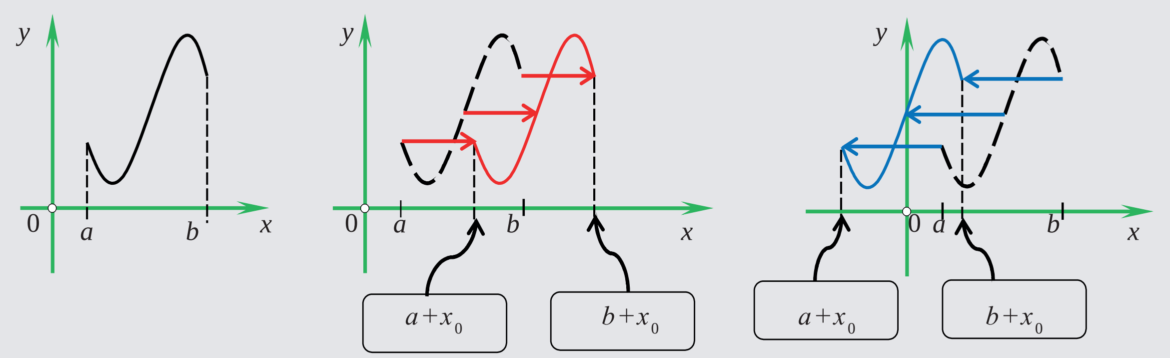
1) Funkciya grafigin Ox kósheri boyınsha jıljıtıw.
2) Funkciya grafigin Oy kósheri boyınsha jıljıtıw.
3) Funkciya grafigin qanday da bir vektor baǵıtında jıljıtıw.

1. Funkciya grafigin Ox kósheri boyınsha x_0 birlikke jıljıtıw (1-*súwret*).

a) eger $x_0>0$ bolsa, grafik Ox kósheri baǵıtında x_0 birlik jıljıydı;

b) eger $x_0<0$ bolsa, grafik Ox kósheri baǵıtına qarsı $|x_0|$ birlik jıljıydı.

1-súwret $y = f(x)$ **funkciya grafigin** Ox **kósheri boyınsha jıljıtıw.**



a) berilgen $y = f(x)$ funkciya grafigi.

b) $x_0>0$ bolǵanda $y = f(x-x_0)$ funkciya grafigi; $y = f(x)$ funkciya grafigi ońǵa x_0 birlik jıljıǵan.

c) $x_0<0$ bolǵanda $y = f(x-x_0)$ funkciya grafigi; $y = f(x)$ funkciya grafigi shepke $|x_0|$ birlik jıljıǵan.

1-mısal. $f(x) = x^2$ funkciya grafiginen paydalanıp tómendegi funkciyalar grafigin sızıń.

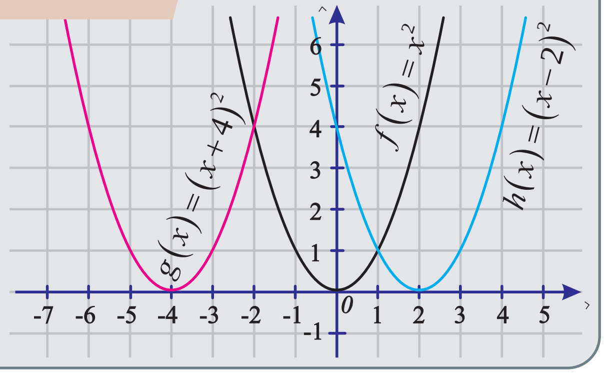
a) $g(x)=(x+4)^2$ b) $h(x)=(x-2)^2$

Sheshiliwi. 2-súwrette kórsetilgenindey,

a) g funkciyanıń grafigin sızıw ushın, f funkciya grafigin shepke 4 birlikke jıljıtamız.

b) h funkciyanıń grafigin sızıw ushın, f funkciya grafigin ońǵa 2 birlikke jıljıtamız.

2-súwret



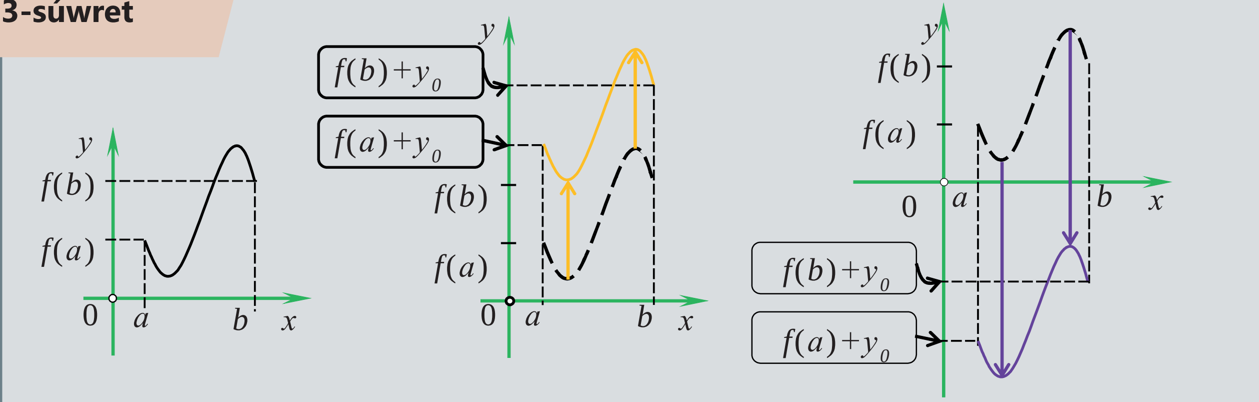
2. Funkciya grafigin Oy kósheri boyınsha y_0 birlikke jıljıtıw (3-*súwret*).

a) eger $y_0>0$ bolsa, grafik Oy kósheri baǵıtında y_0 birlik jıljıydı;

b) eger $y_0<0$ bolsa, grafik Oy kósheri baǵıtına qarsı $|y_0|$ birlik jıljıydı (3-*súwret*).

3-súwret

$y = f(x)$ funkciya grafigin Oy kósheri boyınsha jıljıtıw.



a) Berilgen $y = f(x)$ funkciya grafigi.

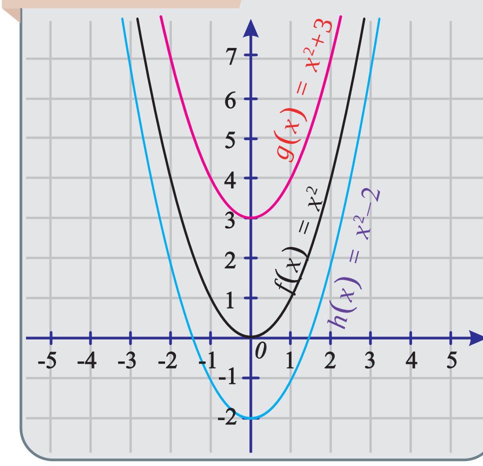
b) $y_0>0$ bolǵanda $y = f(x)+y_0$ funkciya grafigi. $y = f(x)$ funkciya grafigi joqarıǵa y_0 birlik jıljıǵan.

c) $y_0<0$ bolǵanda $y = f(x)+y_0$ funkciya grafigi. $y = f(x)$ funkciya grafigi tómenge $|y_0|$ birlik jıljıǵan.

2-mısal. $f(x) = x^2$ funkciyadan paydalanıp tómendegi funkciyalardıń grafigin sızıń.

a) $g(x)=x^2+3$ b) $h(x)=x^2-2$

4-súwret



Sheshiliwi.

a) Tómendegige itibar beriń:

$$g(x)=x^2+3=f(x)+3$$

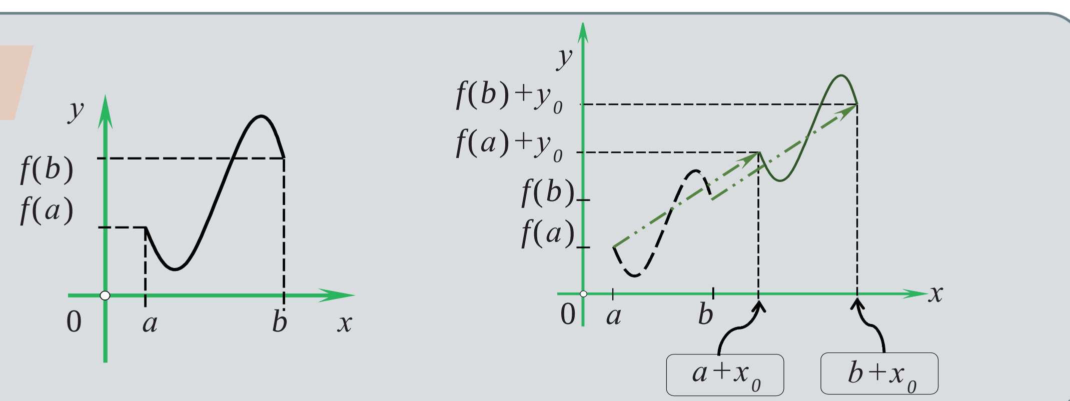
Demek, 4-súwrette kórsetilgenindey g funkciya grafigin sızıw ushın, f funkciya grafigin joqarıǵa 3 birlikke jıljıtamız.

b) Tap sonday, h funkciya grafigin sızıw ushın, f funkciya grafigin tómenge 2 birlikke jıljıtamız (túsiremiz).

3. Funkciyanıń grafigin hám Ox, hám Oy kósherleri boyınsha jıljıtıw (5-*súwret*).

$y=f(x-x_0)+y_0$ funkciyanıń grafigin sızıw ushın $y=f(x)$ funkciyanıń grafigin Ox kósheri boyınsha x_0 birlikke, Oy kósheri boyınsha bolsa, y_0 birlikke jıljıtıw jeterli.

5-súwret

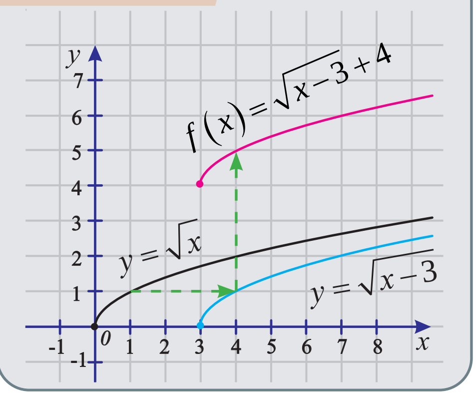


3-mısal. $f(x)=\sqrt{x-3}+4$ funkciya grafigin sızıń.

Sheshiliwi.

Dáslep, $y=\sqrt{x}$ funkciya grafigin sızamız. Payda bolǵan funkciya grafigin 3 birlik ońǵa jıljıtamız hám $y=\sqrt{x-3}$ funkciyanıń grafigin payda etemiz. Soń bul grafikti 4 birlik joqarıǵa jıljıtamız hám $f(x)=\sqrt{x-3}+4$ funkciya grafigin payda etemiz (6-*súwret*).

6-súwret



Funkciyanıń grafiklerin qısıw hám soziw

Berilgen *f*(*x*) funkciyanıń grafigin Oxy tegisliginde deformaciyalaw (qısıw yamasa sozıw) múmkin. Eki kerekli jaǵdaydı kórip ótemiz.

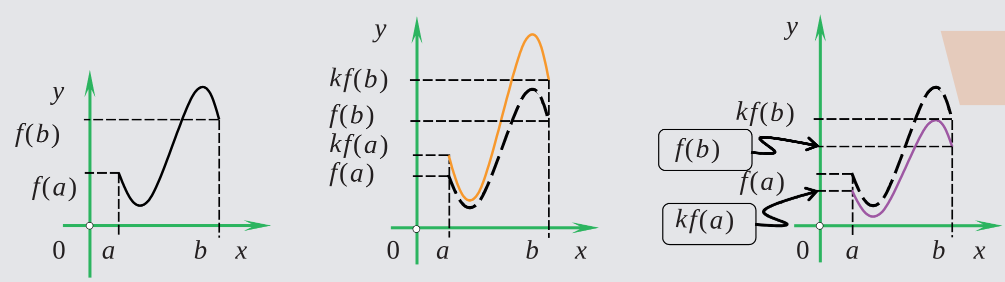
1-jaǵday. Berilgen $y = f(x)$ funkciya grafiginen paydalanıp $y = kf(x)$ funkciya grafigi tómendegishe payda etiledi (7-*súwret*):

a) eger $k>1$ bolsa, grafik Ox kósherinen Oy kósheri boyınsha k márte sozıladı;

b) eger $0<k<1$ bolsa, grafik Ox kósherine Oy kósheri boyınsha $\frac{1}{k}$ márte qısıladı.

c) eger $k<0$ bolsa, ol jaǵdayda $y = kf(x)$ funkciya grafigi $y = |k|f(x)$ funkciya grafiginiń Ox kósherge qarata simmetriyalı sáwlesi boladı.

$y = kf(x)$ funkciya grafigin payda etiw



7-súwret

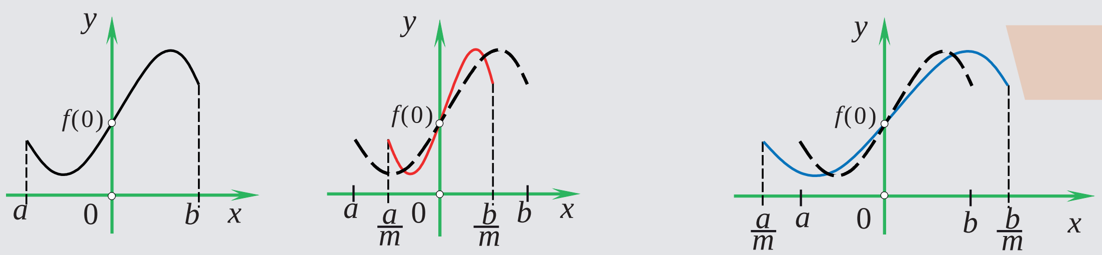
2-jaǵday. Berilgen $y = f(x)$ funkciya grafiginen paydalanıp $y = f(mx)$ funkciya grafigi tómendegishe payda etiledi (8-*súwret*):

a) eger $m>1$ bolsa, grafik Oy kósherine Ox kósheri boylap m márte qısıladı;

b) eger $0<m<1$ bolsa, grafik Oy kósherinen Ox kósheri boylap $\frac{1}{m}$ márte sozıladı.

c) eger $m<0$ bolsa, ol jaǵdayda $y = f(mx)$ funkciyanıń grafigi $y = f(|m|x)$ funkciya grafiginiń Oy kósherge qarata simmetriyalı sáwlesi boladı.

$y = f(mx)$ funkciya grafigin payda etiw



8-súwret

4-mısal. Tómendegi funkciyanıń grafigin sızıń.

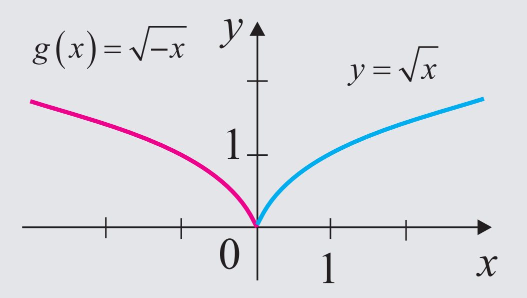
$$g(x)=\sqrt{-x}$$

Sheshiliwi.

9-súwrette $y=\sqrt{x}$ funkciyanıń grafigin sızamız. Bul grafikti y kósherine qarata simmetriyalı sáwlelendiriw arqalı $g(x)=\sqrt{-x}$ funkciyanıń grafigin payda etemiz.

Itibar etiń: $g(x)=\sqrt{-x}$ funkciyanıń anıqlanıw oblastı: $x\leq 0$ den ibarat.

9-súwret



5-mısal. 10-súwrette $f(x)=x^2$ funkciyanıń grafiginen paydalanıp tómendegi funkciyalardıń grafigin sızıń.

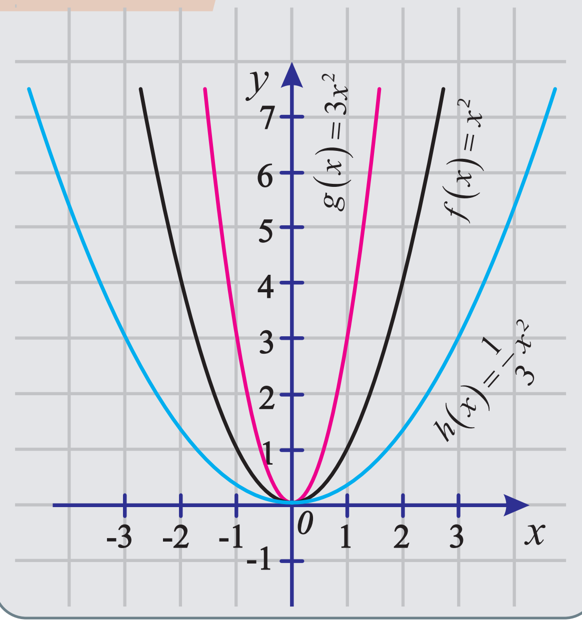
a) $g(x)=3x^2$ b) $h(x)=\frac{1}{3}x^2$

Sheshiliwi.

a) g funkciyanıń grafigi f funkciyanıń hárbir noqatınıń y koordinatasın 3 ke kóbeytiwden payda boladı. Yaǵnıy, g funkciyanıń grafigin payda etiw ushın, f funkciyanıń grafigin vertikal 3 márte soziw kerek.

b) h funkciyanıń grafigi f funkciyanıń hárbir noqatınıń y koordinatasın $\frac{1}{3}$ ge kóbeytiwden payda boladı. Yaǵnıy, h funkciyanıń grafigin payda etiw ushın, f funkciyanıń grafigin vertikal baǵıtta x kósherge 3 márte qısıw kerek.

10-súwret

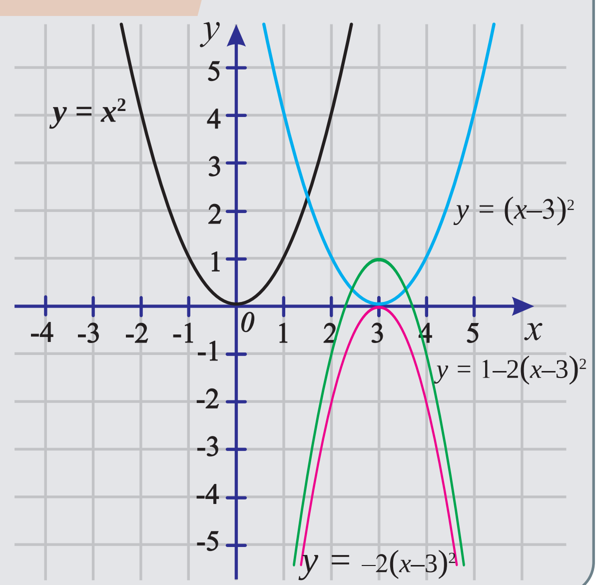


6-mısal. $f(x)=1-2(x-3)^2$ funkciyanıń grafigin sızıń.

Sheshiliwi.

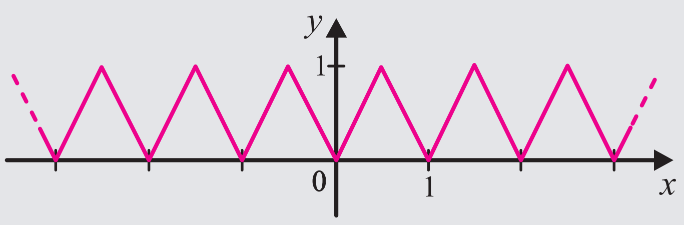
Dáslep, $y=x^2$ funkciyanıń grafigin ońǵa 3 birlikke gorizontal jıljıtamız hám $y=(x-3)^2$ funkciyanıń grafigin payda etemiz. Keyin bul grafikti Ox kósherine qarata simmetriyalı sáwlelendiremiz. Oy kósheri boyınsha 2 márte sozıwdı orınlaymız hám $y=-2(x-3)^2$ funkciyanıń grafigin payda etemiz. Aqırında, bul grafikti joqarıǵa 1 birlikke jıljıtamız hám $f(x)=1-2(x-3)^2$ funkciyanıń grafigin payda etemiz. (11-*súwret*).

11-súwret



7-mısal. 12-súwrette $y=f(x)$ funkciyanıń grafigi berilgen. Bul grafikten paydalanıp, tómendegi funkciyalardıń grafigin sızıń.

a) $y=f(2x)$; b) $y=f\left(\frac{1}{2}x\right)$.

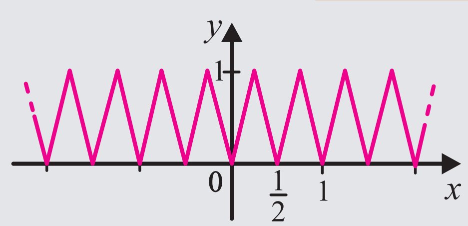


12-súwret

Sheshiliwi.

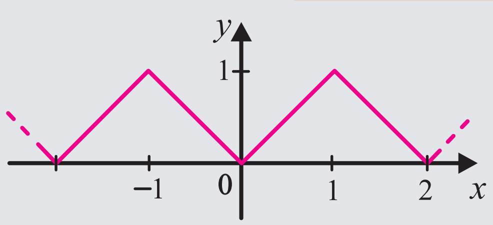
a) $y=f(2x)$ funkciya grafigin sızıw ushın $f(x)$ funkciya grafigin *Oy* kósherine *Ox* kósheri boyınsha 2 márte qısamız (13-*súwret*).

b) $y=f\left(\frac{1}{2}x\right)$ funkciya grafigin sızıw ushın $f(x)$ funkciya grafigin *Oy* kósherinen *Ox* kósheri boyınsha 2 márte sozamız (14-*súwret*).



13-súwret

$y=f(2x)$



14-súwret

$y=f\left(\frac{1}{2}x\right)$

MÍSALLAR

1. $f(x)$ funkciya grafigi berilgen bolsa, tómendegi funkciyalardıń grafigi qalay jasalıwın túsindiriń.

a) $y=f(x)-1$ b) $y=f(x-2)$ c) $y=f\left(\frac{1}{4}x\right)$

d) $y=f(x)+4$ e) $y=f(-x)$ f) $y=3f(x)$

g) $y=-f(x)$ h) $y=\frac{1}{3}f(x)$ i) $y=f(x-5)+2$

j) $y=f(x+1)-1$ k) $y=4f(x+1)+3$ l) $y=f(4x)$

m) $y=-f(x)+5$ n) $y=3f(x)-5$ o) $y=1-f(-x)$

2. g funkciyanıń grafigi f funkciyanıń grafiginen qanday almastırıwlar járdeminde payda etilgenligin túsindiriń.

a) $f(x)=x^2,\ g(x)=(x+2)^2$
b) $f(x)=x^2,\ g(x)=x^2+2$
c) $f(x)=x^3,\ g(x)=(x-4)^3$
d) $f(x)=x^3,\ g(x)=x^3-4$
e) $f(x)=|x|,\ g(x)=|x+2|-2$
f) $f(x)=|x|,\ g(x)=|x-2|+2$
g) $f(x)=\sqrt{x},\ g(x)=-\sqrt{x}+1$
h) $f(x)=\sqrt{x},\ g(x)=\sqrt{-x}+1$

3. $y=x^2$ funkciyanıń grafiginen paydalanıp, tómendegi funkciyalardıń grafigin sızıń.

a) $g(x)=x^2+1$
b) $g(x)=(x-1)^2$
c) $g(x)=-x^2$
d) $g(x)=(x-1)^2+3$

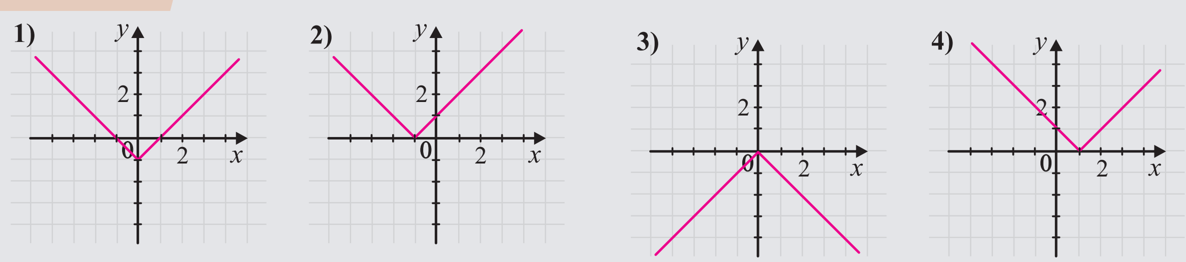
4. $y=\sqrt{x}$ funkciyanıń grafiginen paydalanıp, tómendegi funkciyalardıń grafigin sızıń.

a) $g(x)=\sqrt{x-2}$
b) $g(x)=\sqrt{x}+1$
c) $g(x)=\sqrt{x+2}+2$
d) $g(x)=-\sqrt{x}+1$

5. Berilgen funkciyalarǵa 15-súwrette berilgen grafiklerden sáykesin tabıń.

a) $y=|x+1|$
b) $y=|x|-1$
c) $y=|x-1|$
d) $y=-|x|$

15-súwret



6. Tómendegi funkciyalardıń grafiklerin standart funkciyanıń grafigi ústinde sáykes almastırıwlardı orınlap sızıń.

a) $f(x)=x^2+3$
b) $f(x)=\sqrt{x}+1$
c) $f(x)=|x|-1$
d) $f(x)=\sqrt{x}+1$
e) $f(x)=(x-5)^2$
f) $f(x)=(x+1)^2$
g) $f(x)=|x+2|$
h) $f(x)=\sqrt{x-4}$
i) $f(x)=-x^3$
j) $f(x)=-|x|$
k) $y=\sqrt[4]{-x}$
l) $y=\sqrt[3]{-x}$
m) $y=\dfrac{1}{4}x^2$
n) $y=-5\sqrt{x}$
o) $y=3|x|$
p) $y=\dfrac{1}{2}|x|$
q) $y=(x-3)^2+5$
r) $y=\sqrt{x+4}-3$
s) $y=3-\dfrac{1}{2}(x-1)^2$
t) $y=2-\sqrt{x+1}$
u) $y=|x+2|+2$
v) $y=2-|x|$
w) $y=\dfrac{1}{2}\sqrt{x+4}-3$
x) $y=3-2(x-1)^2$.

7. Berilgen f funkciyanıń grafigine kórsetilgen almastırıwlar qollanılǵan. Juwmaqlawshı funkciyanıń formulasın jazıń.

a) $f(x)=x^2$, 3 birlik tómenge jıljıtıń.

b) $f(x)=x^3$, 5 birlik joqarıǵa jıljıtıń.

c) $f(x)=\sqrt{x}$, 2 birlik shepke jıljıtıń.

d) $f(x)=\sqrt[3]{x}$, 1 birlik ońǵa jıljıtıń.

e) $f(x)=|x|$, 2 birlik shepke hám 5 birlik tómenge jıljıtıń.

f) $f(x)=|x|$, x kósheri boyınsha sáwlelendirip, 4 birlik ońǵa hám 3 birlik joqarıǵa jıljıtıń.

g) $f(x)=\sqrt[4]{x}$, y kósherine qarata simmetriyalı sáwlelendiriń hám 1 birlik joqarıǵa jıljıtıń.

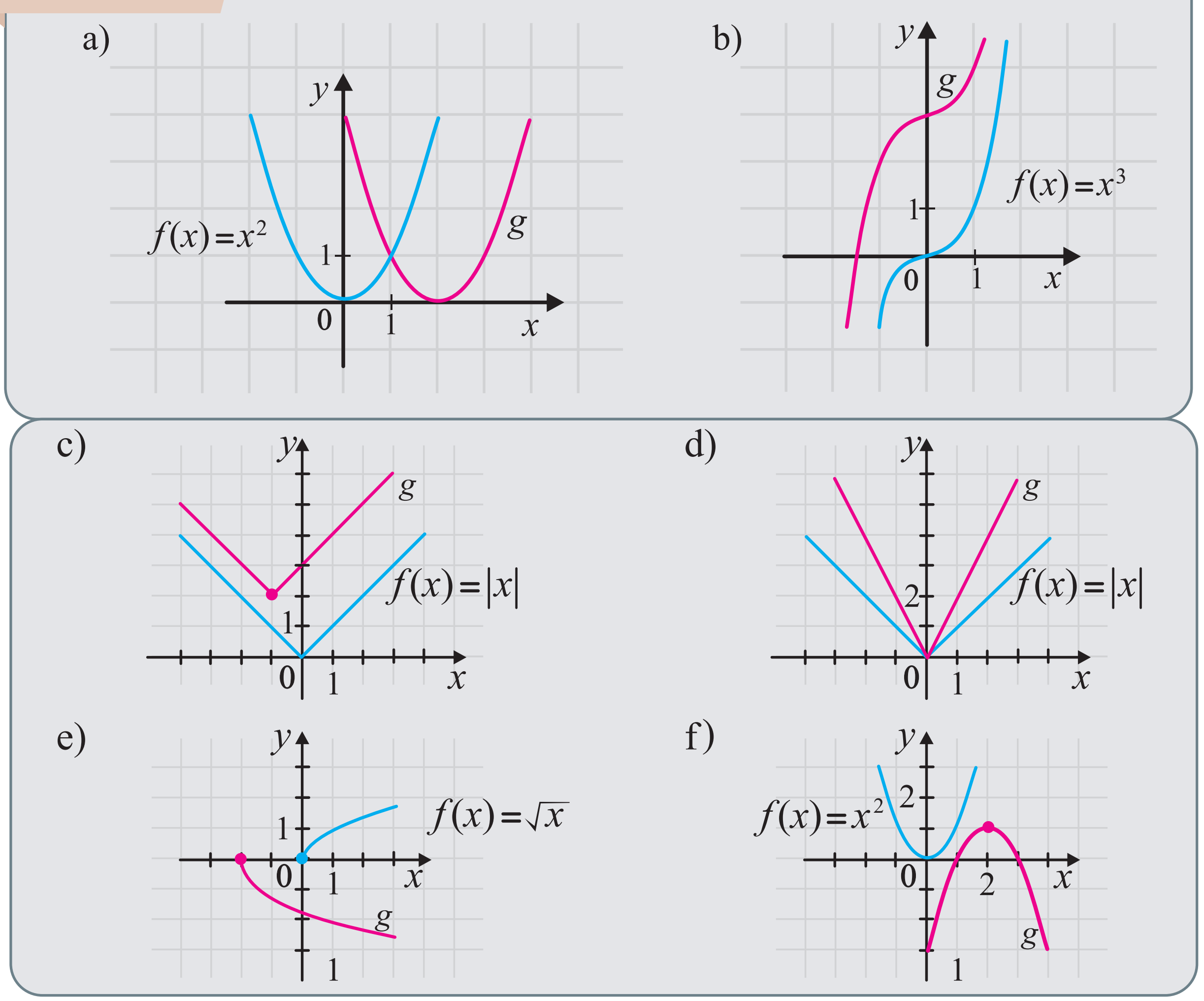
h) $f(x)=x^2$, 2 birlik shepke jıljıtıń hám x kósheri boyınsha simmetriyalı sáwlelendiriń.

i) $f(x)=x^2$, 2 márte vertikal sozıp, 2 birlik tómenge hám 3 birlik ońǵa jıljıtıń.

j) $f(x)=|x|$, $\frac{1}{2}$ márte vertikal baǵıtta qısıwdı orınlap, 1 birlik shepke hám 3 birlik joqarıǵa jıljıtıń.

8. f hám g funkciyalardıń grafigi berilgen (16-*súwret*). f funkciyadan paydalanıp g funkciyanıń formulasın tabıń.

16-súwret



9. $y=f(x)$ funkciya berilgen, 17-súwrette tómendegilerge sáykes grafikti tabıń.

a) $y=f(x-4)$

b) $y=f(x)+3$

c) $y=2f(x+6)$

d) $y=-f(2x)$

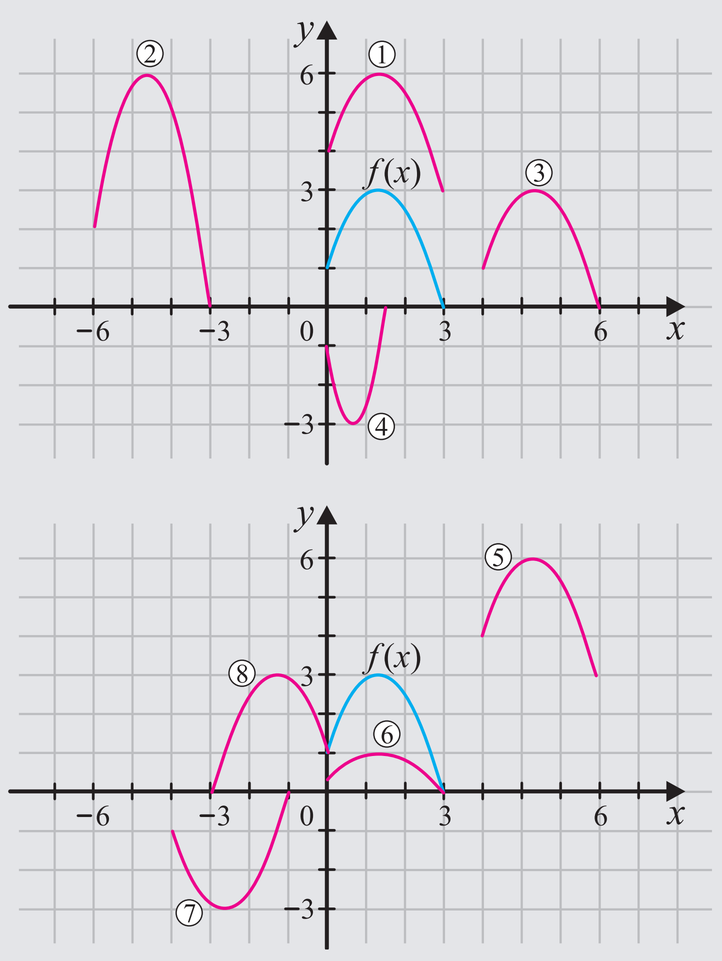
e) $y=\frac{1}{3}f(x)$

f) $y=-f(x+4)$

g) $y=f(x-4)+3$

h) $y=f(-x)$

17-súwret



SÍZÍQLÍ HÁM KVADRATLÍ MODELLESTIRIWLER

Matematikalıq modellestiriw kúndelikli turmısımızdağı túrli proceslerdi úyreniwdiń tiykarğı analitikalıq quralı esaplanadı.

Tómendegi máselelerdi qarayıq.

1-másele. Porshenli nasos eń kóbi menen qanday tereńlikten suw shığara alıwın tabıń (1-*súwret*).

Sheshiliwi.

Porshenli nasos trubasındağı suw bağanasınıń basımı

$$p = \rho g h$$

formula menen esaplanıwı belgili.

Bul jerde $\rho = 1000\ \text{kg/m}^3$ – suw tığızlığı, $g = 10\ \text{m/s}^2$ – erkin túsiw tezleniwi, h – suw bağanasınıń biyikligi.

Nasos jer betinde jaylasqanlığı ushın suw bağanası biyikligi *suw tereńligi* dep júritiledi.

Demek, suw tereńligin

$$h = \frac{p}{\rho g}$$

teńlikten tabıw múmkin.

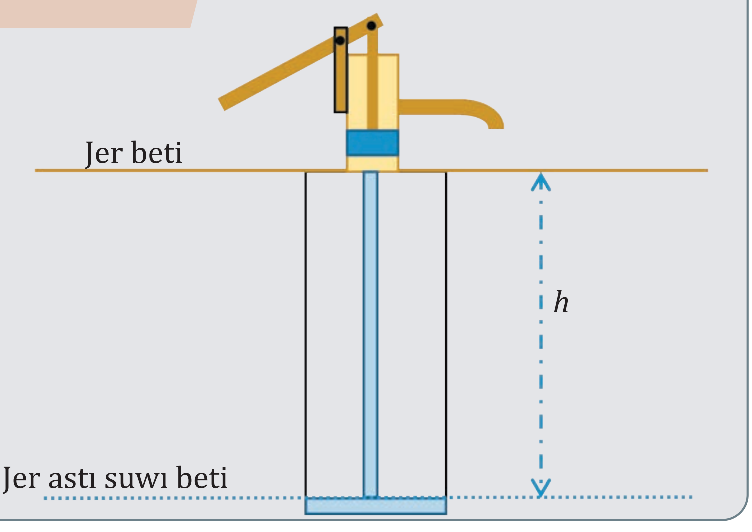
1643-jılda italiyalı fizik Evangelista Torrichelli tájiriybelerinde suw bağanası basımı atmosfera basımı p_0 = 100 000 Pa dan asıp ketpewi dálillengen, yağnıy $p \leq p_0$. Sonıń ushın porshenli nasosta suw tereńligi

$$h = \frac{p}{\rho g} \leq \frac{p_0}{\rho g} = \frac{100000}{1000 \cdot 10} = 10\ \text{m}$$

den asıp kete almaydı eken.

Juwabı: Porshenli nasos eń kóbi menen 10 m tereńlikten suw shığara aladı.

1-súwret



Bul modeldegi ózgeriwshiler birinshi dárejeli bolıp, óz ara sızıqlı ámeller (qosıw hám sanğa kóbeytiw) arqalı baylanısqan. Sonıń ushın bul túrdegi matematikalıq modeller ***sızıqlı modeller*** dep ataladı. Qoyılğan máseleni sızıqlı model kórinisine alıp keliw procesi ***sızıqlı modellestiriw*** dep ataladı.

2-másele. Oqıwshı *Oxy* koordinatalar tegisligin sonday etip tańlaǵan, bul jerde óz úyin koordinata bası *O*(0; 0) dep aldı. Keyin ózi oqıytuǵın mektep *C*(4; 3) noqatta jaylasqanlıǵın anıqladı. Joldıń úyi hám mektep arasınan ótetuǵın tuwrı sızıqlı bólegi *Ox* kósherin (6; 0) noqatta, *Oy* kósherin (0; 4) noqatta kesip ótiwin esaplap shıqtı.

Mektepke mobil baylanıs kompaniyasınıń antennası ornatılǵanlıǵı belgili. Oqıwshı jolda háreketlenip atırǵan avtomobildegi jolawshınıń mobil baylanıs qurılması antennadan tarqalıp atırǵan tolqındı eń jaqsı tutatuǵın noqattı tabıwǵa qızıǵıp qaldı.

Tapsırma. Siz bul máseleni qalay sheshken bolar edińiz?

Sheshiliwi. Belgili bolǵanınday, joldıń mektepke eń jaqın noqatında mobil baylanıs qurılması tolqındı eń jaqsı tutadı. Bul máseleni sheshiwde joldı bildiriwshi (*AB*) tuwrı sızıq teńlemesin dúziw hám onıń mektepke eń jaqın noqatınıń koordinataların tabıw kerek. Bunıń ushın dáslep aytılǵan belgiler tiykarında jaǵdaydıń sızılması sızıladı (2-*súwretke qarań*).

Keyin *A*(6; 0) hám *B*(0; 4) noqatlardan ótiwshi tuwrı sızıq teńlemesi dúziledi. Bunıń ushın tuwrı sızıqtıń

$$y = kx+b$$

teńlemesine *A*(6; 0) hám *B*(0; 4) noqatlardıń koordinataların qoyıp, usı

$$0 = k\cdot 6+b$$
$$4 = k\cdot 0+b$$

teńlikler payda etiledi. Olardan:

$$b = 4,\ k = -\frac{2}{3}$$

koefficientler tabıladı. Demek, (*AB*) tuwrı sızıq teńlemesi

$$y = -\frac{2}{3}x + 4$$

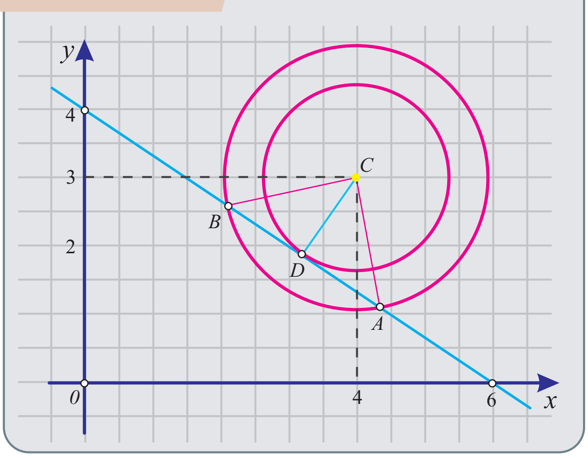
boladı.

Máseleniń sheshimi (*AB*) tuwrı sızıqtıń *C*(4; 3) noqatqa eń jaqın *D*(*x*; *y*) noqatın tabıwdan ibarat. Bul jaǵdaydıń matematikalıq modeli tómendegishe jazıladı:

$$F = \sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2} \to min,$$

$$y = -\frac{2}{3}x + 4$$

2-súwret



Bul modeldegi ózgeriwshiler birinshi hám ekinshi dárejeli bolǵanlıǵı ushın bul túrdegi matematikalıq modeller ***kvadratlı modeller*** dep ataladı. Qoyılǵan máseleni kvadratlı model kórinisine alıp keliw procesi ***kvadratlı modellestiriw*** dep ataladı.

MÍSALLAR

1. Hárbir berilgen tapsırmanıń sızıqlı modelin jazıń:

a) Siz velosipedti 10 000 sum dáslepki tólem hám saatına 5000 sum tarif boyınsha ijaraǵa aldıńız.

b) Avtomobillerdi ońlaw ustaxanası 50 000 sum bazalıq tólem hám saatına 15 000 sumnan tólem belgiledi.

c) Shamnıń uzınlıǵı 30 cm hám ol saatına 1,4 cm tezlikte janadı.

d) Baǵdarlaw boyınsha qánige másláhát ushın ayrıqsha $75 hám onnan soń saatına $35 aladı.

e) Házirgi temperatura 25 °C hám ol keshte hár saatta 2 °C qa túsiwi kútilmekte.

f) Awıl turǵınları 6791 adamdı quraydı hám jılına 7 ewge kemeyip barmaqta.

2. Berilgen kestedegi funkciya sızıqlı yamasa kvadratlı ekenligin anıqlań.

x	0	1	3	4	6
y	5	10	20	25	35

3. Top joqarıǵa hám tómenge sekirgende, onıń erisetuǵın biyikligi turaqlı túrde kemeyedi. Tómendegi kestede waqıt boyınsha sekiriw biyikligi kórsetilgen.

a) Eń sáykes keletuǵın kvadrat funkciyanı tabıń.

b) Toptıń sekirgendegi maksimal biyikligin tabıń.

c) 2,5 sekundta toptıń qansha biyiklikke sekirgenligin shamalań.

t (s)	2	2,2	2,4	2,6	3
h (dyuym)	2	16	26	33	42

4. Eger tas 70 metrli imarattıń joqarısınan atılǵan bolsa, tastıń waqıtqa baylanıslı biyikligi $h(t) = -5t^2 - 20t + 70$ kvadrat funkciya menen berilgen, bul jerde t sekundta, biyikligi bolsa metrde. Neshe sekundtan keyin tas jerge tiyedi?

5. Malika bólmesin tazalawǵa Umidadan eki márte kóp waqıt sarplaydı. Áziza bólmesin tazalawı ushın Umidadan 10 minut kóbirek waqıt sarplaydı. Olar bólmelerin tazalaw ushın jámi 90 minut sarplaydı. Malika bólmesin tazalawı ushın qansha waqıt sarplaydı?

6. Axmet teńizge dúrdi alıw ushın súńgidi. Onıń t sekundtan keyingi súńgiw tereńligi $h(t) = -4t^2 + 4t + 3$ metr boldı, $t \geq 0$.

a) Dúrler qanday tereńlikte jaylasqan?

b) Axmet dúrdi alıw ushın qansha waqıt sarplaydı?

c) Axmet qanday biyiklikten suwǵa súńgidi?

7. Jasmina kóylek tigiw ushın buyırtpa aldı. Ol bir kúnde x dana kóylek tigip tayarlasa, $P(x) = -x^2 + 20x$ mıń sum muǵdarında dáramat aladı.

a) Eń úlken dáramat alıw ushın ol qansha kóylek tigiw kerek?

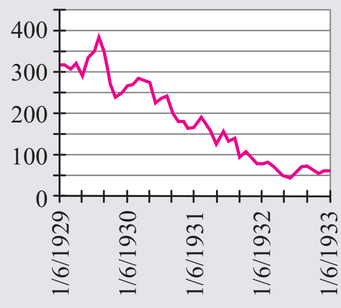
b) Eń úlken dáramat neshe sumǵa teń?

8. 2005-jılda Zarafshan qalası turǵınları 55 000 ǵa jaqın edi. Sol waqıttaǵı turǵınlar sanı jılına 2000 ǵa jaqın artıp baratuǵın edi. Hárqanday jıl ushın Zarafshan turǵınları sanın tabıw kerek. Bunıń ushın onıń sızıqlı modelin dúziń. 2010-jılda Zarafshan turǵınları qansha bolǵan? 2025-jıl ushın Zarafshan turǵınlarınıń sanı qansha bolıwın esaplań.

JOYBARLAW JUMÍSÍ

Hárbir grafik sóyleydi

1-súwret



Eger súwret mıń sózge arzıytuǵın bolsa, onda grafik hesh bolmaǵanda birneshe qatar aytımlarǵa arzıydı. Haqıyqatında da, grafik geyde waqıyanı kóp sózlerge qaraǵanda tezirek hám nátiyjeli aytıp beriwi múmkin. 1929-jıldaǵı fond bazarı qulawınıń aqıbeti tásiri Dow Jones indeksiniń (DJIA) grafiginen (1-*súwret*) dárhal kórinedi. Sol waqıttaǵı gazetalarda bunday grafikler aqıbettiń júdá úlkenligin jetkeriwdiń nátiyjeli usılı sıpatında basıp shıǵarılǵan.

2-súwret

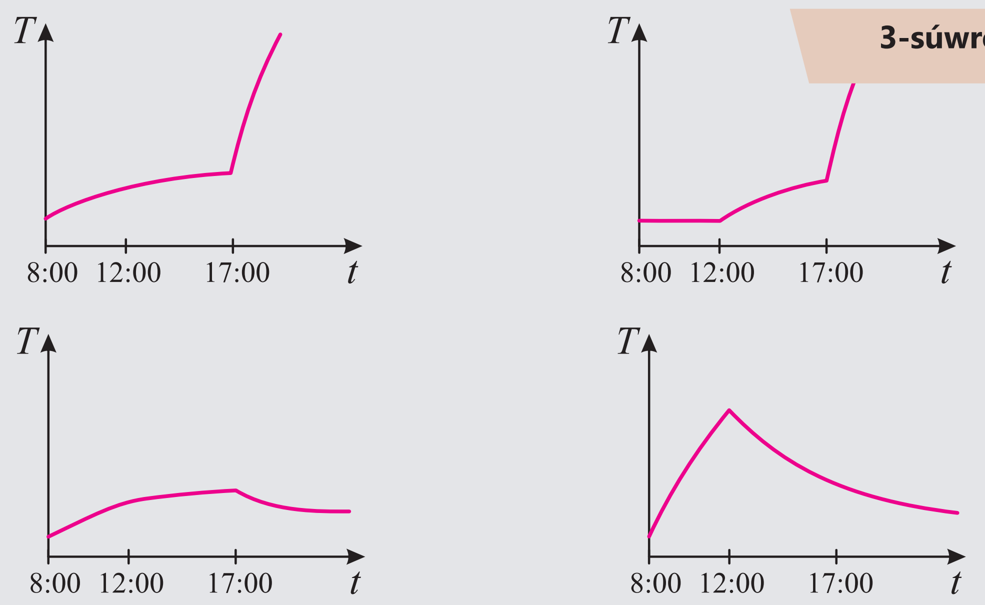
2-súwrettegi xabardı jetkeriw ushın heshqanday sóz kerek emes. Grafik ápiwayı bir waqıyanı aytıp beredi: qanday da bir zat tómenge tústi – bálkim, sawda, payda yamasa ónimdarlıq hám juwapker shaxs júdá qáweterde.

Usı joybar izertleniwinde biz grafikler aytıp beretuǵın waqıyalardı oqıymız hám waqıya aytıwshı grafiklerdi jaratamız.

Waqıyanı grafikten oqıw.

1. Tómende temperaturanıń waqıt boyınsha tórt grafigi (saat 8:00 den baslap) kórsetilgen bolıp, olardan keyin úsh waqıya berilgen. (3-súwret).

3-súwret



a) waqıyalardıń hárbirin grafiklerdiń biri menen sáykesleń.

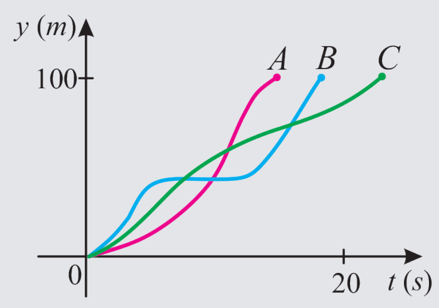
b) heshqanday waqıyaǵa sáykes kelmeytuǵın grafik ushın tap sonday waqıya jazıń.

1-waqıya	Túste muzlatqıshtan góshti alıp, eritiw ushın taxtayǵa qoydım hám jumısqa kettim. Jumıstan úyge kelgenimnen keyin góshti pechkada pisirdim.
2-waqıya	Azanda muzlatqıshtan góshti alıp, eritiw ushın taxtayǵa qoydım hám jumısqa kettim. Jumıstan úyge kelgenimnen keyin pechkada pisirdim.
3-waqıya	Azanda muzlatqıshtan góshti alıp, eritiw ushın taxtayǵa qoydım hám jumısqa kettim. Men bunı umıtıp, jumıstan úyge qaytıp kiyatırǵanımda kafede awqatlandım. Úyge kelgenimnen soń góshti muzlatqıshqa qoydım.

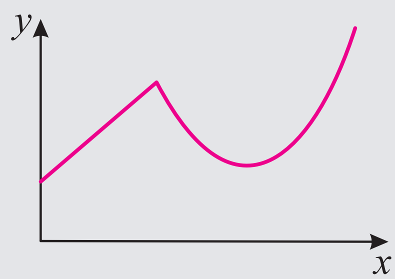
2. 100 metrge tosıqlar asa júgiriwde úsh júgiriwshi qatnastı. Grafikte júgiriw aralıǵı hárbir júgiriwshi ushın waqıt funkciyası sıpatında kórsetilgen (4-súwret). Grafik sizge usı jarıs haqqında ne aytıwın súwretlep beriń. Jarısta kim jeńip shıqtı? Hárbir júgiriwshi jarıstı tamamladı ma? B sportshı menen qanday waqıya júz bergen?

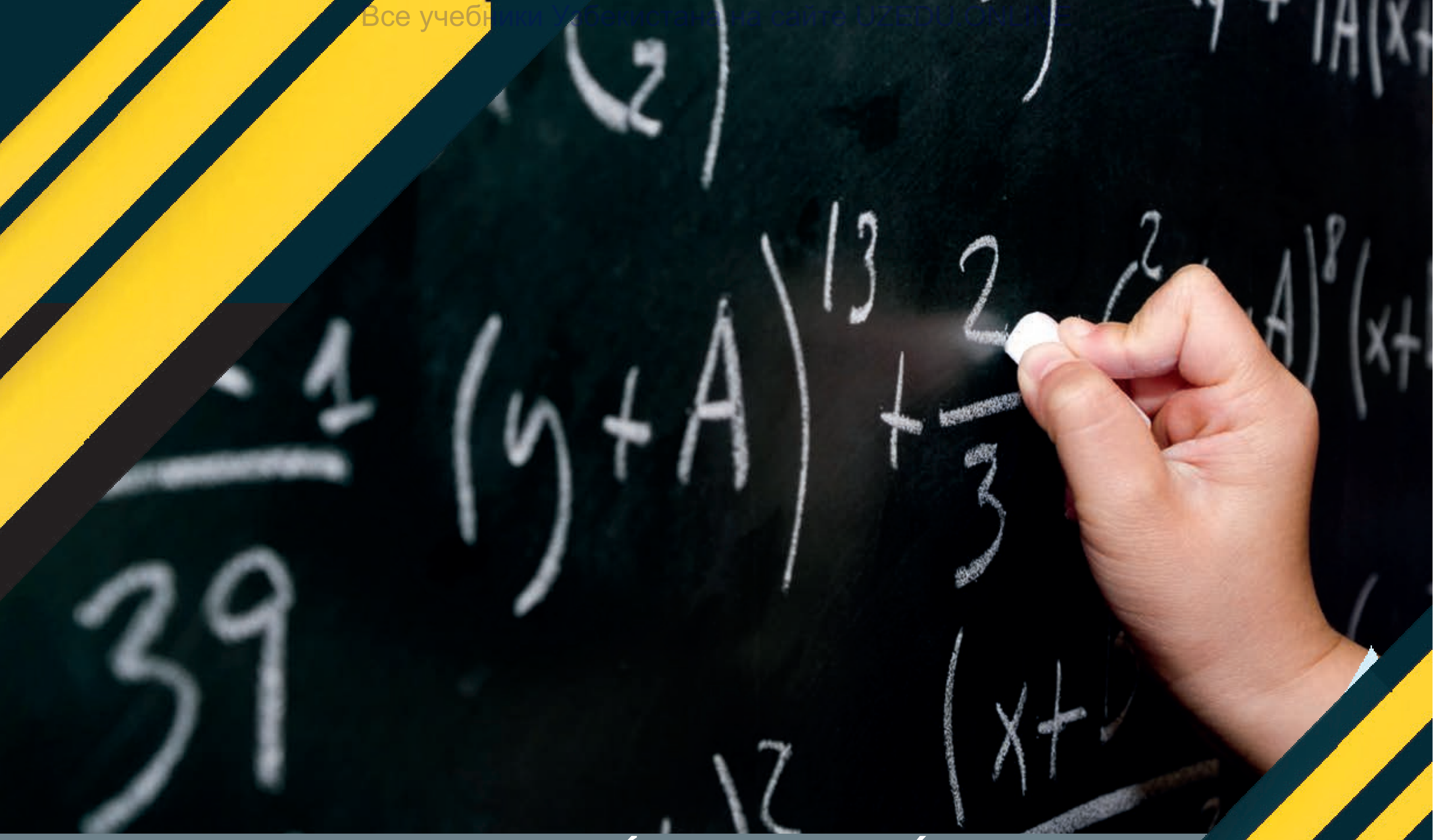
3. Tómendegi sızılmaǵa sáykes keletuǵın (hárqanday jaǵdaydı óz ishine alǵan) waqıya dúziń. (5-*súwret*).

4-súwret



5-súwret





2-BAP. RACIONAL TEŃLEMELER HÁM TEŃSIZLIKLER. IRRACIONAL TEŃLEMELER

- RACIONAL TEŃLEMELER
- RACIONAL TEŃLEMELER SISTEMASÍ
- RACIONAL TEŃSIZLIKLER
- RACIONAL TEŃSIZLIKLER SISTEMASÍ
- IRRACIONAL TEŃLEMELER
- IRRACIONAL TEŃLEMELER SISTEMASÍ

RACIONAL TEŃLEMELER

Tiykarǵı anıqlama hám túsinikler

Anıqlama.

$f(x)=g(x)$ kórinisindegi teńlik ***bir belgisizli teńleme*** dep ataladı (bul jerde $f(x)$ hám $g(x)$ lar x belgisiz ańlatpalar).

Teńlemeniń koreni dep, belgisizdiń berilgen teńlemeni durıs sanlı teńlikke aylandıratuǵın mánisine aytıladı.

Teńlemeni sheshiw degende onıń barlıq korenlerin tabıw yamasa onıń koreni joq ekenligin kórsetiw túsiniledi.

Teńlemeniń barlıq korenleri kópligi ***teńlemeniń sheshimi*** dep ataladı.

Eger x belgisizdiń heshbir mánisi teńlemeni durıs sanlı teńlikke aylandırmasa, ol jaǵdayda "***teńlemeniń koreni joq***" yamasa "***teńlemeniń sheshimi – bos kóplik***" túsinikleri isletiledi, bul jaǵdaydı $x \in \varnothing$ kórinisinde de jazıw múmkin.

1-mısal. $(x+3)(2x-1)(x-2)=0$ teńlemeni sheshiń.

Sheshiliwi. Bul teńlemeniń ońtárepi nólge teń, shep tárepi bolsa 3 ańlatpanıń kóbeymesinen ibarat. Kóbeytiwshilerden hesh bolmaǵanda birewi nólge teń bolǵanda ǵana kóbeyme nólge teń bolǵanı ushın, hárbir kóbeytiwshi nólge teń bolatuǵın jaǵdaydı kórip shıǵamız: $x+3=0$, $2x-1=0$, $x-2=0$. Payda bolǵan usı teńlemelerden teńlemeniń korenleri

$$x_1=-3,\quad x_2=\frac{1}{2},\quad x_3=2$$ ekenligin anıqlap alamız.

2-mısal. Korenleri 0, –1 hám $\sqrt{2}$ ge teń bolǵan teńleme dúziń.

Sheshiliwi. Túrli kóristegi teńlemeler juwap kórinisinde beriliwi múmkin. Eń ápiwayı teńleme $x(x+1)(x-\sqrt{2})=0$ kórinisinde bolıwın esletip ótemiz.

Bul sanlar jáne tómendegi teńlemeniń de koreni bola aladı:

$$(x^2+x^3)(x-\sqrt{2})(x^2+3)=0$$

Anıqlama.

Eger $f(x)=g(x)$ teńlemeniń barlıq korenleri $f_1(x)=g_1(x)$ teńlemeniń korenleri bolsa, hám kerisinshe, $f_1(x)=g_1(x)$ teńlemeniń barlıq korenleri $f(x)=g(x)$ teńlemeniń korenleri bolsa, yaǵnıy, olardıń sheshimleri ústpe-úst tússe, bunday teńlemeler ***teń kúshli teńlemeler*** dep ataladı.

3-mısal. $3x-6=0$ hám $2x-1=3$ teńlemelerdiń teń kúshliligin tekseriń.

Sheshiliwi. $3x-6=0$ hám $2x-1=3$ teńlemeler teń kúshli, sebebi hárbiriniń koreni $x=2$ den ibarat.

Sheshimi bos kóplik bolǵan hárqanday eki teńleme de teń kúshli boladı.

Teń kúshli teńlemeler tómendegishe belgilenedi: $3x-6=0 \Leftrightarrow 2x-1=3$.

Teńleme tómendegi jaǵdaylarda ózine teń kúshli bolǵan teńlemege ótedi:

a) Teńlemeniń bazıbir aǵzası teńliktiń bir tárepinen ekinshi tárepine qarama-qarsı belgi menen ótkerilgende. Máselen: $f(x)=g(x)+t(x) \Leftrightarrow f(x)-g(x)=t(x)$.

b) Teńlemeniń eki tárepi nólden parıqlı sanǵa kóbeytirilgende yamasa bólingende.

Pútin racional teńlemeler

Eger $f(x)$ hám $g(x)$ funkciyalar pútin racional ańlatpalar menen berilgen bolsa,

$$f(x)=g(x)$$

teńleme, ***pútin racional teńleme*** dep ataladı.

Bunday teńlemeniń anıqlanıw oblastı barlıq haqıyqıy sanlar kópligi boladı.

Anıqlama.

$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0,\ a_0\neq 0,$ kórinisindegi teńleme **standart kórinistegi *n*-dárejeli pútin racional teńleme** dep ataladı. Bul jerde a_0, a_1, ..., a_{n-1} koefficientler, a_n saltań aǵza, $n \in N$.

Eger $a_0=1$ bolsa, $x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0$ teńleme **keltirilgen *n*-dárejeli pútin racional teńleme** dep ataladı.

Belgili bolǵanınday, n-dárejeli kópaǵzalı n nen kóp bolmaǵan korenlerge iye bolıwı múmkin, demek, hárbir standart kórinistegi n-dárejeli pútin racional teńleme de n nen kóp bolmaǵan korenlerge iye boladı.

Teorema. Pútin koefficientli keltirilgen pútin racional teńlemeniń korenleri pútin san bolsa, olar saltań aǵzasınıń bóliwshileri boladı.

4-mısal. $x^4+2x^3=11x^2-4x-4$ teńlemeni sheshiń.

Sheshiliwi. Dáslep onı standart kóriniske keltiremiz: $x^4+2x^3-11x^2+4x+4=0$.

Bul teńlemeniń pútin korenleri bar ekenligin tekseriw ushın saltań aǵzası 4 tiń barlıq bóliwshilerin jazıp alamız: $\pm1, \pm2, \pm4$. Bul sanlardı izbe-iz teńlemege qoyıp kórip, $x_1=1$ hám $x_2=2$ sanlar teńlemeniń korenleri bolıwın anıqlap alamız. Demek, $x^4+2x^3-11x^2+4x+4$ kópaǵzalı $(x-1)(x-2)=x^2-3x+2$ kópaǵzalıǵa qaldıqsız bólinedi.

$$\begin{array}{r|l}
-\ x^4+2x^3-11x^2+4x+4 & x^2-3x+2 \\ \cline{2-2}
x^4-3x^3+2x^2 \qquad\qquad & x^2+5x+2 \\ \cline{1-1}
-\ 5x^3-13x^2+4x+4 & \\
5x^3-15x^2+10x \quad & \\ \cline{1-1}
-\ 2x^2-6x+4 & \\
2x^2-6x+4 & \\ \cline{1-1}
0 \qquad &
\end{array}$$

Teńlemeni $(x-1)(x-2)(x^2+5x+2)=0$ kórinisinde jazıp alamız.

Payda bolǵan teńleme berilgen teńlemege teń kúshli teńleme bolıp esaplanadı. Hárbir kóbeytiwshini nólge teńlestirip, teńlemeniń korenlerin tabamız.

Juwabı: $x_1 = 1;\ \ x_2 = 2,\ \ x_{3,4} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}.$

5-mısal. Teńlemeni sheshiń. $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$.

Sheshiliwi. Saltań aǵzanıń bóliwshileri: $\pm 1; \pm 3; \pm 5$. Bulardan -3, 1, 5 sanları teńlemeniń shep tárepin 0 ge teń etiwin ańsat ǵana anıqlawımız múmkin. Demek, $x^3 - 3x^2 - 13x + 15$ kópaǵzalını tómendegishe kóbeytiwshilerge jiklewimiz múmkin:

$$x^3 - x^2 - 2x^2 + 2x - 15x + 15 = 0$$

$$x^2(x-1) - 2x(x-1) - 15(x-1) = 0$$

$$(x-1)(x^2 - 2x - 15) = 0$$

$$(x-1)(x-5)(x+3) = 0$$

Bul kóbeytiwshilerdiń hárbirin 0 ge teńlestirip sheship, teńlemeniń korenleri $x_1 = 1,\ x_2 = 5,\ x_3 = -3$ ke teń ekenligin tabamız:

Juwabı: $x_1 = 1,\ x_2 = 5,\ x_3 = -3.$

6-mısal. $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$ teńlemeni sheshiń.

Sheshiliwi. Berilgen teńleme 4-dárejeli simmetriyalı teńleme. Onı sheshiw ushın teńlemeniń eki tárepin $x^2 \neq 0$ ge bólemiz hám oǵan teń kúshli teńlemeni payda etemiz.

$$x^2 - 5x + 8 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 8 = 0$$

$x + \dfrac{1}{x} = t$ belgilew kiritemiz. Ol jaǵdayda

$t^2 = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2x \cdot \dfrac{1}{x} + \left(\dfrac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \dfrac{1}{x^2} \ \Rightarrow \ x^2 + \dfrac{1}{x^2} = t^2 - 2$ boladı.

Bulardan $t^2 - 5t + 6 = 0$ teńlemeni payda etemiz. Bul teńlemeniń sheshimleri: $t_1 = 2$ hám $t_2 = 3$. Bul mánislerdi belgilewge qayta qoyıp, berilgen teńlemeniń sheshimi $x + \dfrac{1}{x} = 2$ hám $x + \dfrac{1}{x} = 3$ teńlemelerdiń sheshimi birlespesine teń bolıwın kóremiz.

Bul teńlemelerdi sheship, $x_1 = 1, x_2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ hám $x_3 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ ekenligin tabamız.

Juwabı: $x_1 = 1, x_2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}, x_3 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}.$

7-mısal. $3x^3 + 4x^2 + 4x + 3 = 0$ teńlemeni sheshiń.

Sheshiliwi. Berilgen teńleme 3-dárejeli simmetriyalı teńleme. Onı sheshiw ushın dáslep kóbeytiwshilerge jikleymiz hám oǵan teń kúshli teńlemeni payda etemiz.

$$3(x^3 + 1) + 4x(x + 1) = 0$$

$$(x + 1)(3x^2 - 3x + 3 + 4x) = 0$$

$$(x + 1)(3x^2 + x + 3) = 0.$$

Bul teńlemeniń sheshimi tómendegi 2 teńlemeniń sheshimi birlespesine teń.

$$x + 1 = 0 \text{ hám } 3x^2 + x + 3 = 0.$$

1-teńlemeniń sheshimi $x = -1$, 2-teńleme bolsa haqıyqıy sheshimge iye emes.

Juwabı: $x = -1$.

Bólshek-racional teńlemeler

$\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ kórinisine keltiriw múmkin bolǵan teńlemeler ***bólshek - racional teńleme*** dep ataladı (bul jerde $f(x)$ hám $g(x)$ lar x belgisizli kópaǵzalılar).

$\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ kórinisindegi racional teńlemeniń **anıqlanıw oblastı** $g(x) \neq 0$.

Racional teńlemelerdi sheshiw qádemleri:

- teńlemedegi barlıq ańlatpalar teńliktiń shep tárepine ótkeriledi;
- barlıq ańlatpalar ulıwma bólimge keltiriledi;
- teńleme $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ kórinisine keltiriledi;
- alımınıń nólleri tabıladı;
- anıqlanıw oblastı tabıladı;
- alımınıń anıqlanıw oblastına tiyisli bolǵan nólleri teńlemeniń korenleri boladı.

Yamasa $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ racional teńlemeniń sheshimin tabıw ushın ol tómendegi: $\begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$ teń kúshli sistema kórinisinde jazıp alınadı hám sheshiledi.

Máselen, tómendegi teńlemeni qarayıq: $\dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1} = 0.$

Bólshektiń alımın nólge teńlestiremiz:

$$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 1.$$

Bul teńlemeniń anıqlanıw oblastı $x \neq 1$, yaǵnıy $x = 1$ mánis berilgen teńlemeniń sheshimi bola almaydı, demek, $x = 1$ shet koren boladı.

8-mısal. Teńlemeniń korenin tabıń. $\frac{2x+3}{x-1}=0$.

Sheshiliwi. $\begin{cases} 2x+3=0 \\ x-1\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x=-3 \\ x\neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1,5 \\ x\neq 1 \end{cases}$

Juwabı: $x=-1,5$.

9-mısal. Teńlemeni sheshiń. $\frac{4x+4}{3(x+2)-3}=0$.

Sheshiliwi. $\begin{cases} 4x+4=0 \\ 3(x+2)-3\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x=-4 \\ 3x+6-3\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x\neq -1 \end{cases}$

x tıń mánisi -1 ge teń bolıwı múmkin emesligi kórinip turıptı. Sonıń ushın,

Juwabı: $x\in\varnothing$.

10-mısal. Teńlemeniń korenin tabıń. $\frac{-2x-4}{x^2-4}=\frac{x+5}{x-2}$.

Sheshiliwi. Barlıq ańlatpalardı teńlikten shep tárepke ótkeremiz hám ulıwma bólimge keltiremiz.

$$\frac{x+5}{x-2}+\frac{2x+4}{x^2-4}=0\Rightarrow\frac{(x+5)(x+2)+2x+4}{x^2-4}=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{x^2+7x+10+2x+4}{x^2-4}=\frac{x^2+9x+14}{x^2-4}=0$$

Bólshek-racional ańlatpanıń alımın nólge teńlestiremiz hám nóllerin tabamız. Viet teoremasınan paydalanamız.

$$x^2+9x+14=0\Rightarrow x=-2; x=-7$$

Anıqlanıw oblastı $x^2-4=(x-2)(x+2)\neq 0\Rightarrow x\neq -2; x\neq 2$

Bunnan teńlemeniń bir koreni $x=-7$ bar ekenligi kórinip turıptı.

Juwabı: $x=-7$.

Dıqqat etiń! Bólshek-racional teńlemeni sheshiwde hárdayım alımınıń nóllerin teńleme anıqlanıw oblastına tiyisli ekenligin tekseriń.

11-mısal. Teńlemeni sheshiń. $\frac{(x^2-x-56)(x-3)}{x^2+5x+6}=0$

Sheshiliwi. Berilgen teńleme bólshek-racional teńleme bolıp esaplanadı. Dáslep alımınıń nóllerin tabamız.

$$(x^2-x-56)(x-3)=0\Rightarrow x=3;\quad x^2-x-56=0$$
$$D=(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-56)=225=15^2$$
$$x_{1,2}=\frac{1\pm 15}{2}\Rightarrow x_1=8;\quad x_2=-7$$

Alımınıń 3 nólin taptıq: $x_1=8$; $x_2=-7$; $x_3=3$.

Bul nóllerdi berilgen teńlemeniń bólimindegi ańlatpaǵa qoyıp tekseremiz hám olar bóliminiń nólleri bolmawına isenim payda etemiz.

Juwabı: $x_1=8$; $x_2=-7$; $x_3=3$.

12-mısal. Teńlemeniń korenlerin tabıń.

$$\frac{2}{(x-2)(x+2)}-\frac{1}{x(x-2)}=\frac{4-x}{x(x+2)}$$

Sheshiliwi. Teńliktiń oń tárepindegi ańlatpanı shep tárepke ótkeremiz:

$$\frac{2}{(x-2)(x+2)}-\frac{1}{x(x-2)}-\frac{4-x}{x(x+2)}=0$$

hám ulıwma bólimge keltiremiz:

$$\frac{2x-(x+2)-(4-x)(x-2)}{x(x-2)(x+2)}=0$$

Alımındaǵı qawsırmalardı ashıp, kvadrat teńlemege keltiremiz:

$$\frac{2x-x-2-4x+x^2+8-2x}{x(x-2)(x+2)}=0 \Rightarrow \frac{x^2-5x+6}{x(x-2)(x+2)}=0.$$

Alımınıń nóllerin tabamız:

$$x^2-5x+6=0 \Rightarrow D=(-5)^2-4\cdot 6=1,\ x_{1,2}=\frac{5\pm 1}{2} \Longrightarrow x_1=2;\ \ x_2=3.$$

x tıń tabılǵan mánislerin berilgen teńlemeniń bólimindegi ańlatpaǵa qoyıp tekseremiz. $x = 2$ mánis bólimdegi ańlatpanı nólge aylandırǵanlıǵı ushın shet koren boladı. Demek, teńleme bir $x = 3$ korenge iye eken.

Juwabı: $x = 3$.

13-mısal. Teńlemeni sheshiń. $x^2+x+1=\dfrac{15}{x^2+x+3}$.

Sheshiliwi. $x^2+x+1=t$ belgilew kiritemiz. Teńleme tómendegi kóriniske keledi:

$$t=\frac{15}{t+2}$$

$t\neq -2$ bolıwın inabatqa alıp, tómendegi teńlemeni sheshemiz:

$$t(t+2)=15$$

$$t^2+2t-15=0$$

$$t_1=-5;\ t_2=3$$

t nıń ornına qoyıp, $x^2+x+1=-5$ hám $x^2+x+1=3$ teńlemelerge iye boldıq. Olardıń hárbirin sheshemiz:

$x^2+x+6=0 \ \Rightarrow$ haqıyqıy koreni joq; $x^2+x-2=0 \ \Rightarrow \ x_1=-2;\ x_2=1$.

Juwabı: $x_1=-2;\ x_2=1$.

Tekstli máselelerdi sheshiwde racional teńlemeler isletiliwi múmkin. Tómende háreket hám jumısqa tiyisli máseleler racional teńleme kórinisinde modellestirilip sheshilgen.

Háreketke tiyisli másele

Vertolyot dáslep samal baǵıtında 120 km aralıqtı ushıp ótti, keyin artqa qayıttı. Buǵan ol 6 saat waqıt sarpladı. Eger vertolyottıń samalsız hawadaǵı tezligi 45 km/h qa teń bolsa, samaldıń tezligin tabıń.

Sheshiliwi. Samaldıń tezligin x km/h penen belgileyik. Onda samal baǵıtı boyınsha vertolyottıń tezligi $(45 + x)$ km/h hám samalǵa qarsı baǵıtta bolsa $(45 - x)$ km/h qa teń boladı. Máseleniń shárti boyınsha, vertolyot barlıǵı bolıp 6 saat waqıt sarplaǵan. Aralıqtı tezlikke bólip qossaq, jámi ketken waqıtqa teń boladı.

$$\frac{120}{45+x}+\frac{120}{45-x}=6$$

Bólshek-racional teńleme payda boldı: $\frac{120}{45+x}+\frac{120}{45-x}-6=0$

$$\frac{120(45-x)+120(45+x)-6(45+x)(45-x)}{(45+x)(45-x)}=0$$

Alımın ápiwayılastıramız hám nólge teńlep sheshemiz:

$$6x^2-1350=0$$
$$x^2=225$$
$$x_1=-15;\ x_2=15$$

Tezlik teris mánis qabıl etpegenligi ushın $x=-15$ koren bola almaydı. Demek, samaldıń tezligi 15 km/h.

Juwabı: Samaldıń tezligi 15 km/h.

Jumısqa tiyisli másele

Eki traktorshı birgelikte atızdı 4 kúnde súrdi. Eger 1-traktorshıǵa súriwdi bir ózi orınlawı ushın 2-traktorshıǵa qaraǵanda 6 kún kem waqıt kerek bolsa, hárbir traktorshı jumıstı neshe kúnde orınlaydı?

Sheshiliwi. 1-traktorshı atızdı x kúnde súrsin. Onda 2-traktorshı usı atızdı $(x + 6)$ kúnde súredi. Demek, 1-traktorshı 1 kúnde atızdıń $\frac{1}{x}$ bólegin, 2-traktorshı bolsa $\frac{1}{x+6}$ bólegin súredi. Máseleniń shárti boyınsha, usı atızdı olar birgelikte 4 kúnde súredi. Yaǵnıy, ekewi 1 kúnde atızdıń $\frac{1}{4}$ bólegin súredi.

Teńlemeni dúzemiz hám sheshemiz: $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+6}=\frac{1}{4}$

$$\frac{4(x+6)+4x-x(x+6)}{4x(x+6)}=0$$

$$\frac{-x^2+2x+24}{4x(x+6)}=0$$

Payda bolǵan racional teńleme tómendegi sistemaǵa teń kúshli.

$$\begin{cases} x^2-2x-24=0; \\ 4x(x+6)\neq 0; \end{cases} D=(-2)^2-4\cdot(-24)=100;\ x_{1,2}=\frac{2\pm 10}{2}\Rightarrow x_1=6;\ \ x_2=-4$$

Kúnler sanı teris bolmaydı, sonıń ushın $x = -4$ juwap bola almaydı. Demek, 1-traktorshı súriwdi 6 kúnde, 2-traktorshı bolsa $x+6=6+6=12$ kúnde orınlaydı.

Juwabı: 1-traktorshı 6 (kún), 2-traktorshı 12 (kún).

MÍSALLAR

Bólshek-racional teńlemelerdi sheshiń (1–10).

1. $\frac{1}{x}-\frac{2x}{x+1}=0$

2. $\frac{2y-5}{y+5}=\frac{3y+21}{2y-1}$

3. $\frac{5x-7}{x-3}=\frac{4x-3}{x}$

4. $\frac{x+1}{2(x-1)}=\frac{9}{2(x+4)}+\frac{1}{x-1}$

5. $\frac{2x}{x-1}-\frac{1}{x+1}=\frac{4x}{x^2-1}$

6. $\frac{x^2-2x}{x-2}=x^2-2$

7. $\frac{7}{2x+9}-6=5x$

8. $\frac{15}{x-2}=\frac{14}{x}+1$

9. $\frac{4}{x-2}+\frac{4}{x+2}=\frac{3}{2}$

10. $\frac{3x}{x^2-1}=2\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)$

Bólshek-racional teńlemelerdi sheshiń (11–30).

11. $\frac{1}{x^2-12x+36}+\frac{12}{36-x^2}=\frac{1}{x+6}$

12. $\frac{8c-3}{4c^2-2c+1}+\frac{6}{8c^3+1}=\frac{2}{2c+1}$

13. $\frac{3x-2}{x-1}+\frac{x-4}{x+3}=\frac{3x^2+1}{(x-1)(x+3)}$

14. $\frac{2-3x}{x+1}-\frac{4}{3}\cdot\frac{x+1}{2-3x}=\frac{4}{3}$

15. $\frac{x-49}{x+6}+\frac{2x+50}{x+5}=2$

16. $\frac{(x+2)^2-9}{x-1}\cdot(x-5)=-24$

17. $(x+4)(x^2-1)=4x^2+24x-\frac{4x^2+20x}{5x+x^2}$

18. $\frac{25x-21}{2x^2+5x-12}=\frac{x-4}{2x-3}-\frac{2x-3}{x+4}$

19. $\frac{3}{x^2-2x+1}+\frac{2}{1-x^2}=\frac{1}{1+x}$

20. $\frac{6}{x-1}+\frac{6}{(x-1)(x-3)}+\frac{3}{3-x}=7$

21. $\frac{x^5-4x^3}{x-2}=16+2x^3$

22. $\frac{1}{(x-2)(x-3)}-\frac{9}{(x+2)(x-7)}=1$

23. $x^2+x+1=\frac{15}{x^2+x+3}$

24. $\frac{x^2+2}{3x-2}-\frac{3x-2}{x^2+2}=2\frac{2}{3}$

25. $x^2-5x+\frac{24}{x^2-5x}+10=0$

26. $\frac{x^2+1}{x}+\frac{x}{x^2+1}=2\frac{1}{2}$

27. $\frac{2}{x^2+3}+\frac{4}{x^2+7}=1$

28. $\frac{1}{x(x+2)}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{1}{12}$

29. $\frac{x^2-3x-1}{x^2-2x+4}=\frac{x^2-2x}{x^2-x+1}$

30. $\frac{x^2-4x-1}{x^2-3x+5}=\frac{x^2-3x+1}{x^2-2x+2}$

31. Eki qala arasındaǵı aralıq dárya jolı menen 80 km. Axmet kemede usı qalalardıń birinen ekinshisine barıp-qaytıw ushın 8 saat 20 minut waqıt sarpladı. Dárya aǵısınıń tezligi 4 km/h bolsa, kemeniń turǵın suwdaǵı tezligin tabıń.

32. Eki jumısshı bir jumıstı birgelesip islese, 12 kúnde juwmaqlaydı. Eger aldın birewi islep, jumıstıń yarımın orınlap bolǵannan keyin onıń ornına ekinshisi islese, jumıs 25 kúnde juwmaqlanadı. Usı jumıstı hárqaysı jumısshı bir ózi islese, neshe kúnde juwmaqlaydı?

33. "A" traktor 3 kúnde 7 ha, "B" traktor bolsa 2 kúnde 17 ha jerdi súre aladı. Fermer xojalıǵında 2 dana "A" traktordan hám 1 dana "B" traktordan bar. Eger bul traktorlar birgelikte isletilse, fermer xojalıǵınıń 237 ha jerin neshe kúnde súre aladı?

34. Avtomobil joldıń 80 kilometrlik bóleginde 120 km/h, keyingi 25 kilometrlik bóleginde 50 km/h hám aqırǵı 35 kilometrlik bóleginde 70 km/h tezlik penen háreketlendi. Onıń pútin jol dawamındaǵı ortasha tezligin tabıń.

35. Bir jumıstı birinshi jumısshınıń bir ózi a kúnde orınlaydı, ekinshi jumısshı usı jumıstı orınlaw ushın birinshi jumısshıǵa qaraǵanda b kún artıq waqıt sarplaydı. Eger úshinshi jumısshınıń bir ózi birinshi jumısshıǵa qaraǵanda b kún tezirek orınlay alsa, usı jumıstı úshewi de birge islep, neshe kúnde orınlaydı?

36. Dárya boyında jaylasqan A hám B qalalar arasındaǵı aralıq 96 km. Katerde A qaladan B qalaǵa barıp-qaytıw ushın 10 saat sarplanadı. Eger dárya aǵısınıń tezligi 4 km/h bolsa katerdiń turǵın suwdaǵı tezligin tabıń.

RACIONAL TEŃLEMELER SISTEMASÍ

Eki belgisizli eki teńleme qatnasqan sistemalardıń sheshimi bizge belgili bolǵan algebralıq qosıw, ornına qoyıw, ózgeriwshini almastırıw usıllarına tiykarlanadı. Bul jerde qatnasıp atırǵan bólshek-racional ańlatpalardıń bólimleri nólge teń bolmaytuǵınlıǵın esletip ótemiz.

Ornına qoyıw usılı

1-mısal. Tómendegi teńlemeler sistemasın ornına qoyıw usılınan paydalanıp sheshiń.

$$\begin{cases} 3xy = 21 \\ x - 8y = -1 \end{cases}$$

Sheshiliwi. 2-teńlemeden $x - 8y = -1 \Rightarrow \boldsymbol{x} = 8\boldsymbol{y} - 1$.

x tıń payda bolǵan bul mánisin 1-teńlemege qoyıp, $3(8y-1)y = 21$ teńlemege kelemiz.

Bul teńlemeni sheship,

$$(8y-1)y = 7$$

$8y^2 - y - 7 = 0 \Rightarrow y_1 = -\dfrac{7}{8}; y_2 = 1$ mánislerdi tabamız hám olardı $\boldsymbol{x} = 8\boldsymbol{y} - 1$ ge qoyıp $\Rightarrow x_1 = -8; x_2 = 7$ ekenligin anıqlaymız.

Juwabı: $\left(-8; -\dfrac{7}{8}\right), (7;1)$.

2-mısal. Ornına qoyıw usılınan paydalanıp, $\begin{cases} 2x^2 + y = 4 \\ x^4 + y^2 = 16 \end{cases}$ teńlemeler sistemasın sheshiń.

Sheshiliwi.

$$y = 4 - 2x^2.$$

$$x^4 + \left(4 - 2x^2\right)^2 = 16$$

$$x^4 + 16 - 16x^2 + 4x^4 = 16$$

$$5x^4 - 16x^2 = 0$$

$$x^2\left(5x^2 - 16\right) = 0, \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = \frac{4}{\sqrt{5}},\ x_3 = -\frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow y_1 = 4,\ y_2 = -\frac{12}{5},\ y_3 = \frac{12}{5}$$

Juwabı: $(0;\ 4), \left(\dfrac{4}{\sqrt{5}}; -\dfrac{12}{5}\right), \left(-\dfrac{4}{\sqrt{5}}; \dfrac{12}{5}\right)$.

Algebralıq qosıw usılı

3-mısal. Usı teńlemeler sistemasın sheshiń. $\begin{cases} x^2 + y = 27 \\ x - y = 3 \end{cases}$

Sheshiliwi. Eki teńlemede y belgisiz qarama-qarsı belgilerge iye koefficient penen qatnasqan, sonıń ushın bul teńlemelerdi aǵzama-aǵza qosamız.

$$+\begin{cases} x^2+y=27 \\ x-y=3 \end{cases}$$
$$x^2+x=30$$

$x^2+x-30=0$ bir belgisizli kvadrat teńlemege keltirip aldıq.

$$x_1=\frac{-1-11}{2}=-6 \Rightarrow y_1=-9$$

$$x_2=\frac{-1+11}{2}=5 \Rightarrow y_2=2$$

Juwabı: (–6; –9), (5; 2).

4-mısal. Teńlemeler sistemasın algebralıq qosıw usılı járdeminde sheshiń.

$$\begin{cases} x^3-y^3-3x^2+3y^2x=-2 \\ x^2-x^2y=1. \end{cases}$$

Sheshiliwi. 2-teńlemeni 3 ke kóbeytip, 1-teńlemege qossaq:

$$+\begin{cases} x^3-y^3-3x^2+3y^2x=-2 \\ 3x^2-3x^2y=3 \end{cases}$$

1-teńleme $(a-b)^3$ ayırmanıń kubına keledi: $x^3-y^3-3x^2y+3y^2x=1$.

Bunnan:
$$\begin{cases} (x-y)^3=1 \\ x^2-x^2y=1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x-y=1 \\ x^2-x^2y=1 \end{cases}$$

Endi bolsa, ornına qoyıw usılınan paydalanamız hám sistemanı sheshemiz.

$$\begin{cases} y=x-1 \\ x^2-x^2(x-1)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x-1 \\ x^2-x^3+x^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x-1 \\ x^3-2x^2+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x-1 \\ x^3-2x^2+1=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \begin{cases} y=x-1 \\ (x-1)(x^2-x-1)=0 \end{cases} \Rightarrow \; x_1=1,\; x_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\; x_3=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, bul mánislerdi $y=x-1$ teńlemege qoyıp, $y_1=0,\; y_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\; y_3=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ ekenligin tabamız.

Juwabı: $(1;0), \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right), \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$.

Ózgeriwshilerdi almastırıw usılı

5-mısal. Teńlemeler sistemasın sheshiń.

$$\begin{cases} x+xy+y=11 \\ x^2y+xy^2=30 \end{cases}$$

Sheshiliwi. Tómendegishe belgilew kiritemiz.

$x+y=a$ hám $xy=b$

Sonda sistema tómendegi kóriniske keledi:

$$\begin{cases} a+b=11 \\ ab=30 \end{cases}$$

Bul sistemanı sheship, $a_1=6,\ b_1=5$ hám $a_2=5,\ b_2=6$ lardı anıqlaymız. Endi tómendegi sistemalardı sheshemiz:

$$\begin{cases} x+y=6, \\ xy=5, \end{cases} \text{ va } \begin{cases} x+y=5 \\ xy=6. \end{cases}$$

Olardıń korenlerinen dúzilgen kóplik teńlemeler sistemasınıń sheshimi boladı.

Juwabı: $(5;1),\ (1;5),\ (2;3),\ (3;2).$

MÍSALLAR

Teńlemeler sistemasın sheshiń.

1. $\begin{cases} y-x^2+x=1 \\ x=y-4 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4x^2-y=2 \\ 3x-2y=-1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 4x+3y=-1 \\ 2x^2=y+11 \end{cases}$

4. $\begin{cases} xy=20 \\ x-4y=2 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^2+y^2-2xy=1 \\ x+y=3 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x-y=10 \\ x^2-y^2=20-xy \end{cases}$

7. $\begin{cases} x+y=8 \\ x^2+y^2=36 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x\cdot y=300 \\ x+y=35 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x^2+y^2=74 \\ x+y=12 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x+y=8 \\ xy=15 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x+y=1 \\ x^3+y^3=19 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x^3+8y^3=35 \\ x^2-2xy+4y^2=7 \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dfrac{xy}{x+2y}+\dfrac{x+2y}{xy}=2 \\ \dfrac{xy}{x-2y}+\dfrac{x-2y}{xy}=4 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x^2-xy+\dfrac{1}{4}y^2+x-\dfrac{1}{2}y=2 \\ \dfrac{1}{4}x^2+xy+y^2+2y+x=3 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x^2-xy+y^2=19 \\ x^2+xy+y^2=49 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x^2+y^2=x+y \\ x^4+y^4=\dfrac{1}{2}(x+y)^2 \end{cases}$

17. $\begin{cases} \dfrac{x-y}{x+y}+6\dfrac{x+y}{x-y}=5 \\ xy=-2 \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dfrac{2x}{y}+\dfrac{3y}{x}+6=\dfrac{3}{xy} \\ \dfrac{6y}{x}+\dfrac{4x}{y}-1=\dfrac{45}{xy} \end{cases}$

19. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5 \\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=13 \end{cases}$

20. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{xy}+\dfrac{xy}{x+y}=2 \\ \dfrac{x-y}{xy}+\dfrac{xy}{x-y}=\dfrac{5}{2} \end{cases}$

21. $\begin{cases} x^3-y^3=61(x-y) \\ (x+1)(y+1)=12 \end{cases}$

22. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=\dfrac{9}{2} \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

23. $\begin{cases} x^4+y^4=17(x+y)^2 \\ xy=2(x+y) \end{cases}$

24. $\begin{cases} x^2+y^2=x-y \\ x^4+y^4=\dfrac{1}{2}(x-y)^2 \end{cases}$

25. $\begin{cases} x^2\left(1+y+y^2+y^3\right)=160 \\ x^2\left(1-y+y^2-y^3\right)=-80 \end{cases}$

26. $\begin{cases} 2x^2y^2-3y^2+5xy-6=0 \\ 3x^2y^2-4y^2+3xy-2=0 \end{cases}$

27. $\begin{cases} x^3y+xy^3=\dfrac{10}{9}(x+y)^2 \\ x^4y+xy^4=\dfrac{2}{3}(x+y)^3 \end{cases}$

28. $\begin{cases} \dfrac{x\left(y^2+1\right)}{x^2+y^2}=\dfrac{3}{5} \\ \dfrac{y\left(x^2-1\right)}{x^2+y^2}=\dfrac{4}{5} \end{cases}$

29. $\begin{cases} \dfrac{y^2}{x}+\dfrac{x^2}{y}=12 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3} \end{cases}$

30. $\begin{cases} xy=6 \\ yz=15 \\ zx=10 \end{cases}$

RACIONAL TEŃSIZLIKLER

Racional teńsizliklerdi sheshiw racional teńlemelerdi sheshiwge uqsas, aldın teńsizlikti ápiwayı teń kúshli teńsizlikke keltiriw arqalı orınlanadı. Bul jerde tómendegi qaǵıydalarǵa boysınıladı:

1-qaǵıyda. Teńsizliktiń qálegen aǵzasın teńsizliktiń bir tárepinen ekinshi tárepine qarama-qarsı belgi menen ótkeriw múmkin.

2-qaǵıyda. Teńsizliktiń eki jaǵın birdey oń sanǵa kóbeytiw yamasa bóliw múmkin, bul jerde teńsizlik belgisi ózgermeydi.

3-qaǵıyda. Teńsizliktiń eki jaǵın birdey teris sanǵa kóbeytiw yamasa bóliw múmkin, bul jerde teńsizlik belgisi qarama-qarsısına ózgeredi.

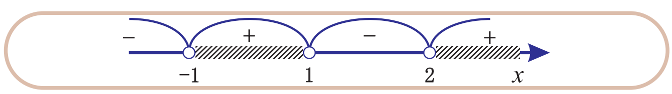
Racional teńsizlikti sheshiwde, ***intervallar usılınan*** paydalanıladı.

1-mısal. Teńsizlikti sheshiń. $(x-1)(x+1)(x-2)>0$

Sheshiliwi.

1. Teńsizliktiń oń tárepi nólge teń. Demek, shep táreptegi ańlatpanıń nóllerin tabamız: $x=1, x=-1, x=2$.

2. x tıń bul mánislerin san kósherinde belgileymiz hám payda bolǵan aralıqlarda(intervalda) shep tárepiniń belgisin anıqlaymız.



3. Teńsizlik belgisi nólden úlken bolǵanlıǵı ushın, oń belgige iye aralıqlar berilgen teńsizliktiń sheshimi boladı.

Juwabı: $x \in (-1;1) \cup (2;\infty)$

2-mısal. Teńsizlikti sheshiń. $x^4-3<2x(2x^2-x-2)$

Sheshiliwi.

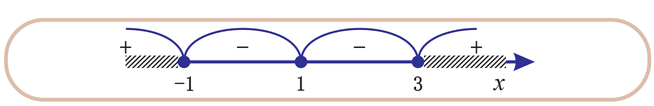
1. Pútin racional teńsizlik berilgen. Onı sheshiw ushın aldın barlıq ańlatpalardı teńsizliktiń shep tárepine ótkeremiz.

$$x^4-4x^3+2x^2+4x-3<0$$

2. Shep táreptegi payda bolǵan ańlatpanı kóbeytiwshilerge jikleymiz. Bunıń ushın onıń nóllerin tabamız: $x_1=-1,\ x_2=1$ hám $x_3=3$.

$$(x-1)^2(x+1)(x-3)\geq 0$$

3. Nóllerdi sanlar kósherinde belgileymiz hám aralıqlarda shep táreptegi ańlatpanıń belgilerin belgileymiz.



4. Shep táreptegi ańlatpada $(x-1)$ ekiaǵzalı ekinshi (jup) dárejede, sonıń ushın san kósherinde 1 den ótiwde belgi ózgermeydi.

5. Teńsizliktiń belgisi nólden úlken yamasa teń bolǵanlıǵı ushın, oń belgige iye aralıqlar hám 1 sanı teńsizliktiń sheshimi boladı.

Juwabı: $x \in (-\infty;-1] \cup [3;\infty) \cup \{1\}$.

Bólshek- racional teńsizlikler

$\frac{f(x)}{g(x)} > 0$, $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$, $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$, $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$ kórinisine keltiriw múmkin bolǵan teńsizlikler ***bólshek-racional teńsizlikler*** dep ataladı (bul jerde $f(x)$ hám $g(x)$ lar kópaǵzalılar).

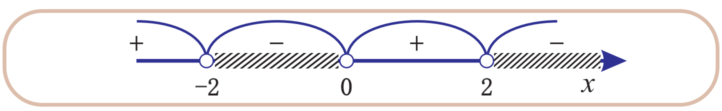
Bólshek-racional teńsizliklerdi sheshiw qádemleri:

- alımınıń nólleri tabıladı;
- bóliminiń nólleri tabıladı;
- alımı hám bóliminiń nólleri san kósherinde belgilenedi;
- payda bolǵan aralıqlarda $\frac{f(x)}{g(x)}$ tıń belgileri tabıladı;
- teńsizlikti qanaatlandıratuǵın aralıq(lar) teńsizliktiń sheshimi boladı.

3-mısal. Teńsizlikti sheshiń. $\frac{4}{x} - x < 0$.

Sheshiliwi.

1. Ulıwma bólimge keltiremiz: $\frac{4 - x^2}{x} < 0$.
2. Alımınıń nólleri $x = 2$, $x = -2$, bóliminiń nóli $x = 0$.
3. Nóllerdi san kósherinde belgileymiz hám aralıqlarda belgilerdi anıqlaymız.



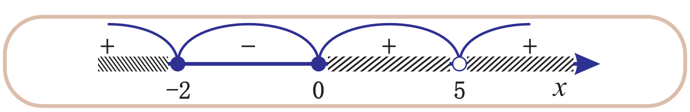
Teńsizlik belgisi nólden kishi bolǵanlıǵı ushın teris belgige iye aralıqlar berilgen teńsizliktiń sheshimi boladı.

Juwabı: $x \in (-2;0) \cup (2;\infty)$.

4-mısal. Teńsizlikti sheshiń. $\frac{x(x+2)^3}{(x-5)^2} \geq 0$

Sheshiliwi.

1. Alımınıń nólleri $x = 0$ hám $x = -2$.
2. Bóliminiń nóli $x = 5$.
3. Sanlar kósherinde bul mánislerdi belgilep shıǵamız hám aralıqlarda belgilerdi anıqlaymız, bul jerde shep tárepte gi ańlatpada $(x-5)$ ańlatpa ekinshi (jup) dárejede qatnasqan, sonıń ushın san kósherinde 5 sanınan eki tárepte jaylasqan aralıqlar birdey belgige iye.



4. Teńsizlik belgisi nólden úlken yamasa teń bolǵanlıǵı ushın oń belgige iye aralıqlar berilgen teńsizliktiń sheshimi boladı.

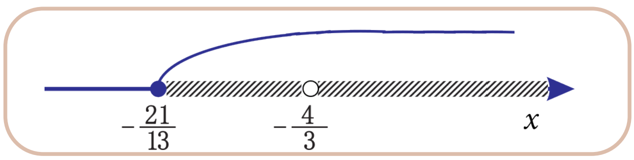
Juwabı: $x \in (-\infty;-2] \cup [0;5) \cup (5;\infty)$.

Dıqqat etiń! $\frac{f(x)}{g(x)} < a$ kórinisindegi teńsizliklerdi sheshiwde teńsizliktiń eki tárepin $g(x) \neq 0$ dep esaplap, $g(x)$ qa kóbeytiwden baslamań. Sebebi bul nadurıs juwapqa alıp keliwi múmkin.

Máselen, $\frac{2x-1}{3x+4} \leq 5 \quad \Big| \cdot (3x+4) \neq 0$

$$\begin{cases} \frac{2x-1}{3x+4} \cdot (3x+4) \leq 5 \cdot (3x+4) \\ 3x \neq -4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x-1 \leq 15x+20 \\ x \neq -\frac{4}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq -\frac{21}{13} \\ x \neq -\frac{4}{3} \end{cases}$$

Bul sistemanı sanlar kósherinde kórsetemiz:



Kórinip turǵanınday, teńsizliktiń payda bolǵan sheshimi $\left[-\frac{21}{13}; -\frac{4}{3}\right) \cup \left(-\frac{4}{3}; \infty\right)$ boladı degen nadurıs juwmaqqa kelemiz.

Durıs juwaptı anıqlaw ushın bul teńsizlikti izbe-izlikte óz betinshe orınlań hám ne ushın bunday usıl durıs juwap bermegenligi haqqında pikir júritiń.

MÍSALLAR

Teńsizliklerdi sheshiń.

1. $\frac{x+4}{(x+5)x} < 0$

2. $\frac{x-4}{(x-3)x} < 0$

3. $\frac{5+4x}{(x-2)(x+1)} \geq 0$

4. $\frac{4-3x}{(x+2)(x-1)} \geq 0$

5. $\frac{4x+3}{x+2} > 5$

6. $\frac{4x-3}{x-5} > 5$

7. $\frac{25-16x^2}{x^2+4x+4} > 0$

8. $\frac{16-25x^2}{x^2-4x+4} > 0$

9. $\frac{2x-7}{6} + \frac{7x-2}{3} < 3 - \frac{1-x}{2}$ teńsizliktiń pútin sanlardan ibarat sheshimlerinen eń úlkenin kórsetiń.

10. $\frac{x-4}{2x+6} \leq 0$ teńsizliktiń barlıq pútin sanlardaǵı sheshimleri qosındısın tabıń.

11. $\frac{1}{x}<1$ teńsizliktiń (–3; 3) intervaldaǵı pútin sheshimleri sanın tabıń.

12. $\frac{(x+3)(x-5)}{x+1}\geq 0$ teńsizliktiń pútin sanlardan ibarat sheshimlerinen eń úlkeninen eń kishisiniń ayırmasın tabıń.

13. $\frac{(x+4)^2-8x-25}{(x-6)^2}\geq 0$ teńsizliktiń pútin sanlardan ibarat sheshimlerinen neshewi [–5; 6] kesindide jaylasqan?

14. $\frac{6x-1}{4x+3}\leq\frac{3x-2}{2x-1}$

15. $\frac{5}{-6x+3}+\frac{6x}{1-2x}\geq 0$

16. $\frac{x^2+3x}{49x^2+70x+25}\leq 0$

17. $\frac{6x+1}{4x-3}\leq\frac{3x+2}{2x+1}$

18. $\frac{6}{-4x+2}-\frac{5x}{1-2x}\leq 0$

19. $\frac{49x^2-70x+25}{x^2-3x}\leq 0$

20. $\frac{x^2+3x-2}{(x-1)^2-9}-\frac{3x+1}{3x-12}\leq 0$

21. $\frac{x^2+7x+8}{(x+1)^2-9}-\frac{3x+7}{3x-6}\leq 0$

22. $\frac{1}{2x^2-5x}-\frac{2}{25+10x}+\frac{4}{25-4x^2}\geq 0$

23. $\frac{6}{-4x-x^2}-\frac{2}{x^2-4x}+\frac{x}{x^2-16}\geq 0$

24. $\left(\frac{4}{x^2+4x}+\frac{32-3x}{x^3+64}\right):\frac{x+8}{x^3-4x^2+16x}\geq\frac{4}{4+x}$

25. $\left(\frac{x^2+2x+4}{4x^2-1}\cdot\frac{2x^2-x}{-x^3+8}-\frac{2-x}{2x^2+x}\right):\frac{4}{x^2-2x}\geq\frac{4-x}{x+2x^2}$

RACIONAL TEŃSIZLIKLER SISTEMASÍ

Teńsizlikler sistemasın sheshiw qádemleri:

- hárbir teńsizliktiń sheshimi ayrıqsha tabıladı;
- eki teńsizlik ushın ulıwma sheshim tabıladı (bul qádem san kósherinde kórsetiw arqalı orınlanıwı múmkin).

1-mısal. Teńsizlikler sistemasın sheshiń. $\begin{cases} x^2-9\ge 0 \\ 2x-8<0 \end{cases}$

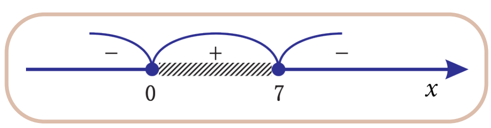
Sheshiliwi.

$$\begin{cases} x^2-9\ge 0 \\ 2x-8<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+3)(x-3)\ge 0 \\ x<4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in(-\infty;-3]\cup[3;\infty) \\ x<4 \end{cases} \Rightarrow x\in(-\infty;-3]\cup[3;4)$$

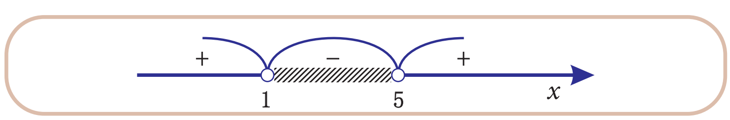
Juwabı. $x\in(-\infty;-3]\cup[3;4)$.

2-mısal. Teńsizlikler sistemasın sheshiń. $\begin{cases} 7x-x^2\ge 0 \\ x^2-6x+5<0 \end{cases}$

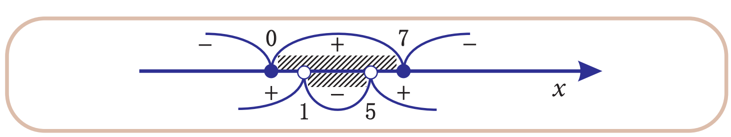
Sheshiliwi.
1-teńsizlikti sheshemiz: $x(7-x)\ge 0$.
$x=0$ hám $x=7$ nóllerin sanlar kósherinde belgileymiz hám payda bolǵan aralıqlarda belgilerdi anıqlaymız.



2-teńsizlikti sheshemiz: $x^2-6x+5<0$.
Nólleri $x=1$ hám $x=5$ ke teń. Olardı san kósherinde belgileymiz hám payda bolǵan aralıqlarda belgilerdi anıqlaymız.



Eki teńsizliktiń sheshimin bir san kósherinde belgileymiz hám eki teńsizlikti de qanaatlandıratuǵın aralıq sistemanıń sheshimi boladı.



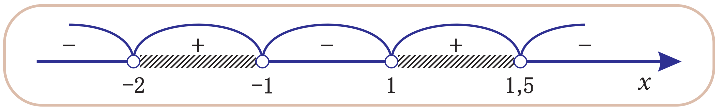
Juwabı: $x\in(1;5)$.

3-mısal. Teńsizlikler sistemasın sheshiń. $\begin{cases} \dfrac{(3-2x)(x+2)}{x^2-1}>0 \\ 1+2x\le\dfrac{3}{x} \end{cases}$

1-teńsizlikti sheshemiz:

$$\frac{(3-2x)(x+2)}{x^2-1}>0$$

$x=-2, x=-1, x=1$ hám $x=1,5$ nóllerin sanlar kósherinde belgileymiz hám payda bolǵan intervallarda belgilerdi anıqlaymız.

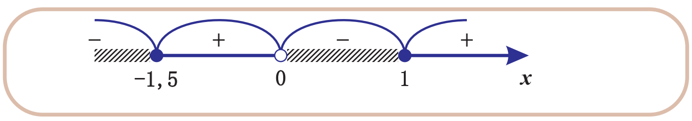


2-teńsizlikti sheshemiz: $1+2x\le\frac{3}{x}$.

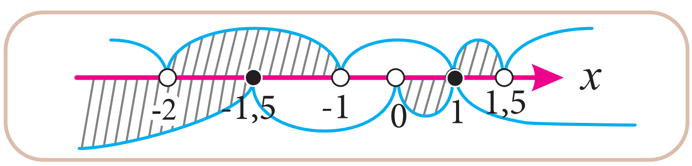
Barlıq ańlatpalardı teńsizliktiń shep tárepine ótkerip alamız hám ulıwma bólimge keltiremiz.

$$\frac{2x^2+x-3}{x}\le 0$$

Bólshektiń nólleri $x = 1$ hám $x = -1,5$ ke, anıqlanıw oblastı $x \neq 0$ bolatuǵın mánislerden ibarat. Olardı san kósherinde belgileymiz hám payda bolǵan intervallarda belgilerdi anıqlaymız.



Eki teńsizliktiń sheshimin bir sanlar kósherinde belgileymiz hám eki teńsizlikti de qanaatlandıratuǵın interval sistemanıń sheshimi boladı.



Juwabı: $x\in(-2;-1,5]$.

MÍSALLAR

1. Teńsizlikler sistemasınıń sheshimi bolǵan barlıq pútin sanlardı tabıń.

a) $\begin{cases}0,2x>-1\\ -\frac{x}{3}\ge 1\end{cases}$ b) $\begin{cases}\frac{x-1}{2}<\frac{x}{3}\\ \frac{x+1}{2}\ge\frac{x}{5}\end{cases}$ c) $\begin{cases}1-\frac{x}{4}>x\\ x-\frac{x-4}{5}>1\end{cases}$ d) $\begin{cases}x-\frac{x}{4}\ge 2\\ \frac{x-1}{2}+\frac{x-2}{3}>1\end{cases}$

2. Teńsizlikler sistemasın sheshiń.

a) $\begin{cases}\frac{x-1}{2}-\frac{x-2}{3}\ge\frac{x-3}{4}-x\\ 1-x>0,5x-4\end{cases}$ b) $\begin{cases}\frac{5x+7}{6}-\frac{3x}{4}<\frac{11x-7}{12}\\ \frac{1-3x}{2}-\frac{1-4x}{3}\ge\frac{x}{6}-1\end{cases}$

c) $\begin{cases}\frac{2x-1}{6}+\frac{x+2}{3}-\frac{x-8}{2}>x-1\\ 2-2x>0,5+0,5\end{cases}$ d) $\begin{cases}\frac{8x+1}{3}>\frac{4x+9}{2}-\frac{x-1}{3}\\ \frac{5x-2}{3}<\frac{2x+13}{2}-\frac{x+2}{3}\end{cases}$

3. Ańlatpanıń anıqlanıw oblastın tabıń.

a) $\sqrt{(x-3)(x-5)}+\sqrt{(1-x)(7-x)}$ b) $\sqrt{\dfrac{3x+2}{5-x}}+\sqrt{\dfrac{4-x}{7-2x}}$

c) $\sqrt{(x-2)(x-3)}+\sqrt{(5-x)(6-x)}$ d) $\sqrt{\dfrac{4x+1}{x+2}}+\sqrt{\dfrac{2x+1}{x-7}}$

4. Funkciyanıń anıqlanıw oblastın tabıń.

a) $y=\sqrt{12-3x}+\sqrt{x+2}$ b) $y=\dfrac{\sqrt{3-5x-2x^2}}{10x}$ c) $y=\sqrt{15-3x}+\sqrt{4+x}$ d) $y=\dfrac{\sqrt{-3x^2+12}}{1-5x}$

5. Teńsizlikler sistemasın sheshiń.

a) $\begin{cases}\dfrac{2x+1}{x-2}<1\\ \dfrac{3x+2}{2x-3}>2\end{cases}$ b) $\begin{cases}\dfrac{7-3x}{2-5x}\le 2\\ \dfrac{2x+1}{3x-3}>4\end{cases}$ c) $\begin{cases}\dfrac{3x-2}{x-2}<2\\ \dfrac{5x+1}{4x-5}\ge 3\end{cases}$ d) $\begin{cases}\dfrac{x+3}{3x-1}\le 1\\ \dfrac{2x+5}{x-4}\ge 2\end{cases}$

6. Teńsizlikler sistemasın sheshiń.

a) $\begin{cases}x^2\le 9\\ x>0\end{cases}$ b) $\begin{cases}x^2+y^2\le 9\\ y\le 1-x\end{cases}$ c) $\begin{cases}5x^2-2x+1\le 0\\ 2(x+3)-(x-8)<4\end{cases}$ d) $\begin{cases}-2x^2+3x-2<0\\ -3(6x-1)-2x<x\end{cases}$

e) $\begin{cases}x^2+y^2<9\\ x-y>0\end{cases}$ f) $\begin{cases}y\ge x^2-3\\ y-2x\le -2\end{cases}$ g) $\begin{cases}2x-4\ge 0\\ x^2-7x+12<0\end{cases}$ h) $\begin{cases}3x-1<0\\ x^2-3x+2\ge 0\end{cases}$

7. Teńsizlikler sistemasın qanaatlandırıwshı pútin sanlar qosındısın tabıń.

a) $\begin{cases}\dfrac{9-x^2}{x}\ge 0\\ 2x-1\ge 0\end{cases}$ b) $\begin{cases}\dfrac{(x+5)(x-1)}{x}\ge 0\\ 10x-1<0\end{cases}$ c) $\begin{cases}\dfrac{(x-2)(x+3)}{x(x+7)}<0\\ 20x\ge 20\end{cases}$ d) $\begin{cases}\dfrac{25-x^2}{x}\le 0\\ 5x-10\le 35\end{cases}$

8. Teńsizlikler sistemasın sheshiń.

a) $\begin{cases}3x^2-5x-2<0\\ 4-x^2>0\end{cases}$ b) $\begin{cases}3x^2+x+2>0\\ x^2<9\end{cases}$ c) $\begin{cases}2x^2+5x+10>0\\ x^2\ge 16\end{cases}$ d) $\begin{cases}-7x^2+5x-2>0\\ x^2\le 25\end{cases}$

e) $\begin{cases}2x^2+5x+10>0\\ x^2\ge 16\end{cases}$ f) $\begin{cases}-5x^2+x-1>0\\ x^2>81\end{cases}$ g) $\begin{cases}x^2-6x+8<0\\ x^2-36\ge 0\end{cases}$ h) $\begin{cases}x^2-16\ge 0\\ x^2-7x+12\ge 0\end{cases}$

i) $\begin{cases}x^2-5x+4\ge 0\\ 2x^2-5x+2\le 0\end{cases}$ j) $\begin{cases}x^2-9x+14<0\\ x^2-7x-8\le 0\end{cases}$ k) $\begin{cases}x^2+4x+3\le 0\\ 2x^2+5x<0\end{cases}$ l) $\begin{cases}\dfrac{(x-3)^2}{(x-3)(x+1)}\ge 0\\ (x-4)(x+4)\le 0\end{cases}$

IRRACIONAL TEŃLEMELER

$\sqrt{2x-5}=7$, $2\sqrt{x}+5=8$, $\sqrt[3]{x+3}=-1-x$ teńlemelerde belgisiz koren belgisi astında qatnasqan. Bul kórinisindegi teńlemeler ***irracional teńlemeler*** dep ataladı.

Usı $\sqrt{2+\sqrt{x-5}}=\sqrt{13-x}$, $\sqrt[5]{(x+1)^2}$ - $\sqrt[5]{(x-1)^2}=\sqrt[5]{x^2-1}$ teńlemeler de irracional teńlemeler esaplanadı.

Kóp jaǵdaylarda irracional teńlemeler óziniń nátiyjesi bolǵan racional teńlemelerge keltirilip sheshiledi. Bul jerde **tómendegi qádemler orınlanadı:**

- irracional teńlemeni racional teńlemege keltiriw ushın berilgen teńlemeniń eki tárepi bir yamasa birneshe márte qanday da bir natural dárejege kóteriledi;
- payda bolǵan racional teńlemeniń korenleri berilgen irracional teńleme ushın shet koren bolıwı múmkin. Sonıń ushın tekseriw orınlanadı.

Bunı tómendegi teorema tastıyıqlaydı.

Teorema. $f_1(x)=f_2(x)$ teńlemeniń eki tárepin kvadratqa kóteriwden payda bolǵan $f_1^2(x)=f_2^2(x)$ teńlemeniń korenleri $f_1(x)=f_2(x)$ hám $f_1(x)=-f_2(x)$ teńlemelerdiń korenlerinen ibarat boladı.

Bul teorema $f_1(x)=f_2(x)$ teńlemeden $f_1^2(x)=f_2^2(x)$ teńlemege ótiwde korenleri joǵalmastan, bálkim shet korenler payda bolıwı múmkinligin kórsetedi.

Irracional teńlemede tek bir koren belgisi qatnassa, bul koren belgisin teńlemeniń bir tárepinde qaldırıp, teńlemeniń qalǵan aǵzaların ekinshi tárepke ótkeremiz. Keyin bolsa teńlemeniń eki tárepin teńleme koren belgisinen qutılatuǵın etip, qanday da bir dárejege kóteremiz. Nátiyjede racional teńleme payda boladı. Bul payda bolǵan teńlemeni sheship, onıń korenlerin berilgen irracional teńlemege qoyıp tekserip kóriw kerek. Eger tabılǵan korenlerden birewi de berilgen teńlemeni qanaatlandırmasa, ol shet koren esaplanadı.

1-mısal. $\sqrt{2x-1}=5$ teńlemeni sheshiń.

Sheshiliwi. Teńlemeniń anıqlanıw oblastı $2x-1\geq 0 \;\Rightarrow\; x\geq\frac{1}{2}$

Teńlemeniń hár eki tárepin kvadratqa kóteremiz $\left(\sqrt{2x-1}\right)^2=5^2$,

$2x-1=25$ teńleme payda boladı. Bunnan $x=13$ ekeniligi kelip shıǵadı.

Tekseriw. $\sqrt{2\cdot 13-1}=\sqrt{25}=5$

Juwabı: $x=13$.

2-mısal. $\sqrt{x^2-x-2}=x-3$ teńlemeni sheshiń.

Sheshiliwi. $\sqrt{x^2-x-2}=x-3$ teńlemeniń eki tárepin kvadratqa kóteremiz: $x^2-x-2=x^2-6x+9 \Rightarrow 5x=11 \Rightarrow x=2,2$.

Tekseriw. $\sqrt{2,2^2-2,2-2}=2,2-3$, $\sqrt{0,64}=-0,8$; $0,8\neq-0,8$. Demek, $x=2,2$ shet koren, teńleme sheshimge iye emes.

Juwabı: Ø.

Irracional teńlemelerdi sheshiw:

I. $\sqrt{f(x)}=g(x)$ kórinisindegi teńlemeni oǵan teń kúshli bolǵan $\begin{cases} g(x)\geq 0 \\ f(x)=g^2(x) \end{cases}$ sistemaǵa keltirip sheshiw múmkin.

3-mısal. $\sqrt{3x^2-6x+16}=2x-1$ teńlemeni sheshiń.

Sheshiliwi.

$$\sqrt{3x^2-6x+16}=2x-1 \Rightarrow \begin{cases} 3x^2-6x+16=(2x-1)^2 \\ 2x-1\geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3x^2-6x+16=4x^2-4x+1 \\ 2x\geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+2x-15=0 \\ x\geq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$x^2+2x-15=0$ teńlemeni sheshemiz. $x_{1,2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+60}}{2}=\dfrac{-2\pm 8}{2}$, $\Rightarrow$ $x_1=3$, $x_2=-5$.

$x\geq\dfrac{1}{2}$ bolǵanlıǵı sebepli teńlemeniń sheshimi $x=3$.

Juwabı: $x=3$.

II. $\sqrt{f(x)}\cdot g(x)=0$ kórinisindegi teńleme tómendegishe sheshiledi.

1-qádem: $g(x)=0$ hám $f(x)>0$ 2-qádem: $f(x)=0$

4-mısal. Teńlemeni sheshiń. $(x^2-25)\sqrt{6-2x}=0$

Sheshiliwi.

1-qádem: $\begin{cases} x^2-25=0 \\ 6-2x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1,2}=\pm 5 \\ x<3 \end{cases} \Rightarrow x=-5$ 2-qádem: $6-2x=0 \Rightarrow x=3$

Juwabı: $x_1=-5$; $x_2=3$.

III. $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$ kórinisindegi teńleme tómendegishe sheshiledi:

$\begin{cases} f(x)=g(x), \\ f(x)\geq 0 \end{cases}$ yamasa $\begin{cases} f(x)=g(x), \\ g(x)\geq 0 \end{cases}$

5-mısal. Teńlemeni sheshiń. $\sqrt{x+1}=\sqrt{2x-3}$

Sheshiliwi.

$$\begin{cases} x+1=2x-3 \\ 2x-3\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ x\geq 1,5 \end{cases} \Rightarrow x=4$$

Juwabı: $x=4$.

6-mısal. Teńlemeni sheshiń. $\sqrt{x^2+4x}=\sqrt{14-x}$

Sheshiliwi.

Teńlemeniń eki tárepin kvadratqa kóteremiz. $\left(\sqrt{x^2+4x}\right)^2=\left(\sqrt{14-x}\right)^2$

$x^2+4x=14-x$ bunnan $x_1=2;\quad x_2=-7$ ekenligin tabamız.

Tekseriw bul sanlardıń koren bolıwın kórsetedi.

Juwabı: $x_1=2;\quad x_2=-7$.

IV. $\sqrt{f(x)}\cdot\sqrt{g(x)}=0$ kórinisindegi teńlemeni ózine teń kúshli eki sistemalarǵa keltirip sheshiw múmkin:

$$\begin{cases} f(x)=0 \\ g(x)>0 \end{cases} \text{ hám } \begin{cases} g(x)=0 \\ f(x)>0 \end{cases}$$

Bazı jaǵdaylarda teńlemeniń anıqlanıw oblastın biliw, teńlemeniń sheshimi bar yamasa joq ekenligin anıqlawǵa yamasa sheshimin tabıwǵa járdem beredi.

7-mısal. Teńlemeni sheshiń. $\sqrt{x^2-4}\cdot\sqrt{x+5}=0$

1) $\begin{cases} x^2-4=0 \\ x+5>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=2; x_2=-2 \\ x>-5 \end{cases} \Rightarrow x_1=2; x_2=-2$

2) $\begin{cases} x+5=0 \\ x^2-4>0 \end{cases} \Rightarrow x=-5$

Juwabı: $x_1=2;\ x_2=-2;\ x_3=-5$.

8-mısal. Teńlemeni sheshiń. $\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{x^2-9}=0$

Sheshiliwi.

Teńlemeniń anıqlanıw oblastın tabamız.

$\begin{cases} 1-x^2\ge 0, \\ x^2-9\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2\le 1, \\ x^2\ge 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1\le x\le 1, \\ x\le -3,\ x\ge 3 \end{cases} \Rightarrow \varnothing$

Teńlemeniń anıqlanıw oblastı bos kóplik bolǵanlıǵı sebepli, teńleme sheshimge iye emes.
Juwabı: Ø.

9-mısal. $\sqrt{3x+7}-\sqrt{x+1}=2$ teńlemeni sheshiń.

Sheshiliwi.

Teńlemeniń eki tárepin kvadratqa kóteremiz.

$$\left(\sqrt{3x+7}-\sqrt{x+1}\right)^2=2^2$$

$$3x+7-2\sqrt{(3x+7)(x+1)}+x+1=4$$

$$\sqrt{(3x+7)(x+1)}=2x+2$$

$\sqrt{(3x+7)(x+1)}=2x+2$ teńlemeniń eki tárepin kvadratqa kótersek,

$(3x+7)(x+1)=4x^2+8x+4$ teńleme payda boladı. Bunnan, $x^2-2x-3=0$ kelip shıǵadı.

Bul teńlemeniń korenleri $x_1=-1,\ x_2=3$.

Tekseriw.

$x=-1$ de, $\sqrt{3(-1)+7}-\sqrt{-1+1}=2-0=2$

$x=3$ te $\sqrt{3\cdot3+7}-\sqrt{3+1}=4-2=2$

eki koren de berilgen teńlemeni qanaatlandıradı.

Juwabı: $x_1=-1;\ x_2=3$.

10-mısal. Teńlemeni sheshiń. $\sqrt{3-2x}+\sqrt{x-7}=5$

Sheshiliwi.

Teńlemeniń anıqlanıw oblastın tabamız.

$$\begin{cases}3-2x\geq 0\\ x-7\geq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\leq 1{,}5\\ x\geq 7\end{cases}\Rightarrow x\in\varnothing$$

Anıqlanıw oblastı bos kóplikten ibarat bolǵanlıǵı ushın teńlemeniń koreni joq.

Juwabı: $\varnothing$.

11-mısal. $\sqrt[5]{25+\sqrt{x+13}}-2=0$ teńlemeni sheshiń.

Sheshiliwi.

$\sqrt[5]{25+\sqrt{x+13}}=2\ \Rightarrow\ 25+\sqrt{x+13}=2^5\ \Rightarrow\ \sqrt{x+13}=7$

$\sqrt{x+13}=7,\ x+13=7^2,\ x=49-13=36$

Tekseriw. $\sqrt[5]{25+\sqrt{36+13}}=\sqrt[5]{25+\sqrt{49}}=\sqrt[5]{25+7}=\sqrt[5]{32}=2$

Juwabı: $x=36$.

12-mısal. $\sqrt{\dfrac{3x+2}{x}}+\sqrt{\dfrac{x}{3x+2}}=\dfrac{5}{2}$ teńlemeni sheshiń.

Sheshiliwi.

1. $\sqrt{\dfrac{3x+2}{x}}=a$ belgilew kiritsek, $\sqrt{\dfrac{x}{3x+2}}=\dfrac{1}{a}$ bolıp, teńleme $a+\dfrac{1}{a}=\dfrac{5}{2}$ kóriniske keledi. Bul teńlemeni sheship, $a_1=2$ hám $a_2=\dfrac{1}{2}$ lerdi tabamız.

2. $\sqrt{\dfrac{3x+2}{x}}=a$ almastırıwdan paydalansaq $x_1=2$ hám $x_2=-\dfrac{8}{11}$ kelip shıǵadı. Demek, teńlemeniń korenleri $x_1=2$ hám $x_2=-\dfrac{8}{11}$.

Juwabı: $x_1=2$ hám $x_2=-\dfrac{8}{11}$.

13-mısal. $\sqrt[3]{x^3+4x^2+3x-3}=x+1$ teńlemeni sheshiń.

Sheshiliwi.

$\sqrt[3]{x^3+4x^2+3x-3}=x+1 \Rightarrow x^3+4x^2+3x-3=(x+1)^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^3+4x^2+3x-3=x^3+3x^2+3x+1 \Rightarrow x^2-4=0.$

$x^2=4$, $x_{1,2}=\pm 2$.

Tekseriw. $x=2$ de, $\sqrt[3]{2^3+4\cdot 2^2+3\cdot 2-3}=2+1$, $\sqrt[3]{27}=3$

$x=-2$ de, $\sqrt[3]{(-2)^3+4\cdot(-2)^2+3\cdot(-2)-3}=-2+1$, $\sqrt[3]{-1}=-1$.

Juwabı: $x=\pm 2$.

14-mısal. $\sqrt{x^2-3x+5}+x^2=3x+7$ teńlemeni sheshiń.

Sheshiliwi.

$\sqrt{x^2-3x+5}+x^2=3x+7 \Rightarrow \sqrt{x^2-3x+5}+x^2-3x+5-12=0$

$\sqrt{x^2-3x+5}=a$ belgilew kiritsek, $a^2+a-12=0$ kvadrat teńleme payda boladı.

$a^2+a-12=0$ teńlemeni sheshsek $a_1=3$; $a_2=-4$.

$a=3$ te $\sqrt{x^2-3x+5}=3$, $x^2-3x+5=9$, $x^2-3x-4=0$ teńlemeni sheshemiz: $x_1=4$; $x_1=-1$.

$a=-4\notin[0;\infty)$ bolǵanlıǵı ushın $\sqrt{x^2-3x+5}=-4$ teńleme sheshimge iye emes.

$x_1=4$; $x_1=-1$ teńlemeniń sheshimleri.

Juwabı: $x_1=4$; $x_2=-1$.

Teńlemeniń anıqlanıw oblastı dep, belgisizdiń sonday mánisleri kópligine aytıladı, bul mánislerde teńlemeniń shep hám oń tárepleri mániske iye boladı. Irracional teńlemeni anıqlanıw oblastın tawmastan da durıs sheshiw múmkin. Bunıń ushın tekseriw jeterli. Bazı teńlemelerde anıqlanıw oblastın tabıw paydalı.

Máselen,

1) $\sqrt{x^3+4x-1-8\sqrt{x^4-x}}=\sqrt{x^3-1}+2\sqrt{x}$ teńlemeniń anıqlanıw oblastın tabıw jeterlishe quramalı hám shárt emes (*kórsetpe: teńlemeniń oń hám shep tárepleri kvadratqa kóteriń*).

2) $\sqrt{x^2-x}+\sqrt{2-x-x^2}=\sqrt{x}-1$ teńlemeniń bolsa anıqlanıw oblastın tabıw jeterli bolıwın óz betinshe tekseriń.

V. $\sqrt{f^2(x)}=f(x)$ teńleme $f(x)\geq 0$ teńsizlikke teń kúshli,

$\sqrt{f^2(x)}=-f(x)$ teńleme bolsa $f(x)\leq 0$ teńsizlikke teń kúshli.

MÍSALLAR

Teńlemelerdi sheshiń.

1. $\sqrt{5x+2}=10$
2. $\sqrt{4x-6}=12$
3. $\sqrt{10-2x}=4$
4. $\sqrt{-12+7x}=x$
5. $\sqrt{x+12}+x=0$
6. $\sqrt{4+3x}=-x$
7. $x-3=\sqrt{9-x}$
8. $-x=\sqrt{15-2x}$
9. $x-6=\sqrt{8-x}$
10. $\sqrt{\dfrac{3x-17}{7}}=4$
11. $\sqrt{\dfrac{11}{6-4x}}=\dfrac{1}{2}$
12. $\sqrt{\dfrac{4}{5x-2}}=1$
13. $\sqrt{5x-3}=\sqrt{2x}$
14. $\sqrt{4-2x}=2\sqrt{x-1}$
15. $\sqrt{x^2-3x+1}=\sqrt{2x-5}$
16. $3x+2\sqrt{2x^2+3x-5}=12$
17. $3+\sqrt{3x^2-8x+14}=2x$
18. $\sqrt{15x^2-7x+8}=4x$
19. $\sqrt{x^2+x}=2-x$
20. $(x^2-25)\sqrt{6-2x}=0$
21. $(4-x^2)\sqrt{-1-3x}=0$
22. $(x^2-16)(x-3)(x-6)\sqrt{5-x}=0$
23. $(x^2-9x+14)\sqrt{x^2-9}=0$
24. $(x-4)\sqrt{3+2x-x^2}=0$
25. $\sqrt{5x+4}-\sqrt{x+3}=1$
26. $\sqrt{x-2}+\sqrt{1-x}=2$
27. $\sqrt{x-13}+\sqrt{10-x}=4$
28. $\sqrt{x}+\sqrt{x-2}=1-x$
29. $\sqrt{3x-2}+\sqrt{x-1}=3$
30. $2\sqrt{x-2}+2=\sqrt{3x+1}$
31. $\sqrt{x^2+77}-2\sqrt[4]{x^2+77}-3=0$
32. $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}=12$
33. $x-5\sqrt{x}+4=0$
34. $\sqrt{x^2+32}=2\sqrt[4]{x^2+32}+3$
35. $x^2+5x+4-5\sqrt{x^2+5x+28}=0$
36. $x^2+\sqrt{x^2+2x+8}=12-2x$
37. $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-1}=\sqrt{3x-5}$
38. $\sqrt{x+2}+\sqrt{x+5}=\sqrt{2x+11}$
39. $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}$
40. $\sqrt[3]{7-x}=\sqrt{3-x}$

IRRACIONAL TEŃLEMELER SISTEMASÍ

Irracional teńlemeler sistemasın sheshiwde túrli usıllar qollanıladı: kóbeytiwshilerge jiklew, belgilew, algebralıq qosıw, ózgeriwshilerdi almastırıw hám basqalar.

1-mısal. $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=8 \\ \sqrt{xy}=7 \end{cases}$ teńlemeler sistemasın sheshiń.

Sheshiliwi.

Teńlemeler sistemasınıń anıqlanıw oblastın tabamız: $x \ge 0$, $y \ge 0$.

$\sqrt{x}=a, \sqrt{y}=b$ belgilew kiritemiz.

$$\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=8 \\ \sqrt{xy}=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=8 \\ ab=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=8-b \\ (8-b)b=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=8-b \\ b^2-8b+7=0 \end{cases}$$

$b^2-8b+7=0$ teńlemeni sheshemiz, $b_{1,2}=\dfrac{8\pm\sqrt{64-28}}{2}=\dfrac{8\pm6}{2}, \Rightarrow b_1=7,\ b_2=1.$

$a_1=8-b_1 = 8-7=1, \Rightarrow a_1=1.$

$a_2=8-b_2 = 8-1=7, \Rightarrow a_2=7.$

$a_1=1,\ b_1=7$ de $\sqrt{x}=1,\ \sqrt{y}=7. \Rightarrow x=1,\ y=49.$

$a_2=7,\ b_2=1$ de $\sqrt{x}=7,\ \sqrt{y}=1. \Rightarrow x=49,\ y=1.$

Tekseriw: $x=1,\ y=49$ da

$$\begin{cases} \sqrt{1}+\sqrt{49}=8 \\ \sqrt{49}=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+7=8 \\ 7=7 \end{cases}$$

$x=49,\ y=1$ de

$$\begin{cases} \sqrt{49}+\sqrt{1}=8 \\ \sqrt{49}=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7+1=8 \\ 7=7 \end{cases}$$

Juwabı: (1; 49), (49; 1).

2-mısal. $\begin{cases} x-y=21 \\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=3 \end{cases}$ teńlemeler sistemasın sheshiń.

Sheshiliwi. 1) Teńlemeler sistemasınıń anıqlanıw oblastın tabamız: $x \ge 0$, $y \ge 0$.

2) $x-y=(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})$ qısqasha kóbeytiw formuladan paydalanıp sheshemiz.

$$\begin{cases} x-y=21 \\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)=21 \\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)=21 \\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$+\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=7 \\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=5 \\ \sqrt{y}=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=25 \\ y=4. \end{cases}$$

Tekseriw: $x=25,\ y=4$ te $\begin{cases} 25-4=21 \\ \sqrt{25}-\sqrt{4}=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 21=21 \\ 5-2=3 \end{cases}$

Juwabı: $(25;\ 4)$.

3-mısal. $\begin{cases} x+y+\sqrt{x+y}=20 \\ x^2+y^2=136 \end{cases}$ teńlemeler sistemasın sheshiń.

Sheshiliwi.

Dáslep sistemadağı birinshi teńlemeni sheship alamız.

$x+y+\sqrt{x+y}=20$, $\sqrt{x+y}=a$ belgilew kiritsek, $a^2+a-20=0$ kvadrat teńleme payda boladı

$\sqrt{x+y}\ge 0$ bolǵanlıǵı ushın $a\ge 0$ boladı. $a\in[0;\infty)$.

$a^2+a-20=0$ teńlemeni sheshemiz, $a_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+80}}{2}=\dfrac{-1\pm 9}{2}$, $a_1=4,\ a_2=-5$.

$4\in[0;\infty)$, $-5\notin[0;\infty)$. Demek, $\sqrt{x+y}=4$. $x+y=16$.

$$\begin{cases} x+y+\sqrt{x+y}=20 \\ x^2+y^2=136 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=16 \\ x^2+y^2=136 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=16-y \\ (16-y)^2+y^2=136 \end{cases}$$

$(16-y)^2+y^2=136 \Rightarrow y^2-16y+60=0$ teńlemeni sheshemiz.

$$y_{1,2}=\frac{16\pm\sqrt{256-240}}{2}=\frac{16\pm 4}{2}, \Rightarrow y_1=10,\ y_2=6.$$

$y_1=10,\ y_2=6$ bolsa, $x+y=16$ dan $x_1=6,\ x_2=10$ kelip shıǵadı. (10; 6) hám (6; 10) sistemanıń sheshimi.

Tekseriw: $\begin{cases} 10+6+\sqrt{10+6}=16+4=20 \\ 10^2+6^2=100+36=136 \end{cases}$

Juwabı: (10; 6), (6; 10).

4-mısal. $\begin{cases} x+y=28 \\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=4 \end{cases}$ teńlemeler sistemasın sheshiń.

Sheshiliwi.

Teńlemeler sistemasınıń anıqlanıw oblastın tabamız: $x \in R, y \in R$.

$\sqrt[3]{x} = a,\ \sqrt[3]{y} = b$ belgilew kiritemiz: $x = a^3,\ y = b^3$.

$$\begin{cases} x + y = 28 \\ \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 + b^3 = 28 \\ a + b = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a+b)(a^2 - ab + b^2) = 28 \\ a + b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4(a^2 - ab + b^2) = 28 \\ a + b = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 - ab + b^2 = 7 \\ a + b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a+b)^2 - 3ab = 7 \\ a + b = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4^2 - 3ab = 7 \\ a + b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3ab = 9 \\ a + b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab = 3 \\ a + b = 4 \end{cases}$$

$\begin{cases} ab = 3 \\ a + b = 4 \end{cases}$ teńlemeler sistemasınan $a_1 = 1,\ b_1 = 3$ hám $a_2 = 3,\ b_2 = 1$ kelip shıǵadı.

$\sqrt[3]{x} = a,\ \sqrt[3]{y} = b,\ a_1 = 1,\ b_1 = 3$ te $\sqrt[3]{x} = 1,\ \sqrt[3]{y} = 3 \Rightarrow x = 1, y = 27$.

$a_2 = 3,\ b_2 = 1$ de $\sqrt[3]{x} = 3,\ \sqrt[3]{y} = 1 \Rightarrow x = 27, y = 1$.

Tekseriw: $x = 1, y = 27$ yamasa $x = 27, y = 1$ de

$$\begin{cases} 1 + 27 = 28 \\ \sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{27} = 1 + 3 = 4 \end{cases}$$

Juwabı: (1; 27), (27; 1).

5-mısal. $\begin{cases} 3x - \sqrt{y + 2x} = 1 \\ y + 3x = 5 \end{cases}$ teńlemeler sistemasın sheshiń.

Sheshiliwi. 1) $\begin{cases} 3x - \sqrt{y + 2x} = 1 \\ y + 3x = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - \sqrt{y + 2x} = 1 \\ y = 5 - 3x \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x - \sqrt{5 - 3x + 2x} = 1 \\ y = 5 - 3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{5 - x} = 3x - 1 \\ y = 5 - 3x \end{cases}$$

2) $\sqrt{5 - x} = 3x - 1$ teńlemeni sheshemiz. $\sqrt{5 - x} \ge 0$ bolǵanlıǵı ushın

$3x - 1 \ge 0,\ \Rightarrow\ 3x \ge 1,\ \Rightarrow\ x \ge \frac{1}{3},\ \Rightarrow\ x \in \left[\frac{1}{3}; \infty\right)$.

$\sqrt{5 - x} = 3x - 1$ teńliktiń eki tárepin kvadratqa kótersek,

$5-x=(3x-1)^2$, $\Rightarrow$ $5-x=9x^2-6x+1$, $\Rightarrow$ $9x^2-5x-4=0$ kvadrat teńleme payda boladı. Teńlemeniń korenlerin tabamız:

$$x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25+144}}{18}=\frac{5\pm13}{18}, \Rightarrow x_1=1,\ x_2=-\frac{4}{9}.$$

$x\in\left[\frac{1}{3};\infty\right)$ bolǵanlıǵı ushın $1\in\left[\frac{1}{3};\infty\right)$, $-\frac{4}{9}\notin\left[\frac{1}{3};\infty\right)$.

$x=1$ de $y=5-3x=5-3=2$, $y=2$. (1; 2) sistemanıń sheshimi.

Tekseriw: (1; 2) da $\begin{cases}3\cdot1-\sqrt{2+2\cdot1}=3-\sqrt{4}=3-2=1\\ 2+3\cdot1=5\end{cases}$

Juwabı: (1; 2).

6-mısal. $\begin{cases}\sqrt{x-2y+2}=2,\\ \sqrt{y-2x+11}=x-5\end{cases}$ teńlemeler sistemasın sheshiń.

Sheshiliwi.

$\sqrt{y-2x+11}\geq0$ bolǵanlıǵı ushın $x-5\geq0$, $x\geq5$. $x\in[5;\infty)$.

$$\begin{cases}\sqrt{x-2y+2}=2,\\ \sqrt{y-2x+11}=x-5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{(x-2y+2)^2}=4,\\ \sqrt{(y-2x+11)^2}=(x-5)^2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x-2y+2=4,\\ y-2x+11=x^2-10x+25\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-2y=2,\\ y=x^2-8x+14\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x-2(x^2-8x+14)=2,\\ y=x^2-8x+14\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x^2-17x+30=0,\\ y=x^2-8x+14\end{cases}$$

$2x^2-17x+30=0$ teńlemeni sheshemiz, $x_{1,2}=\frac{17\pm\sqrt{289-240}}{4}=\frac{17\pm7}{4}$,

$x_1=6$, $x_2=\frac{5}{2}$.

$x\in[5;\infty)$ shártke tiykarlanıp $6\in[5;\infty)$, $\frac{5}{2}\notin[5;\infty)$.

$x_1=6$ da $y_1=6^2-8\cdot6+14=36-48+14=2$. $\Rightarrow$ $y_1=2$

Tekseriw: (6; 2) da $\begin{cases}\sqrt{6-2\cdot2+2}=\sqrt{4}=2,\\ \sqrt{2-2\cdot6+11}=6-5=1\end{cases}$

Juwabı: (6; 2).

7-mısal. $\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{2x+y+2}=7,\\ 3x+2y=23\end{cases}$ teńlemeler sistemasın sheshiń.

Sheshiliwi.

$\sqrt{x+y}=a$ hám $\sqrt{2x+y+2}=b$ belgilew kirgizsek, $a\geq 0$, $b\geq 0$ boladı.

$x+y=a^2$, $2x+y+2=b^2$

$$+\begin{cases} x+y=a^2 \\ 2x+y+2=b^2 \end{cases} \Rightarrow 3x+2y+2=a^2+b^2.$$

$3x+2y=23$ ekenligin esapqa alsaq, $3x+2y+2=a^2+b^2 \Rightarrow 25=a^2+b^2$.

$$\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{2x+y+2}=7 \\ 3x+2y=23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=7 \\ a^2+b^2=25 \end{cases} \Rightarrow a_1=3, b_1=4.\ a_2=4, b_2=3.$$

$$a_1=3, b_1=4 \text{ te } \begin{cases} \sqrt{x+y}=3, \\ \sqrt{2x+y+2}=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=9, \\ 2x+y+2=16 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y=9 \\ 2x+y=14 \end{cases} \Rightarrow x=5, y=4.$$

$$a_2=4, b_2=3 \text{ te } \begin{cases} \sqrt{x+y}=4, \\ \sqrt{2x+y+2}=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=16, \\ 2x+y+2=9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y=16 \\ 2x+y=7 \end{cases} \Rightarrow x=-9,\ y=25.$$

Tekseriw: $(5;\ 4)$ da $\begin{cases} \sqrt{5+4}+\sqrt{2\cdot 5+4+2}=\sqrt{9}+\sqrt{16}=3+4=7, \\ 3\cdot 5+2\cdot 4=15+8=23 \end{cases}$

$(-9;\ 25)$ da $\begin{cases} \sqrt{(-9)+25}+\sqrt{2\cdot(-9)+25+2}=\sqrt{16}+\sqrt{9}=4+3=7, \\ 3\cdot(-9)+2\cdot 25=-27+50=23 \end{cases}$

Juwabı: $(5;\ 4), (-9;\ 25)$.

MÍSALLAR

Teńlemeler sistemasın sheshiń.

1. a) $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=4 \\ 2\sqrt{x}+3\sqrt{y}=18 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3\sqrt{x}-\sqrt{y}=8 \\ \sqrt{x}+2\sqrt{y}=19 \end{cases}$

2. a) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=3 \\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=1 \\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3 \end{cases}$

3. a) $\begin{cases} 2\sqrt[3]{x}+3\sqrt[3]{y}=-1 \\ 2\sqrt[3]{x}-3\sqrt[3]{y}=-7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{y}=3 \\ 3\sqrt[3]{x}-2\sqrt[3]{y}=-9 \end{cases}$

4. a) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=26 \\ \sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}=6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=5 \\ \sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}=1 \end{cases}$

5. a) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=9 \\ \sqrt[6]{x}+\sqrt[6]{y}=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=7 \\ \sqrt[6]{x}-\sqrt[6]{y}=1 \end{cases}$

6. a) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=8 \\ \sqrt{x}\sqrt{y}=15 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=7 \\ \sqrt{x}\sqrt{y}=12 \end{cases}$

7. a) $\begin{cases} \sqrt{x}+3\sqrt{y}=10 \\ \sqrt{x}\sqrt{y}=8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2\sqrt{x}-\sqrt{y}=5 \\ \sqrt{x}\sqrt{y}=3 \end{cases}$

8. a) $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=4 \\ x-y=32 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=8 \\ x-y=16 \end{cases}$

9. a) $\begin{cases} \sqrt{6+x}-3\sqrt{3y+4}=-10 \\ 4\sqrt{3y+4}-\sqrt{6+x}=14 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2\sqrt{x-2}+\sqrt{5y+1}=8 \\ 3\sqrt{x-2}-2\sqrt{5y+1}=-2 \end{cases}$

10. a) $\begin{cases} \sqrt[4]{x+y}-\sqrt[4]{x-y}=2 \\ \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt[4]{x+y}+\sqrt[4]{x-y}=4 \\ \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=10 \end{cases}$

11. a) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=5 \\ x\cdot y=216 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=3\dfrac{3}{4} \\ x\cdot y=1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=-3 \\ x\cdot y=8 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=2 \\ x\cdot y=27 \end{cases}$

12. a) $\begin{cases} y\sqrt{x}+x\sqrt{y}=30 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y\sqrt{x}-x\sqrt{y}=-12 \\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=1 \end{cases}$

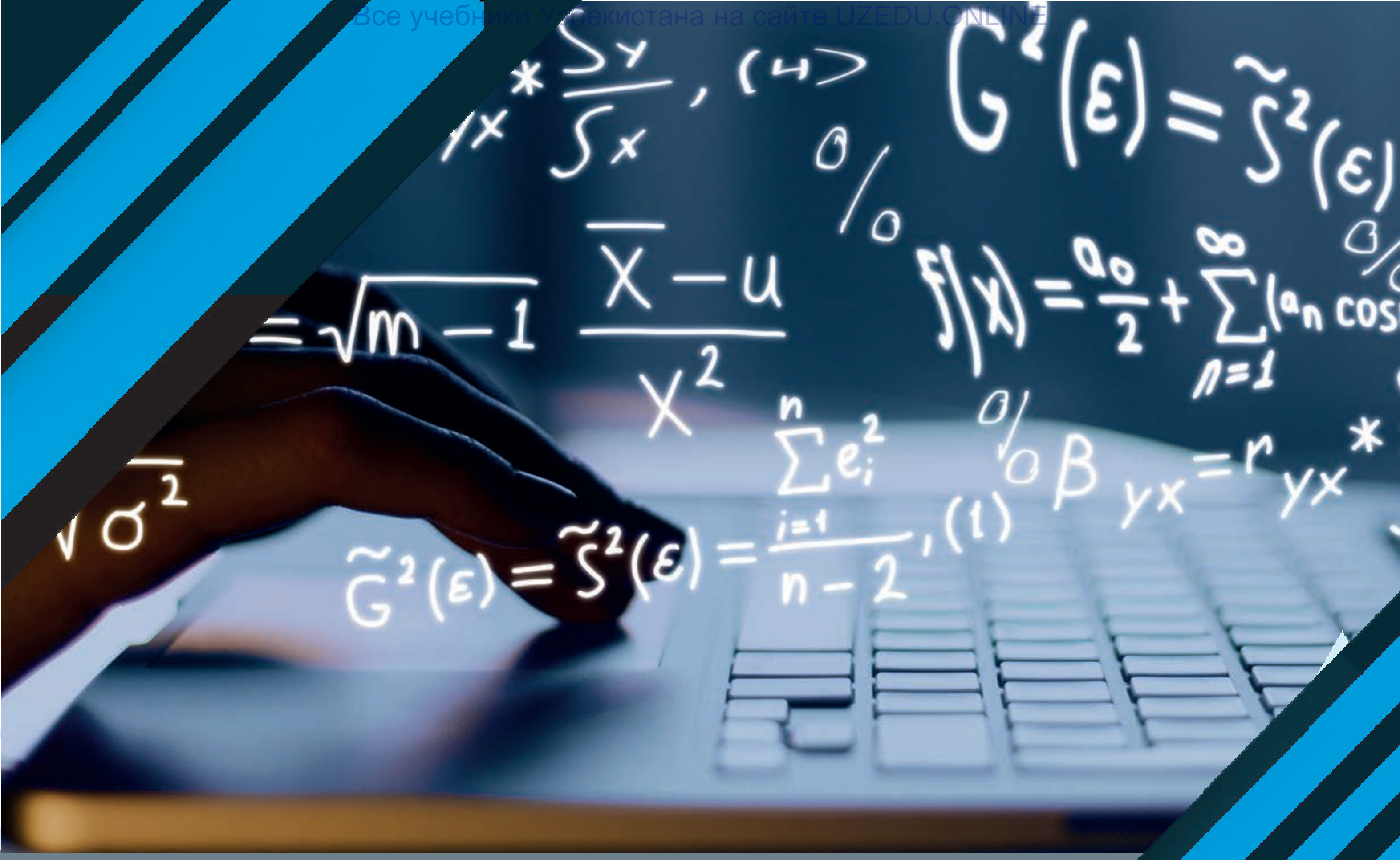
13. a) $\begin{cases} y + x - \sqrt{xy} = 7 \\ xy = 9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y + \sqrt{xy} = 20 \\ xy = 64 \end{cases}$

14. a) $\begin{cases} \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 3 \\ \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2} = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = -1 \\ \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2} = 7 \end{cases}$

15. a) $\begin{cases} 3\sqrt{\dfrac{x}{y}} + 2\sqrt{\dfrac{y}{x}} = 5 \\ 4\sqrt{x} + \sqrt{y} = 10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4\sqrt{\dfrac{x}{y}} + 2\sqrt{\dfrac{y}{x}} = 9 \\ 7\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 48 \end{cases}$

16. a) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}} + \sqrt{\dfrac{y}{x}} = \dfrac{10}{3} \\ y^2 + x^2 = 82 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}} + \sqrt{\dfrac{y}{x}} = \dfrac{5}{2} \\ y^2 - x^2 = 15 \end{cases}$

17. a) $\begin{cases} 4y + 5x - \sqrt{xy} = 79 \\ 5x - 4y + \sqrt{xy} = 81 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 9y + 2x - \sqrt{xy} = 71 \\ 2x - 9y + \sqrt{xy} = 73 \end{cases}$



3-BAP. KÓRSETKISHLI HÁM LOGARIFMLIK FUNKCIYALAR

- KÓRSETKISHLI FUNKCIYA
- KÓRSETKISHLI TEŃLEMELER
- KÓRSETKISHLI TEŃSIZLIKLER
- LOGARIFM TÚSINIGI. LOGARIFMLIK FUNKCIYA
- LOGARIFMLIK AŃLATPALARDÍ BIRDEY ALMASTÍRÍW
- LOGARIFMLIK TEŃLEMELER
- KÓRSETKISHLI HÁM LOGARIFMLIK TEŃLEMELER SISTEMASÍ
- LOGARIFMLIK TEŃSIZLIKLER
- KÓRSETKISHLI HÁM LOGARIFMLIK FUNKCIYALARDÍŃ QOLLANÍLÍWÍ

KÓRSETKISHLI FUNKCIYA

Keyingi waqıtlarda jer betinen shań-tozań kóteriliwi tez-tez gúzetilmekte. Bul jerde shań muǵdarı joqarıǵa kóterilgen sayın kemeyip barıwı dálillengen. Shań muǵdarınıń biyiklikke baylanıslılıǵı kórsetkishli funkciya arqalı ańlatıladı eken. Onnan tısqarı, viruslardıń kóbeyiwi, radioaktivlik zatlardıń ıdırawı sıyaqlı hádiyseler de kórsetkishli funkciyalar arqalı sıpatlanadı.

Máselen, shań muǵdarı y tıń x biyiklikke baylanıslılıǵı $y = p \cdot e^{-qx}$ kórinisindegi funkciya arqalı ańlatıladı eken. Bul jerde p, q sanlardı ***parametrler*** dep atalıwshı ólshemler, e bolsa ***Eyler sanı*** dep atalıwshı irracional san. Onıń shamalap mánisi $2,71$ ge teń: ($e \approx 2,71$.)

Kórsetkishli funkciyalardı úyreniw ushın tómendegi qásiyetlerdi biliw talap etiledi:

1) $a^0 = 1, \quad a \neq 0$; 2) $a^1 = a$; 3) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$;

4) $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$; 5) $\left(a^n\right)^m = a^{nm}$; 6) $(ab)^n = a^n \cdot b^n$;

7) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}, \quad b \neq 0$ 8) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \quad a > 0,\ n \in N,\ m \in Z$

Bólshek kórsetkishli $a^{\frac{m}{n}}$, yamasa haqıyqıy kórsetkishli a^p kórinisindegi dárejelerdi de qaraw múmkin. Bul jerde kórsetkishtiń ayırım mánislerinde a^p dáreje mániske iye bolmay qalıwı múmkin. Máselen, $(-3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-3}$ ańlatpa haqıyqıy sanlar kópliginde mániske iye bolmaydı. Onnan tısqarı, $0^{-3} = \dfrac{1}{0^3} = \dfrac{1}{0}$ ańlatpa da anıqlanbaǵan. Bunday jaǵdaylardıń aldın alıw maqsetinde haqıyqıy p kórsetkishli a^p dáreje ushın $a > 0$ teńsizlik orınlanıwı talap etiledi. Hárqanday p haqıyqıy san ushın $1^p = 1$ ekenliginen tiykarı 1 bolǵan dárejelerdi úyreniw arqalı heshqanday jańa maǵlıwmatqa erisilmeydi.

Demek, joqarıda bayan etilgenler tiykarında tómendegi juwmaqqa keliw múmkin.

Juwmaq. Qálegen p haqıyqıy kórsetkishli a^p dáreje anıq mánis qabıl etiwi ushın a tiykar $a > 0$ hám $a \neq 1$ shártlerdi orınlawı talap etiledi.

$a > 0$ hám $a \neq 1$ shártlerdi qanaatlandıratuǵın a haqıyqıy sandı qarayıq. Usı $\boldsymbol{y = a^x}$ kórinisindegi funkciya ***kórsetkishli funkciya*** dep ataladı (dáreje kórsetkishi – ózgeriwshi muǵdar).

$y = a^x$ kórsetkishli funkciya tómendegi qásiyetlerge iye:

- $\boldsymbol{y = a^x}$ kórsetkishli funkciyanıń anıqlanıw oblastı barlıq haqıyqıy sanlar kópliginen ibarat:

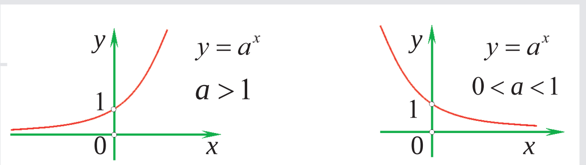
$$D(y) \in (-\infty; +\infty)$$

- $\boldsymbol{y = a^x}$ kórsetkishli funkciyanıń mánisler kópligi barlıq oń haqıyqıy sanlar kópliginen ibarat:

$$E(y) \in (0; +\infty)$$

- $\boldsymbol{y = a^x}$ kórsetkishli funkciya Ox kósheri menen kesilispeydi.

1-súwret



Kórsetkishli funkciyanıń grafigi

- $\boldsymbol{y = a^x}$ kórsetkishli funkciya Oy kósheri menen bolsa $(0,1)$ noqatta kesilisedi.
- Kórsetkishli funkciya periodlı bolmaydı, jup ta emes, taq ta emes.
- a tiykardıń $0<a<1$ teńsizliklerdi qanaatlandırıwshı mánislerinde $\boldsymbol{y = a^x}$ funkciya kemeyedi: Kemeyiw aralıǵı $(-\infty; +\infty)$ ten ibarat.
- a tiykardıń $a > 1$ teńsizlikti qanaatlandırıwshı mánislerinde $\boldsymbol{y = a^x}$ funkciya ósedi: ósiw aralıǵı $(-\infty; +\infty)$ ten ibarat.

1-mısal. $(0,1)^{\sqrt{2}}$ ni 1 menen salıstırıń.

Sheshiliwi.

$1=(0,1)^0$ hám $y=(0,1)^x$ funkciya $x \in R$ de kemeyiwshi bolǵanlıǵı ushın

$$\sqrt{2}>0 \Rightarrow (0,1)^{\sqrt{2}} < (0,1)^0 \Rightarrow (0,1)^{\sqrt{2}} < 1$$

Juwabı: $(0,1)^{\sqrt{2}} < 1$.

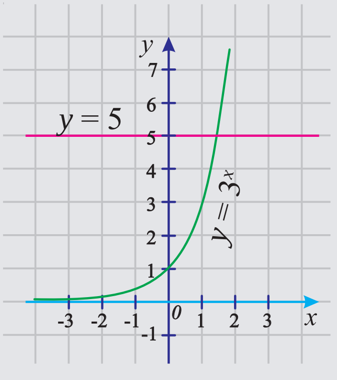
2-mısal. Usı $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y=e^x$, $y=2,6^x$ funkciyalardan qaysıları kemeyiwshi?

Sheshiliwi.

Berilgen úsh funkciyalardan tek ǵana birinshi funkciyada qatnasıwshı kórsetkishli ańlatpanıń tiykarı 0 hám 1 aralıǵına tiyisli, sonıń ushın birinshi funkciya kemeyiwshi funkciya boladı.

Juwabı: $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

2-súwret



3-mısal. $3^x=5$ teńleme bir korenge iye ekenligin kórsetiń.

Sheshiliwi.

$y=3^x$ hám $y=5$ funkciyalardıń grafiklerin bir koordinata tegisliginde sızamız (2-*súwret*).

Sızılmadan kórinip turǵanınday, grafikler tek ǵana bir noqatta kesilisedi. Demek, teńleme bir korenge iye eken.

MÍSALLAR

1. Funkciya qásiyetlerin aytıń hám onıń grafigin sızıń.

a) $y=3^x$ b) $y=0,4^x$ c) $y=0,8^x$ d) $y=1,5^x$

2. Funkciyanıń mánisler oblastın tabıń.

a) $y=3^x$ b) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x-1$;

c) $y=-\left(\frac{1}{3}\right)^x$ d) $y=4^x+2$

3. Sanlardı salıstırıń.

a) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$ hám 1 b) $3,2^{-\sqrt{2}}$ hám 1 c) $0,7^{\frac{\sqrt{5}}{9}}$ hám $0,7^{\frac{\sqrt{5}}{9}}$ d) $5^{-\sqrt{13}}$ hám $\left(\frac{1}{5}\right)^{2,1}$

4. Esaplań.

a) $((\sqrt{3})^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}$ b) $3^{1-2\sqrt{3}}\cdot 9^{1+\sqrt{3}}$ c) $64^{\sqrt{2}}:64^{3\sqrt{2}}$ d) $(5^{\sqrt[5]{16}})^{\sqrt[5]{2}}$

5. Ańlatpanı ápiwayılastırıń .

a) $(c^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}$ b) $b^{\sqrt{2}}\cdot(\frac{1}{b})^{\sqrt{2}-1}$ c) $x^{\pi}\cdot\sqrt[4]{x^2:6x^{4\pi}}$ d) $y^{\sqrt{2}}\cdot y^{1,5}:6\sqrt[3]{y^{3\sqrt{2}}}$

6. Usı $y=\left(\frac{5}{9}\right)^x$, $y=\pi^x$, $y=1,7^x$ funkciyalardan qaysıları ósiwshi?

7. Tómendegi funkciyalar grafiklerin sxema kórinisinde súwretleń.

a) $y=2^{|x|}$ b) $y=-2^{|x|+1}$ c) $y=2^{-|x|}-1$

8. Ańlatpanı ápiwayılastırıń .

a) $\dfrac{a^{2\sqrt{2}}-b^{2\sqrt{3}}}{(a^{\sqrt{2}}-b^{\sqrt{3}})^2}+1$ b) $\dfrac{\left(a^{2\sqrt{3}}-1\right)\left(a^{2\sqrt{3}}+a^{\sqrt{3}}+a^{3\sqrt{3}}\right)}{a^{4\sqrt{3}}-a^{\sqrt{3}}}$

c) $\dfrac{a^{\sqrt{5}}-b^{\sqrt{7}}}{a^{\frac{2\sqrt{5}}{3}}+a^{\frac{\sqrt{5}}{3}}b^{\frac{\sqrt{7}}{3}}+b^{\frac{2\sqrt{7}}{3}}}$ d) $\sqrt{\left(x^{\pi}+y^{\pi}\right)^2-\left(4^{\frac{1}{\pi}}xy\right)^{\pi}}$

9. Eki funkciyadan qaysı biri ósiwshi, qaysı biri kemeyiwshi ekenligin anıqlań.

a) $y=\left(\sqrt{2}\right)^x$, $y=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$ b) $y=\left(\frac{\pi}{3}\right)^x$, $y=\left(\frac{3}{\pi}\right)^x$

c) $y=\left(\sqrt{5}-2\right)^x$, $y=\dfrac{1}{\left(\sqrt{5}-2\right)^x}$ d) $y=\left(3-\sqrt{7}\right)^x$, $y=\dfrac{1}{\left(3-\sqrt{7}\right)^x}$

10. Funkciyanıń mánisler oblastın tabıń.

a) $y=3^{x+1}-3$ b) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+2$ c) $y=\left|2^x-2\right|$ d) $y=4^{|x|}$

11. Funkciyanıń eń úlken hám eń kishi mánisin tabıń.

a) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{sinx}$ b) $y=4^{cosx}$ c) $y=5+3^{|cosx|}$ d) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{|sinx|}-2$

12. a nıń belgisin anıqlań.

a) $3^a=10$ b) $10^a=4$ c) $0,3^a=0,1$ d) $0,7^a=5$

13. Ańlatpanıń mánisin tabıń.

a) $6^{x-1}=12$ bolsa, $6^x=?$ b) $5^{x-3}=4$ bolsa, $5^{4-x}=?$ c) $12^{x+5}=6$ bolsa, $12^{-3-x}=?$

14. Qaysı jağdaylarda $3^{x_1} > 3^{x_2}$ teńsizlik orınlı boladı?

15. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ funkciyanıń x natural san bolğandağı mánisleri izbe-izligi geometriyalıq progressiya payda etiwin dálilleń.

Kórsetkishli funkciyanıń kúndelikli turmısta qollanılıwı

Qaynap atırğan sháynek janıp turğan ottan alınsa, ol aldın tez suwıydı, soń bolsa suwıw tezligi páseyedi. Gáp sonda, suwıw tezligi sháynek temperaturası hám sırtqı ortalıq temperaturasınıń ayırmasına proporcional. Bul ayırma qansha kemeyse, sháynek sonsha ásten suwıydı. Sháynektiń dáslepki temperaturası T_0, hawa temperaturası T_1 bolsa, ol jağdayda t sekundtan keyin sháynektiń temperaturası $T = (T_1 - T_0)e^{-kt} + T_1$ formula menen anıqlanadı.

Fizikada qollanılıwı.

Hawasız boslıqta (vakuum) deneniń erkin túsiwinde onıń tezligi artıp baradı. Hawada da denelerdiń túsiw tezligi artıp baradı, biraq belgili bir mánisten artıp ketpeydi. Eger hawanıń qarsılıq kúshi parashyutshınıń túsiw tezligine tuwrı proporcional bolsa, yağnıy $F = kv$ bolsa, ol jağdayda t sekundtan keyin onıń túsiw tezligi $v = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right)$ ge teń boladı.

Bul jerde m parashyutshınıń tezligi.

Xalıq sanınıń ósiwi.

Mámlekette xalıq sanınıń belgili waqıt aralığında ózgeriwi $N = N_0e^{kt}$ formula menen kórsetiledi. Bul jerde $t = 0$ waqıttağı xalıq sanı N_0, t waqıttağı xalıq sanı N, k – lar bolsa turaqlılar.

Biologiyada qollanılıwı.

Organikalıq álemniń kóbeyiw nızamı: organizm ushın qolaylı ortalıqta (jırtqıshlar sanı kemligi, azıq-awqat muğdarınıń jeterli bolıwı) tiri organizmler kórsetkishli funkciya nızamı boyınsha kóbeyedi. Máselen, bir úy shıbınınan jaz dawamında $8 \cdot 10^{14}$ muğdarında jańa áwlad payda bolatuğın edi. Olardıń awırlığı birneshe million tonnanı payda etetuğın edi (eki úy shıbınınıń násili bolsa planetamız massasınan artatuğın edi), olar júdá úlken maydandı iyelep alar edi. Egerde olardı shınjır qılıp jaylastırsa, ol jağdayda bul shınjır uzınlığı jerden quyashqa shekem bolğan aralıqtan da úlken bolar edi. Biraq tábiyatta shıbınnıń tábiyiy "dushpanı" esaplanğan kóplep haywanlar hám ósimlikler bar ekenligi shıbınlardıń sanın bul dárejede artıwına jol qoymaydı.

KÓRSETKISHLI TEŃLEMELER

Kórsetkishli teńlemeler

Dáreje kórsetkishinde belgisiz qatnasqan teńleme ***kórsetkishli teńleme*** dep ataladı. $3^x = 9$, $4^x - 9 = 7$, $2^{x+1} = 2^{8-2x}$ teńlemeler kórsetkishli teńlemege mısal bola aladı.

Belgisizdiń berilgen kórsetkishli teńlemeni durıs sanlı teńlikke aylandıratuǵın mánisi kórsetkishli teńlemeniń ***koreni*** dep ataladı.

Kórsetkishli teńlemeler hám olardı sheshiw

Usı x belgisiz $a^x = a^p$ kórsetkishli teńlemeniń koreni $x = p$ boladı.

Kórsetkishli teńlemelerdi sheshiwde usı qaǵıyda paydalanıladı:

$a > 0$, $a \neq 1$ bolǵanda $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ teńlemeniń korenleri $f(x) = g(x)$ teńlemeniń korenlerinen ibarat boladı.

1-mısal. Teńlemeni sheshiń. $2^{x-1} = 16$

Sheshiliwi.

Teńlemeni tómendegi kóriniste jazıp alamız: $2^{x-1} = 2^4 \Rightarrow x - 1 = 4 \Rightarrow x = 5$

Juwabı: $x = 5$

2-mısal. Teńlemeni sheshiń. $3^{2x} \cdot 3^{x^2} = 3^{15}$

Sheshiliwi.

Teńlemeni tómendegi kóriniste jazıp alamız: $3^{2x+x^2} = 3^{15} \Rightarrow 2x + x^2 = 15$.

$x^2 + 2x - 15 = 0$ kvadrat teńlemeniń korenleri $x_1 = -5; x_2 = 3$ boladı.

Juwabı: $x_1 = -5$; $x_2 = 3$

3-mısal. Teńlemeni sheshiń. $\left(5^{x+1}\right)^x = \left(\dfrac{5^x}{5^{24}}\right)^{-1}$

Sheshiliwi.

Teńlemeni tómendegi kóriniste jazıp alamız: $5^{x^2+x} = 5^{24-x} \Rightarrow x^2 + x = 24 - x$

$x^2 + 2x - 24 = 0$ kvadrat teńleme korenleri $x_1 = -6; x_2 = 4$ boladı.

Juwabı: $x_1 = -6; x_2 = 4$.

4-mısal. $6^{x^2} + 36 = 2^{1-x^2} \cdot 12^{x^2}$ teńlemeniń korenleri kóbeymesin tabıń.

Sheshiliwi.

$12^{x^2} = (6 \cdot 2)^{x^2} = 6^{x^2} \cdot 2^{x^2}$ ekenliginen paydalanıp teńlemeni tómendegi kóriniste jazıp alamız:

$$6^{x^2}+36=2^{1-x^2}\cdot 6^{x^2}\cdot 2^{x^2}\Rightarrow 6^{x^2}+36=2^{1-x^2+x^2}\cdot 6^{x^2}\Rightarrow 6^{x^2}+36=2\cdot 6^{x^2}\Rightarrow 6^{x^2}=36\Rightarrow 6^{x^2}=6^2$$

$$x^2=2\Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{2}$$

Demek, $x_1\cdot x_2=-\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=-2$

Juwabı: –2.

5-mısal. Teńlemeni sheshiń. $3^{2x-1}=7^{2x-1}$

Sheshiliwi.

Berilgen teńlemede teńliktiń eki tárepindegi kórsetkishli ańlatpalardıń dáreje kórsetkishleri birdey bolǵanlıǵı ushın teńliktiń eki tárepin 7^{2x-1} ańlatpaǵa bólemiz:

$$\frac{3^{2x-1}}{7^{2x-1}}=\frac{7^{2x-1}}{7^{2x-1}}\Rightarrow\left(\frac{3}{7}\right)^{2x-1}=1\Rightarrow\left(\frac{3}{7}\right)^{2x-1}=\left(\frac{3}{7}\right)^{0}\Rightarrow 2x-1=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

Juwabı: $x=\frac{1}{2}$.

6-mısal. $9^{x^2-1}-36\cdot 3^{x^2-3}+3=0$ teńlemeniń korenleri qosındısın tabıń.

Sheshiliwi.

Teńlemeni tómendegi kóriniste jazıp alamız:

$$\frac{1}{9}\cdot 9^{x^2}-\frac{36}{27}\cdot 3^{x^2}+3=0$$

$3^{x^2}=t$ dep belgileymiz, demek, $9^{x^2}=t^2$

$\frac{1}{9}\cdot t^2-\frac{4}{3}\cdot t+3=0$ kvadrat teńlemeni sheship, $t_1=9;\ t_2=3$ ekenligin tabamız.

$$3^{x^2}=9\Rightarrow x^2=2\Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{2}\ \text{hám}\ 3^{x^2}=3\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x_{3,4}=\pm 1$$

teńlemeniń korenleri qosındısı: $x_1+x_2+x_3+x_4=-\sqrt{2}+\sqrt{2}-1+1=0.$

Juwabı: 0.

MÍSALLAR

1. Kórsetkishli teńlemelerdi sheshiń.

a) $3^x\cdot 3=81$ b) $4^{3x}\cdot 2^x=128$ c) $5^{x+1}-4\cdot 5^x=25$ d) $7^x\cdot 8^x=1$

e) $4^{x^2-3x-4}=1$ f) $0,3^{2x-1}=0,09$ g) $2^{2x}=4^{2\sqrt{3}}$ h) $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x}=9$

i) $27^x=\frac{1}{3}$ j) $400^x=\frac{1}{20}$ k) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x}=\frac{1}{81}$ l) $0,6^{x+3}=0,6^{2x-5}$

2. Teńlemeni sheshiń:

a) $3^x = 81$ b) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{1024}$ c) $7^x = -49$ d) $13^x = -169$

e) $5^x = 0$ f) $8^{2x} = 0$ g) $3^{6-x} = 3^{3x-2}$ h) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x+1} = \left(\frac{7}{3}\right)^{5x-9}$

i) $2^{7x-15} = 2^{9-4x}$ j) $13^{5-2x} = 13^{6x+1}$ k) $2^{x^2+x-0,5} = 4\sqrt{2}$ l) $\left(\frac{4}{9}\right)^x \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} = \frac{2}{3}$

3. $\left(\frac{21}{6}\right)^{29x^2-8x} = \left(\frac{6}{21}\right)^{8x^2-29x}$

4. $\sqrt[3]{5^{2x-3}} = \frac{5}{\sqrt[4]{5}}$

5. $\left(\frac{37}{5}\right)^{71\sqrt{x}-3} = \left(\frac{5}{37}\right)^{3\sqrt{x}-293}$

6. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{x^2-9x} = 1$

7. $2^{x^2-3} \cdot 5^{x^2-3} = 0,01\left(10^{x-1}\right)^3$

8. $2^{x+1} = 5^{x+1}$

9. $7^{x+2} + 4 \cdot 7^{x-1} = 347$

10. $2 \cdot 3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-2} = 150$

11. $5^{2x} + 5^{2x+2} + 5^{2x+4} = 651$

12. $4 \cdot 7^{x+3} - 7^{x+2} - 3 \cdot 7^{x+1} = 1302$

13. $6 \cdot 2^{x+4} - 4 \cdot 2^{x+3} + 3 \cdot 2^{x+2} = 152$

14. $7^{3x} - 7^{3x-1} = 6$

15. $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$

16. $5 \cdot 25^x - 6 \cdot 5^x + 1 = 0$

17. $9^x + 3 \cdot 3^x - 18 = 0$

18. $3^{2x+3} - 4 \cdot 3^{x+1} + 1 = 0$

19. $(0,25)^{2-x} = \frac{256}{2^{x+3}}$

20. $3^{4\sqrt{x}} - 4 \cdot 3^{2\sqrt{x}} + 3 = 0$

21. $9 \cdot 16^x + 2 \cdot 12^x - 32 \cdot 9^x = 0$

22. $64 \cdot 9^x - 84 \cdot 12^x + 27 \cdot 16^x = 0$

23. $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$

24. $4^{x^2} + 6^{x^2} = 2 \cdot 9^{x^2}$

25. $8^x - 6 \cdot 12^x + 11 \cdot 18^x = 2 \cdot 27^{x+\frac{1}{3}}$

26. $x \cdot 3^{x-1} + 3 \cdot 3^{\sqrt{3-x}} = 3^x + x \cdot 3^{\sqrt{3-x}}$

27. $x^2 \cdot 4^{\sqrt{6-x}} + 4^{2+x} = 16 \cdot 2^{2\sqrt{6-x}} + x^2 \cdot 2^{2x}$

28. $\left(\frac{1}{2}\right)^{2-x} + 2^{x-3} = 80 + \sqrt{4^{x-4}}$

KÓRSETKISHLI TEŃSIZLIKLER

$4^x < 64$, $8^x + 11 > 75$, $2^{x-2} \le 2^{5+3x}$, $9^x < 7^x$ teńsizlikler kórsetkishli teńsizlikke mısal bola aladı.

Tómendegi kestede birdey tiykarlı kórsetkishli teńsizliklerdi racional teńsizliklerge keltiriw kórsetilgen.

Kórsetkishli teńsizlikler túrleri	$a^{f(x)} \le a^{g(x)}$	$a^{f(x)} < a^{g(x)}$	$a^{f(x)} > a^{g(x)}$	$a^{f(x)} \ge a^{g(x)}$
$0 < a < 1$ bolǵanda	$f(x) \ge g(x)$	$f(x) > g(x)$	$f(x) < g(x)$	$f(x) \le g(x)$
$a > 1$ bolǵanda	$f(x) \le g(x)$	$f(x) < g(x)$	$f(x) > g(x)$	$f(x) \ge g(x)$

1-mısal. Teńsizlikti sheshiń. $2^x > 32$

Sheshiliwi.

Teńsizlikti tómendegishe jazıp alamız: $2^x > 2^5$

$2 > 1$ bolǵanlıǵı ushın $x > 5$.

Juwabı: $(5;\infty)$

2-mısal. Teńsizlikti sheshiń. $\left(\frac{3}{4}\right)^x \ge \frac{16}{9}$

Sheshiliwi.

Teńsizlikti tómendegishe jazıp alamız: $\left(\frac{3}{4}\right)^x \ge \left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$

$0 < \frac{3}{4} < 1$ bolǵanlıǵı ushın $x \le -2$.

Juwabı: $(-\infty;-2]$

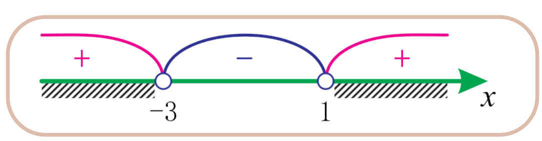
3-mısal. $3^{x^2+2x} > 3^3$ teńsizlikti sheshiń.

Sheshiliwi.

$3 > 1$ bolǵanlıǵı ushın $x^2 + 2x > 3$ teńsizliktiń sheshimin tabıw jeterli.

$$x^2 + 2x - 3 > 0,$$

$$(x+3)(x-1) > 0,$$



Juwabı: $x \in (-\infty;-3) \cup (1;+\infty)$.

Tiykarı hár qıylı kórsetkishli teńsizliklerdi sheshiw

$a > 0$, $a \ne 1$ hám $b > 0$, $b \ne 1$ bolǵanda usı $a^{f(x)} < b^{f(x)}$ kórsetkishli teńsizlik $\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} < 1$ teńsizlikke keltirilip sheshiledi.

MÍSALLAR

Teńsizliklerdi sheshiń.

1. $4^x > 256$

2. $\left(\frac{1}{3}\right)^x \le \frac{1}{729}$

3. $7^x < -49$

4. $13^x > -169$

5. $5^x < 0$

6. $8^{2x} > 0$

7. $10^x \le 0$

8. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{x}{2}} > \sqrt{3}$

9. $\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{2x}{15}} < \sqrt[5]{6}$

10. $2^x > \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$

11. n nıń neshe natural mánisi $9 \le 3^n \le 79$ qos teńsizlikti qanaatlandıradı?

12. x tıń qanday mánislerinde $y = 5^x - 5$ funkciya oń mánislerdi qabıl etedi?

13. $\left(\frac{4}{9}\right)^x \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x > \left(\frac{2}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-2x}$ teńsizliktiń eń úlken pútin sheshimin tabıń.

14. $3 \cdot 9^{2x-2} > \left(\frac{1}{27}\right)^{3x-1}$

15. $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x-3} > 4^{1-2x}$

16. $2 \cdot 8^{4-5x} < \left(\frac{1}{16}\right)^{x+2}$

17. $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{x+1}{x+2}} > \frac{\sqrt{3}}{2}$

18. $6 \cdot 2^{x+3} - 5 \cdot 2^{x+2} + 4 \cdot 2^x > 128$

19. $7 \cdot 3^{x+4} + 2 \cdot 3^{x+3} - 5 \cdot 3^{x+2} \le 192$

20. $10 \cdot 3^{x+2} - 4 \cdot 10^{x+2} < 3^{x+4} - 3 \cdot 10^{x+2}$

21. $5^{x+2} - 5^{x+1} > 2^{x+2} + 2^{x+4}$

22. $\left(\frac{3}{4}\right)^{6x+10-x^2} < \frac{27}{64}$

23. $\left(\frac{1}{25}\right)^{2x} < \left(\sqrt{5}\right)^{x^2+2.75}$

24. $\left(\frac{1}{16}\right)^{x^2} < 8 \cdot \sqrt{2}^{16-2x}$

25. $2^{x^2} > \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-3}$

26. $0,04^x - 26 \cdot (0,2)^x + 25 \le 0$

27. $25^x - 4 \cdot 5^x - 5 \ge 0$

28. $4^x - 10 \cdot 2^x + 16 < 0$

29. $3^{2x+1} + 1 < 4 \cdot 3^x$

30. $3^{8x} - 4 \cdot 3^{4x} \le -3$ teńsizliktiń pútin sheshimleri qosındısın tabıń.

31. $x^2 \cdot 3^x - 3^{x+1} \le 0$ teńsizliktiń pútin sanlardan ibarat sheshimleri neshew?

LOGARIFM TÚSINIGI. LOGARIFMLIK FUNKCIYA

Logarifm kúndelikli turmısta keń qollanıladı. Máselen, bankke qoyılǵan qarjı qanday da bir muǵdarǵa qansha waqıtta kóbeyiwin anıqlaw ushın logarifmnen paydalanıladı. Yamasa dawıstıń joqarılıǵın bahalawda logarifmlik baylanıs paydalanıladı.

Logarifm túsinigin hám logarifmlik funkciyanı úyreniw ushın:
1) kórsetkishli funkciyanı;
2) kórsetkishli funkciyalardıń qásiyetlerin **biliw talap etiledi.**

Logarifm haqqında túsinik

1-mısal. Teńlemeni sheshiń. $3^x = 27$

Sheshiliwi.

$3^x = 3^3 \Rightarrow x = 3$

Juwabı: $x = 3$.

2-mısal. Teńlemeni sheshiń. $2^x = 5$

Sheshiliwi.

Bul teńleme korenge iye hám bul koren racional san emes. Usı kórinisindegi teńlemelerdiń korenin ańlatıw ushın ***logarifm*** túsinigi kiritilgen. Berilgen teńlemeniń koreni 5 tiń 2 tiykarǵa kóre logarifmi dep atalatuǵın ólshemge teń boladı hám ol $\log_2 5$ kórinisinde jazıladı. Demek, $x = \log_2 5$

Juwabı: $x = \log_2 5$.

Ulıwma alǵanda, $a^x = b$ teńlemeniń koreni $x = \log_a b$ ǵa teń. Bul jerde $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$.

Anıqlama.

b sannıń a tiykarǵa kóre logarifmi dep, b nı payda etiw ushın a nı kóteriw kerek bolǵan dáreje kórsetkishine aytıladı. b nıń a tiykarǵa kóre logarifmi $\log_a b$ arqalı belgilenedi. Bul jerde a – logarifm tiykarı, b – logarifmlik ańlatpası.

$\log_a b$ ańlatpa ***logarifm a tiykarǵa kóre b*** dep oqıladı.

Máselen, $\log_2 5$ ańlatpa logarifm 2 tiykarǵa kóre 5 dep oqıladı.

$\log_{10} b$ ańlatpa qısqasha $\lg b$ kórinisinde belgilenedi hám onlıq logarifm dep ataladı, yaǵnıy $\log_{10} b = \lg b$.

$\log_e b$ ańlatpa qısqasha $\ln b$ kórinisinde belgilenedi hám natural logarifm dep ataladı, yaǵnıy $\log_e b = \ln b$. Bul jerde $e \approx 2{,}71$.

$a^x = b$ teńlemeniń koreni $\log_a b$ nı teńlemedegi x tıń ornına qoysaq ,

$$a^{\log_a b} = b \quad (a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0)$$

teńlik payda boladı. Bul teńlik ***tiykarǵı logarifmlik birdeylik*** dep ataladı.

3-mısal. Anıqlama boyınsha esaplań: a) $\log_2 32$; b) $\log_3 \frac{1}{9}$; c) lg100; d) $\ln e^3$

Sheshiliwi.

a) $\log_2 32 = 5$, sebebi $2^5 = 32$; b) $\log_3 \frac{1}{9} = -2$, sebebi $3^{-2} = \frac{1}{9}$;

c) $\lg 100 = 2$, sebebi $10^2 = 100$; d) $\ln e^3 = 3$, sebebi $e^3 = e^3$

Juwabı: a) 5; b) –2; c) 2; d) 3

4-mısal. Esaplań. $\log_{64} 32$

Sheshiliwi.

Ańlatpanıń mánisin kórsetkishli teńleme járdeminde sheship tabıw múmkin. $\log_{64} 32 = x$ bolsın.

$$64^x = 32 \Rightarrow 2^{6x} = 2^5 \Rightarrow 6x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{6}$$

Juwabı: $\frac{5}{6}$.

5-mısal. Tiykarğı logarifmlik birdeylik járdeminde esaplań. $64^{\log_8 3}$

Sheshiliwi.

$$64^{\log_8 3} = \left(8^2\right)^{\log_8 3} = \left(8^{\log_8 3}\right)^2 = 3^2 = 9$$

Juwabı: 9

Logarifmlik funkciya hám onıń qásiyetleri, grafigi

$a > 0$ hám $a \neq 1$ shártlerdi qanaatlandıratuğın a haqıyqıy sandı qarayıq. Usı

$$y = \log_a x$$

kórinistegi funkciya ***logarifmlik funkciya*** dep ataladı.

Máselen, $y = \log_2 x$, $y = \log_{\frac{1}{3}} x$, $y = \lg x$, $y = \ln x$, $y = \log_2(2x+1)$ kórinisinde funkciyalar logarifmlik funkciyalar boladı.

Logarifmlik funkciyalar tómendegi* qásiyet*lerge iye:

- $y = \log_a x$ logarifmlik funkciyanıń anıqlanıw oblastı barlıq oń haqıyqıy sanlar kópliginen ibarat:

$$D(y) = (0; +\infty)$$

- $y = \log_a x$ logarifmlik funkciyanıń mánisler kópligi bolsa barlıq haqıyqıy sanlar kópliginen ibarat:

$$E(y) = (-\infty; +\infty)$$

- $y = \log_a x$ periodlı funkciya emes;
- $y = \log_a x$ funkciya jup ta emes, taq ta emes;
- $0<a<1$ bolğanda $y = \log_a x$ funkciya kemeyiwshi;
- $a > 1$ bolğanda $y = \log_a x$ funkciya ósiwshi.

6-mısal. Salıstırıń. a) $\log_{0,3}7$ hám $\log_{0,3}8$

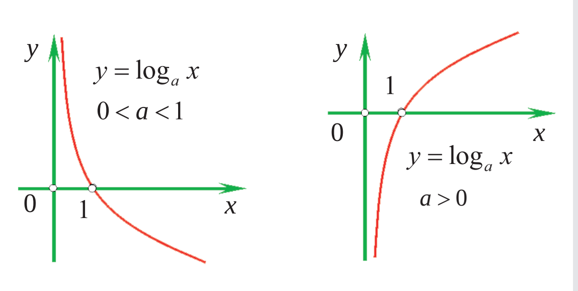
b) $\log_7 0,28$ hám $\log_7 0,31$

Sheshiliwi.

$y=\log_{0,3}x$ funkciya kemeyiwshi hám 7<8 ekenliginen, $\log_{0,3}7>\log_{0,3}8$ boladı;

$y=\log_7 x$ funkciya ósiwshi hám 0,28<0,31 ekenliginen, $\log_7 0,28<\log_7 0,31$ boladı.

1-súwret



Logarifmlik funkciyanıń grafigi

7-mısal. Funkciyanıń anıqlanıw oblastın tabıń $y=\log_7\left(x^2-5x+6\right)$.

Sheshiliwi.

Logarifmlik ańlatpa oń bolıwı kerek, bunnan

$$x^2-5x+6>0\Rightarrow(x-2)(x-3)>0\Rightarrow x\in(-\infty;2)\cup(3;\infty)$$

Juwabı: $D(y)=(-\infty;2)\cup(3;\infty)$.

8-mısal. $y=\log_{4-x}\left(x^2-9\right)$ funkciyanıń anıqlanıw oblastın tabıń.

Sheshiliwi.

1) $\begin{cases}4-x>0\\4-x\neq1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<4\\x\neq3\end{cases}$ 2) $x^2-9>0\Rightarrow x\in(-\infty;-3)\cup(3;\infty)$

Juwabı: $D(y)\in(-\infty;-3)$

9-mısal. Funkciyanıń grafigin sızıń:

$$y=-1+\log_2(x-1).$$

Sheshiliwi.

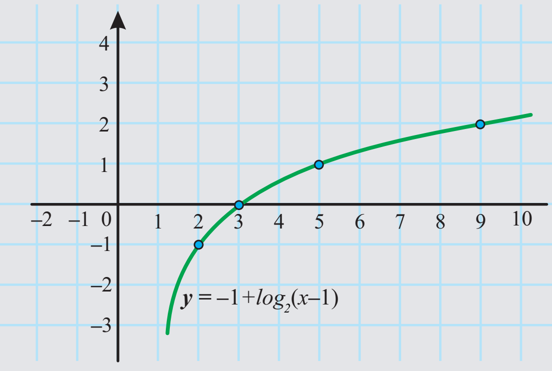
1. Anıqlanıw oblastın tabamız:

$$x-1>0\Rightarrow x>1$$

2. Mánisler kestesin dúzemiz:

x	2	3	5	9
y	-1	0	1	2

2-súwret



Tabılǵan noqatlardı koordinata tegisliginde belgilep, olardı iymek sızıq penen tutastıramız (2-*súwret*).

MÍSALLAR

1. Berilgen funkciyalardıń ósiwshi yamasa kemeyiwshi ekenligin anıqlań.

a) $y=\log_{0,075} x$ b) $y=\log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} x$ c) $y=\lg x$

d) $y=\log_{11} x$ e) $y=-\log_{\frac{1}{e}} x$ f) $y=-\log_{\pi} x$

2. Salıstırıń.

a) $\log_e 0,5$ hám $\log_e 0,35$ b) $\log_{0,1} 100$ hám $\log_{0,1} 101$ c) $\log_{\frac{\sqrt{15}}{4}} \sqrt{37}$ hám $\log_{\frac{\sqrt{15}}{4}} 6$

3. Sanlardı ósiw tártibinde jaylastırıń.

a) $a=\log_{\frac{1}{5}} 10,\ b=\log_{\frac{1}{5}} 15,\ c=\log_{\frac{1}{5}} 20$

b) $a=\log_2 5,\ b=\log_{\frac{1}{4}} 3,\ c=\log_{\frac{1}{2}} 3$

c) $a=\log_{\frac{1}{6}} 4,\ b=\log_{\frac{1}{5}} 6,\ c=\log_{\frac{1}{5}} 4$

4. Pikirler durıs ekenligin mısallar dúzip tekseriń.

a) $a>1$ hám $b>1$ bolsa, $\log_a b>0$

b) $0<a<1$ hám $0<b<1$ bolsa, $\log_a b>0$

c) $a>1$ hám $0<b<1$ bolsa, $\log_a b<0$

d) $0<a<1$ hám $b>1$ bolsa, $\log_a b<0$

5. Berilgen sanlardan qaysıları oń?

a) $a=\log_{0,2} 8$ b) $b=\log_3 0,8$ c) $c=\log_{0,9} 9$

d) $d=\log_4 2$ e) $p=\log_{0,9} 0,6$ f) $l=\log_{1,2} \frac{3}{8}$

g) $z=\log_{0,02} 0,001$ h) $p=\log_{|-13,08|} 2022$ i) $q=\log_{|-3|} 3$

6. $y=\log_2 x$ hám $y=-\log_2 x$ funkciyalardıń grafikleri abscissa kósherine qarata simmetriyalı ekenligin kórsetiń.

7. Funkciyanıń anıqlanıw oblastın tabıń.

a) $y=\log_4 x$ b) $y=\log_2(x-1)$

c) $y=\log_3(x^2-2x-3)$ d) $y=\log_4(x^2-4)$

e) $y=\lg(3-x)$ f) $y=-\log_2(x^2+5x-6)$

8. Funkciyanıń grafigin sızıń.

a) $y=\log_3 x$ b) $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ c) $y=\lg x$ D) $y=\ln x$

9. Funkciyanıń anıqlanıw oblastın tabıń.

a) $y=\log_{x^2}(4-x)$ b) $f(x)=\log_{x^2}(x-1)+\sqrt{2-x}$

c) $f(x)=\sqrt{9-x^2}+\lg(x-1)-\sqrt{x}$ d) $f(x)=\sqrt{x+4}+\log_2(x^2-4)$

e) $f(x)=\dfrac{\log_{x^2+1}(6-x)}{\sqrt{x+2}}$ f) $y=\sqrt{2+\log_{\frac{1}{2}}(3-x)}$

10. Funkciyanıń grafigin sızıń.

a) $y=\log_2(x-1)$ b) $y=\log_3(5x+1)$ c) $y=\log_4(1-x)$

d) $y=\lg(x-3)$ e) $y=\log_6(3x-2)$ f) $y=\ln(x+1)$

g) $y=\log_8(x-4)$ h) $y=\lg(3-x)$

11. Funkciyalardıń kesilisiw noqatları neshew?

a) $y=\log_2 x$; $y=-x+1$ b) $y=\log_{\frac{1}{2}} x$; $y=2x-5$ c) $y=\log_{\frac{1}{2}} x$; $y=4x^2$

d) $y=\log_3 x$; $y=2-\frac{1}{3}x^2$ e) $y=2^x$; $y=\log_{0,5} x$ f) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$; $y=\log_3 x$

LOGARIFMLIK AŃLATPALARDÍ BIRDEY ALMASTÍRÍW

Logarifmlik ańlatpalar ústinde ámeller orınlawda hám olardı ápiwayılastırıwda tómendegi birdey almastırıwlardan paydalanıladı. Bul qásiyetlerde qatnasatuǵın ańlatpalar logarifm anıqlanǵan bolıwı ushın talap etiletuǵın shártlerdi qanaatlandıradı dep alamız.

Logarifmniń anıqlamasınan onıń tómendegi ***qásiyetleri*** kelip shıǵadı:

1°. $\log_a 1 = 0$.

2°. $\log_a a = 1$.

3°. $a^{\log_a b} = b$ ($a>0$, $a=1$, $b>0$).

4°. Kóbeymeniń logarifmi kóbeytiwshiler logarifmleriniń qosındısına teń:

$$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c.$$

5°. Qatnastıń logarifmi bóliniwshi hám bóliwshi logarifmleriniń ayırmasına teń:

$$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c.$$

6°. Dárejeniń logarifmi dáreje kórsetkishi menen tiykar logarifminiń kóbeymesine teń:

$$\log_a b^p = p \log_a b.$$

7°. Bir tiykardan basqa tiykarǵa ótiw formulası: $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$.

8°. $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$.

9°. $\log_{a^k} b = \dfrac{1}{k} \log_a b$.

10°. $\log_{a^k} b^p = \dfrac{p}{k} \log_a b$.

Kórsetkishli hám logarifmlik ańlatpalardı ápiwayılastırıw

Logarifmniń hám logarifmlik funkciyanıń, sonday-aq, dárejeniń hám kórsetkishli funkciyanıń qásiyetleri menen tanısqan edik. Bul qásiyetlerden logarifmlik hám kórsetkishli ańlatpalardı ápiwayılastırıwlarda paydalanıladı.

1-mısal. Esaplań. $\log_3 18 + \log_3 \dfrac{1}{54}$

Sheshiliwi.

$$\log_3 18 + \log_3 \frac{1}{54} = \log_3 \left(18 \cdot \frac{1}{54}\right) = \log_3 \frac{1}{3} = -1$$

Juwabı: -1

2-mısal. Esaplań. $3\log_2 8 - 2\log_3 9$

Sheshiliwi.

$$3\log_2 8 - 2\log_3 9 = 3\log_2 2^3 - 2\log_3 3^2 = 3\cdot 3\cdot \log_2 2 - 2\cdot 2\cdot \log_3 3 = 9\cdot 1 - 4\cdot 1 = 5$$

Juwabı: 5

3-mısal. Esaplań. $10^{1+\lg 5}$

Sheshiliwi.

$$10^{1+\lg 5} = 10^1 \cdot 10^{\lg 5} = 10\cdot 5 = 50$$

Juwabı: 50

4-mısal. Esaplań. $\log_2 \log_5 \sqrt[8]{5}$

Sheshiliwi.

$$\log_2 \log_5 \sqrt[8]{5} = \log_2 \log_5 5^{\frac{1}{8}} = \log_2\left(\frac{1}{8}\cdot \log_5 5\right) = \log_2 \frac{1}{8} = \log_2 2^{-3} = -3\log_2 2 = -3$$

Juwabı: -3

5-mısal. Esaplań. $2^{\log_4 (2-\sqrt{3})^2} + 3^{\log_9 (2+\sqrt{3})^2}$

Sheshiliwi.

$$2^{\log_4 (2-\sqrt{3})^2} + 3^{\log_9 (2+\sqrt{3})^2} = 2^{\log_{2^2} (2-\sqrt{3})^2} + 3^{\log_{3^2} (2+\sqrt{3})^2} = 2^{\frac{1}{2}\cdot 2\log_2 (2-\sqrt{3})} + 3^{\frac{1}{2}\cdot 2\log_3 (2+\sqrt{3})} =$$

$$= 2^{\log_2 (2-\sqrt{3})} + 3^{\log_3 (2+\sqrt{3})} = 2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3} = 4.$$

Juwabı: 4

6-mısal. Esaplań. $\sqrt{5^{\frac{2}{\log_3 5}} + 0{,}5^{-\log_2 7}}$

Sheshiliwi.

$$\sqrt{5^{\frac{2}{\log_3 5}} + 0{,}5^{-\log_2 7}} = \sqrt{5^{2\log_5 3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-\log_2 7}} = \sqrt{5^{\log_5 3^2} + 2^{\log_2 7}} = \sqrt{9+7} = \sqrt{16} = 4$$

Juwabı: 4

7-mısal. Esaplań. $\dfrac{2}{1+\log_2 5} + \lg 25$

Sheshiliwi.

$$\frac{2}{1+\log_2 5} + \lg 25 = \frac{2}{\log_2 2 + \log_2 5} + \lg 25 = \frac{2}{\log_2 (2\cdot 5)} + \lg 25 = \frac{2}{\log_2 10} + \lg 25 =$$

$$= 2\lg 2 + \lg 25 = \lg 2^2 + \lg 25 = \lg(4\cdot 25) = \lg 100 = 2$$

Juwabı: 2

8-mısal. $3^{2+\log_3 2}$ esaplań.

Sheshiliwi. $a^{m+n}=a^n\cdot a^m$ hám $a^{\log_a b}=b$ teńliklerden paydalanamız:

$$3^{2+\log_3 2}=3^2\cdot 3^{\log_3 2}=9\cdot 2=18.$$

Kórsetkishli hám logarifmlik ańlatpalardı ápiwayılastırıwda keń qollanılatuǵın

$$\boxed{a^{\log_b c}=c^{\log_b a}}$$

teńlikti dálilleymiz. Bul jerde a, b, c>0 hám $b\neq 1$. Usı shártler orınlanǵanda $\log_b c$ hám $\log_b a$ ańlatpalar mániske iye boladı. Belgili,

$$\log_b c\log_b a=\log_b a\log_b c$$

teńlik orınlı. Bul birdeylikten logarifmniń $n\log_p q=\log_p q^n$ qásiyeti boyınsha

$$\log_b a^{\log_b c}=\log_b c^{\log_b a}$$

teńlik kelip shıǵadı. Bunnan bolsa,

$$a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$$

teńliktiń orınlı bolıwın kóriw múmkin.

9-mısal. Eger $a=\sin\frac{\pi}{6}$ bolsa, $\log_4 a$ nı esaplań.

Sheshiliwi.

$a=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ bolǵanlıǵı ushın $\log_4 a=\log_4\frac{1}{2}=\log_{2^2}2^{-1}=-\frac{1}{2}\cdot\log_2 2=-\frac{1}{2}\cdot 1=-\frac{1}{2}$

Juwabı: $-\frac{1}{2}$

10-mısal. Esaplań. $\dfrac{\log_2^2 14+\log_2 14\cdot\log_2 7-2\log_2^2 7}{\log_2 14+2\log_2 7}$

Sheshiliwi.

Alımın kóbeytiwshilerge jiklep, tómendegini payda etemiz:

$$\frac{\log_2^2 14+\log_2 14\cdot\log_2 7-2\log_2^2 7}{\log_2 14+2\log_2 7}=\frac{(\log_2 14+2\log_2 7)(\log_2 14-\log_2 7)}{\log_2 14+2\log_2 7}=$$

$$=\frac{\cancel{(\log_2 14+2\log_2 7)}(\log_2 14-\log_2 7)}{\cancel{\log_2 14+2\log_2 7}}=\log_2 14-\log_2 7=\log_2\frac{14}{7}=\log_2 2=1$$

Juwabı: 1

11-mısal. $f(x)=\log_4\frac{x^2}{4}-2\log_4(4x^4)$ ańlatpanı ápiwayılastırıń hám onıń $x=-2$ degi mánisin tabıń.

Sheshiliwi.

Berilgen ańlatpa mániske iye bolıwı ushın $x \neq 0$ bolıwı talap etiledi. Tómendegi teńlikler logarifmniń qásiyetlerinen kelip shıǵadı:

$$f(x) = \log_4 \frac{x^2}{4} - 2\log_4\left(4x^4\right) = \log_4 x^2 - \log_4 4 - 2\left(\log_4 4 + \log_4 x^4\right) =$$

$$= 2\log_4 |x| - 1 - 2\left(1 + 4\log_4 |x|\right) = -6\log_4 |x| - 3$$

$$f(-2) = -6\log_4 |-2| - 3 = -6\log_{2^2} 2 - 3 = -\frac{6}{2}\log_2 2 - 3 = -3 - 3 = -6$$

12-mısal. Eger $a = \log_{98} 112$ bolsa, $\log_7 2$ ni a arqalı ańlatıń.

Sheshiliwi.

$$a = \log_{98} 112 = \frac{\log_7 112}{\log_7 98} = \frac{\log_7\left(7 \cdot 2^4\right)}{\log_7\left(7^2 \cdot 2\right)} = \frac{\log_7 7 + \log_7 2^4}{\log_7 7^2 + \log_7 2} = \frac{1 + 4\log_7 2}{2 + \log_7 2}$$

$$\frac{1 + 4\log_7 2}{2 + \log_7 2} = a$$

$$1 + 4\log_7 2 = 2a + a\log_7 2$$

$$4\log_7 2 - a\log_7 2 = 2a - 1$$

$$(4 - a)\log_7 2 = 2a - 1$$

$$\log_7 2 = \frac{2a - 1}{4 - a}.$$

MÍSALLAR

1. Logarifmlik ańlatpalardıń mánisin tabıń.

a) $\log_2 4$ b) $\log_2 1$ c) $\log_2 16$ d) $\log_4 16$

e) $\log_2 64$ f) $\log_8 64$ g) $\log_4 64$ h) $\log_{64} 64$

2. Logarifmlik ańlatpalardıń mánisin tabıń.

a) $\log_5 25$ b) $\log_{324} 18$ c) $\log_{128} 4$ d) $\log_{10}(0{,}001)$

e) $\log_9 3$ f) $\lg 1000$ g) $\ln e$ h) $\lg\left(\frac{1}{100}\right)$

3. Esaplań.

a) $\log_2 8 + \log_2 4$ b) $\log_3 6 + \log_3 \frac{3}{2}$ c) $\log_2 15 - \log_2 \frac{15}{16}$

d) $\log_{\frac{1}{3}} 54 - \log_{\frac{1}{3}} 2$ e) $\log_{0,2} 75 - \log_{0,2} 3$ f) $\log_{36} 9 + \log_{36} 4$

4. Usı sanlardan qaysı biri qalǵan úshewine teń emes?

a) $m = 2\log_2 8 - \log_2 4$ b) $n = \log_2 400 - 2\log_2 5$

c) $p = \log_5 125 + \log_5 5$ d) $q = \ln 12e - \ln 2$

5. Tómendegi sanlardan qaysı biri 2 den kishi?

a) $M = \log_5 100 - \log_5 4$ b) $N = 4\log_2 3 - \log_2 9$

c) $P = \log_6 72 - \log_6 2$ d) $Q = \log_4 16 + \log_4 \frac{1}{8}$

6. Esaplań.

a) $3 - \lg 50 + \frac{1}{2}\lg 25$ b) $\log_2 32 + \log_{32} 2$ c) $\frac{\log_4 13 + \log_4 25}{\log_{64} 325}$

d) $\frac{\log_4 11 + \log_4 23}{\log_8 253}$ e) $\frac{1}{\log_8 12} + \frac{1}{\log_{18} 12}$ f) $\frac{1}{\log_{45} 15} + \frac{1}{\log_5 15}$

7. Esaplań.

a) $81^{\log_3 5}$ b) $4^{-2\log_{\frac{1}{4}} 3}$ c) $32^{\log_8 27}$

d) $121^{\log_{11} 12}$ e) $3\log_{\sqrt{8}} 2 + 2^{-2\log_{\frac{1}{2}} 2}$ f) $3\log_{\sqrt{64}} 4 + 4^{-2\log_{\frac{1}{4}} 3}$

8. a nıń berilgeni boyınsha ańlatpanıń mánisin esaplań.

a) $3\log_{\frac{1}{3}} a,\ \ a = 2\cos\frac{\pi}{6}$ b) $3\log_{\frac{1}{3}} a,\ \ a = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$ c) $4\log_3 a,\ a = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$

9. Esaplań.

a) $\log_{\frac{1}{3}} \log_3 27$ b) $\log_4 \log_3 \sqrt{81}$ c) $\log_3^2 \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{125}$

10. Esaplań.

a) $$\frac{2\log_3 12 - 4\log_3^2 2 + \log_3^2 12 + 4\log_3 2}{3\log_3 12 + 6\log_3 2}$$

b) $$\frac{\log_2^2 28 + \log_2 28 \cdot \log_2 7 - 2\log_2^2 7}{\log_2 28 + 2\log_2 7}$$

c) $$\frac{\log_{35}^2 7 - 2\log_{35} 7 \cdot \log_{35} 5 - 3\log_{35}^2 7}{2(\log_{35} 7 - 3\log_{35} 5)}$$

d) $$\frac{\log_2^2 12 - 2\log_2 12 + 2\log_2^2 3 - 3\log_2 3 \cdot \log_2 12 + 4\log_2 3}{\log_2 12 - 2\log_2 3}$$

11. Tómendegi funkciyalardıń anıqlanıw oblastın tabıń.

a) $y=\log_2(x+3)$ b) $y=\log_{0,2}(x^2-4x)$

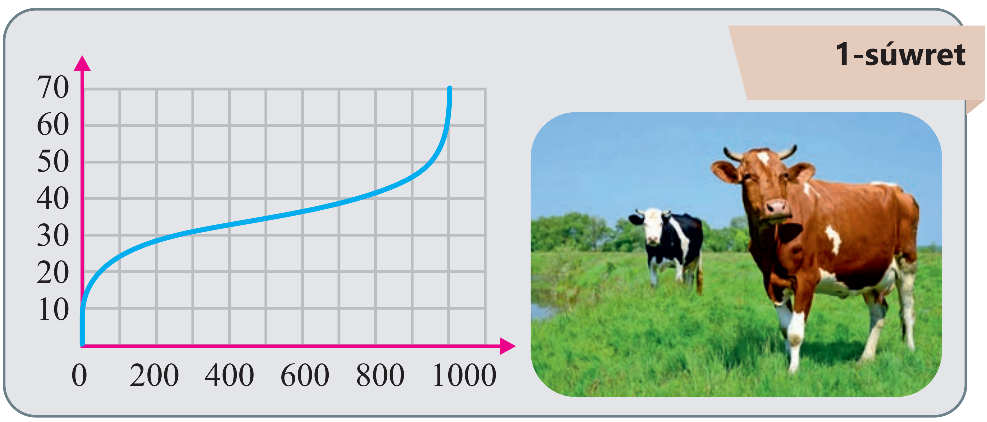
c) $y=\log_{0,7}\left(2x-\dfrac{1}{8}\right)$ d) $y=\log_2(5-3x)$

12. a arqalı ańlatıń .

a) $a=\log_{36}108$ bolsa, $\log_2 3=?$ b) $a=\log_{75}135$ bolsa, $\log_5 3=?$

c) $a=\log_{147}189$ bolsa, $\log_7 3=?$ d) $a=\log_{50}80$ bolsa, $\log_5 2=?$

13. Eger shopannıń 1 000 bas sıyırınan birewi juqpalı kesellikke shalınǵan bolsa, ol jaǵdayda t kúnde n dana sıyırdıń keselleniw kórsetkishi $t=-5\cdot\ln\left(\dfrac{1000-n}{999n}\right)$ formula menen modellestirilgen. 100, 800, 1 000 bas sıyır neshe kúnde keselleniwin tabıń. Sızılma tiykarında juwmaq tayarlań (1-*súwret*).



1-súwret

14. Kesteler tiykarında funkciyanıń grafigin sızıń.

a)

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y=\log_2 x$	-2	-1	0	1	2	3

b)

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y=\log_{\frac{1}{2}} x$	2	1	0	-1	-2	-3

15. Tómendegi funkciyalarǵa keri funkciyalardı anıqlań.

a) $f(x)=10^x$ b) $f(x)=\log_3(x)$

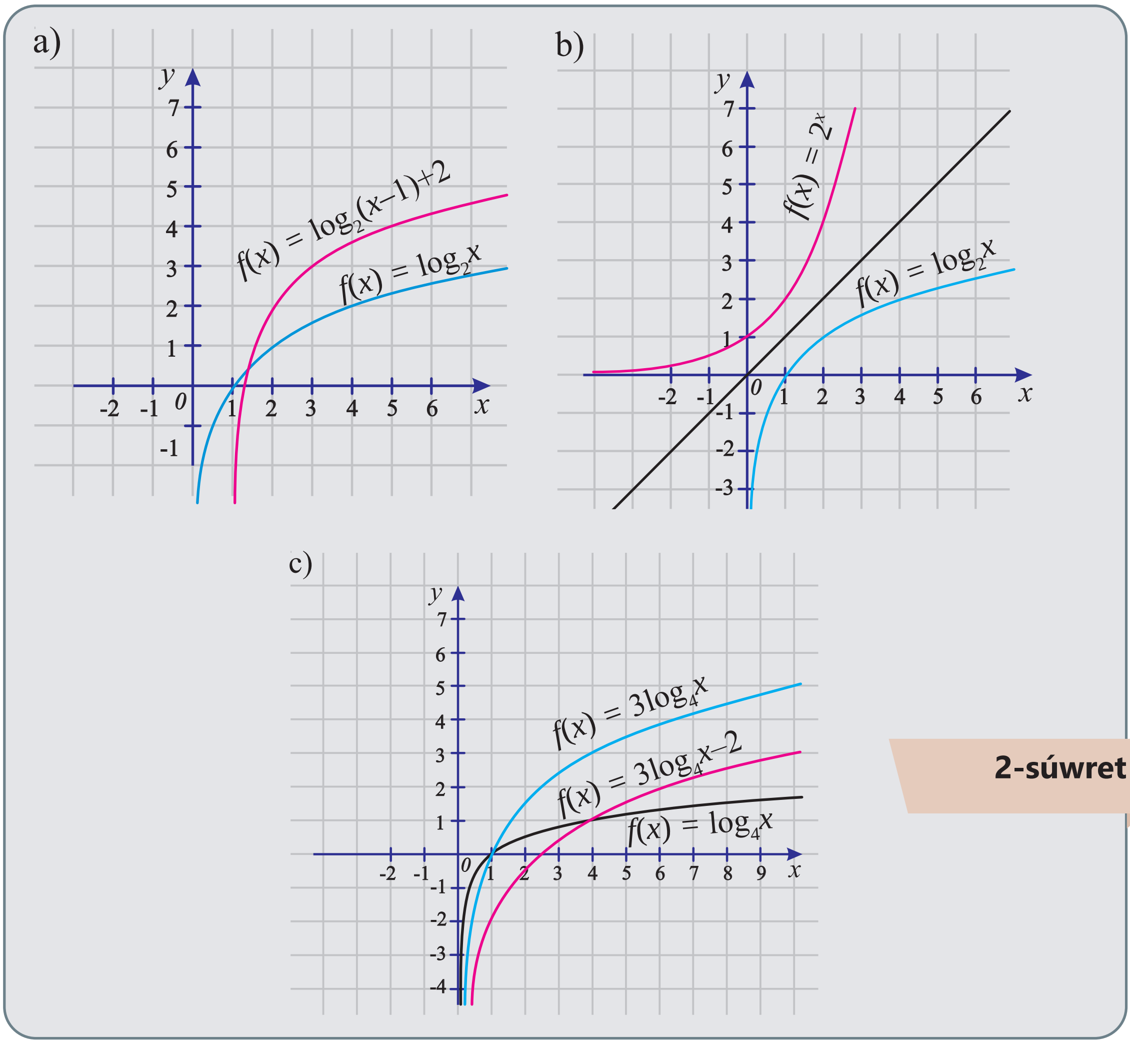
c) $f(x)=2+e^{x+4}$ d) $f(x)=5+\log_2(x-3)$

16. a hám b lardıń mánisin tabıń.

a) $\log_3 b=2$ b) $\log_a 8=3$ c) $\log b^2=\lg 4$ d) $\log_a 36=2$

17. $y=\ln e^x$ hám $y=e^{\ln x}$ funkciyalarınıń grafigin sızıń. Uqsaslıq hám ayırmashılıqların túsindiriń.

18. 2-súwrette funkciyalar ústinde qanday almastırıwlar orınlanǵanlıǵın kórsetiń.



2-súwret

Logarifmlik funkciyanıń kúndelikli turmısta qollanılıwı

Dawıs intensivligi dárejesi

Maydan birligi arqalı waqıt birliginde dawıs tolqının alıp ótip atırǵan energiya *dawıstıń intensivligi* dep ataladı. Elastik ortalıq boylap dawıs tarqalǵanda ol tarqalmaǵandaǵıǵa qaraǵanda artıqsha basım payda boladı, onı dawıs basımı dep ataladı. Dawıstıń intensivligi dawıs basımınıń amplitudasına hám ortalıq qásiyetine hám tolqınnıń kórinisine baylanıslı. Ses joqarılıǵınıń intensivligi decibelda (*dB*) ólshenedi.

I – dawıstıń intensivligi

I_0 – dawıstıń salıstırmalı intensivligi

L – ses intensivliginiń joqarılıǵı

$$L = 10\log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)dB$$

Smartfon qulaqshınlarına uzatatuǵın dawıs intensivligi 100 decibelden asadı. Adam qulaǵı ushın 80 decibelden joqarı bolǵan dawıs joqarılıǵı esitiw qábiletiniń buzılıwına yamasa joǵalıp barıwına sebep boladı.

LOGARIFMLIK TEŃLEMELER

Logarifmlik teńlemeler

Belgisiz logarifmlik ańlatpada yamasa logarifm tiykarında qatnasqan teńleme ***logarifmlik teńleme*** dep ataladı. Máselen, $\log_2 x = 3$, $\log_x 625 = 2$, $\log_x(x+2) = 2$, $\lg(2x-2) = \lg(x+2)$ teńlemeler logarifmlik teńlemege mısal bola aladı.

Belgisizdiń berilgen logarifmlik teńlemeni durıs teńlikke aylandıratuǵın mánisi bul logarifmlik ***teńlemeniń koreni*** dep ataladı.

Ápiwayı logarifmlik teńlemelerdi sheshiw

$a > 0$, $a \neq 1$ bolǵanda usı $\log_a x = b$ teńleme eń ápiwayı logarifmlik teńleme boladı. Bul teńlemeniń sheshimi $x = a^b$ boladı.

Logarifmlik teńlemelerdi sheshiwde usı qaǵıyda isletiledi:

$a > 0$, $a \neq 1$ bolǵanda $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ teńlemeniń korenleri $f(x) = g(x)$ teńlemeniń $f(x) > 0$ (yamasa $g(x) > 0$) shártti qanaatlandırıwshı korenlerinen ibarat boladı.

Tómende logarifmlik teńlemelerdi sheshiwdiń úlgilerin keltiremiz.

1-mısal. $\log_5 x = -2$ teńlemeni sheshiń.

Sheshiliwi.

Teńlemeni sheshiwde $x > 0$ shárt astında logarifm anıqlamasınan paydalanamız:

$$\log_5 x = -2 \Rightarrow x = 5^{-2} \Rightarrow x = \frac{1}{25}$$

$x = \frac{1}{25} > 0$ ekenliginen, tabılǵan bul mánis berilgen teńlemeniń koreni boladı.

Juwabı: $x = \frac{1}{25}$.

2-mısal. $\log_3(x^2 - 4) = \log_3(5x - 8)$ logarifmlik teńlemeni sheshiń.

Sheshiliwi.

Anıqlanıw oblastın tabamız:

$$\begin{cases} x^2 - 4 > 0 \\ 5x - 8 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-2)(x+2) > 0 \\ 5x > 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty) \\ x > 1,6 \end{cases} \Rightarrow x \in (2; \infty)$$

Endi $x^2 - 4 = 5x - 8$ teńlemeni sheshemiz:

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-4) = 0 \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 4$$

Belgisizdiń $x_1 = 1$ mánisi $(2; \infty)$ kóplikke tiyisli emes, $x_2 = 4$ mánisi bolsa bul kóplikke tiyisli boladı. Demek, $x_1 = 1$ mánis berilgen teńlemeniń shet koreni boladı, $x_2 = 4$ mánis bolsa berilgen teńlemeniń koreni boladı.

Juwabı: $x = 4$

3-mısal. $\log_5^2 x - 3\log_5 x - 4 = 0$ logarifmlik teńlemeni sheshiń.

Sheshiliwi.

Dáslep $x > 0$ anıqlanıw oblastı bolıwın anıqlaymız hám $\log_5 x = t$ belgilew kirgizip, tómendegilerge iye bolamız:

$$t^2 - 3t - 4 = 0 \Rightarrow (t+1)(t-4) = 0 \Rightarrow t_1 = -1,\ t_2 = 4$$

Demek, $\log_5 x = -1$ hám $\log_5 x = 4$. Bunnan $x_1 = \frac{1}{5} = 0,2$; $x_2 = 5^4 = 625$

Juwabı: $x_1 = 0,2$; $x_2 = 625$.

4-mısal. $\log_{x-1} 16=2$ teńlemeni sheshiń.

Sheshiliwi.

Dáslep

$$\begin{cases} x-1>0 \\ x-1\neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1 \\ x\neq 2 \end{cases} \Rightarrow x \in (1;\ 2) \cup (2;\ \infty)$$

kóplikke tiyisli bolıwı kerek. Logarifm anıqlamasınan paydalanamız:

$\log_{x-1} 16=2 \Rightarrow (x-2)^2=6$

$x-1=4 \Rightarrow x_1=5$

$x-1=-4 \Rightarrow x_2=-3$

Juwabı: $x=5$

5-mısal. $\log_5 \log_2 \log_7 x = 0$ teńlemeni sheshiń.

Sheshiliwi.

Teńlemeni sheshiwde logarifm anıqlamasınan paydalanamız:

$$\log_2 \log_7 x = 5^0 \Rightarrow \log_2 \log_7 x = 1 \Rightarrow \log_7 x = 2^1 \Rightarrow x = 7^2 = 49$$

Juwabı: $x = 49$.

6-mısal. $\lg\left(x^2-3\right)\cdot \lg x = 0$ teńlemeni sheshiń.

Sheshiliwi.

Anıqlanıw oblastın tabamız:

$$\begin{cases} x^2-3>0 \\ x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};+\infty\right) \\ x>0 \end{cases} \Rightarrow x\in\left(\sqrt{3};+\infty\right)$$

hárbir kóbeytiwshini 0 ge teńlestiremiz:

$\lg\left(x^2-3\right)=0 \Rightarrow x^2-3=1 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x_{1,2}=\pm 2$

$\lg x = 0 \Rightarrow x_3 = 1$

Anıqlanıw oblastı boyınsha x^2-3>0 hám x>0 bolıwı kerek. Sonıń ushın $x = 2$ koren bola aladı.

Juwabı: $x = 2$.

MÍSALLAR

1. Logarifmlik teńlemelerdi sheshiń.

a) $\log_2 x = -3$ b) $\log_4 2x = \frac{1}{2}$ c) $\lg\frac{5x}{2} = 1$

d) $\log_{\frac{1}{4}} x = -2$ e) $\log_3(3x-1) = 2$ f) $\log_7(x+3) = 2$

g) $\log_9 x^3 + \log_{\sqrt{3}} x = 3$ h) $\log_4(2x-3) = 4$ i) $\log_2 x - 2\log_{\frac{1}{2}} x = 9$

2. Logarifmlik teńlemelerdi sheshiń.

a) $\log_5 x = 2\log_5 3 + 4\log_{25} 2$ b) $\log_{\frac{1}{2}}(7-8x) = 2$

c) $\log_2 x + \log_8 x = 0$ d) $\log_3 x = 9\log_{27} 8 - 3\log_3 4$

e) $\log_{0,5}(3x+1) = -2$ f) $\log_{0,2}(x+3) = -1$

g) $\log_{0,25}(x+30) = -2$ h) $\log_{\sqrt{3}}(1-2x) = 4$

i) $\log_2\sqrt{x-1} = 1$ j) $\log_3(x^2-4x+3) = \log_3(3x+21)$

k) $\log_3(2x-5) = \log_3(20-3x)$ l) $\log_7(9x-1) = \log_7 x$

m) $\log_3(2x^2-3x) = 2\log_3 x$ n) $\lg(2x) = 2\lg(4x-15)$

3. $\lg(3x-11) + \lg(x-27) = 3$

4. $\log_{81} x - 2\log_3 x + 5\log_9 x = 1,5$

5. $\log_3((x-1)(2x-1)) = 0$

6. $3\lg x^2 - \lg^2 x = 9$

7. $\log_{\frac{1}{3}}\frac{x^2+4x}{2x-3} = 1$

8. $\log_{\frac{3}{4}}\frac{2x-1}{x+2} = 1$

9. $\log_\pi(\log_2(\log_3 3x)) = 0$

10. $\log_2^2 x + 3 = \log_2 x^2$

11. $(x^2-6x-7)\log_2(3x-1) = 0$

12. $(x^2-2x-15)\lg(4x-3) = 0$

13. $\log_5(x+4) - \log_5(1-2x) = -\log_5(2x+3)$

14. $\log_2^2 x - 5\log_2 x = 4$

15. $\log_3 x + \log_x 9 = 3$

16. $\log_{x+2} 7 + 3\log_7(x+2) = 4$

17. $\log_3 x \cdot \log_9 x \cdot \log_{27} x \cdot \log_{81} x = \frac{2}{3}$

18. $\log_5\sqrt{x-9} + \log_5\sqrt{2x-1} = \log_5 10$

KÓRSETKISHLI HÁM LOGARIFMLIK TEŃLEMELER SISTEMASÍ

Kórsetkishli teńlemeler sisteması hám onı sheshiw

Kórsetkishli ańlatpa qatnasqan teńlemelerdi óz ishine alǵan teńlemeler sisteması ***kórsetkishli teńlemeler sisteması*** dep ataladı. Kórsetkishli teńlemeler sisteması hár qıylı kóriniste boladı. Bunday sistemanıń hárbirin sheshiwde ózine say kózqaras talap etiledi. Bul jerde kórsetkishli hám logarifmlik ańlatpalardıń qásiyetleri keń qollanıladı.

1-mısal. $\begin{cases} 3^x = 9^{y+1}, \\ 4y = 5 - x \end{cases}$ sistemanı sheshiń.

Sheshiliwi.

$9 = 3^2$ ekenliginen paydalanamız. Ol jaǵdayda $3^x = 3^{2(y+1)}$ bolıp, bul jerden $x = 2y + 2$ kelip shıǵadı. Sistemadaǵı ekinshi teńlikte x tıń ornına $2y + 2$ ańlatpanı qoyıp, y tiń mánisin tabamız: $4y = 5 - (2y + 2) \Rightarrow y = \frac{1}{2}$. Endi $x = 2y + 2$ teńliktegi y tıń ornına onıń mánisin qoyıp, x tıń mánisin tabamız: $x = 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \Rightarrow x = 3$

Juwabı: $\left(3;\ \frac{1}{2}\right)$.

2-mısal. $\begin{cases} 9^{x+y} = 729, \\ 3^{x-y-1} = 1 \end{cases}$ teńlemeler sistemasın sheshiń.

Sheshiliwi.

$729 = 9^3$ hám $1 = 3^0$ ekenliginen paydalanamız. Ol jaǵdayda

$$\begin{cases} 9^{x+y} = 9^3, \\ 3^{x-y-1} = 3^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 3, \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow (2;\ 1).$$

Juwabı: (2; 1).

3-mısal. $\begin{cases} x^{y+1} = 27, \\ x^{2y-5} = \frac{1}{3} \end{cases}$ teńlemeler sistemasın sheshiń.

Sheshiliwi.

Mısaldıń beriliwinen $x > 0$, $x \neq 1$ shártler orınlanıwı kelip shıǵadı. Sonıń ushın birinshi hám ekinshi teńlemelerdiń shep hám oń tárepindegi ańlatpalardı logarifmlew múmkin. Bul ańlatpalardı 3 tiykar boyınsha logarifmleymiz hám tómendegilerge iye bolamız.

$$\begin{cases} (y+1)\log_3 x = 3, \\ (2y-5)\log_3 x = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_3 x = \dfrac{3}{y+1}, \\ (2y-5)\dfrac{3}{y+1} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3, \\ y = 2 \end{cases}$$

Juwabı. (3; 2).

4-mısal. $\begin{cases} 2^x+2^y=5, \\ 2^{x+y}=4 \end{cases}$ teńlemeler sistemasın sheshiń.

Sheshiliwi.

Birinshi teńlikten $2^y=5-2^x$ baylanıstı tabamız. $2^{x+y}=2^x\cdot 2^y$ teńlikti itibarǵa alıp, ekinshi teńlikti $2^x\cdot 2^y=4$ kórinisine keltiremiz, bul jerden $2^x\left(5-2^x\right)=4$, onnan bolsa $2^{2x}-5\cdot 2^x+4=0$ teńlemege iye bolamız. $t=2^x$ belgilew kiritip, $t^2-5t+4=0$ kvadrat teńlemege iye bolamız. Bul jerde $t>0$.

Bul kvadrat teńlemeniń sheshimi $t_1=1$, $t_2=4$ bolıp, x hám y belgisizlerdiń olarǵa sáykes mánisleri:

$t_1=1$: $\quad 1=2^{x_1} \Rightarrow x_1=0$; $\quad 2^{y_1}=5-2^0=4, \Rightarrow y_1=2$

$t_2=4$: $\quad 4=2^{x_2} \Rightarrow x_2=2$; $\quad 2^{y_2}=5-2^2=1, \Rightarrow y_2=0$ boladı.

Juwabı: (0; 2) hám (2; 0).

Túsindirme. Joqarıdaǵı mısallar hárbir kórsetkishli teńlemeler sistemasın sheshiw ushın dóretiwshilik kózqarasta qaraw kerekligin kórsetedi.

Logarifmlik teńlemeler sisteması hám onı sheshiw

Logarifmlik ańlatpa qatnasqan teńlemelerdi óz ishine alǵan sistema ***logarifmlik teńlemeler sisteması*** dep ataladı. Logarifmlik teńlemeler sisteması da kórsetkishli teńlemeler sisteması sıyaqlı hár qıylı kóriniste boladı. Olardıń hárbirin sheshiwde kórsetkishli hám logarifmlik ańlatpalardıń qásiyetleri keń qollanıladı hám tiyisli tártipte esaplaw talap etiledi.

5-mısal. $\begin{cases} \log_9 \dfrac{x^2}{\sqrt{y}}=\dfrac{1}{2}, \\ \log_3 xy=3 \end{cases}$ teńlemeler sistemasın sheshiń.

Sheshiliwi.

Sistemadaǵı logarifmlik ańlatpalar mániske iye bolıwı ushın

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{y}}>0, \\ xy>0 \end{cases}$$

teńsizlikler orınlanıwı talap etiledi. $\dfrac{x^2}{\sqrt{y}}>0$ teńsizlik $y>0$ hám $x\neq 0$ bolǵanda ǵana orınlı. Ol jaǵdayda sistemadaǵı ekinshi $xy>0$ teńsizlikten $x>0$ hám $y>0$ bolıwı zárúrligi kelip shıǵadı.

Endi logarifm qásiyetlerinen paydalanıp, $x>0$ hám $y>0$ bolǵanda berilgen sistemanı

$$\begin{cases} \log_9 x^2-\log_9 \sqrt{y}=\dfrac{1}{2}, \\ \log_3 x+\log_3 y=3 \end{cases}$$

kórinisinde qayta jazıw múmkin. $\log_9 x^2=\log_{3^2} x^2=\log_3 x$, hám $\log_9 \sqrt{y}=\log_{3^2} y^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{4}\log_3 y$

teńliklerden paydalansaq, sistema usı kóriniske keledi $\begin{cases} \log_3 x - \frac{1}{4}\log_3 y = \frac{1}{2}, \\ \log_3 x + \log_3 y = 3. \end{cases}$

Ekinshi teńlemeden birinshi teńlemeni ayırıp, $\frac{5}{4}\log_3 y = \frac{5}{2}$ teńlikke iye bolamız. Bunnan $\log_3 y = 2 \Rightarrow y = 9$ ekenligi kelip shıǵadı. Endi sistemanıń ekinshi teńlemesine y tiń bul mánisin qoyıp, x belgisizdi tabamız:

$$\log_3 x + \log_3 9 = 3 \;\Rightarrow\; \log_3 x + 2 = 3 \;\Rightarrow\; \log_3 x = 1 \;\Rightarrow\; x = 3.$$

Juwabı: (3; 9).

6-mısal. $\begin{cases} x^{\lg y} = 1000, \\ \log_y x = 3 \end{cases}$ teńlemeler sistemasın sheshiń.

Sheshiliwi.
Sistemadaǵı ańlatpalar mániske iye bolıwı ushın $x > 0$, $x \neq 1$, $y > 0$, $y \neq 1$ shártler orınlanıwı zárúr. $x^{\lg y} = 1000$ teńlikti 10 tiykar boyınsha logarifmleyik:

$$\lg x^{\lg y} = \lg 1000 \;\Rightarrow\; \lg y \lg x = 3$$

$\log_y x = 3$ teńliktiń shep tárepindegi logarifmniń tiykarın almastıramız:

$$\log_y x = \frac{\lg x}{\lg y} \;\Rightarrow\; \frac{\lg x}{\lg y} = 3 \;\Rightarrow\; \lg x = 3\lg y$$

Nátiyjede $\lg^2 y = 1$ teńlemege iye bolamız.
Bunnan

$$\lg y = -1 \;\Rightarrow\; y = \frac{1}{10}, \qquad \lg y = 1 \;\Rightarrow\; y = 10$$

ekenligi kelip shıǵadı.
$\lg x = 3\lg y$ teńlikten $x = y^3$ baylanıstı payda etip, x tıń sáykes mánislerin tabamız:

$$y = \frac{1}{10} \;\Rightarrow\; x = \frac{1}{1000}$$
$$y = 10 \;\Rightarrow\; x = 1000$$

Juwabı: $\left(\frac{1}{1000}; \frac{1}{10}\right)$ hám (1000; 10).

7-mısal. $\begin{cases} \log_2(x-y) = 1, \\ 2^x \cdot 3^{y+1} = 72 \end{cases}$ teńlemeler sistemasın sheshiń.

Sheshiliwi.
Sistema anıqlanǵan bolıwı ushın $x - y > 0$, yaǵnıy $x > y$ bolıwı kerek. Ol jaǵdayda sistemanıń birinshi teńlemesinen

$$x - y = 2 \;\Rightarrow\; y = x - 2$$

baylanıs kelip shıǵadı. Sistemanıń ekinshi teńlemesinde y ornına $x-2$ ańlatpanı qoyamız:

$$2^x \cdot 3^{x-2+1} = 72 \Rightarrow\; 2^x \cdot 3^x = 3 \cdot 72 \;\Rightarrow\; 6^x = 216 \;\Rightarrow\; 6^x = 6^3 \;\Rightarrow\; x = 3$$

Ol jaǵdayda $y = 1$.
Juwabı: (3; 1).

MÍSALLAR

1. Teńlemeler sistemasın sheshiń.

a) $\begin{cases} 3^x \cdot 7^y = 63 \\ 3^x + 7^y = 16 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 9^x - 3 \cdot 5^y = 3 \\ 9^x \cdot 5^y = 18 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3^y \cdot 2^x = 972 \\ y - x = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4^{x+y} = 128 \\ 5^{3y-2x-3} = 1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 3^{-x} \cdot 2^y = 1152 \\ x + y = 5 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2^x \cdot 9^y = 648 \\ 3^x \cdot 4^y = 432 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = \dfrac{1}{9} \\ \dfrac{1}{9} \cdot 3^y = 3^x \end{cases}$ h) $\begin{cases} 2^y \cdot 8^{-x} = 8\sqrt{2} \\ y + 3x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ i) $\begin{cases} 4^{y-1} \cdot 5^x = 6400 \\ y - x = 3 \end{cases}$

2. Teńlemeler sistemasın sheshiń.

a) $\begin{cases} \log_7 7x + \log_7 y = 2 \\ y - 5x = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \log_2 x - \log_2 y = 4 \\ y - x = 6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \log_2 \left(x^2 + y^2\right) = 5 \\ \log_2 x + \log_2 y = 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \log_3 2x - \log_3 \left(\dfrac{2}{y}\right) = 1 \\ 4x - y = 1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} \log_2 x - \log_4 y = 0 \\ \log_4 x + \log_2 y = 5 \end{cases}$ f) $\begin{cases} \log_2 2x + \log_2 \left(\dfrac{y}{2}\right) = -1 \\ x - y = -\dfrac{7}{4} \end{cases}$

3. Teńlemeler sistemasın sheshiń.

a) $\begin{cases} 3^x - 2^{y^2} = 77 \\ 3^{\frac{x}{2}} - 2^{\frac{y^2}{2}} = 7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3 \cdot 2^x - 2^{x+y} = -2 \\ 5 \cdot 2^{x+1} - 2^{x+y+1} = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 9^x - 3 \cdot 2^y = 3 \\ 9^x \cdot 2^y = 18 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \lg x (\lg x + \lg y) = 2 \\ \lg x - \lg y = 3 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 3^x \cdot 25^y = 5625 \\ 5^x \cdot 9^y = 2025 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^{\sqrt{y}} = y \\ y^{\sqrt{y}} = x^4 \end{cases}$ sistemanıń korenlerin ańlatıwshı noqatlar arasındaǵı aralıqtı tabıń.

5. $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 972, \\ \log_{\sqrt{3}}(x - y) = 2 \end{cases}$ x hám y teńlemeler sisteması korenleri bolsa, xy ti tabıń.

6. $\begin{cases} x^{y+1} = 27, \\ x^{2y-5} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$ x hám y teńlemeler sisteması korenleri bolsa, $x + y$ ti tabıń.

LOGARIFMLIK TEŃSIZLIKLER

Logarifmlik teńsizlikler

$a>0$ hám $a\neq 1$ bolsın. Ol jaǵdayda

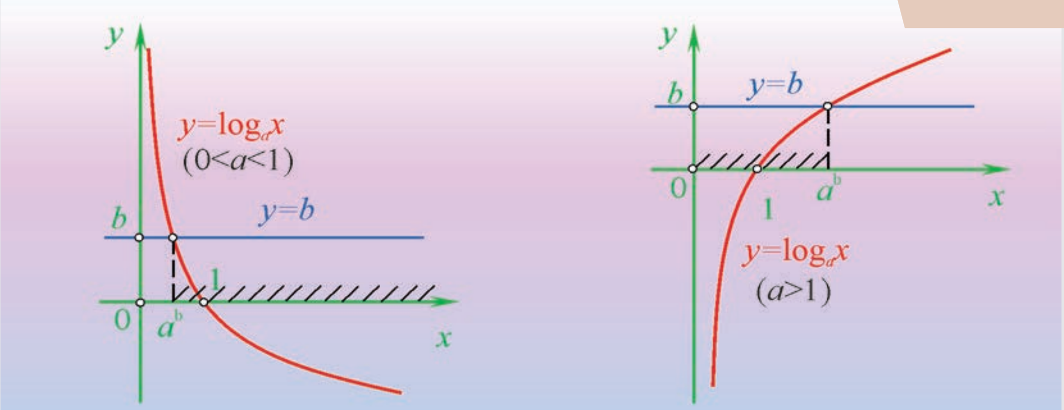
$$\log_a x<b,\ \log_a x>b,\ \log_a x\leq b,\ \log_a x\geq b$$

teńsizlikler logarifmlik teńsizlikler boladı. Olardı sheshiwde $y=\log_a x$ funkciyanıń monotonlıǵınan paydalanıladı.

$\log_a x<b$ teńsizlikti qarayıq. Bul teńsizliktiń sheshimi x ózgeriwshiniń sonday mánisleri kópligi bolıp, bul mánislerde $y=\log_a x$ funkciyanıń Oxy koordinatalar sistemasındaǵı grafigi $y=b$ tuwrı sızıqtan tómende jaylasqan boladı.

$\log_a x<b$ teńsizlik sheshiminiń geometriyalıq talqılanıwı.

1-súwret



a) $\log_a x<b$ *teńsizliktiń* $0<a<1$ *bolǵandaǵı sheshimi* $(a^b;\ +\infty)$ *aralıqtan ibarat.*

b) $\log_a x<b$ *teńsizliktiń* $a>1$ *bolǵandaǵı sheshimi* $(0;\ a^b)$ *aralıqtan ibarat.*

$\log_a x>b$, $\log_a x\leq b$, $\log_a x\geq b$ teńsizlikler sheshimleriniń geometriyalıq talqılanıwın óz betinshe keltiriń.

Logarifmlik teńsizliklerdi sheshiw

Usı $\log_a f(x)<\log_a g(x)$ logarifmlik teńsizliktiń sheshimi:

$0<a<1$ bolǵanda $\begin{cases} f(x)>g(x), \\ g(x)>0 \end{cases}$

teńsizlikler sistemasınıń sheshiminen;

$a>1$ bolǵanda bolsa $\begin{cases} f(x)<g(x), \\ f(x)>0 \end{cases}$ teńsizlikler sistemasınıń sheshiminen ibarat boladı.

$\log_a f(x)\leq\log_a g(x)$, $\log_a f(x)>\log_a g(x)$ hám $\log_a f(x)\geq\log_a g(x)$ teńsizliklerdiń sheshiliwi tómendegi kestede keltirilgen.

Logarifmlik teńsizlik-lerdiń túri	$\log_a f(x) \le \log_a g(x)$	$\log_a f(x) < \log_a g(x)$	$\log_a f(x) > \log_a g(x)$	$\log_a f(x) \ge \log_a g(x)$
$0<a<1$ bolǵanda	$\begin{cases} f(x) \ge g(x), \\ g(x) > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} f(x) \le g(x), \\ f(x) > 0 \end{cases}$
$a>1$ bolǵanda	$\begin{cases} f(x) \le g(x), \\ f(x) > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} f(x) \ge g(x), \\ g(x) > 0 \end{cases}$

1-mısal. $\log_{27} x > \frac{1}{3}$ teńsizlikti sheshiń.

Sheshiliwi.

Anıqlanıw oblastı $x > 0$. Logarifm tiykarı 1 den úlken ekenligi hám logarifm anıqlamasınan paydalanamız:

$$\log_{27} x > \frac{1}{3} \Rightarrow x > 27^{\frac{1}{3}} \Rightarrow x > \sqrt[3]{27} \Rightarrow x > 3 \begin{cases} x > 3 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 3 \Rightarrow x \in (3;\ \infty)$$

Juwabı: $x \in (3;\ \infty)$

2-mısal. $\log_{0,5}(2x-3) > \log_{0,5}(x+1)$ teńsizlikti sheshiń.

Sheshiliwi.

Teńsizlikti oǵan teń kúshli bolǵan tómendegi sistemaǵa keltirip sheshemiz:

$$\begin{cases} 2x-3 < x+1 \\ 2x-3 > 0 \\ x+1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x > 1{,}5 \\ x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x > 1{,}5 \end{cases} \Rightarrow x \in (1{,}5; 2)$$

Juwabı: $x \in (1,\ 5;\ 4)$

3-mısal. $\log_7^2 x - 13\log_7 x + 42 \ge 0$ teńsizlikti sheshiń.

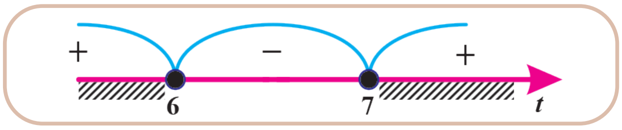
Sheshiliwi.

$t = \log_7 x$ belgilew kiritemiz. Nátiyjede

$$t^2 - 13t + 42 \ge 0$$

teńsizlik payda boladı.

$(t-6)(t-7) \ge 0$ teńsizlikti sheshemiz.



Demek, $t \le 6$ yamasa $t \ge 7$ eken. $\log_7 x \le 6$ yamasa $\log_7 x \ge 7$ boladı. Bunnan $x \le 7^6$ yamasa $x \ge 7^7$ teńsizlikler payda boladı. $x > 0$ shártti itibarǵa alsaq,

$$x \in \left(0;\ 7^6\right] \cup \left[7^7; \infty\right)$$

boladı.

Juwabı: $x \in \left(0;\ 7^6\right] \cup \left[7^7; \infty\right)$

$A\cdot\log_a^2x+B\cdot\log_a x+C<0$ sıyaqlı teńsizlikler $\log_a x$ belgilew arqalı kvadrat teńsizlikke keltirip esaplanadı.

4-mısal. Teńsizlikti sheshiń: $\log_3^2x-3\log_3x+2\le0$.

Sheshiliwi.

Anıqlanıw oblastı $x>0$.

$\log_3 x=t$ belgilew kirgizemiz,

$t^2-3t+2\le0$ teńsizlikti sheshemiz,

$(t-1)(t-2)\le0$, bunnan $1\le t\le2$

$1\le\log_3x\le2 \Rightarrow \log_3 3\le\log_3x\le\log_3 9 \Rightarrow 3\le x\le9$

Juwabı: [3;9]

5-mısal. $\log_{x+1}\left(x^2+2x+1\right)^{x^2+2x+5}>4x+28$ teńsizlikti sheshiń.

Sheshiliwi.

Teńsizlikti tómendegishe jazıp alamız:

$$\log_{x+1}(x+1)^{2(x^2+2x+5)}>4x+28$$

Bul jerde eki jaǵday bolıwı múmkin:

1-jaǵday. $0<x+1<1\Rightarrow-1<x<0$

Bunda: $2(x^2+2x+5)<4x+28 \Rightarrow x^2+2x+5<2x+14 \Rightarrow x^2-9<0 \Rightarrow x\in(-3;\ 3)$

$-1<x<0$ ekenliginen $x\in(-1;0)$

2-jaǵday. $x+1>1\Rightarrow x>0$

Bunda:

$2(x^2+2x+5)>4x+28 \Rightarrow x^2+2x+5>2x+14 \Rightarrow x^2-9>0 \Rightarrow x\in(-\infty;\ -3)\cup(3;\ \infty)$

$x>0$ ekenliginen $x\in(3;\infty)$

1- hám 2- jaǵdaylardı birlestirip, teńsizliktiń sheshimi tómendegishe boladı:

$$x\in(-1;0)\cup(3;\ \infty)$$

Juwabı: $x\in(-1;0)\cup(3;\ \infty)$

MÍSALLAR

1. Teńsizliklerdi sheshiń.

a) $\log_2 x > 3$ b) $\log_{0,5} x > 2$ c) $\log_2 8 > x$

d) $\log_5 x > 3$ e) $\log_3 x > 4$ f) $\log_3 x \geq \log_6 36$

g) $\log_2 x < \log_{49} 7$ h) $\log_{\frac{1}{5}}(x-5) > -2$ i) $\log_3(x+20) < 3$

j) $\log_3(4x+2) - \log_3 10 < 0$ k) $\log_8 64 > \log_{\frac{1}{5}} x$ l) $\log_4(5-x^2) > 1$

m) $\log_5(3x-2x^2) > 0$ n) $\log^2_{\frac{1}{2}} x - 9 \leq 0$ o) $5^{\log_5(x-7)} < 4$

2. $\log_2(4-x) - \log_2 7 < 0$ teńsizlikti qanaatlandıratuǵın pútin sanlar neshew?

3. Teńsizliklerdi sheshiń.

a) $\log_{\frac{4}{3}}(x+6) - \log_{\frac{4}{3}} 9 < \log_{\frac{4}{3}} 2 - \log_{\frac{4}{3}} 6$ b) $\log_2(x-1) < \log_2(3x-1)$

c) $\log_{\frac{1}{3}}(2x-4) \geq \log_{\frac{1}{3}}(x+1)$ d) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x-6) \geq -3$

e) $\lg^2 x + 11 \cdot \lg x + 10 < 0$ f) $\log_2^2 x - 6\log_2 x + 8 \leq 0$

g) $\log_2 \log_{\sqrt{2}}(x+1) < 1$ h) $2\log_{\frac{1}{5}}(x-2) + 3\log_5(x-2) < 1$

i) $\log_x x^2 + x > 1$ j) $\lg(x+2) + \lg(x-3) \leq \lg x^2$

4. Teńsizliklerdi sheshiń.

a) $\lg 10^{\lg(x^2+21)} > 1 + \lg x$ b) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\log_{0,25}(x^2-5x+8)} \leq 2,5$ c) $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(6^{x+1} - 36^x) \geq -2$

d) $\log_{\frac{x-1}{5x-6}}(\sqrt{6} - 2x) > 0$ e) $x^{1+\lg\sqrt{x}} < 0,1^{-2}$ f) $\sqrt{x^{4\lg x}} < 10x$

5. $\log_{0,2}(x^4+2x^2+1) > \log_{0,2}(6x^2+1)$ teńsizliktiń barlıq teris sheshimleri kópligin tabıń.

KÓRSETKISHLI HÁM LOGARIFMLIK FUNKCIYALARDÍŃ QOLLANÍLÍWÍ

Quramalı payız formulası hám onıń qollanılıwları

Aytayıq, qanday da bir Q_0 muǵdardaǵı pul qarızǵa alındı. Qarız beriwshi belgilengen múddette dáslepki muǵdardı qanday da bir P payda menen qaytarıwdı talap etiwi múmkin. Demek, kórsetilgen múddette qarız alıwshı qaytaratuǵın muǵdar

$$Q_1 = Q_0 + P$$

boladı. Múddet retinde bir kún, eki kún, ..., bir hápte, eki hápte, ..., bir ay, eki ay hám jáne basqa alınıwı múmkin. Bul jerde usı

$$p = \frac{P}{Q_0} \cdot 100\% .$$

shama *alınǵan qarızdı óz múddetinde qaytarıw payızı* dep ataladı.

1. Ápiwayı payız formulası. Eger payız tek ǵana alınǵan Q_0 muǵdarǵa qollanılsa, birinshi múddet aqırında qarız muǵdarı

$$Q_1 = Q_0 + \frac{p}{100} \cdot Q_0 = \left(1 + \frac{p}{100}\right) Q_0$$

boladı. Bunda

$$P_1 = \frac{p}{100} \cdot Q_0 = P$$

formula – qarız beriwshiniń birinshi múddet aqırındaǵı paydası. Bul procesti n márte tákirarlap, n-múddet aqırında qarız muǵdarı $Q_n = \left(1 + \frac{np}{100}\right) Q_0$

bolıwı, qarız beriwshiniń n-múddet aqırındaǵı paydası

$$P_n = \frac{np}{100} \cdot Q_0 \text{ (belgili bolǵanınday } P_n = nP\text{)}$$

bolıwı tabıladı. Bunday esaplanatuǵın payız ***ápiwayı payız***,

$$Q_n = \left(1 + \frac{np}{100}\right) Q_0$$

formula bolsa ***ápiwayı payız formulası*** dep ataladı.

2. Quramalı payız formulası. Payızdı alınǵan qarızǵa belgilengen paydanı qosıp qollanıw múmkin. Bul jerde birinshi múddet aqırında qarız muǵdarı

$$Q_1 = Q_0 + \frac{p}{100} \cdot Q_0 = \left(1 + \frac{p}{100}\right) Q_0$$

boladı. Bunda

$$P_1 = \frac{p}{100} \cdot Q_0 = P$$

formula – qarız beriwshiniń birinshi múddet aqırındaǵı paydası. Bul procesti n márte tákirarlap, n-múddet aqırında qarız muǵdarı

$$Q_n = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n Q_0$$

bolıwı, qarız beriwshiniń n-múddet aqırındağı paydası

$$P_n = Q_n - Q_0 = \left(\left(1+\frac{p}{100}\right)^n - 1\right)Q_0$$

bolıwı tabıladı. Bunday esaplanatuǵın payız ***quramalı payız***,

$$Q_n = \left(1+\frac{p}{100}\right)^n Q_0$$

formula bolsa ***quramalı payız formulası*** dep ataladı.

Ápiwayı hám quramalı payız formulaları paydalanılıwına say kóplep ámeliy mısal hám máseleler ushıraydı. Házirgi kúnde *kredit*, *ipoteka qarızı* kórinisinde túsinikler kóplep ushırasadı. Ipoteka qarızın esaplaw boyınsha másele sheshiw úlgisin keltiremiz.

Ádette qarız beriwshi bank, qarız alıwshı bolsa klient dep kórsetiledi. Banklar úy-jay alıwda (ipoteka), transport quralı, yamasa xojalıq zatları (televizor, suwıtqısh, mobil baylanıs telefonı hám basqalar) alıwda (kredit) qarızdı birneshe jılǵa shekem bolǵan uzaq múddetke beredi hám klientten hár ayda qarızdıń belgili muǵdarın tólep barıwdı talap etedi.

1-mısal. Dáslepki bahası 360 000 000 sum bolǵan jaydı jas shańaraq jıllıq 20% benen 15 jılǵa ipoteka qarızı arqalı aldı. 15 jıl dawamında bankke qansha qarjı qaytarıladı? Bul jerde bank qansha payda kóredi?

Sheshiliwi.

Dáslepki 360 000 000 sum qarjı bank tilinde ***tiykarǵı qarız*** dep ataladı. 1 jıl 12 aydan ibarat ekenligin eskertip ótemiz. Sonıń ushın klient bankke hár ayda tiykarǵı qarızdıń

$$\frac{360\ 000\ 000}{15\cdot 12} = 2\ 000\ 000$$

sum muǵdarın qaytarıwı kerek. Qaytarıwdıń birinshi ayında payda bolatuǵın payız tómendegishe tabıladı:

$$a_1 = 360\ 000\ 000\cdot\frac{20\%}{100\%}\cdot\frac{1}{12} = 6\ 000\ 000 \text{ sum.}$$

Demek, klient birinshi aydıń aqırında jámi

$$2\ 000\ 000 + 6\ 000\ 000 = 8\ 000\ 000$$

sum qaytarıwı kerek. Sonnan soń qalǵan pul

$$360\ 000\ 000 - 2\ 000\ 000 = 358\ 000\ 000$$

sum boladı. Ekinshi aydıń aqırında klient tiykarǵı qarızdıń 2 000 000 sum muǵdarın hám payda bolǵan usı

$$360\ 000\ 000 - 2\ 000\ 000 = 358\ 000\ 000$$

sum payız muǵdarın, barlıǵı bolsa

$$2\ 000\ 000 + 5\ 966\ 667 = 7\ 966\ 667$$

sum qarjını qaytarıwı kerek.

$(n-1)$-aydıń qarjısı tólengende,

$$360\ 000\ 000 - 2\ 000\ 000\cdot(n-1)$$

sum muǵdarda tiykarǵı qarız qaladı. n-ay aqırında klient bankke $2\ 000\ 000 + a_n$ muǵdarda pul tóleydi. Bul jerde a_n n- aydıń payızı bolıp,

$$a_n = \left(360\ 000\ 000 - 2\ 000\ 000 \cdot (n-1)\right) \cdot \frac{20\%}{100\%} \cdot \frac{1}{12} = (181-n) \cdot \frac{100\ 000}{3}$$

teńlik arqalı tabıladı. Kórinip turǵanınday, a_1, a_2, ... , a_n kemeyiwshi arifmetikalıq progressiya bolıp, onıń ayırması

$$d = a_n - a_{n-1} = (181-n) \cdot \frac{100\ 000}{3} - \left(181 - (n-1)\right) \cdot \frac{100\ 000}{3} = -\frac{100\ 000}{3}, \text{ yaǵnıy } d = -\frac{100\ 000}{3}$$

ke teń.

15 jıl – 180 aydan ibarat, sonıń ushın $1 \le n \le 180$ boladı. Demek,

$$a_1 = 6\ 000\ 000,\ a_{180} = \frac{100\ 000}{3}$$

bolıp, arifmetikalıq progressiyanıń 180 dana aǵzasınıń qosındısı

$$S_{180} = \frac{a_1 + a_{180}}{2} \cdot 180 = \frac{6\ 000\ 000 + \dfrac{100\ 000}{3}}{2} \cdot 180 =$$

$$= \frac{18\ 000\ 000 + 100\ 000}{3} \cdot 90 = 18\ 100\ 000 \cdot 30 = 543\ 000\ 000$$

boladı. Demek, klient bankke barlıǵı bolıp

$$360\ 000\ 000 + 543\ 000\ 000 = 903\ 000\ 000$$

sum qaytarıwı kerek eken. Bul jerde banktiń paydası 543 000 000 sum boladı.

Radioaktivlik ıdıraw

Yarım ıdıraw dáwiri. Ayrım ximiyalıq elementler óz yadrolarınan bóleksheler shıǵarıp turadı. Bunday elementler radioaktivlik elementler dep júrgiziledi, olardıń óz yadrolarınan bólekshe shıǵarıw procesi ***radioaktivlik ıdıraw*** dep ataladı. Radioaktivlik ıdıraw nátiyjesinde dáslepki ximiyalıq element basqa ximiyalıq elementke aylanıp qaladı.

Dáslepki ximiyalıq element massası m_0 bolıp, onıń yarım ıdırawına ketetuǵın waqıt T_1 bolsın. Ol jaǵdayda $t_1 = T_1$ waqıttan keyin ıdıramay qalǵan element massası $m_1 = \frac{m_0}{2}$ bolıp, m_1 massanıń yarım ıdırawı ushın T_2 waqıt sarplansın. $t_2 = T_1 + T_2$ waqıttan keyin ıdıramay qalǵan element massası $m_2 = \frac{m_1}{2} = \frac{m_0}{2^2}$ bolıp, massanıń yarım ıdırawı ushın T_3 waqıt sarplansın. Tap sonday-aq, $t_3 = T_1 + T_2 + T_3$ waqıttan keyin ıdıramay qalǵan element massası $m_3 = \frac{m_2}{2} = \frac{m_0}{2^3}$ bolıp, m_3 massanıń yarım ıdırawı ushın T_4 waqıt sarplansın. Bul process sheksiz dawam ettirilgen bolsın.

Uzaq jıllıq tájiriybe nátiyjesinde $T_1 = T_2 = T_3 = \ldots = T_n = T_{n+1} = \ldots$ bolıwı dálillengen. Demek, tap sonday bir element massasınıń yarım ıdırawı ushın ketetuǵın waqıt turaqlı muǵdar eken. Bul muǵdar ***elementtiń yarım ıdıraw dáwiri*** dep ataladı hám T arqalı belgilenedi:

$$T = T_1 = T_2 = T_3 = \ldots = T_n = T_{n+1} = \ldots\ .$$

Nátiyjede

$$t_1 = T_1 = T\,,$$
$$t_2 = T_1 + T_2 = 2T\,,$$
$$t_3 = T_1 + T_2 + T_3 = 3T\,,\ldots,$$
$$t_n = T_1 + T_2 + T_3 + \ldots + T_n = nT$$

teńlikler payda boladı. Dáslepki massası m_0 bolǵan elementtiń $t_n = nT$ waqıttan keyin ıdıramay qalǵan bóleginiń massası $m_n = \frac{m_0}{2^n} = 2^{-n} m_0$ boladı eken. Bul jerde $n = \frac{t_n}{T}$ ekenligin itibarǵa alsaq, $m_n = 2^{-\frac{t_n}{T}} m_0$ teńlikke iye bolamız. Bul formula qálegen t moment ushın da orınlı:

$$m(t) = 2^{-\frac{t}{T}} m_0 .$$

Solay etip, radioaktivlik elementtiń ıdıramay qalǵan bóleginiń massası waqıttıń kórsetkishli funkciyası eken.

2-mısal. Sutkanıń dáslepki 8 saatında radioaktivlik zattıń aktivligi 4 márte kemeyedi. Sutka dawamında zattıń aktivligi neshe márte kemeyedi?

Sheshiliwi. Qaralıp atırǵan zattıń dáslepki massası m_0 bolıp, yarım ıdıraw dáwiri T bolsın. 8 saattan keyin onıń massası $m(8) = \frac{m_0}{4}$ bolǵan. Bul berilgenler ushın $m(t) = 2^{-\frac{t}{T}} m_0$ formulanı qollanıp, zattıń yarım ıdıraw dáwiri tabıladı:

$$m(8) = 2^{-\frac{8}{T}} m_0 \Rightarrow \frac{m_0}{4} = 2^{-\frac{8}{T}} m_0 \Rightarrow 2^{\frac{8}{T}} = 2^2 \Rightarrow \frac{8}{T} = 2 \Rightarrow T = 4 \text{ saat}.$$

Endi $m(t) = 2^{-\frac{t}{T}} m_0$ formulanı jáne bir márte $t = 24$ (bir sutka = 24 saat) ushın isletip, radioaktivlik zattıń aktivligi sutka dawamında neshe márte kemeygenligi tabıladı:

$$m(24) = 2^{-\frac{24}{T}} m_0 = 2^{-6} m_0 = \frac{m_0}{64} .$$

Solay etip, sutka dawamında radioaktivlik zattıń aktivligi 64 márte kemeyedi.

Qoshımsha qun salıǵı

Qosımsha qun salıǵı qısqasha QQS dep ataladı. Siz salıq túsinigi menen tanıssız. Tovarlardı islep shıǵarıwshı yamasa import etiwshi (kótere yamasa usaqlap satıwshı) mámleketke sawda salıǵın tólewi kerek. *Qosımsha qun salıǵı* – islep shıǵarıwshıdan baslap usaqlap satıwshıǵa shekem jetkerip beriw shınjırınıń kóp orınlarında húkimet tárepinen óndiriletuǵın salıq. Hárbir basqıshta tek ǵana tovarǵa qosımsha muǵdar sawda salıǵına tartıladı. Sawda salıǵınıń aqırǵı nátiyjesi paydalanıwshıda qaladı.

Bul negizgi islep shıǵarıwshıdan satıwshıǵa tovarlardıń hárbir jetkerip beriwinde qosımsha qunǵa salıq.

Aytayıq, QQS stavkası 10% hám isbilermen 8 000 000 sumǵa tovar satıp aldı, ol tóleytuǵın salıq = 8 000 000 sumnıń 10 payızı = 800 000 sum.

Usı tovardı 11 500 000 sumǵa satsa, onnan óndiriletuǵın salıq = 11 500 000 nıń 10 payızı = 1 150 00 sum.

Isbilermen ushın QQS = 1 150 000 – 800 000 = 350 000 sum boladı.

MÍSALLAR (*kalkulyatordan paydalanıw múmkin*)

1. Dáslepki bahası 360 000 000 sum bolgan jaydı jıllıq 18% benen 20 jılga ipoteka qarızı arqalı alǵan shańaraq múddet aqırında bankke qansha qarjı qaytarǵan boladı? Bank paydası qansha boladı?

2. Jıllıq 8% benen 3 jıl múddetke 5000 AQSh dolları boyınsha quramalı payızlardı tabıń.

3. Axmet 50 mln sum qarız aldı hám birinshi, ekinshi hám úshinshi jıl ushın sáykes 10%, 12% hám 14% stavkada payız tólewge razı boldı. 3 jıldan keyin tólewi kerek bolgan ulıwma muǵdardı tabıń.

4. Bir adam bankke amanatqa jılına 10% dan 100 mln sum qoyǵan. Bunıń esabınan ol 133,1 mln sum payda aldı. Ol puldı qansha waqıt bankte saqlaǵan?

5. Amanatshı 26 million sumdı bank esabına ótkerdi. 18 aydan keyin onıń esabında 32 mln sum boldı. Jıllıq payız stavkası neshege teń?

6. Mende 400 dollar bar. Dostım maǵan bankke investiciya kiritiwdi usınıs etti. Men jıllıq 13% shet eldiń valyutasındaǵı esap betine hám hár ayda 1% toltırılatuǵın summa esabına investiciya kirittim.

a) Eger valyuta esap-betine pul kiritsem, bir jılda qansha payda alaman?

b) Eger men bul puldı sumǵa tolıq aylandırıp, summa esabına qoyǵan bolsam, bir jılda qanday muǵdarda dollar alaman? Dollar hám sum kursı ózgeriwin esapqa alıń.

7. Murat 10 mln sumǵa tovar satıp alsa 7% salıq tóleydi. Ol tap sonday usı tovardı 13 mln sumǵa satsa 9% salıq tóleydi. Murat tárepinen tólenetuǵın QQS ın tabıń.

8. Isbilermen buyımdı 7 500 000 sumǵa satsa qarıydardan 12% stavkada sawda salıǵın aladı. Eger ol 180 000 sum muǵdarında QQS tólese, isbilermen tárepinen tólengen salıqtı esapqa alǵan jaǵdayda buyımnıń dáslepki bahasın esaplań.

9. Islep shıǵarıwshı óz óniminiń bahasın hárbiri ushın 12 000 000 dep daǵazaladı. Ol kótere satıwshıǵa 30% shegirmege ruqsat berdi, kótere satıwshı bolsa, óz náwbetinde usaqlap satıwshıǵa daǵazalanǵan bahadan 20% shegirmege ruqsat berdi. Eger tovar ushın belgilengen sawda salıǵı stavkası 10% bolsa hám usaqlap satıwshı onı paydalanıwshıǵa daǵazalanǵan bahada satsa, kótere hám usaqlap satıwshı tárepinen tólengen qosılǵan qun salıǵın tabıń.

10. Usaqlap satıwshı kótere satıwshıdan buyımdı 80 000 sumǵa satıp aldı hám kótere satıwshı belgilengen 8% muǵdarında sawda salıǵın aladı. Usaqlap satıwshı bahasın 100 000 sum etip belgilep qoydı hám tap sonday stavkada sawda salıǵın paydalanıwshıdan óndiredi. Usaqlap satıwshı mámleketke qansha QQS tóleydi?

4-BAP. TRIGONOMETRIYALÍQ FUNKCIYALAR

- TRIGONOMETRIYALÍQ FUNKCIYALAR. PERIODLÍ PROCESLER
- KERI TRIGONOMETRIYALÍQ FUNKCIYALAR

TRIGONOMETRIYALÍQ FUNKCIYALAR HÁM OLARDÍŃ QÁSIYETLERI, GRAFIGI. PERIODLÍ PROCESLER

Trigonometriyalıq funkciyalar. Periodlı procesler

Tábiyatta, texnikada, óndiriste hám basqa tarawlarda waqıt ótiwi menen tákirarlanatuǵın hádiyse hám procesler kóplep ushırasadı. Máselen, quyashtıń shıǵıwı, máwsimler almasıwı, ishki janıw dvigatelinde porshen háreketi hám basqalar waqıt ótiwi menen tákirarlanadı. Bunday procesler ***periodlı procesler*** dep ataladı. Periodlı procesler trigonometriyalıq funkciyalar arqalı ańlatıladı.

Trigonometriyalıq funkciyalardı úyreniwde:

1) múyesh ólsheminiń gradus ólshemin;

2) 1° múyeshtiń 60 tan bir bólegi 1 *minut* (belgileniwi 1′), 1′ tıń 60 tan bir bólegi 1 *sekund* (belgileniwi 1″) ekenligin, yaǵnıy

$$1' = \frac{1^\circ}{60},\ 1'' = \frac{1'}{60} = \frac{1^\circ}{3600}$$

teńliklerdi;

3) múyesh ólsheminiń radian ólshemin;

4) múyeshtiń radian ólsheminen gradus ólshemine ótiw

$$\alpha\ rad = \left(\frac{180}{\pi}\cdot\alpha\right)^\circ$$

formulasın;

5) múyeshtiń gradus ólsheminen radian ólshemine ótiw

$$\alpha^\circ = \left(\frac{\pi}{180^\circ}\cdot\alpha\right) rad$$

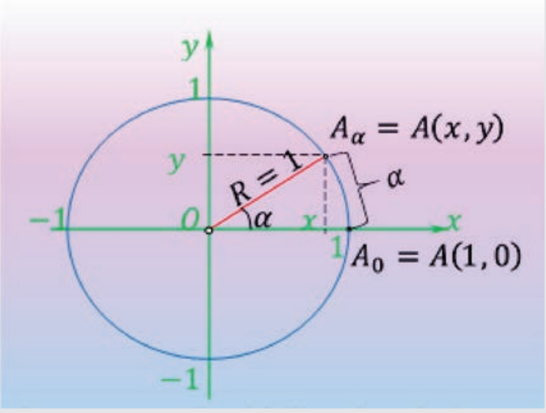
formulasın;

6) Keltiriw formulaların biliw talap etiledi.

Múyeshtiń sinusı, kosinusı, tangensi hám kotangensi

Oxy Dekart koordinatalar sisteması kiritilgen tegislikte orayı koordinatalar basında bolǵan **birlik sheńber** (yaǵnıy radiusı 1 ge teń sheńber)di qaraymız. $A_\alpha = A\ (1;\ 0)$ noqattı belgilep alamız. Sheńberde A_0 noqattan saat tili háreketine qarsı (yaǵnıy **oń**) baǵıtta uzınlıǵı α ǵa teń doǵa ajıratıp alamız hám onıń aqırın A_α arqalı belgileymiz (1-*súwret*). Múyesh ólsheminiń radian ólshemi anıqlanıwı boyınsha A_0OA_α múyeshtiń ólshemi α radianǵa teń boladı:

1-súwret



α radian birlik sheńberdegi uzınlıǵı α bolǵan $\overset{\frown}{A_0A_\alpha}$ doǵa oraylıq múyeshiniń múyesh ólshemi

$$\alpha = \angle A_0 O A_\alpha.$$

Dıqqat etiń! A_α noqat Oxy tegisliginde qanday da bir koordinataǵa iye boladı.

Meyli, A_α noqattıń Oxy tegisligindegi koordinataları (x; y) bolsın.

Anıqlama.

1) x ólshem α múyeshtiń *kosinusı* dep ataladı hám *cos*α arqalı belgilenedi;
2) y ólshem α múyeshtiń *sinusı* dep ataladı hám *sin*α arqalı belgilenedi;
3) $\frac{y}{x}$ qatnas α múyeshtiń *tangensi* dep ataladı hám *tg*α arqalı belgilenedi;
4) $\frac{x}{y}$ qatnas α múyeshtiń *kotangensi* dep ataladı hám *ctg*α arqalı belgilenedi.

Demek, anıqlama boyınsha:

$$\cos\alpha = x, \qquad \sin\alpha = y, \qquad tg\alpha = \frac{y}{x}, \qquad ctg\alpha = \frac{x}{y} \qquad (1)$$

boladı.

Esletpe! Egerde birlik sheńber ornına qálegen R radiuslı sheńber qaralsa, ol jaǵdayda

$$\cos\alpha = \frac{x}{R}, \qquad \sin\alpha = \frac{y}{R}, \qquad tg\,\alpha = \frac{y}{x}, \qquad ctg\,\alpha = \frac{x}{y} \qquad (1')$$

teńlikler payda boladı.

Sheńberdegi A_0 noqattı berilgen múyeshke tómendegishe eki baǵıtta oraylıq burıw múmkin:

Oń burıw: burılıw saat tili háreketine qarsı baǵıtta orınlanadı.

Teris burıw: burılıw saat tili háreketi baǵıtı boylap orınlanadı.

$y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tgx$, $y = ctgx$ funkciyalar hám olardıń qásiyetleri, grafigi

Hárbir x sanǵa birlik sheńberdegi A_0 noqattan baslap x múyeshke burıwda payda bolatuǵın A_x noqattı sáykes qoyayıq. Ol jaǵdayda, sheńberdegi A_x noqat ushın *sinx*, *cosx*, *tgx*, *ctgx* mánislerdi esaplaw múmkin. Nátiyjede x sanǵa *sinx*, *cosx*, *tgx*, *ctgx* mánislerdi sáykes qoyıwshı hám ***trigonometriyalıq funkciyalar*** dep atalıwshı usı

$$y = \sin x, \; y = \cos x, \; y = tgx, \; y = ctgx$$

funkciyalarǵa iye bolamız.

Bul funkciyalar periodlı, yaǵnıy hárbir $k \in Z$ ushın tómendegi teńlikler orınlı boladı:

$$\sin(x+2\pi k)=\sin x$$

$$\cos(x+2\pi k)=\cos x$$

$$tg(x+\pi k)=tgx$$

$$ctg(x+\pi k)=ctgx$$

Demek, $y = sinx$ hám $y = cosx$ funkciyalardıń tiykarǵı periodı $T_0 = 2\pi$, hám $y = tgx$ hám $y = ctgx$ funkciyalardıń tiykarǵı periodı $T_0 = \pi$ eken.

$y = cosx$ funkciya jup:

$$f(-x) = cos(-x) = cos\,x = f(x).$$

$y = sinx$, $y = tgx$, $y = ctgx$ funkciyalar bolsa taq:

$$f(-x) = sin(-x) = -sin\,x = -f(x)$$

$$f(-x) = tg(-x) = -tg\,x = -f(x)$$

$$f(-x) = ctg(-x) = -ctg\,x = -f(x)$$

Belgili bolǵanınday,

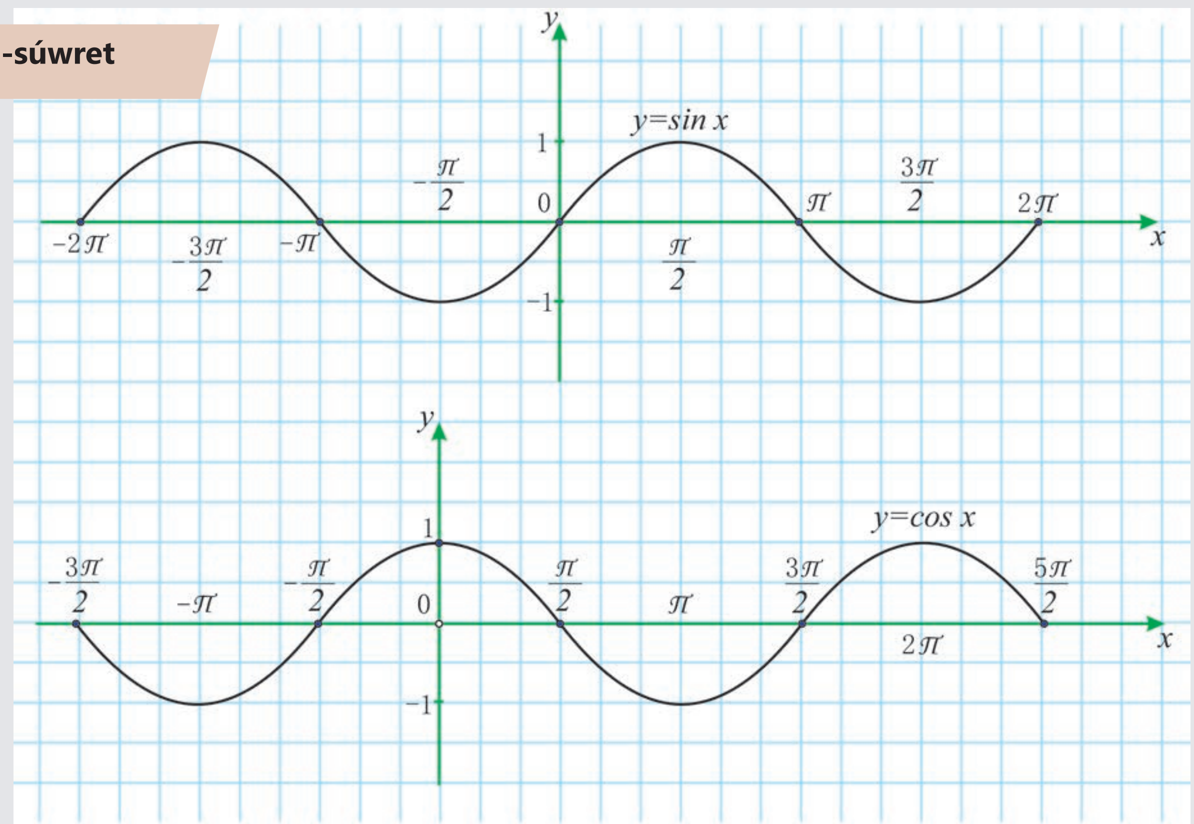
$y = sinx$ hám $y = cosx$ funkciyalar ushın $D(y) = (-\infty; +\infty)$, $E(y) = [-1; 1]$;

$y = tgx$ funkciya ushın $D(y) = \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in Z$, $E(y) = (-\infty, +\infty)$;

$y = ctgx$ funkciya ushın $D(y) = (\pi k;\ \pi + \pi k)$, $k \in Z$, $E(y) = (-\infty, +\infty)$ boladı.

Tómendegi súwretlerde trigonometriyalıq funkciyalar grafikleri keltirilgen.

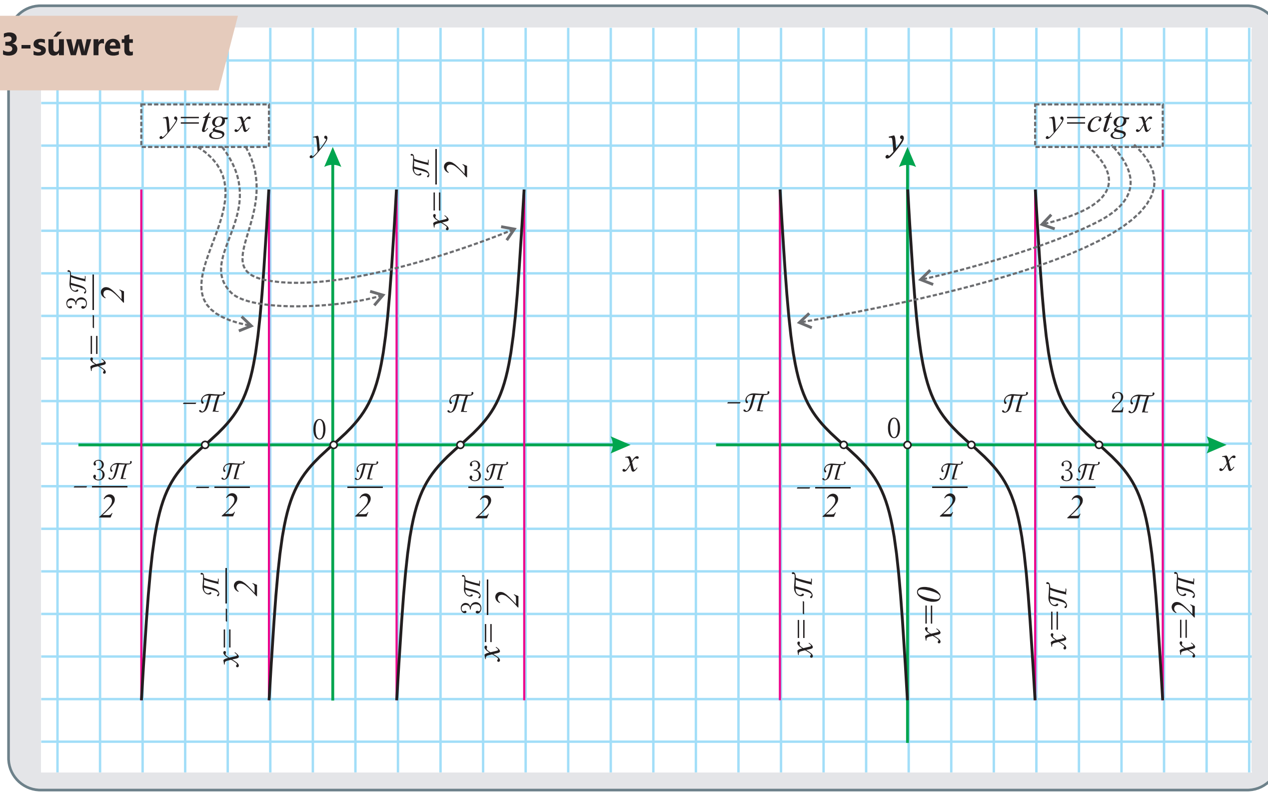
2-súwret



Bul grafiklerden tómendegi juwmaqlar kelip shıǵadı:

1) $y = sinx$ funkciya $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ aralıqta ósedi hám bul aralıqtan alınǵan hárbir x qa y tiń $[-1; 1]$ kesindidegi tek ǵana bir mánisi sáykes keledi;

3-súwret



2) $y = cosx$ funkciya $[0; \pi]$ aralıqta kemeyedi hám bul aralıqtan alınǵan hárbir x qa y tiń $[-1; 1]$ kesindidegi tek ǵana bir mánisi sáykes keledi;

3) $y = tgx$ funkciya $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ aralıqta ósedi hám bul aralıqtan alınǵan hárbir x qa y tiń $(-\infty; +\infty)$ aralıqtaǵı tek ǵana bir mánisi sáykes keledi;

4) $y = ctgx$ funkciya $(0; \pi)$ aralıqta kemeyedi hám bul aralıqtan alınǵan hárbir x qa y tiń $(-\infty; +\infty)$ aralıqtaǵı tek ǵana bir mánisi sáykes keledi.

Anıqlanıw oblastın tabıwǵa say mısallardı sheshiwde ayırım jaǵdaylarda funkciya anıqlanbaǵan noqatlardı kórsetiw jeterli boladı.

1-mısal. $y = 2tg(3x-1)$ funkciyanıń anıqlanıw oblastın tabıń.

Sheshiliwi. $y = tgx$ funkciya $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$ noqatlarda anıqlanbaǵan, sonıń ushın $y = 2tg(3x-1)$ funkciya argumenttiń $3x-1 = \frac{\pi}{2} + \pi n$ mánislerinde anıqlanbaǵan. Bul jerden $x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{1}{3} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z$.

Juwabı: $y = 2tg(3x-1)$ funkciya $x = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{3} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z$ noqatlardan basqa barlıq haqıyqıy sanlarda anıqlanǵan.

2-mısal. $y = 2 - \frac{1}{3}cos(5x-4)$ funkciyanıń mánisler kópligin tabıń.

Sheshiliwi. Bul mısaldı sheshiwde

$$-1 \leq cos\,x \leq 1$$

qos teńsizlik x tıń barlıq mánislerinde orınlı bolıwınan paydalanamız. Demek,

$$-1 \le cos(5x-4) \le 1$$

Joqarıdağı qos teńsizlikti $-\frac{1}{3}$ ge kóbeytemiz hám tómendegi qos teńsizlikti payda etemiz:

$$-\frac{1}{3} \le -\frac{1}{3}cos(5x-4) \le \frac{1}{3}$$

Bul qos teńsizliktiń hárbir tárepine 2 ni qossaq,

$$2-\frac{1}{3} \le 2-\frac{1}{3}cos(5x-4) \le 2+\frac{1}{3}$$

$$1\frac{2}{3} \le 2-\frac{1}{3}cos(5x-4) \le 2\frac{1}{3}$$

yamasa

$$1\frac{2}{3} \le y \le 2\frac{1}{3}$$ payda boladı.

Juwabı: Berilgen funkciyanıń mánisler kópligi $\left[1\frac{2}{3};2\frac{1}{3}\right]$ kesindiden ibarat, yamasa $E(y)=\left[1\frac{2}{3};2\frac{1}{3}\right]$.

$y=f(x)$ funkciyanıń tiykarğı periodı T bolsa, $y=af(kx+b)$ funkciya ushın $\frac{T}{|k|}$ muğdar eń kishi oń periodı bolıwı belgili $k \neq 0$.

3-mısal. $y=2sin\left(\frac{4}{3}x+7\right)$ funkciyanıń eń kishi oń periodın tabıń.

Sheshiliwi. $y=sin\,x$ funkciyanıń tiykarğı periodı $T=2\pi$ ge teń. Sonıń ushın $y=2sin\left(\frac{4}{3}x+7\right)$ funkciyanıń eń kishi oń periodı

$$\frac{T}{k}=\frac{T}{\frac{4}{3}}=\frac{3T}{4}=\frac{3\cdot 2\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}$$ boladı.

Juwabı: Berilgen funkciyanıń eń kishi oń periodı $\frac{3\pi}{2}$

MÍSALLAR

1. Funkciyanıń anıqlanıw oblastın tabıń.

a) $y=cos\,3x$ b) $y=sin\frac{2x-1}{5}$ c) $y=sin\frac{1}{x+5}$ d) $y=sin\sqrt{\frac{1-x}{x+3}}$

e) $y=tg3x$ f) $y=ctg\frac{2x}{5}$ g) $y=tg\frac{1}{x}$

2. Funkciyanıń mánisler kópligin tabıń.

a) $y=-1+cos\,x$ b) $y=-6\,sin\,3x\,cos\,3x$ c) $y=2+cos\,x$ d) $y=-3\,sin\,2x+2$

e) $y=5tg4x$ f) $y=3-4\,cos\,5x$ g) $y=-5+\frac{1}{2}cos\,x\,sin\,x$

3. Funkciyanıń jup yamasa taq ekenligin anıqlań.

a) $y=2xtgx$ b) $y=x^3-tg^3x$ c) $y=tgx\,sin^2x$ d) $y=tg\,2x+2\,sin\,x$

e) $y = x^2 + tg^2 x$ f) $y = tg10|x|$ g) $y = \dfrac{x^2 + \cos x}{2}$ h) $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{x+5}$

4. $y = sinx$ funkciyanıń grafiginen paydalanıp, tómendegi funkciyalardıń grafiklerin sızıń.

a) $y = -sinx$ b) $y = 2sinx$ c) $y = -0.5sinx$ d) $y = |sinx|$

e) $y = \sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$ f) $y = |sin|x||$ g) $y = 1 + sinx$ h) $y = sin2x$

5. $y = cosx$ funkciyanıń grafiginen paydalanıp, tómendegi funkciyalardıń grafiklerin sızıń.

a) $y = -cosx$ b) $y = 0{,}5cosx$ c) $y = cos2x$ d) $y = |cosx|$

e) $y = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$ f) $y = |cos|x||$ g) $y = 2 - cosx$ h) $y = cos4x$

6. Funkciyanıń grafigin sızıń.

a) $y = tg2x$ b) $y = ctg\dfrac{x}{2}$ c) $y = 2tgx$ d) $y = \dfrac{1}{3}ctgx$

7. Funkciyanıń jup yamasa taq ekenligin anıqlań.

a) $y = \dfrac{\cos 2x - \sin^2 x}{x^2}$ b) $y = ctg3x + 5sinx$ c) $y = sin5x$

d) $y = 2sin^2x$ e) $y = sin^2x + sinx$ f) $y = 5sin^3x + 2sinx$

8. $f(x)$ funkciya $(-\infty;\infty)$ aralıqta anıqlanǵan bolsın:

a) $f(x) + f(-x)$ jup funkciya ekenligin kórsetiń;

b) $f(x) - f(-x)$ taq funkciya ekenligin kórsetiń.

9. Funkciyanıń eń kishi oń periodın tabıń.

a) $f(x) = cos(3x+1)$ b) $f(x) = \sin\left(\dfrac{x}{4} - 3\right)$ c) $f(x) = tg(2x+1)$

d) $f(x) = sin2\pi x$ e) $f(x) = \cos\sqrt{3x}$ f) $f(x) = tg(4\pi x - 3)$

10. Berilgen $f(x)$ funkciyanıń eń kishi oń periodın tabıń:

a) $f(x) = \sin\dfrac{3x}{2} + tg7x$ b) $f(x) = \cos x + 2\sin\left(\dfrac{3x}{5} + \dfrac{\pi}{6}\right)$

c) $f(x) = ctg(x-1) - 3sin3x$ d) $f(x) = \sin 3x + \cos\dfrac{3x}{4} + \dfrac{1}{2}tg\dfrac{9x}{5}$

11. $T = -5\pi$ sanı $f(x) = \sin 6x$ funkciyanıń periodı bolıwın kórsetiń.

12. $T = \pi$ sanı $f(x) = \sqrt{\sin 2x - 1}$ funkciyanıń periodı bolıwın kórsetiń.

13. Tómendegi funkciyalardan qaysılarınıń eń kishi oń periodı π ǵa teń.

a) $y = sinx$ b) $y = cosx$ c) $y = tgx$ d) $y = ctgx$

14. Funkciyanıń grafigin sızıń.

a) $y = |\sin x|$ b) $y = |\cos x|$ c) $y = |tgx|$ d) $y = |ctgx|$

KERI TRIGONOMETRIYALÍQ FUNKCIYALAR HÁM OLARDÍŃ QÁSIYETLERI, GRAFIGI

KERI TRIGONOMETRIYALÍQ FUNKCIYALAR

Kúndelikli turmısta imaratlardı, kópirlerdi, transport qualların, elektrostanciyaların, samolyot hám basqa qurılmalardı buzılıwına alıp keliwshi rezonans hádiysesi ushırap turadı. Rezonans hádiysesi periodlı proceslerdiń óz ara úylesiwi nátiyjesinde gúzetiledi. Bunday jağdaylardıń aldın alıw ushın trigonometriyalıq funkciyalar berilgen mánisti argumenttiń qanday mánisinde qabıl etiwin, yağnıy keri trigonometriyalıq funkciyalardı biliw kerek.

Keri trigonometriyalıq funkciyalardı úyreniwde tómendegilerdi biliw talap etiledi:

1) trigonometriyalıq funkciyalardıń periodlılığın hám olardıń tiykarğı periodların;

2) $y = sinx$ funkciya $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ aralıqta ósedi hám bul aralıqtan alınğan hárbir x qa y tiń $[-1; 1]$ kesindidegi tek ğana bir mánisi sáykes keledi;

3) $y = cosx$ funkciya $[0; \pi]$ aralıqta kemeyedi hám bul aralıqtan alınğan hárbir x qa y tiń $[-1; 1]$ kesindidegi tek ğana bir mánisi sáykes keledi;

4) $y = tgx$ funkciya $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ aralıqta ósedi hám bul aralıqtan alınğan hárbir x qa y tiń $(-\infty; +\infty)$ aralıqtağı tek ğana bir mánisi sáykes keledi;

5) $y = ctgx$ funkciya $(0; \pi)$ aralıqta kemeyedi hám bul aralıqtan alınğan hárbir x qa y tiń $(-\infty; +\infty)$ aralıqtağı tek ğana bir mánisi sáykes keledi.

y = arcsinx funkciya hám onıń qásiyetleri, grafigi

$$y = sinx$$

teńleme $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ aralıqta x ózgeriwshige qarata bir mánisli sheshiledi hám bul koren

$$x = arcsiny$$

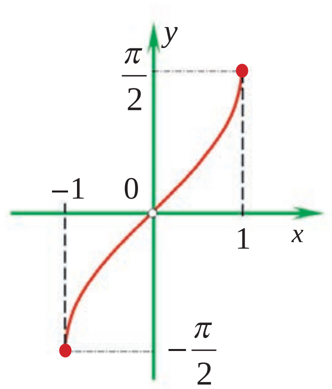
kóriniste jazıladı. Bul teńlik penen $[-1; 1]$ kópliktiń hárbir y elementine $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ kópliktiń tek ğana bir x elementin sáykes qoyıwshı arksinus funkciyası anıqlanadı. Anıqlanğan bul sáykeslikte argumentti x arqalı, funkciyanı bolsa y arqalı belgilep, onı $y = arcsinx$ kóriniste jazamız (1-*súwret*).

$y = arcsinx$ funkciya $y = sinx$ funkciyağa keri funkciya boladı:

$$sin(arcsinx) = x,\ x \in [-1; 1]$$

$$arcsin(sinx) = x,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

1-súwret



***y = arcsinx* funkciyanıń grafigi**

$y = arcsinx$ funkciya qásiyetleri :

- $D(y) = [-1;1]$;
- $E(y) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;
- $y = arcsinx$ – ósiwshi funkciya;
- $y = arcsinx$ funkciyanıń eń úlken mánisi $\frac{\pi}{2}$ ge, eń kishi mánisi $-\frac{\pi}{2}$ ge teń;
- $y = arcsinx$ funkciyanıń grafigi koordinata basınan ótedi;
- $y = arcsinx$ – taq funkciya, yaǵnıy $arcsin(-x) = -arcsinx$;
- $y = arcsinx$ funkciya periodlı emes.

1-mısal. $arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$ ańlatpanıń mánisin tabıń.

Sheshiliwi. Meyli, $arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = x$ bolsın. Ol jaǵdayda berilgen tapsırmanı basqasha qoyıw múmkin: $sinx = \frac{\sqrt{3}}{2}$ teńlikti qanaatlandırıwshı x tıń $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ aralıqtaǵı mánisin tabıń.

$sinx = \frac{\sqrt{3}}{2}$ teńlik $x = \frac{\pi}{3}$ bolǵanda orınlanıwı belgili. Demek, $arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$.

Tómendegi kestede $arcsinx$ ańlatpanıń ayırım mánisleri keltirilgen.

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$arcsinx$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

$y = arccosx$ funkciya hám onıń qásiyetleri, grafigi

$$y = cosx$$

teńlik $[0; \pi]$ aralıqta x ózgeriwshige qarata bir mánisli sheshiledi hám bul sheshim

$$x = arccosy$$

kóriniste jazıladı. Bul teńlik penen $[-1; 1]$ kópliktiń hárbir y elementine $[0; \pi]$ kópliktiń tek ǵana bir x elementin sáykes qoyıwshı arkkosinus funkciyası anıqlanadı. Anıqlanǵan bul sáykeslikte argumentti x arqalı, funkciyanı bolsa y arqalı belgilep, onı

$$y = arccosx$$

kóriniste jazamız (2-*súwret*).

$y = arccosx$ funkciya $y = cosx$ funkciyaǵa keri funkciya boladı:

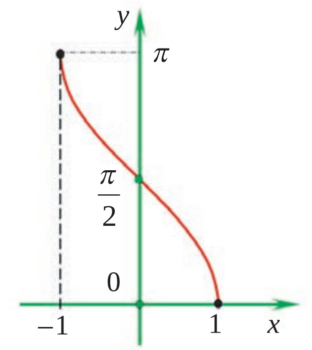
$$cos(arccosx) = x,\ x \in [-1; 1]$$

$$arccos(cosx) = x,\ x \in [0; \pi]$$

$y = arccosx$ funkciya tómendegi qásiyetlerge iye:

- $D(y) = [-1;1]$;
- $E(y) = [0;\pi]$;
- $y = arccosx$ – kemeyiwshi funkciya;
- $y = arccosx$ funkciyanıń eń úlken mánisi π ǵa, eń kishi mánisi 0 ge teń;
- $y = arccosx$ funkciyanıń grafigi Ox kósherin abscissası $x = 1$ bolǵan (1; 0) noqatta, Oy kósherin bolsa ordinatası $y = \frac{\pi}{2}$ bolǵan $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ noqatta kesip ótedi;
- $y = arccosx$ – taq ta emes, jup ta emes. Bul jerde $arccos(-x) = \pi - arccosx$ teńlik orınlı boladı;
- $y = arccosx$ funkciya periodlı emes.

2-súwret



$y = arccosx$ funkciyanıń grafigi

2-mısal. $arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$ ańlatpanıń mánisin tabıń.

Sheshiliwi. Meyli, $arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = x$ bolsın. Ol jaǵdayda, berilgen wazıypanı tómendegishe ańlatıw múmkin: $cosx = \frac{\sqrt{2}}{2}$ teńlikti qanaatlandırıwshı x tıń $[0; \pi]$ aralıqtaǵı mánisin tabıń. $cosx = \frac{\sqrt{2}}{2}$ teńlik $x = \frac{\pi}{4}$ bolǵanda orınlanadı. Demek,

$$arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Tómendegi kestede *arccosx* ańlatpanıń ayırım mánisleri keltirilgen.

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$arccosx$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

$y = arctgx$ funkciya hám onıń qásiyetleri, grafigi

$$y = tgx$$

teńlik $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ aralıqta x ózgeriwshige qarata bir mánisli sheshiledi hám bul sheshim

$$x = arctgy$$

kóriniste jazıladı. Bul teńlik penen $R = (-\infty; +\infty)$ kópliktiń hárbir y elementine $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ kópliktiń tek ǵana bir x elementin sáykes qoyıwshı arktangens funkciyası anıqlanadı. Anıqlanǵan bul sáykeslikte argumentti x arqalı, funkciyanı bolsa y arqalı belgilep, onı

$$y = arctgx$$

kóriniste jazamız (3-*súwret*).

$y = arctgx$ funkciya $y = tgx$ funkciyaǵa keri funkciya boladı:

$$tg(arctgx) = x,\ x \in (-\infty; +\infty)$$

$$tg(arctgx) = x,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

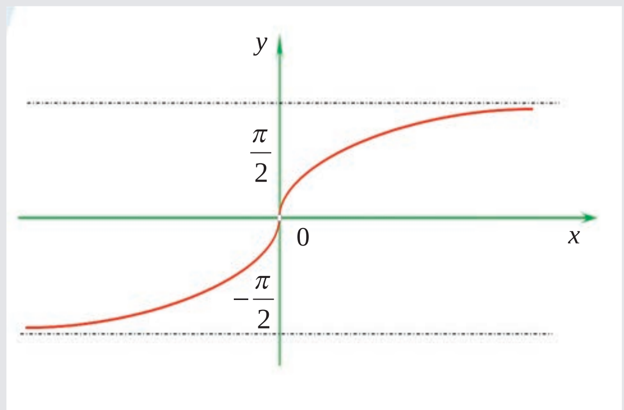
$y = arctgx$ funkciya tómendegi qásiyetlerge iye:

- $D(y) = (-\infty; +\infty)$;
- $E(y) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;
- $y = arctgx$ – ósiwshi funkciya;
- $y = arctgx$ funkciya eń úlken hám eń kishi mánislerge iye bolmaydı ;
- $y = arctgx$ funkciyanıń grafigi koordinata basınan ótedi;
- $y = arctgx$ – taq funkciya, yaǵnıy

$$arctg(-x) = -arctgx;$$

- $y = arctgx$ funkciya periodlı emes.

3-súwret



$y = arctgx$ funkciyanıń grafigi

3-mısal. $arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ańlatpanıń mánisin tabıń.

Sheshiliwi. Meyli, $arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = x$ bolsın. Ol jaǵdayda, $tgx = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ teńlikti qanaatlandırıwshı x tıń mánisin tabıw talap etiledi.

$tg\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ boladı. Demek, $arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$.

Tómendegi kestede $arctgx$ ańlatpanıń ayırım mánisleri keltirilgen.

x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$arctgx$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

$y = arcctgx$ funkciya hám onıń qásiyetleri, grafigi

$$y = ctgx$$

teńlik $(0;\ \pi)$ aralıqta x ózgeriwshige qarata bir mánisli sheshiledi hám bul sheshim

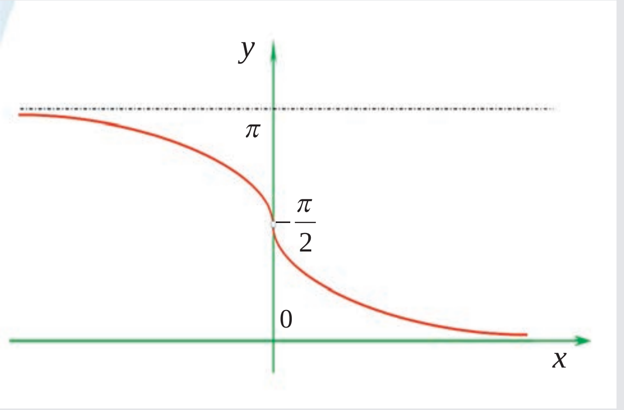
$$x = arcctgy$$

kóriniste jazıladı. Bul teńlik penen $R \in (-\infty;\ +\infty)$ kópliktiń hárbir y elementine $(0;\ \pi)$ kópliktiń tek ǵana bir x elementin sáykes qoyıwshı arkkotangens funkciyası anıqlanadı. Anıqlanǵan bul sáykeslikte argumentti x arqalı, funkciyanı bolsa y arqalı belgilep, onı

$$y = arcctgx$$

kóriniste jazamız (4-*súwret*).

4-súwret



y = arcctgx funkciyanıń grafigi

$y = arcctgx$ funkciya $y = ctgx$ funkciyaǵa keri funkciya boladı:

$$ctg(arcctgx) = x,\ x \in (-\infty;\ +\infty),\ arcctg(ctgx) = x,\ x \in (0;\ \pi).$$

$y = arcctgx$ funkciya tómendegi qásiyetlerge iye:

- $D(y) = (-\infty; +\infty)$;
- $E(y) = (0; \pi)$;
- $y = arcctgx$ – kemeyiwshi funkciya;
- $y = arcctgx$ funkciya eń úlken hám eń kishi mánislerge iye bolmaydı;
- $y = arcctgx$ funkciyanıń grafigi Ox kósheri menen kesilispeydi, Oy kósheri menen bolsa ordinatası $y = \dfrac{\pi}{2}$ bolǵan $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ noqatta kesilisedi;
- $y = arcctgx$ – taq ta emes, jup ta emes. Bul funkciya ushın $arcctg(-x) = \pi - arcctg\,x$ teńlik orınlanadı;
- $y = arcctgx$ funkciya periodlı emes.

4-mısal. $arcctg\sqrt{3}$ ańlatpanıń mánisin tabıń.

Sheshiliwi. Meyli, $arcctg\sqrt{3} = x$ bolsın. Ol jaǵdayda $ctgx = \sqrt{3}$ teńlikti qanaatlandırıwshı x tıń mánisin tabıw talap etiledi. $ctg\dfrac{\pi}{6} = \sqrt{3}$ boladı. Demek, $arcctg\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{6}$.

Tómendegi kestede $arcctgx$ ańlatpanıń ayırım mánisleri keltirilgen.

x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$arcctgx$	$\dfrac{5\pi}{6}$	$\dfrac{3\pi}{4}$	$\dfrac{2\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{6}$

MÍSALLAR

1. Tómendegi ańlatpalar mániske iye boladı ma?

a) $arcsin(\sqrt{3}-1)$ b) $arcsin(4-\sqrt{5})$ c) $arccos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

d) $arccos\left(\sqrt{2}\right)$ e) $arctg(\sqrt{2})$ f) $arcctg(-100)$

2. Esaplań:

a) $arcsin\frac{1}{2}$ b) $arcsin\ (-1)$ c) $arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}$ d) $arcsin 0$

e) $arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$ f) $arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ g) $arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ h) $arccos\frac{1}{2}$

i) $arccos 0$ j) $arccos\frac{1}{\sqrt{2}}$ k) $arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ l) $arctg 0$

m) $arctg(-1)$ n) $arctg\frac{1}{\sqrt{3}}$ o) $arctg\sqrt{3}$ p) $arctg 1$

q) $arctg(-\sqrt{3})$ r) $arcctg\sqrt{3}$ s) $arcctg(-1)$ t) $arcctg\frac{1}{\sqrt{3}}$

3. Esaplań.

a) $arcsin\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}-1}-\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}\right)$ b) $arccos\left(\frac{10+5\sqrt{5}}{\frac{5}{2}(3+\sqrt{5})}-\frac{\frac{5}{2}(3+\sqrt{5})}{10+5\sqrt{5}}\right)$

c) $arctg\left(\frac{1-2(2+\sqrt{3})}{3+\sqrt{3}}-\frac{1}{1+\sqrt{3}}\right)$ d) $arcctg\left(\frac{1+\sqrt{\frac{7}{3}}-\frac{2}{\sqrt{3}}}{1-\sqrt{\frac{7}{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}}-\frac{1-\sqrt{\frac{7}{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\sqrt{\frac{7}{3}}-\frac{2}{\sqrt{3}}}\right)$

4. Esaplań.

a) $cos(arctg 2)$ b) $sin(arctg 7)$ c) $cos\left(arcsin\frac{1}{4}\right)$

d) $ctg(arctg 5)$ e) $sin(arctg 11)$ f) $sin\left(arccos\frac{1}{5}\right)$

g) $cos(arcctg(-4))$ h) $ctg(arcsin(-0{,}9))$ i) $sin\left(arccos\left(-\frac{4}{7}\right)\right)$

j) $ctg(arctg(-15))$ k) $tg(arccos(-0{,}3))$ l) $ctg\left(arccos\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right)$

5. Esaplań.

a) $cos(2arcsin 0{,}2)$ b) $sin\left(2arccos\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$ c) $sin(2arcctg\sqrt{26})$

d) $tg(2arccos 0{,}6)$ e) $tg\left(2arcsin\frac{7}{9}\right)$ f) $cos(2arccos(-0{,}8))$

g) $tg(2arcctg(-3))$ h) $sin(2arcsin(-0{,}1))$ i) $tg(2arcctg 20)$

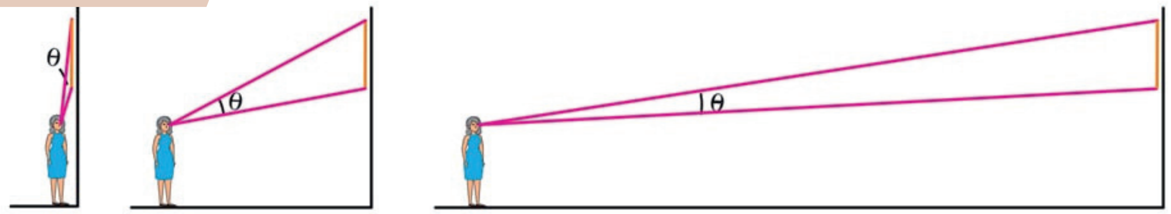
JOYBARLAW JUMÍSÍ

KINOTEATRDA QAY JERDE OTÍRÍW KEREK?

Obyekttiń kórinetuǵın ólshemi onıń tamashagóyden uzaqlıǵına baylanıslılıǵın hámme biledi. Obyekt qanshelli uzaqta bolsa, onıń kórinetuǵın ólshemi sonshelli kishi boladı. Kórinetuǵın ólshem obyekttiń tamashagóydiń kózine qaraǵan múyeshi menen belgilenedi.

Diywalǵa asılǵan súwret kózińizge maksimal kóriniwi ushın odan qansha aralıqta turıwıńız kerek? Súwret kóz dárejesinen joqarıda jaylasqan bolsa, onda tómendegi 1-súwrette kórsetilgendey siz jaqın yamasa uzaq bolsańız, kóz názeri astındaǵı múyesh kishi ekenligi anıq.

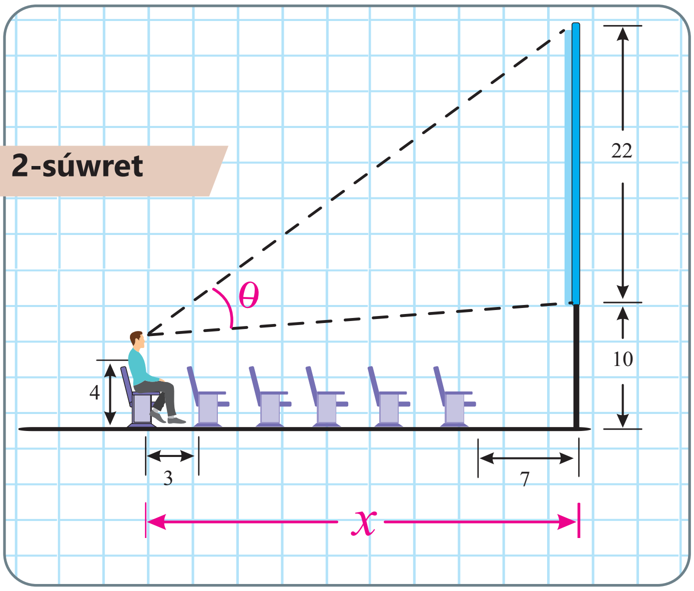
1-súwret



Tap sonday jaǵday kinoteatrda orınlıqtı tańlawda da júz beredi.

1. Kinoteatrdaǵı ekran 22 fut biyiklikte hám tegis poldan 10 fut biyiklikte jaylasqan. Orınlıqlardıń birinshi qatarı ekrannan 7 fut, qatarlar bolsa 3 fut aralıqta jaylasqan. Siz maksimal kóriniske iye bolǵan qatarǵa otırıwǵa qarar ettińiz, yaǵnıy ekrannıń kózińiz názerindegi múyeshi θ maksimal bolǵan orında. Meyli, kózlerińiz súwrettegi kórsetilgendey poldan 4 fut biyiklikte hám siz ekrannan x aralıqta otırıpsız (1 fut = 0,3048 m) (2-*súwret*).

2-súwret



Tómendegini dálilleń: $\theta = arctg\dfrac{28}{x} - arctg\dfrac{6}{x}$

Tómendegini keltirip shıǵarıw ushın ayırmanıń tangensi formulasınan paydalanıń:

$$\theta = arctg\left(\frac{22x}{x^2+168}\right)$$

Geogebra qosımshasınan paydalanıp θ nıń x qa qarata funkciyası kórinisinde grafigin sızıń. x tıń qanday mánisi θ nıń mánisin maksimal arttıradı? Qaysı qatarda otırıw kerek? Usı qatardaǵı kóriw múyeshi qanday?

Endi kóz aldımızǵa keltiremiz, birinshi qatardaǵı orınlıqlardan baslap orınlıqlar gorizontal tegislikten joqarıda hám kinoteatr polı α múyesh astındaǵı qıyalıqta. Siz otırǵan orınnan polǵa shekemgi aralıq, súwrette kórsetilgenindey, x qa teń (3-*súwret*).

1. Tómendegini keltirip shıǵarıw ushın kosinuslar formulasınan paydalanıń:

$$\theta = arccos\left(\frac{a^2+b^2-484}{2ab}\right).$$

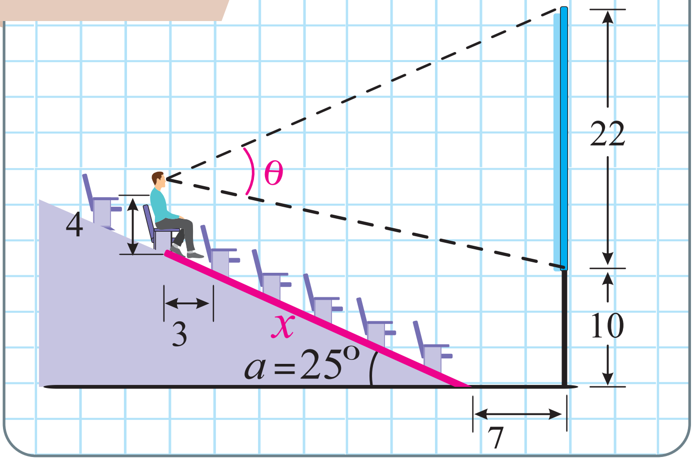
Bul jerde

$$a^2 = (7 + xcos\alpha)^2 + (28 - xsin\alpha)^2$$

$$\text{hám} \quad b^2 = (7 + xcos\alpha)^2 + (xsin\alpha - 6)^2$$

2. ***Geogebra*** grafik qosımshasınan paydalanıp θ nı x tıń funkciyası kórinisinde grafigin sızıń hám θ nı maksimallastırıwshı x tıń mánisin tabıń. Qaysı qatarda otırıw kerek? Bul qatardaǵı kóriw múyeshi qanday?

4-súwret



5-BAP. TRIGONOMETRIYALÍQ TEŃLEMELER HÁM TEŃSIZLIKLER

- TRIGONOMETRIYALÍQ TEŃLEMELER
- BAZÍ TRIGONOMETRIYALÍQ TEŃLEMELERDI SHESHIW USÍLLARÍ
- TRIGONOMETRIYALÍQ TEŃSIZLIKLER

TRIGONOMETRIYALÍQ TEŃLEMELER

Eń ápiwayı trigonometriyalıq teńlemeler

Periodlı funkciyalar menen ańlatılatuǵın procesler qashan qanday mánis qabıl etiwin biliw júdá áhmiyetli. Bunıń ushın periodlı funkciyalar qatnasqan

$$\sin x = a,\ \cos x = a,\ tgx = a,\ ctgx = a$$

kórinistegi eń ápiwayı trigonometriyalıq teńlemelerdi sheshiwdi biliw zárúr boladı.

Eń ápiwayı trigonometriyalıq teńlemelerdi sheshiwdi úyreniw ushın:

1) teńleme túsinigin;

2) teńlemeniń koreni túsinigin; korenler kópligi "sheshim" dep atalıwın;

3) trigonometriyalıq funkciyalardıń periodlı ekenligi, trigonometriyalıq teńlemeniń korenleri sheksiz kóp bolıwın;

4) tabılǵan sheksiz kóp korenlerdi ulıwmalastırıp qısqa formulalar arqalı jazıp (bul jerde hárbir k pútin san ushın $n = 2k$ ańlatpa jup sandı, $n = 2k + 1$ ańlatpa bolsa taq sandı ańlatıwın) biliw talap etiledi.

1-mısal. $\sin x = \frac{1}{2}$ teńlemeni sheshiń.

Sheshiliwi. $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ boladı. $\sin x = \frac{1}{2}$ teńlik x tıń $\frac{5\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + \pi$ mánisinde de orınlanadı (1-*súwret*). Sinus periodlı funkciya bolǵanlıǵı sebepli hárqanday k pútin san ushın

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

yamasa

$$x = \left(-\frac{\pi}{6} + \pi\right) + 2k\pi = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$$

bolǵanda da $\sin x = \frac{1}{2}$ boladı (2-*súwret*). Bul eki teńlikti tómendegishe ulıwmalastırıw múmkin:

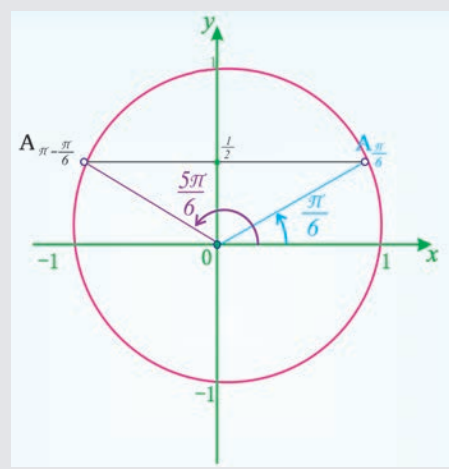
$$x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Haqıyqattan da, n jup, yaǵnıy $n = 2k$ bolsa, ol jaǵdayda $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ teńlikke; n taq, yaǵnıy $n = 2k + 1$ bolsa, $x = -\frac{\pi}{6} + (2k+1)\pi$ teńlikke iye bolamız. Solay etip, $\sin x = \frac{1}{2}$ teńlik x tıń

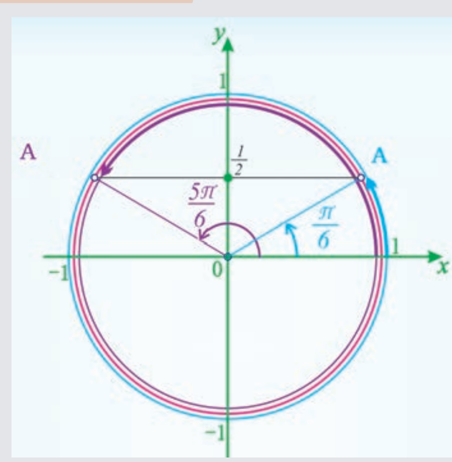
$$x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}.$$

mánislerinde orınlanadı eken.

1-súwret



2-súwret



sinx = *a* kórinistegi teńleme

$a>1$ yamasa $a<-1$ bolsa, ol jaǵdayda $\sin x=a$ teńleme korenge iye bolmaydı. Sonıń ushın bunday jaǵdaylarda $\sin x=a$ teńlemeniń sheshimi bos kóplik $\varnothing$ ten ibarat degen juwap jazıladı;

$-1\le a\le 1$ bolsa, ol jaǵdayda $\sin x=a$ teńlemeniń sheshimi

$$\boxed{x=(-1)^n \arcsin a+\pi n,\ n\in Z}$$

kóriniste boladı.

Dara jaǵdaylar.

1) $sinx=-1$ teńlemeniń sheshimi x tıń

$$x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$$

mánislerinen ibarat.

2) $sinx=0$ teńlemeniń sheshimi x tıń

$$x=\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$$

mánislerinen ibarat.

3) $sinx=1$ teńlemeniń sheshimi x tıń

$$x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$$

mánislerinen ibarat.

cosx = *a* kórinistegi teńleme

$\boldsymbol{\cos x=a}$ kórinistegi teńlemede

eger $a>1$ yamasa $a<-1$ bolsa, ol jaǵdayda $\cos x=a$ teńleme korenge iye bolmaydı. Bunday jaǵdaylarda $\cos x=a$ teńlemeniń sheshimi $\varnothing$ degen juwap jazıladı;

$-1\le a\le 1$ bolsa, ol jaǵdayda

$$\boxed{x=\pm\arccos a+2\pi n,\ n\in Z}$$

boladı.

Dara jaǵdaylar.

1) $cosx=-1$ teńlemeniń sheshimi x tıń

$$x=\pi+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$$

mánislerinen ibarat.

2) $cosx=0$ teńlemeniń sheshimi x tıń

$$x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$$

mánislerinen ibarat.

3) $cosx=1$ teńlemeniń sheshimi x tıń

$$x=2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$$

mánislerinen ibarat.

2-mısal. $cos\, x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ teńlemeni sheshiń .

Sheshiliwi.

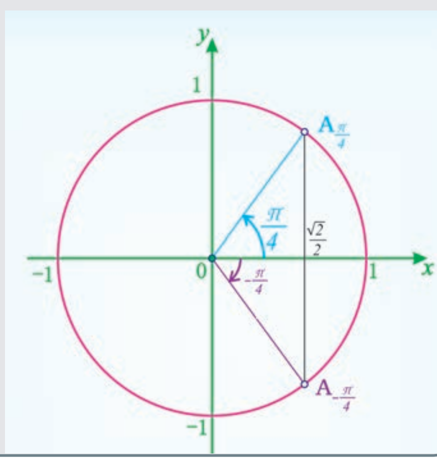
$cos \frac{\pi}{4} = cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ bolıwı belgili (3-*súwret*). Kosinus periodlı funkciya bolǵanlıǵı sebepli hárqanday n pútin san ushın

$$x = \frac{\pi}{4} + 2n\pi \text{ yamasa } x = -\frac{\pi}{4} + 2n\pi$$

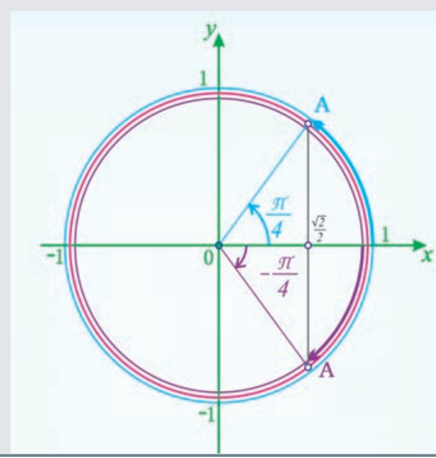
bolǵanda da $cos\, x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ boladı (4-*súwret*). Bul eki teńlikti tómendegishe ulıwmalastırıw múmkin:

$$x = \pm\frac{\pi}{4} + 2n\pi,\quad n \in \mathbb{Z}.$$

3-súwret



4-súwret



◆ *tgx = a* kórinisindegi teńleme

Hárbir n pútin sanı ushın x tıń

$$x = arctga + \pi n$$

mánisi $tgx = a$ teńlemeniń koreni boladı. Bul jaǵdayda sheshim

$$\boxed{x = arctga + \pi n,\ n \in Z}$$

kórinisinde boladı.

◆ *ctgx = a* kórinisindegi teńlemeler

Hárbir n pútin sanı ushın x erkli ózgeriwshiniń

$$x = arcctga + \pi n$$

mánisi $ctgx = a$ teńlemeniń koreni boladı. Bul jaǵdayda sheshim

$$\boxed{x = arcctga + \pi n,\ n \in Z}$$

kórinisinde boladı.

3-mısal. Teńlemeni sheshiń: $tg\left(x+\frac{\pi}{7}\right)=-1$.

Sheshiliwi. $tg\left(x+\frac{\pi}{7}\right)=-1$, $x+\frac{\pi}{7}=arctg(-1)+\pi k$, $k\in Z$, $x+\frac{\pi}{7}=-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$, $x=-\frac{11\pi}{28}+\pi k$, $k\in Z$.

Juwabı: $x=-\frac{11\pi}{28}+\pi k$, $k\in Z$.

4-mısal. Teńlemeni sheshiń: $ctg\frac{3x}{2}=\sqrt{3}$.

Sheshiliwi. $ctg\frac{3x}{2}=\sqrt{3}$, $\frac{3x}{2}=arcctg\sqrt{3}+\pi k$, $k\in Z$, $\frac{3x}{2}=\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$, $3x=\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$, $x=\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3}$, $k\in Z$.

Juwabı: $x=-\frac{11\pi}{28}+\pi k$, $k\in Z$.

MÍSALLAR

1. Teńlemelerdi sheshiń.

a) $sin2x=1$ b) $sin\frac{x}{3}=-1$ c) $sin\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)=0$

d) $2sin4x=\sqrt{5}$ e) $sin(4x-1)=-\frac{\pi}{3}$ f) $sinx=\frac{1}{2}$

g) $sinx=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ h) $sin4x=1$ i) $sin2x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

j) $sin\left(x+\frac{\pi}{7}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ k) $sin\frac{2x}{3}=-1$ l) $sin\left(2x+\frac{\pi}{5}\right)=0$

m) $sin(3x+1)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ n) $sin(-x)=-\frac{1}{2}$ o) $sin\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)=1$

2. Teńlemelerdi sheshiń.

a) $cos\frac{2x}{5}=1$ b) $cos\left(2x-\frac{\pi}{7}\right)=-1$ c) $cos8x=0$

d) $cos3x=1,2$ e) $2cos(x-1)=\frac{11}{2}$ f) $cosx=\frac{\sqrt{3}}{2}$

g) $cosx=-\frac{1}{2}$ h) $cosx=-1$ i) $cos\frac{x}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

j) $cos\left(x-\frac{\pi}{5}\right)=\frac{1}{2}$ k) $cos\frac{3x}{4}=0$ l) $cos4x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

m) $\sqrt{3}+2cos\frac{\pi x}{9}=0$ n) $1-2cos\frac{3\pi x}{4}=0$ o) $cos\left(\pi\left(x-3\right)\right)=1$

p) $sin^2\frac{2}{3}\boldsymbol{x}=\frac{3}{4}$ q) $cos^2\frac{3}{2}\boldsymbol{x}=\frac{1}{4}$ r) $2cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}=0$

3. Teńlemelerdi sheshiń.

a) $tgx=\frac{1}{\sqrt{3}}$ b) $tgx=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ c) $tgx=-1$

d) $tgx=\sqrt{3}$ e) $tg\frac{2x}{5}=-\sqrt{3}$ f) $tg\left(x+\frac{7\pi}{3}\right)=1$

g) $tg(\frac{\pi}{4}(x-1))=0$ h) $1-\sqrt{3}tg\frac{2\pi x}{7}=0$ i) $tg9x=tg45°$

j) $tg6x=tg\frac{2\pi}{3}$ k) $3tg\left(x+\frac{5\pi}{36}\right)+\sqrt{3}=0$

4. Teńlemelerdi sheshiń.

a) $ctgx=\sqrt{3}$ b) $ctgx=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ c) $ctg4x=sin0°$

d) $ctg\,(\pi\,(2x+3))=cos0°$ e) $\sqrt{3}+ctg\frac{\pi x}{5}=0$ f) $ctg7x=-\sqrt{3}$

g) $ctg\frac{3x}{2}=1$ h) $ctg3x=\sqrt{3}$ i) $ctg\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)=0$

5. Teńlemelerdiń berilgen kesindidegi korenlerin tabıń.

a) $sin3x=\frac{\sqrt{2}}{2},\ [0;2\pi]$ b) $cos3x=\frac{\sqrt{3}}{2},\ [-\pi;\pi]$

c) $tg\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3},\ [0;\pi]$ d) $ctg4x=-1,\ [-3\pi;3\pi]$

6. a nıń qanday mánislerinde $tgx=\frac{a+1}{a-1}$ teńlik orınlı bolıwı múmkin?

7. a nıń qanday mánislerinde $sin\,x=a+\frac{1}{a}(bunda\ a\neq 0)$ teńlik orınlı bolıwı múmkin?

8. a nıń qanday mánislerinde $5cos(2x-3)=a-\frac{6}{a}$ teńlik sheshimge iye?

9. a nıń qanday mánislerinde $3sin(x-7)=a-\frac{4}{a}$ teńlik sheshimge iye emes?

BAZÍ TRIGONOMETRIYALÍQ TEŃLEMELERDI SHESHIW USÍLLARÍ KVADRAT TEŃLEMEGE KELTIRILETUGÍN TEŃLEMELER

Kvadrat teńlemege keltiriletuǵın teńlemeler

1-mısal. Teńlemeni sheshiń: $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$.

Sheshiliwi

Bul teńleme $\sin x$ qa qarata kvadrat teńleme. $\sin x = t$ dep belgilesek, $2t^2 - 3t + 1 = 0$ bunnan $t_1 = 1,\quad t_2 = \frac{1}{2}$ kelip shıǵadı.

1) $\sin x = 1,\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$ 2) $\sin x = \frac{1}{2},\ x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$

Juwabı: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n,\ \ n \in Z$.

2-mısal. Teńlemeni sheshiń: $2\cos^2 x - 5\sin x + 1 = 0$.

Sheshiliwi

$\cos^2 x$ ti $1 - \sin^2 x$ penen almastırıp, $2(1 - \sin^2 x) - 5\sin x + 1 = 0$ yamasa $2\sin^2 x + 5\sin x - 3 = 0$ di,

$\sin x = y$ belgilep, $2y^2 + 5y - 3 = 0$ di payda etemiz. Bunnan $y_1 = -3;\ y_2 = \frac{1}{2}$.

$\sin x = -3$ teńleme sheshimge iye emes, sebebi $|-3| > 1$.

$\sin x = \frac{1}{2}$ teńlemeni sheshemiz. Bunnan $x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$ tı payda etemiz.

Juwabı: $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\quad n \in Z.$

3-mısal. Teńlemeni sheshiń: $tgx - 2ctgx + 1 = 0$.

Sheshiliwi

$tgx - \frac{2}{tgx} + 1 = 0$, bunnan $tg^2 x + tgx - 2 = 0$. $tgx = t$ dep belgilesek,

$t^2 + t - 2 = 0$

$t_1 = 1,\quad t_2 = -2$

1) $tgx = 1,\ x = arctg1 + \pi n,\ n \in Z,\ \ x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$

2) $tgx = -2,\ x = -arctg2 + \pi n,\ \ n \in Z$

Juwabı: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\quad x = -arctg2 + \pi n,\ \ n \in Z$.

4-mısal. Teńlemeni sheshiń: $3\sin^2 x+5\sin x\cos x+2\cos^2 x=0$.

Sheshiliwi

Teńlemeni ağzama-ağza $\cos^2 x$ qa bólemiz. $3tg^2x+5tgx+2=0$

$tgx=t$ dep belgilesek, $3t^2+5t+2=0$. Bunnan $t_1=\dfrac{-5-1}{6}=-1,\quad t_2=\dfrac{-5+1}{6}=-\dfrac{2}{3}$

$$1)\ tgx=-1,\ x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$$

$$2)\ tgx=-\frac{2}{3},\ x=-arctg\frac{2}{3}+\pi n,\ n\in Z$$

Juwabı: $x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\quad x=-arctg\dfrac{2}{3}+\pi n,\ n\in Z$.

$a\sin x+b\cos x=c$ kórinisindegi teńlemeler

5-mısal. Teńlemeni sheshiń: $3\sin x-2\cos x=0$.

Sheshiliwi

1) Teńlemeniń eki tárepin $cosx$ qa bólip, $3tgx-2=0$ teńlemeni payda etemiz.

2) $3tgx-2=0$, $tgx=\dfrac{2}{3}$, $x=arctg\dfrac{2}{3}+\pi n,\ n\in Z$.

$asinx + bcosx = 0$ teńlemeni $cosx$ (yamasa $sinx$) qa bólgende berilgen teńlemege teń kúshli teńleme payda boladı ($cosx = 0$ hám $sinx = 0$ teńlikler bir waqıtta orınlanbaydı).

Juwabı: $x=arctg\dfrac{2}{3}+\pi n,\ n\in Z$.

6-mısal. Teńlemeni sheshiń: $2\sin x+\cos x-2=0$.

Sheshiliwi

$\sin x=2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2},\quad \cos x=\cos^2\dfrac{x}{2}-\sin^2\dfrac{x}{2},\quad 2=2\cdot 1=2\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)$ formulalar boyınsha,

$$4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=2\sin^2\frac{x}{2}+2\cos^2\frac{x}{2}\quad\Rightarrow\quad 3\sin^2\frac{x}{2}-4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}=0$$

Teńlemeni $\cos^2\dfrac{x}{2}$ ge bólemiz. $3tg^2\dfrac{x}{2}-4tg\dfrac{x}{2}+1=0$ $tg\dfrac{x}{2}=t$ dep belgileymiz.

$3t^2-4t+1=0,\qquad D=16-12=4$

$$t_1=\frac{4+2}{6}=1,\qquad t_2=\frac{4-2}{6}=\frac{1}{3}$$

1) $tg\dfrac{x}{2}=1,\ x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$ 2) $tg\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{3},\ x=2arctg\dfrac{1}{3}+2\pi n,\ n\in Z$

Juwabı: $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ x=2arctg\dfrac{1}{3}+2\pi n,\ n\in Z$.

7-mısal. Teńlemeni sheshiń: $\sin x + \cos x = 1$.

Sheshiliwi

Teńlemeniń eki tárepin $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ ge bólemiz.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\frac{1}{\sqrt{2}}=\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}$ bolǵanlıǵı ushın teńlemeni tómendegishe jazıp alamız:

$$\sin\frac{\pi}{4}\sin x+\cos\frac{\pi}{4}\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad\Rightarrow\quad \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad\Rightarrow\quad x-\frac{\pi}{4}=\pm\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}+2\pi n,\ n\in Z$$

$$x=\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z \ \Rightarrow\ x=2\pi n,\ \ x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ \ n\in Z.$$

Juwabı: $x=2\pi n,\ \ x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ \ n\in Z.$

Shep tárepin kóbeytiwshilerge jiklep sheshiletuǵın teńlemeler

8-mısal. Teńlemeni sheshiń: $\sin 9x-\sin x=\cos 5x$.

Sheshiliwi

$2\sin 4x\cos 5x=\cos 5x \quad\Rightarrow\quad \cos 5x(2\sin 4x-1)=0$

1) $\cos 5x=0,\ x=\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5},\ n\in Z$

2) $\sin 4x=\frac{1}{2},\ 4x=(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z,\ x=(-1)^n\cdot\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{4},\ n\in Z$

Juwabı: $x=\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5},\ x=(-1)^n\cdot\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{4},\ n\in Z$.

9-mısal. Teńlemeni sheshiń: $2\sin x\cos x+5\sin x+5\cos x+1=0$.

Sheshiliwi

$2\sin x\cos x+5(\sin x+\cos x)+1=0$, $\sin x+\cos x=t$ dep belgilesek, $2\sin x\cos x=t^2-1$ boladı. Bunnan

$t^2-1+5t+1=0 \ \Rightarrow\ t^2+5t=0 \ \Rightarrow\ t(t+5)=0 \ \Rightarrow\ t_1=-5;\ t_2=0$

1) $\sin x+\cos x=-5$ teńleme sheshimlerge iye emes

2) $\sin x+\cos x=0,\ tgx+1=0,\ tgx=-1,\ x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$

Juwabı: $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$.

MÍSALLAR

Teńlemelerdi sheshiń.

1. $2cos^2x-5cosx+2=0$
2. $cos^2x-cosx-2=0$
3. $2ctg^2 3x-3ctg3x+1=0$
4. $tg^2x-2tgx=3$
5. $2\cos^2 x+\sin x-1=0$
6. $3sin^2 2x+7cos2x-3=0$
7. $2\cos x=1-\sqrt{cosx}$
8. $sin2x=cos^4x-sin^4x$
9. $sin5x=\frac{2}{3}cos^2 5x$
10. $cos^4\frac{x}{5}+sin^2\frac{x}{5}=1$
11. $3tg2x-2ctg2x-1=0$
12. $2tgx-2ctgx=3$
13. $\sqrt{3}sinx-cosx=0$
14. $sin2x+cos2x=0$
15. $sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=0$
16. $\sqrt{3}sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right)+cos\left(x+\frac{\pi}{12}\right)=0$
17. $cosx-sinx=1$
18. $sinx+cosx=\sqrt{2}$
19. $sin\frac{x}{2}+cos\frac{x}{2}=-1$
20. $\sqrt{3}sinx+cosx=\sqrt{2}$
21. $3sinx+4cosx=3$
22. $sin4x+cos4x=4$
23. $sin2x=cos^4\frac{x}{2}-sin^4\frac{x}{2}$
24. $cos2x=\sqrt{2}(cosx-sinx)$
25. $cos3xcos2x=sin3xsin2x$
26. $sin5xcos4x-cos5xsin4x=\frac{\sqrt{3}}{2}$
27. $cos9x-cos7x+cos3x-cosx=0$
28. $cos7x+sin8x=cos3x-sin2x$
29. $sin3x+sin5x=sin4x$
30. $sin2xsin6x=cosxcos3x$
31. $(2\cos x-3)\cdot ctgx=0$
32. $(tgx-3)(cosx-\frac{1}{2})=0$
33. $tg3xcosx=0$
34. $sin2xtgx=0$
35. $\frac{cos2x}{1+tgx}=0$
36. $\frac{1-2cos2x}{cos2x-2}=0$
37. $\frac{tgx}{sin5x}=0$
38. $\frac{cosx}{1-cos4x}=0$
39. $|cos2x-1|-2|cos2x+2|=0$
40. $sin^3x+cos^4x=1$
41. $cosx\sqrt{sinx}=0$
42. $cos3x+2cosx=0$
43. $sin^{13}x+cos^{13}x=1$
44. $sin9x=2sin3x$

TRIGONOMETRIYALÍQ TEŃSIZLIKLER

Eń ápiwayı trigonometriyalıq teńsizliklerdi sheshiwde:

1) *Oy* kósheri **sinuslar kósheri** dep atalıwın;
2) *Ox* kósheri **kosinuslar kósheri** dep atalıwın;
3) *x* ózgeriwshiniń hárbir mánisinde $-1 \le \sin x \le 1$ bolıwın;
4) *x* ózgeriwshiniń hárbir mánisinde $-1 \le \cos x \le 1$ bolıwın biliw talap etiledi.

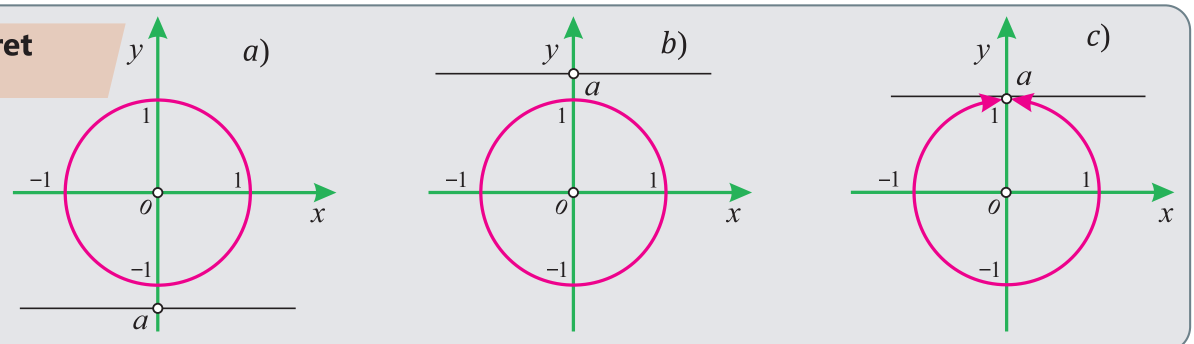
Meyli, $f(x)$ jazıw $\sin x$, $\cos x$, tgx yamasa $ctgx$ trigonometriyalıq funkciyalardan birin ańlatsın, yağnıy $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = tgx$ yamasa $f(x) = ctgx$ bolsın.

Ol jağdayda qanday da bir *a* sanı ushın $f(x) < a$, $f(x) \le a$, $f(x) > a$, $f(x) \ge a$ kórinistegi teńsizlikler ***trigonometriyalıq teńsizlikler*** dep júritiledi.

$\sin x < a$ hám $\sin x \le a$ teńsizliklerdi sheshiw

1) $a \le -1$ bolsa, $\sin x < a$ teńsizliktiń sheshimi $\varnothing$ boladı (1a-*súwret*).
2) $a > 1$ bolsa, $\sin x < a$ teńsizliktiń sheshimi $(-\infty; +\infty)$ boladı (1b-*súwret*).
3) $a < -1$ bolsa, $\sin x \le a$ teńsizliktiń sheshimi $\varnothing$ boladı.
4) $a \ge 1$ bolsa, $\sin x \le a$ teńsizliktiń sheshimi $(-\infty; +\infty)$ boladı.
5) $a = -1$ bolsa, $\sin x \le -1$ teńsizliktiń sheshimi $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$ boladı.
6) $a = 1$ bolsa, $\sin x < 1$ teńsizliktiń sheshimi $x \ne \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$ boladı.

1-súwret



7) $-1 < a < 1$ bolğanda $\sin x < a$ teńsizliktiń sheshimi (1c-*súwret*).

$$x_1 < x < x_2,$$
$$x_1 = -\pi - \arcsin a,$$
$$x_2 = \arcsin a$$

$$-\pi - \arcsin a + 2\pi n < x < \arcsin a + 2\pi n, \ n \in Z.$$

8) $-1 < a < 1$ bolğanda $\sin x \le a$ teńsizliktiń sheshimi (1c-*súwret*).

$$x_1 \le x \le x_2,$$
$$x_1 = -\pi - \arcsin a,$$
$$x_2 = \arcsin a$$

$$-\pi - \arcsin a + 2\pi n \le x \le \arcsin a + 2\pi n, \ n \in Z.$$

1-mısal. Teńsizlikti sheshiń: $\sin x \le -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Sheshiliwi

$$-\pi - \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi n \le x \le \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi n,\ n \in Z$$

$$-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \le x \le -\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$$

Juwabı: $\left[-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n;\ -\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right],\ n \in Z$.

cosx < *a* hám *cosx* ≤ *a* teńsizliklerdi sheshiw

1) $a \le -1$ bolsa, $\cos x < a$ teńsizliktiń sheshimi $\varnothing$ boladı (2a-*súwret*).

2) $a > 1$ bolsa, $\cos x < a$ teńsizliktiń sheshimi $(-\infty; +\infty)$ boladı (2b-*súwret*).

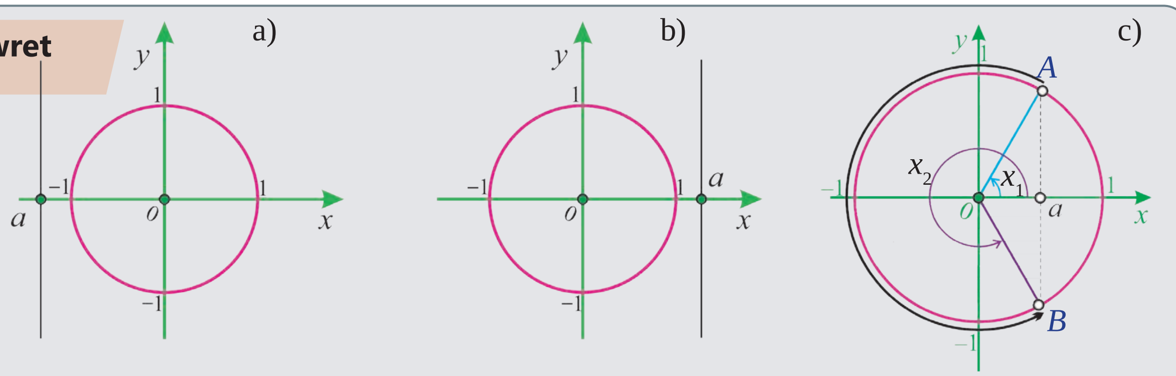
3) $a < -1$ bolsa, $\cos x \le a$ teńsizliktiń sheshimi $\varnothing$ boladı.

4) $a = 1$ bolsa, $\cos x < a$ teńsizliktiń sheshimi $x \ne 2\pi n,\ n \in Z$ boladı.

5) $a = -1$ bolsa, $\cos x \le -1$ teńsizliktiń sheshimi $x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$ noqatlardan ibarat.

6) $a \ge 1$ bolsa, $\cos x \le a$ teńsizliktiń sheshimi $(-\infty; +\infty)$ boladı.

2-súwret



7) $-1 < a < 1$ bolǵanda $\cos x < a$ teńsizliktiń sheshimi (2c-*súwret*).

$$x_1 < x < x_2$$
$$x_1 = \arccos a$$
$$x_2 = 2\pi - \arccos a$$

$$\boxed{\arccos a + 2\pi n < x < 2\pi - \arccos a + 2\pi n,\ n \in Z}$$

8) $-1 < a < 1$ bolǵanda $\cos x \le a$ teńsizliktiń sheshimi .

$$\boxed{\arccos a + 2\pi n \le x \le 2\pi - \arccos a + 2\pi,\ n \in Z.}$$

2-mısal. Teńsizlikti sheshiń: $cos\, x \geq -\frac{1}{2}$

Sheshiliwi

$$-arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+2\pi n \leq x \leq arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+2\pi n,\ \ n\in Z$$

$$-\frac{2\pi}{3}+2\pi n \leq x \leq \frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$$

Juwabı: $\left[-\frac{2\pi}{3}+2\pi n; \frac{2\pi}{3}+2\pi n\right],\ n\in Z\cdot$

$tgx < a$ hám $tgx \leq a$ teńsizlikti sheshiw

$tgx < a$ teńsizlikti $y = tgx$ funkciya grafiginen paydalanıp sheshemiz.

3-súwretten belgili, $tgx < a$ teńsizlik x tıń

$$-\frac{\pi}{2} < x < arctga$$

qosteńsizlikti qanaatlandırıwshı mánislerinde orınlanadı. $y = tgx$ funkciya dáwirli (periodlı) ekenliginen $tgx < a$ teńsizliktiń sheshimi

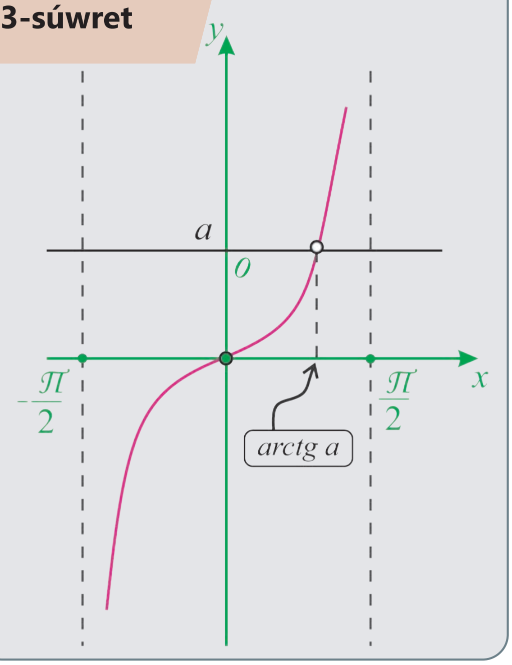
$$-\frac{\pi}{2}+\pi n < x < arctga+\pi n,\ n\in Z$$

bolıwı kelip shıǵadı. Sonday-aq, $tgx \leq a$ teńsizliktiń sheshimi

$$-\frac{\pi}{2}+\pi n < x \leq arctga+\pi n,\ n\in Z$$

boladı.

3-súwret



3-mısal. Teńsizlikti sheshiń: $tg\frac{x}{4} \leq -1$.

Sheshiliwi

$$-\frac{\pi}{2}+\pi n < \frac{x}{4} \leq arctg(-1)+\pi n,\ n\in Z$$

$$-\frac{\pi}{2}+\pi n < \frac{x}{4} \leq -\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$$

$$-2\pi+4\pi n < x \leq -\pi+4\pi n,\ n\in Z$$

Juwabı: $(-2\pi+4\pi n; -\pi+4\pi n],\ n\in Z$.

$ctgx < a$ hám $ctgx \le a$ teńsizliktiń sheshimi

$ctgx < a$ teńsizlikti sheshiwde $y = ctgx$ funkciyanıń grafiginen paydalanamız.

$ctgx < a$ teńsizlik x ózgeriwshiniń

$$arcctga < x < \pi$$

qos teńsizlikti qanaatlandırıwshı mánislerinde orınlanadı (4-*súwret*). $y=ctgx$ funkciya periodlı ekenligi sebepli $ctgx < a$ teńsizliktiń sheshimi kelip shıǵadı.

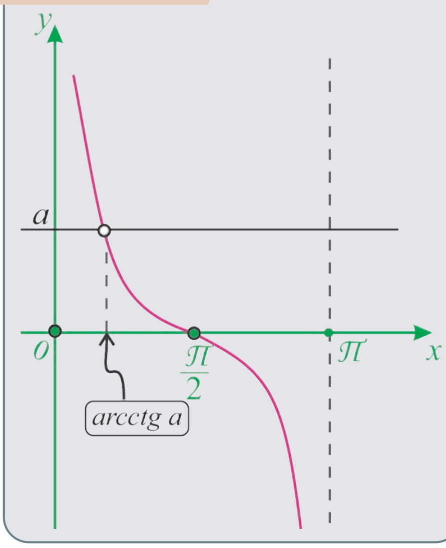
$$\boldsymbol{arcctga + \pi n < x < \pi + \pi n,\ n \in Z}$$

Sonday-aq, $ctgx \le a$ teńsizliktiń sheshimi

$$\boldsymbol{arcctga + \pi n \le x < \pi + \pi n,\ n \in Z}$$

boladı.

4-súwret



4-mısal. Teńsizlikti sheshiń: $ctg\frac{x}{5} < -\sqrt{3}$.

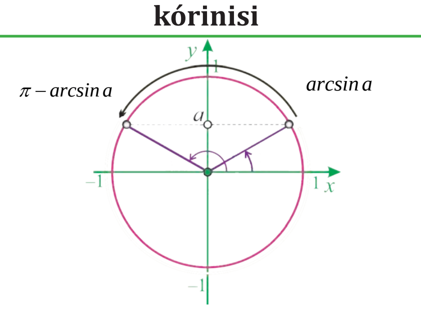
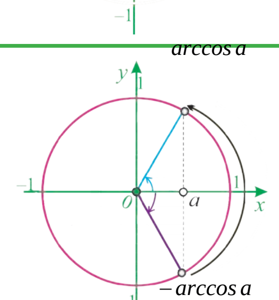
Sheshiliwi

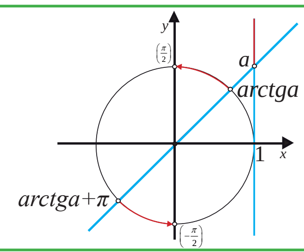
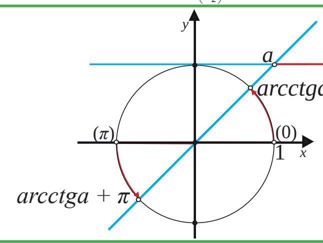
$$arcctg\left(-\sqrt{3}\right) + \pi n < \frac{x}{5} < \pi + \pi n,\ n \in Z \quad \Rightarrow \quad \frac{5\pi}{6} + \pi n < \frac{x}{5} < \pi + \pi n,\ n \in Z \quad \Rightarrow$$

$$\frac{25\pi}{6} + 5\pi n < x < 5\pi + 5\pi n,\ n \in Z$$

Juwap: $\left(\frac{25\pi}{6} + 5\pi n; 5\pi + 5\pi n\right),\ n \in Z$.

Bazı teńsizliklerdiń sheshimi

Teńsizlik	Sheshimi	Trigonometriyalıq sheńberdegi kórinisi
$\boldsymbol{sinx > a}$	$\arcsin a + 2\pi n < x < \pi - \arcsin a + 2\pi n,\ n \in Z$	
$\boldsymbol{cosx > a}$	$-\arccos a + 2\pi n < x < \arccos a + 2\pi n,\ n \in Z$	

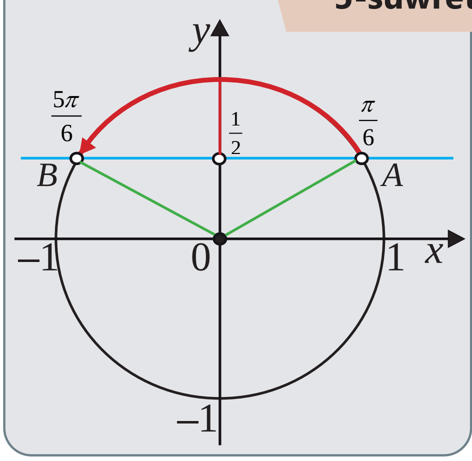
$tgx > a$	$arctga + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$	
$ctgx > a$	$\pi n < x < arcctga + \pi n,\ n \in Z$	

5-mısal. Teńsizlikti sheshiń: $sinx > \frac{1}{2}$.

Sheshiliwi

Birlik sheńberdi (5-*súwret*) A hám B noqatlarda kesip ótiwshi $y = \frac{1}{2}$ tuwrı sızıqtı ótkeremiz. *sinx* tıń soralıp atırǵan mánisleri usı tuwrı sızıqtıń joqarısında jaylasqan boladı. $y = sinx$ *hám* $y = \frac{1}{2}$ lar $x = \frac{\pi}{6}$ hám $x = \frac{5\pi}{6}$ da kesilisedi. x tıń $\frac{\pi}{6}$ dan úlken hám $\frac{5\pi}{6}$ dan kishi mánislerinde *sinx* ańlatpa $\frac{1}{2}$ den úlken bolıwı súwretten kórinip turıptı.

5-súwret



Solay etip, $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$ boladı. $\sin x > \frac{1}{2}$ teńsizliktiń barlıq sheshimleri usı $\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$ formula menen tabıladı.

Juwap: $\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z.$

6-mısal. Teńsizlikti sheshiń: $\cos x \cos\frac{\pi}{4} - \sin x \sin\frac{\pi}{4} \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Sheshiliwi

Teńsizliktiń shep tárepi qosındınıń kosinusı formulasınan paydalanıp ápiwayılastırıp alamız:

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Birlik sheńberde (6-*súwret*) $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ tuwrı sızıqtı ótkeremiz. Bul tuwrı sızıq sheńberdi $x + \frac{\pi}{4}$ tiń $-\frac{3\pi}{4}$ hám $\frac{3\pi}{4}$ mánislerine sáykes noqatlarda kesip ótedi.

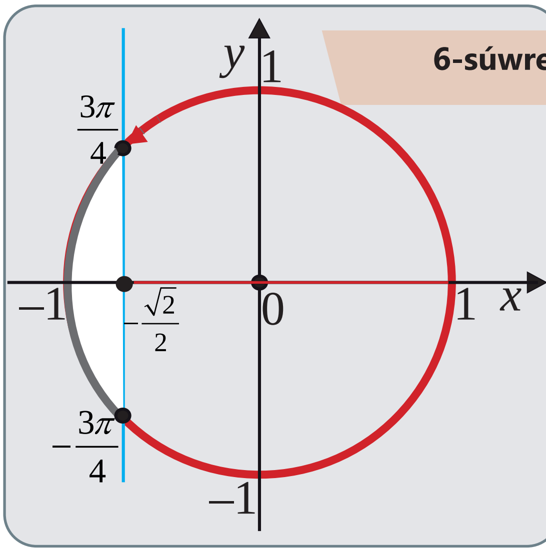
Bizge $x+\frac{\pi}{4}$ tiń usı mánisleri kerek:

$$-\frac{3\pi}{4}+2\pi n\le x+\frac{\pi}{4}\le\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z.$$

Qos teńsizliktiń hárbir aǵzasınan $\frac{\pi}{4}$ ti ayıramız hám tómendegini payda etemiz

$$-\pi+2\pi n\le x\le\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$$

Juwabı: $x\in\left[-\pi+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right], n\in Z.$



6-súwret

7-mısal. Teńsizlikti sheshiń: $tg\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\ge 1.$

Sheshiliwi

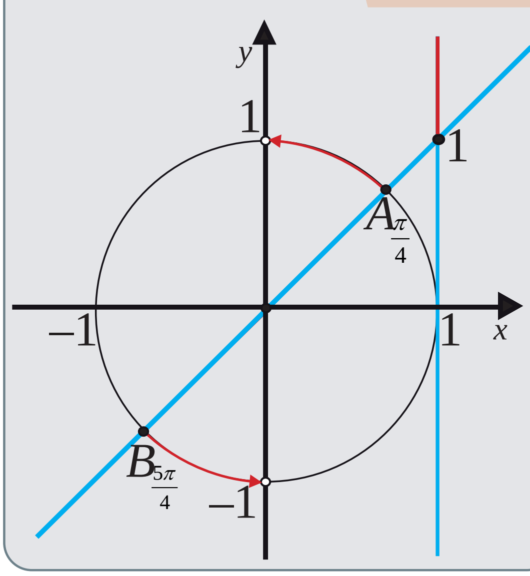
7-súwretten $2x-\frac{\pi}{4}$ muǵdar usı shártlerdi orınlawı kelip shıǵadı:

$$\frac{\pi}{4}+\pi n\le 2x-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in Z$$

$$\frac{\pi}{2}+\pi n\le 2x<\frac{3\pi}{4}+\pi n,\quad n\in Z$$

$$\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}\le x<\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$$

Juwabı: $\left[\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2};\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}\right),\ n\in Z.$



7-súwret

8-mısal. Teńsizlikti sheshiń: $\sin x>\cos x$.

Sheshiliwi

$$\sin x-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)>0\ \Rightarrow\ 2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4}>0\ \Rightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)>0$$

$$\arcsin 0+2\pi n<x-\frac{\pi}{4}<\pi-\arcsin 0+2\pi n, n\in Z$$

$$2\pi n<x-\frac{\pi}{4}<\pi+2\pi n, n\in Z\ \Rightarrow \frac{\pi}{4}+2\pi n<x<\frac{5\pi}{4}+2\pi n, n\in Z$$

Juwabı: $\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n;\frac{5\pi}{4}+2\pi n\right),\ n\in Z.$

MÍSALLAR

1. Teńsizliklerdi sheshiń.

a) $sinx > 1$ b) $sinx \geq 1$ c) $sinx < 1$ d) $sinx \leq 1$

e) $sinx > -1$ f) $sinx \geq -1$ g) $sinx < -1$ h) $sinx \leq -1$

i) $sinx > 1,5$ j) $sinx \geq -1,2$ k) $sinx < 1,1$ l) $sinx \leq -2$

2. Teńsizliklerdi sheshiń.

a) $cosx > 1$ b) $cosx \geq 1$ c) $cosx < 1$ d) $cosx \leq 1$

e) $cosx > -1$ f) $cosx \geq -1$ g) $cosx < -1$ h) $cosx \leq -1$

i) $cosx > 2$ j) $cosx \geq -1,6$ k) $cosx < 1,4$ l) $cosx \leq -1,7$

3. Teńsizliklerdi sheshiń.

a) $sin\,2x \geq 0$ b) $cos\,3x \leq 0$ c) $cos\,x \leq \frac{1}{2}$ d) $sin\,x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $cos\,2x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ f) $sin\,3x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ g) $\sqrt{2} - 2\,sin\,x > 0$ h) $2\,cos\,x + \sqrt{3} \leq 0$

4. Teńsizliklerdi sheshiń.

a) $sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) < 0$ b) $cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \leq 0$

c) $cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) > -\frac{\sqrt{2}}{2}$

5. Teńsizliklerdi sheshiń.

a) $tg\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \geq \sqrt{3}$ b) $tg\left(2x - \frac{5\pi}{6}\right) > 0$ c) $ctg\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) > -\frac{\sqrt{3}}{3}$

d) $ctg\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \geq 0$ e) $ctg\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) < 0$ f) $tg\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) \leq -1$

6. $sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) < -\frac{1}{2}$ teńsizliktiń $[0; \pi]$ aralıqtaǵı sheshimlerin tabıń.

7. $tg\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) < -\sqrt{3}$ teńsizliktiń $\left[-\frac{3}{8}; \frac{21}{8}\right]$ aralıqtaǵı sheshimlerin tabıń.

8. Teńsizliklerdi sheshiń.

a) $cos^2x - 3cosx < 0$ b) $2sin^2x - 5sinx + 3 \geq 0$

c) $3cos^2x + 7cosx + 4 \leq 0$ d) $tg^2x - 4tgx + 3 < 0$

9. Teńsizliklerdi sheshiń.

a) $cos\left(3\,sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right) < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $sin\left(cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right) > -\frac{1}{2}$

6-BAP. ITIMALLÍQLAR TEORIYASÍ

- TOSÍNNANLÍ HÁDIYSELER
- ITIMALLÍQTÍŃ ANÍQLAMALARÍ
- TÁKIRARLAW

TOSÍNNANLÍ HÁDIYSELER

Itimallıqlar teoriyası matematikalıq pán bolıp, házirgi zaman matematikasınıń tiykarǵı tarawlarınan biri esaplanadı. Itimallıqlar teoriyası predmeti tosınnanlı hádiyseler boysınatuǵın qaǵıydalardı úyreniwden ibarat.

Tájiriybe delingende, anıq shártler kompleksin ámelge asırıw túsiniledi. Tájiriybe nátiyjesi ***hádiyse*** dep ataladı.

Hádiyseler úsh túrli, yaǵnıy múmkin bolmaǵan (heshqashan orınlanbaydı), anıq (hárdayım orınlanadı) hám tosınnanlı (orınlanıwı da múmkin, orınlanbawı da múmkin) bolıp, bulardan eń tiykarǵısı tosınnanlı hádiyse itimallıqların esaplawdı úyreniwden ibarat.

Tábiyat hám jámiyet nızamlarında ushıraytuǵın hárqanday hádiyseler tosınnanlıqqa baylanıslı. Máselen, olardan ayırımların aldınnan aytıw múmkin, ayırımları bolsa shamalap boljaw etiledi: hawa-rayı, ónimniń bahası, zúrááttiń mol bolıwı – bolmawı hám jáne basqalardı aldınnan anıq aytıw qıyın.

XVII ásir ortalarında qumar oyınlarında baqlanıp atırǵan hádiyselerdiń bazı qaǵıydaların úyreniwge Paskal, Ferma, Bernulli sıyaqlı ilimpazlar ayrıqsha itibar berip, proceslerdi úyrengen hám nátiyjede itimallıqlar teoriyası dep atalıwshı pánniń payda bolıwına, yaǵnıy jaratılıwına úlken úles qosqan. Itimallıqlar teoriyası túrli tarawlarda, yaǵnıy, ekonomika, biologiya, medicina, awıl xojalıǵı, texnika hám basqa da tarawlarda keń kólemde qollanıladı.

Hárqanday hádiyseni baqlaw yamasa tájiriybe kórinisinde úyreniw belgili sınaqlardı ótkeriw arqalı ámelge asırıladı.

Hádiyseler haqqında túsinik

Anıqlama. Tájiriybe sınaqlarınıń hárqanday nátiyjesi (yamasa aqıbeti) ***hádiyse*** dep ataladı. Hádiyseler latın álipbesiniń bas háripleri menen – ***A, B, C, ...*** kórinisinde belgilenedi.

Kúndelikli turmısta, ámeliy jumıslarda hám ilimiy izertlewlerde nátiyjelerdi tolıq isenim menen aldınnan aytıw múmkin bolmaǵan tájiriybeler hám sınaqlar tez-tez ushırap turadı.

Máselen, tıyındı taslaǵanda ol yamasa bul tárepiniń túsiwin tolıq isenim menen aytıw múmkin emes; nıshanǵa oq atqanda tiyiw yamasa tiymewi anıq emes; kubik taslandı, bul jerde 6 cifrı túsiwi aldınnan belgili emes; qanday da bir cifrlı lotereya biletine utıs shıǵarıwın da aldınnan aytıp bolmaydı.

Anıqlama. Tájiriybe nátiyjesinde, álbette, orınlanatuǵın hádiyse ***anıq hádiyse*** dep ataladı hám ol ádette **Ω** háribi menen belgilenedi.

Máselen, oyın kubigi taslanǵanda 1 den 6 ǵa shekem bolǵan pútin sanlardıń túsiwi, táwekeline tańlanǵan sózde 1000 nan artıq bolmaǵan háriptiń bolıwı, kún izinen tún keliwi hám jáne basqalar anıq hádiyseler esaplanadı.

Anıqlama. Tájiriybe nátiyjesinde heshqashan orınlanbaytuǵın hádiysege bolsa ***múmkin bolmaǵan hádiyse*** dep ataladı hám ádette $\varnothing$ belgisi menen belgilenedi.

Máselen, bir lotereyaǵa eki utıs shıǵıwı, kosmoslıq kemeniń quyashqa qonıp qaytıp keliwi hám tağı basqalar múmkin bolmağan hádiyseler.

Anıqlama. Tájiriybe nátiyjesinde orınlanıwı da, orınlanbawı da múmkin bolğan hádiyse ***tosınnanlı hádiyse*** dep ataladı.

Máselen, tıyın taslağanda gerbli táreptiń túsiwi, oq atılğanda nıshanğa tiyiwi, lotereya biletine utıs shığarıwı, kubik taslağanda 6 cifrı túsiwi hám jáne basqalar tosınnanlı hádiyselerge mısal boladı.

Anıqlama. Birewi orınlanğanda basqası orınlanbaytuğın hádiyseler ***birgelikte emes*** hádiyseler dep ataladı.

1-mısal. Detallar salınğan qutıdan táwekeline bir detal alındı. Bul jerde sapalı detal shığıwı sapasız detaldıń shığıwın joqqa shığaradı yamasa kerisinshe. “Sapalı detal shıqtı” hám “sapasız detal shıqtı” hádiyseleri birgelikte emes.

2-mısal. Tıyın taslawda gerbli tárepi túsiwi cifrlı táreptiń túsiwin joqqa shığardı. “Gerbli tárepi tústi” hám “cifrlı tárepi tústi” hádiyseleri birgelikte emes.

Anıqlama. Eger hádiyseler bir waqıtta orınlanıwı múmkin bolsa, bunday hádiyseler ***birgelikte bolğan hádiyseler*** dep ataladı.

Máselen, “Quyash shıqtı” hám “Kún suwıq” – bul hádiyseler birgelikte bolıwı múmkin bolğan hádiyseler boladı.

Anıqlama. Tájiriybeniń hárbir nátiyjesin ańlatıwshı hádiys*ege* ***elementar hádiyse*** dep ataladı.

Anıqlama. Elementar hádiyselerge ajıratıw múmkin bolğan hádiysege ***quramalı hádiyse*** dep ataladı.

Anıqlama. Eger birneshe hádiyselerden qálegen birin tájiriybe nátiyjesinde orınlanıwı basqalarına qarağanda úlkenirek imkaniyatqa iye dewge tiykar bolmasa, bunday hádiyseler ***teń imkaniyatlı hádiyseler*** dep ataladı.

Máselen, tıyın taslanğanda gerbli yamasa cifrlı tárepiniń túsiwi yamasa kubik taslanğanda 1 cifrı túsiwi, 2 cifrı túsiwi,... 6 cifrı túsiwi – bulardıń barlığı teń imkaniyatlı hádiyseler boladı.

Anıqlama. A hádiysege ***qarama-qarsı hádiyse*** dep, A hádiyseniń orınlanbawınan ibarat hádiysege aytıladı hám $\overline{A}$ kórinisinde belgilenedi.

Baylanıslı hám baylanıslı bolmağan hádiyseler haqqında túsinigi

Anıqlama. Eger eki hádiyseden biriniń orınlanıwı ekinshi hádiyseniń orınlanıwı yamasa orınlanbawına baylanıslı bolmasa, bul hádiyseler ***erkli (baylanıslı bolmağan) hádiyseler*** dep ataladı.

3-mısal. Tıyın eki márte taslanğan. Birinshi taslawda gerbli tárepiniń túsiw (A hádiyse) itimallığı ekinshi taslawda gerbli tárepiniń túsiw yamasa túspewine (B hádiyse) baylanıslı emes. Óz náwbetinde, ekinshi tájiriybede gerbli tárepiniń túsiw itimallığı birinshi tájiriybe nátiyjesine baylanıslı emes. Solay etip, A hám B hádiyseler erkli.

4-mısal. Tıyın hám kubik taslawda A – tıyında gerbli tárepi, B – kubikte jup cifrı túsiw hádiyseleri bolsın. Bul jerde A hám B baylanıssız hádiyseler bolıp tabıladı.

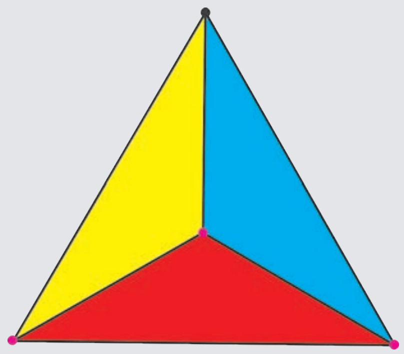
5-mısal. Eki kubik taslawda A – birinshi kubikte, B – ekinshi kubikte jup cifrı túsiw hádiyseleri bolsın. Bul jerde A hám B baylanıssız hádiyseler boladı.

Anıqlama. Birneshe hádiyseniń qálegen ekewi baylanıslı bolmasa, olarǵa ***jup-jup erkli*** dep ataladı.

6-mısal. Tıyın 3 márte taslanǵan. A, B, C sáykes túrde birinshi, ekinshi hám úshinshi tájiriybelerde gerbli tárepiniń túsiw hádiysesi bolsın. Kórilip atırǵan hádiyselerden hár ekewi (yaǵnıy A hám B, A hám C, B hám C) baylanıslı emes. Solay etip, A, B hám C jup-jup erkli.

7-mısal. Durıs tetraedrdiń bir jaǵı qızıl, basqa bir jaǵı sarı, úshinshi jaǵı kók hám tórtinshi jaǵı usı úsh reńde (1-*súwret*). Tetraedrdi taslawda qızıl reńniń túsiwi A hádiyse, sarı reńniń túsiwi B hádiyse, kók reńniń túsiwi C hádiyseler jup-jup erkli boladı.

1-súwret



Anıqlama. Eger eki hádiyseden biriniń orınlanıwı ekinshi hádiyseniń orınlanıwı yamasa orınlanbawına baylanıslı bolsa, bul ***hádiyseler baylanıslı*** dep ataladı.

8-mısal. Ídısta 80 dana aq 20 dana qara shar bar. Táwekeline bir shar alınıp, qaytarıp qoyılmaydı. Eger birinshi alıwda aq shar shıǵıwı A hádiyse bolsa, ol jaǵdayda ekinshi alıwdaǵı shardıń aq shıǵıwı B hádiysesiniń orınlanıwı A hádiysege baylanıslı boladı, yaǵnıy A hám B hádiyseler baylanıslı hádiyseler esaplanadı.

ITIMALLÍQTÍŃ ANÍQLAMALARÍ

"Itimallıq" túsinigi itimallıqlar teoriyasınıń tiykarǵı túsiniklerinen biri esaplanadı.

Ídısta jaqsılap aralastırılǵan sharlar bolıp, olardan 5 danası qızıl, 4 danası qara hám qalǵan 3 danası aq reńde. Ídıstan alınǵan shardıń qızıl yamasa qara reńli shar bolıwı imkaniyatı aq reńli bolıwı imkaniyatınan kóbirek. Bul imkaniyattı san menen ańlatıw múmkin be? Awa, múmkin. Mine usı san ***hádiyseniń itimallıǵı*** dep atalıwshı ólshemi.

Solay etip, itimallıq – hádiyseniń orınlanıwı imkaniyatın ańlatıwshı san esaplanadı.

Biz óz aldımızǵa táwekeline alınǵan shardıń qızıl yamasa qara reńli bolıwı imkaniyatın muǵdarlı bahalaw wazıypasın qoyayıq. Qızıl yamasa qara reńli shar shıǵıwın A hádiyse retinde qaraymız. Tájiriybede (tájiriybe ıdıstan shar alıwdan ibarat) múmkin bolǵan nátiyjelerdiń hárbirin, yaǵnıy tájiriybede orınlanıwı múmkin bolǵan hárbir hádiyseni elementar hádiyse dep ataymız. Elementar hádiyselerdi $E_1, E_2, E_3, E_4, ...$ menen belgileymiz. Biziń mısalda tómendegi 12 elementar hádiyse bolıwı múmkin: E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 – qızıl shar shıqtı; E_6, E_7, E_8, E_9– qara shar shıqtı; E_{10}, E_{11}, E_{12}– aq shar shıqtı.

Bul nátiyjeler tek ǵana bir múmkin bolǵan (bir shar, álbette, shıǵadı) hám teń imkaniyatlı (shar táwekeline alınadı, sharlar birdey hám jaqsılap aralastırılǵan) hádiyseler ekenligin, ańsat ǵana kóriw múmkin.

Bizdi qızıqtırıp atırǵan hádiyseniń orınlanıwına alıp keletuǵın elementar hádiyselerdi bul hádiyseniń orınlanıwına qolaylıq tuwdırıwshı deymiz. Biziń mısalda A (qızıl yamasa qara reńli shar shıǵıwı) hádiyseniń orınlanıwına tómendegi 9 elementar hádiyse qolaylıq tuwdıradı: $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7, E_8, E_9$. A hádiyseniń orınlanıwına qolaylıq tuwdırıwshı elementar hádiyseler sanınıń olardıń ulıwma sanına qatnası A hádiyseniń itimallıǵı dep ataladı hám $P(A)$ menen belgilenedi. Kórilip atırǵan mısalda elementar hádiyseler barlıǵı bolıp 12 dana, olardan toǵızı A hádiysege múmkinshilik tuwdıradı. Demek, alınǵan shardıń qızıl yamasa qara bolıwı itimallıǵı: $P(A)=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$. Tabılǵan san (itimallıq) biz aldımızǵa qoyǵan máseledegi qızıl yamasa qara shar shıǵıw múmkinshiliginiń muǵdarlı bahasın beredi.

Itimallıqtıń túrli anıqlamaları bar. Bular klassikalıq, statistikalıq hám geometriyalıq anıqlamalar.

Itimallıqtıń klassikalıq anıqlaması

Anıqlama. ***A hádiyseniń itimallıǵı*** dep, tájiriybeniń bul hádiyse orınlanıwına múmkinshilik tuwdırıwshı nátiyjeleri sanı – m niń tájiriybeniń múmkin bolǵan barlıq elementar hádiyseleri sanı – n ge qatnasına aytıladı, hám tómendegi kóriniste belgilenedi:

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

Itimallıq anıqlamasınan tómendegi qásiyetler kelip shıǵadı:

1. Anıq hádiyseniń itimallıǵı 1 ge teń, yaǵnıy $P(\Omega)=1$**.**

Haqıyqattan da, eger hádiyse anıq bolsa, ol jaǵdayda tájiriybeniń hárqanday nátiyjesi usı hádiyseniń orınlanıwına múmkinshilik tuwdıradı. Bul jaǵdayda, $m=n$. Demek:

$$P(\Omega)=\frac{m}{n}=\frac{n}{n}=1$$

1-mısal. Ídısta 20 dana shar bolıp, olar 1 den 20 ǵa shekem cifrlanǵan. Ídıstan táwekeline bir shar alındı. Bul shardıń tártip nomeri 20 dan úlken bolmaslıq (A hádiyse) itimallıǵın tabıń.

Sheshiliwi. Ídıstaǵı sharlardıń qálegeniniń tártip nomeri 20 dan úlken emes. Sonıń ushın bul hádiyseniń orınlanıwına qolaylıq tuwdırıwshı hádiyseler sanı hám barlıq múmkin bolǵan jaǵdaylar sanı óz ara teń: $m = n = 20$ hám $P(A)=\frac{m}{n}=1$. Bul jaǵdayda A hádiyse anıq hádiyse esaplanadı.

2. Múmkin bolmaǵan hádiyseniń itimallıǵı nólge teń.

Haqıyqattan da, eger hádiyse orınlanbaytuǵın bolsa, ol jaǵdayda tájiriybeniń heshbir elementar nátiyjesi bul hádiyseniń orınlanıwına múmkinshilik tuwdırmaydı. Bul jaǵdayda, $m = 0$. Demek:

$$P(\varnothing)=\frac{m}{n}=\frac{0}{n}=0$$

2-mısal. Qutıda 10 dana shar bolıp, olardan 4 tewi aq, qalǵanları qara reńde. Usı qutıdan táwekeline bir shar alındı. Onıń qızıl shar bolıwı A hádiysesiniń itimallıǵın tabıń.

Sheshiliwi. Qutıda qızıl shar joq, yaǵnıy $m = 0$, biraq $n=10$. Demek, $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{0}{n}=0$. Bul jaǵdayda A hádiysesi heshqashan júz bermeytuǵın, yaǵnıy múmkin bolmaǵan hádiyse esaplanadı.

3. Tosınnanlı hádiyseniń itimallıǵı oń san bolıp, ol 0 hám 1 aralıǵında boladı.

Haqıyqattan da, tosınnanlı hádiyseniń orınlanıwına tájiriybeniń barlıq elementar hádiyseleriniń bir bólegi ǵana múmkinshilik tuwdıradı. Bul jaǵdayda $0<m<n$. Sonıń ushın $0<\frac{m}{n}<1$. Demek, $0<P(A)<1$.

Solay etip, qálegen hádiyseniń itimallıǵı tómendegi qos teńsizlikti qanaatlandıradı:

$$0\le P(A)\le 1$$

Tómendegi mısallardı sheshiwden aldın bir formulanı keltirip ótemiz.

Ídısta n dana shar bolıp, olardan n_1 danası aq, n_2 danası qara, n_3 danası qızıl hám taǵı basqa n_k danası sarı. Usı ıdıstan táwekeline m dana shar alınǵanda, olardan m_1 danası aq, m_2 danası qara, m_3 danası qızıl hám taǵı basqa m_k danası sarı bolıwı A hádiysesiniń itimallıǵın tabıw formulası:

$$P(A)=\frac{C_{n_1}^{m_1}\cdot C_{n_2}^{m_2}\cdot C_{n_3}^{m_3}\cdot\ldots\cdot C_{n_k}^{m_k}}{C_n^m},$$

bul jerde , $0\le m_i\le n_i$, $i=\overline{1,k}$, $\sum_{i=1}^{k} m_i=m$, $\sum_{i=1}^{k} n_i=n$

Esletpe: $P_n=n!$, $A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}$, $C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}$

3-mısal. Qaltada 12 dana shar bar, olar: 3 dana aq, 4 dana qara hám 5 dana qızıl. Táwekeline bir shar alındı. Onıń qara shar bolıwı A hádiyseniń itimallıǵın tabıń.

Sheshiliwi. Bizge múmkinshilik tuwdırıwshı elementar hádiyseler sanı $m = 4$, hám barlıq elementar hádiyseler sanı $n = 12$, demek, A hádiyseniń itimallıǵı:

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$

4-mısal. Yashikte 10 dana shar bar: 6 dana aq hám 4 dana qara. Táwekeline 2 dana shar alındı. Alınǵan sharlardıń ekewi de aq bolıwı A hádiysesiniń itimallıǵın tabıń.

Sheshiliwi. Bul máselede múmkin bolǵan barlıq jaǵdaylar sanı $n=C_{10}^{2}=\dfrac{10\cdot 9}{1\cdot 2}=45$ ke teń.

A hádiysege qolaylıq tuwdırıwshı jaǵdaylar sanı bolsa, $m=C_{6}^{2}=\dfrac{5\cdot 6}{1\cdot 2}=15$ ke teń. Bunnan bolsa, $P(A)=\dfrac{m}{n}=\dfrac{15}{45}=\dfrac{1}{3}$.

5-mısal. 2 000 lotereya bileti satılǵan. Bunda 1 dana biletke 100 000 sum, 4 dana biletke 50 000 sum, 10 dana biletke 20 000 sum, 20 dana biletke 10 000 sum, 165 dana biletke 5 000 sum, 400 dana biletke 1 000 sumnan utıs shıǵıwı belgilengen, qalǵan biletler utıssız. Bir biletke 10 000 sumnan kem bolmaǵan utıs shıǵıwı itimallıǵın tabıń.

Sheshiliwi. Bul jerde $m=1+4+10+20=35$, $n=2000$. Sebebi, 35 dana biletke 10 000 sumnan joqarı utıslar belgilengen. Sonıń ushın,

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{35}{2000}=0,0175.$$

6-mısal. Dúkánda 6 erkek hám 4 hayal adam isleydi. Tabeldegi tártip nomeri boyınsha tosınnanlı túrde 7 adam tańlap alındı. Tańlap alınǵanlar arasında 3 hayal adam bolıwı itimallıǵın tabıń.

Sheshiliwi. Ulıwma orınlanıwlar sanı, yaǵnıy, 10 adamnan 7 adamdı neshe túrli usılda tańlaw múmkinligi. Bul bolsa, $n=C_{10}^{7}=\dfrac{8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3}=120$ ǵa teń hám endi múmkinshilik tuwdırıwshı elementar hádiyseler sanın tabıw kerek. Bunıń ushın 7 adamlıq topardı tómendegi kóriniste dúzemiz: 4 hayaldan 3 ewin hám 6 erkekten 4 ewin alıwımız kerek, yaǵnıy $m=C_{4}^{3}\cdot C_{6}^{4}=\dfrac{4}{1}\cdot\dfrac{5\cdot 6}{1\cdot 2}=60$.

Demek, bul hádiyseniń itimallıǵı $P(A)=\dfrac{m}{n}=\dfrac{60}{120}=\dfrac{1}{2}$ ge teń.

7-mısal. 2 matematika, 2 fizika hám 2 ximiya kitapları shkaftıń bir tekshesine qoyılmaqta. Ximiya kitaplarınıń izbe-iz keliw itimallıǵı neshege teń?

Sheshiliwi. Barlıq orın almasıwlar sanın tawıp alamız, yaǵnıy 6 kitaptıń orın almasıwları sanı $n=P_{6}=6!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6=720$. Endi ximiya kitapları izbe-iz keliwi ushın ximiya kitapların 1 kitap dep qarap, barlıq orın almasıwlar sanı – $P_{5}=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=120$ nı tabamız hám ximiya kitapların hám orın almasıwlar sanın esapqa alıwımız shárt, yaǵnıy $P_{2}=2!=1\cdot 2=2$. Bunnan bolsa, $m=P_{5}\cdot P_{2}=120\cdot 2=240$ payda boladı. Demek, bul itimallıqtıń klassikalıq anıqlaması boyınsha $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{240}{720}=\frac{1}{3}$ ge teń eken.

8-mısal. Abonent telefon nomerdi terip atırǵanda aqırǵı úsh cifrın esley almadı. Biraq cifrlar túrli ekenligin biledi. Barlıq teriwlerden durıs nomerdi teriw itimallıǵı neshege teń boladı?

Sheshiliwi. Durıs cifrdı teriw hádiysesin A menen, onıń itimallıǵın bolsa $P(A)$ menen belgileymiz.

Aqırǵı úsh cifrdı A_{10}^{3} usıl menen teriw múmkin. Soǵan barlıq tańlawlar sanı $n=A_{10}^{3}=\frac{10!}{(10-3)!}=8\cdot 9\cdot 10=720$ ǵa teń boladı. Izlenip atırǵan telefon nomeri usı 720 dan tek ǵana birewi boladı, yaǵnıy $m=1$. Itimallıqtıń klassikalıq anıqlaması boyınsha $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{1}{720}$ boladı.

Itimallıqtıń statistikalıq anıqlaması

Salıstırmalı jiyilik itimallıq penen bir qatarda, itimallıqlar teoriyasınıń tiykarǵı túsiniklerinen biri esaplanadı.

Anıqlama. ***Hádiyseniń salıstırmalı jiyiligi*** dep, hádiyse orınlanǵan tájiriybeler sanınıń negizinde ótkerilgen barlıq tájiriybeler sanına qatnasına aytıladı. Solay etip, A hádiyseniń salıstırmalı jiyiligi tómendegi formula menen anıqlanadı:

$$W(A)=\frac{M}{N}$$

bul jerde, M sanı – A hádiyseniń N tájiriybede orınlanıwlar sanı.

Anıqlama. Statistikalıq itimallıq – bul tájiriybeler sanınıń úlken mánislerdegi salıstırmalı jiyiligi.

Itimallıq hám salıstırmalı jiyilik anıqlamaların salıstırıp tómendegi juwmaqqa kelemiz: itimallıqtıń anıqlamasında tájiriybelerdiń haqıyqattan ótkerilgenligi talap etilmeydi, salıstırmalı jiyiliktiń anıqlamasında bolsa tájiriybelerdiń negizinde ótkerilgenligi talap etiledi. Ápiwayıraq aytqanda, itimallıq tájiriybeden aldın, salıstırmalı jiyilik bolsa tájiriybeden keyin esaplanadı.

Eger $M=N$ bolsa, yaǵnıy ótkerilgen tájiriybeler sanı hádiyseniń orınlanıwlar sanına teń bolsa, bul hádiyse anıq hádiyse boladı.

Eger $M=0$ bolsa, yaǵnıy ótkerilgen tájiriybe nátiyjesinde hádiyse bir márte de júz bermese, ol jaǵdayda bul hádiyse múmkin bolmaǵan hádiyse boladı.

1-mısal. Mergen nıshanǵa qarata 30 dana oq attı. Bul jerde olardan 23 danası nıshanǵa tiygenligi belgili bolsa, mergen oqlarınıń nıshanǵa tiyiwiniń salıstırmalı jiyiligin tabıń.

Sheshiliwi. Mergen oqlarınıń 23 danası nıshanǵa tiydi, demek, hádiyseniń orınlanıwlar sanı $M=23$ hám barlıq atılǵan oqlar sanı $N=30$, demek, bul hádiyseniń salıstırmalı jiyiligi $W(A)=\frac{23}{30}$ boladı.

2-mısal. Dáslepki 1000 dana natural sanlar ishinen alınǵan sannıń 5 ke eseli bolıwınıń salıstırmalı jiyiligin tabıń.

Sheshiliwi. Bul jerde sannıń 5 ke eseli shıǵıw hádiysesin A menen, onıń salıstırmalı jiyiligin bolsa $W(A)$ menen belgileymiz. Ótkerilgen barlıq tańlawlar sanı N=1000 ǵa, dáslepki 1000 dana natural sanlar ishinde 5 ke eseli 200 dana natural san bar, demek, M=200, salıstırmalı jiyilik bolsa $W(A)=\frac{200}{1000}=\frac{1}{5}$.

3-mısal. Bir mámleketke shet elden kelgen sayaxatshılar hám usı mámleket aymaǵında sayaxat etken puqaralar (ishki sayaxatshılar) haqqında tómendegi maǵlıwmatlar berilgen bolsın.

Jıllar	Shet ellik sayaxatshılar sanı	Ishki sayaxatshılar sanı	Barlıq sayaxatshılar sanı
2018	610 623	403 989	1 014 612
2019	746 224	348 953	1 095 177
2020	822 558	316 897	1 139 455
2021	774 262	346 103	1 120 365
2022	811 314	351 028	1 162 342
$\sum$	3 764 981	1 766 970	5 531 951

Qaralıp atırǵan jıllarda mámleket ishinde sayaxat etken mámleket puqaraları sanınıń salıstırmalı jiyiligin tabıń.

Mámleket ishinde sayaxat etken mámleket puqaraları sanı: $\boldsymbol{M}$ = 1 766 970.

Shet ellik sayaxatshılar sanı: $\boldsymbol{K}$ = 3 764 981.

Ulıwma sayaxatshılar sanı: $\boldsymbol{N}$ = 1 766 970 + 3 764 981 = 5 531 951.

$$W=\frac{M}{N}=\frac{1766970}{5531951}\approx 0{,}3194.$$

Itimallıqtıń geometriyalıq anıqlaması

Barlıq noqatları teń imkaniyatqa iye bolǵan qanday da bir Ω oblast (kesindi, figura yamasa dene) berilgen bolıp, bul oblastqa taslanǵan noqattıń oǵan túsiwi anıq bolsın. Usı berilgen oblasttan kishkene ω oblast (kesindi, figura yamasa dene) ajıratayıq. Ω oblastqa taslanǵan noqattıń ajıratılǵan ω oblastqa túsiw itimallıǵı soralǵan bolsın. Ajıratılǵan oblast qansha úlken bolsa, túsiw itimallıǵı da úlkeyip baradı, ω oblast Ω oblastqa teńleskende túsiw itimallıǵı anıq hádiysege aylanadı. Demek, taslanǵan noqattıń kishkene oblastqa túsiw itimallıǵı kishkene oblast ólshemine tuwrı proporcional bolıp, onı geometriyalıq kózqarastan túsindiriw kerek boladı. Bunday jaǵdaylarda itimallıqtıń geometriyalıq anıqlamasınan paydalanıw qolaylı boladı.

Eger taslanǵan noqattıń Ω oblastqa túsiwi anıq bolsa, ol jaǵdayda bul noqattıń usı oblasttan ajıratılǵan kishkene ω oblastqa túsiw itimallıǵı ω kishkene oblast ólsheminiń Ω oblast ólshemi qatnasına teń boladı:

$$P(A)=\frac{m(\omega)}{m(\Omega)}$$

$m(\omega)$ – bul jerde ω – oblasttıń ólshemi, yaǵnıy bir ólshemli jaǵdayda uzınlıq, eki ólshemlide maydan, úsh ólshemlide kólem hám taǵı basqa.

Eger Ω oblasttıń ólshemi retinde uzınlıǵı L ge teń bolǵan kesindi hám ω kishi oblasttıń ólshemi retinde uzınlıǵı l ge teń bolǵan kishkene kesindi dep alsaq, L kesindige taslanǵan noqattıń l kishkene kesindige túsiw itimallıǵı tómendegishe boladı:

$$P(A)=\frac{l}{L}$$

Eger Ω oblasttıń ólshemi retinde maydanı S ke teń bolǵan figura hám ω kishi oblasttıń ólshemi retinde maydanı s ke teń bolǵan dep alsaq, S figuraǵa taslanǵan noqattıń s figuraǵa túsiw itimallıǵı tómendegishe boladı:

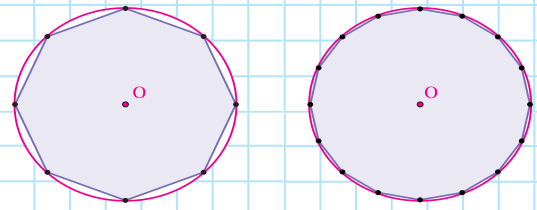
$$P(A)=\frac{s}{S}$$

Eger Ω oblasttıń ólshemi retinde kólemi V ǵa teń bolǵan dene hám ω kishi oblasttıń ólshemi retinde kólem v ǵa teń bolǵan dep alsaq, V denege taslanǵan noqattıń v denege túsiw itimallıǵı tómendegishe boladı:

$$P(A)=\frac{v}{V}.$$

Geometriyalıq anıqlamadan waqıtqa qarata paydalanıw múmkin. Eger waqıya T waqıt ishinde júz beriwi anıq bolsa, bul waqıyanıń t waqıt ishinde júz beriw itimallıǵı tómendegishe boladı:

$$P(A)=\frac{t}{T}$$



1-súwret

B_n – noqattıń n-múyeshke túsiw hádiysesi

1-mısal. R radiuslı dóńgelekke noqat táwekeline taslanǵan. Taslanǵan noqattıń dóńgelekke ishley sızılǵan durıs n-múyeshlik ishine túsiw itimallıǵın tabıń.

Sheshiliwi. $S(D_n)$ – n-múyeshtiń maydanı, $S(D)$ – dóńgelektiń maydanı (1-*súwret*). Ol jaǵdayda,

$$P(B_n)=\frac{S(D_n)}{S(D)}=\frac{n\cdot\frac{R^2}{2}\cdot\sin\frac{2\pi}{n}}{\pi R^2}=\frac{n\cdot\sin\frac{2\pi}{n}}{2\pi}=\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}$$

a) R radiuslı dóńgelekke noqat táwekeline taslanǵan. Taslanǵan noqattıń dóńgelekke ishley sızılǵan durıs úshmúyeshlik ishine túsiw itimallıǵın tabıń.

Sheshiliwi. $S(D_3)$ – úshmúyeshliktiń maydanı, $S(D)$ – dóńgelektiń maydanı (2-*súwret*).

B_3 – noqattıń úshmúyeshlikke túsiw hádiysesi. Ol jaǵdayda,

$$P(B_3)=\frac{S(D_3)}{S(D)}=\frac{3\sqrt{3}R^2}{4\pi R^2}=\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}\approx 0,4137$$

b) R radiuslı dóńgelekke noqat táwekeline taslanǵan. Taslanǵan noqattıń dóńgelekke ishley sızılǵan kvadrattıń ishine túsiw itimallıǵın tabıń.

Sheshiliwi. $S(D_4)$ – kvadrattıń maydanı, $S(D)$ – dóńgelektiń maydanı (3-*súwret*).

B_4 – noqattıń kvadratqa túsiw hádiysesi. Ol jaǵdayda,

$$P(B_4)=\frac{S(D_4)}{S(D)}=\frac{2R^2}{\pi R^2}=\frac{2}{\pi}\approx 0,637$$

c) R radiuslı dóńgelekke noqat táwekeline taslanǵan. Taslanǵan noqattıń dóńgelekke ishley sızılǵan durıs altımúyeshlik ishine túsiw itimallıǵın tabıń.

Sheshiliwi. $S(D_6)$ – altımúyeshliktiń maydanı, $S(D)$ – dóńgelektiń maydanı (4-*súwret*).

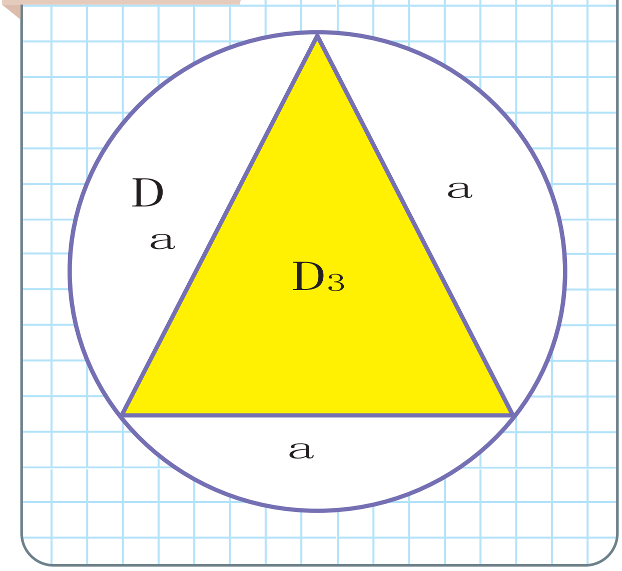
B_6 – noqattıń úshmúyeshlikke túsiw hádiysesi. Ol jaǵdayda,

$$P(B_6)=\frac{S(D_6)}{S(D)}=\frac{3\sqrt{3}R^2}{2\pi R^2}=\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\approx 0,8274$$

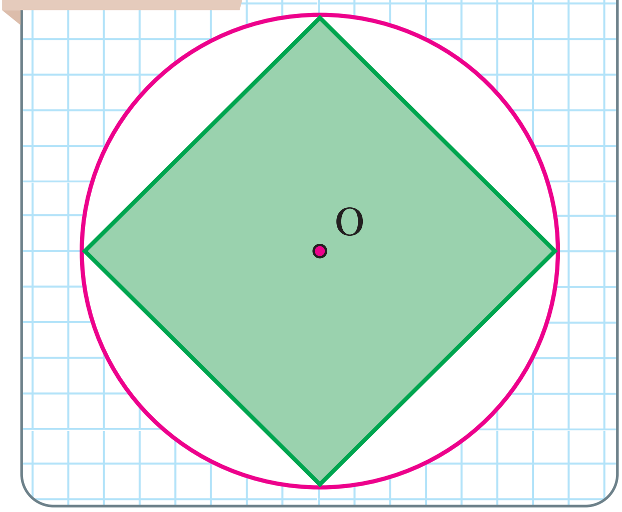
2-mısal. Uzınlıǵı 30 cm bolǵan L kesindige uzınlıǵı 12 cm bolǵan l kesindi jaylastırılǵan. Úlken kesindige táwekeline qoyılǵan noqattıń kishi kesindige de túsiw itimallıǵın tabıń. Noqattıń kesindige túsiw itimallıǵı kesindiniń uzınlıǵına tuwrı proporcional bolıp, onıń jaylasıwına baylanıslı emes, dep esaplanadı.

Sheshiliwi. Taslanǵan noqattıń L kesindige túsiwi anıq. $P(E)$ – bul L kesindide jaylasqan l kesindige túsiw itimallıǵın tabamız (5-*súwret*). Súwrette tek úsh jaǵday kórsetilgen. Biraq l ke-

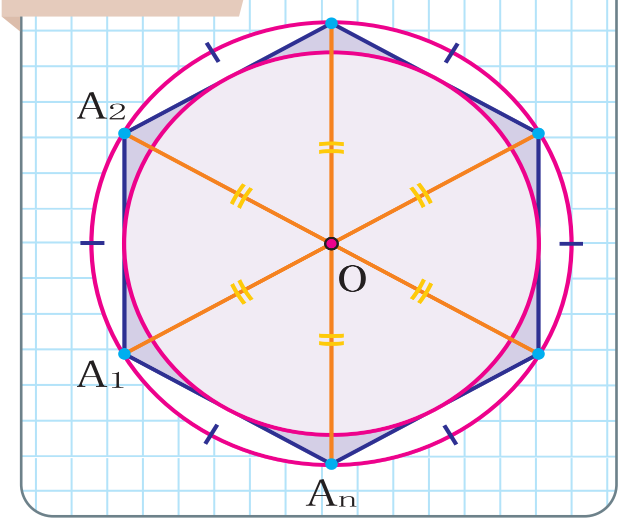
2-súwret



3-súwret



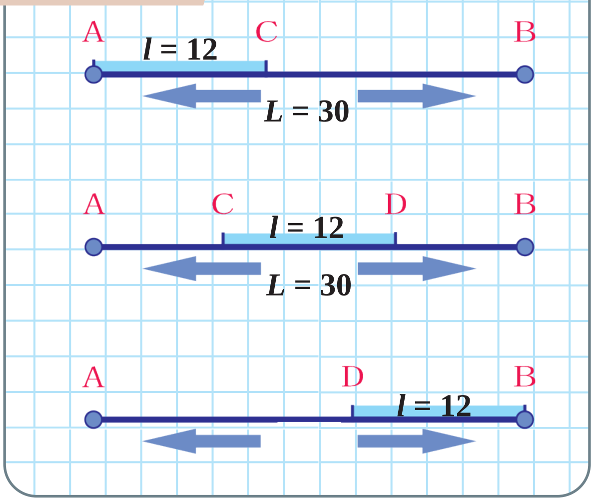
4-súwret



sindi L dıń qálegen bóleginde jaylasqan bolıwı múmkin.

$$P(E)=\frac{l}{L}=\frac{12}{30}=\frac{2}{5}.$$

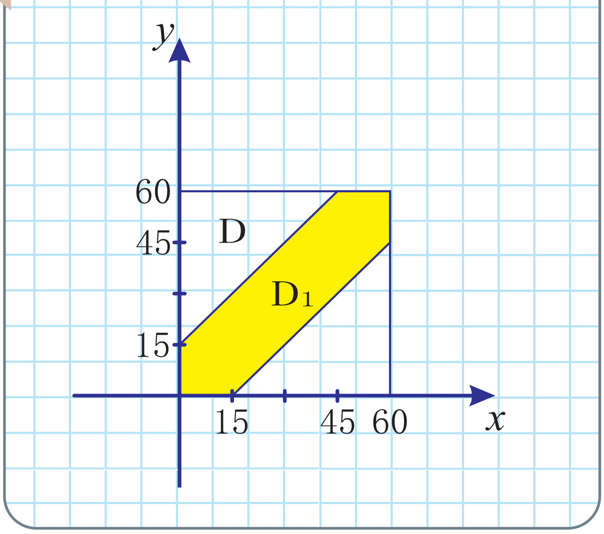
5-súwret



3-mısal. Eki dos saat 9 benen 10 arasında ushıraspaqshı boldı. Birinshi kelgen adam dostısın 15 minut dawamında kútiwi aldınnan shártlesip alındı. Eger bul waqıt dawamında dostısı kelmese, ol ketiwi múmkin. Eger olar saat 9 benen 10 arasındaǵı qálegen waqıtta keliwi múmkin bolıp, keliw waqıtları kórsetilgen waqıt dawamında tosınnan bolsa, hám óz ara kelisip alınǵan bolmasa, bul eki dostıń ushırasıw itimallıǵı neshege teń?

Sheshiliwi. Birinshi adamnıń keliw waqıt momenti x, ekinshi adamnıń bolsa y bolsın. Olardıń ushırasıwları ushın $|x-y|\le 15$ teńsizliktiń orınlanıwı zárúr hám jeterli. x hám y lerdi tegisliktegi Dekart koordinataları sıpatında kórsetemiz hám masshtab birligi dep minutlardı alamız. Orınlanıwı múmkin bolǵan barlıq imkaniyatlar tárepleri 60 bolǵan kvadratlıq noqatlarınan hám ushırasıwǵa múmkinshilik tuwdırıwshı imkaniyatlar boyalǵan oblast noqatlarınan ibarat (6-*súwret*).

6-súwret



Demek, itimallıqtıń geometriyalıq anıqlaması boyınsha, izlenip atırǵan itimallıq boyalǵan oblast maydanınıń kvadrattıń maydanına bolǵan qatnasına teń:

$S(D_1)$ – boyalǵan oblasttıń maydanı, $S(D)$ – kvadrattıń maydanı bolsın (6-*súwret*). A – doslardıń ushırasıw hádiysesi.

$$S(D_1)=60\cdot 60-2\cdot\frac{45\cdot 45}{2}=1575 \quad S(D)=60\cdot 60=3600.$$

Izlenip atırǵan itimallıq: $P(A)=\dfrac{S(D_1)}{S(D)}=\dfrac{1575}{3600}=\dfrac{7}{16};\qquad P(A)=\dfrac{7}{16}$

MÁSELELER

1. Lotereyada 1000 dana bilet bar. Olardan 500 danası utıslı, qalǵan 500 danası utıssız. Eki bilet satıp alındı. Eki bilettiń de utıslı bolıwı itimallıǵın tabıń.

2. Tıyın eki márte taslandı. Eki mártede de gerb túsiw itimallıǵın tabıń.

3. 20 dana kitap shkaflarǵa táwekeline taqlandı. 20 dana kitaptan anıq 5 ewiniń izbe-iz turıwı(A hádiyse) itimallıǵı neshege teń?

4. Eki kubik taslanǵan. Olardıń jaqlarında shıqqan cifrlar qosındısı – jup san. Usı menen birge, taslanǵan kubiklerdiń keminde birewinde barlıq waqıt 6 cifrı túsiw itimallıǵın tabıń.

5. Eki kubik taslanǵan. Olardıń jaqlarında shıqqan sanlar qosındısı 5 ke, kóbeymesi bolsa 4 ke teń bolıwı itimallıǵın tabıń.

6. Eki kubik taslanǵan. Olardıń jaqlarında shıqqan cifrları qosındısı 7 ge teń bolıwı itimallıǵın tabıń.

7. Cifrları hár túrli eki tańbalı san oylanǵan. Oylanǵan san tosınnan aytılǵan eki tańbalı san bolıwı itimallıǵın tabıń.

8. Qutıda 20 dana shar bar: 10 dana qara hám 10 dana aq. Qutıdan tosınnan bir shar alındı. Bul shar: a) aq; b) qara shar bolıwı itimallıǵın tabıń.

9. Texnikalıq baqlaw bólimi tosınnan ajıratıp alınǵan 100 dana kitaptan ibarat 5 dana jaramsız kitap taptı. Jaramsız kitaplar shıǵarılıwınıń salıstırmalı jiyiligin tabıń.

10. Nıshanǵa 20 dana oq atılǵan. Sodan, 18 dana oq nıshanǵa tiygenligi belgili boldı. Nıshanǵa tiyiwdiń salıstırmalı jiyiligin tabıń.

11. Buyımlar bólegin sınawda jaramlı buyımlar salıstırmalı jiyiligi 0,9 ǵa teń boldı. Eger barlıǵı bolıp 200 dana buyım tekserilgen bolsa, jaramlı buyımlar sanın tabıń.

12. Bir qalada 920 adamnan jumısqa qanday jetip barıwın soraǵanda, olardan 350 adam mashinada, 420 adam jámiyetlik transportında, 80 adam velosipedte, 70 adam piyada barıwı belgili boldı.
    1) mashinada;
    2) jámiyetlik transportında;
    3) velosipedte;
    4) piyada barıwshılar sanınıń salıstırmalı jiyiligin tabıń.

13. Radiusı 20 cm bolǵan dóńgelektiń ishinde bir-biri menen kesilispeytuǵın hám biriniń radiusı 5 cm, ekinshisiniki 10 cm bolǵan eki sheńber ótkerilgen. Úlken dóńgelektiń ishinde táwekeline alınǵan noqat kishi sheńberlerden biriniń ishinde bolıwı itimallıǵın tabıń.

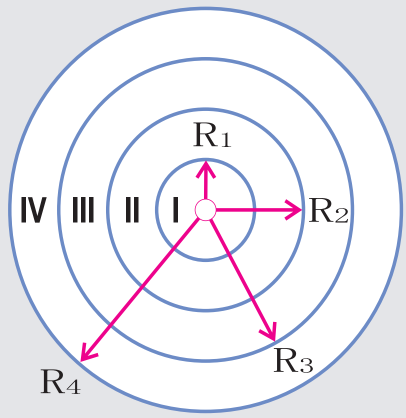
14. Eki dos belgili orında saat 10 menen 11 arasında ushırasıwǵa kelisti. Birinshi kelgen ekinshini 20 minut dawamında kútedi, sonnan soń ketedi. Eger kórsetilgen waqıt aralıǵında doslardıń keliw momentleri teń imkaniyatlı bolsa, olardıń ushırasıw itimallıǵın tabıń.

15. Qattı samal nátiyjesinde 40- hám 70-kilometrler aralıǵında telefon sımı úzilgen. Úziliw 50- hám 55-kilometrler arasında júz beriwi itimallıǵın tabıń.

16. Dóńgelekke kvadrat ishley sızılǵan. Dóńgelektiń ishine táwekeline qoyılǵan noqat kvadrattıń ishinde bolıp qalıw itimallıǵı neshege teń?

17. Nıshan radiusları $R_1 = r,\ R_2 = 2r,\ R_3 = 3r,\ R_4 = 4r$ bolǵan koncentrlik dóńgelekten ibarat. Eger nıshanǵa atılǵan nayzanıń dóńgelekke tiyiwi anıq bolsa, ol jaǵdayda nayzanıń hárbir oblastqa túsiw itimallıǵın tabıń (7-*súwret*).

7-súwret



18. Eki kubik bir waqıtta taslandı. Túsken sanlar qosındısınıń beske teń bolıwı itimallıǵın tabıń.

19. Toparda 30 student bolıp, olardan 10 student matematika dógeregine qatnasadı. Topar ishinde táwekeline 6 student tańlap alındı. Olardıń ishinen hesh bolmaǵanda birewi matematika dógeregine qatnasatuǵın student bolıwı itimallıǵın tabıń.

20. 3 dana kók hám 4 dana jasıl sharlardan qálegen túrde tańlanǵan 3 dana shardıń 2 danası kók, 1 danası jasıl reńde bolıwı itimallıǵın tabıń.

21. Kubik bir márte taslanǵan, jup san túsiw itimallıǵın tabıń.

22. Tasıw waqtında 10 000 dana ǵarbızdan 26 danası jarılǵan. Jarılǵan ǵarbızlar sanınıń salıstırmalı jiyiligin tabıń.

23. Qutıda 7 dana aq, 3 dana qara shar bar. Odan táwekeline alınǵan shardıń aq bolıwı itimallıǵın tabıń.

24. Telefonda nomer terip atırǵan abonent aqırında eki cifrın esten shıǵarıp qoydı hám tek ǵana bul cifrlar hár qıylı ekenligin bilgen jaǵdayda olardı táwekel terdi. Kerekli nomer terilgenligi itimallıǵın tabıń.

25. Qurılma 5 elementten ibarat bolıp, olardıń 2 elementi gónergen. Qurılma iske túsirilgende tosınnan 2 element jalǵandı. Iske túsiriwde gónermegen elementler jalǵanǵan bolıwı itimallıǵın tabıń.

26. Qutıda *m* dana aq hám *n* dana qara sharlar bar. Qutıdan táwekel bir shar alınǵan. Alınǵan shardıń aq bolıwı itimallıǵın tabıń.

27. Táwekeline 20 dan úlken bolmaǵan natural san tańlanǵanda, onıń 5 ke eseli bolıwı itimallıǵın tabıń.

TÁKIRARLAW

FUNKCIYA HÁM ONÍŃ QÁSIYETLERI

1. Funkciyalardıń anıqlanıw oblastın tabıń.

a) $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2-4}$ b) $y=\sqrt{3x-x^3}$ c) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-5}-\sqrt{9-x}}$

d) $y=\sqrt{\dfrac{(x-1)(3-x)}{x(4-x)}}$ e) $y=\sqrt{\dfrac{x(x+1)}{(x-2)(4-x)}}$ f) $y=\sqrt{25-x^2}+\dfrac{2x-3}{x+1}$

2. Eger $f(x)=x^2$ hám $g(x)=2x-1$ bolsa, x tıń neshe mánisinde $f(g(x))=g(f(x))$ boladı?

3. Eger $f(x+1)=x^2-3x+2$ bolsa, $f(x)=?$

4. Eger $f(x)=\sqrt{x^3-1}$ bolsa, $f\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)$ neshege teń?

5. Eger $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$ bolsa, $f\left(\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{1}{f(x)}$ neshege teń?

6. Funkciyalar qanday mánislerdi qabıl etedi?

a) $f(x)=\dfrac{3}{x-4}$ b) $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$ c) $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x-2}+2$

d) $y=-x^4+2x^2+5$ e) $y=\dfrac{x^2-4x+9}{x^2-4x+5}$ f) $y=\sqrt{x^2-6x+11}$

7. Berilgen funkciyalardan qaysı biri jup funkciya?

a) $y=\dfrac{5x^2}{(x-3)^2}$ b) $y=\dfrac{x(x-2)(x-4)}{x^2-6x+8}$ c) $y=x^2+|x+1|$

d) $f(x)=x^3-\dfrac{2}{x^3}$ e) $y=\begin{cases}-x^2, x<0\\ x^2, x\geq 0\end{cases}$ f) $y=\sqrt{x^2-6x+11}$

8. Berilgen funkciyalardan qaysı biri taq funkciya?

a) $y=3x^5+x^3$ b) $y=(0,25)^x+(0,25)^{-x}$ c) $y=\begin{cases}x, x<0\\ -x, x\geq 0\end{cases}$

d) $y=|x|-1$ e) $y=\dfrac{x^4-2x^2}{3x}$ f) $y=\sqrt{3-x^2-2x}$

RACIONAL TEŃLEMELER

Teńlemelerdi sheshiń (2-21)

1. t nıń qanday mánislerinde $18x+7=5$ hám $18x+7+t=5+t$ teńlemeler teń kúshli boladı?

2. $\frac{4x^2-7x-2}{x^2-5x+6}=0$

3. $2+\frac{4}{x^2}=\frac{9}{x}$

4. $1-\frac{15}{x}=\frac{16}{x^2}$

5. $\frac{9}{x}+\frac{13}{2x}=2$

6. $\frac{2}{x-3}=\frac{x}{x+3}$

7. $\frac{x^3-3x^2}{x+2}\cdot\frac{x^2-4}{x^2}=0$

8. $\frac{1-x}{(2-x)(x-3)}+1=\frac{1}{2-x}$

9. $\frac{1}{x^2-9}+\frac{1}{3x-x^2}=\frac{3}{2x+6}$

10. $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2-\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2=0$

11. $\frac{1}{x}+\frac{36}{9x-x^2}-\frac{x-5}{9-x}=0$

12. $\frac{x-49}{50}+\frac{x-50}{49}=\frac{49}{x-50}+\frac{50}{x-49}$

13. $5-\frac{x^2-14x-51}{x^2-x-12}=\frac{3}{x-4}$

14. $\frac{2}{x^2-4}+\frac{x-4}{x^2+2x}=\frac{1}{x^2-2x}$

15. $\frac{30}{x^2-1}-\frac{13}{x^2+x+1}=\frac{18x+7}{x^3-1}$

16. $\frac{x^2-3x}{x-2}+\frac{x-2}{x^2-3x}=2,5$

17. $\frac{4}{x^2-3x+2}-\frac{3}{2x^2-6x+1}+1=0$

18. $\frac{x-2}{x+1}+\frac{4(x+1)}{x-2}=5$

19. $\frac{x^2-x}{x^2-x+1}-\frac{x^2-x+2}{x^2-x-2}=1$

20. $\frac{1}{x^2+2x-3}+\frac{18}{x^2+2x+2}=\frac{18}{x^2+2x+1}$

21. $x^2+\frac{x^2}{(x+1)^2}=\frac{40}{9}$

22. Poezd jolda 30 minut toqtap qaldı. Poezd reje kestesi boyınsha jetip keliwi ushın mashinist 80 km aralıqta tezlikti 8 km/h ke asırdı. Poezd reje boyınsha qanday tezlik penen júriwi kerek edi?

23. Dáriya ağısı boylap motorlı qayıqta 28 km hám ağısqa qarsı 25 km ótildi . Bul jerde pútin jolğa sarplanğan waqıt turğın suwda 54 km di ótiw ushın ketken waqıtqa teń. Eger dáriya ağısınıń tezligi 2 km/h bolsa, motorlı qayıqtıń turğın suwdağı tezligin tabıń.

Teńlemelerdi sheshiń (24-38)

24. $\frac{x}{2}+\frac{2}{x}=\frac{x}{3}+\frac{3}{x}$

25. $\frac{1+x}{6}-\frac{6}{1+x}=\frac{4}{x+1}-\frac{x+1}{4}$

26. $\frac{x-2}{x+2}+\frac{x+2}{x-2}=3\frac{1}{3}$

27. $\frac{2x+1}{2x-1}+\frac{2x-1}{2x+1}=5,2$

28. $\frac{x^2-2x}{x-1}-\frac{2x-1}{1-x}=3$

29. $\frac{2}{x-4}+\frac{4}{x^2-4x}=0,625$

30. $\dfrac{(x^2+1)x}{(x^2-x+1)^2}=\dfrac{10}{9}$

31. $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{3}{x-3}=\dfrac{6}{x+6}$

32. $x^2+\dfrac{1}{x^2}-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+4=0$

33. $x^4-6x^3+10x^2-6x+1=0$

34. $31\left(\dfrac{24-5x}{x+1}+\dfrac{5-6x}{x+4}\right)+370=29\left(\dfrac{17-7x}{x+2}+\dfrac{8x+55}{x+3}\right)$

35. $\dfrac{x+3}{4x^2-9}-\dfrac{3-x}{4x^2+12x+9}=\dfrac{2}{2x-3}$

36. $\dfrac{30}{x^2-1}+\dfrac{7-18x}{x^3+1}=\dfrac{13}{x^2-x+1}$

37. $\dfrac{2x+7}{x^2+5x-6}+\dfrac{3}{x^2+9x+18}=\dfrac{1}{x+3}$

38. $2x^4+x^3-x^2+x+2=0$

RACIONAL TEŃLEMELER SISTEMASÍ

Teńlemeler sistemasın sheshiń (1-8)

1. $\begin{cases}\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=2,5\\ x^2-y^2=3\end{cases}$

2. $\begin{cases}x+y+\dfrac{x}{y}=9\\ \dfrac{(x+y)x}{y}=20\end{cases}$

3. $\begin{cases}2xy-\dfrac{3x}{y}=15\\ xy+\dfrac{x}{y}=15\end{cases}$

4. $\begin{cases}\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{2}{x-y}=3\\ \dfrac{3}{x+y}+\dfrac{4}{x-y}=7\end{cases}$

5. $\begin{cases}\dfrac{x}{y}-\dfrac{3y}{x}=\dfrac{1}{2}\\ x^3-\dfrac{y^3}{8}=-28\end{cases}$

6. $\begin{cases}\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{25}{12}\\ x^2-y^2=7\end{cases}$

7. $\begin{cases}\dfrac{4y}{x}+\dfrac{x}{y}=5\\ xy=4\end{cases}$

8. $\begin{cases}x+y=5\\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=-\dfrac{13}{6}\end{cases}$

Teńlemeler sistemasın sheshiń (9-13):

9. $\begin{cases}\dfrac{2}{2x-y}+\dfrac{3}{x-2y}=\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{2}{2x-y}-\dfrac{1}{x-2y}=\dfrac{1}{18}\end{cases}$

10. $\begin{cases}\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{10}{3}\\ 2x^2+y^2=27\end{cases}$

11. $\begin{cases}\dfrac{6}{x+y}+\dfrac{5}{x-y}=7\\ \dfrac{3}{x+y}-\dfrac{2}{x-y}=-1\end{cases}$

12. $\begin{cases} \dfrac{11}{2x-3y}+\dfrac{18}{3x-2y}=13 \\ \dfrac{27}{3x-2y}-\dfrac{2}{2x-3y}=1 \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dfrac{2}{x}+\dfrac{y}{3}=3 \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{3}{y}=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

RACIONAL TEŃSIZLIKLER

Teńsizliklerdi sheshiń.

1. $(-4x+3)(-5x+4)>0$

2. $(x^2-16)^3(x+7)<0$

3. $(x-2)^2(x-1)(x+7)(x-5)\geq 0$

4. $\dfrac{(x+6)^3(x-4)}{(7-x)^5}<0$

5. $(x^2-1)(x^2+5x+6)(x^2-5x+6)\leq 0$

6. $\left(2x+\dfrac{1}{x}\right)^2+2x+\dfrac{1}{x}-12<0$

7. $\dfrac{5x+4}{x-2}<1$

8. $\dfrac{3x+2}{x-3}>1$

9. $\dfrac{x-4}{x^2-9x+14}>0$

10. $\dfrac{x^4-10x^2+9}{6-2x}<0$

11. $\dfrac{x^2+1}{x-3}>0$

12. $\dfrac{x+3}{x^2+7}<0$

13. $(3-\sqrt{10})(2x-7)<0$

14. $\dfrac{(x^2-x-2)^2}{x^2+7x-8}\geq 0$

15. $\dfrac{3x-1}{x^2+x+1}\leq 0$

16. $\dfrac{x^2+2x-15}{3x^2+5x-8}\leq 0$

17. $\dfrac{2}{x+2}<\dfrac{1}{x-3}$

18. $\dfrac{3}{2-x}>\dfrac{1}{x+3}$

19. $\dfrac{2}{x+3}<\dfrac{1}{2x-1}$

20. $\dfrac{x+1}{x-2}>\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{1}{2}$

21. $\dfrac{x^3-5x^2+8x-4}{x-3}\leq 0$

22. $\dfrac{6}{x-1}\leq\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{7}{x+2}$

23. $\dfrac{14x(2x+3)}{x+1}<\dfrac{(9x-30)(2x+3)}{x-4}$

24. $\dfrac{(5x+4)(3x-2)}{x+3}\leq\dfrac{(3x-2)(x+2)}{1-x}$

25. $(x-3)^2+\dfrac{1}{x^2-6x+9}>2$

26. $\dfrac{2x-3}{4\sqrt{6}-10}>5+2\sqrt{6}$

RACIONAL TEŃSIZLIKLER SISTEMASÍ

Teńsizlikler sistemasın sheshiń.

1. $\begin{cases} 2x-14<0 \\ -3x+9<0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 6x-1>9-4x \\ 3-2x<x+16 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3(2-3x)+2(3-2x)>x \\ 6<x^2-x(x-8) \end{cases}$

4. $\begin{cases} 5\left(1-\dfrac{x-4}{4}\right)-7(2x-3)>0 \\ \dfrac{3x-14}{5}-\dfrac{3x-10}{20}-0,7(x+8)<0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^2\le 9 \\ x+1>0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 4x+\dfrac{2x-3}{2}>\dfrac{7x-5}{2} \\ \dfrac{7x-2}{3}-2x>\dfrac{5(x-2)}{4} \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dfrac{5x-4}{4}-\dfrac{4x+1}{3}\ge\dfrac{x+2}{4}-7 \\ \dfrac{4x}{3}-1-\dfrac{6x+2}{2}>x+\dfrac{6}{5} \end{cases}$

8. $\begin{cases} x^2+5x-6<0 \\ x+3\ge 0 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 13-\dfrac{3-7x}{10}+\dfrac{x+1}{2}<14-\dfrac{7-8x}{2} \\ 7(3x-5)+4(17-x)>18-\dfrac{5(2x-6)}{2} \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dfrac{x}{3}-\dfrac{3x-1}{6}<\dfrac{2-x}{12}-\dfrac{x+1}{2}+3 \\ x>\dfrac{5x-4}{10}-\dfrac{3x-1}{5}-2,5 \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dfrac{3}{4}(x-1)+\dfrac{7}{8}<\dfrac{1}{4}(x-1)+\dfrac{5}{2} \\ \dfrac{x}{4}-\dfrac{2x-3}{3}<2 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x^2+x+8<0 \\ x^2+6x+5\ge 0 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 5x\ge 2 \\ -0,3x^2+4,8<0 \\ -2x^2+17x+19\ge 0 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2-5x\le 0 \\ x-x^2\ge 0 \\ -4x^2-5x+21\ge 0 \end{cases}$

15. $\begin{cases} \dfrac{x-4}{4}-x+1<\dfrac{x-2}{2}-\dfrac{x-3}{3} \\ 3-x>2x-10 \end{cases}$

16. $\begin{cases} \dfrac{2x}{3}-1<3-2(1-2x) \\ 3x-5>1-2(1-x) \\ 1-2x<3(2x-1) \end{cases}$

17. $\begin{cases} 7<2x+1<11 \\ \dfrac{x+2}{x-5}<\dfrac{x-6}{x-3} \end{cases}$

18. $\begin{cases} -2<2-x<1 \\ \dfrac{x+3}{1-x}\le\dfrac{8-x}{x-4} \end{cases}$

19. $\begin{cases} \dfrac{2}{7}<2^n<3 \\ 3^n>2 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 1<(\dfrac{2}{3})^n<3 \\ \left(\dfrac{3}{4}\right)^n<1,5 \end{cases}$

21. $\begin{cases} \dfrac{1}{5}<3^n<4 \\ 2<\left(\dfrac{1}{3}\right)^n<10 \end{cases}$

IRRACIONAL TEŃLEMELER

Teńlemelerdi sheshiń.

1. $\sqrt{x-1}=-4$

2. $\sqrt{x}=8$

3. $\sqrt{x}=-16$

4. $\sqrt[3]{x+1}=2$

5. $\sqrt[4]{x-7}=-3$

6. $\sqrt{x^2+2x-6}\cdot\sqrt{x-9}=0$

7. $1+\sqrt{x+3}=0$

8. $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=1$

9. $\sqrt{x-4}+\sqrt{x^2-3}=0$

10. $\sqrt{1+4x-x^2}=x-1$

11. $\sqrt{x-3}+\sqrt{2x+4}=-11$

12. $\sqrt{2x^2+8x+7}-2=x$

13. $\sqrt{x^2-7x+12}=2x-6$

14. $\sqrt{4-x}=\sqrt{x-7}$

15. $\sqrt{3+\sqrt{5-x}}=\sqrt{x}$

16. $\sqrt{4-x}+\sqrt{5+x}=3$

17. $2\sqrt{x+18}+\sqrt{4x-3}=15$

18. $\sqrt{x+20}-\sqrt{x-1}=3$

19. $\sqrt{x-5}+\sqrt{1-x}=7$

20. $(x^2-5x+6)\cdot\sqrt{2-x}=0$

21. $(2-x)\cdot\sqrt{x^2-x-20}=12-6x$

22. $(x-1)\cdot\sqrt{\dfrac{x-2}{x^2-1}}=0$

23. $(4x-x^2-3)\cdot\sqrt{x^2-2x}=0$

24. $\sqrt[3]{9x+1}=1+3x$

25. $\sqrt{x+5}+\sqrt[4]{x+5}=12$

26. $x^2+11+\sqrt{x^2+4}=42$

27. $x^2+5x+\sqrt{x^2+5x-5}=17$

28. $\sqrt{x^2-x}+\sqrt{2-x-x^2}=\sqrt{x}-1$

29. $\sqrt{4-x}+\sqrt{x-4}=0$

30. $\sqrt{7-5x}+\sqrt{5x-7}=29$

31. $\sqrt{\dfrac{x-1}{2x+1}}+\sqrt{\dfrac{2x+1}{x-1}}=\dfrac{10}{3}$

32. $\sqrt{5+2x}=10-3\sqrt[4]{5+2x}$

33. $\sqrt{3-x}+\sqrt{x-2}=(x-7)^2\cdot(x-5)$

34. $2\sqrt{x-1}-5=\dfrac{3}{\sqrt{x-1}}$

35. $\dfrac{\sqrt{x^2-3x-4}}{x+2}=\dfrac{\sqrt{x^2-3x-4}}{4-x}$

36. $x^2+\sqrt{x^2+20}=22$

37. $\sqrt{x^3+4x-1-8\sqrt{x^4-x}}=\sqrt{x^3-1}+2\sqrt{x}$

38. $6x^2+7x\sqrt{1+x}=24(1+x)$

39. $\sqrt{(x^2+8x)^2}=x^2+8x$

40. $\sqrt{(4x^2-5x)^2}=5x-4x^2$

41. $\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}=2-\sqrt{x-4}$

42. $\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}-2}=x-\dfrac{1}{x}$

43. $\sqrt{5-x}+\sqrt{x-6}=x^2+2x$

44. $\sqrt{x+6\sqrt{x-9}}+\sqrt{x-6\sqrt{x-9}}=6$

45. $\sqrt{x+8\sqrt{x-16}}+\sqrt{x-8\sqrt{x-16}}=2\sqrt{x-16}$

46. $\dfrac{\sqrt[4]{x^4-16}+\sqrt[6]{x^3-8}}{3x-x^2-2}=0$

IRRACIONAL TEŃLEMELER SISTEMASÍ

Teńlemeler sistemasın sheshiń.

1. $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=8\\ \sqrt{x}\cdot\sqrt{y}=15\end{cases}$

2. $\begin{cases}\sqrt{xy}=12\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=7\end{cases}$

3. $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=6\\ x-y=12\end{cases}$

4. $\begin{cases}\sqrt{x+3y+6}=2\\ \sqrt{2x-y+2}=1\end{cases}$

5. $\begin{cases}x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=30\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=5\end{cases}$

6. $\begin{cases}3\sqrt{x}-\sqrt{y}=8\\ \sqrt{x}+2\sqrt{y}=19\end{cases}$

7. $\begin{cases}25y+x=100-10\sqrt{xy},\\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=4,\end{cases}$

8. $\begin{cases}xy=64\\ x-y+\sqrt{xy}=20\end{cases}$

9. $\begin{cases}\sqrt{x+y-1}=1\\ \sqrt{x-y+2}=2y-2\end{cases}$

10. $\begin{cases}x+y-\sqrt{xy}=7\\ xy=9\end{cases}$

11. $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=26\\ \sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}=6\end{cases}$

12. $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=-3\\ xy=8\end{cases}$

13. $\begin{cases}\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=3\dfrac{3}{4}\\ xy=1\end{cases}$

14. $\begin{cases}\sqrt{x}-\sqrt{y}=5\\ \sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}=1\end{cases}$

15. a) $\begin{cases}5x+3\sqrt{xy}+4y=12\\ 3x+2\sqrt{xy}+3y=8\end{cases}$ b) $\begin{cases}2x-6\sqrt{xy}+7y=9\\ x-4\sqrt{xy}+5y=6\end{cases}$

16. a) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=5\\ x+y+4\sqrt{xy}=37\end{cases}$ b) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=4\\ x+y-3\sqrt{xy}=1\end{cases}$

17. a) $\begin{cases}x\sqrt{x}+12y\sqrt{x}=28\\ 8y\sqrt{y}+6x\sqrt{y}=36\end{cases}$ b) $\begin{cases}x\sqrt{x}+27y\sqrt{x}=36\\ 27y\sqrt{y}+9x\sqrt{y}=28\end{cases}$

KÓRSETKISHLI TEŃLEMELER

1. Teńlemeni sheshiń.

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{1024}$ b) $\left(\frac{5}{4}\right)^{2x-1} = (0{,}8)^{x-2}$ c) $0{,}5^{\sqrt{x+1}} \cdot 0{,}5^{-1} = 0{,}5^{\sqrt{x}}$

d) $4^{x-1} - 4^{x+1} + 4^{x+2} = 49$ e) $2^{x+1} + 3 \cdot 2^{x-1} - 5 \cdot 2^x + 6 = 0$ f) $5^{x+1} + 3 \cdot 5^{x-1} - 6 \cdot 5^x + 10 = 0$

2. $49^x+77^x+1=57$ teńleme neshe korenge iye?

3. $9^x - 3^{x+1} + 2 = 0$ teńlemeniń eń úlken korenin tabıń.

KÓRSETKISHLI TEŃSIZLIKLER

1. Teńsizlikti sheshiń.

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x^2-3x} \leq \frac{3}{2}$ b) $\left(\frac{1}{7}\right)^{3x+4} \cdot 7\sqrt{7} < \frac{1}{7}$ c) $(0,04)^{2\tilde{o}} > (0,2)^{x(3-x)}$

d) $25^x + 5^x > 0$ e) $3^{\frac{x-1}{x+1}} > 7$ f) $3{,}2^{2(x-\frac{1}{2})} \geq 3{,}2\sqrt{3{,}2}$

g) $7^{2x-9} > 7^{3x-6}$ h) $0,5^{4x+3} \leq 0,5^{6x-1}$ i) $2\sqrt{2} \cdot 2^{x-3} \geq \frac{1}{2}$

2. Teńsizliktiń sheshimin qanaatlandırıwshı natural sanlar neshew?

a) $8^{-2x+8} > 512$ b) $2^{5x-7} \leq 16$ c) $2^{5x-7} \geq 16$ d) $0,1^{4x-5} > 0,001$

3. Teńsizliktiń eń úlken pútin sheshimin tabıń.

a) $2,5^{2x+3} \leq 6,25$ b) $1,1^{5x-3} < 1,21$ c) $0,7^{9x+4} > 0,343$ d) $\left(\frac{2}{5}\right)^{7x-9} \geq \frac{8}{125}$

LOGARIFM TÚSINIGI. LOGARIFMLIK FUNKCIYA

1. $A(-2;-1)$ noqat qaysı funkciyanıń grafigine tiyisli emes?

1) $y = \log_2\left(-\frac{1}{x}\right)$ 2) $y = \log_2|x|$ 3) $y = \log_{\frac{1}{2}}|x|$ 4) $y = -\log_2(-x)$

2. Funkciyanıń anıqlanıw oblastın tabıń.

a) $y = \lg(x+2) + \lg(3-x)$ b) $y = \ln(x+|x|)$

3. $y = \log_x(x+1)$ funkciya $x \in \{2;3;4;5;6\}$ bolǵanda argumenttiń qaysı mánisinde eń úlken mániske iye boladı?

4. $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ funkciyanıń grafigin $y = \log_3 x$ funkciyanıń grafiginen qanday usıl menen payda etiw múmkin?

LOGARIFMLIK AŃLATPALARDÍ BIRDEY ALMASTÍRÍW

1. Ańlatpanıń mánisin esaplań:

a) $\log_{12}\sqrt[5]{144}$ b) $\log_3 5-\log_3\frac{5}{27}$ c) $\frac{\log_{27}2}{\log_3 8}$

d) $\frac{\log_{11}12}{\log_{11}6}+\frac{\log_5 3}{\log_5 6}$ e) $\frac{3\log_7 2-\frac{1}{2}\log_7 64}{4\log_5 2+\frac{1}{3}\log_5 27}$ f) $81^{\frac{1}{\log_5 3}}+27^{\log_3 4}+3^{\frac{4}{\log_7 9}}$

g) $\frac{1}{2}\log_3\log_5 125$ h) $-\log_2\log_2\sqrt{\sqrt[4]{2}}$

LOGARIFMLIK TEŃLEMELER

1. Teńlemeni sheshiń.

a) $\log_5 x=2$ b) $\log_{0,2}x=4$ c) $\log_{\frac{1}{3}}x=-1$ d) $\log_7 x=\frac{1}{3}$

2. Teńlemeni sheshiń.

a) $\log_3 x+\log_{\frac{1}{3}}x+2=0$ b) $3\log_{\frac{1}{7}}x=\log_{\frac{1}{7}}9+\log_{\frac{1}{7}}3$

c) $\log_2(3x-6)=\log_2(2x-3)$ d) $\log_6(14-4x)=\log_6(2x+2)$

3. Teńlemeni sheshiń.

a) $\log_2^2\left(x+\frac{1}{x}\right)-1=0$ b) $\log_{\frac{1}{2}}^2(x^2+x)+\log_{\frac{1}{2}}(x^2+x)=0$

c) $\lg^2 x-\lg x+1=\frac{9}{\lg 10x}$ d) $\log_2^2 x+7\log_2 x+49=\frac{-218}{\log_2\frac{x}{128}}$

4. Teńlemeni sheshiń.

a) $x^{5+\log_2 x}=\frac{1}{16}$ b) $5^{2(\log_5 2+x)}-2=5^{x+\log_5 2}$

c) $\lg\left(625\sqrt[5]{5^{x^2+20x+5}}\right)=0$ d) $x^{\lg 2}+2^{\lg x}=4$

5. $\log_2(x+4)=-2\log_2\frac{1}{2-x}$ teńlemeniń neshe pútin koreni bar?

KÓRSETKISHLI HÁM LOGARIFMLIK TEŃLEMELER SISTEMASÍ

1. Teńlemeler sistemasın sheshiń:

a) $\begin{cases}3\cdot 7^x-3^y=12\\ 7^x\cdot 3^y=15\end{cases}$ b) $\begin{cases}3^{-x}\cdot 2^y=\frac{4}{9}\\ x+y=4\end{cases}$ c) $\begin{cases}2^x+2y=1\\ 3y-6y^2=2^{x-1}\end{cases}$

d) $\begin{cases}2^x+2y=1\\ 3y-6y^2=2^{x-1}\end{cases}$ e) $\begin{cases}3\cdot 2^x+y=13\\ 2^{2x+1}+3y=35\end{cases}$ f) $\begin{cases}3\cdot 7^x+3^y=12\\ 7^x\cdot 3^y=4\end{cases}$

2. Teńlemeler sistemasın sheshiń.

a) $\begin{cases} \log_5(x+y)=1 \\ 2^x+2^y=12 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \log_4 x+\log_4 y=1+\log_4 9 \\ 2^{\frac{x+y}{2}}=1024 \end{cases}$

LOGARIFMLIK TEŃSIZLIKLER

1. Teńsizlikti sheshiń.

a) $\log_4(x+5)<0$ b) $\log_3(2-5x)<1$ c) $\log_{\frac{1}{7}}(x+5)>-1$

d) $\log_{0,2}(x-3)+2\geq 0$ e) $\log_{\frac{1}{2}}(2x+3)>\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$ f) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2+x+1)\leq 0$

g) $\log_3(13-4^x)>2$ h) $2\log_3 x-\log_x 81<2$ i) $\log_2(x-1)+\log_2(x+1)\geq 3$

2. $\dfrac{1}{\log_3 x-2}>\dfrac{1}{\log_3 x}$ teńsizliktiń 5 ten kishi natural sheshimleri neshew?

3. $2\log_5 x-\log_x 125<1$ teńsizliktiń natural sheshimleri qosındısın tabıń.

4. $\log_x(3-x)>1$ teńsizliktiń neshe pútin sheshimi bar?

TRIGONOMETRIYALÍQ FUNKCIYALAR

1. Funkciyanıń anıqlanıw oblastın tabıń.

a) $y=\dfrac{1}{\sin x}$ b) $y=\dfrac{1}{\cos x}$ c) $y=\dfrac{\cos x}{\sin x-2\sin^2 x}$

d) $y=\dfrac{3x}{2\cos x-1}$ e) $y=\cos x+\sin x$ f) $y=\cos x+ctgx$

2. Funkciyanıń mánisler kópligin tabıń.

a) $y=3\cos x-1$ b) $y=2-\sin x$ c) $y=1-2\sin^2 x$ d) $y=2\cos^2 x-1$

3. Berilgen funkciyanıń jup yamasa taq ekenligin anıqlań.

a) $y=\dfrac{\sin x}{x}$ b) $y=x\cos x$ c) $y=\sin x+x^2$ d) $y=\cos x-x^2$

4. Funkciyanıń eń kishi oń periodın tabıń.

a) $y=\sin\dfrac{x}{2}$ b) $y=\cos(3x-1)$ c) $y=tg2x$ d) $y=\cos\dfrac{x}{3}$

5. Funkciyanıń eń úlken hám eń kishi mánisin tabıń.

a) $y=\cos^4 x-\sin^4 x$ b) $y=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ c) $y=1-2|\sin 3x|$

6. Funkciya nóllerin tabıń.

a) $y=\sin x-2$ b) $y=2\cos x+1$ c) $y=x\cos x$ d) $y=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$

KERI TRIGONOMETRIYALÍQ FUNKCIYALAR

1. Funkciyanıń anıqlanıw oblastın tabıń.

a) $y = arccos\dfrac{2x+3}{4}$ b) $y = arcsin(2+3x)$

c) $y = arcsin\left(3\sqrt{x}+2\right)$ d) $y = arccos\dfrac{4-x}{3}$

2. Salıstırıń.

a) $arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ hám $arcsin\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ b) $arctg(-1)$ hám $arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

c) $arccos\sqrt{3}$ hám $arcsin1$ d) $arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ hám $arcsin\dfrac{1}{2}$

3. Ańlatpalardıń mánisin tabıń.

a) $2arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+arctg(-1)+arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ b) $arcsin\dfrac{1}{2}+4arccos\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)+arctg\left(-\sqrt{3}\right)$

c) $arctg\left(-\sqrt{3}\right)+arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+arccos1$ d) $arcsin1-\dfrac{1}{2}+arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right)+6arctg\sqrt{3}$

4. Esaplań.

a) $2arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2}+3arcsin\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ b) $2arc\,cos\left(-\dfrac{1}{2}\right)+arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

c) $2arc\,tg1+3arctg\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ d) $2arc\,tg(-1)+3arctg\left(\sqrt{3}\right)$

5. Esaplań.

a) $sin\left(arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ b) $tg\left(arccos\dfrac{1}{2}\right)$ c) $tg\left(arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

d) $sin(4arcsin1)$ e) $cos(arcsin1)$ f) $sin\left(arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

TRIGONOMETRIYALÍQ TEŃLEME HÁM TEŃSIZLIKLER

1. $0 \le x < 360^{\circ}$ aralıqta teńlemelerdi sheshiń.

a) $sinx = -0{,}3$ b) $sinx = 0{,}15$ c) $cosx = 0{,}6$ d) $cosx = -0{,}43$

2. Aralıqlardı esapqa alǵan jaǵdayda x tıń mánisin tabıń.

a) $4sinx + 2 = 0,\ 0 \le x < 2\pi$ b) $ctgx - \sqrt{3} = 0,\ 0 \le x < 2\pi$

c) $2sin^2x + 5sinx = 3\quad 0 \le x < 2\pi$ d) $cos2x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ 0 \le x < 2\pi$

3. $0 \le x < 360^{\circ}$ aralıqta teńlemelerdi sheshiń.

a) $7-6\cos^2 x = 5\sin x$ b) $7 + 2cosx = 8sin^2x$ c) $2sinx - 3cosx = 0$

4. Teńlemelerdi sheshiń.

a) $\sin 10x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\cos 10x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $tg 10x = \sqrt{3}$ d) $ctg 10x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

5. Teńlemelerdi sheshiń.

a) $\sin 4x \cos 3x \, tg 8x = 0$ b) $\cos 4x = -\cos 5x$ c) $tg 5x = -tg \frac{x}{3}$

6. Teńlemelerdi sheshiń.

a) $2\sin^2 x + \cos^2 x - 2 = 0$ b) $2\sin^2 x + \cos x = 0$ c) $\sin x \cos x = 0$

7. Teńlemelerdi sheshiń.

a) $\sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x = 0$ b) $7\cos^2 x - 3\sin^2 x = 0$

c) $\cos^2 2x - 10\sin 2x \cos 2x + 21\sin^2 2x = 0$ d) $8\sin^2 x - \cos^2 x = 0$

8. Ornına qoyıw usılınan paydalanıp sheshiń.

a) $\cos^2 2x + 1 = 2\cos^2 x$ b) $3\cos^2 x \sin x + 1 = 3\cos^2 x + \sin x$

c) $6\cos^2 x + 6\sin^2 x - 3\cos x - 3 = 0$ d) $5\sin^2 x \cos x + 6\cos^2 x - 10\cos x + 6 = 0$

9. Teńlemelerdi sheshiń.

a) $\cos 2x + \cos x = 0$ b) $\cos 3x = 2\cos 2x - 1$

c) $2\cos^2 x = 4\sin x \cos x - 1$ d) $\cos^2 x - 3\sin x \cos x = -1$

10. Teńlemelerdi $\sin x + \cos x = t$ ǵa almastırıw járdeminde sheshiń.

a) $2(\sin x + \cos x) + \sin 2x + 1 = 0$ b) $\sin x + \cos x = 1 + \frac{\sin 2x}{2}$

11. Teńlemelerdi bahalaw usılı menen sheshiń.

a) $2\sin^8 x - 3\cos^8 x = 5$ b) $(\cos 2x - \cos 4x)^2 = 4 - 4\cos^2 3x$

12. Teńlemelerdi járdemshi múyesh kiritiw usılı menen sheshiń.

a) $12\cos x - 5\sin x = -13$ b) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$

13. Teńsizliklerdi sheshiń.

a) $\sqrt{2}\cos 2x \le 1$ b) $2\sin 3x > -1$ c) $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \le \frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\sin\left(\frac{x}{4} - 3\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}$ f) $\cos\left(\frac{x}{3} + 2\right) < \frac{1}{2}$

14. Teńsizliklerdi sheshiń.

a) $\sin^2 x + 2\sin x > 0$ b) $\cos^2 x - \cos x < 0$

ITIMALLÍQLAR TEORIYASÍ

1. Lotereyada 2000 dana bilet bolıp, olardan 400 danası utıslı. Tosınnan alıngan 2 dana biletten tek ǵana birewi utıslı bolıwı itimallıǵın tabıń.

2. Eki kubik taslanǵan bolıp, olardıń jaqlarında shıqqan sanlar qosındısı 7 ge, kóbeymesi 6 ǵa teń bolıwı itimallıǵın tabıń.

3. 7 dana qara hám 8 dana aq shar bolǵan ıdıstan tosınnan bir shar alınǵan da, onıń: a) aq; b) qara shar bolıwı itimallıǵın tabıń.

4. Táwekeline 25 ten úlken bolmaǵan natural san tańlanǵanda, onıń 3 ke eseli bolıwı itimallıǵın tabıń.

5. Baspaxanada tosınnan ajıratıp alınǵan 1000 dana kitaptan ibarat bóleginde 7 danası jaramsız dep tabıldı. Jaramsız kitaplar shıǵıwınıń salıstırmalı jiyiligin tabıń.

6. Kvadratqa dóńgelek ishley sızılǵan. Kvadratqa táwekeline qoyılǵan noqattıń dóńgelektiń ishinde bolıp qalıw itimallıǵın tabıń.

7. Eki kubik bir waqıtta taslanǵanda túsken sanlar qosındısı altıdan kishi bolıwı itimallıǵın tabıń.

8. Yashikte 11 dana aq hám 9 dana qara shar bar. Táwekeline alınǵan 4 dana shardan 2 danası aq bolıwı itimallıǵın tabıń.

9. Ídısta 7 dana qızıl hám 13 dana kók top bar. Táwekeline alınǵan 2 dana toptıń hár qıylı reńli bolıwı itimallıǵın tabıń.

10. Qutıda 7 dana aq, 3 dana qara shar bar. Odan táwekeline alınǵan 2 dana shardıń hár qıylı reńde bolıwı itimallıǵın tabıń.

11. Telefon nomerin terip atırǵan abonent aqırındaǵı úsh cifrın esten shıǵarıp qoydı. Táwekeline nomerdi tergende, kerekli cifrlar terilgenligi itimallıǵın tabıń.

12. Qutıda 100 dana lampochka bolıp, olardıń 10 danası jaramsız . Táwekeline 4 dana lampochka alınǵanda, olardan 2 danası jaramsız bolıwı itimallıǵın tabıń.

13. 3 dana kók, 4 dana qızıl hám 5 dana jasıl sharlardan qálegen tańlanǵan 3 shardıń túrli reńde bolıwı itimallıǵın tabıń.

14. Jaramlılıǵınıń salıstırmalı jiyiligi 0,8 ge teń bolǵan buyımlar bóleginde 250 dana buyım tekserilgen bolsa, jaramlı buyımlar sanın tabıń.

15. Qaltada 5 dana kók hám 7 dana sarı shar bolıp, tosınnan alınǵan eki shar hár qıylı reńde bolıwı itimallıǵın tabıń.

16. Sebette 5 dana jasıl, 7 dana sarı hám 8 dana qızıl alma bar. Qálegen túrde alınǵan 3 dana almalar hár qıylı reńde bolıwı itimallıǵın tabıń.

17. Qutıda 6 dana birdey nomerlengen bólekler bar. Táwekeline birew-birewden barlıq bólekler alınǵanda olardıń cifrları kemeyip barıw tártibinde shıǵıwı itimallıǵın tabıń.

18. Qutıda 12 dana aq, 18 dana qızıl shar bar. Táwekeline alınǵan 4 dana shardıń 3 ewi qızıl bolıwı itimallıǵın tabıń.

19. Klasta 36 oqıwshı bolıp, olardan 13 oqıwshı shaxmat dógeregine qatnasadı. Usı klastan táwekeline alınǵan 7 oqıwshıdan, hesh bolmaǵanda birewi shaxmat dógeregine qatnasatuǵınlıǵı itimallıǵın tabıń.

O'quv nashri

ALGEBRA
VA ANALIZ ASOSLARI

Umumiy o'rta ta'lim maktablarining
10-sinfi uchun darslik

(Qoraqalpoq tilida)

Awdarmashı Kalmurza Sagidullayev
Redaktor Zamira Janibekova
Kórkem redaktor Sarvar Farmanov
Texnikalıqalıq redaktor Akmal Sulaymanov
Sırtınıń dizaynı Ixvaldin Salaxitdinov
Súwretshi Behzad Zufarov
Dizayner Rustam Xudaybergenov
Betlewshi Rustam Xudaybergenov
Korrektor Zulfiya Otambetova

Basıwǵa 21.10.2022-jılda ruqsat etildi. Ólshemi 60x84 1/8.
"Cambria" garniturası. Kegli 12. Ofset baspa.
Shártli baspa tabaǵı 22,32. Baspaxana-esap tabaǵı 22,10.
Tirajı 14 840 dana. Buyırtpa № 1150-3.

print.uz
ОПЕРАТИВНО и КАЧЕСТВЕННО

"PRINTUZ" JSHJ baspaxanasında basıp shıǵarıldı.
100105, Tashkent qalası Mirobod rayonı,
Qóshkóprik kóshesi, 28/1-úy

Ijaraǵa beriletuǵın sabaqlıq jaǵdayın kórsetiwshi keste

№	Oqıwshınıń familiyası hám atı	Oqıw jılı	Sabaqlıqtıń alınǵandaǵı jaǵdayı	Klass basshısı-nıń qolı	Sabaqlıqtıń tapsırǵan-daǵı jaǵdayı	Klass basshısı-nıń qolı
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Sabaqlıq ijaraǵa berilip, oqıw jılı aqırında qaytarıp alınǵanda joqarıdaǵı keste klass basshısı tárepinen tómendegi bahalaw ólshemlerine tiykarlanıp toltırıladı:

Jańa	Sabaqlıqtıń birinshi ret paydalanıwǵa berilgendegi jaǵdayı.
Jaqsı	Kitaptıń sırtqı beti pútin, sabaqlıqtıń tiykarǵı bóleginen ajıralmaǵan. Barlıq betleri bar, jırtılmaǵan, kóshpegen, betlerinde jazıw hám sızıqlar joq.
Qanaat-landırarlı	Kitaptıń sırtqı beti jelingen, biraz sızılıp, shetleri qayrılǵan, sabaqlıqtıń tiykarǵı bóleginen ajıralıw jaǵdayı bar, paydalanıwshı tárepinen qanaatlandırarlı dúzetilgen. Alınǵan betleri qayta tiklengen, ayırım betlerine sızılǵan.
Qanaat-landırarsız	Kitaptıń sırtqı betine sızılǵan, jırtılǵan, tiykarǵı bóleginen ajıralǵan yamasa pútinley joq, qanaatlandırarsız dúzetilgen. Betleri jırtılǵan, tolıq emes, sızıp, boyap taslanǵan. Sabaqlıqtı tiklep bolmaydı.