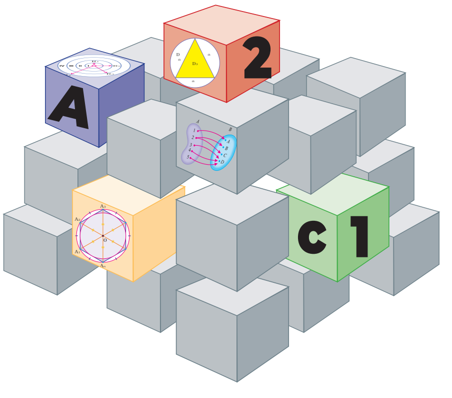
АЛГЕБРА 10

ЖАНА АНАЛИЗДИН НЕГИЗДЕРИ



Жалпы орто билим берүүчү мектептеринин 10-классы үчүн окуу китеби

Өзбекстан Республикасынын Элге билим берүү министрлиги тарабынан басууга сунушталган

Жаңы басылым

ТАШКЕНТ – 2022

УУК 512(075.3)
КБК 22.14я72
А 39

Түзүүчүлөр:

Адилбек Заитов, Раъно Хамраева, Калмурза Сагидуллаев ,
Умид Рахмонов, Бахтиёр Абдиев, Балжан Уринбаева

Эл аралык эксперт:

Марсело Старикофф

Рецензенттер:

М. А. Мирзаахмедов – Мухаммед ал-Хоразми атындагы адистештирилген мектептин математика мугалими, физика-математика илимдеринин кандидаты, доцент.

Ж. А. Койжанов – Наваи областы Хатирчи районундагы 5-жалпы орто билим берүүчү мектебинин математика мугалими.

Д. Д. Ароев – Кокон мамлекеттик педагогикалык институтунун математика кафедрасынын доценти, PhD.

Алгебра жана анализдин негиздери [Текст]: 10-класс үчүн окуу китеби/ А. Заитов [жана баш.] – Ташкент: Республикалык билим берүү борбору, 2022. – 192 б.

UNICEFтин Өзбекстандагы өкүлчүлүгү менен кызматташтыкта даярдалды.

Өзбекстан Республикасы Илимдер академиясы В. И. Романовский атындагы математика институти корутундусу негизинде өнүктүрүлгөн.

Оригинал макет жана дизайн концепциясы Республикалык билим берүү борбору тарабынан иштелген.

Республикалык максаттуу китеп фондунун каражаттары эсебинен басылды.

ШАРТТУУ БЕЛГИЛЕР:

– татаалдык даражасы.

– татаалдык даражасы.

– татаалдык даражасы.

– кичине темалар.

ISBN 978-9943-8458-4-8

МАЗМУНУ

КАЙТАЛОО

1-ГЛАВА. ФУНКЦИЯЛАР

2-ГЛАВА. РАЦИОНАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР ЖАНА БАРАБАРСЫЗДЫКТАР. ИРРАЦИОНАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР

3-ГЛАВА. КӨРСӨТКҮЧТҮҮ ЖАНА ЛОГАРИФМАЛЫК КӨРСӨТКҮЧТҮҮ ФУНКЦИЯЛАР

4-ГЛАВА. ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫК ФУНКЦИЯЛАР

5-ГЛАВА. ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР ЖАНА БАРАБАРСЫЗДЫКТАР

6-ГЛАВА. ЫКТЫМАЛДУУЛУК ТЕОРИЯСЫ

10-КЛАСС АЛГЕБРА ЖАНА АНАЛИЗДИН НЕГИЗДЕРИ КИТЕБИ ҮЧҮН КОЛДОНМО

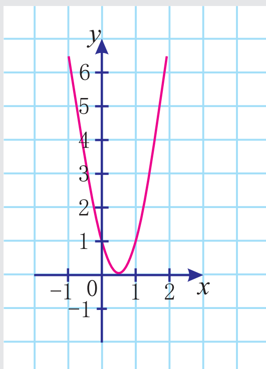
10-КЛАСС АЛГЕБРА ЖАНА АНАЛИЗДИН НЕГИЗДЕРИ КИТЕБИ ҮЧҮН ВИДЕОСАБАКТАР

КАЙТАЛОО

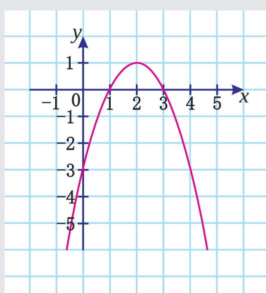
- КВАДРАТТЫК ФУНКЦИЯ
- КВАДРАТТЫК БАРАБАРСЫЗДЫК
- ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫК ТЕҢДЕШСИЗДИКТЕР
- АРИФМЕТИКАЛЫК ЖАНА ГЕОМЕТРИЯЛЫК ПРОГРЕССИЯ

КВАДРАТТЫК ФУНКЦИЯ

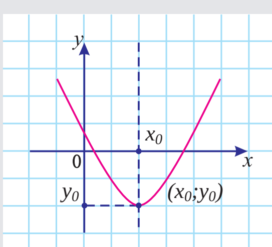
1-сүрөт



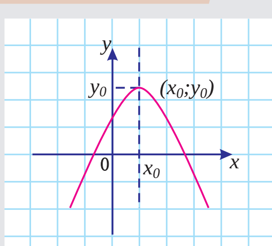
2-сүрөт



3-сүрөт



4-сүрөт



Квадраттык функциянын аныктамасы

Аныктама

$y=ax^2+bx+c$ функция ***квадраттык функция*** деп аталат, мында *a*, *c*, *b*, – берилген чыныгы сандар, $a\neq 0$, *x* – чыныгы өзгөрүүчү.

Мисалы, төмөндөгү функциялар квадраттык функциялар:

$y=3x^2+2x-1$, $y=-4x^2-5x$, $y=6x^2-3$, $y=4x^2$, $y=2-x^2$.

Квадраттык функциянын графиги

1. $y=ax^2+bx+c$ квадраттык функциянын графиги парабола деп аталуучу ийри сызыктан турат. 1-сүрөттө $y=4x^2-4x+1$ жана 2-сүрөт $y=-x^2+4x-3$ функциялар графиктери сүрөттөлгөн.
2. $y=ax^2+bx+c$ парабола тармактары $a>0$ болгондо (3-*сүрөт*) ордината огу боюнча жогору багытталган, $a<0$ болгондо (4-*сүрөт*) болсо ылдыйга багытталган болот.
3. $y=ax^2+bx+c$ парабола чокусунун $(x_0;y_0)$ координаталары
$$x_0=-\frac{b}{2a},\quad y_0=ax_0^2+bx_0+c \text{ же } y_0=-\frac{b^2-4ac}{4a}$$ формулалар менен эсептелет.
4. $y=ax^2+bx+c$ парабола өзүнүн чокусу аркылуу ордината огуна параллел кылып өткөрүлгөн түз сызыкка салыштырмалуу симметриялуу болот.
5. $y=ax^2+bx+c$ параболанын *Ox* огу менен кесилишүү чекиттеринин абциссалары квадраттык функциянын нөлдөрү болот. Квадраттык функциянын нөлдөрүн табуу үчүн $ax^2+bx+c=0$ теңдемени чечүү керек.
6. Квадраттык функциянын *Oy* огу менен кесилишүү чекиттеринин ординатасы функциянын $x=0$ чекитиндеги маанисинен турат.

$y=ax^2+bx+c$ квадраттык функциянын графигин жасоо:

1. Парабола тармактарынын багытын аныктоо.
2. Парабола чокусунун координаталарын $x_0=-\dfrac{b}{2a}$, $y_0=ax_0^2+bx_0+c$ формулалар жардамында табылат жана координата тегиздигинде белгиленет.
3. Параболанын абцисса огу менен кесилишүү чекиттери (нөлдөрү) табылат. Эгерде функциянын нөлдөрү болбосо, анда параболанын симметриялык огуна салыштырмалуу симметриялуу болгон эки чекит табылат. Мисалы, параболанын Oy огу менен кесилиш чекити (0; *c*) жана ага симметриялуу болгон ($2x_0$; *c*).
4. Жасалган чекиттерди үзгүлтүксүз жылма ийри сызык менен туташтырылат (эгер керек болсо, параболанын дагы бир канча чекитин жасоо мүмкүн).
5. Жасалган чекиттерди үзгүлтүксүз жылма ийри сызык менен туташтырылат (эгер керек болсо, параболанын дагы бир канча чекитин жасоо мүмкүн).

Квадрат функциянын касиеттери

1. Аныкталуу областы:

$D(y)=(-\infty;\infty)$.

2. Маанилер көптүгү:

a) $a>0$ болсо, $E(y)=[y_0;\infty)$.

b) $a<0$ болсо, $E(y)=(-\infty;y_0]$.

3. Эң чоң жана эң кичине маанилери:

a) $a>0$ болсо, $x=x_0$ чекитте эң кичине мааниге ээ болот жана бул маани $y_0=ax_0^2+bx_0+c$ га барабар болот, эң чоң мааниге ээ боло албайт.

b) $a<0$ болсо, $x=x_0$ чекитте эң чоң мааниге ээ болот жана бул маани $y_0=ax_0^2+bx_0+c$ га барабар болот, эң кичине мааниге ээ боло албайт.

4. Функциянын нөлдөрү:

a) $D=b^2-4ac>0$ болсо, эки нөлдөргө ээ: $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ va $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$.

b) $D=b^2-4ac=0$ болсо, функция бир (өз ара барабар эки) нөлгө ээ: $x=\dfrac{-b}{2a}$.

c) $D=b^2-4ac<0$ болсо функция нөлдөргө ээ эмес.

5. Монотондук интервалдар:

a) $a>0$ болсо, $y=ax^2+bx+c$ функция $(-\infty;x_0]$ де кемүүчү, $[x_0;\infty)$ де өсүүчү болот.

b) $a<0$ де $y=ax^2+bx+c$ функция $(-\infty;x_0]$ интервалда өсүүчү, $[x_0;\infty)$ интервалда кемүүчү болот (бул жерде x_0 – парабола чокусунун абциссасы).

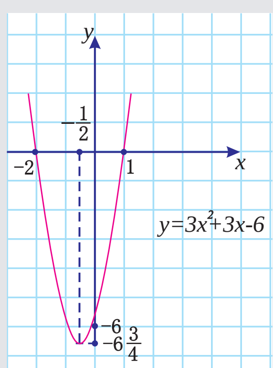
1-мисал. $y=3x^2+3x-6$ квадрат функция берилген болсун. Анын касиеттерин жазгыла жана графигин сызып көрсөткүлө.

Чыгаруу

1. Аныкталуу областы: $D(y)=(-\infty;\infty)$.
2. $a=3>0$ va $x_0=-\dfrac{1}{2}$, $y_0=-6,75$, $E(y)=[-6,75;\infty)$.
3. $x=-\dfrac{1}{2}$ болгондо, эң кичине мааниси $y=-6,75$ ке барабар, эң чоң мааниге ээ болбойт.
4. $D=81>0$, демек, нөлдөрү эки: $x_1=1, x_2=-2$.
5. $x\in(-\infty;-2)\cup(1;\infty)$ да $y>0$ жана $x\in(-2;1)$ да $y<0$ болот.
6. Функция жуп да так да эмес.
7. Функция $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right]$ интервалда кемүүчү, $\left[-\dfrac{1}{2};\infty\right)$ интервалда өсүүчү болот.

Функциянын графиги 5-сүрөттө көрсөтүлгөн.

5-сүрөт



МИСАЛДАР

1. Кайсы функциялар квадраттык функция болот?

a) $y=\frac{1}{3}x+2$ b) $y = -x^2 + 5x + 1$ c) $y=x^2-x^3$ d) $y = x^2$

2. $x=-3$ болгондо, $y=4x^2+7x-5$ функциянын мааниси канчага барабар болот?

3. x тын кандай маанилеринде $y=-3x^2+x+1$ функциянын мааниси –1 ге барабар болот?

4. $y=-5x^2+x+\sqrt{7}$ функция x тын кандай маанилеринде аныкталган?

5. –5 саны $y=x^2-5x$ функциянын нөлү болобу?

6. Функциянын графигин жаса.

a) $y=x^2$ b) $y=-x^2$ c) $y=3x^2$

d) $y=-3x^2-5$ e) $y=x^2-2x$ f) $y=-2x^2+5x$

7. Функциянын нөлдөрүн тап.

a) $y=2x^2+5x+2$ b) $y=3x^2+10x+3$ c) $y=-2x^2+x-5$

8. Функциянын маанилеринин көптүгүн тап.

a) $y=x^2+2$ b) $y=(x-4)^2-1$ c) $y=(x-5)^2+3$ d) $y=3-4x^2$

e) $y=3x-x^2$ f) $y=3x^2+2x$ g) $y=2x^2-8x+19$ h) $y=-3x^2-12x+1$

9. x тын кандай маанилеринде функция эң чоң (же эң кичине) маанисин кабыл алуусун аныкта жана аны тап.

a) $y=x^2+9x+34$ b) $y=-9x^2-3x+7$ c) $y=-2x^2-5x+1$

10. t тын кандай маанилеринде $y=2x^2-tx+8$ функциянын нөлдөрү жок болот?

11. x тын кандай маанилеринде $y=5x^2-4x-1$ функциянын маанилери терс болот?

12. $y=x^2+6x+13$ функция терс маанилерди кабыл алабы?

13. $y=-x^2-4x-5$ функция оң маанилерди кабыл алабы?

14. $y=6x^2+7x+1$ функциянын графигин жаса жана график боюнча x тын функциянын маанилери оң, терс боло турган маанилерин тап.

15. $y=-x^2+4x-3$ функциянын графигин жаса. График жардамында функциянын өсүү жана кемүү аралыктарын тап.

16. x тын кандай маанилеринде $y=x^2-22x+27$ va $y=2x^2-20x+3$ функциялардын маанилери барабар болот?

17. Эгерде параболанын (–1; 6) чекит аркылуу өтүшү жана анын чокусу (1; 2) чекитте экендиги белгилүү болсо, параболанын теңдемесин тап.

18. $y=x^2+px+q$ параболанын чокусу $A(1;\ -2)$ болсо, p жана q ны тап.

19. Эгерде $y=ax^2+bx+c$ параболанын чокусу $M(-1;\ -7)$ жана парабола ординаталар огу менен $N(0;\ -4)$ чекитте кесилишсе, $a,\ b,\ c$ ларды тап.

20. $A(1; 4)$, $B(-1; 10)$, $C(2; 7)$ чекиттерден өтүүчү $y = ax^2 + bx + c$ функцияны тап.

КВАДРАТТЫК БАРАБАРСЫЗДЫК

Аныктама

Эгерде барабарсыздыктын сол тарабы квадраттык үч мүчө, ал эми оң тарабы нөл болсо, анда мындай барабарсыздык ***квадраттык*** (***бир өзгөрмөлүү экинчи даражадагы***) ***барабарсыздык*** деп аталат.

$ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c<0$, $ax^2+bx+c\geq 0$, $ax^2+bx+c\leq 0$ $(a\neq 0)$ барабарсыздыктар квадраттык барабарсыздыктар, мында a, b, c – берилген сандар, x болсо белгисиз сан.

Барабарсыздыктын чыгарылышы деп, белгисиздин ушул барабарсыздыкты туура барабарсыздыкка келтире турган бардык маанилеринин көптүгү айтылат.

Барабарсыздыкты чыгаруу анын бардык чечимдерин табуу же алардын жоктугун далилдөө эсептелет.

1-усул. Сызыктуу барабарсыздыктар системасына келтирип чыгаруу

Эгерде $ax^2+bx+c=0$ квадраттык теңдеме эки түрдүү тамырга ээ болсо, бул абалда квадраттык барабарсыздыктарды чыгарууну, квадраттык барабарсыздыктын сол тарабына көбөйтүүчүлөргө ажыратып, биринчи даражалуу барабарсыздыктар системасын чыгарууга келтирүү мүмкүн.

1-мисал. $x^2-5x+6<0$ барабарсыздыкты чыгар.

Чыгаруу

Барабарсыздыктын сол жагын көбөйтүүчүлөргө ажыратабыз:

$$(x-2)(x-3)<0.$$

1- абал: $\begin{cases} x-2>0 \\ x-3<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>2 \\ x<3 \end{cases} \Rightarrow x\in(2;3).$ 2-абал: $\begin{cases} x-2<0 \\ x-3>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<2 \\ x>3 \end{cases} \Rightarrow x\in\varnothing.$

Жообу: (2; 3).

2-усул. Квадраттык барабарсыздыкты квадраттык функция жардамында чыгаруу

Квадраттык барабарсыздыктарды, квадраттык функция графигин схемалык сүрөтүн түзүп, андан кийин график боюнча бул функция оң же терс маанилерди кабыл кылуучу аралыктарды таап чыгаруу мүмкүн.

Квадраттык барабарсыздыкты график усулда чыгаруу үчүн:

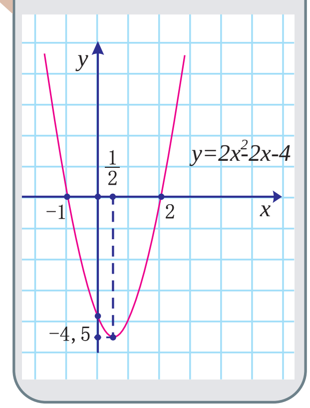
1) параболанын тармактарынын багытын аныктоо;

2) функциянын нөлдөрүн (эгер алар бар болсо) табуу же алар жоктугун далилдөө;

3) $y = ax^2 + bx + c$ функция графигин схемалык сүрөттөө;

4) график боюнча функция оң же терс маанилерди ала турган аралыктарды аныктоо.

1-сүрөт



2-мисал. $2x^2-2x-4\geq 0$ барабарсыздыкты квадраттык функция графиги жардамында чыгаргыла. (1-сүрөт).

Чыгаруу. $y=2x^2-2x-4$ функция графигин жасайбыз (1-*сүрөт*). Алгач парабола чокусун табабыз:

$$x_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{-2}{4}=\frac{1}{2};\quad y_0=2\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\cdot\frac{1}{2}-4=-4,5.$$

Кийин $D=b^2-4ac=4+32=36$ дискриминантты эсептеп, параболанын нөлдөрүн табабыз:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{2\pm\sqrt{36}}{4}=\frac{2\pm6}{4},$$

$$x_1=-1,\ x_2=2.$$

Жообу: $(-\infty;-1]\cup[2;\infty)$.

Барабарсыздыкты мындай усулда чыгарууда, параболанын чокусунун координаталарын табуу жалпысынан алганда шарт эмес, ушундай эле параболанын Оу огу менен кесилиш чекиттерин графикте көрсөтүлүшү да шарт эмес. Эң негизгиси, параболанын тармактарынын багыттарын жана функциянын нөлдөрүнүн бар же жок экенин билүү.

3-усул. Квадраттык барабарсыздыкты аралыктар (интервалдар) усулу менен чыгаруу

Эгер кандайдыр $(a;\, b)$ аралыкта $y=f(x)$ функция графигин калемди барактан үзбөстөн сызуу мүмкүн болсо, бул функция $(a;\, b)$ аралыкта ***үзгүлтүксүз*** деп аталат.

Мисалы, $y=kx+b$, $y=ax^2+bx+c$ функциялар өзүнүн аныкталуу областында үзгүлтүксүз функциялар болот.

Үзгүлтүксүз функциялардын бир маанилүү касиетин далилсиз кабыл алабыз.

Эгер $f(x)$ функция $(a;\, b)$ аралыкта үзгүлтүксүз болсо жана нөлгө айланбаса, мындай абалда бул аралыкта функциянын маанилери бирдей белгиге ээ болот, б.а. ушул аралыкта функция өз белгисин сактайт.

Квадраттык функциянын аныкталуу областын анын x_1 va x_2 нөлдөрү жардамында үч $(-\infty;\, x_1)$, $(x_1;\, x_2)$, $(x_2;\, \infty)$ аралыктарга ажыратуу мүмкүн (мында $x_1<x_2$). Бул аралыктардын ар биринде квадраттык функция үзгүлтүксүз жана нөлгө айланбайт, башкача айтканда өз белгисин сактайт. Бир өзгөрмөлүү барабарсыздыктарды чыгаруунун **интервалдар усулу** чындыгында ушул касиеттерге негизделген.

Квадраттык барабарсыздыктарды чыгарууда интервалдар усулуунун колдонулушун карайбыз.

1-абал. $D>0$. Бул абалда квадраттык функциянын нөлдөрү деп аталган эки чыныгы x_1 жана x_2 $(x_1<x_2)$ сандар бар болот. Алар квадраттык функциянын аныкталуу областын: $(-\infty;\, x_1)$, $(x_1;\, x_2)$, $(x_2;\, \infty)$ аралыктарга ажыратат жана аралыктардын ар биринде функциянын маанилери белгиге ("+" yoki "–") ээ болот.

Квадраттык функциянын маанилери пайда кылынган аралыктардын ар бириндеги белгисин түрдүү усулдар менен табуу мүмкүн:

1) $y=ax^2+bx+c$ функция маанисинин $(-\infty;\, x_1)$, $(x_2;\, \infty)$ аралыктардын ар бириндеги белгиси a коэффициенттин белгиси менен бирдей болот; $(x_1;\, x_2)$ аралыктагы белгиси болсо a коэффициент белгисине карама-каршы болот;

2) функция маанилеринин белгисин ар бир интервалдагы "ыңгайлуу" чекитте аныктоо мүмкүн;

3) $y = ax^2 + bx + c$ функцияны $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ көрүнүштө жазып, ар бир интервалда сызыктуу көбөйтүүчүлөрдүн белгисин табуу менен аныктоо мүмкүн.

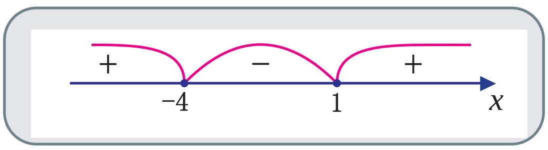
3-мисал. $x^2 + 3x - 4 \leq 0$ барабарсыздыкты аралыктар усулу менен чыгаргыла.

Чыгаруу. Барабарсыздыкты көбөйтүүчүлөргө ажыратабыз:

$$(x+4)(x-1) \leq 0.$$

жана анын нөлдөрүн табабыз: – 4 жана 1.

Табылган чекиттерди сандар огунда белгилейбиз жана сандар огун интервалдарга ажыратабыз. Ар бир аралыкта $y = x^2 + 3x - 4$ функциянын белгисин аныктайбыз:



Берилген мисал шартында функция өзүнүн оң болбогон маанилерине кайсы интервалда жетиши суралгандыгы үчүн чечим [–4; 1] болот.

Жообу: [–4; 1].

2-абал. $D = 0$ болсун. Бул абалда $y = ax^2 + bx + c$ функция бир гана x_0 чекитте нөлгө айланат. x_0 чекит координата огун эки: $(-\infty; x_0)$ жана $(x_0; \infty)$ аралыктарга ажыратат. Ар бир $x \neq x_0$ үчүн $y = ax^2 + bx + c$ квадраттык функция маанилеринин белгиси *a* коэффициенттин белгиси менен бирдей болот (2, 3-*сүрөттөр*).

3-абал. $D < 0$. Мындай абалда $y = ax^2 + bx + c$ квадраттык функция нөлдөргө ээ болбойт.

Мында *x* тын каалагандай маанилеринде функция *a* коэффициенттин белгиси менен бири-биринин үстүнө түшө турган бирдей белгилүү маанилерди кабыл алат:

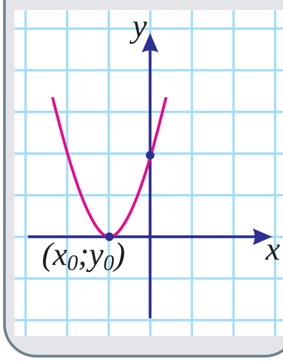
1) эгер $a > 0$ болсо, *x* тын каалагандай маанисинде $ax^2 + bx + c > 0$;

2) эгер $a < 0$ болсо, *x* тын каалагандай маанисинде $ax^2 + bx + c < 0$.

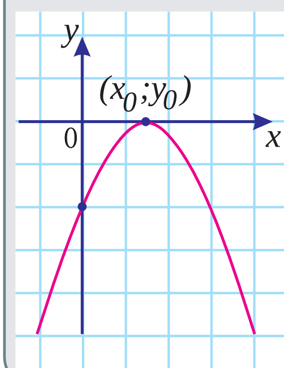
Төмөндөгүлөрдү билүү жана колдой алуу керек:

1) $a > 0$ жана $D < 0$ болгондо $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$ барабарсыздыктардын чечимдери бардык чыныгы сандардан турат (4-*сүрөт*);
2) $a > 0$ жана $D < 0$ болгондо $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$ барабарсыздыктар чыгарылыштарга ээ эмес (4-*сүрөт*);
3) $a < 0$ жана $D < 0$ болгондо $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$ барабарсыздыктар чыгарылыштарга ээ эмес (5-*сүрөт*);
4) $a < 0$ жана $D < 0$ болгондо $ax^2 + bx + c$, $ax^2 + bx + c \leq 0$ барабарсыздыктардын чечимдери бардык чыныгы сандардан турат (5-*сүрөт*).

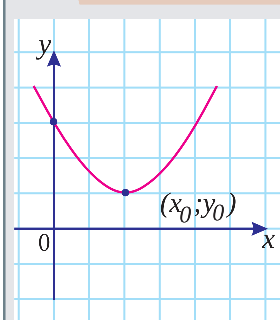
2-сүрөт



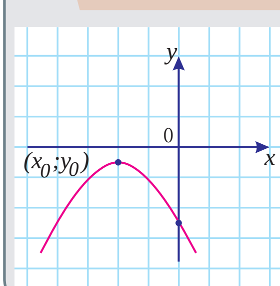
3-сүрөт



4-сүрөт



5-сүрөт



МИСАЛДАР

1. 0; –2; 3 сандарынан кайсы бири $-4x^2+5x-5>0$ барабарсыздыктын чыгарылышы болот?

2. Төмөндөгү барабарсыздыктарды сызыктуу барабарсыздыктар системасына келтирип чыгар.

a) $(x+4)(2x-3)>0$ b) $x^2+10x-11<0$

c) $(5x-2)(4x+3)\le 0$ d) $2x^2-5x+2\ge 0$

3. Барабарсыздыктар тең күчтүүбү?

a) $5x^2>2x$ жана $5x>2$ b) $3x^3<7x^2$ жана $3x<7$ c) $\dfrac{x^2-1}{x}>0$ жана $(x^2-x)(x+1)>0$

4. Барабарсыздыктарды чыгар.

a) $x^2>0$ b) $4x^2\ge 0$ c) $x^2<0$

d) $-x^2\le 0$ e) $x^2+7>0$ f) $5x^2+11\le 0$

g) $-x^2-5>0$ h) $3x^2-2x<0$ i) $-4x^2+11x<0$

j) $x^2-9x+20<0$ k) $x^2-10x+25>0$ l) $-x^2+6x-8>0$

m) $3x^2-x+2\ge 0$ n) $-9x^2+24x+20>0$ o) $-7\cdot(3-x)^2>0$

5. Чыгарылышы берилген аралыктардан гана кандайдыр квадраттык барабарсыздык түз.

a) $(-\infty;-3)\cup(6;\infty)$ b) $(-\infty;\infty)$

6. Абцисса огунда $x^2+9x\le -14$ барабарсыздыктын чыгарылышы болгон кесиндинин узун – дугун тап.

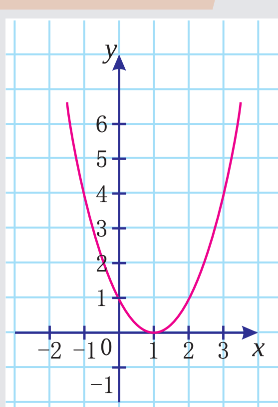
7. Канча бүтүн сан $2x^2+7x-15<0$ барабарсыздыктын чыгарылышы болот?

8. Барабарсыздыкты интервалдар усулу менен чыгар.

a) $x^2+5x-6>0$ b) $-x^2+x+2<0$ c) $x^2+3x+7>0$ d) $x^2+3x+7\le 0$

e) $-2x^2+5x+3>0$ f) $6x^2-x-2<0$ g) $2x^2+5x+9\le 0$ h) $49x^2-28x+4\le 0$

6-сүрөт



9. Барабарсыздыктарды чыгар.

a) $8x^2+3x-5\ge 0$ b) $5x^2-12x+8\le 0$

c) $49x^2-70x+25>0$ d) $(2x^2+3x+4)(x+3)\ge 0$

e) $(7+6x-x^2)(3x-5)<0$

10. Барабарсыздыкты квадрат функция графиги жардамында чыгар.

a) $2x^2+5x-3>0$ b) $4x^2-9x-90>0$

11. 6-сүрөттө $y = ax^2 + bx + c$ функция графиги сүрөттөлгөн. Төмөндөгү барабарсыздыктардын чыгарылышын тап.

a) $ax^2+bx+c>0$ b) $ax^2+bx+c\le 0$

12. Барабарсыздыктын бардык бүтүн чечимдеринин суммасын тап.

a) $2x^2-9x+4<0$ b) $\frac{x-1}{4}+\frac{3-2x}{2}>\frac{3x+x^2}{8}$

c) $(5x+7)(x-2)\leq 21x^2-11x+3$

13. $3x(x-2)-2x(x+4)-(x-16)\leq 0$ барабарсыздыктын $[0;9]$ кесиндиге тиешелүү болгон канча бүтүн чыгарылышы бар?

14. $y=-x^2+4x-3$ функция графиги жардамында, төмөндөгү барабарсыздыктардын чыгарылышын тап.

a) $-x^2+4x-3>0$ b) $-x^2+4x-3\geq 0$ c) $-x^2+4x-3<0$ d) $-x^2+4x-3\leq 0$

15. a нын кандай маанилеринде $ax^2+2ax+4=0$ теңдеме тамырларга ээ болбойт?

16. Барабарсыздыкты чыгар: $(x-1)^2(x^2-2)<(x-1)^2(6-2x)$

17. $f(x)=(x-1)^4(x+1)^3x^2$ функция берилген.

a) $f(x)<0$ b) $f(x)\leq 0$ c) $f(x)>0$ d) $f(x)\geq 0$

боло турган x тын бардык маанилерин тап.

18. Барабарсыздыктарды чыгар:

a) $x^2-2(b-c)x+a^2>0$, мында a, b, c үч бурчтуктун жактары;

b) $x^2+(a^2+b^2-c^2)x+a^2b^2>0$, мында a, b, c үч бурчтуктун жактары.

19. Эгерде $a^2+12b<0$ болсо, $3x^2-b\leq ax$ ты чыгар.

20. Эгерде $b>0{,}05a^2$ болсо, $5x^2-ax+b>0$ ду ты чыгар.

21. Эгерде $b^2\leq 4ac$ жана $a+c>b$ болсо, $ax^2+bx+c\leq 0$ ду чыгар.

22. c нын кандай маанилеринде $y=cx^2+x+c$ va $y=cx+1-c$ функциялар графиктери жалпы чекитке ээ болбойт?

23. p нын кандай маанилеринде $y=px^2-24x+1$ жана $y=12x^2-2px-1$ функциялар графиги кесилишпейт?

24. a нын кандай маанилеринде $x^2+3x+a=0$ теңдеменин тамырлары $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}+1>0$ шартты канааттандырат?

25. b нын кандай маанилеринде $x^2-2bx+b+6=0$ теңдеменин:

a) тамырлары терс белгилүү; b) тамырлары оң белгилүү; c) тамырлары түрдүү белгилүү болот?

26. a нын кандай маанилеринде бардык чыныгы сандар барабарсыздыкды канааттандырат?

a) $x^2-(a+2)x+8a+1>0$ b) $\frac{1}{24}x^2+ax-a+1>0$

27. b нын кандай маанилеринде барабарсыздык чыгарылышка ээ эмес?

a) $x^2+2bx+1<0$ b) $bx^2+4bx+5<0$ c) $bx^2+(2b+3)x+b-1\geq 0$

ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫК ТЕҢДЕШСИЗДИКТЕР

Негизги тригонометриялык теңдешсиздиктер

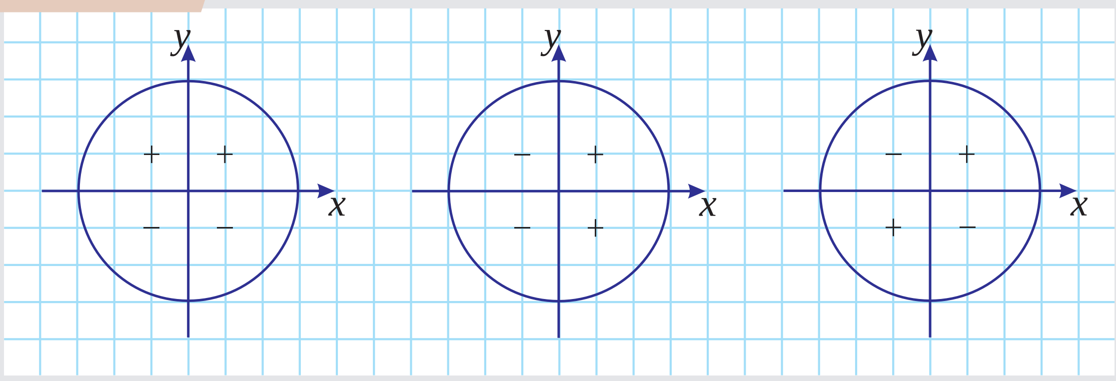
1. $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$
2. $tg\alpha = \dfrac{sin\alpha}{cos\alpha}$, $cos\alpha \neq 0$
3. $ctg\alpha = \dfrac{cos\alpha}{sin\alpha}$, $sin\alpha \neq 0$
4. $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$
5. $1 + tg^2\alpha = \dfrac{1}{cos^2\alpha}$, $cos\alpha \neq 0$
6. $1 + ctg^2\alpha = \dfrac{1}{sin^2\alpha}$, $sin\alpha \neq 0$

Кээ бир бурчтардын синусу, косинусу, тангенси жана котангенсинин маанилери

α	$0^0\,(0)$	$30°\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$	$45°\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$	$60°\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$	$90°\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$	$180°(\pi)$
$sin\alpha$	0	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$cos\alpha$	1	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	0	–1
$tg\alpha$	0	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	жок	0
$ctg\alpha$	жок	$\sqrt{3}$	1	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	0	жок

Синус, косинус, тангенс жана котангенстин белгилери

1-сүрөт



α жана (–α) бурчтун синусу, косинусу, тангенси жана котангенси

1. $sin(-\alpha) = -sin\alpha$
2. $cos(-\alpha) = cos\alpha$
3. $tg(-\alpha) = -tg\alpha$
4. $ctg(-\alpha) = -ctg\alpha$

Келтирүүнүн формулалары

	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$
$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
$tg\,\alpha$	$ctg\,\alpha$	$-ctg\,\alpha$	$-tg\,\alpha$	$tg\,\alpha$	$ctg\,\alpha$	$-ctg\,\alpha$	$-tg\,\alpha$	$tg\,\alpha$
$ctg\,\alpha$	$tg\,\alpha$	$-tg\,\alpha$	$-ctg\,\alpha$	$ctg\,\alpha$	$tg\,\alpha$	$-tg\,\alpha$	$-ctg\,\alpha$	$ctg\,\alpha$

Келтирүүнүн формулаларындагы ушул (мнемоникалык) мыйзамдуулукка көңүл бур: Эгер α ны I чейрекке тиешелүү деп алсак, $\pi\pm\alpha$, $2\pi\pm\alpha$ бурчтар үчүн функциянын аты алмашпайт, $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$, $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$ бурчтар үчүн болсо синус косинуска, косинус синуска, тангенс котангенске, котангенс тангенске алмашат.

Мисалы, $\sin\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)$ ны карасак, $\frac{p}{2}$ лер саны n – жуп болсо, функциянын аты алмашпайт; так болсо, функциянын аты алмашат. Белгисин аныктоо $n\cdot\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ бурч кайсы чейрекке тиешелүү экенин жана бул чейректе синустун белгиси кандайлыгына карап аныкталат.

1-мисал. Эсепте.

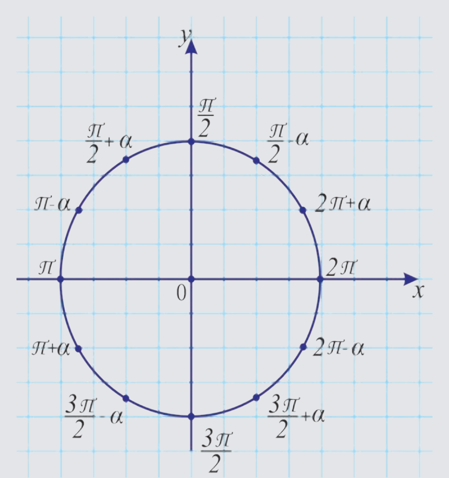
a) $\sin 855^\circ=\sin(9\cdot 90^\circ+45^\circ)=\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos 2025^\circ=\cos(22\cdot 90^\circ+45^\circ)=-\cos 45^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $tg\,1680^\circ=tg(18\cdot 90^\circ+60^\circ)=tg\,60^\circ=\sqrt{3}$

d) $ctg\,1200^\circ=ctg(13\cdot 90^\circ+30^\circ)=-tg\,30^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

2-сүрөт



Кошуунун формулалары

1. $sin(\alpha+\beta)=sin\alpha cos\beta+cos\alpha sin\beta$
2. $sin(\alpha-\beta)=sin\alpha cos\beta-cos\alpha sin\beta$
3. $cos(\alpha+\beta)=cos\alpha cos\beta-sin\alpha sin\beta$
4. $cos(\alpha-\beta)=cos\alpha cos\beta+sin\alpha sin\beta$
5. $tg(\alpha+\beta)=\dfrac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}$
6. $tg(\alpha-\beta)=\dfrac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha tg\beta}$
7. $ctg(\alpha+\beta)=\dfrac{ctg\alpha ctg\beta-1}{ctg\alpha+ctg\beta}$
8. $ctg(\alpha-\beta)=\dfrac{ctg\alpha ctg\beta+1}{ctg\beta-ctg\alpha}$

Эки эселенген бурчтун формулалары

1. $sin 2\alpha=2 sin\alpha\cdot cos\alpha$
2. $cos 2\alpha=cos^2\alpha-sin^2\alpha=2cos^2\alpha-1=1-2sin^2\alpha$
3. $tg 2\alpha=\dfrac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$
4. $ctg 2\alpha=\dfrac{ctg^2\alpha-1}{2ctg\alpha}$

Суммасын жана айырмасын көбөйтүндүгө алмаштыруунун формулалары

1. $sin\alpha+sin\beta=2sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
2. $sin\alpha-sin\beta=2sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cdot cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$
3. $cos\alpha+cos\beta=2cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
4. $cos\alpha-cos\beta=-2sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
5. $tg\alpha+tg\beta=\dfrac{sin(\alpha+\beta)}{cos\alpha\cdot cos\beta}$
6. $tg\alpha-tg\beta=\dfrac{sin(\alpha-\beta)}{cos\alpha\cdot cos\beta}$
7. $ctg\alpha+ctg\beta=\dfrac{sin(\alpha+\beta)}{sin\alpha\cdot sin\beta}$
8. $ctg\alpha-ctg\beta=\dfrac{-sin(\alpha-\beta)}{sin\alpha\cdot sin\beta}$

Көбөйтүндүсүн суммага алмаштыруунун формулалары

1. $sin\alpha\cdot cos\beta=\dfrac{1}{2}(sin(\alpha+\beta)+sin(\alpha-\beta))$
2. $cos\alpha\cdot cos\beta=\dfrac{1}{2}(cos(\alpha+\beta)+cos(\alpha-\beta))$
3. $sin\alpha\cdot sin\beta=\dfrac{1}{2}(cos(\alpha-\beta)-cos(\alpha+\beta))$

Даражаны төмөндөтүүнүн формулалары

1. $sin^2\alpha=\dfrac{1-cos 2\alpha}{2}$
2. $cos^2\alpha=\dfrac{1+cos 2\alpha}{2}$
3. $tg^2\alpha=\dfrac{1-cos 2\alpha}{1+cos 2\alpha}$
4. $ctg^2\alpha=\dfrac{1+cos 2\alpha}{1-cos 2\alpha}$

Жарым бурчтун формулалары

1. $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$

2. $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$

3. $tg^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$

4. $ctg^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$

5. $tg\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$

6. $ctg\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $tg\alpha$ тарды $tg\frac{\alpha}{2}$ аркылуу туюнтуунун формулалары

1. $\sin\alpha=\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$

2. $\cos\alpha=\frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$

3. $tg\alpha=\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}$

МИСАЛДАР

1. Эгерде $ctg\alpha=-\frac{3}{4}$ жана $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$ болсо, $\cos\alpha$ ны тап.

2. Эгерде $tg\alpha=-\sqrt{5}$ жана $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ болсо, $\sin\alpha$ ны тап.

3. Эгерде $tg\alpha=\frac{3}{2}$ болсо, $\frac{2\sin\alpha+5\cos\alpha}{3\sin\alpha-4\cos\alpha}$ ны тап.

4. Жөнөкөйлөштүр.

a) $\frac{2\sin^2\alpha-1}{2\cos^2\alpha-1}$ b) $\frac{ctg\alpha\left(2\sin^2\alpha+tg\alpha\right)}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}$ c) $\frac{1-\cos^2\alpha}{\sin^4\alpha}-ctg^2\alpha$ d) $2-\frac{1-\sin^4\alpha}{\cos^2\alpha}$

5. Эсепте.

a) $4\cos150°-\sin240°-3tg210°$ b) $2\cos135°+tg60°-ctg240°$

c) $\sin300°-3\cos135°+2\cos210°$ d) $tg150°-ctg315°+5\sin135°$

6. Эсепте.

a) $tg\frac{7\pi}{6}-2tg\frac{5\pi}{3}+3tg\frac{11\pi}{6}$ b) $2\cos\frac{4\pi}{3}+\sin\frac{5\pi}{4}-\cos\frac{4\pi}{3}$

c) $20ctg\frac{3\pi}{2}-\sin\frac{2\pi}{3}+\cos\frac{4\pi}{3}$ d) $ctg\frac{7\pi}{4}+2ctg\frac{4\pi}{3}-2\cos\frac{5\pi}{6}$

7. Жөнөкөйлөштүр.

a) $\frac{1-tg(360°-\alpha)tg\alpha}{tg(270°-\alpha)+tg\alpha}$ b) $\frac{\cos(90°+\alpha)+\sin(90°-\alpha)}{\cos(270°-\alpha)+\cos(180°+\alpha)}$

8. Жөнөкөйлөштүр.

a) $\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\beta\right)}{tg^2\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\beta}{2}\right)-ctg^2\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\beta}{2}\right)}$ b) $\dfrac{\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-2a\right)+\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+2a\right)}{\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+2a\right)+\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-2a\right)}$

9. Теңдештикти далилде.

a) $\dfrac{\sin(\pi-2\alpha)-2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin^2(\pi+\alpha)-\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}=2ctg\alpha$ b) $\dfrac{\sin^4\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)-\cos^2(2\alpha+\pi)}{1-3\cos(2\alpha+\pi)}=\dfrac{\sin^2\alpha}{2}$

10. Эсепте.

a) $\sin(-43°)\cos 88°+\cos(-43°)\sin 88°$ b) $\cos 11°\cos 19°-\sin 19°\sin 11°$

11. Эсепте.

a) $\sin\dfrac{2\pi}{7}\cos\dfrac{3\pi}{14}+\cos\dfrac{2\pi}{7}\sin\dfrac{3\pi}{14}$ b) $\dfrac{1+tg33°tg78°}{tg78°-tg33°}$

12. Эсепте.

a) $\cos\left(-\dfrac{19\pi}{36}\right)\cos\dfrac{7\pi}{9}-\sin\dfrac{7\pi}{9}\sin\left(-\dfrac{19\pi}{36}\right)$ b) $\dfrac{1-tg\dfrac{\pi}{11}tg\dfrac{5\pi}{66}}{tg\dfrac{5\pi}{66}+tg\dfrac{\pi}{11}}$

13. Жөнөкөйлөштүр.

a) $\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\sin\beta$ b) $\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)$

c) $\sin 4\alpha\cos\alpha-\cos 4\alpha\sin\alpha$ d) $\cos\alpha\cos 2\alpha+\sin 2\alpha\sin\alpha$

e) $\dfrac{1}{2}\cos\alpha+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha$ f) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha$

14. a) $\cos\alpha=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ жана $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$ болсо, $\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$ ны тап.

b) $\cos\alpha=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ жана $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$ болсо, $\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)$ ны тап.

15. Эсепте.

a) $\dfrac{6\sin10°\cos10°}{\sin20°}$ b) $\dfrac{\sin88°}{\sin22°\cos22°\cos44°}$ c) $\sin\dfrac{\pi}{12}\left(2\sin^2\dfrac{\pi}{24}-1\right)$

16. a) Эгерде $\cos\alpha=0,4$ болсо, $\cos2\alpha$ ны тап.

b) Эгерде $\sin\alpha=-0,7$ болсо, $\cos2\alpha$ ны тап.

17. a) Эгерде $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ жана $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ болсо, $\sin 2\alpha$ ны тап.

b) Эгерде $\sin\alpha = \frac{1}{5}$ жана $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ болсо, $\sin 2\alpha$ ны тап.

18. Жөнөкөйлөштүр:

a) $2\cos^2\frac{\alpha}{2}(\cos\alpha - 1)$ b) $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$

19. Эгерде $tg\alpha = -2$ болсо, $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $tg 2\alpha$, $ctg 2\alpha$ ларды тапкыла.

20. a) $\cos 123° tg 231° \sin 312°$ туюнтманын белгисин аныкта.

b) $\sin\frac{1}{3}\cos\frac{7}{8}tg 4 ctg 5{,}7$ туюнтманын белгисин аныкта.

21. Сандарды салыштыр: $\sin 200°$ жана $\sin(-200°)$.

22. $\sin\alpha = \frac{12}{13}$ жана $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ барабардыктардын экөө бир убакытта орундуу боло алабы?

23. Теңдештикти далилде.

a) $\left(\sin\alpha + \frac{1}{\sin\alpha}\right)^2 + \left(\cos\alpha + \frac{1}{\cos\alpha}\right)^2 - \left(tg^2\alpha + ctg^2\alpha\right) = 7$ b) $\frac{tg 3\alpha}{tg^2 3\alpha - 1}\cdot\frac{1 - ctg^2 3\alpha}{ctg 3\alpha} = 1$

24. Туюнтманы жөнөкөйлөштүр.

a) $\frac{1 - ctg^2(-\alpha)}{\cos\alpha + \sin(-\alpha)}\cdot\sin(-\alpha) + ctg(-\alpha)$ b) $\frac{\sin(\alpha-\beta) - \sin(\beta-\alpha)}{\cos(\alpha-\beta) + \cos(\beta-\alpha)}$

25. Теңдештикти далилде:

a) $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$ b) $2\sin 2\alpha\cos 5\alpha = \sin 7\alpha - \sin 3\alpha$.

26. $\cos\alpha = \frac{2}{3}$; $\sin\beta = -\frac{\sqrt{7}}{4}$; $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$; $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$ болсо, $\cos(\alpha+\beta)$ ны тап.

27. Теңдештикти далилде: $\frac{tg\alpha - tg\beta}{tg\alpha + tg\beta} = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$.

28. Эсепте: $\sin(-300^0)\cos(-135^0)tg(-210^0)ctg(-120^0)$.

29. Эгерде $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{2}{3}$ болсо, $\sin\alpha\cos\alpha$ ны тап.

30. Эгерде $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{3}$ жана $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$ болсо, $\sin\alpha + \cos\alpha$ ны тап.

АРИФМЕТИКАЛЫК ЖАНА ГЕОМЕТРИЯЛЫК ПРОГРЕССИЯ

Арифметикалык прогрессия

1. $a_{n+1} = a_n + d$, $n \in N$;
2. $a_n = a_1 + (n-1)d$, $n \in N$;
3. $a_n = a_k + (n-k)d$, $n, k \in N$, $n > k$;
4. $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, $n \in N$;
5. $a_n = \dfrac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$, $n, k \in N$, $n > k$;
6. $\{a_n\}$ арифметикалык прогрессия мүчөлөрү үчүн $a_n + a_m = a_k + a_l$ барабардык орундуу, мында $n + m = k + l$;
7. $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$;
8. $S_n = \dfrac{(2a_1 + (n-1)d)n}{2}$.

Геометриялык прогрессия

1. $b_{n+1} = b_n \cdot q$, $n \in N$;
2. $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, $n \in N$;
3. $b_n = b_k \cdot q^{n-k}$, $n, k \in N$ va $n > k$;
4. $b_n^2 = b_{n-k} \cdot b_{n+k}$, $n, k \in N$, $n > k$;
5. $\{b_n\}$ геометриялык прогрессия мүчөлөрү үчүн $b_n \cdot b_m = b_k \cdot b_l$ барабардык орундуу, мында $n + m = k + l$;
6. $S_n = \dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}$, $q \neq 1$, эгер $q = 1$ болсо, $S_n = b_1 \cdot n$;
7. $S_n = \dfrac{b_n q - b_1}{q-1}$, $q \neq 1$;
8. Чексиз кемүүчү геометриялык прогрессия (бардык мүчөлөрү) суммасы:

$$S = \frac{b_1}{1-q}, \quad |q| < 1, q \neq 0.$$

МИСАЛДАР

1. Эгерде $a_1 = -3$ жана $d = 6$ болсо, арифметикалык прогрессиянын сексенинчи мүчөсүн тап.

2. 2, 6, 10, 14, 18, ... удаалаштык арифметикалык прогрессияны түзөт. Анын n-мүчөсүнүн формуласын жаз.

3. Арифметикалык прогрессияда:
a) $a_7 = -5$, $a_{32} = 70$ болсо, a_1 жана d ны;
b) $a_5 = 2$, $a_{40} = 142$ болсо, a_7 ны;
c) $a_{14} = 5$, $a_{12} = 1$ болсо, a_{13} ны;
d) $a_{25} - a_{20} = 10$, $a_{16} = 13$ болсо, a_{10} ны тап.

4. Эгерде геометриялык прогрессияда $b_2 = 4$ жана $b_3 = 6$ болсо, b_7 ны тап.

5. Эгерде геометриялык прогрессияда $b_1 = 3$ жана $q = -2$ болсо, b_8 ны тап.

6. Геометриялык прогрессияда:
a) $b_1 = 18$, $q = \frac{1}{9}$ болсо, b_2 ны; b) $b_1 = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$ болсо, b_7 ны;
c) $b_4 = 8$, $b_8 = 128$ болсо, b_1 жана q ны; d) $b_9 = -1$, $q = -1$ болсо, b_1 жана b_{17} ны тап.

7. Геометриялык прогрессияда $b_1 = 3$, $q = 2$ болсо, S_6 ны тап.

8. Геометриялык прогрессияда $b_2 = 6$, $q = 3$ болсо, S_8 ны тап.

9. Геометриялык прогрессияда $b_1 = 4$, $q = \frac{1}{2}$ болсо, алгачкы 10 мүчөсүн суммасын тап.

10. Геометриялык прогрессиянын мүчөсү 5, алтынчы мүчөсү 1215 ге барабар. Ушул прогрессиянын бөлүмүн тап.

11. Чексиз кемүүчү геометриялык прогрессияда $b_1 = 8$, $q = \frac{1}{2}$ болсо, анын суммасын тап.

12. 12, 4, $\frac{4}{3}$, ... Чексиз кемүүчү геометриялык прогрессиянын суммасын тап.

13. Геометриялык прогрессияда:
a) $b_1 = 24$, $b_2 = 36$ болсо, q ны; b) $b_5 = 36$, $b_7 = 144$ болсо, b_6 ны;
c) $b_6 = \frac{1}{486}$, $b_8 = \frac{1}{4374}$ болсо, b_7 ны тап.

14. Чексиз кемүүчү геометриялык прогрессия суммасы 150 ге барабар. Эгерде $q = \frac{1}{3}$ болсо, b_1 ны тап.

15. Чексиз кемүүчү геометриялык прогрессияда $b_1 = \frac{1}{4}$, $S = 16$ болсо, q ны тап.

16. Геометриялык прогрессияда:
a) $b_1 = 3$, $q = 5$ болсо, S_4 ны; b) $b_2 = 8$, $b_3 = 4$ болсо, S_6 ны;
c) $b_1 = -2$, $b_6 = -486$ болсо, S_6 ны тап.

17. Геометриялык прогрессияда $q=-\frac{1}{2}$, $S_8=\frac{85}{64}$ болсо, b_1 ны тап.

18. Арифметикалык прогрессиянын n-мүчөсүнүн формуласын жаз.

a) $a_1=5,\ a_2=-5$ b) $a_1=-3,\ a_6=12$ c) $a_1=6,\ a_{10}=33$

19. Арифметикалык прогрессиянын төртүнчү жана алтынчы мүчөлөрү 16 жана 19 га барабар болсо, биринчи мүчөсүн тап.

20. Алгачкы 25 натуралдык сандарды тап.

21. (a_n) Арифметикалык прогрессияда $a_3+a_7=5$ жана $a_4=1$ болсо, анын алгачкы он мүчөсүнүн суммасын тап.

22. Арифметикалык прогрессияда $a_1=-20{,}7$, $d=1{,}8$ болсо, кайсы мүчөсүнөн баштап прогрессиянын бардык мүчөлөрү оң болот?

23. Арифметикалык прогрессияда $a_{12}+a_{15}=20$ болсо, S_{26} ны тап.

24. Арифметикалык прогрессияда $a_2+a_6=44$, $a_5-a_1=20$ болсо, a_{100} ны тап.

25. Арифметикалык прогрессиянын үчүнчү жана тогузунчу мүчөлөрүнүн суммасы 8 ге барабар. Ушул прогрессиянын алгачкы он бир мүчөлөрүнүн суммасын тап.

26. Арифметикалык прогрессияда $S_n=3n^2+n$ болсо, a_1 жана d ны тап.

27. Өсүүчү геометриялык прогрессияда $b_{12}=4\cdot b_{10}$ жана $b_3=6$ болсо, b_7 ны тап.

28. Геометриялык прогрессияда $b_5=\sqrt[3]{2}$. Ушул прогрессия алгачкы тогуз мүчөлөрү көбөйтүндүсүн тап.

29. Геометриялык прогрессияда $S_4=10\frac{5}{8}$, $S_5=42\frac{5}{8}$, $b_1=\frac{1}{8}$ болсо, q ны тап.

30. Геометриялык прогрессияда $b_1=1$ va $b_3+b_5=90$ болсо, q ны тап.

31. Үч x, y жана 12 сандары кемүүчү геометриялык прогрессияны түзөт. Эгерде 12 нин ордуна 9 коюлса, арифметикалык прогрессия пайда болот. $x+y$ ны тап.

32. Геометриялык прогрессияда $b_2\cdot b_4\cdot b_6=216$ va $b_3=12$. Ушул прогрессиянын алгачкы алты мүчөлөрүнүн суммасын тап.

33. Чексиз кемүүчү геометриялык прогрессиянын так орундарда турган бардык мүчөлөрүнүн суммасы 36 га барабар. Жуп орундарда турган бардык мүчөлөрүнүн суммасы 12 ге барабар. Бул прогрессиянын бөлүмүн жана экинчи мүчөсүн тап.

34. Чексиз кемүүчү геометриялык прогрессиянын биринчи жана төртүнчү мүчөлөрүнүн суммасы 54, экинчи жана үчүнчү мүчөлөрүнүн суммасы 36 га барабар. Бул прогрессиянын суммасын тап.

35. Арифметикалык прогрессияда:

a) $a_1=-3$, $a_3\cdot a_7=24$ болсо, S_{12} ни; b) $a_2+a_9=20$ болсо, S_{10} ни;

c) $a_3+a_6=19$ болсо, S_8 ни; d) $S_4=-28$, $S_6=58$ болсо, S_{16} ни тап.

1-ГЛАВА. ФУНКЦИЯЛАР

- ФУНКЦИЯ. ФУНКЦИЯНЫН БЕРИЛҮҮ УСУЛДАРЫ.
- ФУНКЦИЯНЫН АНЫКТАЛУУ ОБЛАСТЫ ЖАНА МААНИЛЕР КӨПТҮГҮ
- ФУНКЦИЯЛАР ҮСТҮНДӨ АРИФМЕТИКАЛЫК АМАЛДАР
- ТАТААЛ, ТЕСКЕРИ, МЕЗГИЛДҮҮ ФУНКЦИЯ.
- ФУНКЦИЯНЫН КАСИЕТТЕРИ
- ФУНКЦИЯНЫН ГРАФИКТЕРИ ҮСТҮНДӨ ЖӨНӨКӨЙ АЛМАШТЫРУУЛАР
- СЫЗЫКТУУ ЖАНА КВАДРАТТЫК МОДЕЛДЕШТИРҮҮ
- ДОЛБООРДУК ИШ

ФУНКЦИЯ. ФУНКЦИЯНЫН БЕРИЛҮҮ УСУЛДАРЫ

Функция

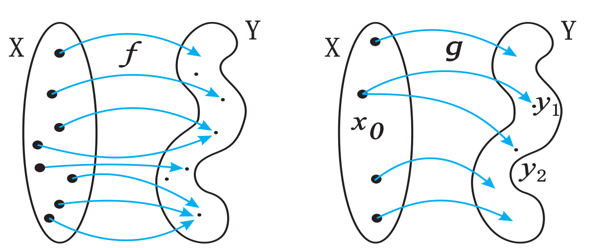
Жаратылыш, өндүрүш, экономика жана башка тармактарда кээ бир өлчөмдөр ортосундагы байланыштарды үйрөнүүдө ***функция*** түшүнүгү өтө чоң мааниге ээ. Функция жана ага байланыштуу түшүнүктөрдү көрүп өтөбүз.

X жана Y сандуу топтомдор болсун. Ан бир $x \in X$ чекитге жалгыз $y \in Y$ чекитти ылайык коючу мыйзамдуулук ***функция*** деп аталат.

Функцияны аныктоочу мыйзамдуулуктар $f, g, \ldots$ тамгалар аркылуу белгиленет. $y = f(x)$ жазуу f мыйзамдуулук $x \in X$ чекитке $y \in Y$ чекитти туура келгенин билдирет жана бул абалда X көптүктүн чекиттерин Y көптүктүн чекиттерине дал келүүчү f функция берилген деп аталат.

Мында, x ***аргумент***, y болсо ***функция*** деп жүргүзүлөт. f функция адатта $y = f(x)$ же $f(x)$ көрүнүштөрдө туюнтулат.

1-сүрөт



f мыйзамдуулук функция болот: Xтын ар бир x элементине Yден бир гана y элемент дал коюлган.

g мыйзамдуулук функция эмес: $x_0 \in X$ элементге эки y_1, $y_2 \in Y$ элементтер дал коюлган.

Функция боло турган (f) жана болбой турган (g) мыйзамдуулуктар

Төмөндө кээ бир функциялар берилген:

1) *сызыктуу функция*: $y = kx + b$

2) *квадраттык функция*: $y = ax^2 + bx + c$

3) *даражалуу функция*: $y = x^n$

4) *бөлчөк даражалуу функция*: $y = \sqrt[n]{x^m}$

5) *Тескери пропорционалдык функциясы*:
$y = \dfrac{k}{x}$ (бул жерде $k \neq 0$)

6) *модулдук функциясы*: $y = |x|$

Функциянын берилүү усулдары

Функциялар төмөндөгү усулдарда берилүүсү мүмкүн:

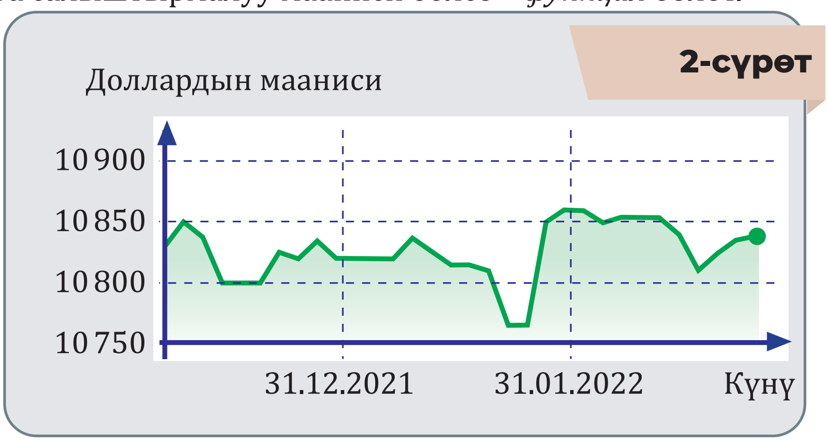
1. Функция берилүүсүнүн ***аналитикалык усулу.*** Эгерде функция бир же бир канча формула же теңдемелер менен берилген болсо, анда бул функция аналитикалык усулда берилген деп аталат.

Мисалы, материалдык чекиттин аракет теңдемеси $s = 20 - 5t + \frac{1}{4}t^2$ таналитикалык усулда берилген функция болот.

2. Функция берилүүсүнүн ***жадыбалдык усулу*** адатта практикалык тажрыйбаларда өзгөрүүчүлөр арасындагы өз ара байланыштуулукту орнотот. Мисалы,температуранын ар күндүк өзгөрүшү жадыбалдык усулда берилүүсү мүмкүн. Бул жерде күн сааттары – аргумент, температура болсо - функция болот. Ташкент шаарында 2022-жыл 20–26-январь күндөрү аба температурасынын жума сайын өзгөрүүсү төмөндөгү жадыбалда келтирилген:

Күнү		20.01	21.01	22.01	23.01	24.01	25.01	26.01
Температура, t °C	Күндүзү	13	9	3	4	6	7	8
	Кечинде	–2	–3	–1	–2	–3	–4	–3

3. Кээ бир практикалык жумуштарда өзгөрүүчүлөрдүн байланыштуулугу ***графикалык усулда*** берилет. Мисалы, доллардын сумга салыштырмалуу маанисинин айлык, жылдык өзгөрүүсү графикалык усулда туюнтулушу мүмкүн. Бул жерде убакыт – *аргумент*, доллардын сумга салыштырмалуу мааниси болсо – *функция* болот.



2-сүрөт

4. Функция ***текст усулунда*** берилүүсү да мүмкүн. Мисалы: үй–бүлөдө 4 киши болсо аш бышыруу үчүн 1 *kg* күрүч сарптайт. Үйгө 2 мейман келгенде казанга аш үчүн канча *kg* күрүч салуу керек? Бул маселеде ашдагы күрүч өлчөмү үйдөгү кишилер санына байланыштуу болуп, кишилер саны аргумент, күрүч өлчөмү функция болот.

МИСАЛДАР

1. Текст менен берилген функциянын аналитикалык көрүнүшүн жаз. (Мисалы, “аргументти квадратынан 5 ти кемиткиле” эрежеси төмөндөгү функцияны берет: $f(x) = x^2 - 5$.
a) аргументти 3 кө көбөйтүп, андан 5 ти кемиткиле.
b) аргументтин квадратына 2 ны кошкула.
c) аргументтен 1 ди кемитип, андан кийин квадратка көтөргүлө.
d) аргументке 1 ди кошкула , андан кийин квадраттык тамырын таап, 6 га бөлгүлө.

2. Функциянын тексттүү эрежеси берилген. Бул функциянын ***аналитикалык, жадыбалдык*** жана ***графикалык*** көрүнүшүн тап:

a) $f(x)$ ти табуу үчүн аргументти 3 кө бөлүп, кийин 2 кө кошкула.
b) $g(x)$ты табуу үчүн аргументтен 4 тү кемиткиле , кийин $\frac{3}{4}$ кө көбөйткүлө.
c) $T(x)$ функция х сомго сатып алынган продукциянын салык суммасынын функциясы болсун. Салык суммасын табуу үчүн продукциянын наркынын 8% ын эсептегиле.
d) $V(d)$ функция d диаметрлүү шардын көлөмүн табуу функциясы болсун. Көлөмдү табуу үчүн диаметрдин 3-даражасын π ге көбөйтүп 6 га бөл.

3. Берилген функциялар үчүн маанилер жадыбалын толтур:

a) $f(x) = 2(x-1)^2$

x	$f(x)$
-1	
0	
1	
2	
3	

b) $g(x) = |2x+3|$.

x	$g(x)$
-3	
-2	
0	
1	
3	

4. Функциянын берилген аргументтеги маанисин тап.

a) $f(x) = x^2-6$ $\quad f(-3),\ f(3),\ f(0),\ f\left(\frac{1}{2}\right)$

b) $f(x) = x^3+2x$ $\quad f(-2),\ f(-1),\ f(0),\ f\left(\frac{1}{2}\right)$

c) $f(x)=\frac{|x|}{x}$ $\quad f(-2), f(-1), f(0), f(5), f(x^2), f\left(\frac{1}{x}\right)$

d) $f(x)=\frac{1-2x}{3}$ $\quad f(2), f(-2), f\left(\frac{1}{2}\right), f(a), f(-a), f(a-1)$

e) $h(x)=\frac{x^2+4}{5}$ $\quad h(2), h(-2), h(a), h(-x), h(a-2), h(\sqrt{x})$

f) $f(x)=x^2+2x$ $\quad f(0), f(3), f(-3), f(a), f(-x), f\left(\frac{1}{a}\right)$

g) $h(t)=t+\frac{1}{t}$ $\quad h(-1),\ h(2),\ h\left(\frac{1}{2}\right),\ h(x-1),\ h\left(\frac{1}{x}\right)$

5. Берилген барабардыктардын кайсы бири x өзгөрмөлүү функция болот?

a) $3x-5y=7$ b) $3x^2-y=5$ c) $x=y^2$ d) $x^2+(y-1)^2=4$

e) $2x-4y^2=3$ f) $2x^2-4y^2=3$ g) $2xy-5y^2=4$ h) $\sqrt{y}-x=5$

i) $2|x|+y=0$ j) $2x+|y|=0$ k) $x=y^3$ l) $x=y^4$

6. Берилген жадыбалдардан кайсы бири x өзгөрмөлүү функция болот?

a)

x	y
-5	-12
9	2
11	2

b)

x	y
-10	-9
$3\frac{1}{2}$	-6
-10	-1

c)

x	y
2	0
-5	-3
-17	7
6	17
11	7

d)

x	y
-4	$3\frac{1}{2}$
$3\frac{1}{2}$	$-3\frac{1}{2}$
$9\frac{3}{5}$	-10

ФУНКЦИЯНЫН АНЫКТАЛУУ ОБЛАСТЫ ЖАНА МААНИЛЕР КӨПТҮГҮ

Функциянын аныкталуу областы жана маанилер көптүгү

$y = f(x)$ функцияда x аргументтик кабыл алуусу мүмкүн болгон сандар көптүгү берилген функциянын ***аныкталуу областты***, y функция кабыл алуусу мүмкүн болгон сандар көптүгү берилген функциянын ***маанилеринин көптүгү*** деп аталат жана алар ылайыктуу түрдө $D(f)$ va $E(f)$ же $D(y)$ va $E(y)$ сыяктуу белгиленет.

Кээ бир функциялар үчүн аныкталуу областы жана маанилер көптүгү жадыбалы:

Функция	Аныкталуу областы	Маанилер көптүгү
1) $y = kx + b$	$D(y) = (-\infty; +\infty)$	$E(y) = (-\infty;\ +\infty)$
2) $y = x^2$	$D(y) = (-\infty; +\infty)$	$E(y) = [0;\ +\infty)$
3) $y = \|x\|$	$D(y) = (-\infty; +\infty)$	$E(y) = [0;\ +\infty)$
4) $y = \dfrac{k}{x}$	$D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
5) $y = \sqrt{x}$	$D(y) = [0; +\infty)$	$E(y) = [0;\ +\infty)$
6) $y = \sqrt[2n]{x}$	$D(y) = [0; +\infty)$	$E(y) = [0;\ +\infty)$
7) $y = \sqrt[3]{x}$	$D(y) = (-\infty; +\infty)$	$E(y) = (-\infty;\ +\infty)$
8) $y = \sqrt[2n+1]{x}$	$D(y) = (-\infty; +\infty)$	$E(y) = (-\infty;\ +\infty)$

x аргументтин $y = f(x)$ функциянын аныкталуу областына тиешелүү болбогон ар кандай маанисинде $y = f(x)$ функция аныкталбаган болот же б.а., $f(x)$ туюнтма мааниге ээ болбойт. Мисалы, $y = \sqrt{x}$ функция үчүн $x = -1$ болгондо; $y = \dfrac{k}{x}$ функция $x = 0$ болгондо мааниге ээ болбогон.

1-мисал. $y = \dfrac{1}{x^2 - x}$ функциянын аныкталуу областын тап.

Чыгаруу. Рационалдык туюнтманын бөлүмү нөлгө барабар болушу мүмкүн эмес, б.а.:

$$x^2 - x \neq 0$$
$$x(x-1) \neq 0$$
$$x \neq 0 \text{ va } x \neq 1.$$

Демек, x аргумент 0 жана 1 маанилерди кабыл албайт. Ошондуктан, берилген функциянын аныкталуу областы $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

Жообу: $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

2-мисал. $y=\sqrt{9-x^2}$ функциянын аныкталуу областын тап.

Чыгаруу. Квадраттык тамырдын астындагы туюнтма терс болбойт. Б.а,:

$$9-x^2\geq 0$$

$$(3-x)(3+x)\geq 0$$

$$-3\leq x\leq 3.$$

Демек, x аргумент бир гана [–3; 3] кесиндиден маанини кабыл ала алат. Ошондуктан, функциянын аныкталуу областы: $D(y)=[-3;3]$.

Жообу: $D(y)=[-3;3]$.

3-мисал. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ функциянын аныкталуу областын тап.

Чыгаруу. Берилген функциянын бөлүмүндө квадраттык тамыр астындагы туюнтма берилген, бул туюнтма нөлгө барабар болушу мүмкүн эмес жана нөлдөн кичүү болбостугу керек. Ошондуктан

$$x+1>0$$

$$x>-1.$$

Демек, функциянын аныкталуу областы $D(y)=(-1;\infty)$.

Жообу: $D(y)=(-1;\infty)$.

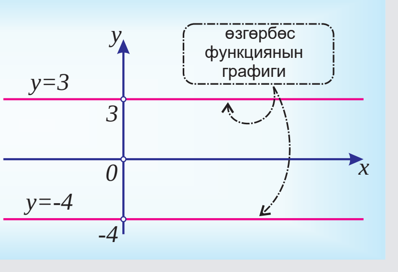
Функциянын графиги

$y=f(x)$ функция өзүнүн $D(f)$ аныкталуу областынан алынган ар бир x элементге $E(f)$ маанилер көптүгүнөн бир гана $f(x)$ маанини канааттандырат. Натыйжада ар бир $x\in D(f)$ элемент Oxy координаталар тегиздигинде бир гана $(x, f(x))$ чекитти аныктайт.

Oxy координаталар түздүгүндө пайда кылынган бардык $(x, f(x))$ чекиттер көптүгү $y=f(x)$ ***функциянын графиги*** деп аталат.

1-2-сүрөттөрдө функциянын графиктери сүрөттөлгөн. Алардагы графиктер ийри сызык же түз сызыктан турат.

1-сүрөт



Функциянын графиги

2-сүрөт

Функциянын графиги

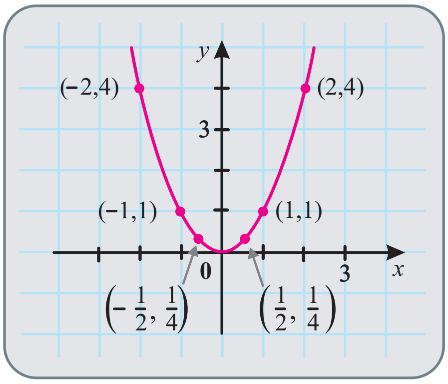
4-мисал. Төмөндөгү функциялардын графиктерин сыз.

a) $y=x^2$ b) $y=x^3$ d) $y=\sqrt{x}$

Чыгаруу. Бул функциялардын графиктерин сызуу үчүн алгач, маанилер жадыбалын түзүп алабыз. Андан кийин бул чекиттерди координата тегиздигинде белгилейбиз жана аларды жылма ийри сызык менен туташтырабыз.

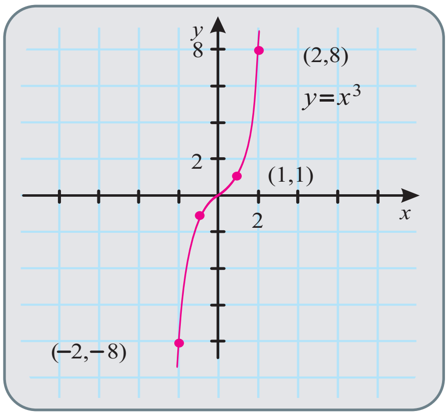
a)

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$y = x^2$	9	4	1	0	1	4	9



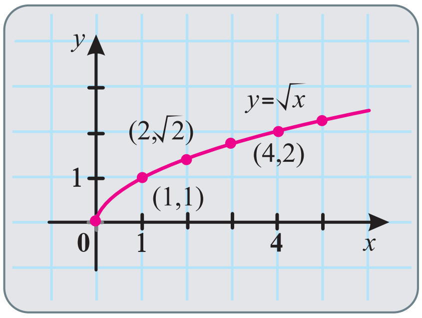
b)

x	–2	–1	–1/2	0	1/2	1	2
$y = x^3$	–8	–1	–1/8	0	1/8	1	8



c)

x	0	1/4	1	2	4	9
$y=\sqrt{x}$	0	1/2	1	$\sqrt{2}$	2	3

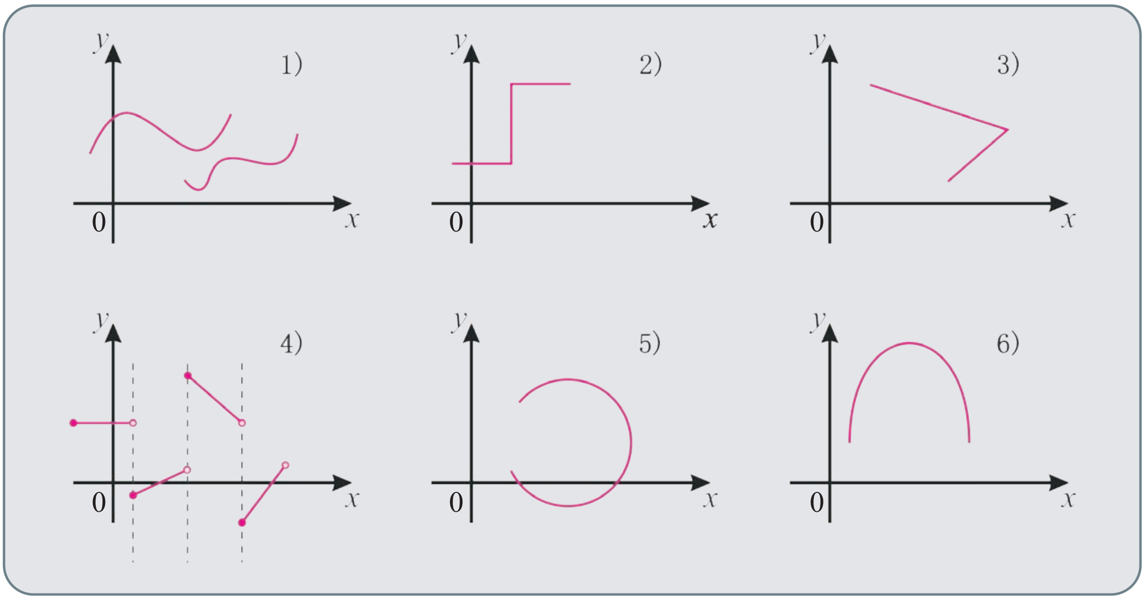


Oy огуна параллел ыктыярдуу түз сызык берилген графикти бирден көп болбогон чекитте кесип өтсө Oxy тегиздигинде сүрөттөлгөн фигура $y = f(x)$ функциясынын графиги болот.

Эгерде Oy огуна пареллел кандайдыр бир түз сызык берилген сызыкты бирден көп чекитте кесип өткөндө Oxy тегиздигинде сүрөттөлгөн фигура функциянын графиги боло албайт.

Төмөндөгү сүрөттө көрсөтүлгөн 4-жана 6-фигуралар кайсы бир функциянын графиги болот.

1-, 2-, 3- жана 5-графиктер болсо функциянын графиги болбойт.



МИСАЛДАР

1. Функциянын аныкталуу областын жана маанилер көптүгүн тап.

a) $f(x)=3x$ b) $f(x)=3x$, $2\le x\le 6$

c) $f(x)=5x^2+2$ d) $f(x)=5x^2+2$, $0\le x\le 2$

2. Функциянын аныкталуу областын тап.

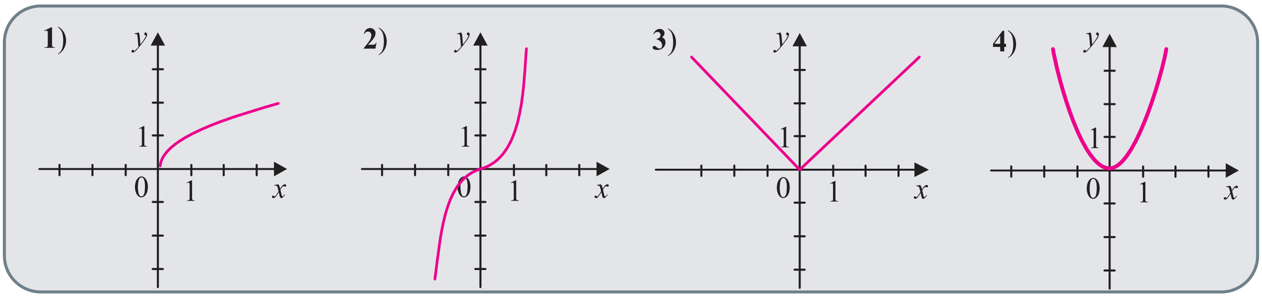
a) $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$ b) $f(x)=\dfrac{1}{3x-6}$ c) $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-1}$

d) $f(x)=\dfrac{x^4}{x^2+x-6}$ e) $f(t)=\sqrt{t+1}$ f) $g(t)=\sqrt{t^2+9}$

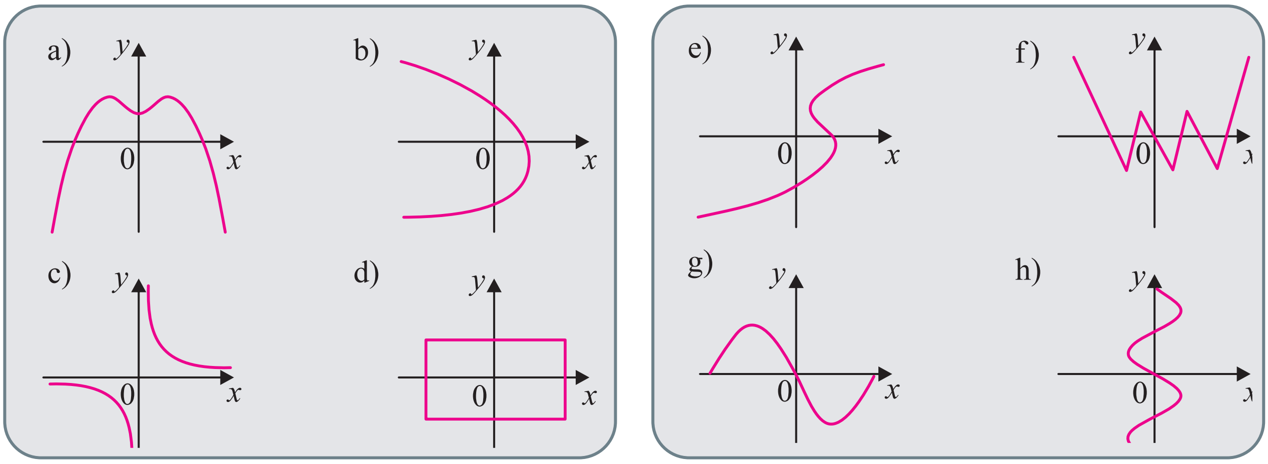
g) $f(t)=\sqrt[3]{t-1}$ h) $g(x)=\sqrt{7-3x}$ i) $f(x)=\sqrt{1-2x}$

3. Функцияга туура келген графикти аныкта.

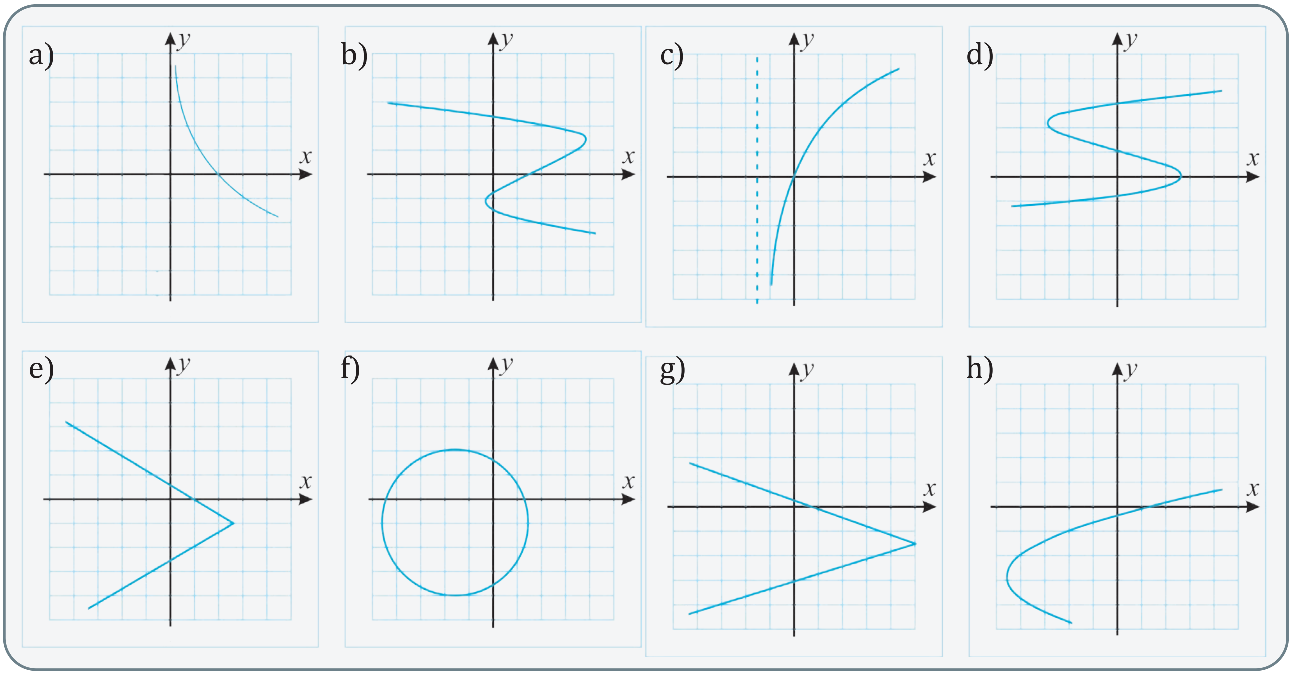
a) $f(x)=x^2$ b) $f(x)=x^3$ c) $f(x)=\sqrt{x}$ d) $f(x)=|x|$



4. Берилген сызыктардан кайсы бири функциянын графиги боло алат?



5. 5. Берилген сүрөттөрдөн кайсылары функциянын графиги боло албайт?



6. 6. Берилген функциялардын графиктерин сыз.

a) $f(x)=8x-x^2$ b) $g(x)=x^2-x-20$ c) $h(x)=x^3-5x-4$

7. Берилген функциялардын маанилер жадыбалын түз жана графигин сыз.

a) $f(x)=-x^2$ b) $f(x)=x^2-4$ c) $g(x)=-(x+1)^2$

d) $r(x)=3x^4$ e) $r(x)=1-x^4$ f) $g(x)=x^3-8$

g) $k(x)=\sqrt[3]{-x}$ h) $k(x)=-\sqrt[3]{x}$ i) $f(x)=1+\sqrt{x}$

j) $C(t)=\dfrac{1}{t^2}$ k) $C(t)=-\dfrac{1}{t+1}$ l) $H(x)=|2x|$

m) $G(x)=|x|+x$ n) $G(x)=|x|-x$ o) $f(x)=|2x-2|$

ФУНКЦИЯЛАР ҮСТҮНДӨ АРИФМЕТИКАЛЫК АМАЛДАР

Функциялар үстүндө арифметикалык амалдар

Функциялардын үстүндө кошуу $(+)$, кемитүү $(-)$, көбөйтүү $(\cdot)$, бөлүү $(:)$ арифметикалык амалдарды аткаруу мүмкүн.

$f(x)$ жана $g(x)$ функциялардын аныкталуу областтары A жана B көптүктөр болсун. Бул функциялардын $A \cap B$ көптүктөгү ***суммасы*** деп, ар бир $x \in A \cap B$ элементте $f(x) + g(x)$ маанини камтыган функцияга айтылат. $f(x)$ жана $g(x)$ функциялардын суммасы $(f + g)(x)$ сыяктуу белгиленет. Демек:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

Ошондой эле, $f(x)$ va $g(x)$ функциялардын ***айырмасын, көбөйтүндүсүн, тийиндисин*** аныктоо мүмкүн:

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$
$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Көңүл бургула!

1. $A \cap B = \varnothing$ болсо, бул амалдар аныкталбайт.

2. Эки $f(x)$ жана $g(x)$ функциялардын тийиндисин аныктоодо X ден алынган ар бир x элемент үчүн $g(x) \neq 0$ болушу талап кылынат.

МИСАЛДАР

1-мисал. $f(x) = \frac{1}{x-2}$ жана $g(x) = \sqrt{x}$ функциялар берилген.

а) $(f+g)(x), (f-g)(x), (f \cdot g)(x)$ жана $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ функцияларды жана алардын аныкталуу областын тап.

b) $(f+g)(4), (f-g)(4), (fg)(4)$ жана $\left(\frac{f}{g}\right)(4)$ ны тап.

Чыгаруу. а) f тин аныкталуу областы $x \neq 2$, g нын болсо $x \geq 0$. f жана g нын аныкталуу областтары кесилиши $[0; 2) \cup (2; \infty)$ болот.

Ошондо алар үстүндө амалдар төмөнкүдөй аткарылат:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{1}{x-2} + \sqrt{x}$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{1}{x-2} - \sqrt{x}$$

$$(f\cdot g)(x) = f(x)g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{(x-2)\sqrt{x}}.$$

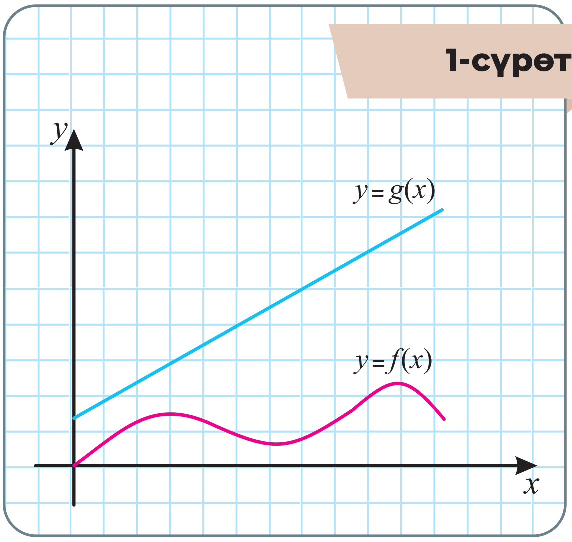
b) $x = 4$ маани ар бир жаңы функциянын аныкталуу областына тиешелүү экендигинен төмөндөгү маанилер аныкталган:

$$(f+g)(4) = f(4)+g(4) = \frac{1}{4-2}+\sqrt{4} = \frac{5}{2}$$

$$(f-g)(4) = f(4)-g(4) = \frac{1}{4-2}-\sqrt{4} = -\frac{3}{2}$$

$$(fg)(4) = f(4)g(4) = \left(\frac{1}{4-2}\right)\sqrt{4} = 1$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(4) = \frac{f(4)}{g(4)} = \frac{1}{(4-2)\sqrt{4}} = \frac{1}{4}.$$



1-сүрөт

2-мисал. Функцияларды график усулда кошуу

f жана g функциялардын графиги 1-сүрөттө берилген болсун. График усулдагы кошуу жардамында $f + g$ функциянын графигин сызгыла.

Чыгаруу. Белгилүү болгондой, f функция графиги Oxy көптүктөгү

$$\{(x, f(x)) : x \in D(f)\}$$

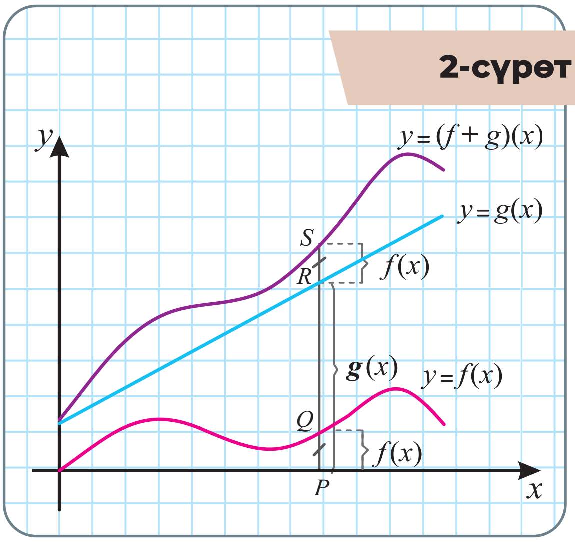
көптүктөн турат. Ошондой эле,

$$\{(x, g(x)) : x \in D(g)\}$$

көптүк g функциянын графиги болот. f жана g функцияларды кошуунун график усулу дегенде ушул көптүк түшүнүлөт:

$$\{(x, f(x) + g(x)) : x \in D(f) \cap D(g)\}.$$

PQ кесиндини PR кесиндинин жогору жагына $f + g$ функциянын S чекитин пайда кылуу үчүн көчүрүлгөн ($PQ = RS$).



2-сүрөт

МИСАЛДАР

1. Функцияларды кош жана кемит.

a) $f(x) = 5x+1,\ g(x) = -2x$

b) $f(x) = -3x+3,\ g(x) = -5x+4$

c) $f(x) = 2x+1,\ g(x) = -5x+3$

d) $f(x) = -3x^2+7x,\ g(x) = 2x+4$

2. Функцияларды көбөйт.

a) $f(x)=-x^2,\ g(x)=-3x+1$

b) $f(x)=-3x^2+3,\ g(x)=-x$

c) $f(x)=-x+3,\ g(x)=5x+6$

d) $f(x)=-4x+5,\ g(x)=-3x+1$

3. $(f+g)(x), (f-g)(x), (f\cdot g)(x)$ жана $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$ ларды жана алардын аныкталуу областын тап.

a) $f(x)=x,\ \ g(x)=2x$

b) $f(x)=x,\ \ g(x)=\sqrt{x}$

c) $f(x)=x^2+x,\ \ g(x)=x^2$

d) $f(x)=3-x^2,\ \ g(x)=x^2-4$

e) $f(x)=5-x,\ \ g(x)=x^2-3x$

f) $f(x)=x^2+2x,\ \ g(x)=3x^2-1$

g) $f(x)=\sqrt{25-x^2},\ \ g(x)=\sqrt{x+3}$

h) $f(x)=\sqrt{16-x^2},\ \ g(x)=\sqrt{x^2-1}$

i) $f(x)=\dfrac{2}{x},\ \ g(x)=\dfrac{4}{x+4}$

j) $f(x)=\dfrac{2}{x+1},\ \ g(x)=\dfrac{x}{x+1}$

4. Функциянын аныкталуу областын тап.

a) $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{3-x}$

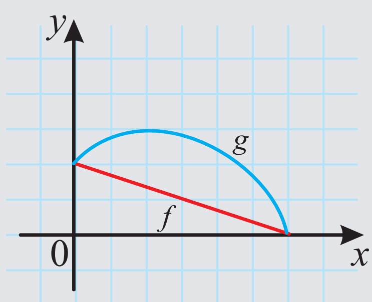
b) $f(x)=\sqrt{x+4}-\dfrac{\sqrt{1-x}}{x}$

c) $h(x)=(x-3)^{-\frac{1}{4}}$

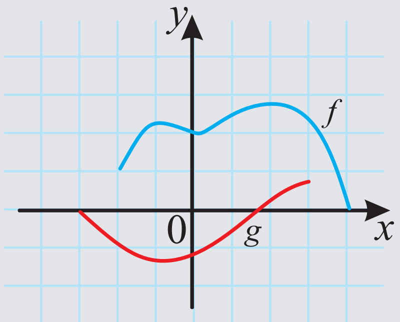
d) $k(x)=\dfrac{\sqrt{x+3}}{x-1}$

5. Графикалык усулдагы кошуу жардамында $f+g$ функциянын графигин сыз (3–4-*сүрөттөр*).

3-сүрөт



4-сүрөт



ТАТААЛ, ТЕСКЕРИ, МЕЗГИЛДҮҮ ФУНКЦИЯЛАР.

Татаал функция

Функцияларды удаалаш колдоо натыйжасында өзгөрүүчүлөрдүн жаңы байланыштары пайда болот. Эгер X көптүктө $y = f(x)$ функция берилген болуп, x аргумент T көптүктө аныкталган кандайдыр $x = g(t)$ функция болсо, анда T көптүктө $y = f(g(t))$ ***татаал функция*** аныкталган деп аталат.

Мисалы, $y = 2x^2-3x$ функция $X = (-\infty; +\infty)$ көптүктө, $x=\sqrt{t}$ функция болсо $T=[0;+\infty)$ көптүктө берилген болсун. Анда, $y=2t-3\sqrt{t}$ функция $T=[0;+\infty)$ көптүктө $y=2x^2-3x$ va $x=\sqrt{t}$ функциялардын татаал функциясы болот.

1-мисал. $f(x)=x^2$ жана $g(x)=x-3$ функциялар берилген:

a) $f(g(x))$ жана $g(f(x))$ татаал функцияларды жана алардын аныкталуу областын тапкыла;

b) $f(g(5))$ жана $g(f(7))$ ни тапкыла.

Чыгаруу. a) a) Төмөндөгү барабардык орундуу:

g нын берилүүсүнө карай, $f(g(x)) = f(x–3)$,

f тин берилүүсүнө карай, $f(g(x)) = (x–3)^2$ болот.

f тин берилүүсүнө карай, $g(f(x)) = g(x^2)$,

g нын берилүүсүнө карай, $g(f(x)) = x^2–3$ болот.

$f(g(x))$ жана $g(f(x))$ функциянын аныкталуу областы R.

b) Табылган татаал функцияларда x тын ордуна берилген маанини коёбуз:

$f(g(5)) = (5–3)^2 = 2^2 = 4$, $g(f(7)) = 7^2 – 3 = 49 – 3 = 46$.

2-мисал. Эгер $f(x)=\sqrt{x}$ жана $g(x)=\sqrt{2-x}$ берилген болсо, төмөндөгү функцияларды жана алардын аныкталуу областын тап (1-*сүрөт*).

a) $f(g(x))$ b) $g(f(x))$

c) $f(f(x))$ d) $g(g(x))$

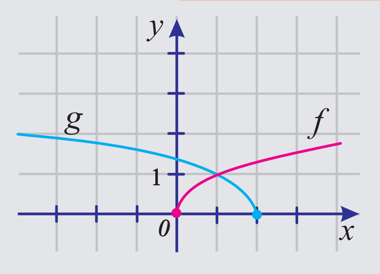
Чыгаруу. a) Татаал функциянын аныктамасы f жана g тин берилүүсүнө карай,

$$f(g(x)) = f\left(\sqrt{2-x}\right)=\sqrt{\sqrt{2-x}}=\sqrt[4]{2-x}\text{ болот.}$$

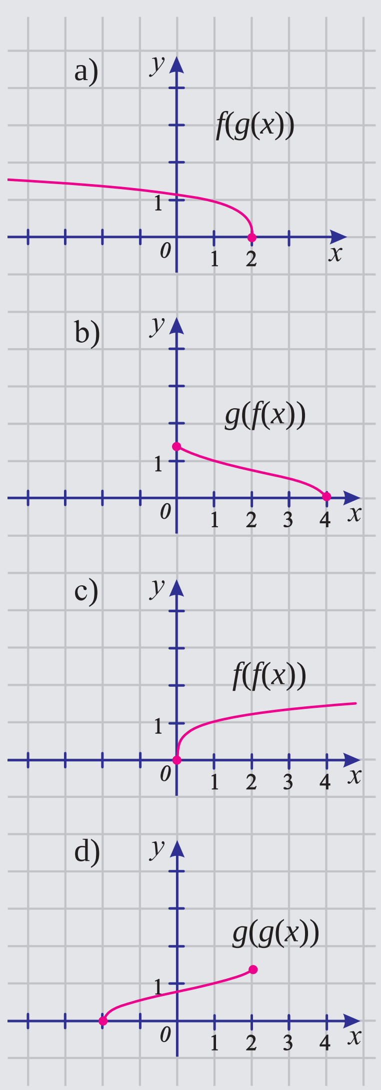
$\sqrt[4]{2-x}$ нын аныкталуу областы $2-x\ge 0$. Мындан $x \le 2$.

Демек, $f(g(x))$ тин аныкталуу областы $(-\infty;\ 2]$ аралыктан түзүлгөн (2а-*сүрөт*).

1-сүрөт



2-сүрөт



b) f тин берилүүсүнө карай, $g(f(x)) = g\left(\sqrt{x}\right)$

g нын берилүүсүнө карай, $g(f(x)) = \sqrt{2-\sqrt{x}}$ болот.

$\sqrt{x}$ тын аныкталуу областы: $x \geq 0$.

$\sqrt{2-\sqrt{x}}$ тын аныкталуу областы: $2-\sqrt{x} \geq 0$, мындан $\sqrt{x} \leq 2$ же $x \leq 4$. Демек, $0 \leq x \leq 4$ (2b-*сүрөт*).

c) f тин берилүүсүнө карай, $f(f(x)) = f\left(\sqrt{x}\right)$

f тин берилүүсүнө карай, $f(f(x)) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$ болот.

$\sqrt[4]{x}$ тын аныкталуу областы: $[0; \infty)$ (2c-*сүрөт*).

d) g нын берилүүсүнө карай, $g(g(x)) = g\left(\sqrt{2-x}\right)$

g нын берилүүсүнө карай, $g(g(x)) = \sqrt{2-\sqrt{2-x}}$ болот. $\sqrt{2-\sqrt{2-x}}$ тын аныкталуу областы: $2-x \geq 0$ жана $\sqrt{2-x} \leq 2$ Мындан $x \leq 2$ жана $x \geq -2 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$, Демек, $g(g(x))$ тын аныкталуу областы: $[-2; 2]$ (2d-*сүрөт*).

3-мисал. $f(x) = \dfrac{x}{x+1}, g(x) = x^{10}$ жана $h(x) = x+3$ болсо, $f(g(h(x)))$ ты тапкыла.

Чыгаруу. h тын берилүүсүнө карай,
$f(g(h(x))) = f\left(g(x+3)\right)$ g нын берилүүсүнө карай,

$f(g(h(x))) = f\left((x+3)^{10}\right)$,

f тин берилүүсүнө карай, $f(g(h(x))) = \dfrac{(x+3)^{10}}{(x+3)^{10}+1}$ болот.

4-мисал. $F(x) = \sqrt[4]{x+9}$ функция берилген. Эгер $F(x) = f(g(x))$ болсо f жана g функцияларды аныкта.

Чыгаруу. f жана g ффункцияларды төмөндөгүчө алуубуз мүмкүн: $g(x) = x+9$ жана $f(x) = \sqrt[4]{x}$.

Мында, g нын берилишине карай, $f(g(x)) = f(x+9)$ болуп, f тин берилишине карай, $f(g(x)) = \sqrt[4]{x+9}$ болот.

Ушул тапшырманын шартын канаттандыруучу f жана g функцияларды бир канча абалда тандап алууга болот. Булардын дагы бири $f(x)=\sqrt{x}$ жана $g(x)=\sqrt{x+9}$.

5-мисал. Татаал функциянын колдонулушу

Кеме 20 km/h өзгөрбөс ылдамдыкта жээкке параллел аракет кылып жатат. Кеме маяктын алдынан саат 12:00 до, жээкден 5 km алыстыкта өтөт.

а) Маяк жана кеме арасындагы s жолду d га, кеменин саат 12:00 дан кийин жүргөн жолуна, салыштырмалуу алынган функция, б.а. төмөндөгү функция көрүнүшүндө жазгыла:

$$s=f(d).$$

b) d ны t га, саат 12:00 дан кийин өткөн убакытка, салыштырмалуу алынган функция, б.а. төмөндөгү функция көрүнүшүндө жазгыла:

$$d=g(t).$$

3-сүрөт

c) $f(g(t))$ татаал функцияны тапкыла. Бул функция эмнени билдирет?

Чыгаруу. 3-сүрөткө карайбыз.

а) s жана d аралыктарды байланыштуулугун

Пифагор теоремасы жардамында көрсөтөбүз. Б.а., s тин d га салыштырмалуу функция экендигин төмөнкүдөй туюнтабыз:

$$s=f(d)=\sqrt{25+d^2}.$$

b) кеме 20 km/h өзгөрбөс ылдамдыкта аракеттенип жаткандыгы үчүн, d аралык t га салыштырмалуу функциясын төмөнкүдөй туюнтурушубуз мүмкүн.

$$d=g(t)=20t$$

c) ошондой кылып:

g нын берилүүсүнө карай, $f(g(t))=f(20t)$

f тин берилүүсүнө карай $f(g(t))=\sqrt{25+(20t)^2}$. Бул жерде $f(g(t))$ функция кеме жана маяк арасындагы жолдун убакытка салыштырмалуу функциясын билдирет.

Тескери функция

Эгерде $f(x)=y$ у теңдеме ар бир y үчүн x га карата бир гана $g(y)$ тамырга ээ болсо бул $x=g(y)$ функция $y=f(x)$ функцияга ***тескери функция*** деп аталат. $x=g(y)$ функциянын ордуна мүнөздүү аныктамалар боюнча, $y=g(x)$ жазуусу колдонулат. $y=f(x)$ функцияга тескери функция $y=f^{-1}(x)$ сыяктуу жазылат.

1-мисал. $y=3x-5$ функцияны карайлык. Бул жерден x ти y аркылуу туюнтайлык:

$$3x-5=y \Rightarrow 3x=y+5 \Rightarrow x=\frac{y+5}{3}.$$

Акыркы барабардыкта x жана y тердин орундарын алмаштырып:

$$y=\frac{x+5}{3}$$

функцияга ээ болобуз. Демек, $f^{-1}(x)=\frac{x+5}{3}$ функция $y=3x-5$ функцияга тескери функция деп айтылат.

Эскертүү. Берилген $y=f(x)$ функция жана ага тескери $y=f^{-1}(x)$ функция үчүн $D\left(f^{-1}\right)=E(f)$ жана $E\left(f^{-1}\right)=D(f)$ болот.

Көңүл бургула! $\left(f(x)\right)^{-1}=\frac{1}{f(x)}$ болуп, бул барабардыктагы (-1) даража көрсөткүчүн билдирет. $f^{-1}(x)$ жазуудагы (-1) болсо тескери функцияны билдирет. Жалпысынан алганда, $\left(f(x)\right)^{-1} \neq f^{-1}(x)$. Мисалы:

$f(x)=3x-5$ функция үчүн $f^{-1}(x)=\frac{x+5}{3}$ жана $\left(f(x)\right)^{-1}=\frac{1}{3x-5}$ болот.

2-мисал. Берилген функциянын тескери функциясын тапкыла: $f(x)=\frac{x^5-3}{2}$.

Чыгаруу. Функцияны $y=\frac{x^5-3}{2}$ сыяктуу жазабыз жана х ты у аркылуу туюнтабыз:

$$y=\frac{x^5-3}{2}$$

$$2y=x^5-3$$

$$x^5=2y+3$$

$$x=\sqrt[5]{2y+3}.$$

Эми x жана y тердин ордун алмаштырабыз: $y=\sqrt[5]{2x+3}$. Демек, тескери функция төмөнкүдөй: $f^{-1}(x)=\sqrt[5]{2x+3}$.

3-мисал. Берилген функциянын тескери функциясын тапкыла: $f(x)=\frac{2x+3}{x-1}$.

Чыгаруу. Функцияны төмөнкүдөй жазып алабыз: $y=\frac{2x+3}{x-1}$, x ты y аркылуу туюнтабыз:

$$y=\frac{2x+3}{x-1}$$

$$y\cdot(x-1)=2x+3$$

$$yx-y=2x+3$$

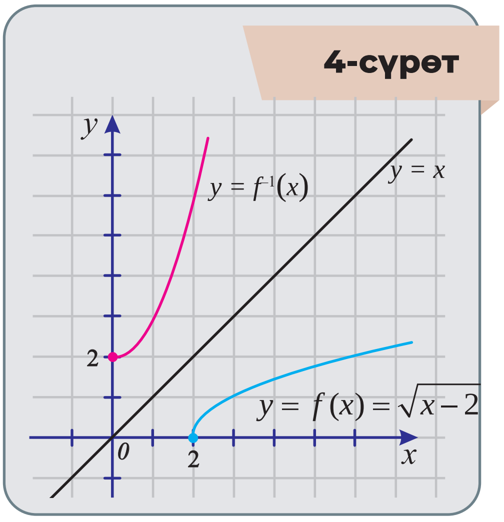
$$yx-2x=y+3$$

$$x \cdot (y-2) = y+3$$

$$x = \frac{y+3}{y-2}$$

Демек, $f^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{x-2}$ тескери функция болот.

4-мисал. Тескери функциянын графигин сызуу.



$f(x) = \sqrt{x-2}$ функциянын графигинен пайдаланып f^{-1} функциянын графигин сызгыла жана анын аналитикалык көрүнүшүн жазгыла.

Чыгаруу.

1. $y = \sqrt{x-2}$ функциянын графиги 4-сүрөттө келтирилген.

2. f^{-1} функциянын графиги f функциянын графигин $y = x$ түз сызыкка салыштырмалуу чагылдыруу жардамында сызылат (4-*сүрөт*).

3. $y = \sqrt{x-2}$ функцияда х ти y аркылуу туюнтулат, мында $y \geq 0$ экендиги эске алынат.

$$\sqrt{x-2} = y$$

$$x-2 = y^2$$

$$x = y^2 + 2, \quad y \geq 0.$$

Эми x жана y тердин ордун алмаштырабыз: $y = x^2 + 2$, $x \geq 0$.

Демек, тескери функция $f^{-1}(x) = x^2 + 2$ болот экен, $x \geq 0$.

Бул табылган $f^{-1}(x)$ тескери функция $y = x^2 + 2$ параболанын оң тармагынан турат. Аны графикден да көрсө болот.

Мезгилдүү функциялар

$y = f(x)$ функция берилген болуп, $D(f)$ анын аныкталуу областы болсун. Ошондой $T \neq 0$ табылып, ар бир $x \in D(f)$ үчүн:

1. $x - T$ жана $x + T$ lar $D(f)$ ге тиешелүү болуп,

2. $f(x-T) = f(x) = f(x+T)$ мамилелер аткарылса , анда $y = f(x)$ ***мезгилдүү функция*** деп аталат.

Эгер T саны $y = f(x)$ функциянын негизги мезгили болсо, анда ар бир n бүтүн сан үчүн nT саны да $y = f(x)$ функциянын мезгили болот:

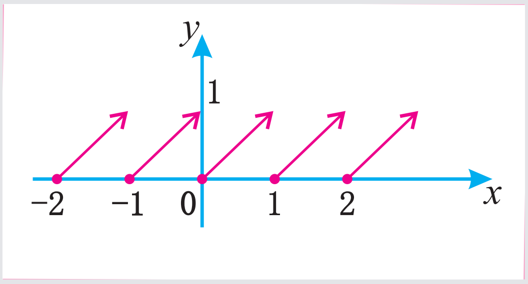
$$f(x + nT) = f(x), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Эң кичине оң T мезгил $f(x)$ функциясынын ***негизги мезгили*** деп аталат.

Мезгилдик графиги бир мезгил аралыгында сызуу жетиштүү, башка мезгил аралыктарында ушул график кайталанат.

Мисалы, сандын бөлчөк бөлүгү $\{x\}$ – берилген x санга анын бөлчөк бөлүгү туура келүүчү функция (5-*сүрөт*) мезгилдүү функция болот. Анын негизги мезгили $T_0 = 1$, б.а каалагандай $x \in (-\infty; +\infty)$ сан үчүн $(x + 1) \in (-\infty; +\infty)$ жана $\{x+1\} = \{x\}$ мамилелер орундуу болот.

5-сүрөт



$y = \{x\}$ функция графиги

Эгер $y = f(x)$ функциянын негизги мезгили T_0 болсо, бул абалда $y = kf(ax+b)+c$ функциянын негизги мезгили $T_1 = \dfrac{T_0}{|a|}$ болот $(a \neq 0)$.

МИСАЛДАР

1. $f(x) = 2x-3$ жана $g(x) = 4-x^2$ дан пайдаланып, туюнтмалардын маанисин тап.

a) $f(g(0))$ b) $g(f(0))$ c) $f(f(2))$ d) $g(g(3))$

e) $f(g(-2))$ f) $g(f(-2))$ g) $f(f(-1))$ h) $g(g(-1))$

2. $f(g(x))$, $g(f(x))$, $f(f(x))$ жана $g(g(x))$ функцияларды жана алардын аныкталуу областын тап.

a) $f(x) = 2x+3$, $g(x) = 4x-1$ b) $f(x) = 6x-5$, $g(x) = \dfrac{x}{2}$

c) $f(x) = x^2$, $g(x) = x+1$ d) $f(x) = x^3+2$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = 2x+4$ f) $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x-3}$

g) $f(x) = |x|$, $g(x) = 2x+3$ h) $f(x) = 4-x$, $g(x) = |x+4|$

i) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, $g(x) = 2x-1$ j) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $g(x) = x^2-4x$

k) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$ l) $f(x) = \dfrac{2}{x}$, $g(x) = \dfrac{x}{x+2}$

3. $f(x) = 3-x$ жана $g(x) = x^2+1$ дан пайдаланып, функцияларды тап.

a) $f(g(x))$ b) $g(f(x))$ c) $f(f(x))$ d) $g(g(x))$

4. $f(g(h(x)))$ татаал функцияны тап.

a) $f(x) = x-1$, $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = x-1$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = x^3$, $h(x) = x^2+2$

c) $f(x)=x^4+1$, $g(x)=x-5$, $h(x)=\sqrt{x}$

d) $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=\dfrac{x}{x-1}$, $h(x)=\sqrt[3]{x}$

5. $F(x) = f(g(x))$ көрүнүшүндөгү татаал функциядан f жана g жөнөкөй функцияларды аныкта.

a) $F(x)=(x-9)^5$ b) $F(x)=\sqrt{x}+1$ c) $F(x)=\dfrac{x^2}{x^2+4}$

d) $F(x)=\dfrac{1}{x+3}$ e) $F(x)=\left|1-x^3\right|$ f) $F(x)=\sqrt{1+\sqrt{x}}$

6. Берилген f функцияга тескери функцияны тап.

a) $f(x)=3x+5$ b) $f(x)=7-5x$ c) $f(x)=5-4x^3$

d) $f(x)=3x^3+8$ e) $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ f) $f(x)=\dfrac{5}{x-6}$

g) $f(x)=\dfrac{3-4x}{8x-1}$ h) $f(x)=\dfrac{3x}{x-2}$ i) $f(x)=\dfrac{2x+5}{x-7}$

j) $f(x)=\sqrt{5+8x}$ k) $f(x)=2+\sqrt[3]{x}$ l) $f(x)=x^6$, $x\ge 0$

m) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$, $x>0$ n) $f(x)=4-x^2$, $x\ge 0$ o) $f(x)=x^2+x$, $x\ge -\dfrac{1}{2}$

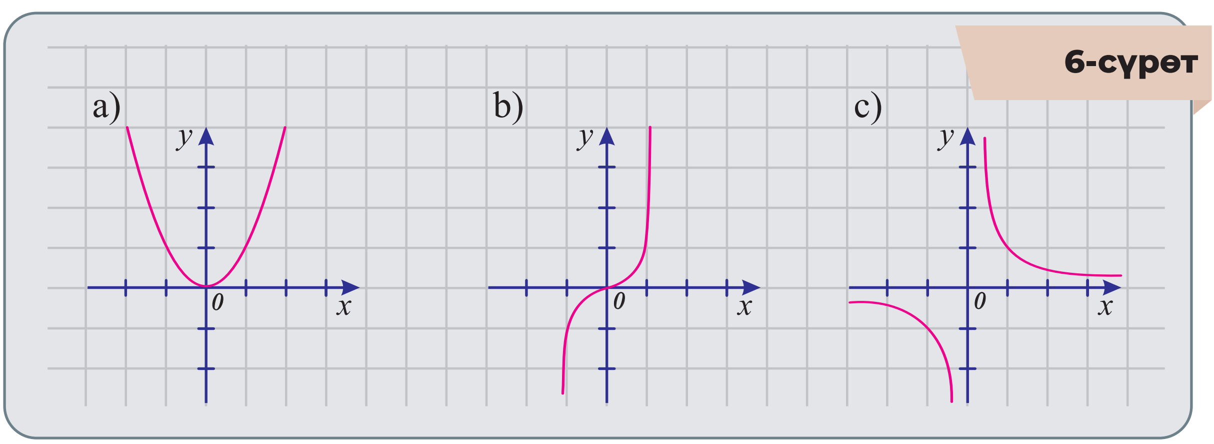
7. Берилген функцияга тескери функцияны тапкыла. f функциянын графигинен пайдаланып функция графигин сыз.

a) $f(x)=3x-6$ b) $f(x)=16-x^2$, $x\ge 0$

c) $f(x)=\sqrt{x+1}$ d) $f(x)=x^3$

8. 6-сүрөттө берилген графиктерге туура келген функцияларды тандагыла жана аларга тескери функция графигин сыз:

1) $f(x)=x^3$; 2) $f(x)=\dfrac{1}{x}$; 3) $f(x)=x^2$



6-сүрөт

9. $T=\sqrt{2}$ сан $f(x) = 5$ функциянын мезгили болушун далилде.

10. Берилген функциялар мезгилдүү эместигин көрсөт.

a) $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$ b) $f(x)=-\dfrac{2}{x-2}$ c) $f(x)=\dfrac{x}{x}$

d) ùù = ^{2} – e) $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x^2+5x+8}$ f) $f(x)=\sqrt[3]{x}+3x-1$

ФУНКЦИЯ КАСИЕТТЕРИ

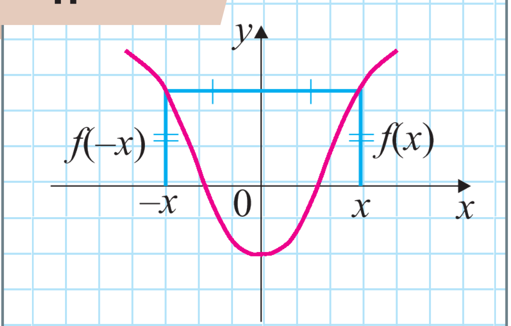
Жуп жана так функциялар

Каалагандай $x \in D(f)$ учун $f(-x) = f(x)$ барабардык аткарылса, анда $f(x)$ ***жуп функция*** деп аталат. Жуп функциянын графиги *Oy* огуна карата симметриялуу болот (1-*сүрөт*).

Каалагандай $x \in D(f)$ үчүн $f(-x) = -f(x)$ барабардык аткарылса, анда $f(x)$ ***так функция*** деп аталат. Так функциянын графиги координата башына карата симметриялуу болот (2-*сүрөт*).

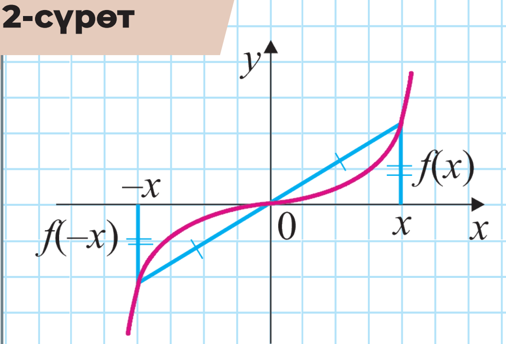
Жогорудагы эки барабардыктардан бири да аткарылбаса, анда $f(x)$ ***жуп да, так да эмес функция*** деп аталат.

1-сүрөт



$f(x)$ – жуп функция

2-сүрөт



$f(x)$ – так функция

1-мисал. $f(x) = 2x^2 + 5$ функцияны жуп же тактыгын текшергиле.

Чыгаруу

$f(x) = 2x^2 + 5$ функция үчүн:

$$f(-x) = 2(-x)^2 + 5 = 2x^2 + 5 = f(x)$$

экендиги үчүн $f(x)$ функция жуп функция болот.

2-мисал. $f(x) = 2x^3 + 5x$ функциялардын жуп же так экенин текшер.

Чыгаруу

$f(x) = 2x^3 + 5x$ функция үчүн:

$$f(-x) = 2(-x)^3 + 5(-x) = -(2x^3 + 5x) = -f(x)$$

экендигинен $f(x)$ функция так функция болот.

3-мисал. $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x + 1$ функцияны жуп же тактыгын текшергиле.

Чыгаруу

$$f(-x) = 2(-x)^3 + 5(-x)^2 - 3(-x) + 1 =$$

$$= -(2x^3 - 5x^2 - 3x - 1)$$

Демек, $f(-x) \neq f(x)$, $f(-x) \neq -f(x)$ болуп, бул функция жуп да эмес, так да эмес.

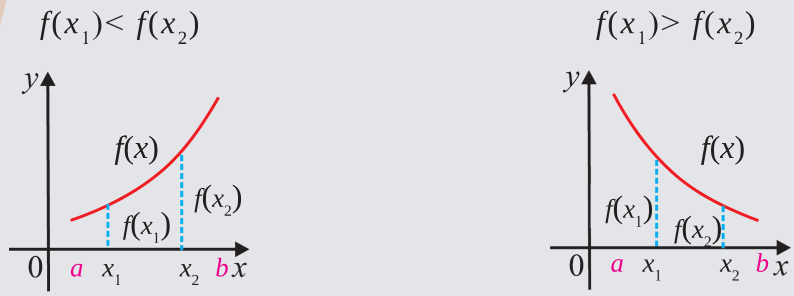
Функциялардын өсүшү жана кемиши

$f(x)$ функция $(a;\ b)$ интервалда аныкталган болуп, $x_1 < x_2$ барабарсыздыкты канааттандырган бардык $x_1, x_2 \in (a;\ b)$ лар үчүн:

- $f(x_1) < f(x_2)$ болсо, $f(x)$ функция $(a;\ b)$ интервалда өсүүчү;
- $f(x_1) > f(x_2)$ болсо, $f(x)$ функция $(a;\ b)$ интервалда кемүүчү;
- $f(x_1) \geq f(x_2)$ болсо, $f(x)$ функция $(a;\ b)$ интервалда өспөөчү;
- $f(x_1) \leq f(x_2)$ болсо, $f(x)$ функция $(a;\ b)$ интервалда кемибөөчү функция деп аталат.

Өсүүчү, кемүүчү, өспөөчү жана кемибөөчү функциялар жалпысынан ***монотон функциялар*** деп аталат.

3-сүрөт



Өсүүчү функция **Кемүүчү функция**

Функциянын экстремум чекиттери жана экстремумдары

- Эгерде:

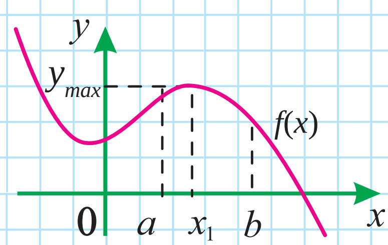
1) $f(x)$ функция x_1 чекитке тиешелүү болгон 4-сүрөт кандайдыр $(a; b)$ интервалда аныкталган болуп;

2) $(a; b)$ интервалдын x_1 дан башка бардык x чекиттеринде $f(x) < f(x_1)$ шарт аткарылса, анда x_1 чекит ***функциянын максимум чекити*** деп аталат (*4-сүрөт*).

Эгерде $x_1 \in D(f)$ чекит $f(x)$ функция үчүн максимум чекит болсо, анда $f(x)$ функциянын x_1 чекиттеги $f(x_1)$ мааниси ***функциянын максимуму*** деп аталат жана $y_{\text{мах}}$ сыяктуу белгиленет. Демек,

$$y_{\max} = f(x_1).$$

4-сүрөт



$f(x)$ үчүн $(a; b)$ интервалда x_1 – функциянын максимум чекити; $y_{max} = f(x_1)$ – функциянын максимуму.

- Эгерде:

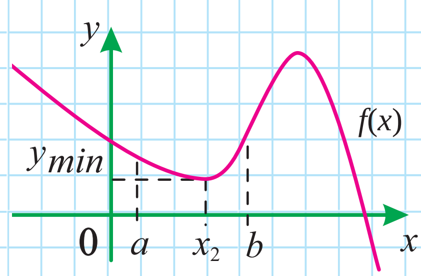
1) $f(x)$ функция x_2 тиешелүү болгон кандайдыр $(a; b)$ интервалда аныкталган болуп;

2) $(a; b)$ интервалдын x_2 ден башка бардык x чекиттеринде $f(x) > f(x_2)$ шарт аткарылса, анда x_2 чекит $f(x)$ ***функциянын минимум чекити*** деп аталат (5-*сүрөт*).

Эгерде $x_2 \in X$ чекит $f(x)$ функция үчүн минимум чекит болсо, анда $f(x)$ функциянын x_2 чекиттеги $f(x_2)$ мааниси $f(x)$ ***функциянын минимуму*** деп аталат жана $y_{\text{мин}}$ сыяктуу белгиленет. Демек,

$$y_{\min} = f(x_2).$$

5-сүрөт



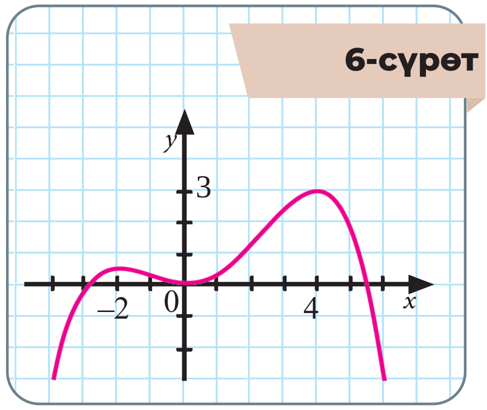
$f(x)$ үчүн $(a; b)$ интервалда x_2 – функциянын максимум чекити; $y_{\min} = f(x_2)$ – функциянын минимуму.

Функциянын максимум жана минимум чекиттери ***экстремум чекиттери*** деп аталат.

4-мисал. $f(x)$ функциянын графиги 6-сүрөттө көрсөтүлгөн. Функциянын өсүү жана кемүү интервалдарын тапкыла.

Чечүү

$f(x)$ функциянын графигинен, функция $(-\infty;-2]$ жана $[0;\ 4]$ интервалдарда өсүүшүн дагы $[-2;\ 0]$ жана $[4;\infty)$ интервалдарда төмөндөшүн аныктайбыз.



6-сүрөт

МИСАЛДАР

1. Берилген функцияларды жуп же так экендигин текшергиле.

a) $f(x)=x^4$ b) $f(x)=x^3$

c) $f(x)=x^2+x$ d) $f(x)=x^4-4x^2$

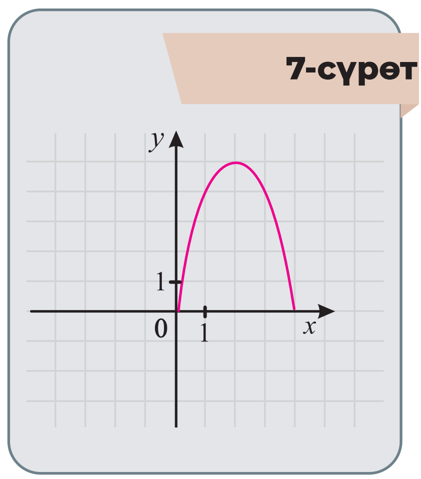
e) $f(x)=x^3-x$ f) $f(x)=3x^3+2x^2+1$

g) $f(x)=1-\sqrt[3]{x}$ h) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$

2. 7-сүрөттө $x\geq 0$ област үчүн функциянын графиги берилген. $x<0$ областта графикти ушундай кургула, мында:

1) жуп функция;

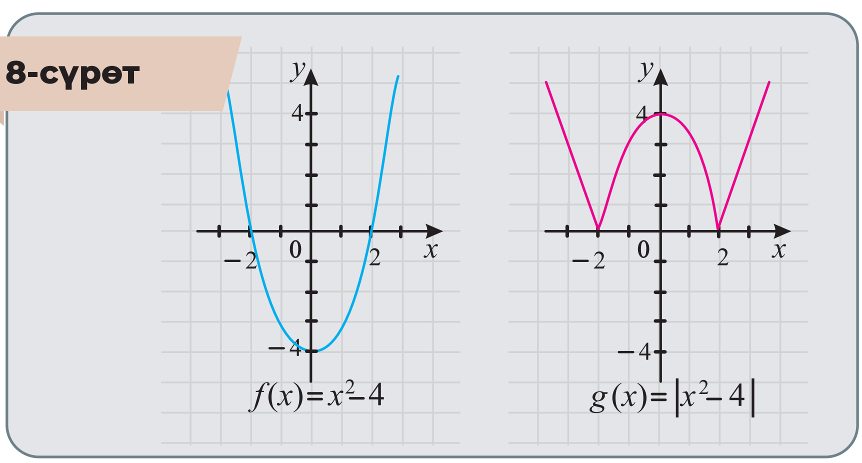
2) так функция графиги пайда болсун.



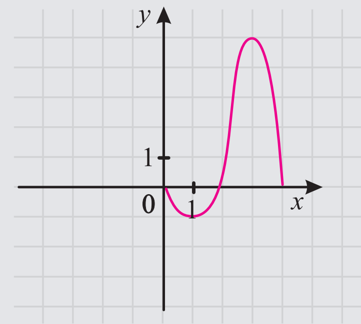
7-сүрөт

3. 8-сүрөттө $f(x)=x^2-4$ жана $g(x)=|x^2-4|$ функция графиктери берилген. $g(x)$ функциянын графиги $f(x)$ функциянын графигинен кандай пайда кылынганын түшүндүргүлө.

8-сүрөт

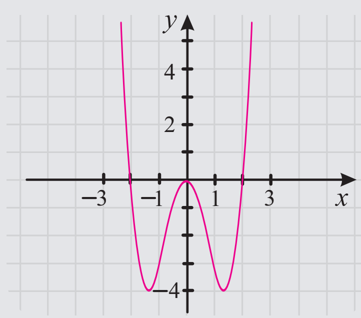


9-сүрөт



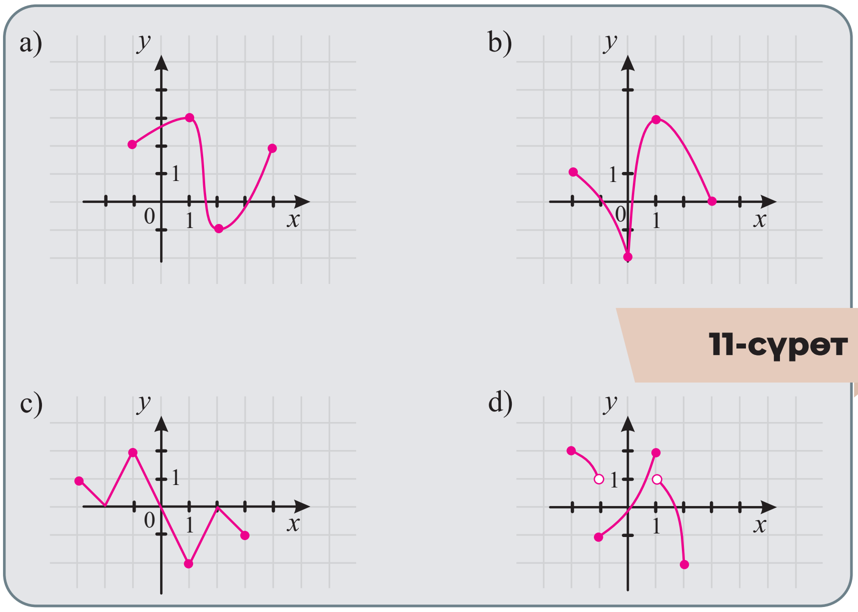
4 9-сүрөттө $x \geq 0$ үчүн функциянын графиги берилген. $x < 0$ областта графикти ушундай кургула, мында:
1) жуп функция;
2) так функция графиги пайда болсун.

10-сүрөт



5. $f(x) = x^4 - 4x^2$ функциянын графиги берилген (10-*сүрөт*). Андан пайдаланып $g(x) = |x^4 - 4x^2|$ функциянын графигин сызгыла.

6. 11-сүрөттө f функциянын графиги берилген. Бул графиктен пайдаланып төмөнкүлөрдү болжолдуу аныктагыла:
1) f функциянын аныкталуу областын жана маанилер көптүгүн.
2) f тин өсүү жана кемүү интервалдарын.



11-сүрөт

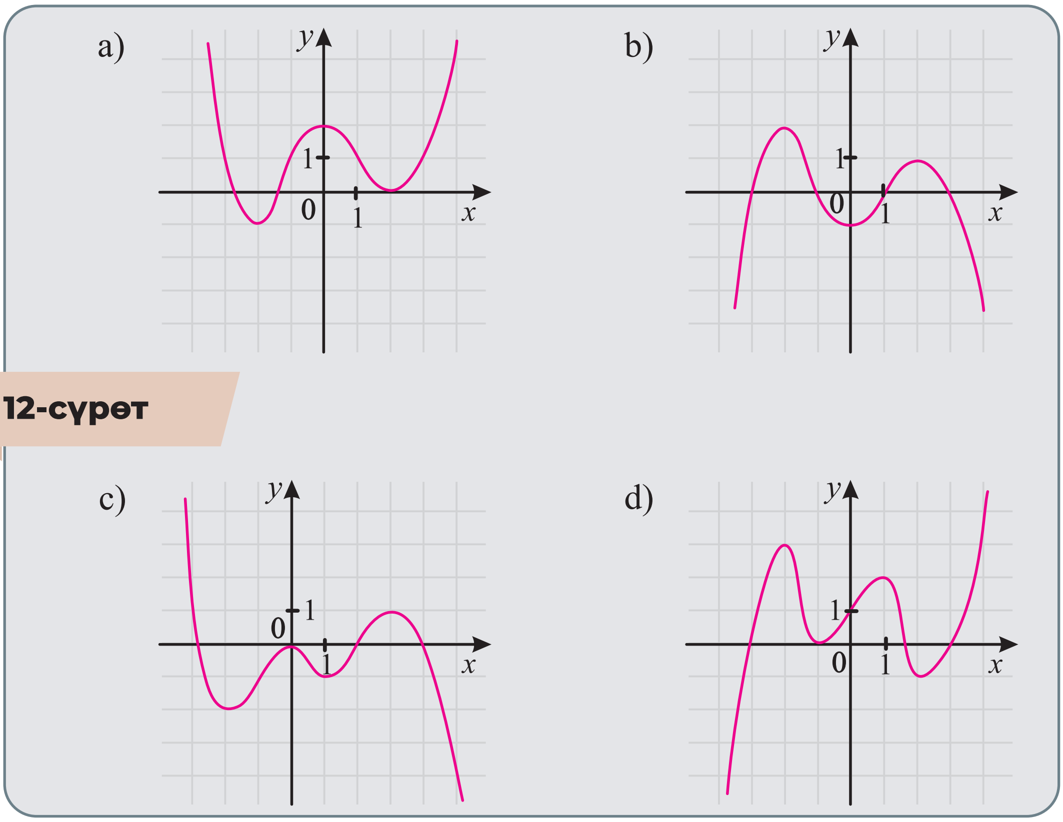
7. Берилген функциялардын графигин сызгыла, аныкталуу областын жана маанилер көптүгүн аныктагыла, өсүү жана кемүү интервалдарын болжолдуу тапкыла.

a) $f(x)=x^2-5x$ b) $f(x)=x^3-4x$ c) $f(x)=x^4-16x^2$

8. f функциянын графиги 12-сүрөттө берилген. Бул графиктен пайдаланып төмөндөгүлөрдү болжолдуу аныкта:

1) функциянын бардык экстремум чекиттерин жана экстремумдарын;

2) функциянын өсүү жана кемүү интервалдарын.



12-сүрөт

9. Төмөндөгү маалыматтар негизинде функциянын графигинин эскизин жаса.

a) $(-\infty;3]$ кемийт, $[3;+\infty)$ өсөт;

b) $(-\infty;0]\cup[1;+\infty)$ кемийт, $[0;1]$ өзгөрбөйт;

c) $(-\infty;-6]$ кемийт, $[-6;0]$ өсөт жана $[0;+\infty)$ өзгөрбөйт;

d) $[-5;10]$ өсөт, $[10;+\infty)$ өзгөрбөйт va $x=-5$ де эң кичине маанисин кабыл алат.

ФУНКЦИЯНЫН ГРАФИКТЕРИН ЖӨНӨКӨЙ АЛМАШТЫРУУЛАР

Функциянын графигин жылдыруу

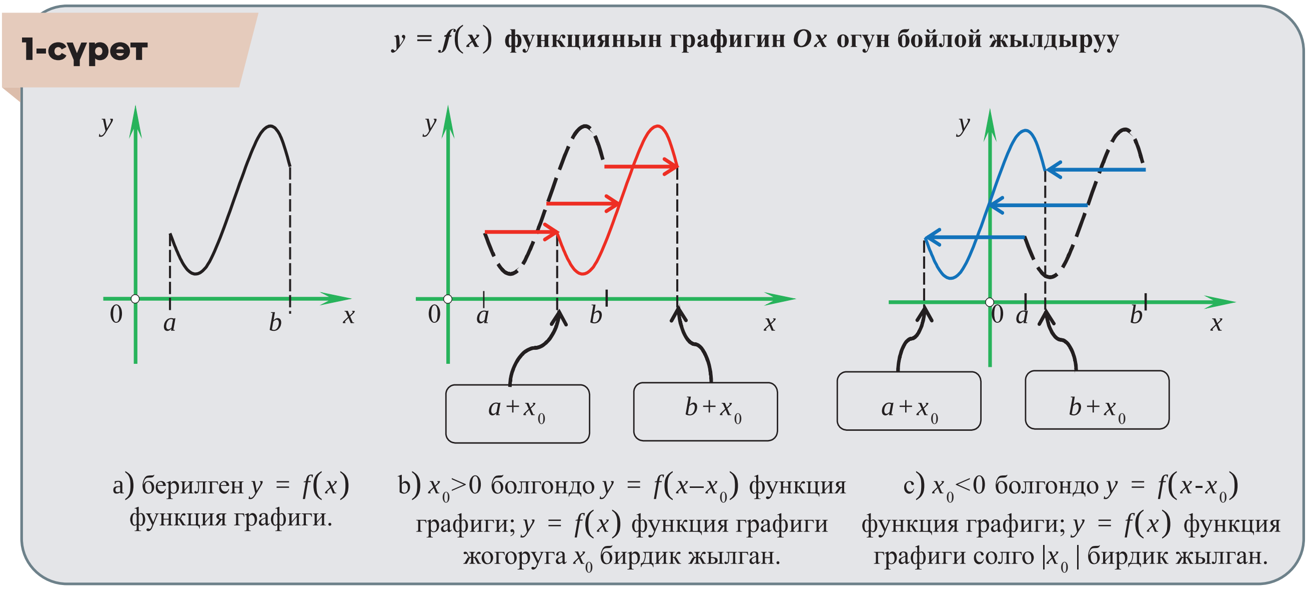
Берилген $f(x)$функциянын графигин Oxy тегиздигинде жылдыруу мүмкүн. Функция графигинын төмөндө келтирилген жылдырууларын көрүп өтөбүз.

1. Функциянын графигин Ox огун бойлой жылдыруу.
2. Функциянын графигин Oy огун бойлой жылдыруу.
3. Функциянын графигин кандайдыр багытында жылдыруу.

1. Функция графигин Ox огун бойлой x_0 бирдикке жылдыруу (1-сүрөт)

a) эгерде $x_0 > 0$ болсо, график Ox огу багытында x_0 бирдик жылат.

b) эгерде $x_0 < 0$ болсо, график Ox огу багытына каршы $|x_0|$ бирдик жылат.



1-мисал. $f(x) = x^2$ функциянын графигинен пайдаланып, төмөндөгү функциялар графигин сызгыла.

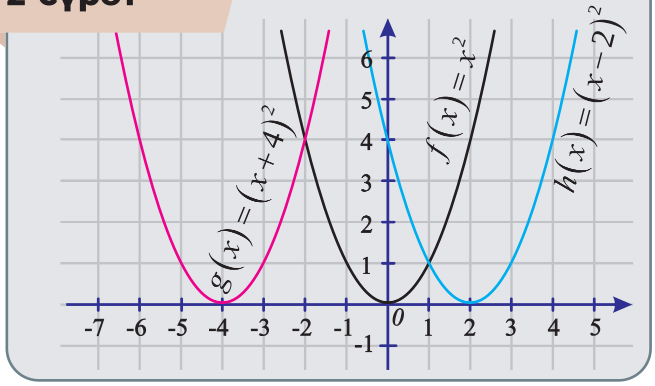
a) $g(x) = (x+4)^2$ b) $h(x) = (x-2)^2$

Чыгаруу. 2-сүрөттө көрсөтүлгөндөй,

a) g функциянын графигин жасоо үчүн f функциянын графигин солго 4 бирдикке жылдырабыз.

b) h функциянын графигин жасоо үчүн f функциянын графигин оңго 2 бирдикке жылдырабыз.

2-сүрөт



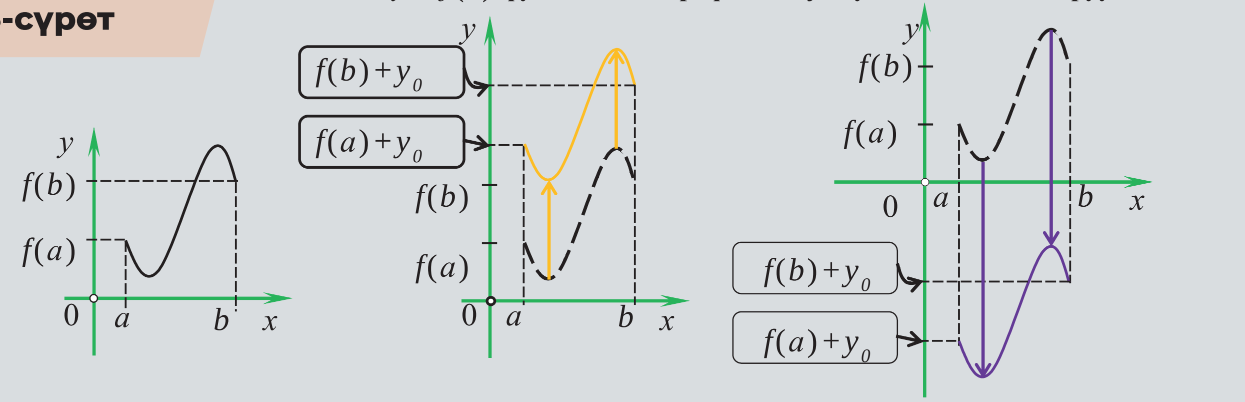
2. Функциянын графигин *Oy* огун бойлой y_0 бирдик жылдыруу (**3-*сүрөт***)

a) эгер $y_0 > 0$ болсо, график Oy огу багытында y_0 бирдик жылат;

b) эгер $y_0 < 0$ болсо, график Oy огу багытында каршы $|y_0|$ бирдик жылат (3-*сүрөт*).

3-сүрөт

$y = f(x)$ функциянын графигин Oy огун бойлой жылдыруу.



a) Берилген $y = f(x)$ функция графиги.

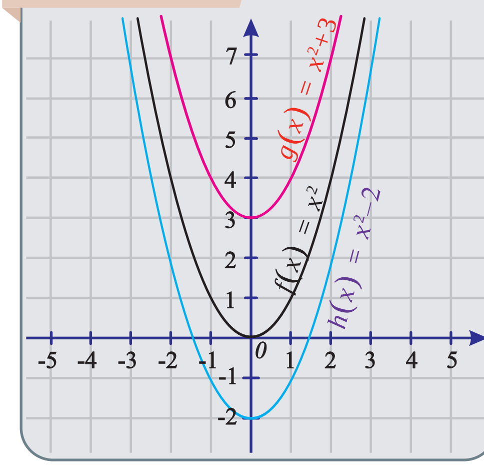
b) $y_0 > 0$ болгондо $y = f(x) + y_0$ функция графиги. $y = f(x)$ функция графиги жогорига y_0 бирдик жылган.

c) $y_0 < 0$ болгондо $y = f(x) + y_0$ функция графиги. $y = f(x)$ функция графиги ылдыйга $|y_0|$ бирдик жылган.

2-мисал. $f(x) = x^2$ функциядан пайдаланып, төмөндөгү функциялардын графигин сызгыла.

a) $g(x) = x^2 + 3$ b) $h(x) = x^2 - 2$

4-сүрөт



Чыгаруу

a) Төмөнкүгө көңүл бургула:

$$g(x) = x^2 + 3 = f(x) + 3$$

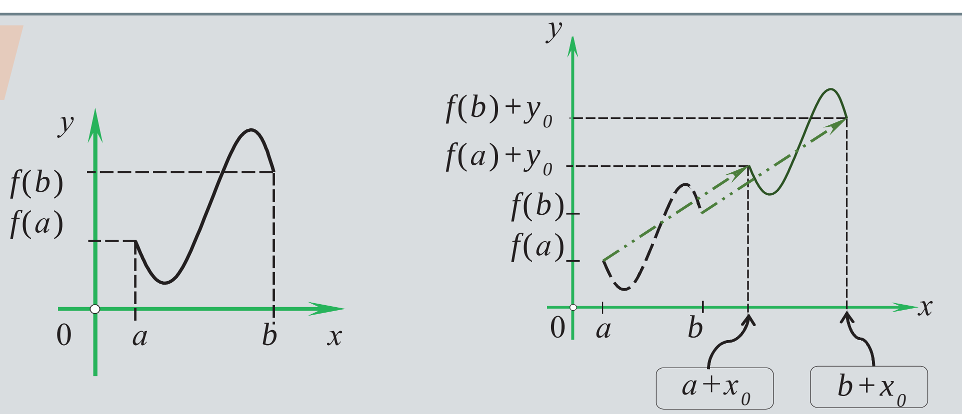
Демек, 4-сүрөттө көрсөтүлгөндөй g функциянын графигин сызуу үчүн f функциянын графигин жогоруга 3 бирдикке жылдырабыз (көтөрөбүз).

b) Ошондой эле, h функциянын графигин сызуу үчүн f функциянын графигин ылдыйга 2 бирдикке жылдырабыз (түшүрөбүз).

3. Функция графигин *Ox*, жана *Oy* октору боюнча жылдыруу (**5-*сүрөт***)

$y = f(x - x_0) + y_0$ функция графигин жасоо үчүн $y = f(x)$ функция графигин Ox огу боюнча x_0 бирдикке, Oy огу боюнча болсо y_0 бирдикке жылдыруу жетерлүү.

5-сүрөт

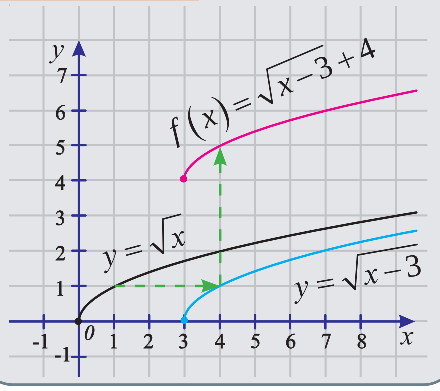


3-мисал. $f(x)=\sqrt{x-3}+4$ функциянын графигин жасайбыз.

Чыгаруу

Алгач $y=\sqrt{x}$ функция графигин жасайбыз. Алынган функция графигин 3 бирдик оңго жылдырабыз жана $y=\sqrt{x-3}$ функциянын графигин алабыз. Андан кийин бул графикти 4 бирдик жогоруга жылдырабыз жана $f(x)=\sqrt{x-3}+4$ функция графигин пайда кылабыз (6-*сүрөт*).

6-сүрөт



Функциянын графиктерин кысуу, чоюу

Берилген $f(x)$ функциянын графигин Oxy тегиздигинде деформациялоо (кысуу же чоюу) мүмкүн. Эки керектүү абалды көрүп өтөбүз.

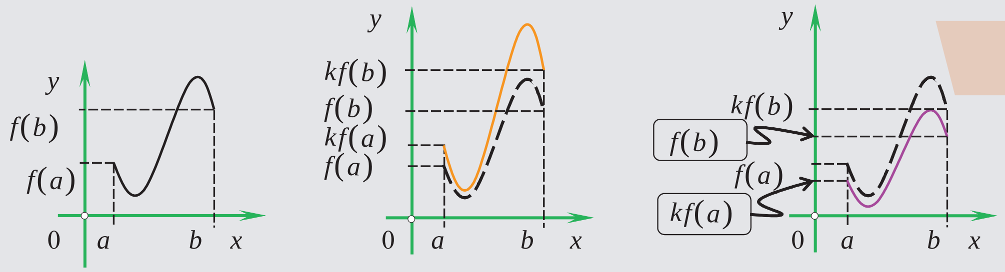
1-абал. Берилген $y = f(x)$ функция графигинен пайдаланып $y = kf(x)$ функция графиги төмөнкүдөй жасалат (7-*сүрөт*):

a) эгерде $k>1$ болсо, график Ox огунан Oy огун бойлой k эсе чоюлат.

b) эгерде $0<k<1$ болсо, график Ox огуна Oy огун бойлой $\frac{1}{k}$ эсе кысылат.

c) эгерде $k<0$ болсо, анда $y = kf(x)$ функциянын графиги $y = |k|f(x)$ функция графигине Ox огуна карата симметриялуу болот.

$y = kf(x)$ функция графигин пайда кылуу



7-сүрөт

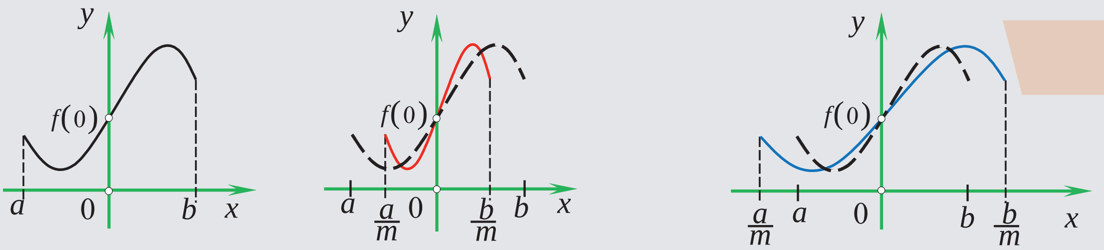
2-абал. Эми $y = f(x)$ функция графигинен пайдаланып $y = f(mx)$ функция графиги төмөнкүдөй жасалат (8-*сүрөт*):

a) эгер $m>1$ болсо, график Oy огуна Ox огун бойлой m эсе кысылат;

b) эгер $0<m<1$ болсо, график Oy огунан Ox огун бойлои $\frac{1}{m}$ эсе чоюулат.

c) эгер $m<0$ болсо, анда $y = f(mx)$ функциянын графиги $y = f(|m|x)$ функция графигине Oy огуна карата симметриялуу чагылдырылат.

$y = f(mx)$ функция графигин пайда кылуу



8-сүрөт

4-мисал. Төмөндөгү функциялардын графигин сыз.

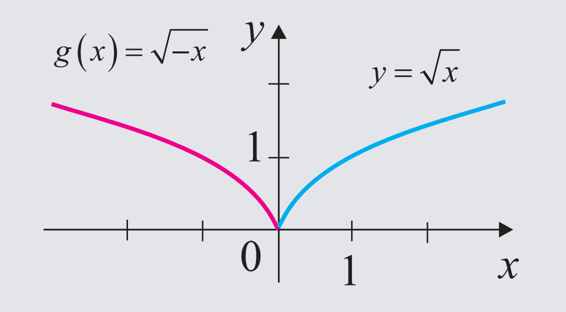
$$g(x)=\sqrt{-x}$$

Чыгаруу

9-сүрөттө $y=\sqrt{x}$ функциянын графигин сызабыз. Бул графикти у огуна салыштырмалуу симметриялык чагылдыруу аркылуу $g(x)=\sqrt{-x}$ функциянын графиги пайда кылынат.

Көңүл бургула: $g(x)=\sqrt{-x}$ функциянын аныкталуу областы: $x\le 0$ дан турат.

9-сүрөт



5-мисал. 10-сүрөттө $f(x)=x^2$ функциянын графигинен пайдаланып төмөндөгү функциялардын графигин сызгыла.

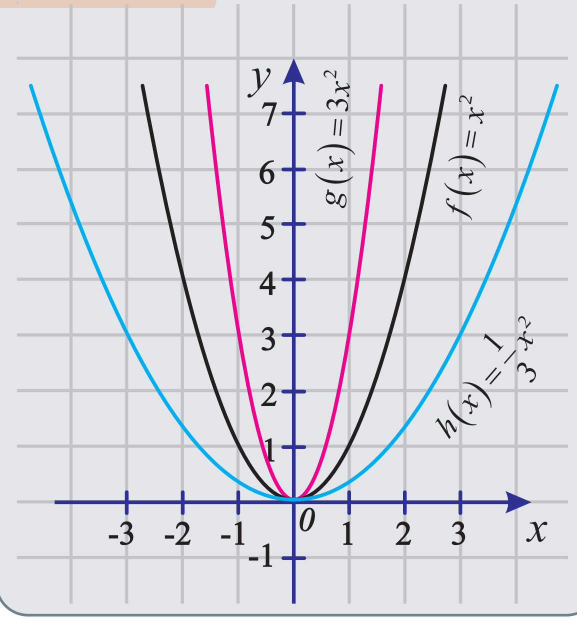
a) $g(x)=3x^2$ b) $h(x)=\frac{1}{3}x^2$

Чыгаруу

a) g функциянын графиги f функциянын ар бир чекитинин y координатасын 3 көбөйтүүдөн пайда болот. Б.а. g функциянын графигин пайда кылуу үчүн f функциянын графигин вертикал 3 эсе чоюу керек.

b) h функциянын графиги f функциянын ар бир чекитинын y координатасын $\frac{1}{3}$ ге көбөйтүүдөн пайда болот. Б.а., h функциянын графигин пайда кылуу үчүн f функциянын графигин вертикал багытта x огуна 3 эсе кысуу керек.

10-сүрөт

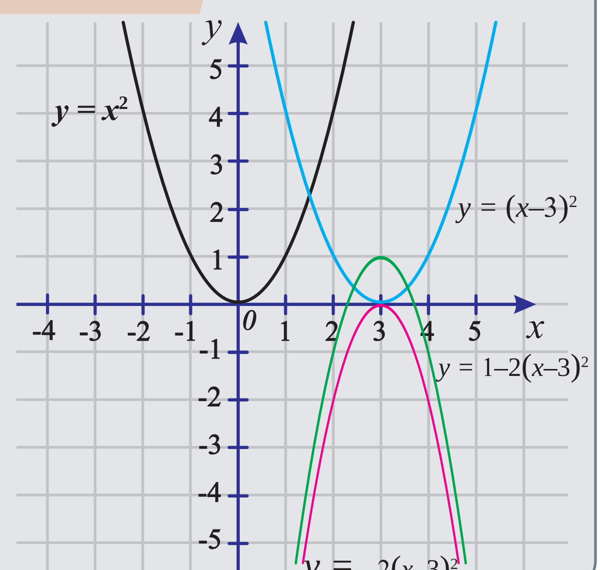


6-мисал. $f(x)=1-2(x-3)^2$ функциянын графигин сызгыла.

Чыгаруу

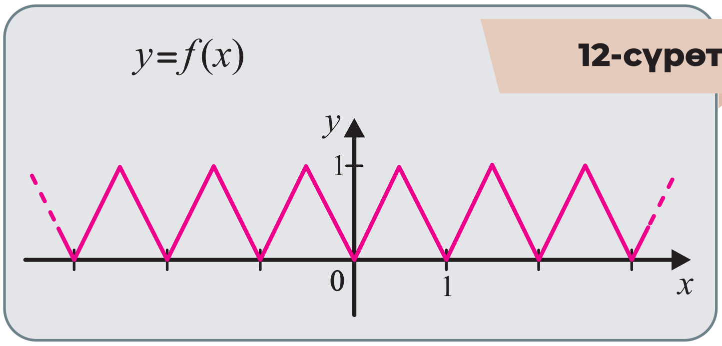
Алгач $y=x^2$ функциянын графигин оңго 3 бирдикке горизонтал жылдырабыз жана $y=(x-3)^2$ функциянын графигин пайда кылабыз. Кийин бул графикти Ox огуна салыштырмалуу чагылдырабыз жана 2 эсе чоёбуз жана $y=-2(x-3)^2$ функциянын графигин алабыз. Акыры, бул графикти жогоруга 1 бирдикке жылдырабыз жана $f(x)=1-2(x-3)^2$ функциянын графигин алабыз. (11-*сүрөт*).

11-сүрөт



7-мисал. 12-сүрөттө $y=f(x)$ функциянын графиги берилген. Бул графиктен пайдаланып, төмөндөгү функциялардын графигин сыз.

a) $y=f(2x)$; b) $y=f\left(\frac{1}{2}x\right)$.

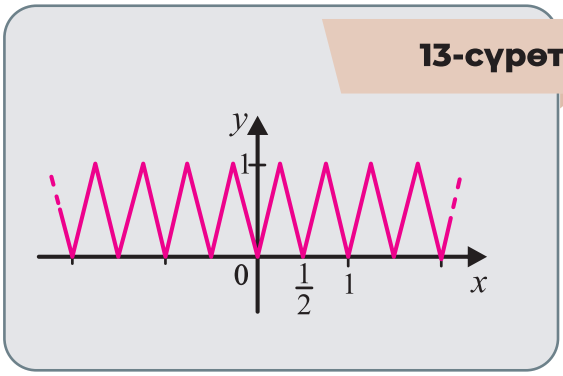


12-сүрөт

Чыгаруу

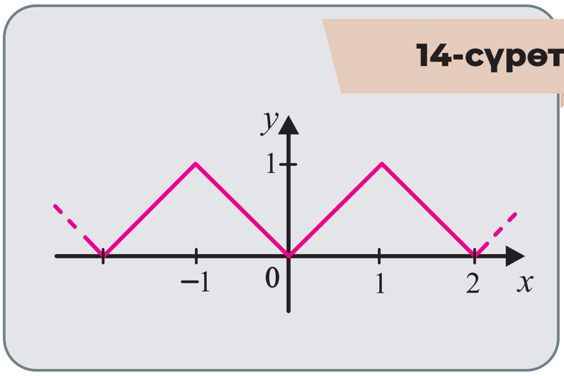
a) $y=f(2x)$ функция графигин жасоо үчүн $f(x)$ функция графигин Oy огуна Ox огун бойлой 2 эсе кысылат (13-*сүрөт*).

b) $y=f\left(\frac{1}{2}x\right)$ функция графигин жасоо үчүн $f(x)$ функция графигин Oy огуна Ox огун бойлой 2 эсе чоюлат (14-*сүрөт*).



13-сүрөт

$y=f(2x)$



14-сүрөт

$y=f\left(\frac{1}{2}x\right)$

МИСАЛДАР

1. $f(x)$ функция графиги берилген болсо, төмөндөгү функциялардын графиги кандай сызылышын түшүндүр.

a) $y=f(x)-1$	b) $y=f(x-2)$	c) $y=f\left(\frac{1}{4}x\right)$
d) $y=f(x)+4$	e) $y=f(-x)$	f) $y=3f(x)$
g) $y=-f(x)$	h) $y=\frac{1}{3}f(x)$	i) $y=f(x-5)+2$
j) $y=f(x+1)-1$	k) $y=4f(x+1)+3$	l) $y=f(4x)$
m) $y=-f(x)+5$	n) $y=3f(x)-5$	o) $y=1-f(-x)$

2. g функциянын графиги f функциянын графигинен кандай алмаштыруулар жардамында пайда кылынганын түшүндүр.

a) $f(x)=x^2,\ g(x)=(x+2)^2$ b) $f(x)=x^2,\ g(x)=x^2+2$

c) $f(x)=x^3,\ g(x)=(x-4)^3$ d) $f(x)=x^3,\ g(x)=x^3-4$

e) $f(x)=|x|,\ g(x)=|x+2|-2$ f) $f(x)=|x|,\ g(x)=|x-2|+2$

g) $f(x)=\sqrt{x},\ g(x)=-\sqrt{x}+1$ h) $f(x)=\sqrt{x},\ g(x)=\sqrt{-x}+1$

3. $y=x^2$ функциянын графигинен пайдаланып, төмөндөгү функциялардын графигин сыз.

a) $g(x)=x^2+1$ b) $g(x)=(x-1)^2$

c) $g(x)=-x^2$ d) $g(x)=(x-1)^2+3$

4. $y=\sqrt{x}$ функциянын графигинен пайдаланып, төмөндөгү функциялардын графигин сыз.

a) $g(x)=\sqrt{x-2}$ b) $g(x)=\sqrt{x}+1$

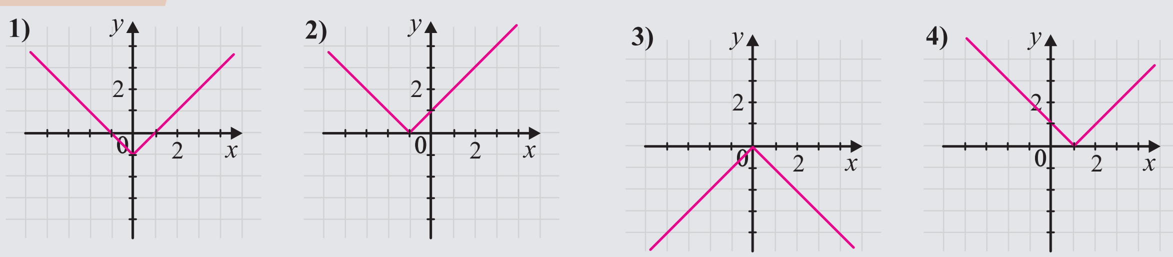
c) $g(x)=\sqrt{x+2}+2$ d) $g(x)=-\sqrt{x}+1$

5. Берилген функцияларга 14-сүрөттө берилген графиктерден дал келгенин тап.

a) $y=|x+1|$ b) $y=|x|-1$

c) $y=|x-1|$ d) $y=-|x|$

15-сүрөт



6. Төмөндөгү функциялардын графиктерин стандарттык функциянын графиги үстүндө ылайыктуу алмаштырууларды аткарып сыз.

a) $f(x)=x^2+3$ b) $f(x)=\sqrt{x}+1$ c) $f(x)=|x|-1$

d) $f(x)=\sqrt{x}+1$ e) $f(x)=(x-5)^2$ f) $f(x)=(x+1)^2$

g) $f(x)=|x+2|$ h) $f(x)=\sqrt{x-4}$ i) $f(x)=-x^3$

j) $f(x)=-|x|$ k) $y=\sqrt[4]{-x}$ l) $y=\sqrt[3]{-x}$

m) $y=\frac{1}{4}x^2$ n) $y=-5\sqrt{x}$ o) $y=3|x|$

p) $y=\frac{1}{2}|x|$ q) $y=(x-3)^2+5$ r) $y=\sqrt{x+4}-3$

s) $y=3-\frac{1}{2}(x-1)^2$ t) $y=2-\sqrt{x+1}$ u) $y=|x+2|+2$

v) $y=2-|x|$ w) $y=\frac{1}{2}\sqrt{x+4}-3$ x) $y=3-2(x-1)^2$.

7. Берилген f функциянын графигине көрсөтүлгөн алмаштыруулар колдонулган. Акыркы функциянын формуласын жазгыла.

a) $f(x)=x^2$, 3 бирдик төмөн жылдыр.

b) $f(x)=x^3$, 5 бирдик жогоруга жылдыр.

c) $f(x)=\sqrt{x}$, 2 бирдик солго жылдыр.

d) $f(x)=\sqrt[3]{x}$, 1 бирдик оңго жылдыр.

e) $f(x)=|x|$, 2 бирдик солго жана 5 бирдик төмөнгө жылдыр.

f) $f(x)=|x|$, x огуна салыштырмалуу чагылдырып, 4 бирдик оңго жана 3 бирдик жогоруга жылдыр.

g) $f(x)=\sqrt[4]{x}$, y огуна салыштырмалуу симметриялуу чагылдыр жана 1 бирдик жогору жылдыр.

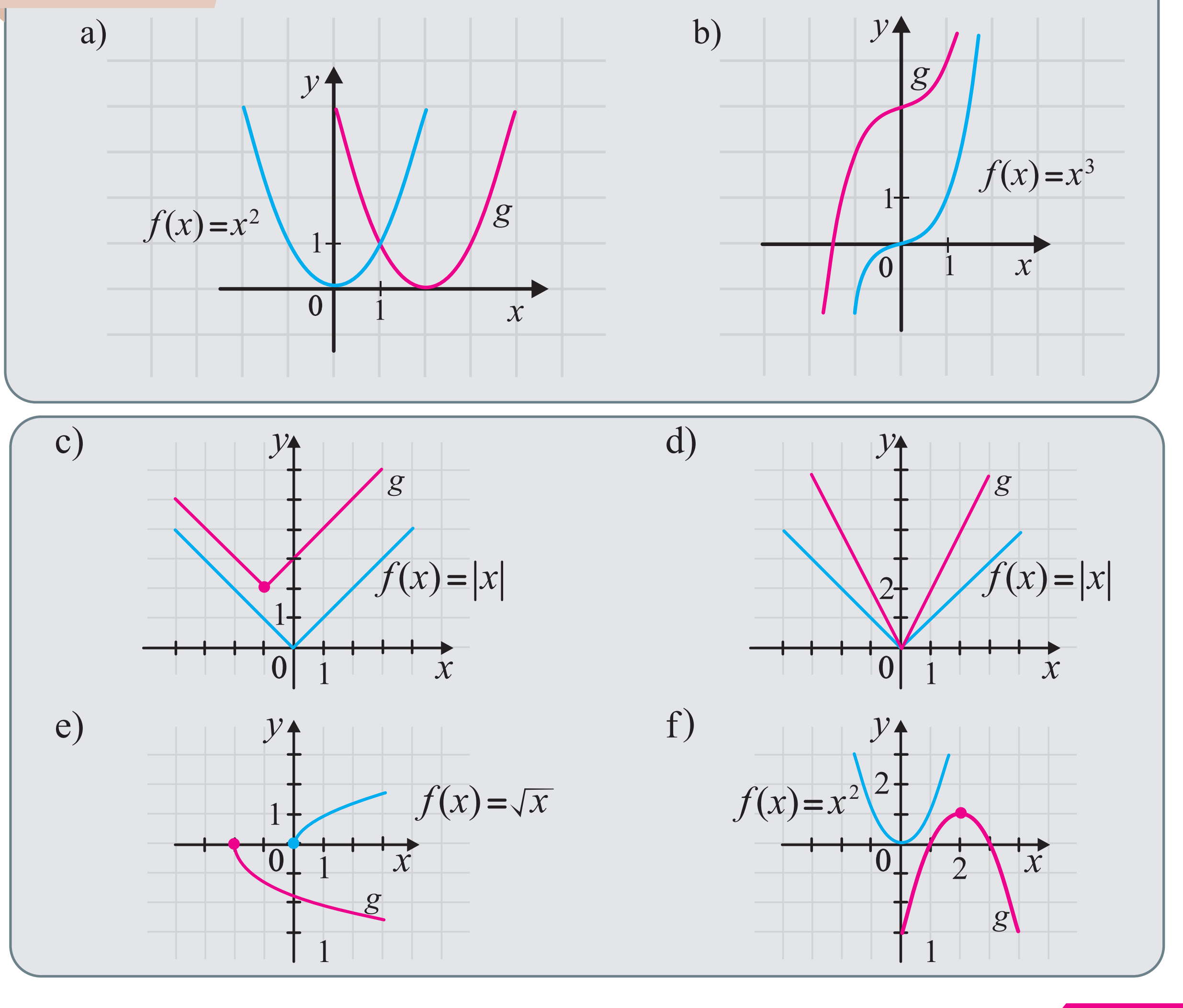
h) $f(x)=x^2$, 2 бирдик солго жылдыр жана x огуна салыштырмалуу симметриялуу чагылдыр.

i) $f(x)=x^2$, 2 барабар вертикал чоюп, бирдик ылдыйга жана 3 бирдик оңго жылдыр.

j) $f(x)=|x|$, $\frac{1}{2}$ барабар вертикал багытта кысып, 1 бирдик солго жана 3 бирдик жогоруга жылдыр.

8. f жана g функциялардын графиги берилген (16-*сүрөт*). f функциядан пайдаланып g функциянын формуласын тап.

16-сүрөт



9. $y=f(x)$ функция берилген, 17-сүрөттө төмөндөгүлөргө ылайыктуу графикти тап.

a) $y=f(x-4)$

b) $y=f(x)+3$

c) $y=2f(x+6)$

d) $y=-f(2x)$

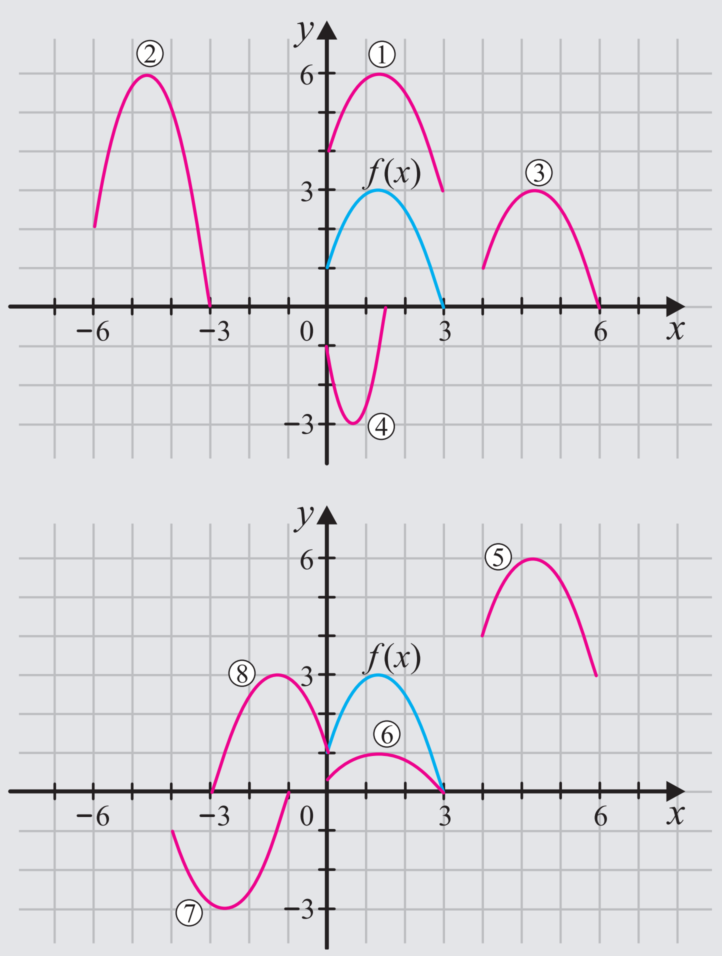
e) $y=\frac{1}{3}f(x)$

f) $y=-f(x+4)$

g) $y=f(x-4)+3$

h) $y=f(-x)$

17-сүрөт



СЫЗЫКТУУ ЖАНА КВАДРАТТЫК МОДЕЛДӨӨ

Математикалык моделдештирүү экономикалык процесстерди изилдөөнүн негизги аналитикалык куралы эсептелет.

Ушул маселени карап көрөлү.

1-маселе. Поршендүү насос эң көбү менен кандай тереңдиктен суу чыгара алышын тап (1-*сүрөт*).

Чыгаруу

Поршендүү насос трубасындагы суу мамычасынын басымы

$$\grave{u} = \rho$$

формула менен эсептелет.

Бул жерде $\rho = 1000\ kg/m^3$ – суунун тыгыздыгы, $g = 10\ m/s^2$ – суунун тыгыздыгы, h – суу мамычасынын бийиктиги.

Насос жер үстүндө жайгашканы үчүн суу мамычасынын бийиктиги *суу тереңдиги* деп жүргүзүлөт. Демек, суунун тереңдигин

$$h = \frac{p}{\rho g}$$

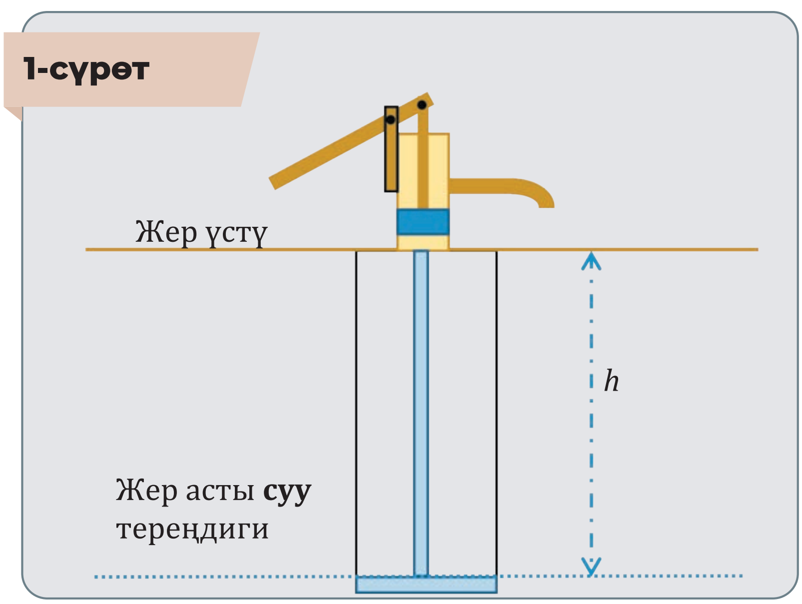
барабардыктан табуу мүмкүн.

1643-жылда италян физиги Эвангелиста Торричелли тажрыйбаларында суу устунунун басымы атмосферанын басымы $p_0 = 100\ 000\ Pa$ дан ашып кетпестиги далилденген, б.а. $p \le p_0$. Ошондуктан поршендүү насосто суунун тереңдиги

$$h = \frac{p}{\rho g} \le \frac{p_0}{\rho g} = \frac{100000}{1000 \cdot 10} = 10\ \text{m}$$

ден ашып кете албайт.

Жообу: Поршендүү насос эң көбү менен 10 *m* тереңдиктен суу чыгара алат.



1-сүрөт

Бул моделдеги өзгөрүүчүлөр биринчи даражалуу болуп өз ара сызыктуу амалдар (кошуу жана санга көбөйтүү) аркылуу байланган. Ошондуктан бул типдеги математикалык моделдер ***сызыктуу моделдер*** деп аталат. Берилген маселени сызыктуу моделдин формасына келтирүү процесси ***сызыктуу моделдөө*** деп аталат.

2-маселе. Окуучу *Oxy* координаталык тегиздигин тандап алган, ал үйүн координаттардын башы $O(0;\ 0)$ деп алды. Андан кийин ал окуган мектеп $C(4;\ 3)$ чекитинде жайгашканын билди. Ал үй менен мектептин ортосунан өткөн жолдун түз сызык бөлүгү *Ox* огун (6; 0) чекитте, *Oy* огун (0; 4) чекитте кесилишин эсептеп чыккан.

Маалым болгондой мектепте уюлдук компаниянын антеннасы орнотулган. Окуучу жолдо бара жаткан унаадагы жүргүнчүнүн уюлдук телефону антеннадан чыккан толкунду эң жакшы кабыл ала турган чекитти табууга кызыкты.

Тапшырма. Бул маселени кантип чечет элеңиз?

Чыгаруу. Албетте, мектепке эң жакын жолдун чекитинде уюлдук телефон толкунду эң жакшы кабыл алат. Бул маселени чечүү үчүн жолду (*AB*) сүрөттөгөн түз сызыктын теңдемесин түзүү жана анын мектепке эң жакын чекитинин координаталарын табуу керек. Бул үчүн биринчи айтылгандардын негизинде кырдаалдын сүрөтү тартылат (*2-сүрөткө кара*).

Анда $A(6;\ 0)$ жана $B(0;\ 4)$ чекиттери аркылуу өткөн түз сызыктын теңдемеси түзүлөт. Бул үчүн түз сызыктын

$$y = kx+b$$

теңдемесине $A(6;\ 0)$ жана $B(0;\ 4)$ чекиттердин координаталарын коюп, бул

$$0 = k\cdot 6+b$$

$$4 = k\cdot 0+b$$

барабардыктар алынат. Алардан

$$b = 4,\ \ k = -\frac{2}{3}$$

коэфициенттер табылат. Демек , (АБ) түз сызык теңдемеси

$$y = -\frac{2}{3}x+4$$

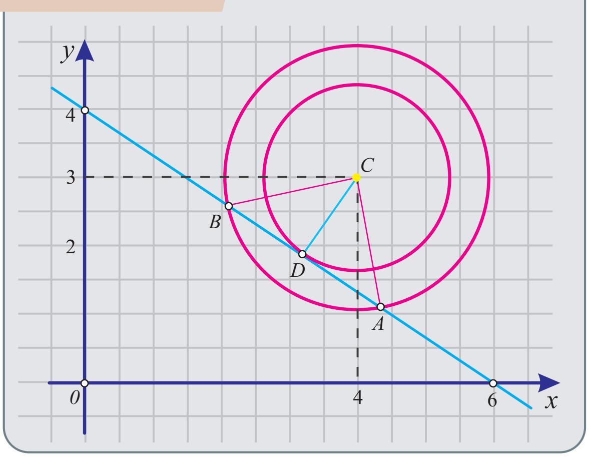
болот.

Маселенин чыгарылышы (*AB*) түз сызыктын $C(4;\ 3)$ чекитке эң жакын $D(x;\ y)$ чекитин табуудан турат. Бул абалдын математикалык модели төмөнкүдөй жазылат:

$$F = \sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2} \to min,$$

$$y = -\frac{2}{3}x+4$$

2-сүрөт



Бул моделдеги өзгөрүүчүлөр биринчи жана экинчи даражалуу болгондугу үчүн бул типдеги математикалык моделдер ***квадраттык моделдер*** деп аталат. Коюлган маселени квадраттык модел формага алып келүү процесси ***квадраттык моделдөө*** деп аталат.

МИСАЛДАР

1. Ар бир берилген тапшырманын сызыктуу моделин менен жаз:

a) Сиз велосипедди баштапкы төлөмү 10000 сумга жана саатына 5000 сумга ижарага алдыңыз.

b) Автоунаа оңдоочу жай базалык төлөмдү 50000 сум жана саатына 15000 сум төлөм белгиледи.

c) Шамдын узундугу 30 *cm*, ал саатына 1,4 *cm* ылдамдыкта күйөт.

d) Программалоо боюнча адис бир консультация үчүн $75, андан кийин саатына $35 алат.

e) Учурдагы температура 25 °C жана түн ичинде саат сайын 2 °C төмөндөп турушу күтүлүүдө.

f) Айылдын калкынын саны 6791 адамды түзөт жана жыл сайын 7 ге азаюуда.

2. Берилген жадыбалдагы функциянын сызыктуу же квадраттык экенин аныкта.

x	0	1	3	4	6
y	5	10	20	25	35

3. Топ өйдө-ылдый секирген сайын анын жеткен бийиктиги тынымсыз төмөндөйт. Төмөнкү жадыбалда убакыт боюнча секирүү бийиктигин көрсөтөт.

a) Эң ылайыктуу квадраттык функцияны тап.

b) Топтун максималдуу бийиктигин тап.

c) 2,5 секундда топтун канчалык бийиктикке жеткенин болжолдуу эсепте.

t (s)	2	2,2	2,4	2,6	3
h (дюм)	2	16	26	33	42

4. 70 метрлүү имараттын чокусунан таш ыргытылса, таштын бийиктиги убакытка жараша $h(t) = -5t^2 - 20t + 70$ квадраттык функция менен берилген, мында t секундда жана бийиктик метрде. Канча секунддан кийин таш жерге тийет?

5. Маликага бөлмөсүн тазалоо үчүн Умидадан эки эсе көп убакыт керек. Азизага бөлмөсүн тазалоо үчүн Умидадан 10 мүнөткө көбүрөөк убакытты алат. Жалпысынан алар бөлмөлөрүн тазалоого 90 мүнөт жумшашат. Малика бөлмөсүн тазалоого канча убакыт коротот?

6. Дилшат бермет алуу үчүн деңизге чүмкүдү. Анын t секундадан кийинки түшүү тереңдиги $h(t) = -4t^2 + 4t + 3$ метр болду, $t \geq 0$.

a) Берметтер кандай тереңдикте жайгашкан?

b) Дилшат берметти алуу үчүн канча убакыт сарптады?

c) Дилшат кандай бийиктиктен сууга чумкуду?

7. Жасмина көйнөк тигүүгө буюртма алды. Эгерде ал бир күндө x көйнөк тиксе, анда ал $P(x) = -x^2 + 20x$ доллар эсебинде пайда алат.

a) Эң чоң киреше алуу үчүн ал канча көйнөк тигүү керек?

b) Эң көп пайда канча доллар болот?

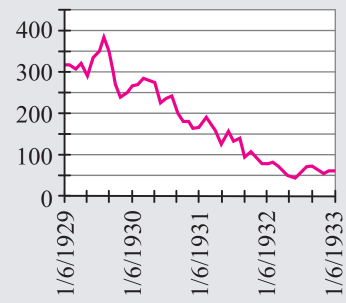
8. 2005 -жылы Зарафшандын калкы 55 000 ге жакын болгон. Ал кезде калктын саны жылына 2000 ге жакын көбөйүп турган. Зарафшандын калкынын каалаган жылдагы санын табуу үчүн сызыктуу моделди түз. 2010 жылда Зарафшандын калкы канча болгон?

ДОЛБООРДУК ИШ

Ар бир графика бир окуяны айтып берет

Эгер сүрөт миң сөзгө татыктуу болсо, анда график жок дегенде бир канча сөздөргө татыктуу. Чындыгында, график кээде окуяны көп сөздөргө караганда тезирээк жана натыйжалуурак айтип берүүсү мүмкүн. 1929- жылдагы фонд базары кулашынын жаман таасири Дов Жонес индексинин (ДЖИА) графигинен дароо көрүнөт. Ошол кездеги гезиттер кыйроонун масштабын жеткирүүнүн эффективдүү жолу катары мындай графиканы басып чыгарышкан.

1-сүрөт



2-сүрөттө жөнөкөй окуяны айтып берүү үчүн эч кандай сөздүн кереги жок. Диаграмма жөнөкөй окуяны айтып берет: бир нерсе төмөндөп кеткен – балким, соода, кирешеси же өндүрүмдүүлүгү жана жооптуу адам абдан тынчсызданып жатат.

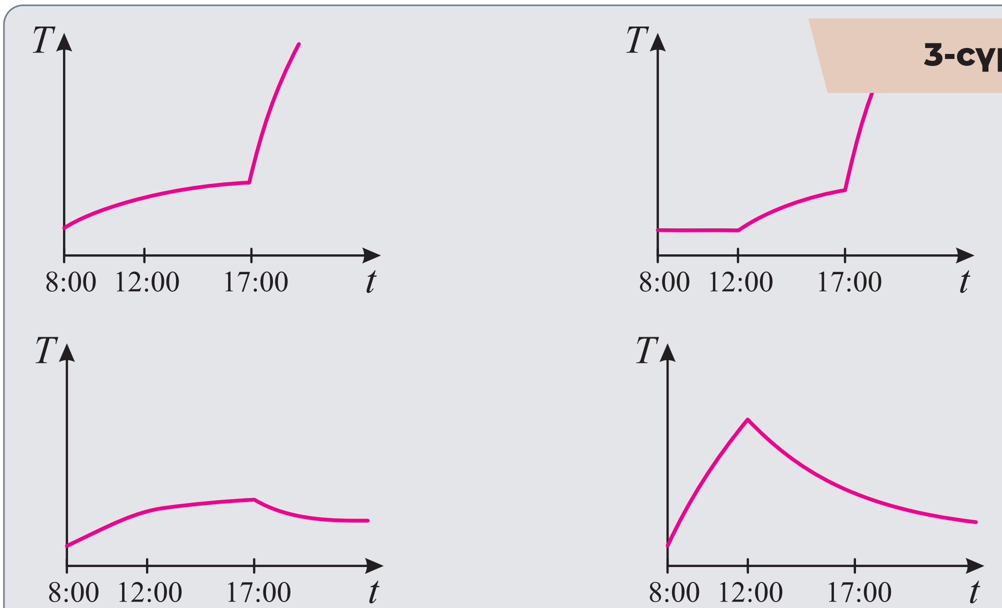
2-сүрөт

Бул долбоордун изилдөөсүндө биз графика айтып берген окуяларды окуйбуз жана окуяларды баяндаган графиканы түзөбүз.

Графиктен окуяны окуу

1. Төмөндө температуранын убакытка карата төрт графиги (саат 8:00 дон баштап) көрсөтүлгөн, алардан кийин үч окуя берилет. (3-*сүрөт*).

3-сүрөт



а) ар бир окуяны графиктердин бири менен дал келтир.

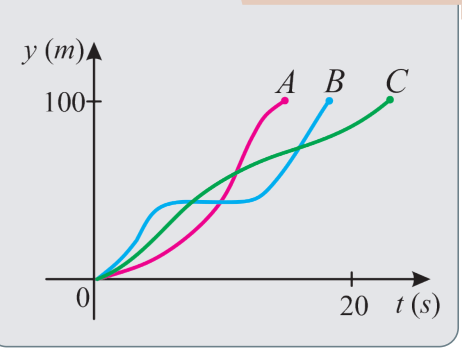
b) эч кандай окуяга дал келбеген график үчүн окшош окуяны жаз.

1-окуя	Түштө муздаткычтан этти алып, эритиш үчүн столдун үстүнө койдум. Анан үйгө келгенден кийин духовкада бышырдым.
2-окуя	Эртең менен муздаткычтан этти алып, эритиш үчүн столдун үстүнө койдум. Анан үйгө келгенден кийин духовкада бышырдым.
3-окуя	Эртең менен муздаткычтан этти алып, эритиш үчүн столдун үстүнө койдум. Мен аны унутуп калып, жумуштан кайтып келе жатып кафеден тамактандым. Акыры үйгө келип, этти муздаткычка койдум.

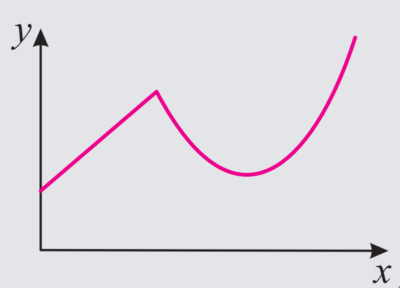
2. 100 метрге тосколдуктардан өтүп чуркоодо үч жөө күлүк катышты. Графикте чуркоо аралыгы ар бир чуркоочу үчүн убакыттын функциясы катары көрсөтүлгөн (4-сүрөт). График сизге бул жарыш жөнүндө эмнени айтып жатканын сүрөттөп бериңиз. Жарышта ким жеңди? Ар бир күлүк жарышты аяктадыбы? Сенин оюңча, B спортчуга эмне болду?

3. Төмөнкү схемага дал келген (ар кандай кырдаалды камтыган) окуя түз. (*5-сүрөт*).

4-сүрөт



5-сүрөт



2-ГЛАВА. РАЦИОНАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР ЖАНА БАРАБАРСЫЗДЫКТАР. ИРРАЦИОНАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР

- **РАЦИОНАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР**
- **РАЦИОНАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР СИСТЕМАСЫ**
- **РАЦИОНАЛДЫК БАРАБАРСЫЗДЫКТАР**
- **РАЦИОНАЛДЫК БАРАБАРСЫЗДЫКТАР СИСТЕМАСЫ**
- **ИРРАЦИОНАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР**
- **ИРРАЦИОНАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР СИСТЕМАСЫ**

РАЦИОНАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР

Негизги аныктама жана түшүнүктөр

Аныктама

$f(x)=g(x)$ көрүнүшүндөгү барабардык ***бир белгисиз теңдеме*** деп аталат (бул жерде $f(x)$ жана $g(x)$ тер белгисиз туюнтмалар).

Теңдеменин тамыры деп, белгисиздин берилген теңдемени туура барабардыкка айландыруучу маанисине айтылат.

Теңдемени чыгаруу дегенде анын бардык тамырларын табуу же анын жок экенин далилдөө дегенди билдирет.

Теңдеменин бардык тамырларынын көптүгү ***теңдеменин чечими*** деп аталат.

Эгерде x белгисиздин эч бир мааниси теңдеменин тамыры болбосо, анда "***теңдеменин чечими жок***" же "***теңдеменин чечими – бош көптүк***" сөзү колдонулут, аны $x\in\varnothing$ катары да жазса болот.

1-мисал. $(x+3)(2x-1)(x-2)=0$ теңдемени чыгар.

Чыгаруу. Бул теңдеменин оң жагы нөлгө барабар, ал эми сол жагы 3 туюнтманын көбөйтүндүсүнөн турат. Көбөйтүүчүлөрдүн жок дегенде бири нөл болгондо гана көбөйтүндү нөлгө барабар болгондугу үчүн, ар бир көбөйтүүчү нөлгө барабар болгон абалды көрөлү: $x+3=0$, $2x-1=0$, $x-2=0$. Пайда болгон ушул теңдемелерден теңдеменин тамырлары

$x_1=-3,\ x_2=\dfrac{1}{2},\ x_3=2$ экендигин аныктап алабыз.

2-мисал. Тамырлары $0, -1$ жана $\sqrt{2}$ ге барабар болгон теңдеме түз.

Чыгаруу. Ар түрдүү көрүнүштөгү теңдемелер жооп катарында берилүүсү мүмкүн. Эң жөнөкөй теңдеме $x(x+1)\left(x-\sqrt{2}\right)=0$ көрүнүшүндө болоорун эскертип өтөбүз.
Бул сандар төмөнкү теңдеменин тамыры да боло алат:

$$(x^2+x^3)\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x^2+3\right)=0$$

Аныктама

Эгер $f(x)=g(x)$ теңдеменин бардык тамырлары $f_1(x)=g_1(x)$ теңдеменин тамырлары болсо, жана тескерисинче, $f_1(x)=g_1(x)$ теңдемесинин бардык тамырлары $f(x)=g(x)$ теңдеменин тамырлары болсо, б.а. алардын чечимдери дал келсе, мындай теңдемелер ***тең күчтүү теңдемелер*** деп аталат.

3-мисал. $3x-6=0$ жана $2x-1=3$ теңдемелерди тең күчтүүлүгүн текшергиле.

Чечүү. $3x-6=0$ жана $2x-1=3$ теңдемелер тең күчтүү, анткени ар биринин тамыры $x=2$ ден турат.

Чечими бош көптүк болгон ар кандай эки теңдеме тең күчтүү болот.

Тең күчтүү теңдемелер төмөнкүдөй белгиленет: $3x-6=0 \Leftrightarrow 2x-1=3$.

Теңдеме төмөнкү абалдарда өзүнө тең күчтүү болгон теңдемеге өтөт:

а) Теңдеменин кандайдыр бир мүчөсү барабардыктын бир бөлүгүнөн экинчи бөлүгүнө карама-каршы белги менен которулганда. Мисалы: $f(x)=g(x)+t(x) \Leftrightarrow f(x)-g(x)=t(x)$.

b) Теңдеменин эки жагын нөлдөн айырмалуу санга көбөйткөндө же бөлгөндө.

Бүтүн рационалдык теңдемелер

Эгер $f(x)$ жана $g(x)$ функциялар бүтүн рационалдык туюнтмалар менен берилген болсо,

$$f(x)=g(x)$$

теңдеме, ***бүтүн рационалдык теңдеме*** деп аталат.

Мындай теңдеменин аныкталуу областы бардык чыныгы сандар көптүгү болот.

Аныктама

$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0,\ a_0\neq 0$ Төмөнкү көрүнүштөгү теңдеме **стандарт көрүнүштөгү *n*-даражалуу бүтүн рационалдык теңдеме** деп аталат. Бул жерде a_0, a_1, ..., a_{n-1} коэффициенттер, a_n эркин мүчө, $n \in N$.

Эгер $a_0 = 1$ болсо, $x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0$ теңдеме **келтирилген *n*-даражалуу бүтүн рационалдык теңдеме** деп аталат.

Белгилүү болгондой, *n*-даражалуу көп мүчө *n* ден көп болбогон тамырларга ээ болушу мүмкүн, демек, ар бир стандарттык көрүнүшүндөгү *n*-даражалуу бүтүн рационалдык теңдеме да n ден көп болбогон тамырларга ээ болот.

Теорема. Бүтүн коэффициенттүү келтирилген бүтүн рационалдык теңдеменин тамырлары бүтүн сан болсо, алар эркин мүчөнүн бөлүүчүлөрү болот.

4-мисал. $x^4+2x^3=11x^2-4x-4$ теңдемени чыгаргыла.

Чыгаруу. Алгач аны стандарттык көрүнүшкө келтиребиз: $x^4+2x^3-11x^2+4x+4=0$.

Бул теңдеменын бүтүн тамырлары бар экендигин текшерүү үчүн эркин мүчө 4 түн бардык бөлүүчүлөрүн жазып алабыз: $\pm1, \pm2, \pm4$. Бул сандарды удаалаш теңдемеге коюп көрүп, $x_1=1$ жана $x_2=2$ сандар теңдеменин тамырлары болушун аныктап алабыз. Демек, $x^4+2x^3-11x^2+4x+4$ көп мүчө $(x-1)(x-2)=x^2-3x+2$ көп мүчөгө бөлүнөт.

$$\begin{array}{r|l}
x^4+2x^3-11x^2+4x+4 & x^2-3x+2 \\ \cline{2-2}
-\ x^4-3x^3+2x^2 & x^2+5x+2 \\ \cline{1-1}
5x^3-13x^2+4x+4 & \\
-\ 5x^3-15x^2+10x & \\ \cline{1-1}
2x^2-6x+4 & \\
-\ 2x^2-6x+4 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Теңдемени $(x-1)(x-2)\left(x^2+5x+2\right)=0$ көрүнүштө жазып алабыз.

Алынган теңдеме берилген теңдемеге тең күчтүү. Ар бир көбөйтүүчүнү нөлгө теңдештирип, теңдеменин тамырларын табабыз.

Жообу: $x_1 = 1;\ \ x_2 = 2,\ \ x_{3,4} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}.$

5-мисал. Теңдемени чыгаргыла: $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$.

Чыгаруу. Эркин мүчөнүн бөлүүчүлөрү: ±1, ±3, ±5. Ушулардан 1 саны теңдеменин тамыры экендигин оңой эле көрөбүз. Демек, $x^3 - 3x^2 - 13x + 15$ көп мүчөнү көбөйтүүчүлөргө төмөнкүдөй ажыратуу мүмкүн:

$$x^{\text{ù}} - x \quad - 2x \quad + 2x - 15x + 15 = 0$$

$$x^2(x-1) - 2x(x-1) - 15(x-1) = 0$$

$$(x-1)(x^2 - 2x - 15) = 0$$

$$(x-1)(x-5)(x+3) = 0$$

Бул көбөйтүүчүлөрдү ар бирин нөлгө теңдештирип, теңдеменин тамырлары $x_{\text{ù}} = 1,\ x \ = 5,\ x \ = -3$ кө барабар экендигин табабыз.

Жообу: $x_{\text{ù}} = 1,\ x \ = 5,\ x \ = -3.$

6-мисал. $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$ теңдемени чыгаргыла.

Чыгаруу. Берилген теңдеме 4-даражалуу кайтпас (симетриялык) теңдеме. Аны чыгаруу үчүн теңдеменин эки тарабын $x^2 \neq 0$ гө бөлөбүз жана ага тең күчтүү теңдемени пайда кылабыз.

$$x^2 - 5x + 8 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 8 = 0$$

$x + \dfrac{1}{x} = t$ белгилөөнү киритебиз. Бул абалда

$$t^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2 \text{ болот.}$$

Берилген $t^2 - 5t + 6 = 0$ теңдемени пайда кылабыз. Бул теңдеменин чечимдери: $t_1 = 2$ жана $t_2 = 3$. Бул маанилерди белгилөөгө кайра коюп, берилген теңдеменин чечими $x + \dfrac{1}{x} = 2$ va $x + \dfrac{1}{x} = 3$ теңдемелердин чечими бирикмесине барабар болуусун көрөбүз.

Бул теңдемелерди чыгарып, $x_1 = 1, x_2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ va $x_3 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ экенин табабыз.

Жообу: $x_1 = 1, x_2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}, x_3 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}.$

7-мисал. $3x^3 + 4x^2 + 4x + 3 = 0$ теңдемени чыгар.

Чыгаруу. Берилген теңдеме 3-даражалуу кайтпас (симметриялуу) теңдеме. Аны чыгаруу үчүн алгач көбөйтүүчүлөргө ажыратабыз жана ага тең күчтүү теңдемени пайда кылабыз.

$$3(x^3 + 1) + 4x\,(x + 1) = 0$$

$$(x + 1)(\,3x^2 - 3x + 3 + 4x) = 0$$

$$(x + 1)(\,3x^2 + x + 3) = 0.$$

Бул теңдеменин чечими төмөнку 2 теңдеменин чечими бирикмесине барабар.

$$x + 1 = 0 \quad \text{va} \quad 3x^2 + x + 3 = 0.$$

1-теңдеменин чечими $x = -1$, 2-теңдеме болсо чыныгы чечимге ээ эмес.

Жообу: $x = -1$.

Бөлчөк-рационалдык теңдемелер

$\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ көрүнүшүнө келтирүү мүмкүн болгон теңдемелерге ***бөлчөк-рационалдык теңдемелер*** деп аталат (бул жерде $f(x)$ жана $g(x)$ тер x белгисиз көп мүчөлөр).

$\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ көрүнүшүндөгү рационал теңдеменин **аныкталуу областы** $g(x) \neq 0$.

Рационалдык теңдемелерди чыгаруунун кадамдары:

- теңдемедеги бардык туюнтмалар барабардыктын сол тарабына өткөрүлөт;
- бардык туюнтмалар жалпы бөлүмгө келтирилет;
- теңдеме $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ көрүнүшкө келтирилет;
- алымынын нөлдөрү табылат;
- аныкталуу областы табылат;
- алымынын аныкталуу областына тиешелүү болгон нөлдөрү теңдеменин тамырлары болот.

Же $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ рационалдык теңдеменин чечимин табуу үчүн ал төмөнку $\begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$ тең күчтүү система көрүнүшүндө жазып алынат жана чыгарылат.

Кээде бир теңдемеден ага тең күчтүү теңдемеге өтүүдө четки тамырлар пайда болушу мүмкүн, мисалы, төмөнку теңдемени карайлы: $\dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1} = 0.$

Бөлчөктүн алымын нөлгө теңдейбиз:

$$x^2 + x - 2 = 0 \ \Rightarrow \ x_1 = -2,\ x_2 = 1.$$

Бул теңдеменин аныкталуу областы $x \neq 1$, б.а. $x = 1$ маани берилген теңдеменин чечими боло албайт, демек, $x = 1$ четки тамыр болот.

8-мисал. Теңдеменин тамырын тап: $\frac{2x+3}{x-1}=0$.

Чыгаруу. $\begin{cases} 2x+3=0 \\ x-1\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x=-3 \\ x\neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1,5 \\ x\neq 1 \end{cases}$

Жообу: $x=-1,5$.

9-мисал. Теңдемени чыгаргыла: $\frac{4x+4}{3(x+2)-3}=0$.

Чыгаруу. $\begin{cases} 4x+4=0 \\ 3(x+2)-3\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x=-4 \\ 3x+6-3\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x\neq -1 \end{cases}$

көрүнүп тургандай, x тын мааниси -1 ге барабар болушу мүмкүн эмес.

Жообу: $x\in\varnothing$.

10-мисал. Теңдеменин тамырын тап: $\frac{-2x-4}{x^2-4}=\frac{x+5}{x-2}$.

Чыгаруу. Бардык туюнтмаларды барабардыктын сол тарабына өткөрөбүз жана жалпы бөлүмгө келтиребиз.

$$\frac{x+5}{x-2}+\frac{2x+4}{x^2-4}=0\Rightarrow\frac{(x+5)(x+2)+2x+4}{x^2-4}=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{x^2+7x+10+2x+4}{x^2-4}=\frac{x^2+9x+14}{x^2-4}=0$$

Бөлчөк-рационалдык туюнтманын алымын нөлгө теңдейбиз жана нөлдөрүн табабыз. Виет теоремасынан пайдаланабыз.

$$x^2+9x+14=0\Rightarrow x=-2;\, x=-7$$

Аныкталуу областы $x^2-4=(x-2)(x+2)\neq 0\Rightarrow x\neq -2; x\neq 2$

Көрүнүп тургандай , теңдеменин бир эле тамыры бар: $x=-7$.

Жообу: $x=-7$.

Көңүл бургула! Бөлчөк-рационалдык теңдемени чыгарууда ар дайым алымынын нөлдөрүн теңдеменин аныкталуу областына тиешелүү экендигин текшер.

11-мисал. Теңдемени чыгаргыла: $\frac{(x^2-x-56)(x-3)}{x^2+5x+6}=0$.

Чыгаруу. Берилген теңдеме бөлчөк-рационалдык теңдеме. Алгач алымынын нөлдөрүн табабыз.

$$(x^2-x-56)(x-3)=0\Rightarrow x=3;\quad x^2-x-56=0$$
$$D=(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-56)=225=15^2$$
$$x_{1,2}=\frac{1\pm 15}{2}\Rightarrow x_1=8;\, x_2=-7.$$

Алымынын 3 нөлүн таптык: $x_1=8$; $x_2=-7$; $x_3=3$.

Бул нөлдөрдү берилген теңдеменин бөлүмүндөгү туюнтмага коюп текшеребиз жана алардын бөлүмдөрүнүн нөлдөрү болбостугуна ишенич пайда кылабыз.

Жообу: $x_1=8$; $x_2=-7$; $x_3=3$.

12-мисал. Теңдеменин тамырларын тапкыла.

$$\frac{2}{(x-2)(x+2)}-\frac{1}{x(x-2)}=\frac{4-x}{x(x+2)}$$

Чыгаруу. Барабардыктын оң тарабындагы туюнтманы сол тарапка өткөрөбүз:

$$\frac{2}{(x-2)(x+2)}-\frac{1}{x(x-2)}-\frac{4-x}{x(x+2)}=0$$

жана жалпы бөлүмгө келтиребиз:

$$\frac{2x-(x+2)-(4-x)(x-2)}{x(x-2)(x+2)}=0$$

Алымындагы кашааларды ачып, квадраттык теңдемеге келтиребиз:

$$\frac{2x-x-2-4x+x^2+8-2x}{x(x-2)(x+2)}=0\Rightarrow\frac{x^2-5x+6}{x(x-2)(x+2)}=0$$

Алымынын нөлдөрүн табабыз:

$$x^2-5x+6=0\Rightarrow D=(-5)^2-4\cdot6=1,\ x_{1,2}=\frac{5\pm1}{2}\Longrightarrow x_1=2;\ \ x_2=3.$$

x тын табылган маанилерин берилген теңдеменин бөлүмүндөгү туюнтмага коюп текшеребиз. $x=2$ маани бөлүмдөгү туюнтманы нөлгө айлантыргандыгы үчүн четки тамыр болот. Демек, теңдеме бир гана $x=3$ тамырга ээ экен.

Жообу: $x=3$.

13-мисал. Теңдемени чыгаргыла: $x^2+x+1=\dfrac{15}{x^2+x+3}$.

Чыгаруу. $x^2+x+1=t$ белгилөө киритебиз, теңдеме төмөнкү көрүнүшкө келет:

$$t=\frac{15}{t+2}$$

$t\neq-2$ болушун эсепке алып, төмөнкү теңдемени чыгарабыз:

$$t(t+2)=15$$

$$t^2+2t-15=0$$

$$t_1=-5;\ t_2=3$$

t нын ордуна коюп, $x^2+x+1=-5$ жана $x^2+x+1=3$ теңдемелерге ээ болдук. Алардын ар бирин өзүнчө чыгарабыз:

$x^2+x+6=0$ $\Rightarrow$ чыныгы тамыры жок; $x^2+x-2=0$ $\Rightarrow$ $x_1=-2;\ x_2=1$.

Жообу: $x_1=-2;\ x_2=1$.

Тексттүү маселелер чечүүдө рационалдык теңдемелер иштетилиши мүмкүн.
Төмөндө аракет жана жумушка карата маселелер рационалдык теңдеме көрүнүшүндө моделдештирип чечилген.

Аракетке карата маселе

Вертолёт алгач шамалдын багытында 120 *km* аралыкты учуп өттү, андан кийин артка кайтты. Бул үчүн 6 саат убакыт коротту. Эгер вертолёттун шамалсыз абадагы ылдамдыгы 45 *km/h* ка барабар болсо, шамалдын ылдамдыгын тап.

Чыгаруу. Шамалдын ылдамдыгын x *km/h* менен белгилейлик. Анда шамал багыты боюнча вертолёттун ылдамдыгы $(45 + x)$ *km/h* жана шамалга каршы багытта болсо $(45 - x)$ *km/h* ка барабар болот. Маселенин шарты боюнча, вертолёт бардыгы 6 саат убакыт сарптаган. Аралыкты ылдамдыкка бөлүп кошсок, бардык убакытка барабар болот.

$$\frac{120}{45+x}+\frac{120}{45-x}=6$$

Бөлчөк-рационалдык теңдеме пайда болду:

$$\frac{120}{45+x}+\frac{120}{45-x}-6=0$$

$$\frac{120(45-x)+120(45+x)-6(45+x)(45-x)}{(45+x)(45-x)}=0$$

Алымын жөнөкөйлөштүрөбүз жана нөлгө теңдеп чыгарабыз:

$$6x^2-1350=0$$

$$x^2=225$$

$$x_1=-15;\ x_2=15$$

Ылдамдык терс маани кабыл кылбагандыгы үчүн $x=-15$ тамыр боло албайт. Демек, шамалдын ылдамдыгы 15 *km/h*.

Жообу: шамалдын ылдамдыгы 15 *km/h*.

Жумушка карата маселе

Эки тракторчу биргеликте 4 күндө талааны айдап бүтүрүштү. Эгер 1-тракторчуга талааны өзү айдашы үчүн 2-тракторчуга салыштырмалуу 6 күн аз убакыт керек болсо, ар бир тракторчу ушул жумушту канча күндө аткарат?

Чыгаруу. 1-тракторчу талааны х күндө айдасын. Анда 2-тракторчу ушул талааны $(x + 6)$ күндө айдайт. Демек, 1-тракторчу 1 күндө талаанын $\frac{1}{x}$ бөлүгүн, 2-тракторчу болсо $\frac{1}{x+6}$ бөлүгүн айдайт. Маселенин шартына көрө, ушул талааны алар биргеликте 4 күндө айдайт. Б.а., экөө 1 күндө талаанын $\frac{1}{4}$ бөлүгүн айдайт.

Теңдемени түзөбүз жана чыгарабыз: $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+6}=\frac{1}{4}$

$$\frac{4(x+6)+4x-x(x+6)}{4x(x+6)}=0$$

$$\frac{-x^2+2x+24}{4x(x+6)}=0$$

Алынган рационалдык теңдеме төмөнкү системага тең күчтүү.

$$\begin{cases} x^2-2x-24=0; \\ 4x(x+6)\neq 0; \end{cases} \qquad D=(-2)^2-4\cdot(-24)=100;\ x_{1,2}=\frac{2\pm 10}{2}\Rightarrow x_1=6;\ \ x_2=-4$$

Күндөр саны терс сан болбойт, ошондуктан $x=-4$ жооп боло албайт. Демек, 1-тракторчу талааны 6 күндө, 2-тракторчу болсо $x+6=6+6=12$ күндө аткарат.

Жообу: 1-тракторчу 6 (күн), 2-тракторчу 12 (күн).

МИСАЛДАР

Бөлчөк-рационалдык теңдемелерди чыгар (1–10).

1. $\frac{1}{x}-\frac{2x}{x+1}=0$

2. $\frac{2y-5}{y+5}=\frac{3y+21}{2y-1}$

3. $\frac{5x-7}{x-3}=\frac{4x-3}{x}$

4. $\frac{x+1}{2(x-1)}=\frac{9}{2(x+4)}+\frac{1}{x-1}$

5. $\frac{2x}{x-1}-\frac{1}{x+1}=\frac{4x}{x^2-1}$

6. $\frac{x^2-2x}{x-2}=x^2-2$

7. $\frac{7}{2x+9}-6=5x$

8. $\frac{15}{x-2}=\frac{14}{x}+1$

9. $\frac{4}{x-2}+\frac{4}{x+2}=\frac{3}{2}$

10. $\frac{3x}{x^2-1}=2\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)$

Бөлчөк-рационалдык теңдемелерди чыгар (11–30).

11. $\frac{1}{x^2-12x+36}+\frac{12}{36-x^2}=\frac{1}{x+6}$

12. $\frac{8c-3}{4c^2-2c+1}+\frac{6}{8c^3+1}=\frac{2}{2c+1}$

13. $\frac{3x-2}{x-1}+\frac{x-4}{x+3}=\frac{3x^2+1}{(x-1)(x+3)}$

14. $\frac{2-3x}{x+1}-\frac{4}{3}\cdot\frac{x+1}{2-3x}=\frac{4}{3}$

15. $\frac{x-49}{x+6}+\frac{2x+50}{x+5}=2$

16. $\frac{(x+2)^2-9}{x-1}\cdot(x-5)=-24$

17. $(x+4)(x^2-1)=4x^2+24x-\frac{4x^2+20x}{5x+x^2}$

18. $\frac{25x-21}{2x^2+5x-12}=\frac{x-4}{2x-3}-\frac{2x-3}{x+4}$

19. $\frac{3}{x^2-2x+1}+\frac{2}{1-x^2}=\frac{1}{1+x}$

20. $\frac{6}{x-1}+\frac{6}{(x-1)(x-3)}+\frac{3}{3-x}=7$

21. $\frac{x^5-4x^3}{x-2}=16+2x^3$

22. $\frac{1}{(x-2)(x-3)}-\frac{9}{(x+2)(x-7)}=1$

23. $x^2+x+1=\frac{15}{x^2+x+3}$

24. $\frac{x^2+2}{3x-2}-\frac{3x-2}{x^2+2}=2\frac{2}{3}$

25. $x^2-5x+\frac{24}{x^2-5x}+10=0$

26. $\frac{x^2+1}{x}+\frac{x}{x^2+1}=2\frac{1}{2}$

27. $\frac{2}{x^2+3}+\frac{4}{x^2+7}=1$

28. $\frac{1}{x(x+2)}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{1}{12}$

29. $\frac{x^2-3x-1}{x^2-2x+4}=\frac{x^2-2x}{x^2-x+1}$

30. $\frac{x^2-4x-1}{x^2-3x+5}=\frac{x^2-3x+1}{x^2-2x+2}$

31. Эки шаар арасындагы аралык дарыя жолу менен 80 *km*. Анвар кемеде ушул шаарлардын биринен экинчисине барып келүү үчүн 8 саат 20 минут убакыт коротту. Дарыя агымынын ылдамдыгы 4 *km/h* болсо, кеменин тынч суудагы ылдамдыгын тапкыла.

32. Эки жумушчу бир жумушту бирге аткарышса, 12 күндө түгөтөт. Эгер биринчиси иштеп, жарымын бүтүргөндөн кийин анын ордуна экинчиси иштесе, анда жумуш 25 күндө бүтөт. Бул жумушту ар бир жумушчу канча күн жалгыз аткарат?

33. “A” трактору 3 күндө 7 *ha*, “B” трактору болсо 2 күндө 17 *ha* жерди айдай алат. Чарбада 2 “A” жана 1 “B” трактору бар. Эгерде бул тракторлор чогу иштесе, 237 *ha* жерди канча күндө айдай алат?

34. Автомобиль жолдун “Радар" орнотулбаган 80 километрлүү бөлүгүндө 120 *km/h*, радар орнотулган 25 *km* бөлүгүндө 50 *km/h*, 35 *km* бөлүгүндө 70 *km/h* ылдамдык менен аракеттенди. Анын бүтүн жол бою орточо ылдамдыгын тапкыла.

35. Бир жумушту биринчи жумушчунун жалгыз өзү a күндө аткарат, экинчи жумушчу ушул жумушту аткаруу үчүн b күн артык убакыт коротсо, үчүнчү жумушчунун жалгыз өзү b күн тезирээк аткара алат. Ушул жумушту үч жумушчу бирге аткарса, канча күндө аткарат?

36. Дарыя боюнда жайгашкан A жана B шаарлар ортосундагы аралык 96 *km*. Катерде A шаардан B шаарга барып келүү үчүн 10 саат сарпталы. Эгерде дарыя агымынын ылдамдыгы 4 *km/h* болсо, катердин тынч абалда турган суудагы ылдамдыгын тап.

РАЦИОНАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР СИСТЕМАСЫ

Эки өзгөрмөлүү эки теңдеме катышкан системаларды чыгаруу бизге маалым болгондой алгебралык кошуу, ордуна коюу, өзгөрүүчүнү алмаштыруу усулдарына таянат. Мында катышкан бөлчөк-рационалдык туюнтмалардын бөлүмдөрү нөлгө барабар болбостугун айтып өтөбүз.

Ордуна коюу усулу

1-мисал. Төмөнкү теңдемелер системасын ордуна коюу усулунан пайдаланып чыгар.

$$\begin{cases} 3xy = 21 \\ x-8y=-1 \end{cases}$$

Чыгаруу. 2-теңдемеден $x - 8y = -1 \Rightarrow x = 8y - 1$.

x тын алынган бул маанисин 1-теңдемеге коюп, $3(8y-1)y=21$ теңдемеге келебиз. Бул теңдемени чыгарып,

$$(8y-1)y=7$$

$8y^2 - y - 7 = 0 \Rightarrow y_1=-\frac{7}{8}; y_2=1$ маанилерди табабыз жана аларды $x = 8y - 1$ ге коюп $\Rightarrow x_1 = -8; x_2 = 7$ экендигин аныктайбыз.

Жообу: $\left(-8;-\frac{7}{8}\right),(7;1)$.

2-мисал. Ордуна коюу усулунан пайдаланып $\begin{cases} 2x^2+y=4 \\ x^4+y^2=16 \end{cases}$ теңдемелер системасын чыгар.

Чыгаруу.

$$y=4-2x^2.$$

$$x^4+\left(4-2x^2\right)^2=16$$

$$x^4+16-16x^2+4x^4=16$$

$$5x^4-16x^2=0$$

$$x^2\left(5x^2-16\right)=0, \qquad \Rightarrow x_1=0,\ x_2=\frac{4}{\sqrt{5}},\ x_3=-\frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow\ y_1=4;\ \ y_2=-\frac{12}{5};\ \ y_3=-\frac{12}{5}$$

Жообу: $(0;4)$, $\left(\frac{4}{\sqrt{5}};-2\frac{2}{5}\right),\left(-\frac{4}{\sqrt{5}};-2\frac{2}{5}\right)$.

Алгебралык кошуунун усулу

3-мисал. Ушул теңдемелер системасын чыгар: $\begin{cases} x^2+y=27 \\ x-y=3 \end{cases}$

Чыгаруу. Эки теңдемеде y белгисиз карама-каршы белгилүү коэффициент менен катышкан, ошондуктан бул теңдемелердин мүчөлөрүн кошобуз.

$$+\begin{cases} x^2+y=27 \\ x-y=3 \end{cases}$$
$$x^2+x=30$$

$x^2+x-30=0$ бир белгисиз квадраттык теңдемеге келтирип алдык.

$$x_1=\frac{-1-11}{2}=-6 \Rightarrow y_1=-9$$
$$x_2=\frac{-1+11}{2}=5 \Rightarrow y_2=2$$

Жообу: (–6; –9), (5; 2).

4-мисал. Теңдемелер системасын алгебралык кошуу усулу жардамында чыгар.

$$\begin{cases} x^3-y^3-3x^2+3y^2x=-2 \\ x^2-x^2y=1. \end{cases}$$

Чыгаруу. 2-теңдемени 3 кө көбөйтүп 1-теңдемеге кошсок:

$$+\begin{cases} x^3-y^3-3x^2+3y^2x=-2 \\ 3x^2-3x^2y=3 \end{cases}$$

1-теңдеме айырманын кубу формуласына келет: $x^3-y^3-3x^2y+3y^2x=1$.

Мындан:
$$\begin{cases} (x-y)^3=1 \\ x^2-x^2y=1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x-y=1 \\ x^2-x^2y=1 \end{cases}$$

Эми болсо, ордуна коюу усулунан пайдаланабыз жана системаны чыгарабыз.

$$\begin{cases} y=x-1 \\ x^2-x^2(x-1)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x-1 \\ x^2-x^3+x^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x-1 \\ x^3-2x^2+1=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \begin{cases} y=x-1 \\ (x-1)(x^2-x-1)=0 \end{cases}$ $\Rightarrow x_1=1;\quad x_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2};\quad x_3=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, бул маанилерди $y=x-1$ теңдемеге коюп, $y_1=0,\ y_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\ y_3=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ экендигин табабыз.

Жообу: $(1;0),\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right),\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$.

Өзгөрүүчүнү алмаштыруу усулу

5-мисал. Теңдемелер системасын чыгар:

$$\begin{cases} x+xy+y=11 \\ x^2y+xy^2=30. \end{cases}$$

Чыгаруу. Төмөнкүдөй белгилөө киритебиз.

$$x+y=a \quad \text{va} \quad xy=b$$

Ошондо система төмөнкү көрүнүшкө келет:

$$\begin{cases} a+b=11 \\ ab=30 \end{cases}$$

Бул системаны чечип, $a_1=6,\ b_1=5$ va $a_2=5,\ b_2=6$ аларды аныктайбыз. Эми төмөнкү системаларды чыгарабыз:

$$\begin{cases} x+y=6 \\ xy=5 \end{cases} \text{ жана } \begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}$$

Алардын тамырларынан түзүлгөн көптүк теңдемелер системасынын чечими болот.

Жообу: $(5;1)$, $(1;5)$, $(2;3)$, $(3;2)$.

МИСАЛДАР

Теңдемелер системасын чыгар.

1. $\begin{cases} y-x^2+x=1 \\ x=y-4 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4x^2-y=2 \\ 3x-2y=-1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 4x+3y=-1 \\ 2x^2=y+11 \end{cases}$

4. $\begin{cases} xy=20 \\ x-4y=2 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^2+y^2-2xy=1 \\ x+y=3 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x-y=10 \\ x^2-y^2=20-xy \end{cases}$

7. $\begin{cases} x+y=8 \\ x^2+y^2=36 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x\cdot y=300 \\ x+y=35 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x^2+y^2=74 \\ x+y=12 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x+y=8 \\ xy=15 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x+y=1 \\ x^3+y^3=19 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x^3+8y^3=35 \\ x^2-2xy+4y^2=7 \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dfrac{xy}{x+2y}+\dfrac{x+2y}{xy}=2 \\ \dfrac{xy}{x-2y}+\dfrac{x-2y}{xy}=4 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x^2-xy+\dfrac{1}{4}y^2+x-\dfrac{1}{2}y=2 \\ \dfrac{1}{4}x^2+xy+y^2+2y+x=3 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x^2-xy+y^2=19 \\ x^2+xy+y^2=49 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x^2+y^2=x+y \\ x^4+y^4=\dfrac{1}{2}(x+y)^2 \end{cases}$

17. $\begin{cases} \dfrac{x-y}{x+y}+6\dfrac{x+y}{x-y}=5 \\ xy=-2 \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dfrac{2x}{y}+\dfrac{3y}{x}+6=\dfrac{3}{xy} \\ \dfrac{6y}{x}+\dfrac{4x}{y}-1=\dfrac{45}{xy} \end{cases}$

19. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5 \\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=13 \end{cases}$

20. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{xy}+\dfrac{xy}{x+y}=2 \\ \dfrac{x-y}{xy}+\dfrac{xy}{x-y}=\dfrac{5}{2} \end{cases}$

21. $\begin{cases} x^3-y^3=61(x-y) \\ (x+1)(y+1)=12 \end{cases}$

22. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=\dfrac{9}{2} \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

23. $\begin{cases} x^4+y^4=17(x+y)^2 \\ xy=2(x+y) \end{cases}$

24. $\begin{cases} x^2+y^2=x-y \\ x^4+y^4=\dfrac{1}{2}(x-y)^2 \end{cases}$

25. $\begin{cases} x^2(1+y+y^2+y^3)=160 \\ x^2(1-y+y^2-y^3)=-80 \end{cases}$

26. $\begin{cases} 2x^2y^2-3y^2+5xy-6=0 \\ 3x^2y^2-4y^2+3xy-2=0 \end{cases}$

27. $\begin{cases} x^3y+xy^3=\dfrac{10}{9}(x+y)^2 \\ x^4y+xy^4=\dfrac{2}{3}(x+y)^3 \end{cases}$

28. $\begin{cases} \dfrac{x(y^2+1)}{x^2+y^2}=\dfrac{3}{5} \\ \dfrac{y(x^2-1)}{x^2+y^2}=\dfrac{4}{5} \end{cases}$

29. $\begin{cases} \dfrac{y^2}{x}+\dfrac{x^2}{y}=12 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3} \end{cases}$

30. $\begin{cases} xy=6 \\ yz=15 \\ zx=10 \end{cases}$

РАЦИОНАЛДЫК БАРАБАРСЫЗДЫКТАР

Рационалдык барабарсыздыктарды чечүү рационалдык теңдемелерди чечүү сыяктуу, алгач барабарсыздыкты жөнөкөй тең күчтүү барабарсыздыкка келтирүү аркылуу аткарылат. Мында төмөнкү эрежелерге көңүл бурулат:

1-эреже. Барабарсыздыктын каалагандай мүчөсүн барабарсыздыктын бир бөлүгүнөн экинчи бөлүгүнө карама-каршы белги менен өткөрүү мүмкүн.

2-эреже. Барабарсыздыктын эки бөлүгүн бирдей оң санга көбөйтүү же бөлүү мүмкүн, мында барабарсыздык белгиси өзгөрбөйт.

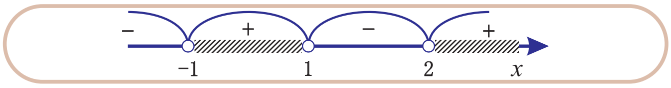
3-эреже. Барабарсыздыктын экөө бөлүгүн бирдей терс санга көбөйтүү же бөлүү мүмкүн, мында барабарсыздык белгиси карама-каршысына өзгөрөт.

Рационалдык барабарсыздыкты чечүүдө ***интервалдар усулунан*** пайдаланылат.

1-мисал. Барабарсыздыкты чыгар: $(x-1)(x+1)(x-2)>0$.

Чыгаруу. 1. Барабарсыздыктын оң жагы нөлгө барабар, демек, сол жактагы туюнтманын нөлдөрүн табабыз: $x=1, x=-1, x=2$.

2. x тын бул маанилерин сан огунда белгилейбиз жана алынган интервалдарда сол жагынын белгисин аныктайбыз.



3. Барабарсыздыктын белгиси нөлдөн чоң болгондугу үчүн, оң белгилүү аралыктар берилген барабарсыздыктын чечими болот.

Жообу: $x \in (-1;1) \cup (2;\infty)$

2-мисал. Барабарсыздыкты чыгар: $x^4-3<2x\left(2x^2-x-2\right)$.

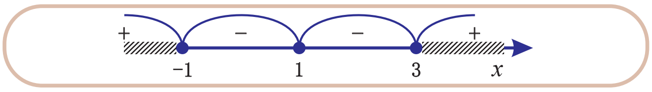
Чечүү. 1. Бүтүн рационалдык барабарсыздык берилген. Аны чечүү үчүн алгач бардык туюнтмаларды барабарсыздыктын сол жагына өткөрөбүз.

$$x^4-4x^3+2x^2+4x-3<0$$

2. Сол жактагы алынган туюнтманы көбөйтүүчүлөргө ажыратабыз. Бул үчүн нөлдөрүн табабыз: $x_1=-1,\ x_2=1$ va $x_3=3$.

$$(x-1)^2(x+1)(x-3)\geq 0$$

3. Нөлдөрдү сандар огунда белгилейбиз жана интервалдарда сол жактагы туюнтманын белгилерин белгилейбиз.



4. Сол жактагы туюнтмада $(x-1)$ эки мүчө экинчи (жуп) даражада, ошондуктан сан огунда 1 ден өтүштө өзгөрбөйт.

5. Барабарсыздыктын белгиси нөлдөн чоң же барабар болгону үчүн, оң белгилүү аралыктар жана 1 саны барабарсыздыктын чечими болот.

Жообу: $x \in (-\infty;-1] \cup [3;+\infty) \cup \{1\}$

Бөлчөк-рационалдык барабарсыздыктар

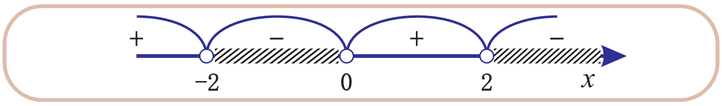
$\frac{f(x)}{g(x)}>0$, $\frac{f(x)}{g(x)}<0$, $\frac{f(x)}{g(x)}\geq 0$, $\frac{f(x)}{g(x)}\leq 0$ көрүнүшкө келтирүү мүмкүн болгон барабарсыздыктар ***бөлчөк-рационалдык барабарсыздыктар*** деп аталат (бул жерде $f(x)$ жана $g(x)$ тер белгисиз туюнтмалар).

Бөлчөк-рационалдык барабарсыздыктарды чечүүнүн кадамдары:
- алымынын нөлдөрү табылат;
- бөлүмүнүн нөлдөрү табылат;
- алымынын жана бөлүмүнүн нөлдөрү сан огунда белгиленет;
- пайда болгон интервалдарда $\frac{f(x)}{g(x)}$ тын белгилери табылат;
- барабарсыздыкты канааттандыруучу аралык(тар) барабарсыздыктын чечими болот.

3-мисал. Барабарсыздыкты чыгар: $\frac{4}{x}-x<0$.

Чыгаруу

1. Жалпы бөлүмгө келтиребиз: $\frac{4-x^2}{x}<0$.
2. Алымдын нөлдөрү $x=2$, $x=-2$, бөлүмдүн нөлү $x=0$.
3. Нөлдөрдү сан огунда белгилейбиз жана интервалдарда белгилерди аныктайбыз.



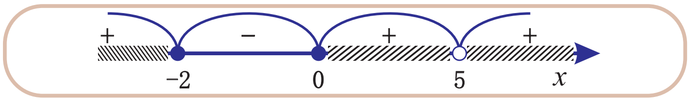
Барабарсыздыктын белгиси нөлдөн кичине болгону үчүн терс белгилүү аралыктар берилген барабарсыздыктын чечими болот.

Жообу: $x\in(-2;0)\cup(2;\infty)$.

4-мисал. Барабарсыздыктын чыгар: $\frac{x(x+2)^3}{(x-5)^2}\geq 0$.

Чыгаруу

1. Алымынын нөлдөрү $x=0$ жана $x=-2$.
2. Бөлүмүнүн нөлү $x = 5$.
3. Сандар огунда бул маанилерди белгилеп чыгабыз жана интервалдарда белгилерди аныктайбыз, мында сол жактагы туюнтмада $(x-5)$ туюнтма (жуп) даражада катышкан, ошондуктан сан огунда 5 санынан эки жакта жайлашкан интервалдар бирдей белгиге ээ.



4. Барабарсыздык белгиси нөлдөн чоң же барабар болгону үчүн оң белгилүү аралыктар берилген барабарсыздыктын чечими болот.

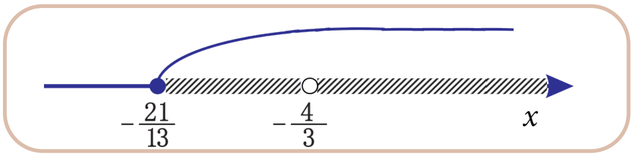
Жообу: $x\in(-\infty;-2]\cup[0;5)\cup(5;\infty)$.

Көңүл бургула! $\frac{f(x)}{g(x)} < a$ көрүнүшүндөгү барабарсыздыктарды чечүүдө барабарсыздыктын жагын $g(x) \neq 0$ деп эсептеп, $g(x)$ ке көбөйтүүдөн баштабагыла. Себеби бул ката жоопко алып келиши мүмкүн.

Мисалы, $\frac{2x-1}{3x+4} \leq 5 \quad \Big| \cdot (3x+4) \neq 0$

$$\begin{cases} \frac{2x-1}{3x+4} \cdot (3x+4) \leq 5 \cdot (3x+4) \\ 3x \neq -4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x-1 \leq 15x+20 \\ x \neq -\frac{4}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq -\frac{21}{13} \\ x \neq -\frac{4}{3} \end{cases}$$

Бул системаны сандар огунда сүрөттөйбүз:



Көрүнүп тургандай, барабарсыздыктын чечими $\left[-\frac{21}{13}; -\frac{4}{3}\right) \cup \left(-\frac{4}{3}; \infty\right)$ болот деген туура эмес жыйынтыкка келебиз.

Туура жоопту аныктоо үчүн бул барабарсыздыкты өз алдынча иштеп чыгууга аракет кыл жана бул ыкма эмне үчүн туура жооп бербей калганы жөнүндө ойлон.

МИСАЛДАР

Барабарсыздыктарды чыгаргыла.

1. $\frac{x+4}{(x+5)x} < 0$

2. $\frac{x-4}{(x-3)x} < 0$

3. $\frac{5+4x}{(x-2)(x+1)} \geq 0$

4. $\frac{4-3x}{(x+2)(x-1)} \geq 0$

5. $\frac{4x+3}{x+2} > 5$

6. $\frac{4x-3}{x-5} > 5$

7. $\frac{25-16x^2}{x^2+4x+4} > 0$

8. $\frac{16-25x^2}{x^2-4x+4} > 0$

9. $\frac{2x-7}{6} + \frac{7x-2}{3} < 3 - \frac{1-x}{2}$ барабарсыздыктын бүтүн сандардан турган чечимдеринен эң чоңун көрсөткүлө.

10. $\frac{x-4}{2x+6} \leq 0$ барабарсыздыктын бардык бүтүн сандардагы чечимдеринин суммасын тапкыла.

11. $\frac{1}{x}<1$ барабарсыздыктын (–3; 3) аралыктагы бүтүн чечимдери санын тапкыла.

12. $\frac{(x+3)(x-5)}{x+1}\geq 0$ барабарсыздыктын бүтүн сандардан турган чечимдеринен эң чоңунун эң кичигинин айырмасын тапкыла.

13. $\frac{(x+4)^2-8x-25}{(x-6)^2}\geq 0$ барабарсыздыктын бүтүн сандардан турган чечимдеринен канчасы [–5; 6] кесиндиде жайлашкан?

14. $\frac{6x-1}{4x+3}\leq\frac{3x-2}{2x-1}$

15. $\frac{5}{-6x+3}+\frac{6x}{1-2x}\geq 0$

16. $\frac{x^2+3x}{49x^2+70x+25}\leq 0$

17. $\frac{6x+1}{4x-3}\leq\frac{3x+2}{2x+1}$

18. $\frac{6}{-4x+2}-\frac{5x}{1-2x}\leq 0$

19. $\frac{49x^2-70x+25}{x^2-3x}\leq 0$

20. $\frac{x^2+3x-2}{(x-1)^2-9}-\frac{3x+1}{3x-12}\leq 0$

21. $\frac{x^2+7x+8}{(x+1)^2-9}-\frac{3x+7}{3x-6}\leq 0$

22. $\frac{1}{2x^2-5x}-\frac{2}{25+10x}+\frac{4}{25-4x^2}\geq 0$

23. $\frac{6}{-4x-x^2}-\frac{2}{x^2-4x}+\frac{x}{x^2-16}\geq 0$

24. $\left(\frac{4}{x^2+4x}+\frac{32-3x}{x^3+64}\right):\frac{x+8}{x^3-4x^2+16x}\geq\frac{4}{4+x}$

25. $\left(\frac{x^2+2x+4}{4x^2-1}\cdot\frac{2x^2-x}{-x^3+8}-\frac{2-x}{2x^2+x}\right):\frac{4}{x^2-2x}\geq\frac{4-x}{x+2x^2}$

РАЦИОНАЛДЫК БАРАБАРСЫЗДЫКТАР СИСТЕМАСЫ

Барабарсыздыктар системасын чечүүнүн кадамдары:

- ар бир барабарсыздыктын чечими өз алдынча табылат;
- эки барабарсыздык үчүн жалпы чечим табылат (бул кадам сан огунда сүрөттөө аркылуу аткарылышы мүмкүн).

1-мисал. Барабарсыздыктар системасын чыгар: $\begin{cases} x^2-9\ge 0 \\ 2x-8<0 \end{cases}$

Чыгаруу

$$\begin{cases} x^2-9\ge 0 \\ 2x-8<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+3)(x-3)\ge 0 \\ x<4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in(-\infty;-3]\cup[3;\infty) \\ x<4 \end{cases} \Rightarrow x\in(-\infty;-3]\cup[3;4)$$

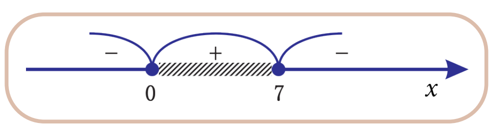
Жообу: $x\in(-\infty;-3]\cup[3;4)$.

2-мисал. Барабарсыздыктар системасын чыгар: $\begin{cases} 7x-x^2\ge 0 \\ x^2-6x+5<0 \end{cases}$

Чыгаруу

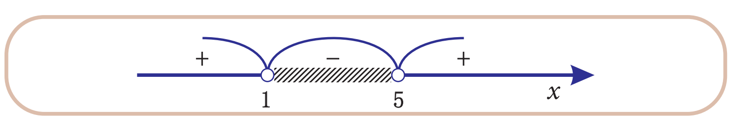
1-Барабарсыздыкты чыгарабыз: $x(7-x)\ge 0$.

$x=0$ va $x=7$ нөлдөрүн сандар огунда белгилейбиз жана пайда болгон интервалдарда белгилерин аныктайбыз.

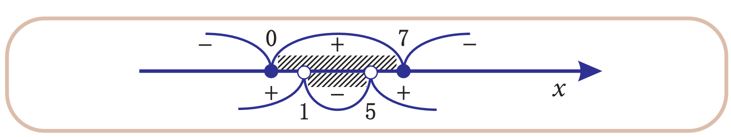


2-барабарсыздыкты чечебиз: $x^2-6x+5<0$.

Нөлдөрү $x=1$ va $x=5$ ке барабар. Аларды сан огунда белгилейбиз жана пайда болгон интервалдарда белгилерин аныктайбыз.



Эки барабарсыздыктын чечимин бир сан огунда белгилейбиз жана эки барабарсыздыкты да канааттандыруучу аралык системанын чечими болот.



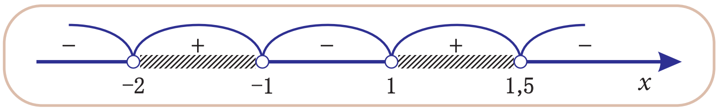
Жообу: $x\in(1;5)$.

3-мисал. Барабарсыздыкты чыгарабыз. $\begin{cases} \dfrac{(3-2x)(x+2)}{x^2-1}>0 \\ 1+2x\le\dfrac{3}{x} \end{cases}$

1-барабарсыздыкты чыгарабыз:

$$\frac{(3-2x)(x+2)}{x^2-1}>0$$

$x=-2, x=-1, x=1,\ \ x=1{,}5$ нөлдөрүн сандар огунда белгилейбиз жана пайда болгон интервалдардын белгилерин аныктайбыз.

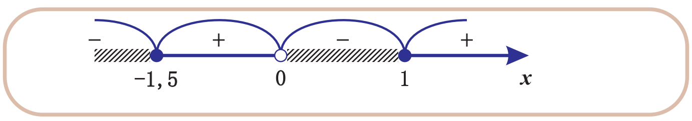


2-барабарсыздыкты чыгарабыз: $1+2x\le\frac{3}{x}$.

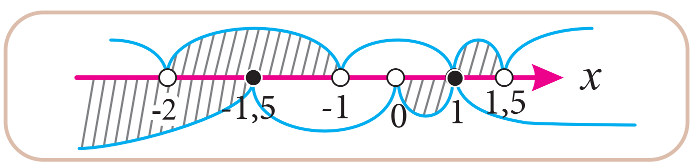
Бардык туюнтмаларды барабарсыздыктын сол жагына өткөрөбүз жана жалпы бөлүмгө келтиребиз.

$$\frac{2x^2+x-3}{x}\le 0$$

Бөлчөктүн нөлдөрү $x=1$ жана $x=-1{,}5$ га, аныкталуу областы $x\ne 0$ болуучу маанилерден турат. Аларды сан огунда белгилейбиз жана пайда болгон интервалдарда белгилерин аныктайбыз.



Экөө барабарсыздыктын чечимин бир сан огунда белгилейбиз жана экөө барабарсыздыкты да канааттандыруучу аралык системанын чечими болот.



Жообу: $x\in(-2;-1{,}5]$.

МИСАЛДАР

1. Барабарсыздыктар системасынын чечими болгон бардык бүтүн сандарды тапкыла.

a) $\begin{cases}0{,}2x>-1\\ -\frac{x}{3}\ge 1\end{cases}$ b) $\begin{cases}\frac{x-1}{2}<\frac{x}{3}\\ \frac{x+1}{2}\ge\frac{x}{5}\end{cases}$ c) $\begin{cases}1-\frac{x}{4}>x\\ x-\frac{x-4}{5}>1\end{cases}$ d) $\begin{cases}x-\frac{x}{4}\ge 2\\ \frac{x-1}{2}+\frac{x-2}{3}>1\end{cases}$

2. Барабарсыздыктар системасын чыгаргыла.

a) $\begin{cases}\frac{x-1}{2}-\frac{x-2}{3}\ge\frac{x-3}{4}-x\\ 1-x>0{,}5x-4\end{cases}$ b) $\begin{cases}\frac{5x+7}{6}-\frac{3x}{4}<\frac{11x-7}{12}\\ \frac{1-3x}{2}-\frac{1-4x}{3}\ge\frac{x}{6}-1\end{cases}$

c) $\begin{cases}\frac{2x-1}{6}+\frac{x+2}{3}-\frac{x-8}{2}>x-1\\ 2-2x>0{,}5+0{,}5\end{cases}$ d) $\begin{cases}\frac{8x+1}{3}>\frac{4x+9}{2}-\frac{x-1}{3}\\ \frac{5x-2}{3}<\frac{2x+13}{2}-\frac{x+2}{3}\end{cases}$

3. Туюнтманын аныкталуу областын тап.

a) $\sqrt{(x-3)(x-5)}+\sqrt{(1-x)(7-x)}$ b) $\sqrt{\dfrac{3x+2}{5-x}}+\sqrt{\dfrac{4-x}{7-2x}}$

c) $\sqrt{(x-2)(x-3)}+\sqrt{(5-x)(6-x)}$ d) $\sqrt{\dfrac{4x+1}{x+2}}+\sqrt{\dfrac{2x+1}{x-7}}$

4. Функциянын аныкталуу областын тап.

a) $y=\sqrt{12-3x}+\sqrt{x+2}$ b) $y=\dfrac{\sqrt{3-5x-2x^2}}{10x}$ c) $y=\sqrt{15-3x}+\sqrt{4+x}$ d) $y=\dfrac{\sqrt{-3x^2+12}}{1-5x}$

5. Барабарсыздыктар системасын чыгар.

a) $\begin{cases}\dfrac{2x+1}{x-2}<1\\ \dfrac{3x+2}{2x-3}>2\end{cases}$ b) $\begin{cases}\dfrac{7-3x}{2-5x}\le 2\\ \dfrac{2x+1}{3x-3}>4\end{cases}$ c) $\begin{cases}\dfrac{3x-2}{x-2}<2\\ \dfrac{5x+1}{4x-5}\ge 3\end{cases}$ d) $\begin{cases}\dfrac{x+3}{3x-1}\le 1\\ \dfrac{2x+5}{x-4}\ge 2\end{cases}$

6. Барабарсыздыктар системасын чыгар.

a) $\begin{cases}x^2\le 9\\ x>0\end{cases}$ b) $\begin{cases}3x^2+7x-6\le 0\\ 6(x+4)-3(4-3x)<2\end{cases}$ c) $\begin{cases}5x^2-2x+1\le 0\\ 2(x+3)-(x-8)<4\end{cases}$

d) $\begin{cases}-2x^2+3x-2<0\\ -3(6x-1)-2x<x\end{cases}$ e) $\begin{cases}12(x+2)-5(5-4x)<2\\ 9x^2-6x-8\le 0\end{cases}$ f) $\begin{cases}3x-1<0\\ x^2-3x+2\ge 0\end{cases}$

7. Барабарсыздыктар системасын канааттандыруучу бүтүн сандар суммасын тап.

a) $\begin{cases}\dfrac{9-x^2}{x}\ge 0\\ 2x-1\ge 0\end{cases}$ b) $\begin{cases}\dfrac{(x+5)(x-1)}{x}\ge 0\\ 10x-1<0\end{cases}$ c) $\begin{cases}\dfrac{(x-2)(x+3)}{x(x+7)}<0\\ 20x\ge 20\end{cases}$ d) $\begin{cases}\dfrac{25-x^2}{x}\le 0\\ 5x-10\le 35\end{cases}$

8. Барабарсыздыктар системасын чыгар.

a) $\begin{cases}3x^2-5x-2<0\\ 4-x^2>0\end{cases}$ b) $\begin{cases}3x^2+x+2>0\\ x^2<9\end{cases}$ c) $\begin{cases}2x^2+5x+10>0\\ x^2\ge 16\end{cases}$ d) $\begin{cases}-7x^2+5x-2>0\\ x^2\le 25\end{cases}$

e) $\begin{cases}\dfrac{x+7}{x-5}+\dfrac{3x+1}{2}\ge 0\\ (5-x)^2\le 4\end{cases}$ f) $\begin{cases}-5x^2+x-1>0\\ x^2>81\end{cases}$ g) $\begin{cases}x^2-6x+8<0\\ x^2-36\ge 0\end{cases}$ h) $\begin{cases}x^2-16\ge 0\\ x^2-7x+12\ge 0\end{cases}$

i) $\begin{cases}x^2-5x+4\ge 0\\ 2x^2-5x+2\le 0\end{cases}$ j) $\begin{cases}x^2-9x+14<0\\ x^2-7x-8\le 0\end{cases}$ k) $\begin{cases}x^2+4x+3\le 0\\ 2x^2+5x<0\end{cases}$ l) $\begin{cases}\dfrac{(x-3)^2}{(x-3)(x+1)}\ge 0\\ (x-4)(x+4)\le 0\end{cases}$

ИРРАЦИОНАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР

$\sqrt{2x-5}=7$, $2\sqrt{x}+5=8$, $\sqrt[3]{x+3}=-1-x$ теңдемелерде белгисиз тамыр белгиси астында катышкан. Бул сыяктуу теңдемелер ***иррационалдык теңдемелер*** деп аталат.

Ушул $\sqrt{2+\sqrt{x-5}}=\sqrt{13-x}$, $\sqrt[5]{(x+1)^2}$ - $\sqrt[5]{(x-1)^2}=\sqrt[5]{x^2-1}$ теңдемелер да иррационалдык теңдемелер болот.

Көпчүлүк учурларда иррационалдык теңдемелер төмөнкү кадамдар менен келип чыккан рационалдык теңдемелерге келтирүү жолу менен чечилет. Мында **төмөнкү кадамдар аткарылат:**

- иррационалдык теңдемени рационалдык теңдемеге келтирүү үчүн берилген теңдеменин эки жагын бир же бир канча жолу кандайдыр натуралдык даражага көтөрүлөт;
- алынган рационалдык теңдеменин тамырлары берилген иррационалдык теңдеме үчүн четки тамыр болушу мүмкүн. Ошондуктан текшерүү аткарылат.

Бул төмөнкү теорема менен бекитилет.

Теорема. $f_1(x)=f_2(x)$ теңдеменин эки жагын квадратка көтөрүүдөн алынган $f_1^2(x)=f_2^2(x)$ теңдемелердин тамырлары $f_1(x)=f_2(x)$ ва $f_1(x)=-f_2(x)$ теңдемелердин тамырларынан түзүлөт.

Бул теорема $f_1(x)=f_2(x)$ теңдемеден $f_1^2(x)=f_2^2(x)$ теңдемеге өтүүдө тамырлар жоголбостон балким четки тамырлар пайда болушу мүмкүндүгүн көрсөтөт.

Иррационалдык теңдемеде бир гана тамыр белгиси катышса, бул тамыр белгисин теңдеменин бир жагында калтырып, теңдеменин калган мүчөлөрүн экинчи жакка өткөрөбүз. Андан кийин теңдеменин эки жагын теңдеме тамыр белгисинен арылуу үчүн кандайдыр даражага көтөрөбүз. Натыйжада рационалдык теңдеме пайда болот. Бул пайда болгон теңдемени чечип, анын тамырларын берилген иррационалдык теңдемеге коюп текшерип көрүү керек. Эгер табылган тамырлардан бирөөсү берилген теңдемени канааттандырбаса, ал четки тамыр эсептелет.

1-мисал. $\sqrt{2x-1}=5$ теңдемени чыгаргыла.

Чыгаруу. Теңдеменин аныкталуу областы $2x-1\geq 0 \Rightarrow x\geq \frac{1}{2}$

Теңдеменин ар эки жагын квадратка көтөрөбүз. $\left(\sqrt{2x-1}\right)^2=5^2$

$2x-1=25$ теңдеме пайда болот. Демек, $x=13$ экендиги келип чыгат.

Текшерүү: $\sqrt{2\cdot 13-1}=\sqrt{25}=5$.

Жообу: $x=13$.

2-мисал. $\sqrt{x^2-x-2}=x-3$ теңдемени чыгар.

Чыгаруу. $\sqrt{x^2-x-2}=x-3$ теңдеменин ар эки жагын квадратка көтөрөбүз: $x^2-x-2=x^2-6x+9 \Rightarrow 5x=11 \Rightarrow x=2{,}2$.

Текшерүү: $\sqrt{2{,}2^2-2{,}2-2}=2{,}2-3$, $\sqrt{0{,}64}=-0{,}8$; $0.8\neq -0{,}8$. Демек, $x=2{,}2$ четки тамыр, теңдеме чечимге ээ эмес.

Жообу: $\varnothing$.

Иррационалдык теңдемелерди чыгаруу:

I. $\sqrt{f(x)} = g(x)$ көрүнүштөгү теңдемелер ага тең күчтүү болгон $\begin{cases} g(x) \ge 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$ системага келтирип чыгаруу мүмкүн.

3-мисал. $\sqrt{3x^2 - 6x + 16} = 2x - 1$ теңдемени чыгар.

Чыгаруу

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 16} = 2x - 1 \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6x + 16 = (2x-1)^2 \\ 2x - 1 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 6x + 16 = 4x^2 - 4x + 1 \\ 2x \ge 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 15 = 0 \\ x \ge \frac{1}{2} \end{cases}$$

$x^2 + 2x - 15 = 0$ теңдемени чыгарабыз. $x_{1,2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4+60}}{2} = \dfrac{-2 \pm 8}{2}$, $\Rightarrow x_1 = 3,\ x_2 = -5.$

$x \ge \dfrac{1}{2}$ болгондугу себептүү теңдеменин чечими $x = 3$.

Жообу: $x = 3$.

II. $\sqrt{f(x)} \cdot g(x) = 0$ көрүнүштөгү теңдеме төмөндөгүчө чыгарылат.

1-кадам: $g(x) = 0$ va $f(x) \ge 0$ 2-кадам: $f(x) = 0$

4-мисал. Теңдемени чыгар: $(x^2 - 25)\sqrt{6 - 2x} = 0$.

Чыгаруу

1-кадам: $\begin{cases} x^2 - 25 = 0 \\ 6 - 2x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1,2} = \pm 5 \\ x < 3 \end{cases} \Rightarrow x = -5$ 2-кадам: $6 - 2x = 0 \Rightarrow x = 3$

Жообу: $x_1 = -5$; $x_2 = 3$.

III. $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ көрүнүштөгү теңдеме төмөндөгүчө чыгарылат:

$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \ge 0 \end{cases}$ же $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \ge 0 \end{cases}$

5-мисал. Теңдемени чыгар: $\sqrt{x+1} = \sqrt{2x-3}$.

Чыгаруу

$$\begin{cases} x + 1 = 2x - 3 \\ 2x - 3 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x \ge 1,5 \end{cases} \Rightarrow x = 4$$

Жообу: $x = 4$.

6-мисал. Теңдемени чыгаргыла: $\sqrt{x^2+4x}=\sqrt{14-x}$.

Чыгаруу

Теңдеменин ар эки жагын квадратка көтөрөбүз.

$\left(\sqrt{x^2+4x}\right)^2=\left(\sqrt{14-x}\right)^2 \Rightarrow x^2+4x=14-x \Rightarrow x_1=-7$, $x_1=2$ экендигин табабыз.

Текшерүү бул сандардын тамыр болушун көрсөтөт.

Жообу: $x_1=-7$, $x_1=2$.

IV. $\sqrt{f(x)}\cdot\sqrt{g(x)}=0$ көрүнүшүндөгү теңдемени өзүнө тең күчтүү эки системаларга келтирип чыгаруу мүмкүн:

$$\begin{cases} f(x)=0 \\ g(x)>0 \end{cases} \quad \text{жана} \quad \begin{cases} g(x)=0 \\ f(x)>0 \end{cases}$$

Кээде теңдеменин аныкталуу областын билүү, теңдеменин чечими бар же жоктугун аныктоого же чечимин табууга жардам берет.

7-мисал. Теңдемени чыгаргыла: $\sqrt{x^2-4}\cdot\sqrt{x+5}=0$.

$$1)\ \begin{cases} x^2-4=0 \\ x+5\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1,2}=\pm 2 \\ x\geq -5 \end{cases} \Rightarrow x_1=-2;\ x_2=2$$

$$2)\ \begin{cases} x+5=0 \\ x^2-4\geq 0 \end{cases} \Rightarrow x=-5$$

Жообу: $x_1=2;\ x_2=-2;\ x_3=-5$.

8-мисал. Теңдемени чыгаргыла: $\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{x^2-9}=0$.

Чыгаруу

Теңдеменин аныкталуу областын табабыз.

$$\begin{cases} 1-x^2\geq 0, \\ x^2-9\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2\leq 1, \\ x^2\geq 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1\leq x\leq 1, \\ x\leq -3,\ x\geq 3 \end{cases} \Rightarrow \varnothing$$

Теңдеменин аныкталуу областы бош топтом болгондугу себептүү, теңдеме чечимге ээ эмес.

Жообу: Ø.

9-мисал. $\sqrt{3x+7}-\sqrt{x+1}=2$ Теңдемени чыгаргыла.

Чыгаруу

Теңдеменин ар эки жагын квадратка көтөрөбүз.

$$\left(\sqrt{3x+7}-\sqrt{x+1}\right)^2=2^2$$

$$3x+7-2\sqrt{(3x+7)(x+1)}+x+1=4,$$

$$\sqrt{(3x+7)(x+1)}=2x+2$$

$\sqrt{(3x+7)(x+1)}=2x+2$ теңдеменин ар эки жагын квадратка көтөрөбүз,

$(3x+7)(x+1)=4x^2+8x+4$ теңдеме алынат. Мындан $x^2-2x-3=0$ келип чыгат.

Бул теңдеменин тамырлары $x_1=-1,\ x_2=3$.

Текшерүү: $x=-1$ da $\sqrt{3(-1)+7}-\sqrt{-1+1}=2-0=2$.

$x=3$ da $\sqrt{3\cdot3+7}-\sqrt{3+1}=4-2=2$.

Экөө тамыр да берилген теңдемени канааттандырат.

Жообу: $x_1=-1;\ x_2=3$.

10-мисал. Теңдемени чыгаргыла: $\sqrt{3-2x}+\sqrt{x-7}=5$.

Чыгаруу

Теңдеменин аныкталуу областын табабыз.

$$\begin{cases}3-2x\ge0\\x-7\ge0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\le1,5\\x\ge7\end{cases}\Rightarrow x\in\varnothing$$

Аныкталуу областы бош көптүктөн тургандыгынан теңдеменин тамыры жок.

Жообу: $\varnothing$.

11-мисал. $\sqrt[5]{25+\sqrt{x+13}}-2=0$ теңдемени чыгар.

Чыгаруу

$\sqrt[5]{25+\sqrt{x+13}}=2\ \Rightarrow\ 25+\sqrt{x+13}=2^5\ \Rightarrow\ \sqrt{x+13}=7$

$\sqrt{x+13}=7,\ x+13=7^2,\ x=49-13=36$

Текшерүү: $\sqrt[5]{25+\sqrt{36+13}}=\sqrt[5]{25+\sqrt{49}}=\sqrt[5]{25+7}=\sqrt[5]{32}=2$

Жообу: $x=36$.

12-мисал. $\sqrt{\dfrac{3x+2}{x}}+\sqrt{\dfrac{x}{3x+2}}=\dfrac{5}{2}$ теңдемени чыгаргыла.

Чыгаруу

1. $\sqrt{\dfrac{3x+2}{x}}=a$ белгилөө киритсек, $\sqrt{\dfrac{x}{3x+2}}=\dfrac{1}{a}$ болуп, теңдеме $a+\dfrac{1}{a}=\dfrac{5}{2}$ көрүнүшкө келет. Бул теңдемелерди чечип, $a_1=2$ жана $a_2=\dfrac{1}{2}$ лерди табабыз.

2. $\sqrt{\dfrac{3x+2}{x}}=a$ алмаштыруудан пайдалансак $x_1=2$ жана $x_2=-\dfrac{8}{11}$ келип чыгат. Демек, теңдеменин тамырлары $x_1=2$ жана $x_2=-\dfrac{8}{11}$.

Жообу: $x_1=2$ жана $x_2=-\dfrac{8}{11}$.

13-мисал. $\sqrt[3]{x^3+4x^2+3x-3}=x+1$ теңдемени чыгаргыла.

Чыгаруу

$\sqrt[3]{x^3+4x^2+3x-3}=x+1 \Rightarrow x^3+4x^2+3x-3=(x+1)^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^3+4x^2+3x-3=x^3+3x^2+3x+1 \Rightarrow x^2-4=0.$

$x^2=4,\ x_{1,2}=\pm 2.$

Текшерүү. $x=2$ da $\sqrt[3]{2^3+4\cdot 2^2+3\cdot 2-3}=2+1,\ \sqrt[3]{27}=3.$

$x=-2$ da $\sqrt[3]{(-2)^3+4\cdot(-2)^2+3\cdot(-2)-3}=-2+1,\ \sqrt[3]{-1}=-1.$

Жообу: $x=\pm 2.$

14-мисал. $\sqrt{x^2-3x+5}+x^2=3x+7$ теңдемени чыгаргыла.

Чыгаруу

$\sqrt{x^2-3x+5}+x^2=3x+7 \Rightarrow \sqrt{x^2-3x+5}+x^2-3x+5-12=0$

$\sqrt{x^2-3x+5}=a$ белгилөө киритсек, $a^2+a-12=0$ квадраттык теңдеме алынат.

$a^2+a-12=0$ теңдемени чыгарсак, $a_1=3;\ a_2=-4$.

$a=3$ da $\sqrt{x^2-3x+5}=3,\ x^2-3x+5=9,\ x^2-3x-4=0$ теңдемени чечебиз: $x_1=4;\ x_1=-1.$

$a=-4\notin[0;\infty)$ болгондуктан $\sqrt{x^2-3x+5}=-4$ теңдеме чечимге ээ эмес.

$x_1=4;\ x_1=-1$ теңдеменин чечимдери.

Жообу: $x_1=4;\ x_2=-1.$

Теңдеменин аныкталуу областы деп, белгисиздин ушундай маанилеринин көптүгүнө айтылат, мында бул маанилерде теңдеменин сол жана оң жактары мааниге ээ болот. Иррационалдык теңдемени аныкталуу областын таппастан да туура чыгаруу мүмкүн. Аны үчүн текшерүү жетерлүү. Кээ бир теңдемелерде аныкталуу областын табуу пайдалуу.

Мисалы:

1) $\sqrt{x^3+4x-1-8\sqrt{x^4-x}}=\sqrt{x^3-1}+2\sqrt{x}$ теңдеменин аныкталуу областын табуу жетерлүү татаал жана пайдасыз (*көрсөтмө: теңдеменин оң жана сол жагын квадратка көтөргүлө*).

2) $\sqrt{x^2-x}+\sqrt{2-x-x^2}=\sqrt{x}-1$ теңдеменин болсо аныкталуу областын табуу пайдалуу экендигин өз алдынча текшер.

V. $\sqrt{f^2(x)}=f(x)$ теңдеме $f(x)\geq 0$ барабарсыздыкка тең күчтүү,

$\sqrt{f^2(x)}=-f(x)$ теңдеме болсо $f(x)\leq 0$ барабарсыздыкка тең күчтүү.

МИСАЛДАР

Теңдемелерди чыгар.

1. $\sqrt{5x+2}=10$
2. $\sqrt{4x-6}=12$
3. $\sqrt{10-2x}=4$
4. $\sqrt{-12+7x}=x$
5. $\sqrt{x+12}+x=0$
6. $\sqrt{4+3x}=-x$
7. $x-3=\sqrt{9-x}$
8. $-x=\sqrt{15-2x}$
9. $x-6=\sqrt{8-x}$
10. $\sqrt{\dfrac{3x-17}{7}}=4$
11. $\sqrt{\dfrac{11}{6-4x}}=\dfrac{1}{2}$
12. $\sqrt{\dfrac{4}{5x-2}}=1$
13. $\sqrt{5x-3}=\sqrt{2x}$
14. $\sqrt{4-2x}=2\sqrt{x-1}$
15. $\sqrt{x^2-3x+1}=\sqrt{2x-5}$
16. $3x+2\sqrt{2x^2+3x-5}=12$
17. $3+\sqrt{3x^2-8x+14}=2x$
18. $\sqrt{15x^2-7x+8}=4x$
19. $\sqrt{x^2+x}=2-x$
20. $(x^2-25)\sqrt{6-2x}=0$
21. $(4-x^2)\sqrt{-1-3x}=0$
22. $(x^2-16)(x-3)(x-6)\sqrt{5-x}=0$
23. $(x^2-9x+14)\sqrt{x^2-9}=0$
24. $(x-4)\cdot\sqrt{3+2x-x^2}=0$
25. $\sqrt{5x+4}-\sqrt{x+3}=1$
26. $\sqrt{x-2}+\sqrt{1-x}=2$
27. $\sqrt{x-13}+\sqrt{10-x}=4$
28. $\sqrt{(2x-3)^2}=2x-3$
29. $\sqrt{3x-2}+\sqrt{x-1}=3$
30. $2\sqrt{x-2}+2=\sqrt{3x+1}$
31. $\sqrt{x^2+77}-2\sqrt[4]{x^2+77}-3=0$
32. $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}=12$
33. $\sqrt{x}+\sqrt{x-2}=1-x$
34. $\sqrt{x^2+32}=2\sqrt[4]{x^2+32}+3$
35. $x^2+5x+4-5\sqrt{x^2+5x+28}=0$
36. $x^2+\sqrt{x^2+2x+8}=12-2x$
37. $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-1}=\sqrt{3x-5}$
38. $\sqrt{x+2}+\sqrt{x+5}=\sqrt{2x+11}$
39. $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}$
40. $\sqrt[3]{7-x}=\sqrt{3-x}$

ИРРАЦИОНАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР СИСТЕМАСЫ

Иррационалдык теңдемелер системасын чыгаруу тең күчтүү системаларга же натыйжаларга өтүүнүн эрежелерине негизделген. Иррационалдык теңдемелер системасын чечүүдө ар түрдүү усулдар колдонулат: көбөйтүүчүлөргө ажыратуу, өзгөрмөлөрдү жоготуу, алгебралык кошуу, өзгөрмөлөрдү алмаштыруу жана ушул сыяктуулар.

1-мисал. $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=8 \\ \sqrt{xy}=7 \end{cases}$ теңдемелер системасын чыгаргыла.

Чыгаруу

1) Теңдемелер системасынын аныкталуу областын табабыз: $x \geq 0$, $y \geq 0$.

$\sqrt{x}=a, \sqrt{y}=b$ белгилөө киритебиз.

$$\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=8 \\ \sqrt{xy}=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=8 \\ ab=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=8-b \\ (8-b)b=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=8-b \\ b^2-8b+7=0 \end{cases}$$

$b^2-8b+7=0$ теңдемени чыгарабыз, $b_{1,2}=\dfrac{8\pm\sqrt{64-28}}{2}=\dfrac{8\pm 6}{2}, \Rightarrow b_1=7,\ b_2=1.$

$a_1=8-b_1=8-7=1, \Rightarrow a_1=1.$

$a_2=8-b_2=8-1=7, \Rightarrow a_2=7.$

4) $a_1=1,\ b_1=7$ де $\sqrt{x}=1,\ \sqrt{y}=7. \Rightarrow x=1,\ y=49.$

$a_2=7,\ b_2=1$ де $\sqrt{x}=7,\ \sqrt{y}=1. \Rightarrow x=49,\ y=1.$

Текшерүү: $x=1,\ y=49$ де

$$\begin{cases} \sqrt{1}+\sqrt{49}=8 \\ \sqrt{49}=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+7=8 \\ 7=7 \end{cases}$$

$x=49,\ y=1$ де

$$\begin{cases} \sqrt{49}+\sqrt{1}=8 \\ \sqrt{49}=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7+1=8 \\ 7=7 \end{cases}$$

Жообу: (1; 49), (49; 1).

2-мисал. $\begin{cases} x-y=21 \\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=3 \end{cases}$ теңдемелер системасын чыгар.

Чыгаруу

Теңдемелер системасынын аныкталуу областын табабыз: $x \geq 0$, $y \geq 0$.

$x-y=(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})$ кыска көбөйтүүнүн формуласынан пайдаланып чыгарабыз.

$$\begin{cases} x-y=21 \\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)=21 \\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)=21 \\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$+\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=7 \\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=5 \\ \sqrt{y}=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=25 \\ y=4. \end{cases}$$

Текшерүү: $x=25,\ y=4$ де $\begin{cases} 25-4=21 \\ \sqrt{25}-\sqrt{4}=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 21=21 \\ 5-2=3 \end{cases}$

Жообу: (25; 4).

3-мисал. $\begin{cases} x+y+\sqrt{x+y}=20 \\ x^2+y^2=136 \end{cases}$ теңдемелер системасын чыгар.

Чыгаруу

Алгач системадагы биринчи теңдемени чыгарып алабыз.

$x+y+\sqrt{x+y}=20$, $\sqrt{x+y}=a$ белгилөө киритсек, $a^2+a-20=0$ квадраттык теңдеме алынат. $\sqrt{x+y}\geq 0$ болгондуктан $a\geq 0$ болот. $a\in[0;\infty)$.

$a^2+a-20=0$ теңдемени чыгарабыз, $a_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+80}}{2}=\dfrac{-1\pm 9}{2}$, $a_1=4,\ a_2=-5$.

$4\in[0;\infty)$, $-5\notin[0;\infty)$. Демек, $\sqrt{x+y}=4$. $x+y=16$.

$$\begin{cases} x+y+\sqrt{x+y}=20 \\ x^2+y^2=136 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=16 \\ x^2+y^2=136 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=16-y \\ (16-y)^2+y^2=136 \end{cases}$$

$(16-y)^2+y^2=136 \Rightarrow y^2-16y+60=0$ теңдемени чыгарабыз.

$$y_{1,2}=\frac{16\pm\sqrt{256-240}}{2}=\frac{16\pm 4}{2},\ \Rightarrow y_1=10,\ y_2=6.$$

$y_1=10,\ y_2=6$ болсо, $x+y=16$ дан $x_1=6,\ x_2=10$ келип чыгат. (10; 6) жана (6; 10) системанын чечими.

Текшерүү: $\begin{cases} 10+6+\sqrt{10+6}=16+4=20 \\ 10^2+6^2=100+36=136 \end{cases}$

Жообу: (10; 6), (6; 10).

4-мисал. $\begin{cases} x+y=28 \\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=4 \end{cases}$ теңдемелер системасын чыгар.

Чыгаруу

Теңдемелер системасынын аныкталуу областын табабыз: $x\in R, y\in R$.

$\sqrt[3]{x}=a,\ \sqrt[3]{y}=b$ белгилөө киритебиз: $x=a^3,\ y=b^3$.

$$\begin{cases}x+y=28\\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^3+b^3=28\\ a+b=4\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(a+b)(a^2-ab+b^2)=28\\ a+b=4\end{cases}\quad\Rightarrow\begin{cases}4(a^2-ab+b^2)=28\\ a+b=4\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a^2-ab+b^2=7\\ a+b=4\end{cases}\quad\Rightarrow\begin{cases}(a+b)^2-3ab=7\\ a+b=4\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}4^2-3ab=7\\ a+b=4\end{cases}\quad\Rightarrow\begin{cases}3ab=9\\ a+b=4\end{cases}\quad\Rightarrow\begin{cases}ab=3\\ a+b=4\end{cases}$$

$\begin{cases}ab=3\\ a+b=4\end{cases}$ теңдемелер системасынан $a_1=1,\ b_1=3$ va $a_2=3,\ b_2=1$ келип чыгат.

$\sqrt[3]{x}=a,\ \sqrt[3]{y}=b,\ a_1=1,\ b_1=3$ де $\sqrt[3]{x}=1,\ \sqrt[3]{y}=3\Rightarrow x=1,\ y=27.$

$a_2=3,\ b_2=1$ де $\sqrt[3]{x}=3,\ \sqrt[3]{y}=1\Rightarrow x=27, y=1.$

Текшерүү: $x=1, y=27$ же $x=27, y=1$ da $\begin{cases}1+27=28\\ \sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{27}=1+3=4\end{cases}$

Жообу: (1; 27), (27; 1).

5-мисал. $\begin{cases}3x-\sqrt{y+2x}=1\\ y+3x=5\end{cases}$ теңдемелер системасын чыгар.

Чечүү. 1) $\begin{cases}3x-\sqrt{y+2x}=1\\ y+3x=5\end{cases}\quad\Rightarrow\begin{cases}3x-\sqrt{y+2x}=1\\ y=5-3x\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}3x-\sqrt{5-3x+2x}=1\\ y=5-3x\end{cases}\quad\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{5-x}=3x-1\\ y=5-3x\end{cases}$$

2) $\sqrt{5-x}=3x-1$ теңдемени чыгарабыз. $\sqrt{5-x}\geq 0$ болгону үчүн

$$3x-1\geq 0,\ \Rightarrow\ 3x\geq 1,\ \Rightarrow\ x\geq\frac{1}{3},\ \Rightarrow\ x\in\left[\frac{1}{3};\infty\right).$$

$\sqrt{5-x}=3x-1$ барабардыктын эки жагын квадратка көтөрсөк,

$5-x=(3x-1)^2, \Rightarrow 5-x=9x^2-6x+1, \Rightarrow 9x^2-5x-4=0$ квадраттык теңдеме пайда болот. Теңдеменин тамырын табабыз:

$$x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25+144}}{18}=\frac{5\pm 13}{18}, \Rightarrow x_1=1,\ x_2=-\frac{4}{9}.$$

$x\in\left[\frac{1}{3};\infty\right)$ болгону үчүн $1\in\left[\frac{1}{3};\infty\right)$, $-\frac{4}{9}\notin\left[\frac{1}{3};\infty\right)$.

$x=1$ де $y=5-3x=5-3=2$, $y=2$. (1; 2) системанын чечими.

Текшерүү: (1; 2) де $\begin{cases}3\cdot 1-\sqrt{2+2\cdot 1}=3-\sqrt{4}=3-2=1\\ 2+3\cdot 1=5\end{cases}$

Жообу: (1; 2).

6-мисал. $\begin{cases}\sqrt{x-2y+2}=2,\\ \sqrt{y-2x+11}=x-5\end{cases}$ теңдемелер системасын чыгар.

Чыгаруу

$\sqrt{y-2x+11}\geq 0$ болгону үчүн $x-5\geq 0$, $x\geq 5$. $x\in[5;\infty)$.

$$\begin{cases}\sqrt{x-2y+2}=2,\\ \sqrt{y-2x+11}=x-5\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\left(\sqrt{x-2y+2}\right)^2=4\\ \left(\sqrt{y-2x+11}\right)^2=(x-5)^2\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x-2y+2=4,\\ y-2x+11=x^2-10x+25\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x-2y=2,\\ y=x^2-8x+14\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x-2(x^2-8x+14)=2,\\ y=x^2-8x+14\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2x^2-17x+30=0,\\ y=x^2-8x+14\end{cases}$$

$2x^2-17x+30=0$ теңдемени чыгарабыз, $x_{1,2}=\frac{17\pm\sqrt{289-240}}{4}=\frac{17\pm 7}{4}$,

$x_1=6,\ x_2=\frac{5}{2}$.

$x\in[5;\infty)$ шартка байланыштуу, $6\in[5;\infty)$, $\frac{5}{2}\notin[5;\infty)$.

$x_1=6$ da $y_1=6^2-8\cdot 6+14=36-48+14=2. \Rightarrow y_1=2$

Текшерүү: (6; 2) де $\begin{cases}\sqrt{6-2\cdot 2+2}=\sqrt{4}=2,\\ \sqrt{2-2\cdot 6+11}=6-5=1\end{cases}$

Жообу: (6; 2).

7-мисал. $\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{2x+y+2}=7\\ 3x+2y=23\end{cases}$ теңдемелер системасын чыгар.

Чыгаруу

$\sqrt{x+y}=a$ де $\sqrt{2x+y+2}=b$ белгилөө киритсек, $a\geq 0$, $b\geq 0$ болот.

$x+y=a^2$, $2x+y+2=b^2$

$$+\begin{cases} x+y=a^2 \\ 2x+y+2=b^2 \end{cases} \Rightarrow 3x+2y+2=a^2+b^2.$$

$3x+2y=23$ экенин эсепке алсак, $3x+2y+2=a^2+b^2 \Rightarrow 25=a^2+b^2$.

$$\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{2x+y+2}=7 \\ 3x+2y=23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=7 \\ a^2+b^2=25 \end{cases} \Rightarrow a_1=3, b_1=4.\ a_2=4, b_2=3.$$

$a_1=3, b_1=4$ де $\begin{cases} \sqrt{x+y}=3, \\ \sqrt{2x+y+2}=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=9, \\ 2x+y+2=16 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y=9 \\ 2x+y=14 \end{cases} \Rightarrow x=5, y=4.$$

$a_2=4, b_2=3$ де $\begin{cases} \sqrt{x+y}=4, \\ \sqrt{2x+y+2}=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=16, \\ 2x+y+2=9 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y=16 \\ 2x+y=7 \end{cases} \Rightarrow x=-9,\ y=25.$$

Текшерүү: $(5;\ 4)$ де $\begin{cases} \sqrt{5+4}+\sqrt{2\cdot 5+4+2}=\sqrt{9}+\sqrt{16}=3+4=7, \\ 3\cdot 5+2\cdot 4=15+8=23 \end{cases}$

$(-9;\ 25)$ де $\begin{cases} \sqrt{(-9)+25}+\sqrt{2\cdot(-9)+25+2}=\sqrt{16}+\sqrt{9}=4+3=7, \\ 3\cdot(-9)+2\cdot 25=-27+50=23 \end{cases}$

Жообу: $(5;\ 4), (-9;\ 25)$.

МИСАЛДАР

Теңдемелер системасын чыгар.

1. a) $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=4 \\ 2\sqrt{x}+3\sqrt{y}=18 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3\sqrt{x}-\sqrt{y}=8 \\ \sqrt{x}+2\sqrt{y}=19 \end{cases}$

2. a) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=3 \\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=1 \\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3 \end{cases}$

3. a) $\begin{cases} 2\sqrt[3]{x}+3\sqrt[3]{y}=-1 \\ 2\sqrt[3]{x}-3\sqrt[3]{y}=-7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{y}=3 \\ 3\sqrt[3]{x}-2\sqrt[3]{y}=-9 \end{cases}$

4. a) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=26 \\ \sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}=6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=5 \\ \sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}=1 \end{cases}$

5. a) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=9 \\ \sqrt[6]{x}+\sqrt[6]{y}=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=7 \\ \sqrt[6]{x}-\sqrt[6]{y}=1 \end{cases}$

6. a) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=8 \\ \sqrt{x}\sqrt{y}=15 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=7 \\ \sqrt{x}\sqrt{y}=12 \end{cases}$

7. a) $\begin{cases} \sqrt{x}+3\sqrt{y}=10 \\ \sqrt{x}\sqrt{y}=8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2\sqrt{x}-\sqrt{y}=5 \\ \sqrt{x}\sqrt{y}=3 \end{cases}$

8. a) $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=4 \\ x-y=32 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=8 \\ x-y=16 \end{cases}$

9. a) $\begin{cases} \sqrt{6+x}-3\sqrt{3y+4}=-10 \\ 4\sqrt{3y+4}-\sqrt{6+x}=14 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2\sqrt{x-2}+\sqrt{5y+1}=8 \\ 3\sqrt{x-2}-2\sqrt{5y+1}=-2 \end{cases}$

10. a) $\begin{cases} \sqrt[4]{x+y}-\sqrt[4]{x-y}=2 \\ \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt[4]{x+y}+\sqrt[4]{x-y}=4 \\ \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=10 \end{cases}$

11. a) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=5 \\ x\cdot y=216 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=3\dfrac{3}{4} \\ x\cdot y=1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=-3 \\ x\cdot y=8 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=2 \\ x\cdot y=27 \end{cases}$

12. a) $\begin{cases} y\sqrt{x}+x\sqrt{y}=30 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y\sqrt{x}-x\sqrt{y}=-12 \\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=1 \end{cases}$

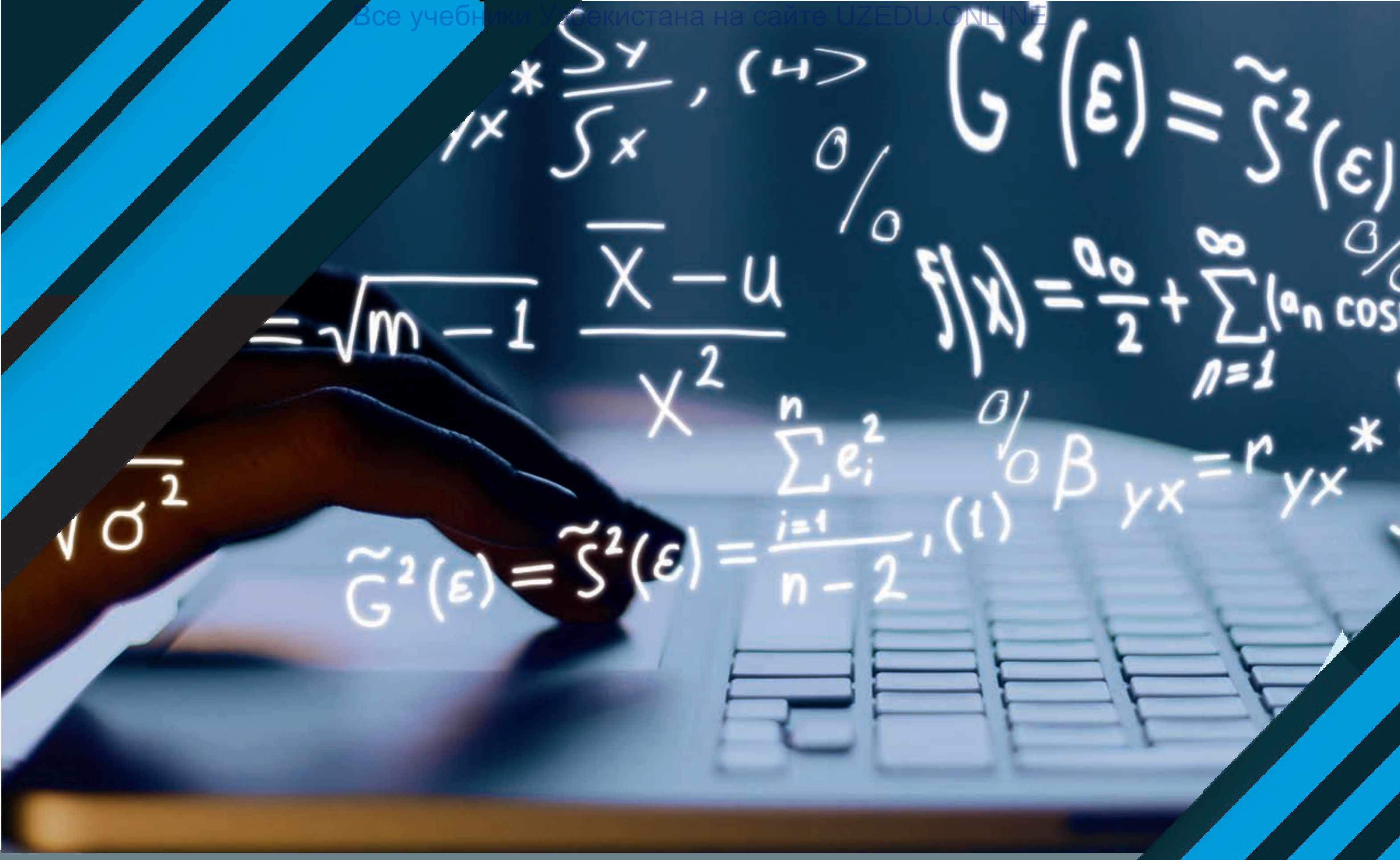
13. a) $\begin{cases} y + x - \sqrt{xy} = 7 \\ xy = 9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y + \sqrt{xy} = 20 \\ xy = 64 \end{cases}$

14. a) $\begin{cases} \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 3 \\ \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2} = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = -1 \\ \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2} = 7 \end{cases}$

15. a) $\begin{cases} 3\sqrt{\frac{x}{y}} + 2\sqrt{\frac{y}{x}} = 5 \\ 4\sqrt{x} + \sqrt{y} = 10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4\sqrt{\frac{x}{y}} + 2\sqrt{\frac{y}{x}} = 9 \\ 7\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 48 \end{cases}$

16. a) $\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{10}{3} \\ y^2 + x^2 = 82 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{5}{2} \\ y^2 - x^2 = 15 \end{cases}$

17. a) $\begin{cases} 4y + 5x - \sqrt{xy} = 79 \\ 5x - 4y + \sqrt{xy} = 81 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 9y + 2x - \sqrt{xy} = 71 \\ 2x - 9y + \sqrt{xy} = 73 \end{cases}$



3-ГЛАВА. КӨРСӨТКҮЧТҮҮ ЖАНА ЛОГАРИФМАЛЫК ФУНКЦИЯЛАР

- КӨРСӨТКҮЧТҮҮ ФУНКЦИЯ
- КӨРСӨТКҮЧТҮҮ ТЕҢДЕМЕЛЕР
- КӨРСӨТКҮЧТҮҮ БАРАБАРСЫЗДЫКТАР
- ЛОГАРИФМ ТҮШҮНҮГҮ. ЛОГАРИФМАЛЫК ФУНКЦИЯ
- ЛОГАРИФМАЛЫК ТУЮНТМАЛАРДЫ АЙНИЙ АЛМАШТЫРУУ
- ЛОГАРИФМАЛЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР
- КӨРСӨТКҮЧТҮҮ ЖАНА ЛОГАРИФМАЛЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР СИСТЕМАСЫ
- ЛОГАРИФМАЛЫК БАРАБАРСЫЗДЫКТАР
- КӨРСӨТКҮЧТҮҮ ЖАНА ЛОГАРИФМАЛЫК ФУНКЦИЯЛАРДЫН КОЛДОНУЛУШУ

КӨРСӨТКҮЧТҮҮ ФУНКЦИЯ

Акыркы убактарда жер бетинен чаңдын көтөрүлүшү көп байкалат. Бийиктикке көтөрүлгөн сайын чаңдын саны азайышы далилденген. Чаңдын санынын бийиктикке көз карандылыгы көрсөткүчтүү функция менен туюнтулат. Мындан тышкары, вирустардын көбөйүшү жана радиоактивдүү заттардын ажыроосу сыяктуу кубулуштар да көрсөткүчтүү функциялар менен сүрөттөлөт.

Мисалы, чаңдын саны y тин x бийиктикке көз карандылыгы $y = p \cdot e^{-qx}$ көрүнүшүндөгү функция аркылуу туюнтулат. Бул жерде p, q сандары ***параметрлер*** деп аталуучу чоңдуктар, e болсо ***Эйлер саны*** деп аталуучу иррационалдык сан. Анын болжолдуу мааниси 2,71 ге барабар.

Көрсөткүчтүү функцияларды үйрөнүү үчүн төмөнкү касиеттерди билүү талап кылынат:

1) $a^0 = 1, \quad a \neq 0$ 2) $a^1 = a$ 3) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

4) $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ 5) $\left(a^n\right)^m = a^{nm}$ 6) $(ab)^n = a^n \cdot b^n$

7) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}, \quad b \neq 0$ 8) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \quad a > 0,\ n \in N,\ m \in Z$

Бөлчөк даражалуу $a^{\frac{m}{n}}$ же чыныгы көрсөткүчтүү a^p түрүндөгү даражаларды да кароого боло тургандыгы белгилүү. Мында көрсөткүчтүн кээ бир маанилеринде a^p даража мааниге ээ болбошу мүмкүн. Мисалы, $(-3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-3}$ туюнтма чыныгы сандар көптүгүндө мааниге ээ болбойт. Андан тышкары, $0^{-3} = \dfrac{1}{0^3} = \dfrac{1}{0}$ туюнтма да аныкталбаган. Мындай абалдардын алдын алуу үчүн чыныгы p көрсөткүчтүү a^p даража үчүн $a > 0$ барабарсыздык аткарылышы талап этилет. Ар кандай p чыныгы сан үчүн $1^p = 1$ экендигинен негизи 1 болгон даражаларды үйрөнүү аркылуу эч кандай жаңы маалымат алынбайт.

Ошентип, жогоруда айтылгандардын неизинде төмөнкүдөй жыйынтыкка келүүгө болот.

Корутунду. Каалагандай p чыныгы көрсөткүчтүү a^p даражасы белгилүү бир мааниге ээ болушу үчүн a негиз $a > 0$ va $a \neq 1$ шарттарын канааттандыруу талап кылынат.

$a > 0$ жана $a \neq 1$ шарттарын канааттандырган a чыныгы санды карап көрөлү. Мындай $\boldsymbol{y = a^x}$ түрүндөгү функция ***көрсөткүчтүү функция*** деп аталат (даража көрсөткүчү – өзгөрмөлүү чоңдук).

$y = a^x$ көрсөткүчтүү функция төмөндөгү касиеттерге ээ:

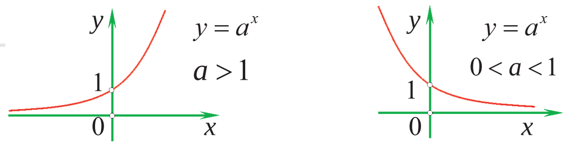
- $\boldsymbol{y = a^x}$ көрсөткүчтүү функциянын аныкталуу областы бардык чыныгы сандар көптүгүнөн турат:

$$D(y) = (-\infty; +\infty)$$

- $\boldsymbol{y = a^x}$ көрсөткүчтүү функциянын маанилер көптүгү бардык оң чыныгы сандар көптүгүнөн турат:

$$E(y) = (0; +\infty)$$

1-сүрөт



Көрсөткүчтүү функциянын графиги

- $y = a^x$ көрсөткүчтүү функция Ox огу менен кесилишпейт.
- $y = a^x$ көрсөткүчтүү функция Oy огу менен болсо $(0,1)$ чекитте кесилишет.
- Көрсөткүчтүү функция мезгилдүү болбойт, жуп да, так да эмес.
- a негизинин $0 < a < 1$ барабарсыздыкты канааттандыруучу маанилеринде $y = a^x$ функция азаят: Кемүү аралыгы $(-\infty; +\infty)$ ден турат.
- a негиздин $a > 1$ барабарсыздыкты канааттандыруучу маанилеринде $y = a^x$ функция өсөт: Өсүү аралыгы $(-\infty; +\infty)$ дан турат.

1-мисал. $(0,1)^{\sqrt{2}}$ ни 1 менен салыштыргыла.

Чыгаруу

$1=(0,1)^0$ жана $y=(0,1)^x$ функция $x \in R$ де кемүүчү болгондуктан

$$\sqrt{2} > 0 \Rightarrow (0,1)^{\sqrt{2}} < (0,1)^0 \Rightarrow (0,1)^{\sqrt{2}} < 1$$

Жообу: $(0,1)^{\sqrt{2}} < 1$.

2-мисал. Ушул $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y=e^x$, $y=2,6^x$ функциялардан кайсылары кемүүчү?

Чыгаруу

Берилген үч функциялардан биринчи гана функцияда катышуучу көрсөткүчтүү туюнтманын негизи 0 жана 1 аралыгына тиешелүү, ошондуктан биринчи функция кемүүчү функция.

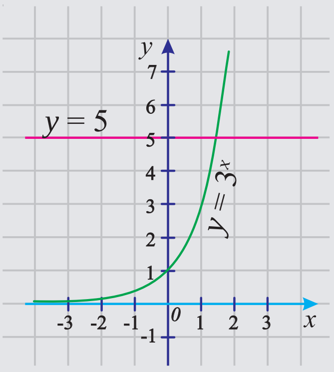
Жообу: $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

3-мисал. $3^x = 5$ теңдеме бир тамырга ээ экендигин көрсөткүлө.

Чыгаруу

$y=3^x$ жана $y=5$ функциялардын графиктерин бир координата тегиздигинде жасайбыз (2-*сүрөт*).

2-сүрөт



Сүрөттөн көрүнүп тургандай, графиктер бир гана чекитте кесилишет. Демек, теңдеме бир тамырга ээ экен.

МИСАЛДАР

1. Функция касиеттерин айткыла жана графиктерин жасагыла.

a) $y=3^x$ b) $y=0,4^x$ c) $y=0,8^x$ d) $y=1,5^x$

2. Функциянын маанилер областын тапкыла.

a) $y=3^x$ b) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x-1$;

c) $y=-\left(\frac{1}{3}\right)^x$ d) $y=4^x+2$

3. Сандарды салыштыр.

a) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$ va 1 b) $3,2^{-\sqrt{2}}$ va 1 c) $0,7^{\frac{\sqrt{5}}{9}}$ va $0,7^{\frac{1}{6}}$ d) $5^{-\sqrt{13}}$ va $\left(\frac{1}{5}\right)^{2,1}$

4. Эсепте.

a) $((\sqrt{3})^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}$ b) $3^{1-2\sqrt{3}}\cdot 9^{1+\sqrt{3}}$ c) $64^{\sqrt{2}}:64^{3\sqrt{2}}$ d) $(5^{\sqrt[5]{16}})^{\sqrt[5]{2}}$

5. Туюнтманы жөнөкөйлөштүр.

a) $(c^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}$ b) $b^{\sqrt{2}}\cdot(\frac{1}{b})^{\sqrt{2}-1}$ c) $x^{\pi}\cdot\sqrt[4]{x^{2}:6x^{4\pi}}$ d) $y^{\sqrt{2}}\cdot y^{1,5}:6\sqrt[3]{y^{3\sqrt{2}}}$

6. Ушул $y=\left(\frac{5}{9}\right)^{x}$, $y=\pi^{x}$, $y=1,7^{x}$ функциялардан кайсылары өсүүчү?

7. Төмөнкү функциялар графиктерин схематикалык көрүнүштө сүрөттөгүлө.

a) $y=2^{|x|}$ b) $y=-2^{|x|+1}$ c) $y=2^{-|x|}-1$

8. Туюнтманы жөнөкөйлөштүр.

a) $\dfrac{a^{2\sqrt{2}}-b^{2\sqrt{3}}}{(a^{\sqrt{2}}-b^{\sqrt{3}})^{2}}+1$ b) $\dfrac{\left(a^{2\sqrt{3}}-1\right)\left(a^{2\sqrt{3}}+a^{\sqrt{3}}+a^{3\sqrt{3}}\right)}{a^{4\sqrt{3}}-a^{\sqrt{3}}}$

c) $\dfrac{a^{\sqrt{5}}-b^{\sqrt{7}}}{a^{\frac{2\sqrt{5}}{3}}+a^{\frac{\sqrt{5}}{3}}b^{\frac{\sqrt{7}}{3}}+b^{\frac{2\sqrt{7}}{3}}}$ d) $\sqrt{\left(x^{\pi}+y^{\pi}\right)^{2}-\left(4^{\frac{1}{\pi}}xy\right)^{\pi}}$

9. Эки функциядан кайсы бири өсүүчү, кайсы бири кемүүчү экендигин аныктагыла.

a) $y=\left(\sqrt{2}\right)^{x}$, $y=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{x}$ b) $y=\left(\frac{\pi}{3}\right)^{x}$, $y=\left(\frac{3}{\pi}\right)^{x}$

c) $y=\left(\sqrt{5}-2\right)^{x}$, $y=\dfrac{1}{\left(\sqrt{5}-2\right)^{x}}$ d) $y=\left(3-\sqrt{7}\right)^{x}$, $y=\dfrac{1}{\left(3-\sqrt{7}\right)^{x}}$

10. Функциянын маанилер областын тапкыла.

a) $y=3^{x+1}-3$ b) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+2$ c) $y=\left|2^{x}-2\right|$ d) $y=4^{|x|}$

11. Функциянын эң чоң жана эң кичине маанисин тапкыла.

a) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{sinx}$ b) $y=4^{cosx}$ c) $y=5+3^{|cosx|}$ d) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{|sinx|}-2$

12. a нын белгисин аныктагыла.

a) $3^{a}=10$ b) $10^{a}=4$ c) $0,3^{a}=0,1$ d) $0,7^{a}=5$

13. Туюнтманын маанисин тапкыла.

a) $6^{x-1}=12$ болсо, $6^{x}=?$ b) $5^{x-3}=4$ болсо, $5^{4-x}=?$ c) $12^{x+5}=6$ болсо, $12^{-3-x}=?$

14. Кайсы абалдарда $3^{x_1} > 3^{x_2}$ барабарсыздык аткарылат?

15. $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ функциянын x натуралдык сан болгондогу маанилери удаалаштыгы геометриялык прогрессияны түзүшүн далилдегиле.

Көрсөткүчтүү функциянын турмушда колдонулушу

Кайнап жаткан чайнек оттон алынганда алгач тез муздайт, андан кийин муздатуу ылдамдыгы төмөндөйт. Чындыгында, муздатуу ылдамдыгы чайнектин температурасы менен тышкы чөйрөнүн температурасынын ортосундагы айырмага пропорционалдуу. Бул айырма канчалык аз болсо, чайнек ошончолук жай муздайт. Чайнектин баштапкы температурасы T_0, абанын температурасы T_1 болсо, анда t секунддан кийин чайнек температурасы $T=(T_1-T_0)e^{-kt}+T_1$ формуласы менен аныкталат.

Физикада колдонулушу

Объект абасыз мейкиндикте (вакуумда) эркин түшкөндө анын ылдамдыгы жогорулайт. Абадагы нерселердин түшүү ылдамдыгы жогорулайт, бирок белгилүү бир мааниден ашпайт. Эгерде абанын каршылык күчү парашютчунун түшүү ылдамдыгына түз пропорционал болсо, б.а. $F=kv$ болсо, анда t секунддан кийинки түшүү ылдамдыгы $v=\frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{kt}{m}}\right)$ ге барабар болот. Бул жерде m парашютчунун ылдамдыгы.

Жарандык өсүш

Белгилүү бир мезгил ичинде өлкөнүн калкынын өзгөрүшү $N=N_0e^{kt}$ формула менен көрсөтүлөт. Бул жерде $t=0$ убагындагы калктын саны N_0, t убакыттагы калктын саны болсо N, k туруктуу сан.

Биологияда колдонулушу

Органикалык дүйнөнүн көбөйүү мыйзамы: организм үчүн ыңгайлуу чөйрөдө (жырткычтардын санын аздыгы, азыгы жетерлүү болушу) тирүү организмдер көрсөткүчтүү функция мыйзамы боюнча көбөйүшөт. Мисалы, бир үй чымыны жай мезгилинде $8\cdot10^{14}$ жаңы муун чыгарат. Алардын салмагы бир нече миллион тонна болгон (ал эми эки үй чымындарынын тукуму планетанын массасынан ашкан), алар абдан чоң аймакты ээлеген. Эгерде аларды чынжыр кылып жайгаштырылса, анда бул чынжырдын узундугу Жерден Күнгө чейинки аралыктан да чоң болор эле. Бирок жаратылышта чымындын табигый "душмандары"деп эсептелген көптөгөн жаныбарлар менен өсүмдүктөрдүн болушу чымындардын санынын ушул даражада көбөйүшүнө жол бербейт.

КӨРСӨТКҮЧТҮҮ ТЕҢДЕМЕЛЕР

Көрсөткүчтүү теңдемелер

Даража көрсөткүчүндө белгисиз катышкан теңдеме ***көрсөткүчтүү теңдеме*** деп аталат. $3^x = 9$, $4^x - 9 = 7$, $2^{x+1} = 2^{8-2x}$ теңдемелер көрсөткүчтүү теңдемеге мисал боло алат.

Белгисиздин берилген көрсөткүчтүү теңдемени туура сандуу барабардыкка айландыруучу мааниси көрсөткүчтүү теңдеменин ***тамыры*** деп аталат.

Көрсөткүчтүү теңдемелер жана аларды чечүү

Ушул x белгисиз $a^x = a^p$ көрсөткүчтүү теңдеменин тамыры $x = p$ болот.

Көрсөткүчтүү теңдемелерди чечүүдө ушул эреже иштетилет:

$a > 0$, $a \neq 1$ болгондо $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ теңдеменин тамырлары $f(x) = g(x)$ теңдеменин тамырларынан турат.

1-мисал. Теңдемени чыгаргыла: $2^{x-1} = 16$.

Чыгаруу

Теңдемени төмөнкү көрүнүштө жазып алабыз: $2^{x-1} = 2^4 \quad \Rightarrow \quad x - 1 = 4 \quad \Rightarrow \quad x = 5$

Жообу: $x = 5$.

2-мисал. Теңдемени чыгаргыла: $3^{2x} \cdot 3^{x^2} = 3^{15}$.

Чыгаруу

Теңдемени төмөнкү көрүнүштө жазып алабыз: $3^{2x+x^2} = 3^{15} \Rightarrow x^2 + 2x = 15$.

$x^2 + 2x - 15 = 0$ квадраттык теңдеменин тамырлары $x_1 = -5; x_2 = 3$ болот.

Жообу: $x_1 = -5;\ x_2 = 3$.

3-мисал. Теңдемени чыгаргыла: $\left(5^{x+1}\right)^x = \left(\dfrac{5^x}{5^{24}}\right)^{-1}$.

Чыгаруу

Теңдемени төмөнкү көрүнүштө жазып алабыз: $5^{x^2+x} = 5^{24-x} \Rightarrow \quad x^2 + x = 24 - x$

$x^2 + 2x - 24 = 0$ квадраттык теңдеменин тамырлары $x_1 = -6; x_2 = 4$ болот.

Жообу: $x_1 = -6; x_2 = 4$.

4-мисал. $6^{x^2} + 36 = 2^{1-x} \cdot 12^x$ теңдеменин тамырларын көбөйтүндүсүн тапкыла.

Чыгаруу

$12^{x^2} = (6 \cdot 2)^{x^2} = 6^{x^2} \cdot 2^{x^2}$ экендигинен пайдаланып теңдемени төмөнкү көрүнүштө жазып алабыз:

$$6^{x^2}+36=2^{1-x^2}\cdot 6^{x^2}\cdot 2^{x^2} \Rightarrow 6^{x^2}+36=2^{1-x^2+x^2}\cdot 6^{x^2} \Rightarrow 6^{x^2}+36=2\cdot 6^{x^2}; \Rightarrow 6^{x^2}=36 \Rightarrow ù^{x^2} = \ ^2$$

$$x^2=2 \Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{2}$$

Демек, $x_1\cdot x_2=-\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=-2$

Жообу: –2.

5-мисал. Теңдемени чыгаргыла: $3^{2x-1}=7^{2x-1}$.

Чыгаруу

Берилген теңдемеде барабардыктын эки жагындагы көрсөткүчтүү туюнтмалардын даража көрсөткүчтөрү бирдей болгону үчүн барабардыктын экөө жагын 7^{2x-1} туюнтмага бөлөбүз:

$$\frac{3^{2x-1}}{7^{2x-1}}=\frac{7^{2x-1}}{7^{2x-1}} \Rightarrow \left(\frac{3}{7}\right)^{2x-1}=1 \Rightarrow \left(\frac{3}{7}\right)^{2x-1}=\left(\frac{3}{7}\right)^{0} \Rightarrow ùx- \ = \quad \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

Жообу: $x=\frac{1}{2}$.

6-мисал. $9^{x^2-1}-36\cdot 3^{x^2-3}+3=0$ теңдеменин тамырларын суммасын тапкыла.

Чыгаруу.

Теңдемени төмөнкү көрүнүштө жазып алабыз:

$$\frac{1}{9}\cdot 9^{x^2}-\frac{36}{27}\cdot 3^{x^2}+3=0$$

$3^{x^2}=t$ деп белгилейбиз, демек, $9^{x^2}=t^2$

$\frac{1}{9}\cdot t^2-\frac{4}{3}\cdot t+3=0$ квадраттык теңдемени чыгарып, $t_1=ù \ \ t_2=$ экендигин табабыз.

$$3^{x^2}=9 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{2} \quad \text{va} \quad 3^{x^2}=3 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x_{ù}=\pm 1$$

теңдеменин тамырларынын суммасы: $x_1+x_2+x_3+x_4=-\sqrt{2}+\sqrt{2}-1+1=0$.

Жообу: 0.

МИСАЛДАР

1. Көрсөткүчтүү теңдемелерди чыгар.

a) $3^x\cdot 3=81$ b) $4^{3x}\cdot 2^x=128$ c) $5^{x+1}-4\cdot 5^x=25$ d) $7^x\cdot 8^x=1$

e) $4^{x^2-3x-4}=1$ f) $0,3^{2x-1}=0,09$ g) $2^{2x}=4^{2\sqrt{3}}$ h) $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x}=9$

i) $27^x=\frac{1}{3}$ j) $400^x=\frac{1}{20}$ k) $\left(\frac{1}{3}\right)^x=\frac{1}{81}$ l) $0,6^{x+3}=0,6^{2x-5}$

2. Теңдемени чыгар.

a) $3^x = 81$ b) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{1024}$ c) $7^x = -49$ d) $13^x = -169$

e) $5^x = 0$ f) $8^{2x} = 0$ g) $3^{6-x} = 3^{3x-2}$ h) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x+1} = \left(\frac{7}{3}\right)^{5x-9}$

i) $2^{7x-15} = 2^{9-4x}$ j) $13^{5-2x} = 13^{6x+1}$ k) $2^{x^2+x-0,5} = 4\sqrt{2}$ l) $\left(\frac{4}{9}\right)^x \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} = \frac{2}{3}$

3. $\left(\frac{21}{6}\right)^{29x^2-8x} = \left(\frac{6}{21}\right)^{8x^2-29x}$

4. $\sqrt[3]{5^{2x-3}} = \frac{5}{\sqrt[4]{5}}$

5. $\left(\frac{37}{5}\right)^{71\sqrt{x}-3} = \left(\frac{5}{37}\right)^{3\sqrt{x}-293}$

6. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{x^2-9x} = 1$

7. $2^{x^2-3} \cdot 5^{x^2-3} = 0,01\left(10^{x-1}\right)^3$

8. $2^{x+1} = 5^{x+1}$

9. $7^{x+2} + 4 \cdot 7^{x-1} = 347$

10. $2 \cdot 3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-2} = 150$

11. $5^{2x} + 5^{2x+2} + 5^{2x+4} = 651$

12. $4 \cdot 7^{x+3} - 7^{x+2} - 3 \cdot 7^{x+1} = 1302$

13. $6 \cdot 2^{x+4} - 4 \cdot 2^{x+3} + 3 \cdot 2^{x+2} = 152$

14. $7^{3x} - 7^{3x-1} = 6$

15. $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$

16. $5 \cdot 25^x - 6 \cdot 5^x + 1 = 0$

17. $9^x + 3 \cdot 3^x - 18 = 0$

18. $3^{2x+3} - 4 \cdot 3^{x+1} + 1 = 0$

19. $(0,25)^{2-x} = \frac{256}{2^{x+3}}$

20. $3^{4\sqrt{x}} - 4 \cdot 3^{2\sqrt{x}} + 3 = 0$

21. $9 \cdot 16^x + 2 \cdot 12^x - 32 \cdot 9^x = 0$

22. $64 \cdot 9^x - 84 \cdot 12^x + 27 \cdot 16^x = 0$

23. $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$

24. $4^{x^2} + 6^{x^2} = 2 \cdot 9^{x^2}$

25. $8^x - 6 \cdot 12^x + 11 \cdot 18^x = 2 \cdot 27^{x+\frac{1}{3}}$

26. $x \cdot 3^{x-1} + 3 \cdot 3^{\sqrt{3-x}} = 3^x + x \cdot 3^{\sqrt{3-x}}$

27. $x^2 \cdot 4^{\sqrt{6-x}} + 4^{2+x} = 16 \cdot 2^{2\sqrt{6-x}} + x^2 \cdot 2^{2x}$

28. $\left(\frac{1}{2}\right)^{2-x} + 2^{x-3} = 80 + \sqrt{4^{x-4}}$

КӨРСӨТКҮЧТҮҮ БАРАБАРСЫЗДЫКТАР

$4^x < 64$, $8^x + 11 > 75$, $2^{x-2} \le 2^{5+3x}$, $9^x < 7^x$ барабарсыздыктар көрсөткүчтүү барабарсыздыкка мисал боло алат. Төмөнкү жадыбалда бирдей негиздүү көрсөткүчтүү барабарсыздыктарды рационалдык барабарсыздыктарга келтирүү көрсөтүлгөн.

Көрсөткүчтүү барабарсыздыктар түрлөрү	$a^{f(x)} \le a^{g(x)}$	$a^{f(x)} < a^{g(x)}$	$a^{f(x)} > a^{g(x)}$	$a^{f(x)} \ge a^{g(x)}$
$0 < a < 1$ болгондо	$f(x) \ge g(x)$	$f(x) > g(x)$	$f(x) < g(x)$	$f(x) \le g(x)$
$a > 1$ болгондо	$f(x) \le g(x)$	$f(x) < g(x)$	$f(x) > g(x)$	$f(x) \ge g(x)$

1-мисал. Барабарсыздыкты чыгар: $2^x > 32$.

Чыгаруу

Барабарсыздыкты төмөндөгүдөй жазып алабыз: $2^x > 2^5$.

$2 > 1$ болгону үчүн $x > 5$.

Жооп: $(5;\infty)$.

2-мисал. Барабарсыздыкты чыгар: $\left(\frac{3}{4}\right)^x \ge \frac{16}{9}$.

Чыгаруу

Барабарсыздыкты төмөндөгүдөй жазып алабыз: $\left(\frac{3}{4}\right)^x \ge \left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$

$0 < \frac{3}{4} < 1$ болгону үчүн $x \le -2$.

Жооп: $(-\infty;-2]$

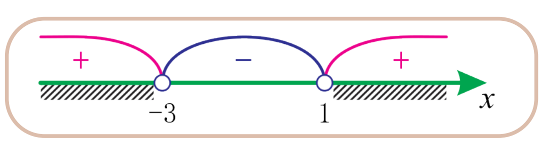
3-мисал. $3^{x^2+2x} > 3^3$ барабарсыздыкты чыгар.

Чечүү

$3 > 1$ болгону үчүн $x^2 + 2x > 3$ барабарсыздыктын чечимин табуу жетерлүү.

$$x^2 + 2x - 3 > 0,$$

$$(x+3)(x-1) > 0,$$



Жооп: $x \in (-\infty;-3) \cup (1;+\infty)$.

Түрдүү негиздүү көрсөткүчтүү барабарсыздыктарды чечүү

$a > 0$, $a \ne 1$ жана $b > 0$, $b \ne 1$ болгондо бул $a^{f(x)} < b^{f(x)}$ көрөткүчтүү барабарсыздык $\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} < 1$ барабарсыздыкка келтирилип, чыгарылат.

МИСАЛДАР

Барабарсыздыктарды чыгар.

1. $4^x > 256$

2. $\left(\frac{1}{3}\right)^x \le \frac{1}{729}$

3. $7^x < -49$

4. $13^x > -169$

5. $5^x < 0$

6. $8^{2x} > 0$

7. $10^x \le 0$

8. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{x}{2}} > \sqrt{3}$

9. $\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{2x}{15}} < \sqrt[5]{6}$

10. $2^x > \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$

11. n дин канча натуралдык мааниси $9 \le 3^n \le 79$ кош барабарсыздыкты канааттандырат?

12. x тын кандай маанилеринде $y = 5^x - 5$ функция оң маанилерди кабыл алат?

13. $\left(\frac{4}{9}\right)^x \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x > \left(\frac{2}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-2x}$ барабарсыздыктын эң чоң бүтүн чыгарылышын тапкыла.

14. $3 \cdot 9^{2x-2} > \left(\frac{1}{27}\right)^{3x-1}$

15. $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x-3} > 4^{1-2x}$

16. $2 \cdot 8^{4-5x} < \left(\frac{1}{16}\right)^{x+2}$

17. $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{x+1}{x+2}} > \frac{\sqrt{3}}{2}$

18. $6 \cdot 2^{x+3} - 5 \cdot 2^{x+2} + 4 \cdot 2^x > 128$

19. $7 \cdot 3^{x+4} + 2 \cdot 3^{x+3} - 5 \cdot 3^{x+2} \le 192$

20. $10 \cdot 3^{x+2} - 4 \cdot 10^{x+2} < 3^{x+4} - 3 \cdot 10^{x+2}$

21. $5^{x+2} - 5^{x+1} > 2^{x+2} + 2^{x+4}$

22. $\left(\frac{3}{4}\right)^{6x+10-x^2} < \frac{27}{64}$

23. $\left(\frac{1}{25}\right)^{2x} < \left(\sqrt{5}\right)^{x^2+2.75}$

24. $\left(\frac{1}{16}\right)^{x^2} < 8 \cdot \sqrt{2}^{16-2x}$

25. $2^{x^2} > \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-3}$

26. $0,04^x - 26 \cdot (0,2)^x + 25 \le 0$

27. $25^x - 4 \cdot 5^x - 5 \ge 0$

28. $4^x - 10 \cdot 2^x + 16 < 0$

29. $3^{2x+1} + 1 < 4 \cdot 3^x$

30. $3^{8x} - 4 \cdot 3^{4x} \le -3$ барабарсыздыктын бүтүн чечимдеринин суммасын тап.

31. $x^2 \cdot 3^x - 3^{x+1} \le 0$ барабарсыздыктын бүтүн сандардан турган чечимдери канча?

ЛОГАРИФМ ТҮШҮНҮГҮ. ЛОГАРИФМДИК ФУНКЦИЯ

Логарифм күндөлүк турмушта кең колдонулат. Мисалы, банкка коюлган акча кандайдыр чоңдукка канча убакытта көбөйүшүн табууда логарифмдан пайдаланылат. Же добуштун бийиктигин баалоодо логарифмдик байланышуу иштетилет.

Логарифм түшүнүгүн жана логарифмдик функцияны үйрөнүү үчүн:
1) көрсөткүчтүү функцияны;
2) көрсөткүчтүү функциялардын касиеттерин **билүү талап кылынат.**

Логарифм жөнүндө түшүнүк

1-мисал. Теңдемени чыгар: $3^x = 27$

Чыгаруу

$3^x = 3^3 \quad \Rightarrow \quad x = 3$

Жообу: $x = 3$.

2-мисал. Теңдемени чыгар: $2^x = 5$

Чыгаруу

Бул теңдеме тамырга ээ, бирок тамыры рационалдык сан эмес. Ушул сыяктуу теңдемелердин тамырын туюнтуу үчүн ***логарифм*** түшүнүгү киритилген. Берилген теңдеменин тамыры 5 тин 2 негизге көрө логарифми деп аталуучу чоңдукка барабар болот жана ал $\log_2 5$ сыяктуу жазылат. Демек, $x = \log_2 5$

Жооп: $x = \log_2 5$.
Жалпысынан алганда, $a^x = b$ теңдеменин тамыры $x = \log_a b$ га барабар. Бул жерде $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$.

Аныктама

b сандын а негизине көрө логарифми деп b ны пайда кылуу үчүн a ны көтөрүү керек болгон даража көрсөткүчүнө айтылат. b нын a негизге көрө логарифми $\log_a b$ аркылуу белгиленет. Бул жерде a – логарифмдин негизи, b – логарифм асты туюнтмасы $\log_a b$ туюнтма ***Логарифм а негизине көрө b*** деп окулат.

Мисалы, $\log_2 5$ туюнтма логарифм 2 негизге көрө 5 деп окулат.

$\log_{10} b$ туюнтма кыскача $\lg b$ сыяктуу белгиленет жана ондук логарифм деп аталат, б.а. $\log_{10} b = \lg b$.

$\log_e b$ туюнтма кыскача $\ln b$ сыяктуу белгиленет жана натуралдык логарифм деп аталат, же $\log_e b = \ln b$. Мында $e \approx 2{,}71$.

$a^x = b$ b теңдеменин тамыры $\log_a b$ ны теңдемедеги x тын ордуна койсок,

$$a^{\log_a b} = b, \qquad (a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0)$$

барабардык пайда болот. Бул барабардык ***негизги логарифмикалык теңдештик*** деп аталат.

3-мисал. Аныктама боюнча эсепте: a) $\log_2 32$; b) $\log_3 \frac{1}{9}$; c) $\lg 100$; d) $\ln e^3$.

Чыгаруу

a) ù ${}_2$ù = , анткени $2^5 = 32$ b) $\log_3 \frac{1}{9} = -2$, анткени $3^{-2} = \frac{1}{9}$

c) $\lg 100 = 2$, анткени $10^2 = 100$ d) $\ln e^3 = 3$, анткени $e^3 = e^3$

Жообу: a) 5; b) –2; c) 2; d) 3.

4-мисал. Эсепте: $\log_{64} 32$.

Чыгаруу

Туюнтманын маанисин көрсөткүчтүү теңдеме жардамында чыгарып табуу $\log_{64} 32 = x$ мүмкүн болсун.

$$64^x = 32 \quad \Rightarrow \quad 2^{6x} = 2^5 \quad \Rightarrow \quad 6x = 5 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5}{6}$$

Жообу: $\frac{5}{6}$.

5-мисал. Негизги логарифмдик теңдештик жардамында эсепте: $64^{\log_8 3}$.

Чыгаруу

$$64^{\log_8 3} = \left(8^2\right)^{\log_8 3} = \left(8^{\log_8 3}\right)^2 = 3^2 = 9$$

Жообу: 9.

Логарифмдик функция жана анын касиеттери, графиги

$a > 0$ жана $a \neq 1$ шарттарды канааттандырган a чыныгы санды карайлы. Ушул

$$y = \log_a x$$

көрүнүштөгү функция ***логарифмдик функция*** деп аталат.

Мисалы, $y = \log_2 x$, $y = \log_{\frac{1}{3}} x$, $y = \lg x$, $y = \ln x$ сыяктуу функциялар логарифмдик функциялар.

Логарифмдик функциялар төмөнкү касиеттерге ээ:

- $y = \log_a x$ логарифмдик функциянын аныкталуу областы бардык оң чыныгы сандар көптүгүнөн турат:

$$D(y) = (0; +\infty)$$

- $y = \log_a x$ логарифмдик функциянын маанилер көптүгү болсо бардык чыныгы сандар көптүгүнөн турат:

$$E(y) = (-\infty; +\infty)$$

- $y = \log_a x$ мезгилдүү функция эмес;
- $y = \log_a x$ функция жуп да эмес, так да эмес;
- $0<a<1$ болгондо $y = \log_a x$ функция $(0; +\infty)$ аралыкта;
- кемүүчү $a > 1$ болгондо $y = \log_a x$ функция $(0; +\infty)$ аралыкта өсүүчү.

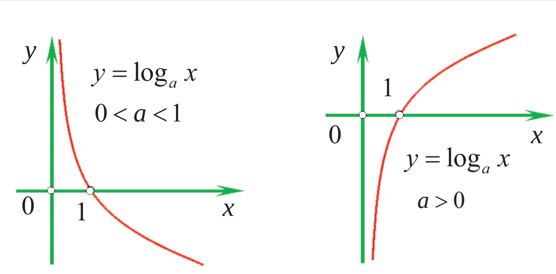
6-мисал. Салыштыр: a) $\log_{0,3}7$ жана $\log_{0,3}8$
b) $\log_7 0,28$ жана $\log_7 0,31$.

Чыгаруу

$y = \text{ù}_{\text{ù}}\ x$ Функция кемүүчү да $7 < 8$ экендигинен, $\log_{0,3} 7 > \log_{0,3} 8$ болот.

$y = \text{ù}_{7}\, x$ функция өсүүчү $0,28<0,31$ экендигинен $\log_7 0,28 < \log_7 0,31$ болот.

1-сүрөт



Логарифмдик функциянын графиги

7-мисал. Функциянын аныкталуу областын тап: $y = \log_7\left(x^2 - 5x + 6\right)$.

Чыгаруу

Логарифм асты туюнтма оң болушу керек, мындан

$$x^2 - 5x + 6 > 0 \Rightarrow (x-2)(x-3) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty;2) \cup (3;\infty)$$

Жообу: $D(y) = (-\infty;2) \cup (3;\infty)$.

8-мисал. $y = \log_{4-x}\left(x^2 - 9\right)$ функциянын аныкталуу областын тапкыла.

Чыгаруу

$$\begin{cases} \text{ù} \!-\!\!\!-\!\!\!\!x \\ \text{ù} - x \neq \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \\ x \neq \end{cases} \qquad x^2 - 9 > 0 \Rightarrow x \in (-\infty;-3) \cup (3;\infty)$$

Жообу: $D(y) = (-\infty;-3) \cup (3;4)$.

9-мисал. Функциянын графигин жаса:

$$y = -1 + \log_2(x-1).$$

Чыгаруу

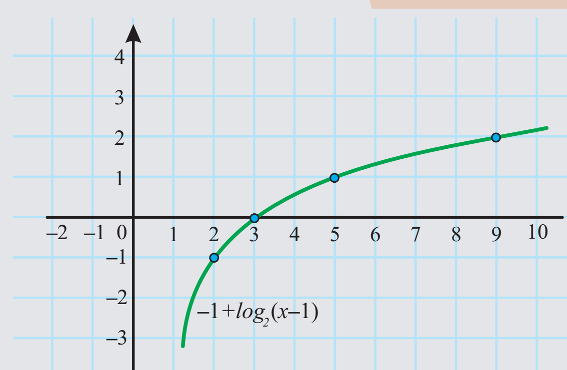
Аныкталуу областын тапкыла:

$$x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$$

Маанилер жадыбалын түзөбүз:

x	2	3	5	9
y	-1	0	1	2

2-сүрөт



Табылган чекиттерди координата тегиздигинде белгилеп, аларды жылма сызык менен туташтырабыз (2-*сүрөт*).

МИСАЛДАР

1. Берилген функциялардын өсүүчү же кемүүчү экендигин аныктагыла.

a) $y=\log_{0,075} x$ b) $y=\log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} x$ c) $y=\lg x$

d) $y=\log_{11} x$ e) $y=-\log_{\frac{1}{e}} x$ f) $y=-\log_{\pi} x$

2. Салыштыргыла.

a) $\log_e 0,5$ жана $\log_e 0,35$ b) $\log_{0,1}100$ жана $\log_{0,1}101$ c) $\log_{\frac{\sqrt{15}}{4}}\sqrt{37}$ жана $\log_{\frac{\sqrt{15}}{4}} 6$

3. Сандарды өсүү тартибинде жайгаштыргыла.

a) $a=\log_{\frac{1}{5}} 10,\ b=\log_{\frac{1}{5}} 15,\ c=\log_{\frac{1}{5}} 20$

b) $a=\log_2 5,\ b=\log_{\frac{1}{4}} 3,\ c=\log_{\frac{1}{2}} 3$

c) $a=\log_{\frac{1}{6}} 4,\ b=\log_{\frac{1}{5}} 6,\ c=\log_{\frac{1}{5}} 4$

4. Бул пикирлердин тууралыгын мисалдар түзүү менен текшер.

a) $a>1$ va $b>1$ болсо, $\log_a b>0$

b) $0<a<1$ va $0<b<1$ болсо, $\log_a b>0$

c) $a>1$ va $0<b<1$ болсо, $\log_a b<0$

d) $0<a<1$ va $b>1$ болсо, $\log_a b<0$

5. Берилген сандардан кайсылары оң?

a) $a=\log_{0,2} 8$ b) $b=\log_3 0,8$ c) $c=\log_{0,9} 9$

d) $d=\log_4 2$ e) $p=\log_{0,9} 0,6$ f) $l=\log_{1,2}\frac{3}{8}$

g) $z=\log_{0,02} 0,001$ h) $p=\log_{|-13,08|} 2022$ i) $q=\log_{|-3|} 3$

6. $y=\log_2 x$ жана $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ функциялардын графиктери абцисса огуна карата симметриялуу экендигин көрсөт.

7. Функциянын аныкталуу областын тапкыла.

a) $y=\log_4 x$ b) $y=\log_2(x-1)$

c) $y=\log_3(x^2-2x-3)$ d) $y=\log_4(x^2-4)$

e) $y=\lg(3-x)$ f) $y=-\log_2(x^2+5x-6)$

8. Функциянын графигин жасагыла.

a) $y=\log_3 x$ b) $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ c) $y=\lg x$ d) $y=\ln x$

9. Функциянын аныкталуу областын тапкыла.

a) $y=\log_{x^2}(4-x)$ b) $f(x)=\log_{x^2}(x-1)+\sqrt{2-x}$

c) $f(x)=\sqrt{9-x^2}+\lg(x-1)-\sqrt{x}$ d) $f(x)=\sqrt{x+4}+\log_2(x^2-4)$

e) $f(x)=\dfrac{\log_{x^2+1}(6-x)}{\sqrt{x+2}}$ f) $y=\sqrt{2+\log_{\frac{1}{2}}(3-x)}$

10. Функциянын графигин жасагыла.

a) $y=\log_2(x-1)$ b) $y=\log_3(5x+1)$ c) $y=\log_4(1-x)$

d) $y=\lg(x-3)$ e) $y=\log_6(3x-2)$ f) $y=1-\ln x$

g) $y=\log_8 x-4$ h) $y=\lg x+3$ i) $y=\log_6(x-2)-1$

11. Функциялардын кесилиш чекиттери канча?

a) $y=\log_2 x$; $y=-x+1$ b) $y=\log_{\frac{1}{2}} x$; $y=2x-5$ c) $y=\log_{\frac{1}{2}} x$; $y=4x^2$

d) $y=\log_3 x$; $y=2-\frac{1}{3}x^2$ e) $y=2^x$; $y=\log_{ù} x$ f) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$; $y=\log_3 x$

ЛОГАРИФМАЛЫК ТУЮНТМАЛАРДЫ ТАК АЛМАШТЫРУУ

Логарифмдик туюнтмаларга амалдарды аткарууда жана аларды жөнөкөйлөштүрүүдө төмөнкүдөй алмаштыруулар колдонулат. Бул касиеттерге катышкан туюнтмалар логарифмдерди аныктоо үчүн талап кылынган шарттарды канааттандырат деп алабыз.

Логарифмдин аныктамасынан анын төмөнку ***касиеттери*** келип чыгат:

1°. $\log_a 1 = 0$.

2°. $\log_a a = 1$.

3°. $a^{\log_a b} = b \quad (a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0)$.

4°. Көбөйтүндүнүн логарифми көбөйтүүчүлөрдүн логарифмдеринин суммасына барабар:

$$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c.$$

5°. Тыйындынын логарифми бөлүүчү менен бөлүүчүнүн логарифминин айырмасына барабар:

$$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c.$$

6°. Даражанын логарифми даража көрсөткүчү менен негизги логарифмдин көбөйүндүсүнө барабар:

$$\log_a b^p = p \log_a b.$$

7°. Бир негизден экинчисине өтүү формуласы: $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$.

8°. $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$.

9°. $\log_{a^k} b = \dfrac{1}{k} \log_a b$.

10°. $\log_{a^k} b^p = \dfrac{p}{k} \log_a b$.

Көрсөткүчтүү жана логарифмдик туюнтмаларды жөнөкөйлөштүрүү

Логарифмдин жана логарифмдик функциянын, ошондой эле, даражанын жана көрсөткүчтүү функциянын касиеттери менен таанышкан элек. Бул касиеттер логарифмдик жана көрсөткүчтүү туюнтмалардын формасын алмаштырууда колдонулат.

1-мисал. Эсептегиле: $\log_3 18 + \log_3 \dfrac{1}{54}$

Чыгаруу

$$\log_3 18 + \log_3 \frac{1}{54} = \log_3 \left(18 \cdot \frac{1}{54}\right) = \log_3 \frac{1}{3} = -1$$

Жообу: -1.

2-мисал. Эсепте: $3\log_2 8-2\log_3 9$

Чыгаруу

$$3\log_2 8-2\log_3 9=3\log_2 2^3-2\log_3 3^2=3\cdot3\cdot\log_2 2-2\cdot2\cdot\log_3 3=9\cdot1-4\cdot1=5$$

Жообу: 5.

3-мисал. Эсептегиле: $10^{1+\lg 5}$.

Чыгаруу

$$10^{1+\lg 5}=10^1\cdot10^{\lg 5}=10\cdot5=50$$

Жообу: 50.

4-мисал. Эсептегиле: $\log_2\log_5\sqrt[8]{5}$.

Чыгаруу

$$\log_2\log_5\sqrt[8]{5}=\log_2\log_5 5^{\frac{1}{8}}=\log_2\left(\frac{1}{8}\cdot\log_5 5\right)=\log_2\frac{1}{8}=\log_2 2^{-3}=-3\log_2 2=-3$$

Жообу: –3.

5-мисал. Эсептегиле: $2^{\log_4\left(2-\sqrt{3}\right)^2}+3^{\log_9\left(2+\sqrt{3}\right)^2}$.

Чыгаруу

$$2^{\log_4\left(2-\sqrt{3}\right)^2}+3^{\log_9\left(2+\sqrt{3}\right)^2}=2^{\log_{2^2}\left(2-\sqrt{3}\right)^2}+3^{\log_{3^2}\left(2+\sqrt{3}\right)^2}=2^{\frac{1}{2}\cdot2\log_2\left(2-\sqrt{3}\right)}+3^{\frac{1}{2}\cdot2\log_3\left(2+\sqrt{3}\right)}=$$

$$=2^{\log_2\left(2-\sqrt{3}\right)}+3^{\log_3\left(2+\sqrt{3}\right)}==2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}=4.$$

Жообу: 4.

6-мисал. Эсептегиле: $\sqrt{5^{\frac{2}{\log_3 5}}+0,5^{-\log_2 7}}$

Чыгаруу

$$\sqrt{5^{\frac{2}{\log_3 5}}+0,5^{-\log_2 7}}=\sqrt{5^{2\log_5 3}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-\log_2 7}}=\sqrt{5^{\log_5 3^2}+2^{\log_2 7}}=\sqrt{9+7}=\sqrt{16}=4$$

Жообу: 4.

7-мисал. Эсептегиле: $\dfrac{2}{1+\log_2 5}+\lg 25$

Чыгаруу

$$\frac{2}{1+\log_2 5}+\lg 25=\frac{2}{\log_2 2+\log_2 5}+\lg 25=\frac{2}{\log_2(2\cdot5)}+\lg 25=\frac{2}{\log_2 10}+\lg 25=$$

$$=2\lg 2+\lg 25=\lg 2^2+\lg 25=\lg(4\cdot25)=\lg 100=2$$

Жообу: 2.

8-мисал. $3^{2+\log_3 2}$ ни эсептегиле.

Чыгаруу. Бул мисалды чыгарууда $a^{m+n}=a^n\cdot a^m$ va $a^{\log_a b}=b$ барабардыктан пайдаланылат. Натыйжада ушул чыгарылышка ээ болобуз:

$$3^{2+\log_3 2}=3^2\cdot 3^{\log_3 2}=9\cdot 2=18.$$

Көрсөткүчтүү жана логарифмдик туюнтмаларды жөнөкөйлөштүрүүдө колдонулган

$$\boxed{a^{\log_b c}=c^{\log_b a}}$$

барабардыкты далилдейбиз. Бул жерде $a, b, c>0$ жана $b\neq 1$. шарттар аткарылышы талап кылынат. Ушул шарттар аткарылганда $\log_b c$ жана $\log_b a$ туюнтмалар мааниге ээ болот. Мындан,

$$\log_b c\log_b a=\log_b a\log_b c$$

барабардык орундуу. Бул теңдештиктен логарифм $n\log_p q=\log_p q^n$ касиетине көрө

$$\log_b a^{\log_b c}=\log_b c^{\log_b a}$$

барабардык келип чыгат. Анын экөө жагын потенцирлеп,

$$a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$$

барабардыкка ээ болобуз.

9-мисал. Эгер $a=sin\dfrac{\pi}{6}$ болсо, $\log_4 a$ ны эсептегиле.

Чыгаруу

$a=sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$ болгондуктан $\log_4 a=\log_4\dfrac{1}{2}=\log_{2^2}2^1=-\dfrac{1}{2}\log_2 2=-\dfrac{1}{2}\cdot 1=-\dfrac{1}{2}$

Жообу: $-\dfrac{1}{2}$.

10-мисал. Эсепте: $\dfrac{\log_2^2 14+\log_2 14\cdot\log_2 7-2\log_2^2 7}{\log_2 14+2\log_2 7}$

Чыгаруу

Алымын көбөйтүүчүлөргө ажыратып, төмөнкүнү алабыз:

$$\frac{\log_2^2 14+\log_2 14\cdot\log_2 7-2\log_2^2 7}{\log_2 14+2\log_2 7}=\frac{(\log_2 14+2\log_2 7)(\log_2 14-\log_2 7)}{\log_2 14+2\log_2 7}=$$

$$=\frac{\cancel{(\log_2 14+2\log_2 7)}(\log_2 14-\log_2 7)}{\cancel{\log_2 14+2\log_2 7}}=\log_2 14-\log_2 7=\log_2\frac{14}{7}=\log_2 2=1$$

Жообу: 1.

11-мисал. $f(x)=\log_4\dfrac{x^2}{4}-2\log_4(4x^4)$ Туюнтманы жөнөкөйлөштүргүлө жана анын $x=-2$ деги маанисин тапкыла.

Чыгаруу

Берилген туюнтма мааниге ээ болушу үчүн $x \neq 0$ болушу талап кылынат. Төмөнкү барабардыктар логарифмдин касиеттеринен келип чыгат:

$$f(x) = \log_4 \frac{x^2}{4} - 2\log_4 (4x^4) = \log_4 x^2 - \log_4 4 - 2(\log_4 4 + \log_4 x^4) =$$

$$= 2\log_4 |x| - 1 - 2(1 + 4\log_4 |x|) = -6\log_4 |x| - 3$$

$$f(-2) = -6\log_4 |-2| - 3 = -6\log_{2^2} 2 - 3 = -\frac{6}{2}\log_2 2 - 3 = -3 - 3 = -6$$

12-мисал. Эгер $a = \log_{98} 112$ болсо, $\log_7 2$ ни a аркылуу туюнткула.

Чыгаруу

$$a = \log_{98} 112 = \frac{\log_7 112}{\log_7 98} = \frac{\log_7 (7 \cdot 2^4)}{\log_7 (7^2 \cdot 2)} = \frac{\log_7 7 + \log_7 2^4}{\log_7 7^2 + \log_7 2} = \frac{1 + 4\log_7 2}{2 + \log_7 2}$$

$$\frac{1 + 4\log_7 2}{2 + \log_7 2} = a$$

$$1 + 4\log_7 2 = 2a + a\log_7 2$$

$$4\log_7 2 - a\log_7 2 = 2a - 1$$

$$(4 - a)\log_7 2 = 2a - 1$$

$$\log_7 2 = \frac{2a - 1}{4 - a}.$$

МИСАЛДАР

1. Логарифмдик туюнтмалардын маанисин тап.

a) $\log_2 4$ b) $\log_2 1$ c) $\log_2 16$ d) $\log_4 16$

e) $\log_2 64$ f) $\log_8 64$ g) $\log_4 64$ h) $\log_{64} 64$

2. Логарифмдик туюнтмалардын маанисин тап.

a) $\log_5 25$ b) $\log_{324} 18$ c) $\log_{128} 4$ d) $\log_{10}(0,001)$

e) $\log_9 3$ f) $\lg 1000$ g) $\ln e$ h) $\lg\left(\frac{1}{100}\right)$

3. Эсептегиле.

a) $\log_2 8 + \log_2 4$ b) $\log_3 6 + \log_3 \frac{3}{2}$ c) $\log_2 15 - \log_2 \frac{15}{16}$

d) $\log_{\frac{1}{3}} 54 - \log_{\frac{1}{3}} 2$ e) $\log_{0,2} 75 - \log_{0,2} 3$ f) $\log_{36} 9 + \log_{36} 4$

4. Берилген сандардан кайсы бири калган үчөөнө барабар эмес?

a) $m = 2\log_2 8 - \log_2 4$ b) $n = \log_2 400 - 2\log_2 5$

c) $p = \log_5 125 + \log_5 5$ d) $q = \ln 12e - \ln 2$

5. Төмөнкү сандардан кайсы бири 2 ден кичине?

a) $M = \log_5 100 - \log_5 4$ b) $N = 4\log_2 3 - \log_2 9$

c) $P = \log_6 72 - \log_6 2$ d) $Q = \log_4 16 + \log_4 \frac{1}{8}$

6. Эсептегиле.

a) $3 - \lg 50 + \frac{1}{2}\lg 25$ b) $\log_{ù} 32 + \log\ \ 2$ c) $\frac{\log_4 13 + \log_4 25}{\log_{64} 325}$

d) $\frac{\log_4 11 + \log_4 23}{\log_8 253}$ e) $\frac{1}{\log_8 12} + \frac{1}{\log_{18} 12}$. f) $\frac{1}{\log_{45} 15} + \frac{1}{\log_5 15}$

7. Эсептегиле.

a) $81^{\log_3 5}$ b) $4^{-2\log_{\frac{1}{4}} 3}$ c) $32^{\log_8 27}$

d) $121^{\log_{11} 12}$ e) $3\log_{\sqrt{8}} 2 + 2^{-2\log_{\frac{1}{2}} 2}$ f) $3\log_{\sqrt{64}} 4 + 4^{-2\log_{\frac{1}{4}} 3}$

8. a нын берилген мааниси үчүн туюнтманын маанисин эсептегиле.

a) $3\log_{\frac{1}{3}} a,\ a = 2\cos\frac{\pi}{6}$ b) $3\log_{\frac{1}{3}} a,\ a = \mathrm{tg}\frac{\pi}{3}$ c) $4\log_3 a,\ a = \mathrm{tg}\frac{\pi}{3}$

9. Эсептегиле.

a) $\log_{\frac{1}{3}} \log_3 27$ b) $\log_4 \log_3 \sqrt{81}$ c) $\log_3^2 \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{125}$

10. Эсептегиле.

a) $\frac{2\log_3 12 - 4\log_3^2 2 + \log_3^2 12 + 4\log_3 2}{3\log_3 12 + 6\log_3 2}$

b) $\frac{\log_2^2 28 + \log_2 28 \cdot \log_2 7 - 2\log_2^2 7}{\log_2 28 + 2\log_2 7}$

c) $\frac{\log_{35}^2 7 - 2\log_{35} 7 \cdot \log_{35} 5 - 3\log_{35}^2 7}{2\left(\log_{35} 7 - 3\log_{35} 5\right)}$

d) $\frac{\log_2^2 12 - 2\log_2 12 + 2\log_2^2 3 - 3\log_2 3 \cdot \log_2 12 + 4\log_2 3}{\log_2 12 - 2\log_2 3}$

11. Төмөнкү функциялардын аныкталуу областын тапкыла.

a) $y = \log_2(x+3)$ b) $y = \log_{0,2}(x^2 - 4x)$

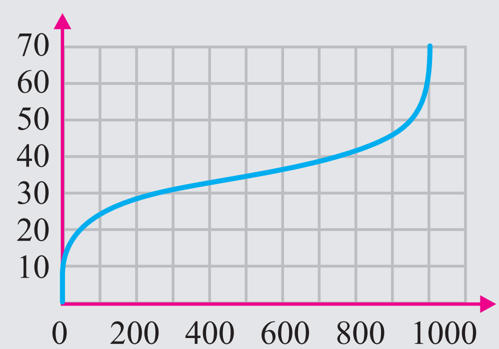
c) $y = \log_{0,7}\left(2x - \frac{1}{8}\right)$ d) $y = \log_2(5 - 3x)$

12. *a* аркылуу туюнткула.

a) $a = \log_2 3$ болсо, $\log_{36} 108 = ?$ b) $a = \log_7 3$ болсо, $\log_{147} 63 = ?$

c) $a = \log_{288} 72$ болсо, $\log_3 2 = ?$ d) $a = \log_{441} 189$ болсо, $\log_3 7 = ?$

13. Эгер малчынын 1 000 уйунун бирөө жугуштуу ооруга чалдыкса, анда *t* күндө *n* уйдун оору деңгээли $t = -5 \cdot \ln\left(\frac{1000 - n}{999n}\right)$ формула менен моделдештирилген. 100, 800, 1 000 уй канча күндө ооруганын тапкыла (1-*сүрөт*).



1-сүрөт

14. Жадыбалдар негизинде функциянын графигин сыз.

a)

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y = \log_2 x$	-2	-1	0	1	2	3

b)

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y = \log_{\frac{1}{2}} x$	2	1	0	-1	-2	-3

15. Төмөнкү функцияларга тескери функцияларды аныктагыла.

a) $f(x) = 10^x$ b) $f(x) = \log_3(x+1)$

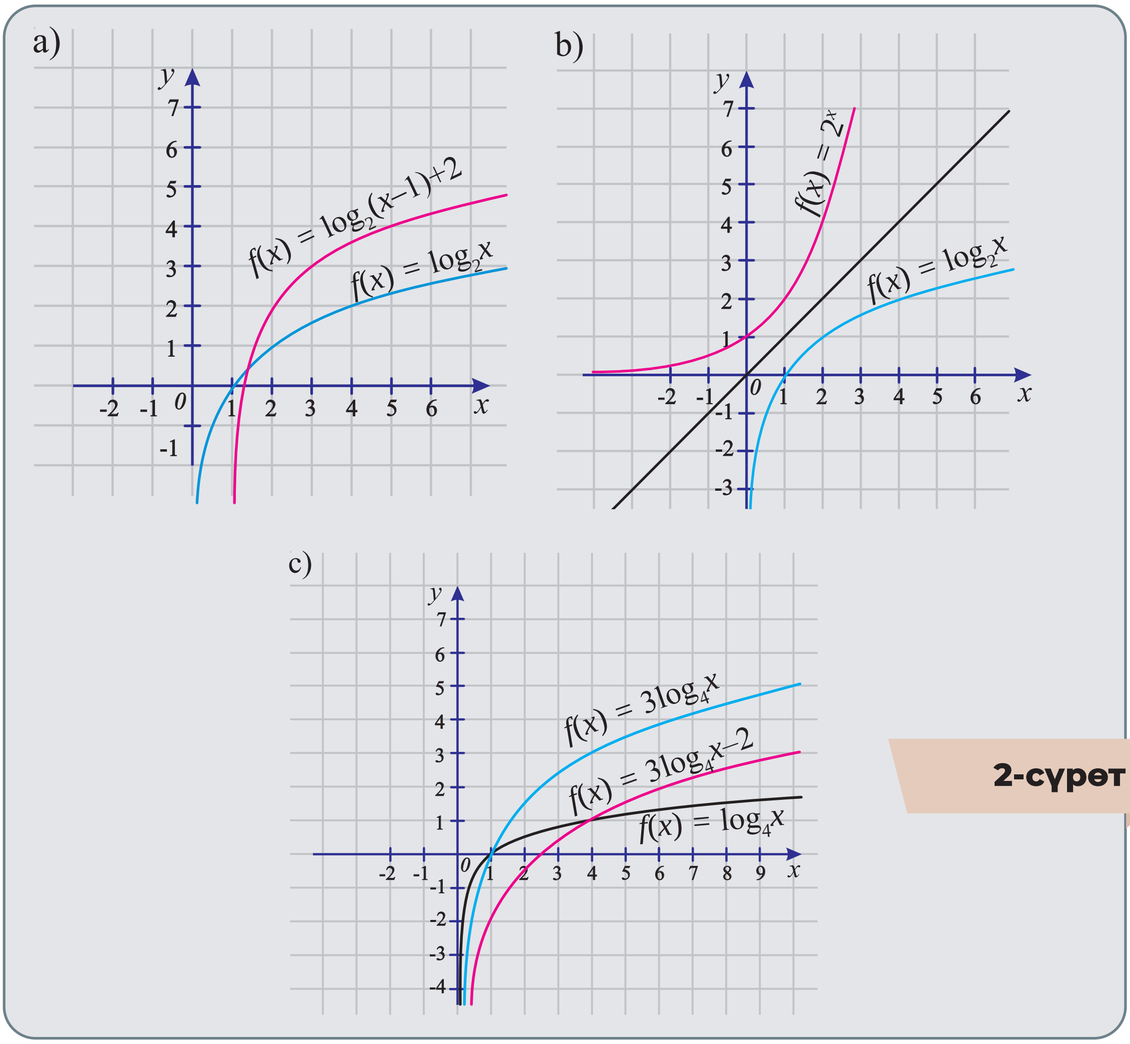
c) $f(x) = 2 + e^{x+4}$ d) $f(x) = 5 + \log_2(x-3)$

16. *a* жана *b* лардын маанисин тапкыла.

a) $\log_3 b = 2$ b) $\log_a 8 = 3$ c) $\log b^2 = \lg 4$ d) $\log_a 36 = 2$

17. $y = \ln e^x$ va $y = e^{\ln x}$ функцияларынын графигин жасагыла. Окшоштугун жана айырмаларын түшүндүр.

18. 2-сүрөттө функциялар үстүндө кандай алмаштыруулар аткарылганын айткыла.



2-сүрөт

Логарифмалык функциянын турмушта колдонулушу

Үндүн интенсивдүү деңгээли

Аянт бирдиги аркылуу убакыт бирдигинде үн толкуну алып өтүп жаткан энергия үндүн интенсивдиги деп аталат. Эластикалык чөйрөнү бойлоп үн таркалганда ал таркалбаган убактагыга караганда артыкча басым пайда болот, ал *үндүн басымы* деп аталат. Үндүн интенсивдүүлүгү үн басымынын амплитудасына ошондой эле чөйрөнүн касиетине жана толкундун формасына байланыштуу. Үндүн интенсивдүүлүгү децибеллдер (dB) менен өлчөнөт.

I – үндүн интенсивдүүлүгү

I_0 – үндүн алыштырмалуу интенсивдүүлүгү

L – үндүн интенсивдүүлүгүнүн бийиктиги

$$L = 10\log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right) dB$$

Смартфон наушниктерине узатуучу добуш интенсивдүүлүгү 100 децибеллден ашат. Адамдын кулагы үчүн 80 децибеллден жогору болгон добуш бийиктиги угуунун начарлашына же жоголушуна себеп болот.

ЛОГАРИФМАЛЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР

Логарифмалык теңдемелер

Белгисиз логарифм асты туюнтмада же логарифм негизинде катышкан теңдеме ***логарифмдик теңдеме*** деп аталат. Мисалы, $\log_2 x = 3$, $\log_x 625 = 2$, $\log_x(x+2) = 2$, $\lg(2x–2) = \lg(x+2)$ теңдемелер логарифмдик теңдемеге мисал боло алат.

Белгисиздин берилген логарифмдик теңдемени туура барабардыкка айлантыруучу мааниси бул логарифмдик ***теңдеменин чечими*** деп аталат.

Жөнөкөй логарифмдик теңдемелерди чыгаруу

$a > 0$, $a \neq 1$ болгондо ушул $\log_a x = b$ теңдеме эң жөнөкөй логарифмдик теңдеме болот. Теңдеменин чечими $x = a^b$ болот.

Бул логарифмдик теңдемелерди чечүүдө ушул эреже иштетилет:

$a > 0$, $a \neq 1$ болгондо $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ теңдеменин тамырлары $f(x) = g(x)$ теңдеменин $f(x) > 0$ (же $g(x) > 0$) шартты канааттандыруучу тамырларынан турат.

Төмөндө логарифмдик теңдемелерди чечүүнүн үлгүлөрүн келтиребиз.

1-мисал. $\log_5 x = -2$ теңдемени чыгаргыла.

Чыгаруу

Теңдемени чечүүдө $x > 0$ шарттын астында логарифм аныктамасынан пайдаланабыз:

$$\log_5 x = -2 \Rightarrow x = 5^{-2} \Rightarrow x = \frac{1}{25}$$

$x = \frac{1}{25} > 0$ экендигинен, табылган бул маани берилген теңдеменин тамыры болот.

Жообу: $x = \frac{1}{25}$.

2-мисал. $\log_3\left(x^2 - 4\right) = \log_3\left(5x - 8\right)$ логарифмдик теңдемени чыгар.

Чыгаруу

Аныкталуу областын табабыз:

$$\begin{cases} x^2 - 4 > 0 \\ 5x - 8 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-2)(x+2) > 0 \\ 5x > 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty) \\ x > 1,6 \end{cases} \Rightarrow x \in (2; \infty)$$

Эми $x^2 - 4 = 5x - 8$ теңдемени чечебиз:

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-1)(x-4) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1,\ x_2 = 4$$

Белгисиздин $x_1 = 1$ мааниси $(2; \infty)$ көптүккө тиешелүү эмес, $x_2 = 4$ мааниси болсо бул көптүккө тиешелүү болот. Демек, $x_1 = 1$ маани берилген теңдеменин четки тамыры болот, $x_2 = 4$ маани болсо берилген теңдеменин тамыры болот.

Жообу: $x = 4$.

3-мисал. $\log_5^2 x - 3\log_5 x - 4 = 0$ логарифмдик теңдемени чыгар.

Чыгаруу

Алгач $x > 0$ аныкталуу областы болушун аныктайбыз жана $\log_5 x = t$ белгилөө киритип, төмөнкүлөргө ээ болобуз

$$t^2 - 3t - 4 = 0 \;\Rightarrow\; (t+1)(t-4) = 0 \;\Rightarrow\; t_1 = -1,\;\; t_2 = 4.$$

Демек, $\log_5 x = -1$ жана $\log_5 x = 4$. Мындан $x_1 = \frac{1}{5} = 0,2$; $x_2 = 5^4 = 625$.

Жообу: $x_1 = 0,2$; $x_2 = 625$.

4-мисал. $\log_{x-1} 16 = 2$ теңдемени чыгар.

Чыгаруу

Теңдемени чыгарууда баштап анын тамыры

$$\begin{cases} x-1>0 \\ x-1\neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1 \\ x\neq 2 \end{cases} \Rightarrow x\in(1;\,2)\cup(2;\,\infty)$$

аралыкка тиешелүү болушу керектигин аныктап алабыз. Андан кийин логарифм аныктамасына пайдаланабыз:

$$\log_{x-1} 16 = 2 \quad \Rightarrow (x-1)^2 = 16$$
$$x-1 = 4 \quad \Rightarrow x_1 = 5$$
$$x-1 = -4 \quad \Rightarrow x_2 = -3$$

Жообу: $x = 5$.

5-мисал. $\log_5 \log_2 \log_7 x = 0$ теңдемени чыгар.

Чыгаруу

Теңдемени чечүүдө логарифм аныктамасынан пайдаланабыз :

$$\log_2 \log_7 x = 5^0 \Rightarrow \log_2 \log_7 x = 1 \;\Rightarrow\; \log_7 x = 2^1 \;\Rightarrow\; x = 7^2 = 49$$

Жообу: $x = 49$.

6-мисал. $\lg(x^2 - 3)\cdot \lg x = 0$ теңдемени чыгар.

Чыгаруу

Ар бир көбөйтүүчүнү 0 гө тендештиребиз:

$$\lg(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow x^2 - 3 = 1 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 2$$

$$\lg x = 0 \Rightarrow x_3 = 1$$

Аныкталуу областына карата, $x^2-3>0$ жана $x>0$ болуусу керек. Ушул себептүү $x = 2$ тамыр боло алат.

Жообу: $x = 2$.

МИСАЛДАР

1. Логарифмдик теңдемелерди чыгар.

a) $\log_2 x = -3$ b) $\log_4 2x = \frac{1}{2}$ c) $\lg\frac{5x}{2} = 1$

d) $\log_{\frac{1}{4}} x = -2$ e) $\log_3(3x-1) = 2$ f) $\log_7(x+3) = 2$

g) $\log_9 x^3 + \log_{\sqrt{3}} x = 3$ h) $\log_4(2x-3) = 4$ i) $\log_2 x - 2\log_{\frac{1}{2}} x = 9$

2. Логарифмдик теңдемелерди чыгар.

a) $\log_5 x = 2\log_5 3 + 4\log_{25} 2$ b) $\log_{\frac{1}{2}}(7-8x) = 2$

c) $\log_2 x + \log_8 x = 0$ d) $\log_3 x = 9\log_{27} 8 - 3\log_3 4$

e) $\log_{0,5}(3x+1) = -2$ f) $\log_{0,2}(x+3) = -1$

g) $\log_{0,25}(x+30) = -2$ h) $\log_{\sqrt{3}}(1-2x) = 4$

i) $\log_2\sqrt{x-1} = 1$ j) $\log_3(x^2-4x+3) = \log_3(3x+21)$

k) $\log_3(2x-5) = \log_3(20-3x)$ l) $\log_7(9x-1) = \log_7 x$

m) $\log_3(2x^2-3x) = 2\log_3 x$ n) $\lg(2x) = 2\lg(4x-15)$

3. $\lg(3x-11) + \lg(x-27) = 3$

4. $\log_{81} x - 2\log_3 x + 5\log_9 x = 1,5$

5. $\log_3((x-1)(2x-1)) = 0$

6. $3\lg x^2 - \lg^2 x = 9$

7. $\log_{\frac{1}{3}}\frac{x^2+4x}{2x-3} = 1$

8. $\log_{\frac{3}{4}}\frac{2x-1}{x+2} = 1$

9. $\log_\pi(\log_2(\log_3 3x)) = 0$

10. $\log_2^2 x + 3 = \log_2 x^2$

11. $(x^2-6x-7)\log_2(3x-1) = 0$

12. $(x^2-2x-15)\lg(4x-3) = 0$

13. $\log_5(x+4) - \log_5(1-2x) = -\log_5(2x+3)$

14. $\log_2^2 x - 5\log_2 x = 4$

15. $\log_3 x + \log_x 9 = 3$

16. $\log_{x+2} 7 + 3\log_7(x+2) = 4$

17. $\log_3 x \cdot \log_9 x \cdot \log_{27} x \cdot \log_{81} x = \frac{2}{3}$

18. $\log_5\sqrt{x-9} + \log_5\sqrt{2x-1} = \log_5 10$

КӨРСӨТКҮЧТҮҮ ЖАНА ЛОГАРИФМДИК ТЕҢДЕМЕЛЕР СИСТЕМАСЫ

Көрсөткүчтүү теңдемелер системасы жана аны чыгаруу

Көрсөткүчтүү туюнтма теңдемелерди өз ичине алган теңдемелар системасы ***көрсөткүчтүү теңдемелер системасы*** деп аталат. Көрсөткүчтүү теңдемелер системасы түрдүү көрүнүштө болот. Мындай системанын ар бирин чечүүдө өзгөчө мамиле талап кылынат. Мында көрсөткүчтүү жана логарифмдик туюнтмалардын касиеттери кең колдонулат.

1-мисал. $\begin{cases} 3^x = 9^{y+1}, \\ 4y = 5 - x \end{cases}$ теңдемелер системасын чыгаргыла.

Чыгаруу

$9 = 3^2$ экендигинен пайдаланабыз. Анда $3^x = 3^{2(y+1)}$ болуп, бул жерден $x = 2y + 2$ келип чыгат. Системадагы экинчи барабардыкта x ордуна $2y + 2$ туюнтмасын коёбуз:

$4y = 5 - (2y + 2) \Rightarrow y = \frac{1}{2}$. Эми $x = 2y + 2$ барабардыктагы y ордуна анын маанисин коюп, x тын маанисин табабыз: $x = 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \Rightarrow x = 3$.

Жообу: $\left(3;\ \frac{1}{2}\right)$.

2-мисал. $\begin{cases} 9^{x+y} = 729, \\ 3^{x-y-1} = 1 \end{cases}$ теңдемелер системасын чыгаргыла.

Чыгаруу

$729 = 9^3$ va $1 = 3^0$ экендигинен пайдаланабыз. Анда

$$\begin{cases} 9^{x+y} = 9^3, \\ 3^{x-y-1} = 3^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 3, \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow (2;\ 1).$$

Жообу: (2; 1).

3-мисал. $\begin{cases} x^{y+1} = 27, \\ x^{2y-5} = \frac{1}{3} \end{cases}$ теңдемелер системасын чыгаргыла.

Чыгаруу

Мисалдын берилишинен $x > 0$, $x \neq 1$ шарттардын аткарылышы келип чыгат. Ошондуктан биринчи жана экинчи теңдемелердин сол жана оң жагындагы туюнтмаларды логарифмдөө мүмкүн. Бул туюнтмаларды 3 негизге көрө логарифмдейбиз жана төмөнкүлөргө ээ болобуз:

$$\begin{cases} (y+1)\log_3 x = 3, \\ (2y-5)\log_3 x = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_3 x = \dfrac{3}{y+1}, \\ (2y-5)\dfrac{3}{y+1} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3, \\ y = 2 \end{cases}$$

Жообу. (3; 2).

4-мисал. $\begin{cases} 2^x + 2^y = 5, \\ 2^{x+y} = 4 \end{cases}$ теңдемелер системасын чыгаргыла.

Чыгаруу.

Биринчи барабардыктан $2^y = 5 - 2^x$ байланышты табабыз. $2^{x+y} = 2^x \cdot 2^y$ барабардыкты эске алып, экинчи барабардыкты $2^x \cdot 2^y = 4$ бул жерде $2^x\left(5-2^x\right) = 4$, андан болсо $2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$ теңдемеге ээ болобуз. $t = 2^x$ белгилөө киргизип, $t^2 - 5t + 4 = 0$ квадраттык теңдемеге ээ болобуз. Бул жерде $t > 0$.

Бул квадраттык теңдеменин чечими $t_1 = 1$, $t_2 = 4$ болуп , x жана y белгисиздердин аларга ылайыктуу маанилери

$t_1 = 1$: $\quad 1 = 2^{x_1} \Rightarrow x_1 = 0$; $\quad 2^{y_1} = 5 - 2^0 = 4$, $\Rightarrow y_1 = 2$

$t_2 = 4$: $\quad 4 = 2^{x_2} \Rightarrow x_2 = 2$; $\quad 2^{y_2} = 5 - 2^2 = 1$, $\Rightarrow y_2 = 0$ болот.

Жообу: (0; 2) жана (2; 0).

Комментарий. Жогоруда иштеп көрсөтүлгөн мисалдар ар бир көрсөткүчтүү теңдемелерди чечүү үчүн чыгармачылык керек экендигин көрсөтүп турат.

Логарифмдик теңдемелер системасы жана аны чыгаруу

Логарифмдик туюнтма катышкан теңдемелерди камтыган система ***логарифмдик теңдемелер системасы*** деп аталат. Логарифмдик теңдемелер системасы да көрсөткүчтүү теңдемелер системасы сыяктуу түрдүү көрүнүштө болот. Алардын ар бирин чечүүдө көрсөткүчтүү жана логарифмдик туюнтмалардын касиеттери кең колдонулат жана өзгөчө мамиле талап кылынат.

5-мисал. $\begin{cases} \log_9 \dfrac{x^2}{\sqrt{y}} = \dfrac{1}{2}, \\ \log_3 xy = 3 \end{cases}$ системаны чыгаргыла.

Чыгаруу

Системадагы логарифмдик туюнтмалар мааниге ээ болушу үчүн

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{y}} > 0, \\ xy > 0 \end{cases}$$

Барабарсыздыктар аткарылышы талап кылынат. $\dfrac{x^2}{\sqrt{y}} > 0$ барабарсыздык $y > 0$ жана

$x \neq 0$ болгондо гана орундуу.

Анда системадагы экинчи $xy > 0$ барабарсыздыктан $x > 0$ жана $y > 0$ болушу зарыл экендиги келип чыгат.

Эми логарифм касиеттеринен пайдаланып $x > 0$ жана $y > 0$ болгондо берилген системаны

$$\begin{cases} \log_9 x^2 - \log_9 \sqrt{y} = \dfrac{1}{2}, \\ \log_3 x + \log_3 y = 3 \end{cases}$$

сыяктуу кайта жазуу мүмкүн. $\log_9 x^2 = \log_{3^2} x^2 = \log_3 x$ жана $\log_9 \sqrt{y} = \log_{3^2} y^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{4}\log_3 y$

барабардыктан пайдалансак, система ушундай көрүнүшкө келет $\begin{cases} \log_3 x - \frac{1}{4}\log_3 y = \frac{1}{2}, \\ \log_3 x + \log_3 y = 3. \end{cases}$

экинчи теңдемеден биринчи теңдемени кемитип, $\frac{5}{4}\log_3 y = \frac{5}{2}$ барабардыкка ээ болобуз. Мындан $\log_3 y = 2 \Rightarrow y = 9$ экени келип чыгат. Эми системанын экинчи теңдемесине y тин бул маанисин коюп, x белгисизди табабыз:

$$\log_3 x + \log_3 9 = 3 \Rightarrow \log_3 x + 2 = 3 \Rightarrow \log_3 x = 1 \Rightarrow x = 3.$$

Жообу: (3; 9).

6-мисал. $\begin{cases} x^{\lg y} = 1000, \\ \log_y x = 3 \end{cases}$ теңдемелер системасын чыгаргыла.

Чыгаруу

Системадагы туюнтмалар мааниге ээ болушу үчүн $x > 0$, $x \neq 1$, $y > 0$, $y \neq 1$ шарттар аткарылышы зарыл. $x^{\lg y} = 1000$ барабардыкты 10 негизге көрө логарифмдейбиз:

$$\lg x^{\lg y} = \lg 1000 \Rightarrow \lg y \lg x = 3$$

$\log_y x = 3$ барабардыктын сол жагындагы логарифмдын негизин 10 негизге алмаштырабыз:

$$\log_y x = \frac{\lg x}{\lg y} \Rightarrow \frac{\lg x}{\lg y} = 3 \Rightarrow \lg x = 3\lg y$$

Натыйжада жөнөкөйлөштүрүүлөрдөн кийин $\lg^2 y = 1$ теңдемеге ээ болобуз.
Аны чечейли

$$\lg y = -1 \Rightarrow y = \frac{1}{10}, \quad \lg y = 1 \Rightarrow y = 10.$$

$\lg x = 3\lg y$ барабардыктан $x = y^3$ байланышты пайда кылып, x тын ылайыктуу маанилерин табабыз:

$$y = \frac{1}{10} \Rightarrow x = \frac{1}{1000}$$
$$y = 10 \Rightarrow x = 1000$$

Жообу: $\left(\frac{1}{1000}; \frac{1}{10}\right)$ жана (1000; 10).

7-мисал. $\begin{cases} \log_2(x - y) = 1, \\ 2^x \cdot 3^{y+1} = 72 \end{cases}$ теңдемелер системасын чыгаргыла.

Чыгаруу

Система аныкталган болушу үчүн $x - y > 0$, б. а. $x > y$ болушу керек. Анда системанын биринчи теңдемесинен

$$x - y = 2 \Rightarrow y = x - 2$$

байланыш келип чыгат. Системанын экинчи теңдемесинде y ордуна $x - 2$ туюнтманы коюп:

$$2^x \cdot 3^{x-2+1} = 72 \Rightarrow 2^x \cdot 3^x = 3 \cdot 72 \Rightarrow 6^x = 216 \Rightarrow 6^x = 6^3 \Rightarrow x = 3$$

табылат. Анда $y = 3 - 2$, б.а. $y = 1$ маани табылат.

Жообу: (3; 1).

МИСАЛДАР

1. Теңдемелер системасын чыгар.

a) $\begin{cases} 3^x \cdot 7^y = 63 \\ 3^x + 7^y = 16 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 9^x - 3 \cdot 5^y = 3 \\ 9^x \cdot 5^y = 18 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3^y \cdot 2^x = 972 \\ y - x = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4^{x+y} = 128 \\ 5^{3y-2x-3} = 1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 3^{-x} \cdot 2^y = 1152 \\ x + y = 5 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2^x \cdot 9^y = 648 \\ 3^x \cdot 4^y = 432 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = \dfrac{1}{9} \\ \dfrac{1}{9} \cdot 3^y = 3^x \end{cases}$ h) $\begin{cases} 2^y \cdot 8^{-x} = 8\sqrt{2} \\ y + 3x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ i) $\begin{cases} 4^{y-1} \cdot 5^x = 6400 \\ y - x = 3 \end{cases}$

2. Теңдемелер системасын чыгар.

a) $\begin{cases} \log_7 7x + \log_7 y = 2 \\ y - 5x = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \log_2 x - \log_2 y = 4 \\ y - x = 6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \log_2 \left(x^2 + y^2\right) = 5 \\ \log_2 x + \log_2 y = 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \log_3 2x - \log_3 \left(\dfrac{2}{y}\right) = 1 \\ 4x - y = 1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} \log_2 x - \log_4 y = 0 \\ \log_4 x + \log_2 y = 5 \end{cases}$ f) $\begin{cases} \log_2 2x + \log_2 \left(\dfrac{y}{2}\right) = -1 \\ x - y = -\dfrac{7}{4} \end{cases}$

3. Теңдемелер системасын чыгар.

a) $\begin{cases} 3^x - 2^{y^2} = 77 \\ 3^{\frac{x}{2}} - 2^{\frac{y^2}{2}} = 7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3 \cdot 2^x - 2^{x+y} = -2 \\ 5 \cdot 2^{x+1} - 2^{x+y+1} = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 9^x - 3 \cdot 2^y = 3 \\ 9^x \cdot 2^y = 18 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \lg x (\lg x + \lg y) = 2 \\ \lg x - \lg y = 3 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 3^x \cdot 25^y = 5625 \\ 5^x \cdot 9^y = 2025 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^{\sqrt{y}} = y \\ y^{\sqrt{y}} = x^4 \end{cases}$ Теңдемелер системасы тамырларын туюнтуучу чекиттер арасындагы аралыкты тапкыла.

5. $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 972, \\ \log_{\sqrt{3}}(x - y) = 2 \end{cases}$ x жана y теңдемелер системасы тамырлары болсо, xy ди тапкыла.

6. $\begin{cases} x^{y+1} = 27, \\ x^{2y-5} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$ x жана y теңдемелер системасы тамырлары болсо, $x + y$ ди тапкыла.

ЛОГАРИФМАЛЫК БАРАБАРСЫЗДЫКТАР

Логарифмалык барабарсыздыктар

$a>0$ жана $a\neq 1$ болсун. Анда

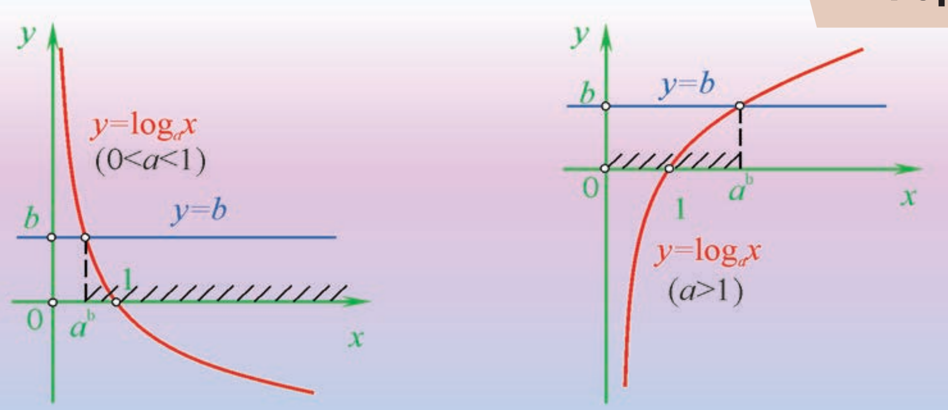
$$\log_a x<b,\ \log_a x>b,\ \log_a x\le b,\ \log_a x\ge b$$

барабарсыздыктар логарифмдик барабарсыздыктар болот. Аларды чечүүдө $y=\log_a x$ функциянын монотондугунан пайдаланылат.

$\log_a x<b$ барабарсыздыкты карап көрөлүү. Бул барабарсыздыктын x өзгөрмөнүн ушундай маанилери көптүгү болот, бул маанилерде $y=\log_a x$ функциянын Oxy координаталар системасындагы графиги $y=b$ түз сызыктан төмөндө жайгашкан болот.

$\log_a x<b$ барабарсыздык чечиминин геометриялык колдонуу

1-сүрөт



a) $\log_a x<b$ *барабарсыздыктын* $0<a<1$ *болгондогу чечими* $(a^b;\ +\infty)$ *аралыктан турат.*

b) $\log_a x<b$ *барабарсыздыктын* $a>1$ *болгондогу чечими* $(0;\ a^b)$ *аралыктан турат.*

$\log_a x>b$, $\log_a x\le b$, $\log_a x\ge b$ барабарсыздыктар чечимдеринин геометриялык колдонуусун өз алдынча келтиргиле.

Логарифмалык барабарсыздыктарды чыгаруу

Ушул $\log_a f(x)<\log_a g(x)$ логарифмдик барабарсыздыктарды чыгаруу:

$0<a<1$ болгондо $\begin{cases} f(x)>g(x), \\ g(x)>0 \end{cases}$

барабарсыздыктар системасынын чечиминен;

$a>1$ болгондо болсо $\begin{cases} f(x)<g(x), \\ f(x)>0 \end{cases}$ барабарсыздыктар системасынын чечиминен турат.

$\log_a f(x)\le\log_a g(x)$, $\log_a f(x)>\log_a g(x)$ жана $\log_a f(x)\ge\log_a g(x)$

барабарсыздыктардын чечилиши төмөнкү жадыбалда келтирилген.

Логарифмдик системасынын **түрү**	$\log_a f(x) \le \log_a g(x)$	$\log_a f(x) < \log_a g(x)$	$\log_a f(x) > \log_a g(x)$	$\log_a f(x) \ge \log_a g(x)$
$0 < a < 1$ болгондо	$\begin{cases} f(x) \ge g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} f(x) \le g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$
$a > 1$ болгондо	$\begin{cases} f(x) \le g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} f(x) \ge g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$

1-мисал. $\log_{27} x > \frac{1}{3}$ барабарсыздыкты чечкиле.

Чыгаруу

Аныкталуу областы $x > 0$. Логарифм негизиден чоң жана логарифм аныктамасынан пайдаланабыз:

$$\log_{27} x > \frac{1}{3} \Rightarrow x > 27^{\frac{1}{3}} \Rightarrow x > \sqrt[3]{27} \Rightarrow x > 3 \begin{cases} x > 3 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 3 \Rightarrow x \in (3;\ \infty)$$

Жообу: $x \in (3;\ \infty)$

2-мисал. $\log_{0,5}(2x-3) > \log_{0,5}(x+1)$ барабарсыздыкты чечкиле.

Чыгаруу

Барабарсыздыкты ага тең күчтүү болгон төмөнкү системага келтирип чечебиз:

$$\begin{cases} 2x-3 < x+1 \\ 2x-3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 4 \\ x > 1,5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 4 \\ x > 1,5 \end{cases} \Rightarrow x \in (1,5; 4)$$

Жообу: (1,5; 4)

3-мисал. $\log_7^2 x - 13\log_7 x + 42 \ge 0$ барабарсыздыкты чыгар.

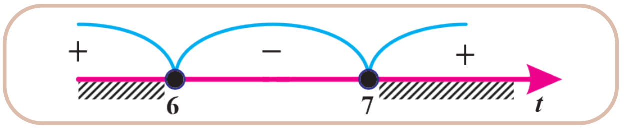
Чыгаруу

$t = \log_7 x$ белгилөө киритебиз. Мында $x > 0$ экендигин эске алабыз. Натыйжада

$$t^2 - 13t + 42 \ge 0$$

барабарсыздык пайда болот. Анын тамырлары:

$(t-6)(t-7) \ge 0$ барабарсыздыкты чыгарабыз.



Демек, $t \le 6$ же $t \ge 7$ экен. $\log_7 x \le 6$ же $\log_7 x \ge 7$ болот. Мындан $x \le 7^6$ же $x \ge 7^7$ барабарсыздыктар пайда болот. $x > 0$ шартын эске алсак,

$$x \in \left(0;\ 7^6\right] \cup \left[7^7; \infty\right)$$

болот.

Жообу: $x \in \left(0;\ 7^6\right] \cup \left[7^7; \infty\right)$.

$A \cdot \log_a^2 x + B \cdot \log_a x + C < 0$ сыяктуу барабарсыздыктар $log_a x = t$ белгилөө менен квадраттык барабарсыздыкка келтирип чыгарылат.

4-мисал. Барабарсыздыкты чыгар: $\log_3^2 x - 3\log_3 x + 2 \le 0$.

Чыгаруу

Аныкталуу областы $x > 0$.

$\log_3 x = t$ белгилөө киритебиз,

$t^2 - 3t + 2 \le 0$ барабарсыздыкты чыгарабыз,

$(t-1)(t-2) \le 0$, мындан $1 \le t \le 2$

$1 \le \log_3 x \le 2 \quad \Rightarrow \log_3 3 \le \log_3 x \le \log_3 9 \quad \Rightarrow 3 \le x \le 9$

Жообу: $[3;9]$

5-мисал. $\log_{x+1}\left(x^2+2x+1\right)^{x^2+2x+5} > 4x+28$ барабарсыздыкты чыгарабыз.

Чыгаруу

Барабарсыздыкты төмөндөгүчө жазып алабыз:

$$\log_{x+1}(x+1)^{2(x^2+2x+5)} > 4x+28$$

Бул жерде эки учур болуусу мүмкүн:

1-учур. $0 < x+1 < 1 \Rightarrow -1 < x < 0$

Мында: $2(x^2+2x+5) < 4x+28 \;\Rightarrow\; x^2+2x+5 < 2x+14 \;\Rightarrow\; x^2-9<0 \;\Rightarrow\; x \in (-3;\ 3)$

$\cancel{-1} \quad x \quad 0$ экенинен $x \in (-1;0)$.

2-учур. $x + ù > \quad \Rightarrow x >$

Мында:

$2(x^2+2x+5) > 4x+28 \;\Rightarrow\; x^2+2x+5 > 2x+14 \;\Rightarrow\; x^2-9>0 \;\Rightarrow\; x \in (-\infty;\ -3) \cup (3;\ \infty)$

$x > 0$ экенинен $x \in (3;\infty)$.

1- жана 2-учурду бириктирсек, барабарсыздыктын чечими төмөндөгүчө болот:

$$x \in (-1;0) \cup (3;\ \infty)$$

Жообу: $x \in (-1;0) \cup (3;\ \infty)$.

МИСАЛДАР

1. Барабарсыздыктарды чыгар.

a) $\log_2 x > 3$ b) $\log_{0,5} x > 2$ c) $\log_2 8 > x$

d) $\log_5 x > 3$ e) $\log_3 x > 4$ f) $\log_3 x \geq \log_6 36$

g) $\log_2 x < \log_{49} 7$ h) $\log_{\frac{1}{5}} (x-5) > -2$ i) $\log_3 (x+20) < 3$

j) $\log_3 (4x+2) - \log_3 10 < 0$ k) $\log_8 64 > \log_{\frac{1}{5}} x$ l) $\log_4 (5-x^2) > 1$

m) $\log_5 (3x-2x^2) > 0$ n) $\log^2_{\frac{1}{2}} x - 9 \leq 0$ o) $5^{\log_5(x-7)} < 4$

2. $\log_2(4-x) - \log_2 7 < 0$ барабарсыздыкты канаattандыруучу бүтүн сандар канча?

3. Барабарсыздыктарды чыгар.

a) $\log_{\frac{4}{3}} (x+6) - \log_{\frac{4}{3}} 9 < \log_{\frac{4}{3}} 2 - \log_{\frac{4}{3}} 6$ b) $\log_2 (x-1) < \log_2 (3x-1)$

c) $\log_{\frac{1}{3}} (2x-4) \geq \log_{\frac{1}{3}} (x+1)$ d) $\log_{\frac{1}{2}} (x^2-5x-6) \geq -3$

e) $\lg^2 x + 11 \cdot \lg x + 10 < 0$ f) $\log_2^2 x - 6\log_2 x + 8 \leq 0$

g) $\log_2 \log_{\sqrt{2}} (x+1) < 1$ h) $2\log_{\frac{1}{5}} (x-2) + 3\log_5 (x-2) < 1$

i) $\log_x x^2 + x > 1$ j) $\lg(x+2) + \lg(x-3) \leq \lg x^2$

4. Барабарсыздыктарды чыгар.

a) $\lg 10^{\lg(x^2+21)} > 1 + \lg x$ b) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\log_{0,25}(x^2-5x+8)} \leq 2,5$

c) $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}} (6^{x+1} - 36^x) \geq -2$ d) $\log_{\frac{x-1}{5x-6}} (\sqrt{6} - 2x) > 0$

e) $x^{1+\lg\sqrt{x}} < 0,1^{-2}$ f) $\sqrt{x^{4\lg x}} < 10x$

5. $\log_{0,2}(x^4+2x^2+1) > \log_{0,2}(6x^2+1)$ барабарсыздыктардын бардык терс чечимдеринин көптүгүн тапкыла.

КӨРСӨТКҮЧТҮҮ ЖАНА ЛОГАРИФМАЛЫК ФУНКЦИЯЛАРДЫ КОЛДОНУУ

Татаал пайыз формуласы жана анын колдонулушу

Кандайдыр Q_0 суммасы карызга алынат деп коёлу. Кредитор көрсөтүлгөн мезгил ичинде баштапкы сумманы кандайдыр P киреше менен кайтарып берүүнү талап кылышы мүмкүн. Демек, карыз алуучу көрсөтүлгөн мөөнөттө кайтарып бере турган сумма

$$Q_1 = Q_0 + P$$

болот. Мөөнөт катары бир күн, эки күн, ..., бир жума, эки жума, ..., бир ай , эки ай ж.б. кабыл алынышы мүмкүн. Бул учурда

$$p = \frac{P}{Q_0} \cdot 100\%$$

чоңдук *алынган кредитти өз убагында кайтаруу пайызы* деп аталат.

1. Жөнөкөй пайыздык формула. Эгерде пайыздар карызга алынган Q_0 суммага гана колдонулса, биринчи мөөнөттүн акырына карата карыздын суммасы

$$Q_1 = Q_0 + \frac{p}{100} \cdot Q_0 = \left(1 + \frac{p}{100}\right) Q_0$$

болот. Мында

$$P_1 = \frac{p}{100} \cdot Q_0 = P$$

биринчи мөөнөттүн аягында кредитордун кирешеси. Бул процессти n жолу кайталап, n-мөөнөттүн аягында карыздын суммасы

$$Q_n = \left(1 + \frac{np}{100}\right) Q_0$$

болушу, кредитордун n-мөөнөттүн аягындагы кирешеси

$$P_n = \frac{np}{100} \cdot Q_0 \quad (\text{аныкго } P_n = nP)$$

экени аныкталат. Мындай эсептелген пайыз ***жөнөкөй пайыз***,

$$Q_n = \left(1 + \frac{np}{100}\right) Q_0$$

формула болсо ***жөнөкөй пайыздык формула*** деп аталат.

2. Татаал пайыз формуласы. Алынган кирешени алынган карызга кошуу менен пайыздарды эсептөөгө болот. Бул учурда, биринчи мөөнөттүн аягындагы карыздын суммасы

$$Q_1 = Q_0 + \frac{p}{100} \cdot Q_0 = \left(1 + \frac{p}{100}\right) Q_0$$

болот. Мында

$$P_1 = \frac{p}{100} \cdot Q_0 = P$$

биринчи мөөнөттүн аягында кредитордун кирешеси. Бул процессти n жолу кайталап, n -мөөнөттүн аягында карыздын суммасы

$$Q_n = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n Q_0$$

болушу, кредитордун n -мөөнөттүн аягындагы кирешеси

$$P_n = Q_n - Q_0 = \left(\left(1+\frac{p}{100}\right)^n - 1\right)Q_0$$

экени аныкталат. Мындай эсептелген пайыздар ***татаал пайыздар***,

$$Q_n = \left(1+\frac{p}{100}\right)^n Q_0$$

жана бул формула ***татаал пайыздык формула*** деп аталат.

Жөнөкөй жана татаал пайыздык формулаларды колдонууга байланыштуу көптөгөн практикалык мисалдар жана маселелер бар. Бүгүнкү күндө кредит, ипотека карызы сыяктуу сөздөр көп кездешет. Ипотека карызын эсептөө маселесин чечүүнүн мисалын келтирели.

Адатта, карыз берүүчү банк түрүндө, ал эми карыз алуучу кардар катары көрсөтүлөт. Банктар турак жай (ипотека), унаа каражаты же үй товарларын (телевизор, муздаткыч, уюлдук телефон ж.б.) алууда бир нече жылга чейин узак мөөнөткө карыз беришет жана кардардан ай сайын белгилүү бир сумманы төлөп турууну талап кылышат.

1-мисал. Баштапкы баасы 360 000 000 сум болгон батир жаш үй-бүлө тарабынан 15 жылдык мөөнөткө 20% жылдык ипотека аркылуу алынган. 15 жылдын ичинде банкка канча акча кайтарылат? Банк андан канча пайда көрөт?

Чыгаруу

Банк тилиндеги алгачкы 360 000 000 сум негизги карыз деп аталат. Белгилей кетсек, 1 жыл 12 айдан турат. Ошондуктан кардар банктан ай сайын негизги карыздын

$$\frac{360\ 000\ 000}{15\cdot 12} = 2\ 000\ 000$$

суммасы кайтарылышы керек. Кайтарымдын биринчи айында пайда болгон пайыз төмөнкүдөй аныкталат:

$$a_1 = 360\ 000\ 000\cdot\frac{20\%}{100\%}\cdot\frac{1}{12} = 6\ 000\ 000 \text{ сум.}$$

Ошентип, кардар биринчи айдын аягында бардыгы болуп

$$2\ 000\ 000 + 6\ 000\ 000 = 8\ 000\ 000$$

сумма кайтарылышы керек. Андан кийин калган акча

$$360\ 000\ 000 - 2\ 000\ 000 = 358\ 000\ 000$$

сумма болот. Экинчи айдын аягында кардар негизги сумманын 2 000 000 сумун жана пайда болгон бул

$$360\ 000\ 000 - 2\ 000\ 000 = 358\ 000\ 000$$

сум пайыз суммасыны, ал эми жалпы сумма

$$2\ 000\ 000 + 5\ 966\ 667 = 7\ 966\ 667$$

сумду кайтарып берүүсү керек.

$(n-1)$-айдын суммасы төлөнгөндөн кийин,

$$360\ 000\ 000 - 2\ 000\ 000\cdot(n-1)$$

сум өлчөмүндө негизги карыз бойдон калууда. n-айдын аягында кардар банкка $2\ 000\ 000 + a_n$ суммасын төлөп берет. Бул жерде a_n айдын пайызы болуп,

$$a_n = \left(360\ 000\ 000 - 2\ 000\ 000 \cdot (n-1)\right) \cdot \frac{20\%}{100\%} \cdot \frac{1}{12} = (181-n) \cdot \frac{100\ 000}{3}$$

t барабардык аркылуу ишке ашат. Сен көрүп тургандай, a_1, a_2, ... , a_n кемүүчү арифметикалык прогрессия болуп анын айырмасы

$$d = a_n - a_{n-1} = (181-n) \cdot \frac{100\ 000}{3} - \left(181-(n-1)\right) \cdot \frac{100\ 000}{3} = -\frac{100\ 000}{3}, \text{ б. а. } d = -\frac{100\ 000}{3}$$

ке барабар.

Белгилүү болгондой, 15 жыл 180 айдан турат, ошондуктан $1 \le n \le 180$ болот. Демек,

$$a_1 = 6\ 000\ 000,\ a_{180} = \frac{100\ 000}{3}$$

болуп, арифметикалык прогрессиянын 180 мүчөсүнүн суммасы

$$S_{180} = \frac{a_1 + a_{180}}{2} \cdot 180 = \frac{6\ 000\ 000 + \frac{100\ 000}{3}}{2} \cdot 180 =$$

$$= \frac{18\ 000\ 000 + 100\ 000}{3} \cdot 90 = 18\ 100\ 000 \cdot 30 = 543\ 000\ 000$$

болот. Демек, кардар банкка жалпы

$$360\ 000\ 000 + 543\ 000\ 000 = 903\ 000\ 000$$

сумду кайтарып бериши керек. Мында банктын кирешеси 543 000 000 сум болот.

Радиоактивдүү ажыроо

Жарым ажыроо мезгили. Кээ бир химиялык элементтер өз ядролорунан бөлүкчөлөрдү чыгарышат. Мындай элементтер *радиоактивдүү элементтер* деп аталат, алардын өз ядролорунан бөлүкчө чыгаруу процесси ***радиоактивдүү ажыроо*** деп аталат. Радиоактивдүү ажыроонун натыйжасында баштапкы химиялык элемент башка химиялык элементке айланат.

Баштапкы химиялык элементтин массасы m_0 ал эми анын жарымынын талкаланышына кеткен убакыт T_1 болсун. Бул учурда $t_1 = T_1$ убакыт өткөндөн кийин ажырабай турган элементтин массасы $m_1 = \frac{m_0}{2}$ болуп, m_1 массанын жарымы ажырап кетиши үчүн T_2 убакыт кетсин. $t_2 = T_1 + T_2$ убакыттан кийин ажырабай турган элементтин массасы $m_2 = \frac{m_1}{2} = \frac{m_0}{2^2}$ болуп, массасынын жарымы ажырашы үчүн T_3 убакыт кетсин. Ошол сыяктуу эле, $t_3 = T_1 + T_2 + T_3$ убакыттан кийин ажырабай турган элементтин массасы $m_3 = \frac{m_2}{2} = \frac{m_0}{2^3}$ болуп, m_3 массасынын жарымы ажырашы үчүн T_4 убакыт кетсин. Бул процесс чексиз улана берсин.

Көп жылдык тажрыйбанын натыйжасында $T_1 = T_2 = T_3 = \ldots = T_n = T_{n+1} = \ldots$ экендигин далилденген. Демек, бир элементтин массасынын жарым ажыроого кеткен убакыт туруктуу чоңдук болуп саналат. Бул чоңдук ***элементтин жарым ажыроо мезгили*** деп аталат жана T менен белгиленет:

$$T = T_1 = T_2 = T_3 = \ldots = T_n = T_{n+1} = \ldots .$$

Натыйжада

$$t_1 = T_1 = T,$$
$$t_2 = T_1 + T_2 = 2T,$$
$$t_3 = T_1 + T_2 + T_3 = 3T, \ldots,$$
$$t_n = T_1 + T_2 + T_3 + \ldots + T_n = nT$$

барабардык түзүлөт. Баштапкы массасы m_0 болгон элементтин $t_n = nT$ убакыттан кийин ажырабай турган элементтин массасы $m_n = \dfrac{m_0}{2^n} = 2^{-n} m_0$ болуп. Бул жерде $n = \dfrac{t_n}{T}$ экендигин эске алсак, $m_n = 2^{-\frac{t_n}{T}} m_0$ барабардыкка ээ болобуз. Бул формула ыктыярдуу t моменти үчүн да жарактуу:

$$m(t) = 2^{-\frac{t}{T}} m_0.$$

Ошентип, радиоактивдүү элементтин ажырабай калган бөлүгүнүн массасы убакыттын көрсөткүчтүү функциясы болуп саналат.

2-мисал. Сутканын алгачкы 8 саатында радиоактивдүү заттын активдүүлүгү 4 эсеге төмөндөгөн. Заттын активдүүлүгү күн бою канча эсе төмөндөйт?

Чечүү. Каралып жаткан заттын баштапкы массасы m_0 болуп, ал эми жарым ажыроо мезгили T га барабар болсун. 8 сааттан кийин анын массасы $m(8) = \dfrac{m_0}{4}$ болгон. Бул берилгендер үчүн $m(t) = 2^{-\frac{t}{T}} m_0$ формуланы колдонуп, заттын жарым ажыроо мезгили табылды:

$$m(8) = 2^{-\frac{8}{T}} m_0 \;\Rightarrow\; \frac{m_0}{4} = 2^{-\frac{8}{T}} m_0 \;\Rightarrow\; 2^{\frac{8}{T}} = 2^2 \;\Rightarrow\; \frac{8}{T} = 2 \;\Rightarrow\; T = 4 \text{ саат}.$$

Эми $m(t) = 2^{-\frac{t}{T}} m_0$ формуланы дагы бир жолу $t = 24$ (бир сутка = 24 саат) үчүн иштетип, радиоактивдүү заттын активдүүлүгү сутка ичинде канча жолу төмөндөшү табылат:

$$m(24) = 2^{-\frac{24}{T}} m_0 = 2^{-6} m_0 = \frac{m_0}{64}.$$

Ошентип, сутка ичинде радиоактивдүү заттын активдүүлүгү 64 эсеге төмөндөйт.

Кошумча нарк салыгы

Кошумча нарк салыгы кыскача КНС деп аталат.

Сен *салык* түшүнүгү менен таанышсың. Товарларды өндүрүүчү же импорттоочу (дүң же чекене сатуучу) мамлекетке сатуу салыгын төлөшү керек. *Кошумча нарк салыгы* – бул өндүрүүчүдөн чекене сатуучуга чейинки жеткирүү тармагынын көптөгөн баскычтарында өкмөт тарабынан алынуучу салык. Ар бир этапта сатуудан алынуучу салык товардын кошумча наркына гана салынат. Сатуудан түшкөн салыктын акыркы абалы керектөөчүгө жүктөлөт.

Бул баштапкы өндүрүүчүдөн сатуучуга товардын ар бир өтүшүнө кошулган кошумча нарк салыгы.

КНС ставкасы 10% дейли жана ишкер 8 000 000 сумга товар сатып алды, ал төлөгөн салык = 8 000 000 сумдун 10% = 800 000 сум.

Эми ошол эле буюмду 11 500 000 сумга сатса.

андан алынган салык = 11 500 000 сумдун 10% = 1 150 00 сум.

Ишкер үчүн КНС = 1 150 000 – 800 000 = 350 000 сум болот.

МИСАЛДАР (*калькуляторду колдонсо болот*)

1. Баштапкы баасы 360 000 000 сум болгон үйдү 20 жылдык ипотека аркылуу жылдык 18% менен батир алган үй-бүлө мөөнөтү бүткөндө банкка канча акча кайтарат? Банк канча пайда табат?

2. 8 пайыздык үстөк менен 3 жылга 5000 доллар боюнча татаал пайызды тапкыла.

3. Вахид 50 миллион сум карыз алып, биринчи, экинчи жана үчүнчү жыл үчүн 10%, 12% жана 14% үстөк төлөп берүүгө макул болгон. 3 жылдан кийин төлөнүүчү жалпы сумманы тапкыла.

4. Бир адам банкка 100 миллион сум салган. Анын ордуна 133,1 миллион сум алган. Банк жылына 10% үстөк берип турган. Ал акчаны канча убакытка чейин банкта сактаган?

5. Аманатчы банк эсебине 26 миллион сум которгон. 18 ай дан кийин анын эсебинде 32 миллион сум болгон. Жылдык пайыздык ставкасы кандай?

6. Менде 400 доллар бар. Менин досум банкка инвестиция салууну сунуштады. Мен чет элдик валюталык эсепке жылдык 13% менен жана ай сайын 1% толуктоо менен суммалык эсепке инвестицияладым.

a) Валюта эсебине акча салсам, бир жылда канча алам?

b) Бул акчаны толугу менен суммага айлантып, суммалык эсепке салсам, бир жылда канча доллар алам? Доллардын жана сумдун курсун эске алгыла.

7. Мурад 10 миллион сумга товар алса, 7% салык төлөйт. Ошол эле товарды 13 миллион сумга сатса, 9% салык алат. Мурад төлөй турган КНСти билип тапкыла.

8. Эгерде ишкер бир буюмду 7500000 сумга сатса, ал сатып алуучудан 12% өлчөмүндө сатуу салыгын алат. Ал 180 000 сум өлчөмүндө КНС төлөсө, ишкер төлөгөн салыкты эске алуу менен баштапкы бааны эсептегиле.

9. Өндүрүүчү өз продукциясынын баасын ар бири 12 000 000 деп жарыялады. Ал дүң сатуучуга 30%, ал эми дүң сатуучу өз кезегинде чекене сатуучуга жарнамаланган баадан 20% арзандатууга уруксат берген. Эгерде товарга белгиленген сатуу салыгынын ставкасы 10% болсо жана чекене сатуучу аны керектөөчүгө жарыяланган баада сатса, дүң жана чекене сатуучу төлөгөн кошумча нарк салыгын тапкыла.

10. Чекене сатуучу дүң сатуучудан 80 000 сумга товар сатып алат, ал эми дүң сатуучу 8% белгиленген ставка менен сатуудан салык алат. Чекене сатуучу бааны 100 000 сум деп белгилейт жана керектөөчүлөрдөн сатуудан түшкөн салыкты ошол эле өлчөмдө алат.

Чекене сатуучу мамлекетке канча КНС төлөйт?

4-ГЛАВА. ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫК ФУНКЦИЯЛАР

- ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫК ФУНКЦИЯЛАР. МЕЗГИЛДИК ПРОЦЕССТЕР
- ТЕСКЕРИ ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫК ФУНКЦИЯЛАР

ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫК ФУНКЦИЯЛАР ЖАНА АЛАРДЫН КАСИЕТТЕРИ, ГРАФИГИ. МЕЗГИЛДИК ПРОЦЕССТЕР

Тригонометриялык функциялар. Мезгилдүү процесстер

Табиятта, технологияда, өндүрүштө жана башка тармактарда убакыттын өтүшү менен кайталануучу көптөгөн окуялар жана процесстер бар. Мисалы, күндүн чыгышы, мезгилдин алмашышы, ичтен күйүүчү кыймылдаткычтагы поршендин кыймылы жана башкалар убакыттын өтүшү менен кайталанат. Мындай процесстер ***мезгилдүү процесстер*** деп аталат. Мезгилдүү процесстер тригонометриялык функциялар менен сүрөттөлөт.

Тригонометриялык функцияларды изилдөөдө:

1) бурчтун чоңдугунун даражасын өлчөө;

2) 1° бурчтун 60 дан бир бөлүгү 1 *минут* (белгилениши $1'$), $1'$ дан бир бөлүгү 1 секунд (белгилениши $1''$) экендигин, б.а.

$$1' = \frac{1^\circ}{60},\ 1'' = \frac{1'}{60} = \frac{1^\circ}{3600}$$

барабардыктарды;

3) бурч чоңдугунун радиандык ченин;

4) бурчтун радиандык ченинен градустук ченине өтүү

$$\alpha\ rad = \left(\frac{180}{\pi}\cdot\alpha\right)^\circ$$

формуласын;

5) бурчтун градустук ченинен радиандык ченине өтүү

$$\alpha^\circ = \left(\frac{\pi}{180}\cdot\alpha\right)rad$$

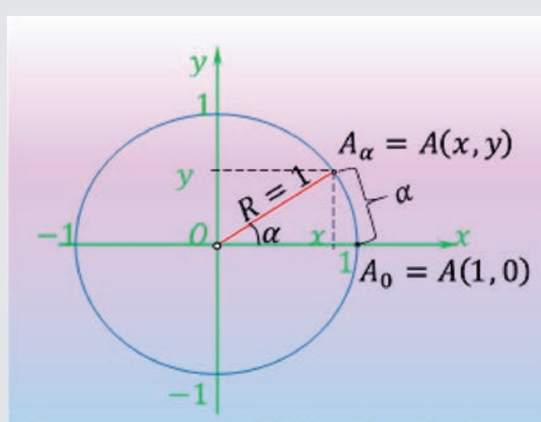
формуласын;

6) келтирүү формулаларын билүү талап кылынат.

Бурчтун синусу, косинусу, тангенс жана котангенси

Oxy Декарттык координаталар системасы киргизилген тегиздикте борбору координаталардын башатында турган **бирдик тегеректи** (б.а. радиусу 1ге барабар тегерек) карайбыз. $A_\alpha = A\ (1;\ 0)$ чекитти аныктайбыз. Айланада A_0 чекитинен сааттын жебесине каршы (б.а. **оң**) багытта узундугу α га барабар жаа ажырата алабыз жана анын акырыны A_α аркылуу белгилейбиз (1-*сүрөт*). Бурч өлчөмүнүн радиандык ченинини аныкталгандай A_0OA_α бурчтун өлчөмү α радианга барабар:

1-сүрөт



α радиан бирдик айланадагы узундугу α болгон A_0A_α жаа борбордук бурчтун бурчтук өлчөмү болуп саналат

$$\alpha = \angle A_0OA_\alpha.$$

Көңүл бургула! A_α чекит Oxy тегиздигинде айрым координаттар болот.

Айталы, A_α чекиттин Oxy тегиздигиндеги координаттары $(x; y)$ болсун.

Аныктама

1) x чоңдугу α бурчтун *косинусу* деп аталат жана $\cos\alpha$ аркылуу аныкталат.

2) y чоңдугу α бурчтун *синусу* деп аталат жана $\sin\alpha$ аркылуу аныкталат.

3) $\frac{y}{x}$ катышы α бурчтун *тангенси* деп аталат жана $tg\alpha$ аркылуу аныкталат.

4) $\frac{x}{y}$ катышы α бурчтун *котангенси* деп аталат жана $ctg\alpha$ аркылуу аныкталат.

Демек, аныктама боюнча:

$$\cos\alpha = x, \qquad \sin\alpha = y, \qquad tg\alpha = \frac{y}{x}, \qquad ctg\alpha = \frac{x}{y} \qquad (1)$$

болот.

Эскертүү! Эгерде бирдик айланасынын ордуна R радиусту айлана каралса, анда

$$\cos\alpha = \frac{x}{R}, \qquad \sin\alpha = \frac{y}{R}, \qquad tg\,\alpha = \frac{y}{x}, \qquad ctg\,\alpha = \frac{x}{y} \qquad (1')$$

барабардыктар түзүлөт.

Албетте, айланадагы A_0 чекитти берилген бурчка төмөнкүдөй эки багытта борбордук буруу мүмкүн:

Оң бурулуу: бурулуш сааттын жебесине каршы багытта жүргүзүлөт.

Терс бурулуу: айлануу саат жебеси боюнча жүргүзүлөт.

$y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tgx$, $y = ctgx$ функциялар жана алардын касиеттери, графиги

Ар бир x санына бирдик айланадагы A_0 чекитинен баштап x бурчка бурууда пайда болгон A_x чекитти дал коёлу. Анда, айланадагы A_x чекит үчүн $\sin x$, $\cos x$, tgx, $ctgx$ маанилерди эсептөөгө болот. Натыйжада x санга $\sin x$, $\cos x$, tgx, $ctgx$ маанилерди дал коючу жана ***тригонометриялык функциялар*** деп аталган бул

$$y = \sin x, \ y = \cos x, \ y = tgx, \ y = ctgx$$

функцияларга ээ болот.

Бул функциялар мезгилдүү, башкача айтканда, ар бир $k \in Z$ үчүн төмөнкү барабардыктар орунду болот:

$$\sin(x + 2\pi k) = \sin x$$

$$\cos(x + 2\pi k) = \cos x$$

$$tg(x + \pi k) = tgx$$

$$ctg\left(x+\pi k\right)=ctgx$$

Демек, $y = sinx$ жана $y = cosx$ функцияларынын негизги мезгили $T_0 = 2\pi$ жана $y = tgx$ жана $y = ctgx$ функцияларынын негизги мезгили $T_0 = \pi$ экен.

$y = cosx$ функция жуп:

$$f\left(-x\right)=cos\left(-x\right)=cos\,x=f\left(x\right).$$

$y = sinx$, $y = tgx$, $y = ctgx$ функциялар болсо так:

$$f\left(-x\right)=sin\left(-x\right)=-sin\,x=-f\left(x\right)$$

$$f\left(-x\right)=tg\left(-x\right)=-tg\,x=-f\left(x\right)$$

$$f\left(-x\right)=ctg\left(-x\right)=-ctg\,x=-f\left(x\right)$$

Белгилүү болгондой,

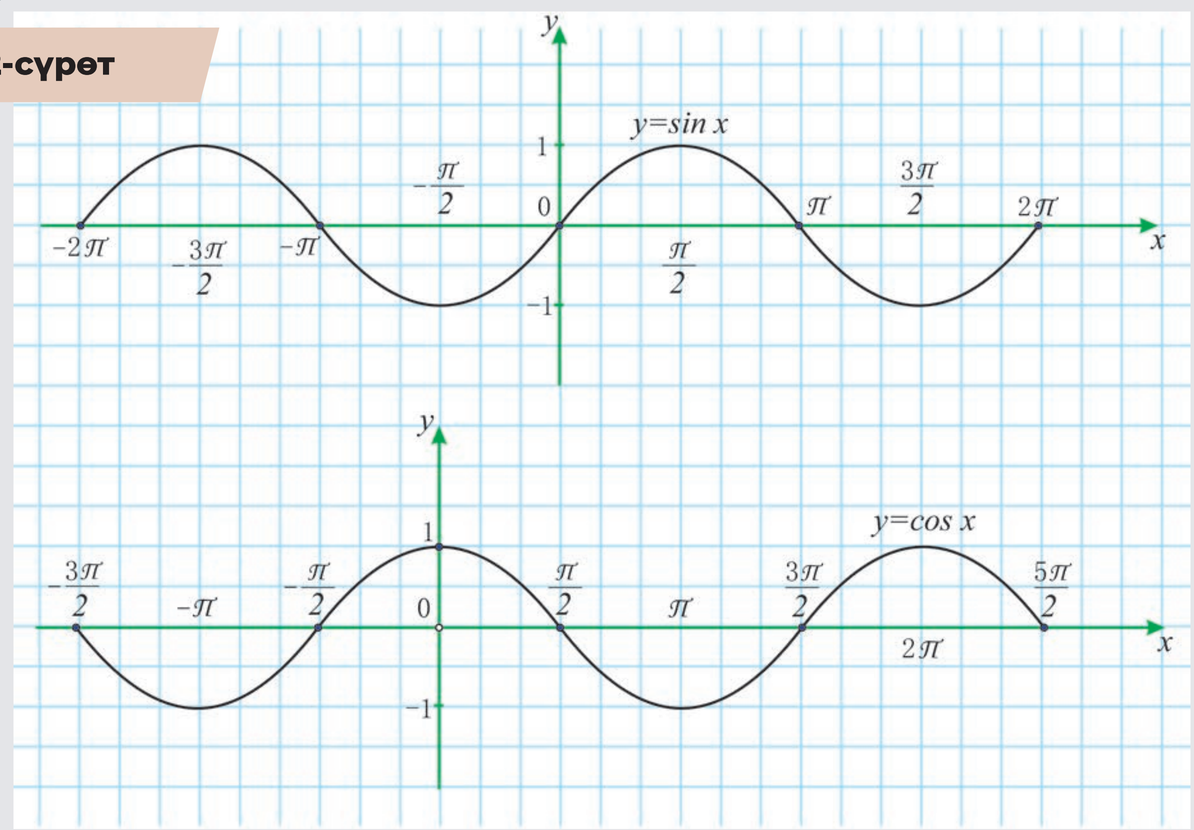
$y = sinx$ жана $y = cosx$ функциялар үчүн $D(y) = (-\infty; +\infty)$, $E(y) = [-1; 1]$,

$y = tgx$ функция үчүн $D\left(y\right)=\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k\in Z$, $E\left(y\right)=\left(-\infty,+\infty\right)$,

$y = ctgx$ функция үчүн $D\left(y\right)=\left(\pi k;\ \pi+\pi k\right)$, $k\in Z$, $E\left(y\right)=\left(-\infty,+\infty\right)$ болот.

Төмөндөгү сүрөттөрдө тригонометриялык функциялардын графиктери көрсөтүлгөн.

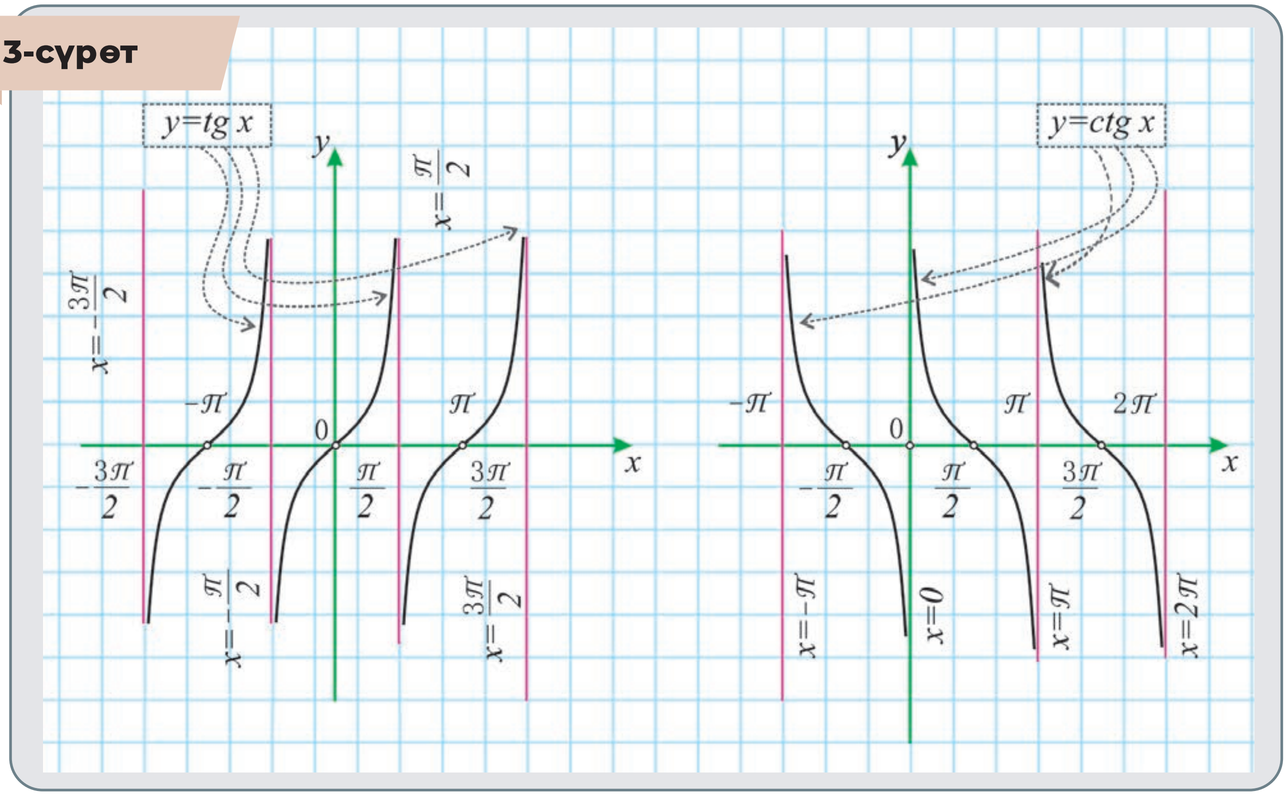
2-сүрөт



Бул графиктерден төмөнкүдөй маанилүү корутундулар чыгат:

1) $y = sinx$ функция $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ аралыкта өсөт жана бул аралыктан алынган ар бир x үчүн y $[-1; 1]$ кесилиштеги жалгыз мааниси дал келет;

3-сүрөт



2) $y = cosx$ функция $[0; \pi]$ аралыкта кемийт жана бул аралыктан алынган ар бир x үчүн y $[-1; 1]$ кесилиштеги жалгыз мааниси дал келет;

3) $y = tgx$ функция $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ аралыкта өсөт жана бул аралыктан алынган ар бир x үчүн y $(-\infty; +\infty)$ кесилиштеги жалгыз мааниси дал келет;

4) $y = ctgx$ функция $(0; \pi)$ аралыкта кемийт жана бул аралыктан алынган ар бир x үчүн y $(-\infty; +\infty)$ кесилиштеги жалгыз мааниси дал келет.

Аныкталуу областын табуунун мисалдарын чечүүдө, айрым учурларда функция аныкталбаган чекиттерди көрсөтүү жетиштүү болот.

1-мисал. $y = 2tg(3x-1)$ функциянын аныкталуу областын тап.

Чечүү. Белгилүү болгондой, $y = tgx$ функция $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$ чекиттери аныкталган эмес, ошол, себептен $y = 2tg(3x-1)$ функциянын аргументы $3x-1 = \frac{\pi}{2} + \pi n$ маанилеринде аныкталган эмес. Бул жерден $x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{1}{3} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z$.

Жооп: $y = 2tg(3x-1)$ функция $x = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{3} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z$ чекиттерден башка бардык чыныгы сандар менен аныкталат.

2-мисал. $y = 2 - \frac{1}{3}cos(5x-4)$ функциянын маанилердин көптүгүн тап.

Чечүү. Бул мисалды чечүүдө

$$-1 \leq cos\,x \leq 1$$

Кош барабарсыздык x тин бардык маанилери үчүн орундуу болушунан колдонобуз. Демак,

$$-1 \le cos(5x-4) \le 1$$

Жогорудагы кош барабарсыздык $-\frac{1}{3}$ кө көбөйтүп, төмөнкү барабарсыздыкты түз:

$$-\frac{1}{3} \le -\frac{1}{3}cos(5x-4) \le \frac{1}{3}$$

Бул барабарсыздыктын ар бир тарабына 2 ден кошолу,

$$2-\frac{1}{3} \le 2-\frac{1}{3}cos(5x-4) \le 2+\frac{1}{3}$$

$$1\frac{2}{3} \le 2-\frac{1}{3}cos(5x-4) \le 2\frac{1}{3}$$

же

$$1\frac{2}{3} \le y \le 2\frac{1}{3} \text{ пайда болот.}$$

Жообу: Берилген функциянын маанилеринин көптүгү $\left[1\frac{2}{3};2\frac{1}{3}\right]$ кесиндиден турат, же $E(y)=\left[1\frac{2}{3};2\frac{1}{3}\right]$.

Белгилүү болгондой, $y=f(x)$ функциянын негизги мезгили T болсо, $y=af(kx+b)$ функция үчүн $\frac{T}{|k|}$ чоңдук эң кичине оң мезгили болот ($k \ne 0$).

3-мисал. $y=2sin\left(\frac{4}{3}x+7\right)$ функциянын эң кичине оң мезгилин тапкыла.

Чечүү. $y=sin\,x$ функциянын негизги мезгили 2π ге барабар. Ошондуктан $y=2sin\left(\frac{4}{3}x+7\right)$ функциянын эң кичине оң мезгили

$$T=\frac{2\pi}{\frac{4}{3}}=\frac{3\pi}{2} \text{ болот.}$$

Жооп: Берилген функциянын эң кичине оң мезгили $\frac{3\pi}{2}$.

МИСАЛДАР

1. Функциянын аныкталуу областын тап.

a) $y=cos\,3x$ b) $y=sin\frac{2x-1}{5}$ c) $y=sin\frac{1}{x+5}$ d) $y=sin\sqrt{\frac{1-x}{x+3}}$

e) $y=tg3x$ f) $y=ctg\frac{2x}{5}$ g) $y=tg\frac{1}{x}$

2. Функциянын маанилер көптүгүн тап.

a) $y=-1+cos\,x$ b) $y=-6\,sin\,3x\,cos\,3x$ c) $y=2+cos\,x$ d) $y=-3\,sin\,2x+2$

e) $y=5tg4x$ f) $y=3-4\,cos\,5x$ g) $y=-5+\frac{1}{2}cos\,x\,sin\,x$

3. Функциянын жуп же так экенин аныкта.

a) $y=2xtgx$ b) $y=x^3-tg^3x$ c) $y=tgx\,sin^2x$ d) $y=tg2x+2\,sin\,x$

e) $y = x^2 + tg^2 x$ f) $y = tg10|x|$ g) $y = \dfrac{x^2 + \cos x}{2}$ h) $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{x+5}$

4. $y = sinx$ функция графигин колдонуп төмөнкү функциялардын графигин түзгүлө.

a) $y = -sinx$ b) $y = 2sinx$ c) $y = -0,5sinx$ d) $y = |sinx|$

e) $y = \sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$ f) $y = |sin|x||$ g) $y = 1 + sinx$ h) $y = sin2x$

5. $y = cosx$ функция графигин колдонуп төмөнкү функциялардын графигин түзгүлө.

a) $y = -cosx$ b) $y = 0,5cosx$ c) $y = cos2x$ d) $y = |cosx|$

e) $y = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$ f) $y = |cos|x||$ g) $y = 2 - cosx$ h) $y = cos4x$

6. Функциянын графигин түзгүлө.

a) $y = tg2x$ b) $y = ctg\dfrac{x}{2}$ c) $y = 2tgx$ d) $y = \dfrac{1}{3}ctgx$

7. 7. Функциянын жуп же так экенин аныктагыла.

a) $y = \dfrac{\cos 2x - \sin^2 x}{x^2}$ b) $y = ctg3x + 5sinx$ c) $y = sin5x$

d) $y = 2sin^2x$ e) $y = sin^2x + sinx$ f) $y = 5sin^3x + 2sinx$

8. $f(x)$ функциясы ǔ$-\infty$ ∞ интервалында аныкталсын:

a) $f(x) + f(-x)$ жуп функция экенин көрсөткүлө.

b) $f(x) - f(-x)$ х) так функция экенин көрсөткүлө.

9. Функциянын эң кичине оң мезгилин тапкыла.

a) $f(x) = cos(3x+1)$ b) $f(x) = \sin\left(\dfrac{x}{4} - 3\right)$ c) $f(x) = tg(2x+1)$

d) $f(x) = sin2\pi x$ e) $f(x) = \cos\sqrt{3x}$ f) $f(x) = tg(4\pi x - 3)$

10. Берилген $f(x)$ функциясынын эң кичине оң мезгилин тапкыла:

a) $f(x) = \sin\dfrac{3x}{2} + tg7x$ b) $f(x) = \cos x + 2\sin\left(\dfrac{3x}{5} + \dfrac{\pi}{6}\right)$

c) $f(x) = ctg(x - 1) - 3sin3x$ d) $f(x) = \sin 3x + \cos\dfrac{3x}{4} + \dfrac{1}{2}tg\dfrac{9x}{5}$

11. $T = -5\pi$ саныі $f(x) = \sin 6x$ функциянын мезгили экендигин көрсөт.

12. $T = \pi$ саны $f(x) = \sqrt{\sin 2x + 1}$ функциянын мезгили экендигин көрсөт.

13. Төмөнкү функциялардын кай биринде эң кичине оң мезгили π га барабар.

a) $y = sinx$ b) $y = cosx$ c) $y = tgx$ d) $y = ctgx$

14. Функциялардын графигин түз.

a) $y = |\sin x|$ b) $y = |\cos x|$ c) $y = |tgx|$ d) $y = |ctgx|$

ТЕСКЕРИ ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫК ФУНКЦИЯЛАР ЖАНА АЛАРДЫН КАССИЕТТЕРИ, ГРАФИГИ

Тескери тригонометриялык функциялар

Күнүмдүк жашообузда курулуштарды, көпүрөлөрдү, унааларды, электр станцияларын, самолётордун жана башка шаймандарды урандыга айланткан резонанс кубулушу бар. Резонанс кубулушу мезгилдүү процесстердин өз ара шайкештешүүсүнүн натыйжасында байкалат. Мындай учурлардын алдын алуу үчүн, тригонометриялык функциялар аргументте берилген маанини, башкача айтканда, тескери тригонометриялык функцияларды кандай мааниде кабыл алаарын билүү керек.

Тескери тригонометриялык функцияларды изилдөөдө төмөнкүлөрдү билүү талап-кылынат:

1) тригонометриялык функциялардын мезгилдүүлүгүн жана алардын негизги мезгилдерин;

2) $y = sinx$ функция $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ аралыкта өсөт жана бул аралыктан алынган ар бир x ге y тин $[-1; 1]$ кесилиштеги жалгыз мааниси дал келет;

3) $y = cosx$ функция $[0; \pi]$ аралыкта кемийт жана бул аралыктан алынган ар бир x үчүн y $[-1; 1]$ кесилиштеги жалгыз мааниси дал келет;

4) $y = tgx$ функция $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ аралыкта өсөт жана бул аралыктан алынган ар бир x үчүн y $(-\infty; +\infty)$ интервалдагы жалгыз мааниси дал келет;

5) $y = ctgx$ функция $(0; \pi)$ аралыкта кемийт жана бул аралыктан алынган ар бир x үчүн y тин $(-\infty; +\infty)$ интервалдагы жалгыз мааниси дал келет.

y = arcsinx функция жана анын касиеттери, графиги

$$y = sinx$$

теңдеме $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ аралыкта x өзгөрмөгө карата бир маанилүү чечилет жана бул тамыр

$$\boldsymbol{x = arcsiny}$$

түрүндө жазылат. Бул теңдик менен $[-1; 1]$ топтомдун ар бир y элементине $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ топтомдун жалгыз x элементке туура келген арксинус функциясы аныкталат. Бул аныкталган аргументти x менен, функцияны у менен белгилейбиз жана аны

$$\boldsymbol{y = arcsinx}$$

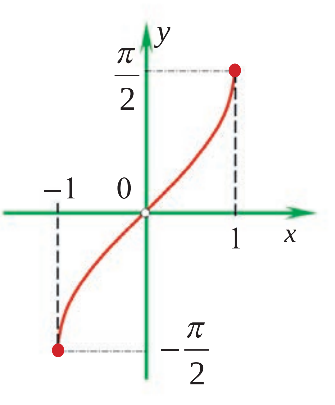
көрүнүштө жазабыз (1-*сүрөт*).

y* = *arcsinx функция ***y* = *sinx*** функцияга тескери функция болот:

$$sin(arcsinx) = x, \quad x \in [-1; 1]$$

$$arcsin(sinx) = x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$$

1-сүрөт



y* = *arcsinx
функциянын графиги

$y = \arcsin x$ функционалдык касиеттери:

- $D(y)=[-1;1]$;
- $E(y)=\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$;
- $y = \arcsin x$ – өсүүчү функция;
- $y = \arcsin x$ функциянын эң чоң мааниси $\frac{\pi}{2}$ ге, эң кичине мааниси $-\frac{\pi}{2}$ ге барабар;
- $y = \arcsin x$ функциянын графиги координаталык баштан өтөт;
- $y = \arcsin x$ – так функция, б. а. $\arcsin(-x) = -\arcsin x$;
- $y = \arcsin x$ функция мезгилдүү эмес.

1-мисал. $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$ туюнтуунун маанисин тапкыла.

Чыгаруу. Айталы, $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = x$ болсун. Анда берилген тапшырма башкача коюлушу мүмкүн: $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ барабарсыздыкты канааттандыруучу x ; нын $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ интервалдагы маанисин тап. Белгилүү болгондой, $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ барабардык $x = \frac{\pi}{3}$ болгондо аткарылат. Демек, $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$.

Төмөнкү таблицада $\arcsin x$ туюнтмасынын кээ бир маанилери келтирилген.

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

$y = \arccos x$ функция жана анын касиеттери, графиги

$$y = \cos x$$

барабардык [0; π] интервалда x өзгөрмөгө карата бир маанилүү чечим болуп саналат жана бул чечим

$$x = \arccos y$$

көрүнүштө жазылат. Бул барабардык менен [–1; 1] топтомдун ар бир y элементине $[0; \pi]$ көптүктүн бир гана x элементке туура келген арккосинус функциясы аныкталат. Аныкталган бул дал келүүдө аргументти х аркылуу, функцияны болсо y аркылуу белгилеп, аны

$$y = \arccos x$$

көрүнүштө жазабыз (2-*сүрөт*).

$y = \arccos x$ функция **$y = \cos x$** функцияга тескери функция болот:

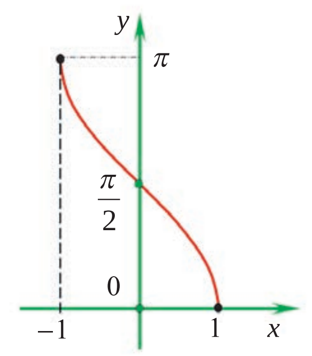
$$\cos(\arccos x) = x, \quad x \in [-1; 1]$$

$$\arccos(\cos x) = x, \quad x \in [0; \pi]$$

y = arccosx функция төмөнкү касиеттерге ээ:

- $D(y)=[-1;1]$;
- $E(y)=[0;\pi]$;
- *y = arccosx* – кемүүчү функция;
- *y = arccosx* функциянын эң чоң мааниси π ге, эң кичине мааниси 0 гө барабар;
- *y = arccosx* функциянын графиги *Ox* огунун абсциссасын *x* = 1 болгон (1; 0) чекитте, *Oy* огу болсо ординатасы $y=\frac{\pi}{2}$ болгон $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ бир чекитте кесилишет;
- *y = arccosx* – так да эмес, жуп да эмес. Бул жерде *arccos*(–*x*) = *π* – *arccosx* барабардык ылайыктуу болот;
- *y = arccosx* аныкталуу областы мезгилдүү эмес.

2-сүрөт



y = arccosx функциянын графиги

2-мисал. $arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$ туюнтманын маанисин тапкыла.

Чечүү. Айталы, $arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=x$ болсун. Анда берилген тапшырма башкача коюлушу мүмкүн: $cosx=\frac{\sqrt{2}}{2}$ барабарсыздыкты канааттандыруучу *x* нын [0; π] интервалдагы маанисин тапкыла. Белгилүү болгондой, $cosx=\frac{\sqrt{2}}{2}$ барабардык $x=\frac{\pi}{4}$ болгондо аткарылат. Демек,

$$arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}.$$

Төмөнкү таблицада *arccosx* туюнтмасынын кээ бир маанилери келтирилген.

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
arccosx	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

y = arctgx функция жана анын касиеттери, графиги

$$y = tgx$$

барабардык $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ интервалда *x* өзгөрмөгө карата бир маанилүү чечим болуп саналат жана бул

$$x = arctgy$$

чечим көрүнүштө жазылат. Бул барабардык менен *R* = (–∞; +∞) топтомдун ар бир *y* элементине $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ көптүктүн биргана *x* элементке дал келген арктангенс функциясы аныкталат. Бул аныкталган дал келүүчүлүктө биз аргументти x менен, функцияны y менен белгилейбиз жана аны

$$y = \mathrm{arctg}x$$

көрүнүштө жазабыз (3-*сүрөт*).

$y = \mathrm{arctg}x$ функция $y = \mathrm{tg}x$ функцияга тескери функция болот:

$$\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}x) = x, \quad x \in (-\infty; +\infty)$$

$$\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}x) = x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

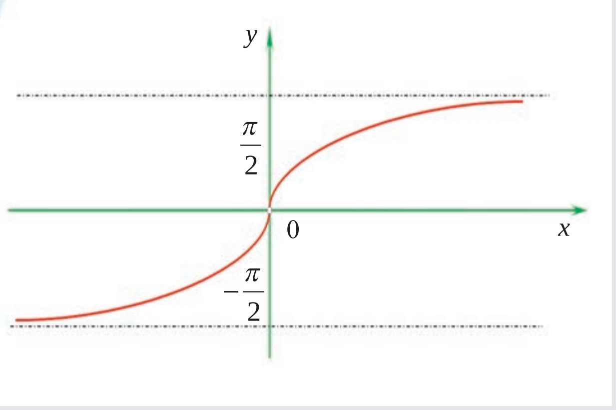
$y = \mathrm{arctg}x$ функция төмөнкү касиеттерге ээ:

- $D(y) = (-\infty; +\infty)$;
- $E(y) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;
- $y = \mathrm{arctg}x$ – өсүүчү функция;
- $y = \mathrm{arctg}x$ функция максималдуу жана минималдуу маанилерге жетпейт;
- $y = \mathrm{arctg}x$ функциянын графиги координаталык баштан өтөт;
- $y = \mathrm{arctg}x$ – так функция, б. а.

$$\mathrm{arctg}(-x) = -\mathrm{arctg}x;$$

- $y = \mathrm{arctg}x$ функция мезгилдүү эмес.

3-сүрөт



$y = \mathrm{arctg}x$ функциянын графиги

3-мисал. $\mathrm{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ туюнтманын маанисин тапкыла.

Чечүү. Айталы, $\mathrm{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = x$ болсун. Анда $\mathrm{tg}x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ барабардыкты канааттандыруучу x тын маанисин табуу талап кылынат.

Белгилүү болгондой, $\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ болот. Демек, $\mathrm{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$.

Төмөнкү таблицада $\mathrm{arctg}x$ туюнтмасынын кээ бир маанилери келтирилген.

x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\mathrm{arctg}x$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

$y = arcctgx$ функция жана анын касиеттери, графиги

$$y = ctgx$$

барабардык $(0;\ \pi)$ интервалда x өзгөрмөгө карата бир маанилүү чечим болуп саналат жана бул чечим

$$x = arcctgy$$

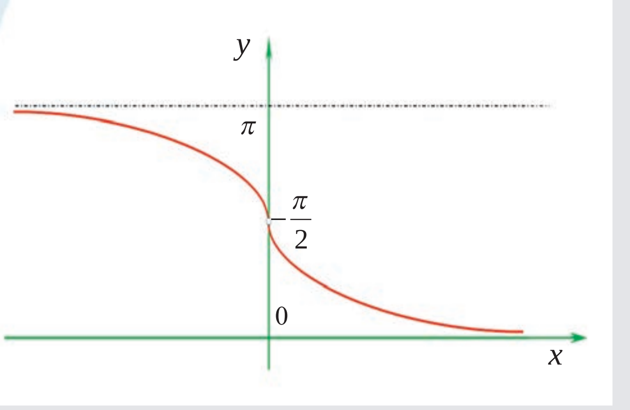
көрүнүштө жазылат. Бул барабардык менен $R = (-\infty;\ +\infty)$ топтомдун ар бир y элементине $(0;\ \pi)$ көптүктүн биргана x элементини дал келүүчү арккотангенс функциясы аныкталат. Бул аныкталган – дал келүүчүлүктө биз аргументти x менен, функцияны y менен белгилейбиз жана аны

$$y = arcctgx$$

көрүнүштө жазабыз (4-*сүрөт*).

$y = arcctgx$ функция $y = ctgx$ функцияга тескери функция болот:

4-сүрөт



y = arcctgx функциянын графиги

$$ctg(arcctgx) = x,\quad x \in (-\infty;\ +\infty),\quad arcctg(ctgx) = x,\quad x \in (0;\ \pi).$$

$y = arcctgx$ функция төмөнкү касиеттерге ээ:

- $D(y) = (-\infty; +\infty)$;
- $E(y) = (0; \pi)$;
- $y = arcctgx$ – кемүүчү функция;
- $y = arcctgx$ функция максималдуу жана минималдуу маанилерге жетпейт;
- $y = arcctgx$ функциянын графиги Ox огу менен кесишпейт, Oy огунун абсциссасын $y = \dfrac{\pi}{2}$ болгон $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ чекитте кесилишет;
- $y = arcctgx$ – так да эмес, жуп да эмес. Бул функция үчүн $arcctg(-x) = \pi - arcctg\, x$ барабардык аткарылат;
- $y = arcctgx$ функция мезгилдүү эмес.

4-мисал. $arcctg\sqrt{3}$ туюнтманын маанисин тапкыла.

Чечүү. Айталы, $arcctg\sqrt{3} = x$ болсун. Анда, $ctgx = \sqrt{3}$ барабардыкты канааттандыруучу x тын маанисин табуу талап кылынат. Белгилүү болгондой, $ctg\dfrac{\pi}{6} = \sqrt{3}$ болот. Демек, $arcctg\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{6}$.

Төмөнкү таблицада *arcctgx* туюнтмасынын кээ бир маанилери.

x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$arcctgx$	$\dfrac{5\pi}{6}$	$\dfrac{3\pi}{4}$	$\dfrac{2\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{6}$

МИСАЛДАР

1. 1. Төмөндөгү туюнтмалар мааниге ээби?

a) $arcsin(\sqrt{3}-1)$ b) $arcsin(4-\sqrt{5})$ c) $arccos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

d) $arccos\left(\sqrt{2}\right)$ e) $arctg(\sqrt{2})$ f) $arcctg(-100)$

2. Эсептегиле:

a) $arcsin\frac{1}{2}$ b) $arcsin\ (-1)$ c) $arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}$ d) *arcsinù*

e) $arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$ f) $arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ g) $arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ h) $arccos\frac{1}{2}$

i) $arccos\,0$ j) $arccos\frac{1}{\sqrt{2}}$ k) $arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ l) $arctg\,0$

m) $arctg(-1)$ n) $arctg\frac{1}{\sqrt{3}}$ o) $arctg\sqrt{3}$ p) $arctg1$

q) $arctg(-\sqrt{3})$ r) $arcctg\sqrt{3}$ s) $arcctg(-1)$ t) $arcctg\frac{1}{\sqrt{3}}$

3. Эсептегиле.

a) $arcsin\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}-1}-\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}\right)$ b) $arccos\left(\frac{10+5\sqrt{5}}{\frac{5}{2}(3+\sqrt{5})}-\frac{\frac{5}{2}(3+\sqrt{5})}{10+5\sqrt{5}}\right)$

c) $arctg\left(\frac{1-2(2+\sqrt{3})}{3+\sqrt{3}}-\frac{1}{1+\sqrt{3}}\right)$ d) $arcctg\left(\frac{1+\sqrt{\frac{7}{3}}-\frac{2}{\sqrt{3}}}{1-\sqrt{\frac{7}{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}}-\frac{1-\sqrt{\frac{7}{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\sqrt{\frac{7}{3}}-\frac{2}{\sqrt{3}}}\right)$

4. Эсептегиле.

a) $cos\left(arctg2\right)$ b) $sin\left(arctg7\right)$ c) $cos\left(arcsin\frac{1}{4}\right)$

d) $ctg\left(arctg5\right)$ e) $sin\left(arctg11\right)$ f) $sin\left(arccos\frac{1}{5}\right)$

g) $cos\left(arcctg\left(-4\right)\right)$ h) $ctg\left(arcsin\left(-0{,}9\right)\right)$ i) $sin\left(arccos\left(-\frac{4}{7}\right)\right)$

j) $ctg\left(arctg\left(-15\right)\right)$ k) $tg\left(arccos\left(-0{,}3\right)\right)$ l) $ctg\left(arccos\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right)$

5. Эсептегиле.

a) $cos\left(2arcsin0{,}2\right)$ b) $sin\left(2\,arccos\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$ c) $sin\left(2arcctg\sqrt{26}\right)$

d) $tg\left(2arccos0{,}6\right)$ e) $tg\left(2arcsin\frac{7}{9}\right)$ f) $cos\left(2arccos\left(-0{,}8\right)\right)$

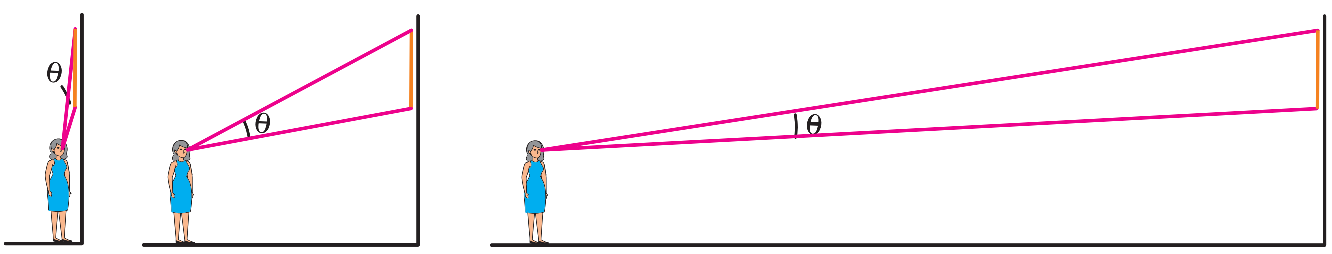
g) $tg\left(2arcctg\left(-3\right)\right)$ h) $sin\left(2arcsin\left(-0{,}1\right)\right)$ i) $tg\left(2arcctg\,20\right)$

ДОЛБООРДУК ИШ

КИНОТЕАТРДА КАЙДА ОТУРУУ КЕРЕК?

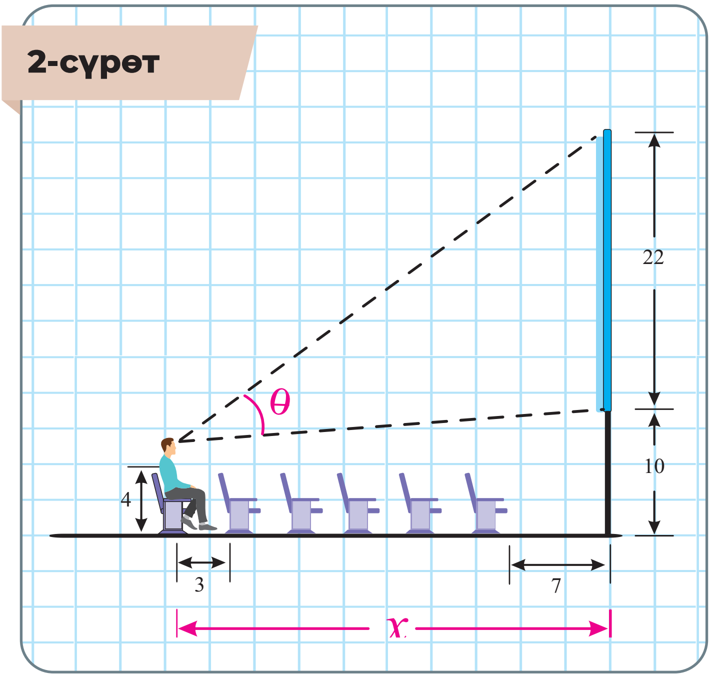
Объекттин көрүнүп турган көлөмү анын көрүүчүдөн алыстыгына байланыштуу экендигин баары билет. Объект канчалык алыс болсо, анын көлөмү ошончолук кичине болот. Көрүнүп турган өлчөм объекттин көрүүчүнүн көзүнө караган бурчу менен аныкталат.

Эгер сиз дубалга илинген сүрөттү карап жатсаңыз, максималдуу көрүнүш үчүн канчалык алыс турушуңуз керек? Эгер сүрөт көздүн деңгээлинен жогору илинип турса, анда сиз өтө жакын же өтө алыс болсоңуз, анда көздүн бурчу кичинекей экени көрүнүп турат.



Ушундай эле жагдай кинотеатрдан орун тандоодо дагы болот.

1. Кинотеатрдын экраны жалпак полдон 22 фут жана 10 фут бийиктикте. Биринчи катар отургучтар экрандан 7 фут алыстыкта, калган катарлар бири-биринен 3 фут алыстыкта. Сиз максималдуу көрүнүш менен катар отурууну чечтиңиз, башкача айтканда, көзүңүздөгү экран бурчу θ максималдуу. Сүрөттөгүдөй, көзүңүз полдон 4 фут бийиктикте турат жана сиз экрандан x аралыкта отурасыз (1 *fut* = 0,3048 *m*)(2-*сүрөт*)



Төмөнкүлөрдү далилдегиле: $\theta = arctg\dfrac{28}{x} - arctg\dfrac{6}{x}$.

Төмөнкүлөрдү алуу үчүн тангенстин кемитүү формуласын колдонуңуз:

$$\theta = arctg\left(\frac{22x}{x^2+168}\right).$$

Геогебра графикалык тиркемесинин жардамы менен θ ды x функциясы катары түзүңүз жана θ ды максималдаштыруучу x тин маанисин табыңыз. Кайсы катарда отуруш керек? Бул катардагы көрүү бурчу кандай ?

Эми, биринчи катардагы отургучтардан баштап, отургучтун горизонталдык тегиздиктен жогоруда полы бурчта ийилген жана эңкейиште басып өткөн аралык сүрөттө көрсөтүлгөндөй x ге барабар.

1. Төмөнкүлөрдү келтирип чыгаруу үчүн косинустар формуласынан колдонуңуз:

$$\theta = arccos\left(\frac{a^2+b^2-484}{2ab}\right).$$

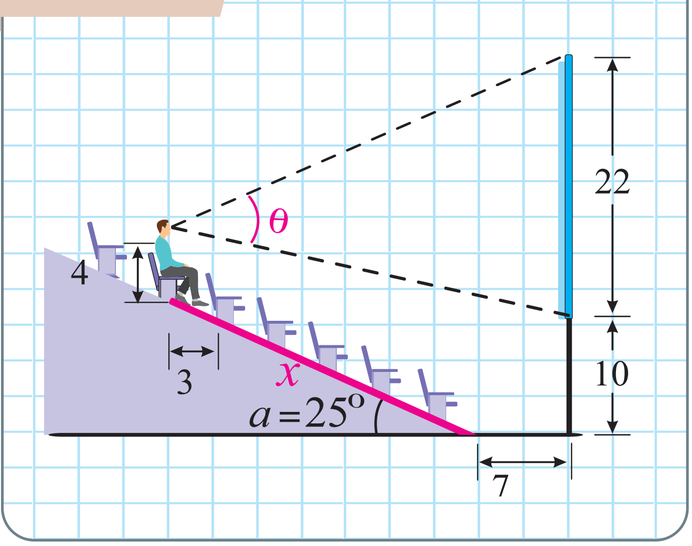
Бул жерде

$$a^2 = (7 + x\cos\alpha)^2 + (28 - x\sin\alpha)^2$$

$$\text{va } b^2 = (7 + x\cos\alpha)^2 + (x\sin\alpha - 6)^2$$

2. ***Геогебра*** графикалык тиркемесинин жардамы менен θ ды x функциясы катары түзүңүз жана θ ды максималдаштыруучу x тин маанисин табыңыз. Кайсы катарда отуруш керек? Бул катардагы көрүү бурчу кандай?

3-сүрөт



5-ГЛАВА. ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР ЖАНА БАРАБАРСЫЗДЫКТАР

- ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР
- АЙРЫМ ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИ ЧЕЧҮҮНҮН МЕТОДДОРУ
- ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫК БАРАБАРСЫЗДЫКТАР

ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР

Эң жөнөкөй тригонометриялык теңдемелер

Мезгилдүү функциялар менен мүнөздөлгөн процесстер качан кандай мааниге ээ экендигин билүү маанилүү. Бул үчүн мезгилдүү функциялар катышкан

$$\sin x = a\,,\ \cos x = a\,,\ tgx = a\,,\ ctgx = a$$

көрүнүштөгү эң жөнөкөй тригонометриялык теңдемелерди чыгарууну билүү зарыл.

Эң жөнөкөй тригонометриялык теңдемелерди кантип чыгарууну үйрөнүү үчүн:

1) теңдеме түшүнүгү;

2) теңдеменин тамыры жөнүндө түшүнүк; тамырлардын көптүгү «чечим» деп аталышын;

3) тригонометриялык функциялар мезгилдүү болгондуктан, тригонометриялык теңдеме чексиз көп тамырларга ээлигин;

4) табылган чексиз саны тамырларды жалпылап кыска формулалар аркылуу жазууну (мында ар бир k бүтүн сан үчүн $n = 2k$ туюнтмасы жуп санды, $n = 2k + 1$ туюнтмасы так санды билдиришин) билүү керек.

1-мисал. $\sin x = \frac{1}{2}$ теңдемени чыгар.

Чыгаруу. Сиз билгендей, $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ болот. $\sin x = \frac{1}{2}$ барабардык x тын $\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$ мааниси да аткарылат (1-*сүрөт*). Синус мезгилдик функция болгондуктан, ар кандай бүтүн n саны үчүн

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$$

же

$$x = \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2\pi n = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$$

болгондо да $\sin x = \frac{1}{2}$ болот (2-*сүрөт*). Бул эки барабардыкты аны төмөнкүчө жалпылоого болот:

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

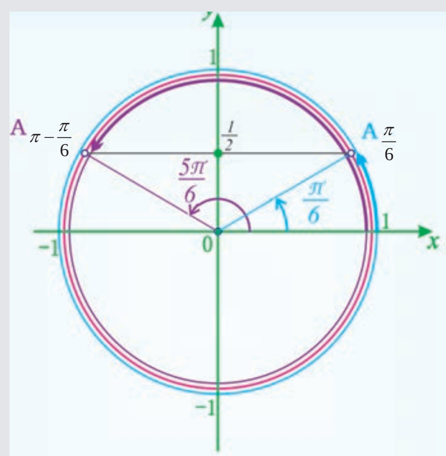
Чындыгында, n жуп болсо, $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ барабардыкка; n так болсо, $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$ барабардыкка ээ болобуз.

Ушундай кылып, $\sin x = \frac{1}{2}$ барабардык x тин

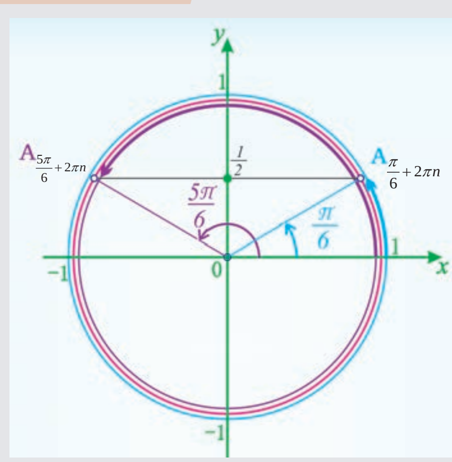
$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}.$$

маанилеринде аткарылат.

1-сүрөт



2-сүрөт



$\boldsymbol{sinx = a}$ көрүнүшүндөгү теңдеме

$a>1$ же $a<-1$ болсо, анда $\sin x = a$ теңдеменин тамыры болбойт. Ошондуктан, мындай учурларда $\sin x = a$ жооп теңдеменин чечими бош көптүктү $\varnothing$ турат деп жазылган;

$-1 \le a \le 1$ болсо, ошол учурда, $\sin x = a$ теңдеменин чечими

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n\,,\ n \in Z$$

көрүнүштө болот.

***Өзгөчө учурлар*.**

1) $sinx = -1$ теңдеменин чечими x тин

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\quad n \in \mathbb{Z}$$

маанилеринен турат.

2) $sinx = 0$ теңдеменин чечими x тин

$$x = \pi n\,,\ n \in \mathbb{Z}$$

маанилеринен турат.

3) $sinx = 1$ теңдеменин чечими x тин

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\quad n \in \mathbb{Z}$$

маанилеринен турат.

$\boldsymbol{cosx = a}$ көрүнүшүндөгү теңдеме

$\boldsymbol{\cos x = a}$ көрүнүшүндөгү теңдеме

Эгерде $a>1$ же $a<-1$ болсо, ал абалда $\cos x = a$ теңдеменин тамырына ээ болбойт. Мындай абалдарда $\cos x = a$ теңдеменин чечими $\varnothing$ деген жооп жазылат;

$-1 \le a \le 1$ болсо, $\cos x = a$ бул учурда

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n\,,\ n \in Z$$

болот.

Өзгөчө учурлар

1) $cosx = -1$ теңдеменин чечими x тин

$$x = \pi + 2\pi n,\quad n \in \mathbb{Z}$$

маанилеринен турат.

2) $cosx = 0$ теңдеменин чечими x тин

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n\,,\ n \in \mathbb{Z}$$

маанилеринен турат.

3) $cosx = 1$ теңдеменин чечими x тин

$$x = 2\pi n,\quad n \in \mathbb{Z}$$

маанилеринен турат.

2-мисал. $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ теңдемени чыгар.

Чыгаруу

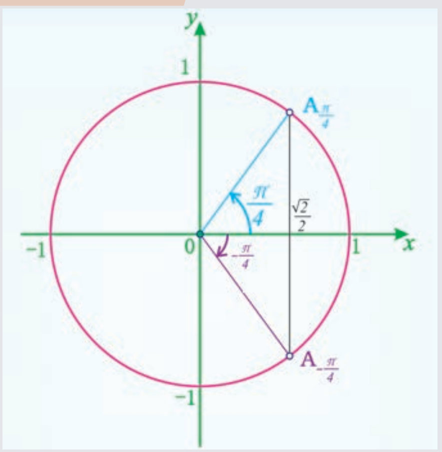
$\cos \frac{\pi}{4} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ экени белгилүү (3-*сүрөт*). Косинус мезгилдик функция болгондуктан каалаган *n* бүтүн саны үчүн

$$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \text{ же } x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$$

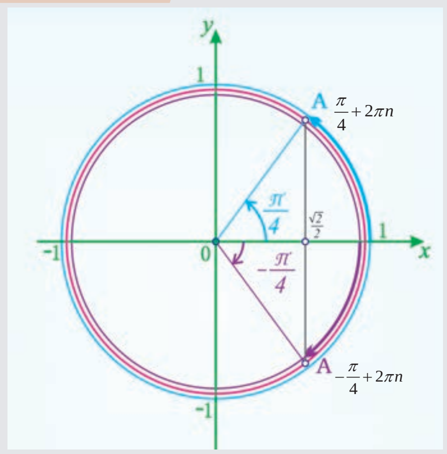
болгондо да $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ болот (4-*сүрөт*). Бул эки теңдикти төмөнкүчө жалпылоого болот:

$x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

3-сүрөт



4-сүрөт



tgx = a көрүнүшүндөгү теңдемелер

Ар бир бүтүн *n* сан үчүн *x* тин

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n$$

мааниси $\operatorname{tg} x = a$ теңдеменин тамыры болот. Бул учурда чечим

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in Z$$

көрүнүштө болот.

ctgx = a көрүнүшүндөгү теңдемелер

Ар бир бүтүн *n* сан үчүн *x* тин

$$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n$$

мааниси $\operatorname{ctg} x = a$ теңдеменин тамыры болот. Бул учурда чечим

$$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in Z$$

көрүнүштө болот.

3-мисал. Теңдемени чыгар: $tg\left(x+\frac{\pi}{7}\right)=-1$

Чыгаруу

$$tg\left(x+\frac{\pi}{7}\right)=-1,\quad x+\frac{\pi}{7}=arctg(-1)+\pi k, k\in Z,\quad x+\frac{\pi}{7}=-\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z,\quad x=-\frac{11\pi}{28}+\pi k, k\in Z.$$

Жообу: $x=-\frac{11\pi}{28}+\pi k, k\in Z$.

4-мисал. Теңдемени чыгар: $ctg\frac{3x}{2}=\sqrt{3}$.

Чечүү

$$ctg\frac{3x}{2}=\sqrt{3},\quad \frac{3x}{2}=arcctg\sqrt{3}+\pi k, k\in Z,\quad \frac{3x}{2}=\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z,\quad 3x=\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in Z,$$

$$x=\frac{\pi}{9}+\frac{2}{3}\pi k, k\in Z.$$

Жооп: $x=\frac{\pi}{9}+\frac{2}{3}\pi k, k\in Z$.

МИСАЛДАР

1. Теңдемелерди чыгар.

a) $sin2x=1$

b) $sin\frac{x}{3}=-1$

c) $sin\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)=0$

d) $2sin4x=\sqrt{5}$

e) $sin(4x-1)=-\frac{\pi}{3}$

f) $sinx=\frac{1}{2}$

g) $sinx=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

h) $sin4x=1$

i) $sin2x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

j) $sin\left(x+\frac{\pi}{7}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

k) $sin\frac{2x}{3}=-1$

l) $sin\left(2x+\frac{\pi}{5}\right)=0$

m) $sin(3x+1)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

n) $sin(-x)=-\frac{1}{2}$

o) $sin\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)=1$

2. Теңдемелерди чыгар.

a) $cos\frac{2x}{5}=1$

b) $cos\left(2x-\frac{\pi}{7}\right)=-1$

c) $cos8x=0$

d) $cos3x=1,2$

e) $2cos(x-1)=\frac{11}{2}$

f) $cosx=\frac{\sqrt{3}}{2}$

g) $cosx=-\frac{1}{2}$

h) $cosx=-1$

i) $cos\frac{x}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

j) $cos\left(x-\frac{\pi}{5}\right)=\frac{1}{2}$ k) $cos\frac{3x}{4}=0$ l) $cos\,4x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

m) $\sqrt{3}+2cos\frac{\pi x}{9}=0$ n) $1-2cos\frac{3\pi x}{4}=0$ o) $cos\left(\pi\left(x-3\right)\right)=1$

p) $sin^2\frac{2}{3}\boldsymbol{x}=\frac{3}{4}$ q) $cos^2\frac{3}{2}\boldsymbol{x}=\frac{1}{4}$ r) $2cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}=0$

3. Теңдемени чыгар.

a) $tgx=\frac{1}{\sqrt{3}}$ b) $tgx=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ c) $tgx=-1$

d) $tgx=\sqrt{3}$ e) $tg\frac{2x}{5}=-\sqrt{3}$ f) $tg\left(x+\frac{7\pi}{3}\right)=1$

g) $tg(\frac{\pi}{4}\left(x-1\right)=0$ h) $1-\sqrt{3}tg\frac{2\pi x}{7}=0$ i) $tg9x=tg45°$

j) $tg6x=tg\frac{2\pi}{3}$ k) $3tg\left(x+\frac{5\pi}{36}\right)+\sqrt{3}=0$

4. Теңдемени чыгар.

a) $ctgx=\sqrt{3}$ b) $ctgx=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ c) $ctg4x=sin0°$

d) $ctg(\pi\left(2x+3\right)=cos0°$ e) $\sqrt{3}+ctg\frac{\pi x}{5}=0$ f) $ctg7x=-\sqrt{3}$

g) $ctg\frac{3x}{2}=1$ h) $ctg3x=\sqrt{3}$ i) $ctg\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)=0$

5. Теңдемелердин берилген кесилишинде тамырын тап.

a) $sin\,3x=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \ [0;2\pi]$ b) $cos\,3x=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \ [-\pi;\pi]$

c) $tg\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3},\ \ [0;\pi]$ d) $ctg\,4x=-1,\ \ [-3\pi;3\pi]$

6. a нын кандай маанилеринде $tgx=\frac{a+1}{a-1}$ барабардык ылайыктуу болушу мүмкүн?

7. a нын кандай маанилеринде $sin\,x=a+\frac{1}{a}$ барабардык ылайыктуу болушу мүмкүн

8. a нын кандай маанилеринде $5cos\left(2x-3\right)=a-\frac{6}{a}$ теңдеме чечимге ээ?

9. a нын кандай маанилеринде $5sin\left(x-7\right)=a-\frac{4}{a}$ теңдеме чечимге ээ эмес?

КЭЭ БИР ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИ ЧЕЧҮҮНҮН МЕТОДДОРУ

Квадраттык теңдемеге келтирилген теңдемелер

1-мисал. Теңдемени чечкиле: $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$.

Чечүү

Бул теңдеме $\sin x$ ге салыштырмалуу квадрат теңдеме. $\sin x = t$ деп белгилесек, $2t^2 - 3t + 1 = 0$ мындан $t_1 = 1$, $t_2 = \frac{1}{2}$ келип чыгат.

1) $\sin x = 1,\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$ 2) $\sin x = \frac{1}{2},\ x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$

Жооп: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$.

2-мисал. Теңдемени чыгар: $2\cos^2 x - 5\sin x + 1 = 0$.

Чыгаруу

$\cos^2 x$ ты $1 - \sin^2 x$ менен алмаштырып, $2(1 - \sin^2 x) - 5\sin x + 1 = 0$ же $2\sin^2 x + 5\sin x - 3 = 0$ дү,

$\sin x = y$ белгини киргизүү менен, $2y^2 + 5y - 3 = 0$ ду жаратабыз. Мындан $y_1 = -3;\ y_2 = \frac{1}{2}$.

$\sin x = -3$ теңдеменин чечими жок, себеби $|-3| > 1$.

$\sin x = \frac{1}{2}$ теңдемени чечебиз. Андан $x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$ ти жаратабыз.

Жооп: $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\quad n \in Z.$

3-мисал. Теңдемени чыгар: $tgx - 2ctgx + 1 = 0$.

Чыгаруу

$tgx - \frac{2}{tgx} + 1 = 0$, мындан $tg^2 x + tgx - 2 = 0$. $tgx = t$ деп белгилесек,

$t^2 + t - 2 = 0$

$t_1 = 1,\quad t_2 = -2$

1) $tgx = 1,\ x = arctg1 + \pi n,\ n \in Z,\ x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$

2) $tgx = -2,\ x = -arctg2 + \pi n,\ n \in Z$

Жооп: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\quad x = -arctg2 + \pi n,\ n \in Z$.

4-мисал. Теңдемени чыгар: $3\sin^2 x + 5\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0$.

Чыгаруу

Теңдеменин ар бир мүчөсүн $\cos^2 x$ ге бөлөбүз. $3tg^2 x + 5tgx + 2 = 0$

$tgx = t$ деп белгилесек, $3t^2 + 5t + 2 = 0$. Мындан $t_1 = \frac{-5-1}{6} = -1$, $t_2 = \frac{-5+1}{6} = -\frac{2}{3}$

$$1)\; tgx = -1,\; x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\; n \in Z$$

$$2)\; tgx = -\frac{2}{3},\; x = -arctg\frac{2}{3} + \pi n,\; n \in Z$$

Жообу: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = -arctg\frac{2}{3} + \pi n$, $n \in Z$.

$a\sin x + b\cos x = c$ көрүнүшүндөгү теңдемелер

5-мисал. Теңдемени чыгар: $3\sin x - 2\cos x = 0$.

Чыгаруу

1) Теңдеменин эки жагын тең $cosx$ ге бөлүп, $3tgx - 2 = 0$ теңдемени түзөбүз.

2) $3tgx - 2 = 0$, $\Rightarrow$ $tgx = \frac{2}{3}$, $\Rightarrow$ $x = arctg\frac{2}{3} + \pi n$, $n \in Z$.

asinx + *bcosx* = 0 теңдемени *cosx* (же *sinx*) ге бөлгөндө, берилген теңдемеге барабар күчтүү теңдеме түзүлөт (*cosx* = 0 жана *sinx* = 0 барабардыктар бир эле учурда аткарылбайт).

Жооп: $x = arctg\frac{2}{3} + \pi n$, $n \in Z$.

6-мисал. Теңдемени чыгар: $2\sin x + \cos x - 2 = 0$.

Чыгаруу

$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, $\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$, $2 = 2\cdot 1 = 2\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)$ формулаларга карата,

$$4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = 2\sin^2\frac{x}{2} + 2\cos^2\frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad 3\sin^2\frac{x}{2} - 4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} = 0$$

Теңдемени $\cos^2\frac{x}{2}$ ге бөлөбүз. $3tg^2\frac{x}{2} - 4tg\frac{x}{2} + 1 = 0$ $tg\frac{x}{2} = t$ деп белгилөө киритебиз.

$3t^2 - 4t + 1 = 0$, $\quad D = 16 - 12 = 4$

$t_1 = \frac{4+2}{6} = 1$, $\quad t_2 = \frac{4-2}{6} = \frac{1}{3}$

1) $tg\frac{x}{2} = 1$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$ $\qquad$ 2) $tg\frac{x}{2} = \frac{1}{3}$, $x = 2arctg\frac{1}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$

Жообу: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = 2arctg\frac{1}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$.

7-мисал. Теңдемени чыгар: $sinx + cosx = 1$.

Чыгаруу

Экөөнүн эки тарабын тең $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ бөлөбүз.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\frac{1}{\sqrt{2}}=\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}$ болсо, теңдемени төмөнкүдөй жазабыз:

$$\sin\frac{\pi}{4}\sin x+\cos\frac{\pi}{4}\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad\Rightarrow\quad \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad\Rightarrow\quad x-\frac{\pi}{4}=\pm arccos\frac{1}{\sqrt{2}}+2\pi n,\ n\in Z$$

$$x=\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z \quad\Rightarrow\ x=2\pi n,\ \ x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ \ n\in Z.$$

Жообу: $x=2\pi n,\ \ x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ \ n\in Z.$

Сол тарабын көбөйтүүчүлөргө ажыратып чыгарыла турган теңдмелер

8-мисал. Теңдемени чыгар: $\sin 9x-\sin x=\cos 5x$.

Чыгаруу

$$2\sin 4x\cos 5x=\cos 5x \qquad\Rightarrow\qquad \cos 5x\left(2\sin 4x-1\right)=0$$

1) $\cos 5x=0,\ x=\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5},\ n\in Z$

2) $\sin 4x=\frac{1}{2},\ 4x=\left(-1\right)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z,\ x=\left(-1\right)^n\cdot\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{4},\ n\in Z$

Жообу: $x=\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5},\ x=\left(-1\right)^n\cdot\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{4},\ n\in Z$.

9-мисал. Теңдемени чыгар: $2\sin x\cos x+5\sin x+5\cos x+1=0$.

Чыгаруу

$2\sin x\cos x+5\left(\sin x+\cos x\right)+1=0,\ \ \sin x+\cos x=t$ деп белгилесек, $2\sin x\cos x=t^2-1$ болот.

$$t^2-1+5t+1=0 \ \Rightarrow\ t^2+5t=0 \ \Rightarrow\ t(t+5)=0 \ \Rightarrow\ t_1=-5;\ t_2=0$$

1) $\sin x+\cos x=-5$ теңдеме тамырга ээ эмес

2) $\sin x+\cos x=0,\ \ tgx+1=0,\ \ tgx=-1,\ x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$

Жообу: $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\quad n\in Z$.

МИСАЛДАР

Теңдемени чыгар.

1. $2cos^2x-5cosx+2=0$
2. $cos^2x-cosx-2=0$
3. $2ctg^2 3x-3ctg3x+1=0$
4. $tg^2x-2tgx=3$
5. $2cos^2 x+sin x-1=0$
6. $3sin^2 2x+7cos2x-3=0$
7. $2cos x=1-\sqrt{cosx}$
8. $sin2x=cos^4x-sin^4x$
9. $sin5x=\frac{2}{3}cos^2 5x$
10. $cos^4\frac{x}{5}+sin^2\frac{x}{5}=1$
11. $3tg2x-2ctg2x-1=0$
12. $2tgx-2ctgx=3$
13. $\sqrt{3}sinx-cosx=0$
14. $sin2x+cos2x=0$
15. $sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=0$
16. $\sqrt{3}sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right)+cos\left(x+\frac{\pi}{12}\right)=0$
17. $cosx-sinx=1$
18. $sinx+cosx=\sqrt{2}$
19. $sin\frac{x}{2}+cos\frac{x}{2}=-1$
20. $\sqrt{3}sinx+cosx=\sqrt{2}$
21. $3sinx+4cosx=3$
22. $sin4x+cos4x=4$
23. $sin2x=cos^4\frac{x}{2}-sin^4\frac{x}{2}$
24. $cos2x=\sqrt{2}\left(cosx-sinx\right)$
25. $cos3xcos2x=sin3xsin2x$
26. $sin5xcos4x-cos5xsin4x=\frac{\sqrt{3}}{2}$
27. $cos9x-cos7x+cos3x-cosx=0$
28. $cos7x+sin8x=cos3x-sin2x$
29. $sin3x+sin5x=sin4x$
30. $sin2xsin6x=cosxcos3x$
31. $(2cos x-3)\cdot ctgx=0$
32. $(tgx-3)(cosx-\frac{1}{2})=0$
33. $tg3xcosx=0$
34. $sin2xtgx=0$
35. $\frac{cos2x}{1+tgx}=0$
36. $\frac{1-2cos2x}{cos2x-2}=0$
37. $\frac{tgx}{sin5x}=0$
38. $\frac{cosx}{1-cos4x}=0$
39. $|cos2x-1|-2|cos2x+2|=0$
40. $sin^3x+cos^4x=1$
41. $cosx\sqrt{sinx}=0$
42. $cos3x+2cosx=0$
43. $sin^{13}x+cos^{13}x=1$
44. $sin9x = 2sin3x$

ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫК БАРАБАРСЫЗДЫКТАР

Эң жөнөкөй тригонометриялык барабарсыздыктарды чыгарууда:

1) *Oy* огу ***синус огу*** деп аталышын;

2) *Ox* огу ***косинус огу*** деп аталышын;

3) x өзгөрмөнүн ар бир мааниси боюнча $-1 \le \sin x \le 1$ болушун;

4) x өзгөрмөнүн ар бир мааниси боюнча $-1 \le \cos x \le 1$ болушун билүү керек.

Айталы, $f(x)$ жазуу $\sin x$, $\cos x$, tgx же $ctgx$ тригонометриялык функциялардын бирин билдирет, б.а $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = tgx$ же $f(x) = ctgx$ болсун.

Анда кээ бир a саны үчүн $f(x) < a$, $f(x) \le a$, $f(x) > a$, $f(x) \ge a$ көрүнүшүндөгү барабарсыздыктар эң жөнөкөй ***тригонометриялык барабарсыздыктар*** деп аталат.

$\sin x < a$; $\sin x \le a$ барабарсыздыкты чыгаруу

1) $a \le -1$ болсо, $\sin x < a$ барабарсыздыктын чечими $\varnothing$ болот (1a-*сүрөт*).

2) $a > 1$ болсо, $\sin x < a$ барабарсыздыктын чечими $(-\infty; +\infty)$ болот (1b-*сүрөт*).

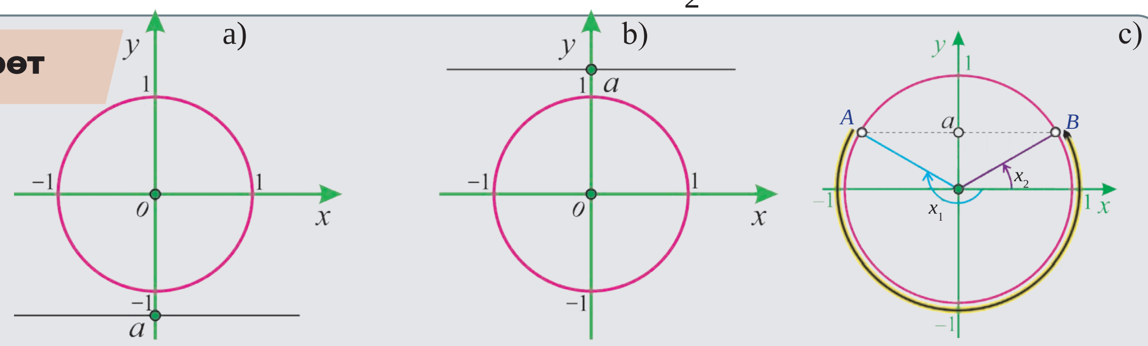
3) $a < -1$ болсо, $\sin x \le a$ барабарсыздыктын чечими $\varnothing$ болот.

4) $a \ge 1$ болсо, $\sin x \le a$ барабарсыздыктын чечими $(-\infty; +\infty)$ болот.

5) $a = -1$ болсо, $\sin x \le -1$ барабарсыздыктын чечими $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$ болот.

6) $a = 1$ болсо, $\sin x < 1$ барабарсыздыктын чечими $x \ne \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$ болот.

1-сүрөт



7) $-1 < a < 1$ болгондо $\sin x < a$ барабарсиздыкты чечими (1c-*сүрөт*).

$$x_1 < x < x_2$$

$$x_1 = -\pi - \arcsin a$$

$$x_2 = \arcsin a$$

$$\boldsymbol{-\pi - \arcsin a + 2\pi n < x < \arcsin a + 2\pi n,\ n \in Z}$$

8) $-1 < a < 1$ болсо, анда $\sin x \le a$ барабарсиздыкты чечими

$$\boldsymbol{-\pi - \arcsin a + 2\pi n \le x \le \arcsin a + 2\pi n,\ n \in Z}$$

1-мисал. Барабарсыздыкты чыгар : $\sin x \le -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Чыгаруу

$$-\pi - \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi n \le x \le \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi n,\ n \in Z$$

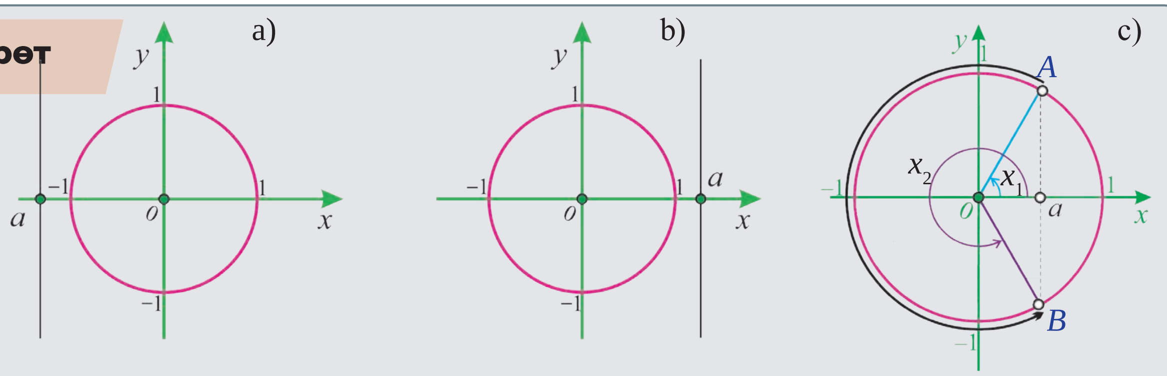
$$-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \le x \le -\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$$

Жообу: $\left[-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n;\ -\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$.

cosx < *a* va *cosx* ≤ *a* барабарсыздыкты чыгаруу

1) $a \le -1$ болсо, $\cos x < a$ барабарсыздыктын чечими $\varnothing$ болот (2a-*сүрөт*).
2) $a > 1$ болсо, $\cos x < a$ барабарсыздыктын чечими $(-\infty; +\infty)$ болот (2b-*сүрөт*).
3) $a < -1$ болсо, $\cos x \le a$ барабарсыздыктын чечими $\varnothing$ болот.
4) $a = -1$ болсо, $\cos x \le -1$ барабарсыздыктын чечими $x = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$ чекиттерден турат.
5) $a = 1$ болсо, $\cos x < 1$ барабарсыздыктын чечими $x \ne 2\pi n$, $n \in Z$ болот.
6) $a \ge 1$ болсо, $\cos x \le a$ барабарсыздыктын чечими $(-\infty; +\infty)$ болот.

2-сүрөт



7) $-1 < a < 1$ болсо, $\cos x < a$ барабарсиздыкты чечими (2c-*сүрөт*).

$$x_1 < x < x_2$$

$$x_1 = \arccos a$$

$$x_2 = 2\pi - \arccos a$$

$$\boldsymbol{\arccos a + 2\pi n < x < 2\pi - \arccos a + 2\pi n,\ n \in Z}$$

8) $-1 < a < 1$ болсо, $\cos x \le a$ барабарсиздыкты чечими

$$\boldsymbol{\arccos a + 2\pi n \le x \le 2\pi - \arccos a + 2\pi,\ n \in Z.}$$

2-мисал. Барабарсыздыкты чыгар: $\cos x \ge -\frac{1}{2}$

Чыгаруу

$$-\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+2\pi n \le x \le \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+2\pi n,\ \ n\in Z$$

$$-\frac{2\pi}{3}+2\pi n \le x \le \frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$$

Жообу: $\left[-\frac{2\pi}{3}+2\pi n; \frac{2\pi}{3}+2\pi n\right],\ n\in Z$.

tgx < a жана *tgx ≤ a* барабарсыздыкты чыгаруу

$tgx < a$ барабарсыздыкты $y = tgx$ функциянын графигин колдонуу максатка ылайыктуу.

3-сүрөттөн түшүнүктүү, $tgx < a$ барабарсыздык x өзгөрмөнүн

$$-\frac{\pi}{2} < x < arctga$$

кош барабарсыздыкты канааттандыруучу маанилерде аткарылат. $y = tgx$ функциясы мезгилдүү болгондуктан $tgx < a$ барабарсыздыктын чечими

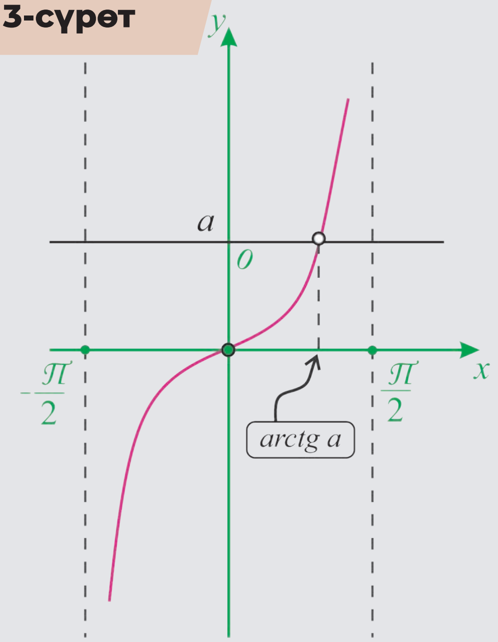
$$-\frac{\pi}{2}+\pi n < x < arctga+\pi n,\ n\in Z$$

болушу келип чыгат. Ошол сыяктуу эле, $tgx \le a$ барабарсыздыктын чечими

$$-\frac{\pi}{2}+\pi n < x \le arctga+\pi n,\ n\in Z$$

болот.

3-сүрөт



3-мисал. Барабарсыздыкты чыгар: $tg\frac{x}{4} \le -1$.

Чыгаруу

$$-\frac{\pi}{2}+\pi n < \frac{x}{4} \le arctg(-1)+\pi n,\ \ \mathrm{n}\in Z$$

$$-\frac{\pi}{2}+\pi n < \frac{x}{4} \le -\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \ \mathrm{n}\in Z$$

$$-2\pi+4\pi n < x \le -\pi+4\pi n,\ \ \mathrm{n}\in Z$$

Жообу: $(-2\pi+4\pi n; -\pi+4\pi n],\ \ \mathrm{n}\in Z$.

$ctgx < a$ жана $ctgx \le a$ барабарсыздыкты чечүү

$ctgx < a$ барабарсыздыкты $y = ctgx$ функциянын графигин колдонуу максатка ылайыктуу.

Белгилүү болгондой, $ctgx < a$ барабарсыздык x өзгөрмөнүн

$$arcctga < x < \pi$$

кош барабарсыздыкты канааттандыруучу маанилерде аткарылат (4-*сүрөт*). $y=ctgx$ функциясы мезгилдүү болгондуктан $ctgx < a$ барабарсыздыктын чечими келип чыгат.

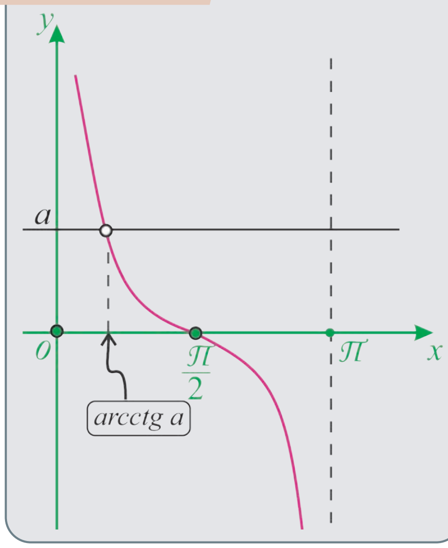
$$\boldsymbol{arcctga + \pi n < x < \pi + \pi n,\ n \in Z}$$

Ошол сыяктуу эле, $ctgx \le a$ барабарсыздыктын чечими

$$\boldsymbol{arcctga + \pi n \le x < \pi + \pi n,\ \ n \in Z}$$

болот.

4-сүрөт



4-мисал. Барабарсыздыкты чыгар: $ctg\dfrac{x}{5} < -\sqrt{3}$.

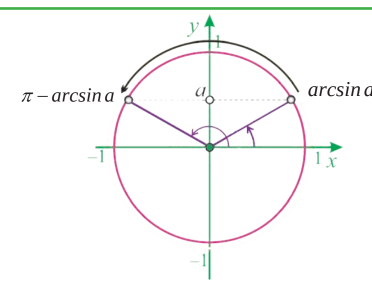
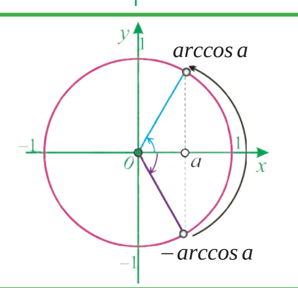
Чыгаруу

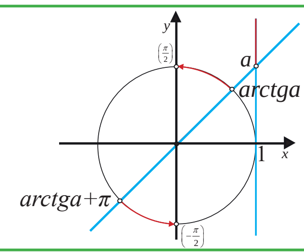
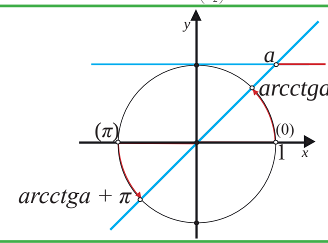
$$arcctg\left(-\sqrt{3}\right) + \pi n < \frac{x}{5} < \pi + \pi n,\ n \in Z \quad \Rightarrow \quad \frac{5\pi}{6} + \pi n < \frac{x}{5} < \pi + \pi n,\ n \in Z \quad \Rightarrow$$

$$\frac{25\pi}{6} + 5\pi n < x < 5\pi + 5\pi n,\ \mathrm{n} \in Z$$

Жообу: $\left(\dfrac{25\pi}{6} + 5\pi n; 5\pi + 5\pi n\right),\ \mathrm{n} \in Z$.

Кээ бир барабарсыздыкты чыгаруу

Барабарсыздык	Чечими	Тригонометриялык айланада сүрөттөлүшү
$\boldsymbol{sinx > a}$	$\arcsin a + 2\pi n < x < \pi - \arcsin a + 2\pi n,\ n \in Z$	
$\boldsymbol{cosx > a}$	$-\arccos a + 2\pi n < x < \arccos a + 2\pi n,\ \ n \in Z$	

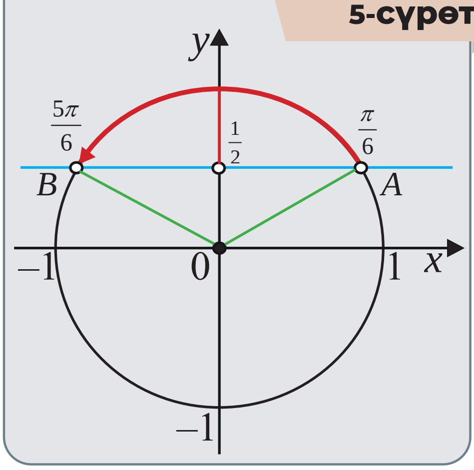
$tgx > a$	$arctga + \pi n < x < \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z$	
$ctgx > a$	$\pi n < x < arcctga + \pi n, \ n \in Z$	

5-мисал. Барабарсыздыкты чечкиле: $sinx > \dfrac{1}{2}$.

Чечүү

Бирдиктүү айлананы (5-*сүрөт*) A жана B чекиттерде кесип өтүүчү $y = \dfrac{1}{2}$ түз сызыкты өткөрөбүз. $sinx$ тин суралып жаткан маанилери ушул түз сызыктын жогорусунда жайгашкан болот. $y=sinx$ *жана* $y=\dfrac{1}{2}$ лер $x = \dfrac{\pi}{6}$ жана $x = \dfrac{5\pi}{6}$ да кесилишет. Сүрөттө көрүнүп тургандай, x тин $\dfrac{\pi}{6}$ дан чоң жана $\dfrac{5\pi}{6}$ ден кичине маанилеринде $sinx$ туюнтма $\dfrac{1}{2}$ ден чоң болот.

5-сүрөт



Ушундай кылып, $\dfrac{\pi}{6} < x < \dfrac{5\pi}{6}$ болот. $\sin x > \dfrac{1}{2}$ барабарсыздыктын баардык чечимдери

$\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n, \ n \in Z$ ушул формула менен табылат.

Жообу: $\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n, \ n \in Z.$

6-мисал. Барабарсыздыктарды чыгар: $\cos x \cos\dfrac{\pi}{4} - \sin x \sin\dfrac{\pi}{4} \geq -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Чыгаруу

Барабарсыздыктын сол тарабын сумманын косинусу формуласынан пайдаланып жөнөкөйлөштүрүп алабыз:

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Бирдиктүү айланада (6-*сүрөт*) $x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ түз сызыкты өткөрөбүз. Бул түз сызык айлананы $x + \dfrac{\pi}{4}$ нын $-\dfrac{3\pi}{4}$ жана $\dfrac{3\pi}{4}$ маанилерине ылайыктуу чекиттерде кесип өтөт.

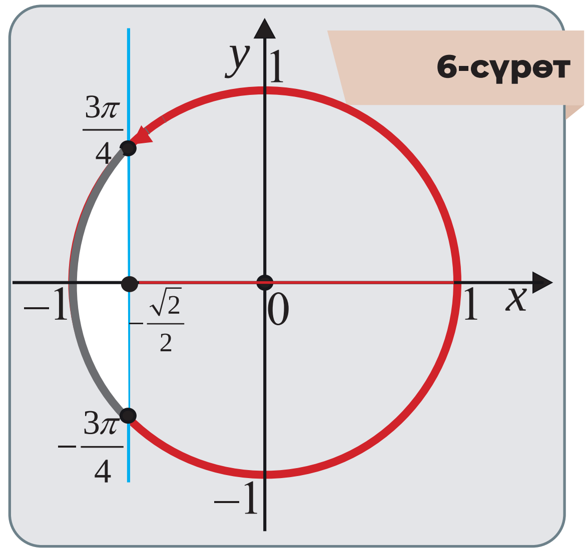
Бизге $x+\frac{\pi}{4}$ нын маанилери ушул керек:

$$-\frac{3\pi}{4}+2\pi n\le x+\frac{\pi}{4}\le\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z.$$

Кош барабарсыздыктын ар бир мүчөсүнөн $\frac{\pi}{4}$ ди кемитебиз жана төмөнкүлөрдү пайда кылабыз:

$$-\pi+2\pi n\le x\le\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$$

Жообу: $x\in\left[-\pi+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right], n\in Z.$



7-мисал. Барабарсыздыктарды чыгар:

$$tg\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\ge 1$$

Чыгаруу

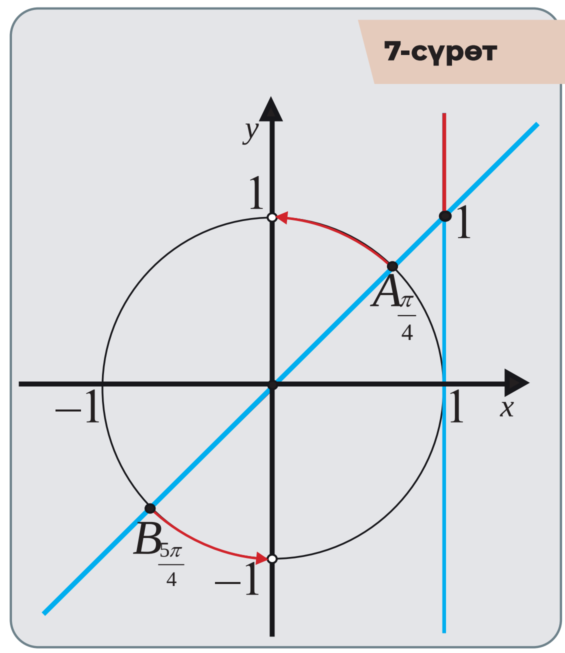
7-сүрөттөн $2x-\frac{\pi}{4}$ өлчөм ушул шарттарды аткаруусу келип чыгат:

$$\frac{\pi}{4}+\pi n\le 2x-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in Z$$

$$\frac{\pi}{2}+\pi n\le 2x<\frac{3\pi}{4}+\pi n,\quad n\in Z$$

$$\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}<x<\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi n}{2},\quad n\in Z$$

Жообу: $\left[\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2};\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}\right),\ k\in Z$



8-мисал. Барабарсыздыктарды чыгар: $\sin x>\cos x$.

Чыгаруу

$$\sin x-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)>0\ \Rightarrow\ 2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4}>0\ \Rightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)>0$$

$$\arcsin 0+2\pi n<x-\frac{\pi}{4}<\pi-\arcsin 0+2\pi n, n\in Z$$

$$2\pi n<x-\frac{\pi}{4}<\pi+2\pi n, n\in Z\ \Rightarrow\frac{\pi}{4}+2\pi n<x<\frac{5\pi}{4}+2\pi n, n\in Z$$

Жообу: $\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n;\frac{5\pi}{4}+2\pi n\right),\ n\in Z.$

МИСАЛДАР

1. Барабарсыздыктарды чыгар.

a) $sinx > 1$ b) $sinx \ge 1$ c) $sinx < 1$ d) $sinx \le 1$

e) $sinx > -1$ f) $sinx \ge -1$ g) $sinx < -1$ h) $sinx \le -1$

i) $sinx > 1,5$ j) $sinx \ge -1,2$ k) $sinx < 1,1$ l) $sinx \le -2$

2. Барабарсыздыктарды чыгар.

a) $cosx > 1$ b) $cosx \ge 1$ c) $cosx < 1$ d) $cosx \le 1$

e) $cosx > -1$ f) $cosx \ge -1$ g) $cosx < -1$ h) $cosx \le -1$

i) $cosx > 2$ j) $cosx \ge -1,6$ k) $cosx < 1,4$ l) $cosx \le -1,7$

3. Барабарсыздыктарды чыгар.

a) $\sin 2x \ge 0$ b) $\cos 3x \le 0$ c) $\cos x \le \frac{1}{2}$ d) $\sin x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\cos 2x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ f) $\sin 3x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ g) $\sqrt{2} - 2\sin x > 0$ h) $2\cos x + \sqrt{3} \le 0$

4. Барабарсыздыктарды чыгар.

a) $\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) < 0$ b) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \le 0$

c) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) > -\frac{\sqrt{2}}{2}$

5. Барабарсыздыктарды чыгар.

a) $tg\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \ge \sqrt{3}$ b) $tg\left(2x - \frac{5\pi}{6}\right) > 0$ c) $ctg\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) > -\frac{\sqrt{3}}{3}$

d) $ctg\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \ge 0$ e) $ctg\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) < 0$ f) $tg\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) \le -1$

6. $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) < -\frac{1}{2}$ барабарсыздыктын $[0; \pi]$ интервалдагы чечимдерин тап.

7. $tg\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) < -\sqrt{3}$ барабарсыздыктын $\left[-\frac{3}{8}; \frac{21}{8}\right]$ интервалдагы чечимдерин тап.

8. Барабарсыздыктарды чыгар.

a) $cos^2x - 3cosx < 0$ b) $2sin^2x - 5sinx + 3 \ge 0$

c) $3cos^2x + 7cosx + 4 \le 0$ d) $tg^2x - 4tgx + 3 < 0$

9. Барабарсыздыктарды чыгар.

a) $\cos\left(3\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right) < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\sin\left(\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right) > -\frac{1}{2}$

6-ГЛАВА. ЫКТЫМАЛДУУЛУК ТЕОРИЯСЫ

- КОКУСТУК ОКУЯЛАР
- ЫКТЫМАЛДУУЛУКТУН АНЫКТАМАЛАРЫ
- КАЙТАЛОО

КОКУСТУК ОКУЯЛАР

Ыктымалдуулук теориясы – бул заманбап математиканын негизги тармактарынын бири болгон математикалык илим. Ыктымалдуулук теориясынын предмети кокустук кубулуштар башкарган мыйзамдарды изилдөөдөн турат. Анын негизги түшүнүктөрү тажрыйба жана кубулуш.

Бул ***тажрыйба*** деп аталган белгилүү бир шарттардын жыйындысын аткарууну билдирет. Эксперименттин натыйжасы ***кубулуш*** деп аталат.

Кубулуштар үч түргө бөлүнөт: мүмкүн эмес (эч качан ишке ашпайт), сөзсүз (ар дайым ишке ашырылат) жана кокустук (аткарылышы да аткарылбасдыгыда мүмкүн), негизгиси кокустук окуянын ыктымалдуулугун эсептөөнү үйрөнүү.

Жаратылыштын жана коомдун мыйзамдарында болгон ар кандай кубулуш кокустуктан көз каранды. Мисалы, алардын айрымдарын алдын ала айтууга болот, ал эми кээ бирлери болжолдуу: аба ырайы, баа, түшүмдүн молдугу жана аздыгы ж.б.

Ыктымалдуулук теориясы, белгилүү бир комплекс шарттар аткарылганда, көп жолу кайталанган массалык кокустук окуянын негизги касиети ыктымалдык деп аталган чоңдук менен көрсөтүлөт.

Ыктымалдуулук теориясы XVII кылымдын ортолорунда Паскаль, Ферма, Бернулли сыяктуу илимпоздор кумар оюндарында байкалган кубулуштардын кээ бир мыйзамдарын изилдөөгө олуттуу көңүл бурушуп, процесстерди изилдеп, натыйжада аны түзүүгө чоң салым кошушкан. Ыктымалдуулук теориясы ар кандай тармактарда, анын ичинде экономика, биология, медицина, айыл чарба, инженерия жана башка тармактарда кеңири колдонулат.

Кандайдыр бир кубулушту байкоо же эксперименталдык изилдөө белгилүү бир сыноолорду жүргүзүү жолу менен ишке ашырылат.

Окуяларды түшүнүү

Аныктама. Тажрыйба ар кандай сыноолордун натыйжасы (же аягы) **кубулуш** деп аталат. Латын алфавитинин баш тамгалары менен кубулуштар, A, B, C, ... катары аныкталат.

Кадимки нике, практикалык иш-аракеттер жана илимий изилдөөлөрдүн натыйжаларына толук ишеним менен алдын-ала айтууга болбой турган эксперименттер жана сыноолор көп кездешет.

Мисалы, тыйынды ыргытууда тигил же бул тарап түшөт деп толук ишеним менен айтууга болбойт, атуу учурунда бута коюлабы же жокпу белгисиз, куб ыргытылды. Бул учурда, 6 упай түшүп калабы же жокпу, алдын-ала белгисиз, ошондой эле стандарттуу эмес лотерея чыптасы боюнча утуштун чыгымын болжолдоо мүмкүн эмес.

Аныктама. Тажрыйбанын натыйжасында сөзсүз боло турган кубулуш ***татаал кубулуш*** деп аталат жана ал Ω тамгасы менен белгиленет.

Мисалы, кубикти таштаганда 1 ден 6 га чейинки бүтүн сандардын түшүшү, тобокел тандалган сөздө 1000 ден көп болбогон тамгалардын болушу, күндөн кийин түндүн келиши жана башкалар татаал кубулуштар.

Аныктама. Тажрыйбанын натыйжасында эч качан болбой турган кубулуш болсо ***мүмкүн болбогон кубулуш*** деп аталат жана ал $\varnothing$ белгиси менен белгиленет.

Мисалы, бир лотереяга эки байге чыгышы, космос кораблинин күнгө конуп кайтып келиши жана башкалар мүмкүн болбогон кубулуштар.

Аныктама. Тажрыйбанын натыйжасынын боло турган дагы, болбой турган дагы окуя ***кокустук окуя*** деп аталат.

Мисалы, тыйынды таштаганда герби бар жагынын түшүшү, ок атылганда бутага тийиши, лотерея чыптасына байгенин чыгышы, кубик ташталганда 6 цифрасынын түшүшү жана башкалар кокустук окуяларга мисал боло алат.

Аныктама. Бири болгондо башкасы болбой турган кубулуштар ***биргеликте эмес*** (***чогуу болбогон***) кубулуштар деп аталат.

1-мисал. Детал салынган кутудан тобокел кылынып бир детал алынды. Мында сапаттуу деталдын чыгышы сапаттыз деталдын чыгышын жокко чыгарат же тескерисинче. “Сапаттуу детал чыгыптыр” жана “сапатсыз детал чыгыптыр” окуялары биргеликте эмес.
2-мисал. Тыйынды ыргытууда герби бар жагынын түшүшү цифралуу жагынын түшүшүн жокко чыгарат.” Герб жагы түштү” жана “Цифралуу жагы түштү” окуялары биргеликте эмес.

Аныктама. Эгерде окуялар бир мезгилде болушу мүмкүн болсо, анда мындай кубулуштар ***чогуу болгон кубулуштар*** *деп аталат*.

Мисалы, "күн чыкты "жана" күн суук", бул окуялар биргеликте болушу мүмкүн болгон кубулуш болот.

Аныктама. Эксперименттин ар бир натыйжасын чагылдырган кубулуш ***элементардык кубулуш*** деп аталат.

Аныктама. Элементардык кубулуштарга бөлүүгө боло турган кубулуш ***татаал кубулуш*** деп аталат.

Аныктама. Эгерде тажрыйбанын натыйжасында пайда болгон бир нече кубулуштардын бири башкаларга караганда көбүрөөк ыктымалдуулукка ээ деп айтууга негиз жок болсо, анда мындай кубулуштар ***бирдей мүмкүнчүлүктүү кубулуштар*** деп аталат.

Мисалы, тыйын ыргытылганда герб же сан жагынын түшүшү, же кубик ыргытылганда бир упай чыгышы, эки упай чыгышы, ... алты упай чыгышы – мунун баары бирдей ыктымалдуу окуялар.

Аныктама. A кубулушуна ***карама-каршы кубулуш*** деп A кубулушунун болбостугунан түзүлгөн кубулушка айтылат $\overline{A}$ сыяктуу белгиленет.

Байланышкан жана байланышпаган кубулуштар түшүнүгү

Аныктама. Эгерде эки окуянын болушу экинчи окуянын болушуна же болбошуна байланыштуу болбосо, бул окуялар ***ыктыярдуу*** (***байланыштуу болбогон***) ***окуялар*** деп аталат.

3-мисал. Тыйын эки жолу ыргытылат. Биринчи ыргытууда (A окуясы) герб жагы конуу ыктымалдуулугу аны экинчи ыргытууда (B окуясы) герб жагы түшүшү же түшпөөсүнө байланыштуу эмес. Өз кезегинде, экинчи экспериментте герб жагы түшүү ыктымалдуулугу биринчи эксперименттин жыйынтыгына байланыштуу эмес. Ошентип, аныктама: A жана B окуялары ыктыярдуу.

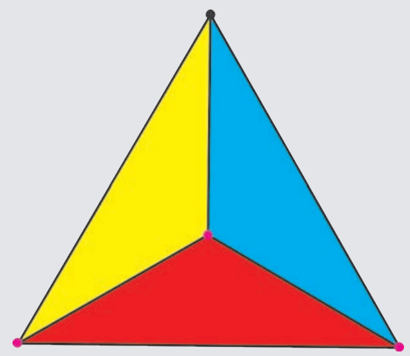
4-мисал. Тыйын жана кубикти таштоодо A – тыйында герб жагы, B – кубиктин жуп саны түшүү окуялары болсун. Бул жерде A жана B байланышпаган окуялар.

5-мисал. Эки кубикти таштоодо A – биринчи кубикте, B – экинчи кубда жуп сан түшүү окуялары болсун. Бул жерде A жана B байланышпаган.

Аныктама. Эгерде бир нече окуянын ыктыярдуу экөөсү байланышсыз болсо, алар ***жуп-жуп эрктүү кубулуштар*** деп аталат.

6-мисал. Тыйын 3 жолу ыргытылат. A, B, C кезекте биринчи, экинчи жана үчүнчү тажрыйбаларда герб жагы түшүү окуясы болсун. Каралып жаткан окуялардын экөө (б.а. A va B, A жана C, B жана C) байла- ныштуу эмес. Ошентип, A, B жана C жуп-жуп эрктүү.

1-сүрөт



7-мисал. Ар дайым тетраэдрдын бир жагы кызыл, башка бир жагы сары, үчүнчү жагы көк ошондой эле төртүнчү жагы ушул үч түстө (1-сүрөт).
Тетраэдрды таштоодо кызыл түстүн түшүшү A кубулуш, сары түстүн түшүшү B кубулуш, көк түстүн түшүшү C кубулуштар жуп-жуп эрктүү.

Аныктама. Эгерде эки окуянын биринин пайда болуу ыктымалдыгы экинчи окуянын пайда болушуна же болбошуна байланыштуу болсо, бул окуялар ***байланыштуу*** деп аталат.

8-мисал. Идиште 80 ак 20 кара шар бар. Тобокел кылып бир шар алынып, кайра коюлбайт. Эгерде биринчи алууда ак шар чыгуусу A окуя болсо, анда экинчи алуудагы шардын ак чыгуусу B окуясынын болуусу A окуяга байланыштуу. Башкача айтканда, A жана B окуялар бири-бирине байланыштуу.

ЫКТЫМАЛДУУЛУК АНЫКТАМАЛАРЫ

"Ыктымалдуулук" түшүнүгү ыктымалдуулук теориясынын негизги түшүнүктөрүнүн бири болуп саналат. Мисал келтирели.

Бир идиштин ичинде жакшы аралашкан окшош шарлар бар дейли, анын 5 өө кызыл, 4 өө кара жана калган 3 өө ак түстө. Чындап эле контейнерден чыккан шардын кызыл же кара шар болуп чыгуу ыктымалдуулугу ак болуп чыгуудан көбүрөөк. Бул мүмкүнчүлүктү сан менен мүнөздөөгө болобу? Ооба, болот. Бул сан ***кубулуштун ыктымалдуулугу*** деп аталуучу чоңдук.

Ошентип, ыктымалдуулук окуянын пайда болуу мүмкүнчүлүгүн мүнөздөгөн сан болуп саналат.

Биз тобокел кылып шардын кызыл же кара түстө болуу мүмкүнчүлүгүн өлчөмдүк баалоо тапшырмасын коёлу. Кызыл же кара түстөгү шардын чыгуусун A окуя катары карайбыз. Тажрыйбада (тажрыйба идишден шар алуудан турат) мүмкүн болгон натыйжалардын ар бирин б.а. тажрыйбада болуусу мүмкүн болгон ар бир окуяны элементардык окуя деп атайбыз. Элементардык окуяларды E_1, E_2, E_3, E_4, ... менен белгилейбиз. Биздин мисалда төмөнкү 12 элементардык окуя болушу мүмкүн: E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 – кызыл шар чыкты; E_6, E_7, E_8, E_9– кара шар чыкты; E_{10}, E_{11}, E_{12}– ак шар чыкты.

Оңой гана көрүү мүмкүнго, бул натыйжалар жалгыз мүмкүн болгон (албетте, бир шар чыгат) жана бирдей мүмкүн болгон (шар тобокелге салынат, шарлар бирдей жана жакшы аралашат) кубулуштур.

Бизди кызыктырган кубулуштун пайда болушуна алып келген элементардык кубулуштар бул кубулуштун пайда болушун ыңгайлуу кылган кубулуштар деп айтабыз. Биздин мисалда, төмөнкү 9 элементардык кубулуш А (кызыл же кара шардын чыгышы) кубулуштун пайда болушуна ыңгайлуулук туудурат: E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7, E_8, E_9. A А окуясынын пайда болушуна шарт түзгөн элементардык окуялардын санынын алардын жалпы санына болгон катышы А окуясынын ыктымалдуулугу деп аталат жана Р(А) менен белгиленет. Берилген мисалда бардыгы болуп 12 элементардык окуя бар, анын 9 у А окуясын жеңилдетет. Ошентип, тартылган шардын кызыл же кара болушу ыктымалдуулугу: $P(A)=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$. Табылган сан (ыктымалдуулук) алдыбызга койгон маселеде кызыл же кара шардын чыгуу мүмкүндүгүнүн өлчөмдүү баасын берет.

Ыктымалдуулуктун ар кандай аныктамалары бар. Булар классикалык, статистикалык жана геометриялык аныктамалар.

Ыктымалдуулуктун классикалык аныктамасы

Аныктама. ***А окуянын ыктымалдуулугу*** деп, бул окуянын болушуна шарт түзгөн эксперименттин натыйжаларынын – m санынын эксперименттин бардык мүмкүн болгон элементардык окуяларынын – n санына болгон катышышыга айтылат жана төмөнкү формада аныкталат:

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

Ыктымалдуулуктун аныктамасынан төмөнкү касиеттер келип чыгат:

1. Сөзсүз окуянын ыктымалдуулугу 1 ге барабар $P(\Omega)=1$.

Чындап айтканда, эгерде кубулуш сөзсүз болсо, анда тажрыйбанын ар кандай элементардык натыйжасы бул көрүнүштүн пайда болушунда ыңгайлуулукту камсыз кылат. Бул учурда, $m = n$. Демек:

$$P(\Omega)=\frac{m}{n}=\frac{n}{n}=1$$

1-мисал. Идиште 1 ден 20 га чейин номерленген 20 шар бар. Идиштен тобокелге бир шар алынды. Бул шардын катар номери 20 дан чоң эмес болуу ыктымалдуулугу кандай (A окуясы)?

Чыгаруу. Идиштеги шарлардын кайсынысы болбосун катар номери 20 дан ашпайт.

Демек, бул окуянын пайда болушуна көмөктөшүүчү окуялардын саны жана бардыгы мүмкүн учурлардын саны бирдей: $m = n = 20$ жана $P(A)=\frac{m}{n}=1$. Бул учурда, А сөзсүз окуя.

2. Мүмкүн эмес окуянын ыктымалдуулугу нөлгө барабар.

Чындап айтканда, эгерде кубулуш болбой калса, анда эксперименттин эч кандай элементардык натыйжасы бул көрүнүштүн пайда болушуна ыңгайлуу шарт түзбөйт. Бул учурда, $m = 0$. Демек:

$$P(\varnothing)=\frac{m}{n}=\frac{0}{n}=0$$

2-мисал. Кутуда 10 шар бар, анын 4ү ак, калганы кара. Бул кутудан бир шар алынган. Анын кызыл шар болуу ыктымалдыгы кандай (А окуясы)?

Чыгаруу. Кутуда кызыл шар жок, б.а. $m = 0$, бирок n=10. Демек, $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{0}{n}=0$. Бул учурда A окуя таптакыр пайда болбой турган, б.а. мүмкүн эмес окуя болуп саналат.

3. Кокус окуянын ыктымалдыгы оң сан болуп, 0 менен 1дин ортосунда жатат.

Чынында эле, тажрыйбанын бардык элементардык кубулуштарынын бир бөлүгү гана кокустук окуянын пайда болушуна көмөктөшөт. Бул учурда $0<m<n$. Ошол себептен $0<\frac{m}{n}<1$. Демек, $0<P(A)<1$.

Ошентип, кандайдыр бир окуянын ыктымалдуулугу төмөнкү кош барабарсыздыкты канааттандырат:

$$0\le P(A)\le 1$$

Эми төмөнкү мисалдарды чечүүдөн алдын бир формуланы келтирип өтөлү.

Идиште n шар бар, анын n_1 ак, n_2 кара, n_3 кызыл ж.б. n_k сары. Бул идиштен тобокелге m шар алынганда, алардан m_1 ак, m_2 кара, m_3 кызыл ж.б. m_k сары болуу А окуясынын ыктымалдуулугун табуу формуласы:

$$P(A)=\frac{C_{n_1}^{m_1}\cdot C_{n_2}^{m_2}\cdot C_{n_3}^{m_3}\cdot\ldots\cdot C_{n_k}^{m_k}}{C_n^m},$$

Эскертүү: $P_n=n!$, $A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}$, $C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}$

3-мисал. Капда 12 шар бар, алар: 3 ак, 4 кара жана 5 кызыл. Тобокел кылып бир шар алынды. Анын кара шар болуу (A окуя) ыктымалдуулугун тап.

Чыгаруу. Бизде ыңгайлуу элементардык кубулуштар саны $m = 4$, ошондой эле жалпы элементардык кубулуштар саны $n = 12$, демек, A кубулушунун ыктымалдуулугу:

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$

4-мисал. Кутуда 10 шар бар: 6 ак жана 4 кара. 2 шар тобокел кылып алынды. Эки шардын тең ак болуу ыктымалдуулугун тап.

Чыгаруу. Бул маселе боюнча бардык мүмкүн болгон учурлардын саны $n=C_{10}^{2}=\dfrac{10\cdot 9}{1\cdot 2}=45$ ке барабар.

Ал эми окуяга шарт түзгөн иштердин саны $m=C_{6}^{2}=\dfrac{5\cdot 6}{1\cdot 2}=15$ ге барабар. Ошондон, $P(A)=\dfrac{m}{n}=\dfrac{15}{45}=\dfrac{1}{3}$.

5-мисал. 2000 лотерея чыптасы сатылды. Бул учурда 1 чыптага 100 000 сум, 4 чыптага 50 000 сум, 10 чыптага 20 000 сум, 20 чыптага 10 000 сум, 165 чыптага 5 000 сум, 400 чыптага 1000 сум байге белгиленген, калган чыпталарга байге жок. Ар бир чыптанын кеминде 10 000 сум байге алуу ыктымалдуулугу кандай?

Чыгаруу. Бул учурда $m=1+4+10+20=35$, $n=2000$. Анткени, 35 чыптада 10 000 сумдан жогору байгелер бар. Ошол себептен,

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{35}{2000}=0{,}0175.$$

6-мисал. Дүкөндө 6 эркек жана 4 аял иштейт. Табелдеги катар номери боюнча, кокустан 7 киши тандалды. Тандалгандардын арасында 3 аял болуу ыктымалдуулугун тап.

Чыгаруу. Жалпы пайда болуулар саны, же 10 кишиден 7 кишини канча түрдүү усулда тандоо мүмкүндүгү, бул болсо $n=C_{10}^{7}=\dfrac{8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3}=120$ 120 га барабар жана эми ыңгайлуулук жаратуучу элементардык кубулуштардын санын табуу керек. Бул үчүн 7 кишилик жамаатты төмөндөгү көрүнүштө түзөбүз: 4 аялдан 3 өөнү жана 6 эркектен 4 өөнү алышыбыз керек, же $m=C_{4}^{3}\cdot C_{6}^{4}=\dfrac{4}{1}\cdot\dfrac{5\cdot 6}{1\cdot 2}=60$. Демек, бул кубулуштун ыктымалдуулугу $P(A)=\dfrac{m}{n}=\dfrac{60}{120}=\dfrac{1}{2}$ ге барабар.

7-мисал. Бир текчеге ар кандай 2 математика, 2 физика жана 2 химия китептери коюлган. Химия китептеринин бири-бирине жанаша болуу ыктымалдуулугу кандай?

Чыгаруу. Бардык орун алмашуулар санын табабыз, башкача айтканда, 6 китептин орун алмашуулар саны $n=P_6=6!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6=720$. Эми химия китептери бири-бирине жанаша болушу үчүн, химия китептерин 1 китеп катары карап, бардык алмашуулардын санын $P_5=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=120=$ 120 табабыз, ошондой эле химия китептеринин дагы орун алмашуулар санын эсепке алышыбыз зарыл, же $P_2=2!=1\cdot 2=2$. Ошондон, $m=P_5\cdot P_2=120\cdot 2=240$ пайда болот. Демек, бул, ыктымалдуулуктун классикалык аныктамасына ылайык $P(A)=\dfrac{m}{n}=\dfrac{240}{720}=\dfrac{1}{3}$ барабар экен.

8-мисал. Абонент телефон номерин терүүдө акыркы үч цифраны эстей алган эмес. Бирок ал сандар ар түрдүү экенин билет. Бардык терүүлөрдөн туура номерди терүү ыктымалдуулугу кандай?

Чыгаруу. Туура санды терүү окуясын A менен, анын ыктымалдуулугун $P(A)$ менен белгилейбиз.

Акыркы үч санды A_{10}^3 аркылуу терүү мүмкүн болот. Ошондо бардык сыноолор саны $n = A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = 8 \cdot 9 \cdot 10 = 720$ ге барабар болот. Изделип жаткан телефон номери 720 дан бири болот. Б.а, $m = 1$. Ыктымалдуулуктун классикалык аныктамасы боюнча $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{720}$ болот.

Ыктымалдуулуктун статистикалык аныктамасы

Салыштырмалуу жыштык ыктымалдуулук менен бирге ыктымалдуулук теориясынын негизги түшүнүктөрүнүн бири болуп саналат.

Аныктама. ***Окуянын салыштырмалуу жыштыгы*** деп, окуя болгон эксперименттердин санынын өткөрүлгөн эксперименттердин жалпы санына катышына айтылат. Ошентип, А окуясынын салыштырмалуу жыштыгы төмөнкү формула менен аныкталат:

$$W(A) = \frac{M}{N}$$

бул жерде, M саны – A окуянын N – эксперименттерде болгон жалпы саны.

Аныктама. Статистикалык ыктымалдуулук – көп сандагы эксперименттердин салыштырмалуу жыштыгы.

Ыктымалдуулук менен салыштырмалуу жыштык аныктамаларын салыштырып, биз төмөнкүдөй жыйынтыкка келебиз: Ыктымалдуулуктун аныктамасында эксперименттердин чындыгында жүргүзүлүшү талап кылынбайт, ал эми салыштырмалуу жыштыктын аныктамасында эксперименттер чындыгында жүргүзүлүшү керек. Жөнөкөй сөз менен айтканда, ыктымалдуулук экспериментке чейин (мурун), ал эми салыштырмалуу жыштык эксперименттен кийин эсептелет.

Эгерде $M = N$ болсо, б.а. жүргүзүлгөн эксперименттердин саны окуянын ишке ашуулар санына барабар болсо, анда бул окуяны сөзсүз орун алуучу окуя деп атайбыз.

Эгерде $M = 0$ болсо, б.а. жүргүзүлгөн эксперименттин натыйжасында, эгер кубулуш бир жолу болбосо, анда бул көрүнүш мүмкүн эмес көрүнүш болот.

1-мисал. Мерген бутага 30 ок атты. Алардын 23ү бутага тийгени белгилүү болсо, мергендин бутага тийген окторун салыштырмалуу жыштыгын тапкыла.

Чыгаруу. Мерген окторун үчөөсү бутага тийди, демек, окуянын ишке ашууларынын саны $M = 23$ ал эми кесилген жебелердин жалпы саны $n = 30$, демек, бул окуянын салыштырмалуу жыштыгы $W(A) = \frac{23}{30}$ болот.

2-мисал. Биринчи 1000 натурал сандын ичинен 5 ке эселенген сан болушунун салыштырмалуу жыштыгын тап.

Чыгаруу. Бул жерде сандын 5 ке эселүү болуу окуясын A менен, анын салыштырмалуу жыштыгын болсо $W(A)$менен белгилейбиз. Өткөрүлгөн бардык сыноолор саны N=1000 ге, алгачкы 1000 натуралдык сандын арасында 5ке эселенген 200 натуралдык сан бар, демек, M=200, ал эми салыштырмалуу жыштык$=\frac{200}{1000}=\frac{1}{5}$

3-мисал. Бир өлкөгө чет өлкөлүк туристтер жана ошол эле өлкөнүн ичинде саякаттаган жарандар (ички туристтер) жөнүндө төмөнкү маалыматтарды берилген болсун.

Жылдар	Чет элдик туристтердин саны	Ички туристтер	Туристтердин саны
2018	610 623	403 989	1 014 612
2019	746 224	348 953	1 095 177
2020	822 558	316 897	1 139 455
2021	774 262	346 103	1 120 365
2022	811 314	351 028	1 162 342
$\sum$	3 764 981	1 766 970	5 531 951

Каралган жылдарында өлкө ичинде саякаттап жүргөн жарандардын салыштырмалуу жыштыгын тапкыла.

Өлкө ичинде саякаттап жүргөн жарандардын саны: M = 1 766 970.

Чет элдик туристтердин саны: K = 3 764 981.

Туристтердин жалпы саны: $\boldsymbol{N}$ = 1 766 970 + 3 764 981 = 5531951.

$$W=\frac{M}{N}=\frac{1766970}{5531951}\approx 0{,}3194.$$

Ыктымалдуулуктун геометриялык аныктамасы

Кандайдыр Ω чөйрө (кесинди, фигура же тело) берилген болуп, бул чөйрөгө ташталган чекиттин ага түшүүсү сөзсүз болсун. Бул берилген чөйрөдөн аны кичине ω чөйрөгө (кесинди, фигура же тело) ажыратайлы. Чөйрөгө ташталган чекиттин ажыратылган аймакка түшүү ыктымалдуулугу суралган болсун. Ажыратылган аймак канча чоң болсо, түшүү ыктымалдуулугу да жогорулайт, ω чөйрө Ω чөйрөгө теңдешкенде болсо, анын түшүү ыктымалдуулугу сөзсүз окуя болуп калат. Ошентип, ташталган чекиттин ажыратылган ω чөйрөгө түшүү ыктымалдуулугу ω чөйрөнүн өлчөмүнө түз пропорционалдуу, аны геометриялык көз караштан чечмелөгө туура келет. Мындай учурларда ыктымалдуулуктун геометриялык аныктамасын колдонуу ыңгайлуу. Эгерде ташталган чекиттин Ω чөйрөгө түшүшү сөзсүз болсо, анда бул чекиттин бул чөйрөдөн ажыратылган ω чөйрөгө түшүү ыктымалдуулугу ω чөйрөнүн өлчөмүнүн Ω чөйрөнүн өлчөмүнө болгон катышына барабар болот:

$$P(A)=\frac{m(\omega)}{m(\Omega)}$$

$m(\omega)$ – Бул жерде ω – тармактын өлчөмү, б.а. бир өлчөмдөгү узундук, эки өлчөмдөгү аянт, үч өлчөмдөгү көлөм ж.б.

Эгерде Ω чөйрөнүн өлчөмү L кесинди жана ω бөлүнгөн чөйрөнү l кесинди деп алсак, L кесиндиге чейин ташталган чекиттин l кесиндиге түшүү ыктымалдуулугу төмөнкүдөй болот:

$$P(A)=\frac{l}{L}$$

Эгерде Ω чөйрөнү S аянт жана ω бөлүнгөн аянтты s кичине аянт деп алсак, S аянтка ташталган чекиттин s кичине аянтка түшүү ыктымалдуулугу төмөнкүдөй болот:

$$P(A)=\frac{s}{S}$$

Эгерде Ω чөйрөнү V көлөм деп жана ω чөйрөнү v кичине көлөм деп алсак, V көлөмгө ыргытылган чекиттин v кичине көлөмгө түшүү ыктымалдуулугу төмөнкүдөй болот:

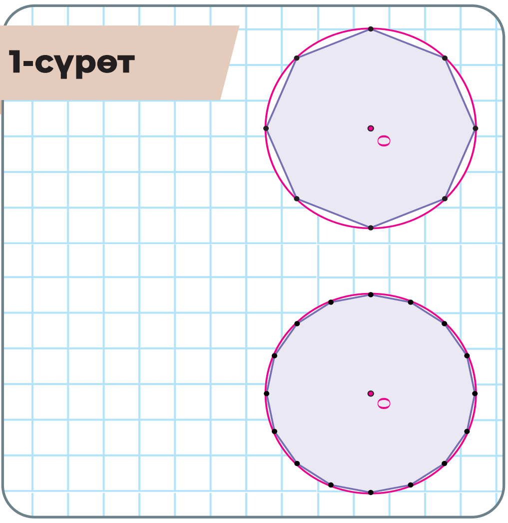
$$P(A)=\frac{v}{V}$$

Геометриялык аныктаманы убакытка карата да колдонсо болот. Эгер T окуясы сөзсүз түрдө өз убагында боло турган болсо, анда бул окуя t убагында болуу ыктымалдуулугу төмөнкүдөй болушу мүмкүн:

$$P(A)=\frac{t}{T}$$

1-мисал. Чекит R радиустук тегеректе тобокелдик ыргытылат. Ыргытылган чекиттин тегеректин ичине тартылган тең жактуу үч бурчтукка түшүү мүмкүнчүлүгүн тап.

Чыгаруу. $S(D_n)$ – n-бурчтун жүзү, $S(D)$– тегеректынын жүзү болсун (1-*сүрөт*). Анда



1-сүрөт

$$P(B_n)=\frac{S(D_n)}{S(D)}=\frac{n\cdot\frac{R^2}{2}\cdot\sin\frac{2\pi}{n}}{\pi R^2}=\frac{n\cdot\sin\frac{2\pi}{n}}{2\pi}=\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}$$

а) Чекит R радиустук тегеректе тобокелдик ыргытылат. Ыргытылган чекиттин тегеректин ичине тартылган туура үч бурчка түшүү ыктымалдуулугун тапкыла.

Чыгаруу. $S(D_3)$ – үч бурчтуктун жүзү, $S(D)$ – тегеректин жүзү болсун (2-*сүрөт*).

B_3 – чекиттын үч бурчтукка түшүү окуясы. Бул абалда

$$P(B_3)=\frac{S(D_3)}{S(D)}=\frac{3\sqrt{3}R^2}{4\pi R^2}=\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}\approx 0,4137$$

b) Чекит R радиустук тегеректе тобокел ыргытылат. Ыргытылган чекиттин тегеректин ичине тартылган квадратка түшүү ыктымалдуулугун тап.

Чыгаруу. $S(D_4)$ – квадраттын аянты, $S(D)$ – тегеректин аянты болсун (3-*сүрөт*).

B_4 – чекиттин квадратка түшүү кубулушу.

Анда

$$P(B_4)=\frac{S(D_4)}{S(D)}=\frac{2R^2}{\pi R^2}=\frac{2}{\pi}\approx 0,637$$

c) Чекит R радиустуу тегеректе чекит тобокелине ыргытылган. Ыргытылган чекиттин тегеректин ичине тартылган туура алты бурчтук ичине түшүү ыктымалдуулугун тап.

Чыгаруу. $S(D_6)$ – алты бурчтуктун аянты, $S(D)$ – тегеректин аянты болсун (4-*сүрөт*).

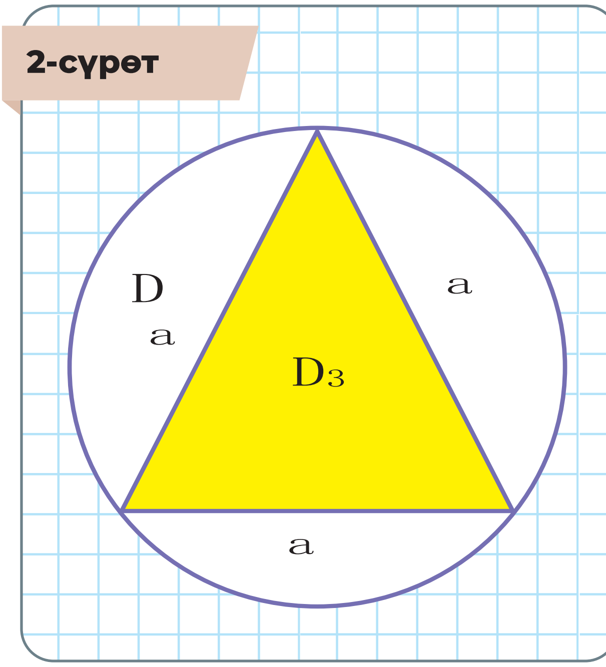
B_6 – чекиттын үч бурчтукка түшүү кубулушу. Анда

$$P(B_6)=\frac{S(D_6)}{S(D)}=\frac{3\sqrt{3}R^2}{2\pi R^2}=\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\approx 0,8274$$

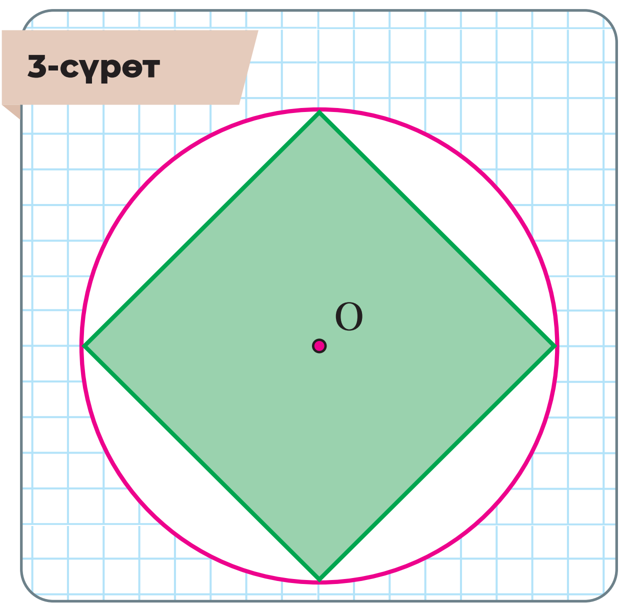
2-мисал. 30 *cm* узундуктагы L кесинди 12 *cm* узундуктагы l кесинди менен бирге коюлат. Чоң кесиндиге тобокелдик менен коюлган чекиттин кичине кесиндиге да түшүү ыктымалдуулугун тап. Чекиттин кесиндиге түшүү ыктымалдыгы кесиндинин узундугуна түз пропорционал жана анын жайгашкан жерине көз каранды эмес деп кабыл алынат.

Чыгаруу. Ташталган чекиттин L кесиндиге түшүүсү анык. $P(E)$ бул L кесиндиде жайгашкан l кесиндиге түшүү ыктымалдуулугун табабыз (5-сүрөт). Сүрөттө бир гана үч абал көрсөтүлгөн. Бирок l кесинди L дин каалаган бөлүгүндө жайгашкан болушу мүмкүн.

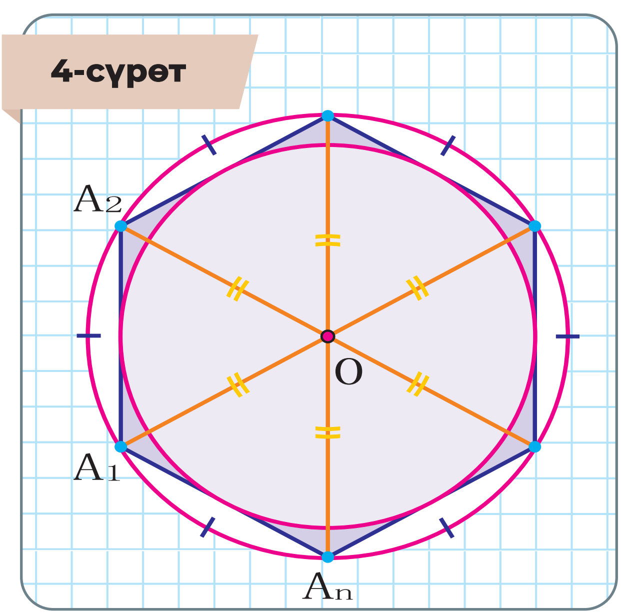
2-сүрөт



3-сүрөт



4-сүрөт



$$P(E)=\frac{l}{L}=\frac{12}{30}=\frac{2}{5}$$

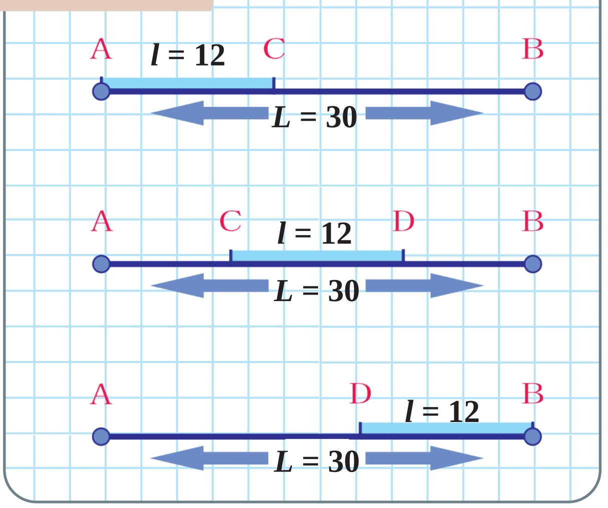
3-мисал. Саат 9 дан 10 го чейин эки дос жолугууну каалашты. Биринчи келген адам досун 15 мүнөт күтөт деп алдын ала келишим түзүштү. Эгер досу бул убакыттын ичинде келбесе, кетип калышы мүмкүн. Эгерде алар саат 9дан 10го чейин каалаган убакта келе алышса жана келүү убакыттары берилген убакыт ичинде кокустук болуп, өз ара макулдашылбаса, бул эки достун жолугуу ыктымалдыгы кандай ?

Чыгаруу. Биринчи кишинин келүү убактысы x, экинчи кишинин келүү убактысы y болсун. Алардын жолугушу үчүн $|x-y|\le 15$ барабарсыздыгынын аткарылышы зарыл жана жетиштүү. x жана y ти тегиздиктеги декарттык координаттар катары сүрөттөп, масштаб бирдиги катары мүнөттөрдү алабыз. Болушу мүмкүн болгон бардык мүмкүнчүлүктөр жактары 60 болгон квадраттын чекиттеринен жана жолугууга ыңгайлуу болгон боёлгон аянттын чекиттеринен турат (6-*сүрөт*).

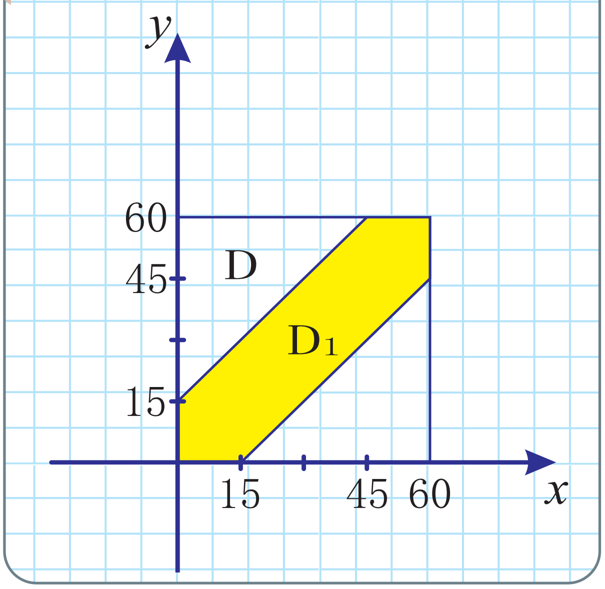
Демек, ыктымалдуулуктун геометриялык аныктамасына ылайык, изделген ыктымалдык боёлгон аянтты квадраттын аянтына болгон катышына барабар:

$S(D_1)$ – боёлгон аянттын бети, $S(D)$ – квадраттын бети болсун (6-*сүрөт*). A – достордун жолугушуу кубулушу.

5-сүрөт



6-сүрөт



$$S(D_1)=60\cdot 60-2\cdot\frac{45\cdot 45}{2}=1575$$

$$S(D)=60\cdot 60=3600$$

Изделип жаткан ыктымалдуулук:

$$P(A)=\frac{S(D_1)}{S(D)}=\frac{1575}{3600}=\frac{7}{16};\qquad P(A)=\frac{7}{16}$$

МАСЕЛЕЛЕР

1. Лотереяда 1000 чыпта бар. Алардан 500 ү байгелүү, 500 ү байгесиз. Эки чыпта сатып алынды. Экөө чыптанын да байгелүү болуу ыктымалдуулугун тап.

2. Тыйын эки жолу ташталды. Экөөсүндө да герб жагы түшүү ыктымалдуулугун тап.

3. 20 китеп шкафка салынды. 20 китептен 5 өөнүн жанаша туруу (А окуя) ыктымалдуулугу эмнеге барабар?

4. Эки кубик ташталды. Алардын жактарында чыккан цифралардын суммасы – жуп сан. Ошону менен бирге, ташталган кубиктердин кеминде бирөөнө дайыма 6 саны түшүү ыктымалдуулугун тап.

5. Эки кубик ташталды. Алардын жактарында чыккан сандардын суммасы 5 ке, көбөйтүндүсү 4 кө барабар болуу ыктымалдуулугун тап.

6. Эки кубик ташталган болуп, алардын жактарында чыккан сандардын суммасы 7 ге барабар болуу ыктымалдуулугун тар.

7. Цифралары ар түрдүү болгон эки орундуу сан ойлонгон. Ойлонгон сан болжолдуу айтылган эки орундуу сан болуу ыктымалдыгын тап.

8. Баштыкта 20 шар бар: 10 кара жана 10 ак. Баштыктан капысынан алынган шардын: a) ак; b) кара шар болуу ыктымалдыгын тап.

9. Техникалык көзөмөл бөлүмү кокустан бөлүнгөн 100 китептен турган 5 жараксыз китепти тапты. Жараксыз китептердин салыштырмалуу жыштыгын тап.

10. Бутага 20 ок атылган. Алардын ичинен 18 ок бутага тийген. Бутага тийүүнүн салыштырмалуу жыштыгын тап.

11. Буюмдардын партиясын тестирлөөдө жарактуу буюмдардын салыштырмалуу жыштыгы 0,9 болду. Бардыгы болуп 200 нерсе текшерилсе, жарактуу нерселердин санын тап.

12. Бир шаарда 920 адамдардан жумушка кандай жетип келишин суралганда, алардан 350 адам машинада, 420 адам коомдук унааларда, 80 адам велосипедде, 70 адам жөө келиши маалым болду.
1) машинада;
2) коомдук унааларда;
3) велосипедде;
4) жөө жүргүнчүлөрдүн санынын салыштырмалуу жыштыгын тап.

13. Радиусу 20 *cm* болгон тегерекчеде биринин радиусу 5 *cm*, экинчисинин радиусу 10 *cm* болгон кесилишпеген эки тегерек чийилген. Чоңураак тегеректин ичинде тобокелдик чекиттин кичирээк тегеректердин биринин ичинде болуу ыктымалдыгын тап.

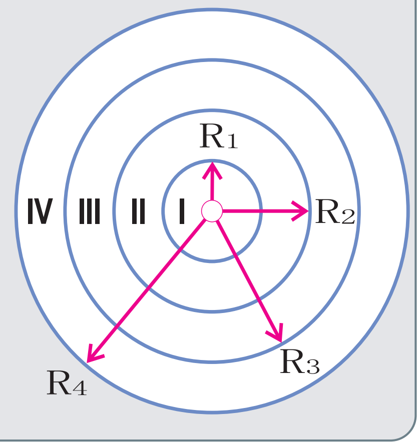
14. Эки дос белгилүү бир жерде саат 10 дон 11 ге чейин жолугушууга макул болушту. Биринчи келген адам экинчисин 20 мүнөт күтүп, андан кийин кетип калат. Эгерде белгиленген убакыт аралыгында достордун келген учурлары бирдей мүмкүнчүлүктө болсо, анда алардын жолугушуу ыктымалдуулугун тап.

15. Катуу бороондун натыйжасында телефон кабели 40- жана 70-чакырымдардын ортосунда үзүлүп калган. Үзүлүү 50- жана 55- чакырымдар арасында болуу ыктымалдыгын тап.

16. Тегеректин ичине квадрат сызылган. Тегеректин ичине тобокелге коюлган чекит квадраттын ичинде болуп калуу ыктымалдыгы кандай?

17. Бутанын радиустары $R_1 = r,\ R_2 = 2r,\ R_3 = 3r,\ R_4 = 4r$ концентрдик тегеректен турат. Бутага ыргытылган найза тегеректе тийип калышы сөзсүз болсо, анда найзанын ар бир аймакка түшүү ыктымалдыгын тапкыла (7-*сүрөт*).

7-сүрөт



18. Эки куб ташталды. Түшкөн сандардын суммасы бешке барабар болуу ыктымалдыгын тап.

19. Группада 30 студент бар, алардын 10 у математика ийримине катышат. Группадан тобокелдик менен 6 студент тандалып алынган. Алардын жок дегенде бирөөсү математика ийримине катышып жаткан студент болуу ыктымалдуулугун тап.

20. 3 көк жана 4 жашыл шарлардан капысынан тандалган 3 шардын 2 көк, 1 жашыл болуу ыктымалдыгын тап.

21. Куб бир жолу ташталганда жуп цифра түшүү ыктымалдыгын тап.

22. Ташуу учурунда 10 000 дарбыздын 26 сы жарака кеткен. Жарылган дарбыздын салыштырмалуу жыштыгын тап.

23. Баштыкта 7 ак, 3 кара шар бар. Андан капысынан алынган шардын ак болуу ыктымалдыгын тап.

24. Телефон аркылуу чалып жаткан абонент аягындагы эки номерди унутуп, ал номерлердин ар түрдүү экендигин билген абалда цифраларды болжолдуу терди. Керектүү цифралар терилгендигинин ыктымалдыгын тап.

25. Аппарат 5 элементтен турат, алардын 2 си эскирген. Аппарат иштей баштаганда 2 элемент туш келди туташтырылды. Ишке түшүрүлгөндө эскирбеген элементтердин туташуу ыктымалдыгын тап.

26. Баштыкта *m* ак жана *n* кара шар бар. Баштыктан тобокелине шар алынды. Натыйжа ак болуу ыктымалдыгын тап.

27. Тобокелине 20 дан чоң болбогон натуралдык сан тандалганда, анын 5 ке эселүү болуу ыктымалдыгын тап.

КАЙТАЛОО

ФУНКЦИЯ ЖАНА АНЫН КАСИЕТТЕРИ

1. Функциялардын аныкталуу областын тап.

a) $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2-4}$ b) $y=\sqrt{3x-x^3}$ c) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-5}-\sqrt{9-x}}$

d) $y=\sqrt{\dfrac{(x-1)(3-x)}{x(4-x)}}$ e) $y=\sqrt{\dfrac{x(x+1)}{(x-2)(4-x)}}$ f) $y=\sqrt{25-x^2}+\dfrac{2x-3}{x+1}$

2. Эгерде $f(x)=x^2$ va $g(x)=2x-1$ болсо, x тын канча маанисинде $f(g(x))=g(f(x))$ болот?

3. Эгерде $f(x+1)=x^2-3x+2$ болсо, $f(x)=?$

4. Эгерде $f(x)=\sqrt{x^3-1}$ болсо, $f\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)$ эмнеге барабар?

5. Эгерде $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$ болсо, $f\left(\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{1}{f(x)}$ эмнеге барабар?

6. Функциялар кандай маанилерди кабыл алат?

a) $f(x)=\dfrac{3}{x-4}$ b) $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$ c) $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x-2}+2$

d) $y=-x^4+2x^2+5$ e) $y=\dfrac{x^2-4x+9}{x^2-4x+5}$ f) $y=\sqrt{x^2-6x+11}$

7. Берилген функциялардан кайсы жуп функция?

a) $y=\dfrac{5x^2}{(x-3)^2}$ b) $y=\dfrac{x(x-2)(x-4)}{x^2-6x+8}$ c) $y=x^2+|x+1|$

d) $f(x)=x^3-\dfrac{2}{x^3}$ e) $y=\begin{cases}-x^2, x<0\\ x^2, x\geq 0\end{cases}$ f) $y=\sqrt{x^2-6x+11}$

8. Берилген функциялардан кайсы так функция?

a) $y=3x^5+x^3$ b) $y=(0,25)^x+(0,25)^{-x}$ c) $y=\begin{cases}x, x<0\\ -x, x\geq 0\end{cases}$

d) $y=|x|-1$ e) $y=\dfrac{x^4-2x^2}{3x}$ f) $y=\sqrt{3-x^2-2x}$

РАЦИОНАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР

Барабарсыздыктарды чыгар (2-21)

1. t нын кандай маанилеринде $18x+7=5$ жана $18x+7+t=5+t$ теңдемелер бирдей күчтүү болот?

2. $\dfrac{4x^2-7x-2}{x^2-5x+6}=0$

3. $2+\dfrac{4}{x^2}=\dfrac{9}{x}$

4. $1-\dfrac{15}{x}=\dfrac{16}{x^2}$

5. $\dfrac{9}{x}+\dfrac{13}{2x}=2$

6. $\dfrac{2}{x-3}=\dfrac{x}{x+3}$

7. $\dfrac{x^3-3x^2}{x+2}\cdot\dfrac{x^2-4}{x^2}=0$

8. $\dfrac{1-x}{(2-x)(x-3)}+1=\dfrac{1}{2-x}$

9. $\dfrac{1}{x^2-9}+\dfrac{1}{3x-x^2}=\dfrac{3}{2x+6}$

10. $\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2-\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)^2=0$

11. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{36}{9x-x^2}-\dfrac{x-5}{9-x}=0$

12. $\dfrac{x-49}{50}+\dfrac{x-50}{49}=\dfrac{49}{x-50}+\dfrac{50}{x-49}$

13. $5-\dfrac{x^2-14x-51}{x^2-x-12}=\dfrac{3}{x-4}$

14. $\dfrac{2}{x^2-4}+\dfrac{x-4}{x^2+2x}=\dfrac{1}{x^2-2x}$

15. $\dfrac{30}{x^2-1}-\dfrac{13}{x^2+x+1}=\dfrac{18x+7}{x^3-1}$

16. $\dfrac{x^2-3x}{x-2}+\dfrac{x-2}{x^2-3x}=2,5$

17. $\dfrac{4}{x^2-3x+2}-\dfrac{3}{2x^2-6x+1}+1=0$

18. $\dfrac{x-2}{x+1}+\dfrac{4(x+1)}{x-2}=5$

19. $\dfrac{x^2-x}{x^2-x+1}-\dfrac{x^2-x+2}{x^2-x-2}=1$

20. $\dfrac{1}{x^2+2x-3}+\dfrac{18}{x^2+2x+2}=\dfrac{18}{x^2+2x+1}$

21. $x^2+\dfrac{x^2}{(x+1)^2}=\dfrac{40}{9}$

22. Поезд жолдо 30 мүнөт токтоду. Поезд график боюнча келүүсү үчүн машинист 80 *km* аралыкта ылдамдыкты 8 *km/h* ка чейин жогорулаткан. Поезд расписание боюнча канча ылдамдыкта жүрүүсү керек эле?

23. Дарыянын агымы боюнча моторлуу кайыкта 28 *km* жана агымга каршы 25 *km* аралыкты басып өттү. Мында жалпы жүрүү убактысы кыймылсыз сууда 54 *km* жол жүрүүгө кеткен убакытка барабар. Эгерде дарыя агымынын ылдамдыгы 2 *km/h* болсо, моторлуу кайыктын кыймылсыз суудагы ылдамдыгын тап.

Барабарсыздыктарды чыгар (24-38)

24. $\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x}=\dfrac{x}{3}+\dfrac{3}{x}$

25. $\dfrac{1+x}{6}-\dfrac{6}{1+x}=\dfrac{4}{x+1}-\dfrac{x+1}{4}$

26. $\dfrac{x-2}{x+2}+\dfrac{x+2}{x-2}=3\dfrac{1}{3}$

27. $\dfrac{2x+1}{2x-1}+\dfrac{2x-1}{2x+1}=5,2$

28. $\dfrac{x^2-2x}{x-1}-\dfrac{2x-1}{1-x}=3$

29. $\dfrac{2}{x-4}+\dfrac{4}{x^2-4x}=0,625$

30. $\dfrac{(x^2+1)x}{(x^2-x+1)^2}=\dfrac{10}{9}$

31. $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{3}{x-3}=\dfrac{6}{x+6}$

32. $x^2+\dfrac{1}{x^2}-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+4=0$

33. $x^4-6x^3+10x^2-6x+1=0$

34. $31\left(\dfrac{24-5x}{x+1}+\dfrac{5-6x}{x+4}\right)+370=29\left(\dfrac{17-7x}{x+2}+\dfrac{8x+55}{x+3}\right)$

35. $\dfrac{x+3}{4x^2-9}-\dfrac{3-x}{4x^2+12x+9}=\dfrac{2}{2x-3}$

36. $\dfrac{30}{x^2-1}+\dfrac{7-18x}{x^3+1}=\dfrac{13}{x^2-x+1}$

37. $\dfrac{2x+7}{x^2+5x-6}+\dfrac{3}{x^2+9x+18}=\dfrac{1}{x+3}$

38. $2x^4+x^3-x^2+x+2=0$

РАЦИОНАЛДЫК БАРАБАРСЫЗДЫКТАР СИСТЕМАСЫ

Теңдемелер системасын чыгар (1-8)

1. $\begin{cases}\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=2,5\\ x^2-y^2=3\end{cases}$

2. $\begin{cases}x+y+\dfrac{x}{y}=9\\ \dfrac{(x+y)x}{y}=20\end{cases}$

3. $\begin{cases}2xy-\dfrac{3x}{y}=15\\ xy+\dfrac{x}{y}=15\end{cases}$

4. $\begin{cases}\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{2}{x-y}=3\\ \dfrac{3}{x+y}+\dfrac{4}{x-y}=7\end{cases}$

5. $\begin{cases}\dfrac{x}{y}-\dfrac{3y}{x}=\dfrac{1}{2}\\ x^3-\dfrac{y^3}{8}=-28\end{cases}$

6. $\begin{cases}\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{25}{12}\\ x^2-y^2=7\end{cases}$

7. $\begin{cases}\dfrac{4y}{x}+\dfrac{x}{y}=5\\ xy=4\end{cases}$

8. $\begin{cases}x+y=5\\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=-\dfrac{13}{6}\end{cases}$

Теңдемелер системасын чыгар (9-13)

9. $\begin{cases}\dfrac{2}{2x-y}+\dfrac{3}{x-2y}=\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{2}{2x-y}-\dfrac{1}{x-2y}=\dfrac{1}{18}\end{cases}$

10. $\begin{cases}\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{10}{3}\\ 2x^2+y^2=27\end{cases}$

11. $\begin{cases}\dfrac{6}{x+y}+\dfrac{5}{x-y}=7\\ \dfrac{3}{x+y}-\dfrac{2}{x-y}=-1\end{cases}$

12. $\begin{cases} \dfrac{11}{2x-3y}+\dfrac{18}{3x-2y}=13 \\ \dfrac{27}{3x-2y}-\dfrac{2}{2x-3y}=1 \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dfrac{2}{x}+\dfrac{y}{3}=3 \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{3}{y}=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

РАЦИОНАЛДЫК БАРАБАРСЫЗДЫКТАР

Барабарсыздыктарды чыгар.

1. $(-4x+3)(-5x+4)>0$

2. $(x^2-16)^3(x+7)<0$

3. $(x-2)^2(x-1)(x+7)(x-5)\geq 0$

4. $\dfrac{(x+6)^3(x-4)}{(7-x)^5}<0$

5. $(x^2-1)(x^2+5x+6)(x^2-5x+6)\leq 0$

6. $\left(2x+\dfrac{1}{x}\right)^2+2x+\dfrac{1}{x}-12<0$

7. $\dfrac{5x+4}{x-2}<1$

8. $\dfrac{3x+2}{x-3}>1$

9. $\dfrac{x-4}{x^2-9x+14}>0$

10. $\dfrac{x^4-10x^2+9}{6-2x}<0$

11. $\dfrac{x^2+1}{x-3}>0$

12. $\dfrac{x+3}{x^2+7}<0$

13. $(3-\sqrt{10})(2x-7)<0$

14. $\dfrac{(x^2-x-2)^2}{x^2+7x-8}\geq 0$

15. $\dfrac{3x-1}{x^2+x+1}\leq 0$

16. $\dfrac{x^2+2x-15}{3x^2+5x-8}\leq 0$

17. $\dfrac{2}{x+2}<\dfrac{1}{x-3}$

18. $\dfrac{3}{2-x}>\dfrac{1}{x+3}$

19. $\dfrac{2}{x+3}<\dfrac{1}{2x-1}$

20. $\dfrac{x+1}{x-2}>\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{1}{2}$

21. $\dfrac{x^3-5x^2+8x-4}{x-3}\leq 0$

22. $\dfrac{6}{x-1}\leq\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{7}{x+2}$

23. $\dfrac{14x(2x+3)}{x+1}<\dfrac{(9x-30)(2x+3)}{x-4}$

24. $\dfrac{(5x+4)(3x-2)}{x+3}\leq\dfrac{(3x-2)(x+2)}{1-x}$

25. $(x-3)^2+\dfrac{1}{x^2-6x+9}>2$

26. $\dfrac{2x-3}{4\sqrt{6}-10}>5+2\sqrt{6}$

РАЦИОНАЛДЫК БАРАБАРСЫЗДЫКТАР СИСТЕМАСЫ

Барабарсыздыктар системасын чыгар.

1. $\begin{cases} 2x-14<0 \\ -3x+9<0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 6x-1>9-4x \\ 3-2x<x+16 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3(2-3x)+2(3-2x)>x \\ 6<x^2-x(x-8) \end{cases}$

4. $\begin{cases} 5\left(1-\dfrac{x-4}{4}\right)-7(2x-3)>0 \\ \dfrac{3x-14}{5}-\dfrac{3x-10}{20}-0,7(x+8)<0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^2\le 9 \\ x+1>0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 4x+\dfrac{2x-3}{2}>\dfrac{7x-5}{2} \\ \dfrac{7x-2}{3}-2x>\dfrac{5(x-2)}{4} \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dfrac{5x-4}{4}-\dfrac{4x+1}{3}\ge\dfrac{x+2}{4}-7 \\ \dfrac{4x}{3}-1-\dfrac{6x+2}{2}>x+\dfrac{6}{5} \end{cases}$

8. $\begin{cases} x^2+5x-6<0 \\ x+3\ge 0 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 13-\dfrac{3-7x}{10}+\dfrac{x+1}{2}<14-\dfrac{7-8x}{2} \\ 7(3x-5)+4(17-x)>18-\dfrac{5(2x-6)}{2} \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dfrac{x}{3}-\dfrac{3x-1}{6}<\dfrac{2-x}{12}-\dfrac{x+1}{2}+3 \\ x>\dfrac{5x-4}{10}-\dfrac{3x-1}{5}-2,5 \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dfrac{3}{4}(x-1)+\dfrac{7}{8}<\dfrac{1}{4}(x-1)+\dfrac{5}{2} \\ \dfrac{x}{4}-\dfrac{2x-3}{3}<2 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x^2+x+8<0 \\ x^2+6x+5\ge 0 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 5x\ge 2 \\ -0,3x^2+4,8<0 \\ -2x^2+17x+19\ge 0 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2-5x\le 0 \\ x-x^2\ge 0 \\ -4x^2-5x+21\ge 0 \end{cases}$

15. $\begin{cases} \dfrac{x-4}{4}-x+1<\dfrac{x-2}{2}-\dfrac{x-3}{3} \\ 3-x>2x-10 \end{cases}$

16. $\begin{cases} \dfrac{2x}{3}-1<3-2(1-2x) \\ 3x-5>1-2(1-x) \\ 1-2x<3(2x-1) \end{cases}$

17. $\begin{cases} 7<2x+1<11 \\ \dfrac{x+2}{x-5}<\dfrac{x-6}{x-3} \end{cases}$

18. $\begin{cases} -2<2-x<1 \\ \dfrac{x+3}{1-x}\le\dfrac{8-x}{x-4} \end{cases}$

19. $\begin{cases} \dfrac{2}{7}<2^n<3 \\ 3^n>2 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 1<(\dfrac{2}{3})^n<3 \\ \left(\dfrac{3}{4}\right)^n<1,5 \end{cases}$

21. $\begin{cases} \dfrac{1}{5}<3^n<4 \\ 2<\left(\dfrac{1}{3}\right)^n<10 \end{cases}$

ИРРАЦИОНАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР

1. $\sqrt{x-1}=-4$

2. $\sqrt{x}=8$

3. $\sqrt{x}=-16$

4. $\sqrt[3]{x+1}=2$

5. $\sqrt[4]{x-7}=-3$

6. $\sqrt{x^2+2x-6}\cdot\sqrt{x-9}=0$

7. $1+\sqrt{x+3}=0$

8. $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=1$

9. $\sqrt{x-4}+\sqrt{x^2-3}=0$

10. $\sqrt{1+4x-x^2}=x-1$

11. $\sqrt{x-3}+\sqrt{2x+4}=-11$

12. $\sqrt{2x^2+8x+7}-2=x$

13. $\sqrt{x^2-7x+12}=2x-6$

14. $\sqrt{4-x}=\sqrt{x-7}$

15. $\sqrt{3+\sqrt{5-x}}=\sqrt{x}$

16. $\sqrt{4-x}+\sqrt{5+x}=3$

17. $2\sqrt{x+18}+\sqrt{4x-3}=15$

18. $\sqrt{x+20}-\sqrt{x-1}=3$

19. $\sqrt{x-5}+\sqrt{1-x}=7$

20. $(x^2-5x+6)\cdot\sqrt{2-x}=0$

21. $(2-x)\cdot\sqrt{x^2-x-20}=12-6x$

22. $(x-1)\cdot\sqrt{\dfrac{x-2}{x^2-1}}=0$

23. $(4x-x^2-3)\cdot\sqrt{x^2-2x}=0$

24. $\sqrt[3]{9x+1}=1+3x$

25. $\sqrt{x+5}+\sqrt[4]{x+5}=12$

26. $x^2+11+\sqrt{x^2+4}=42$

27. $x^2+5x+\sqrt{x^2+5x-5}=17$

28. $\sqrt{x^2-x}+\sqrt{2-x-x^2}=\sqrt{x}-1$

29. $\sqrt{4-x}+\sqrt{x-4}=0$

30. $\sqrt{7-5x}+\sqrt{5x-7}=29$

31. $\sqrt{\dfrac{x-1}{2x+1}}+\sqrt{\dfrac{2x+1}{x-1}}=\dfrac{10}{3}$

32. $\sqrt{5+2x}=10-3\sqrt[4]{5+2x}$

33. $\sqrt{3-x}+\sqrt{x-2}=(x-7)^2\cdot(x-5)$

34. $2\sqrt{x-1}-5=\dfrac{3}{\sqrt{x-1}}$

35. $\dfrac{\sqrt{x^2-3x-4}}{x+2}=\dfrac{\sqrt{x^2-3x-4}}{4-x}$

36. $x^2+\sqrt{x^2+20}=22$

37. $\sqrt{x^3+4x-1-8\sqrt{x^4-x}}=\sqrt{x^3-1}+2\sqrt{x}$

38. $6x^2+7x\sqrt{1+x}=24(1+x)$

39. $\sqrt{(x^2+8x)^2}=x^2+8x$

40. $\sqrt{(4x^2-5x)^2}=5x-4x^2$

41. $\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}=2-\sqrt{x-4}$

42. $\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}-2}=x-\dfrac{1}{x}$

43. $\sqrt{5-x}+\sqrt{x-6}=x^2+2x$

44. $\sqrt{x+6\sqrt{x-9}}+\sqrt{x-6\sqrt{x-9}}=6$

45. $\sqrt{x+8\sqrt{x-16}}+\sqrt{x-8\sqrt{x-16}}=2\sqrt{x-16}$

46. $\dfrac{\sqrt[4]{x^4-16}+\sqrt[6]{x^3-8}}{3x-x^2-2}=0$

ИРРАЦИОНАЛДЫК ТЕНДЕМЕЛЕР СИСТЕМАСЫ

Теңдемелер системасын чыгар.

1. $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=8\\ \sqrt{x}\cdot\sqrt{y}=15\end{cases}$

2. $\begin{cases}\sqrt{xy}=12\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=7\end{cases}$

3. $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=6\\ x-y=12\end{cases}$

4. $\begin{cases}\sqrt{x+3y+6}=2\\ \sqrt{2x-y+2}=1\end{cases}$

5. $\begin{cases}x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=30\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=5\end{cases}$

6. $\begin{cases}3\sqrt{x}-\sqrt{y}=8\\ \sqrt{x}+2\sqrt{y}=19\end{cases}$

7. $\begin{cases}25y+x=100-10\sqrt{xy},\\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=4,\end{cases}$

8. $\begin{cases}xy=64\\ x-y+\sqrt{xy}=20\end{cases}$

9. $\begin{cases}\sqrt{x+y-1}=1\\ \sqrt{x-y+2}=2y-2\end{cases}$

10. $\begin{cases}x+y-\sqrt{xy}=7\\ xy=9\end{cases}$

11. $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=26\\ \sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}=6\end{cases}$

12. $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=-3\\ xy=8\end{cases}$

13. $\begin{cases}\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=3\dfrac{3}{4}\\ xy=1\end{cases}$

14. $\begin{cases}\sqrt{x}-\sqrt{y}=5\\ \sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}=1\end{cases}$

15. a) $\begin{cases}5x+3\sqrt{xy}+4y=12\\ 3x+2\sqrt{xy}+3y=8\end{cases}$ b) $\begin{cases}2x-6\sqrt{xy}+7y=9\\ x-4\sqrt{xy}+5y=6\end{cases}$

16. a) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=5\\ x+y+4\sqrt{xy}=37\end{cases}$ b) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=4\\ x+y-3\sqrt{xy}=1\end{cases}$

17. a) $\begin{cases}x\sqrt{x}+12y\sqrt{x}=28\\ 8y\sqrt{y}+6x\sqrt{y}=36\end{cases}$ b) $\begin{cases}x\sqrt{x}+27y\sqrt{x}=36\\ 27y\sqrt{y}+9x\sqrt{y}=28\end{cases}$

КӨРСӨТКҮЧТҮҮ ТЕҢДЕМЕЛЕР

1. Теңдемены чыгар.

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{1024}$ b) $\left(\frac{5}{4}\right)^{2x-1} = (0{,}8)^{x-2}$ c) $0{,}5^{\sqrt{x+1}} \cdot 0{,}5^{-1} = 0{,}5^{\sqrt{x}}$

d) $4^{x-1} - 4^{x+1} + 4^{x+2} = 49$ e) $2^{x+1} + 3\cdot 2^{x-1} - 5\cdot 2^x + 6 = 0$ f) $5^{x+1} + 3\cdot 5^{x-1} - 6\cdot 5^x + 10 = 0$

2. $49^x + 7^x + 1 = 57$ теңдеменин канча тамыры бар?

3. $9^x - 3^{x+1} + 2 = 0$ теңдеменин эң чоң тамырын тапкыла.

КӨРСӨТКҮЧТҮҮ БАРАБАРСЫЗДЫКТАР

1. Барабарсыздыкты чыгар.

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x^2-3x} \le \frac{3}{2}$ b) $\left(\frac{1}{7}\right)^{3x+4} \cdot 7\sqrt{7} < \frac{1}{7}$ c) $(0,04)^{2x} > (0,2)^{x(3-x)}$

d) $25^x + 5^x > 0$ e) $3^{\frac{x-1}{x+1}} > 27$ f) $3{,}2^{2(x-\frac{1}{2})} \ge 3{,}2\sqrt{3{,}2}$

g) $7^{2x-9} > 7^{3x-6}$ h) $0,5^{4x+3} \le 0,5^{6x-1}$ i) $2\sqrt{2}\cdot 2^{x-3} \ge \frac{1}{2}$

2. Барабарсыздыктын чечимин канча натуралдык сан канааттандырат?

a) $8^{-2x+8} > 512$ b) $2^{5x-7} \le 16$ c) $2^{5x-7} \ge 16$ d) $0,1^{4x-5} > 0,001$

3. Барабарсыздыктын эң чоң бүтүн чечимин тапкыла.

a) $2,5^{2x+3} \le 6,25$ b) $1,1^{5x-3} < 1,21$ c) $0,7^{9x+4} > 0,343$ d) $\left(\frac{2}{5}\right)^{7x-9} \ge \frac{8}{125}$

ЛОГАРИФМ ТҮШҮНҮГҮ. ЛОГАРИФМАЛЫК ФУНКЦИЯ

1. $A(-2;-1)$ чекит кайсы функциянын графигине кирбейт?

1) $y = \log_2\left(-\frac{1}{x}\right)$ 2) $y = \log_2|x|$ 3) $y = \log_{\frac{1}{2}}|x|$ 4) $y = -\log_2(-x)$

2. Функциянын аныкталуу областын тап.

a) $y = \lg(x+2) + \lg(3-x)$ b) $y = \ln(x + |x|)$

3. $y = \log_x(x+1)$ функция $x \in \{2;3;4;5;6\}$ болгондо аргументтин кайсы маанисинде ал эң чоң мааниге жетет?

4. $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ функциянын графигин $y =$ ù $_3 x$ функция графигинен кандай ыкма менен түзсө болот?

ЛОГАРИФМАЛЫК ТУЮНТМАЛАРДЫ ТАК АЛМАШТЫРУУ

1. Туюнтманын маанисин эсепте.

a) $\log_{12} \sqrt[5]{144}$ b) $\log_3 5 - \log_3 \dfrac{5}{27}$ c) $\dfrac{\log_{27} 2}{\log_3 8}$

d) $\dfrac{\log_{11} 12}{\log_{11} 6} + \dfrac{\log_5 3}{\log_5 6}$ e) $\dfrac{3\log_7 2 - \frac{1}{2}\log_7 64}{4\log_5 2 + \frac{1}{3}\log_5 27}$ f) $81^{\frac{1}{\log_5 3}} + 27^{\log_3 4} + 3^{\frac{4}{\log_7 9}}$

g) $\dfrac{1}{2}\log_3 \log_5 125$ h) $-\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt[4]{2}}$

ЛОГАРИФМАЛЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР

1. Теңдемени чечкиле.

a) $\log_5 x = 2$ b) $\log_{\grave{u}} \ x = 4$ c) $\log_{\frac{1}{3}} x = -1$ d) $\log_7 x = \dfrac{1}{3}$

2. Теңдемени чыгар.

a) $\log_3 x + \log_{\frac{1}{3}} x + 2 = 0$ b) $3\log_{\frac{1}{7}} x = \log_{\frac{1}{7}} 9 + \log_{\frac{1}{7}} 3$

c) $\log_2(3x-6) = \log_2(2x-3)$ d) $\log_6(14-4x) = \log_6(2x+2)$

3. Теңдемени чыгар.

a) $\log_2^2\left(x + \dfrac{1}{x}\right) - 1 = 0$ b) $\log_{\frac{1}{2}}^2(x^2+x) + \log_{\frac{1}{2}}(x^2+x) = 0$

c) $\lg^2 x - \lg x + 1 = \dfrac{9}{\lg 10x}$ d) $\log_2^2 x + 7\log_2 x + 49 = \dfrac{-218}{\log_2 \frac{x}{128}}$

4. Теңдемени чыгар.

a) $x^{5+\log_2 x} = \dfrac{1}{16}$ b) $5^{2(\log_5 2 + x)} - 2 = 5^{x + \log_5 2}$

c) $\lg\left(625\sqrt[5]{5^{x^2+20x+5}}\right) = 0$ d) $x^{\lg 2} + 2^{\lg x} = 4$

5. $\log_2(x+4) = -2\log_2 \dfrac{1}{2-x}$ теңдеменин канча бүтүн тамыры бар?

КӨРСӨТКҮЧТҮҮ ЖАНА ЛОГАРИФМАЛЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН СИСТЕМАСЫ

1. Теңдемелер системасын чыгар.

a) $\begin{cases} 3\cdot 7^x - 3^y = 12 \\ 7^x \cdot 3^y = 15 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3^{-x}\cdot 2^y = \dfrac{4}{9} \\ x + y = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2^x + 2y = 1 \\ 3y - 6y^2 = 2^{x-1} \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2^x + 2y = 1 \\ 3y - 6y^2 = 2^{x-1} \end{cases}$ e) $\begin{cases} 3\cdot 2^x + y = 13 \\ 2^{2x+1} + 3y = 35 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 3\cdot 7^x + 3^y = 12 \\ 7^x \cdot 3^y = 4 \end{cases}$

2. Теңдемелер системасын чыгар.

a) $\begin{cases} \log_5(x+y)=1 \\ 2^x+2^y=12 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \log_4 x+\log_4 y=1+\log_4 9 \\ 2^{\frac{x+y}{2}}=1024 \end{cases}$

ЛОГАРИФМАЛЫК БАРАБАРСЫЗДЫКТАР

1. Барабарсыздыкты чыгар.

a) $\log_4(x+5)<0$ b) $\log_3(2-5x)<1$ c) $\log_{\frac{1}{7}}(x+5)>-1$

d) $\log_{0,2}(x-3)+2\geq 0$ e) $\log_{\frac{1}{2}}(2x+3)>\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$ f) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2+x+1)\leq 0$

g) $\log_3(13-4^x)>2$ h) $2\log_3 x-\log_x 81<2$ i) $\log_2(x-1)+\log_2(x+1)\geq 3$

2. $\dfrac{1}{\log_3 x-2}>\dfrac{1}{\log_3 x}$ барабарсыздыктын 5тен кичине канча табигый чечимдери бар?

3. $2\log_5 x-\log_x 125<1$? табигый чечимдеринин суммасын тап.

4. $\log_x(3-x)>1$? барабарсыздыктын канча бүтүн чечими бар?

ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫК ФУНКЦИЯЛАР

1. Функциянын аныкталуу областын тапкыла.

a) $y=\dfrac{1}{\sin x}$ b) $y=\dfrac{1}{\cos x}$ c) $y=\dfrac{\cos x}{\sin x-2\sin^2 x}$

d) $y=\dfrac{3x}{2\cos x-1}$ e) $y=\cos x+\sin x$ f) $y=\cos x+ctgx$

2. Функциянын маанилеринин көптүгүн тапкыла.

a) $y=3\cos x-1$ b) $y=2-\sin x$ c) $y=1-2\sin^2 x$ d) $y=2\cos^2 x-1$

3. Берилген функциянын жуп же тактыгын аныктагыла.

a) $y=\dfrac{\sin x}{x}$ b) $y=x\cos x$ c) $y=\sin x+x^2$ d) $y=\cos x-x^2$

4. Функциянын эң кичине оң мезгилин тапкыла.

a) $y=\sin\dfrac{x}{2}$ b) $y=\cos(3x-1)$ c) $y=tg2x$ d) $y=\cos\dfrac{x}{3}$

5. Функциянын эң чоң жана эң кичине маанисин тапкыла.

a) $y=\cos^4 x-\sin^4 x$ b) $y=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ c) $y=1-2|\sin 3x|$

6. Функциянын нөлдөрүн тапкыла.

a) $y=\sin x-2$ b) $y=2\cos x+1$ c) $y=x\cos x$ d) $y=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$

ТЕСКЕРИ ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫК ФУНКЦИЯЛАР

1. Функциянын аныктоо областын тапкыла.

a) $y = arccos\frac{2x+3}{4}$ b) $y = arcsin(2 + 3x)$

c) $y = arcsin\left(3\sqrt{x}+2\right)$ d) $y = arccos\frac{4-x}{3}$

2. Салыштыргыла.

a) $arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$ жана $arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$ b) $arctg$ù− жана $arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$

c) $arccos\sqrt{3}$ жана $arcsin1$ d) $arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ жана $arcsin\frac{1}{2}$

3. Туюнтмалардын маанисин тап.

a) $2arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+arctg\left(-1\right)+arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $arcsin\frac{1}{2}+4arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+arctg\left(-\sqrt{3}\right)$

c) $arctg\left(-\sqrt{3}\right)+arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+arccos1$ d) $arcsin1-\frac{1}{2}+arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+6arctg\sqrt{3}$

4. Эсептегиле.

a) $2arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+3arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$ b) $2arc\cos\left(-\frac{1}{2}\right)+arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $2arc\,tg1+3arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ d) $2arc\,tg\left(-1\right)+3arctg\left(\sqrt{3}\right)$

5. Эсептегиле.

a) $sin\left(arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ b) $tg\left(arccos\frac{1}{2}\right)$ c) $tg\left(arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

d) $sin(4arcsin1)$ e) $cos(arcsin1)$ f) $sin\left(arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР ЖАНА БАРАБАРСЫЗДЫКТАР

1. $0 \le x < 360^{\circ}$ интервалда теңдемелерди чыгар.

a) $sinx = –0,3$ b) $sinx = 0,15$ c) $cosx = 0,6$ d) $cosx = –0,43$

2. Аралыктарды эсепке алуу менен жалпы маанисин тап.

a) $4sinx + 2 = 0,\ 0 \le x < 2\pi$ b) $ctgx - \sqrt{3} = 0,\ 0 \le x < 2\pi$

c) $2sin^2x + 5sinx = 3\ \ 0 \le x < 2\pi$ d) $cos2x = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0 \le x < 2\pi$

3. $0 \le x < 360^{\circ}$ интервалда теңдемелерди чыгар.

a) $7-6\cos^2 x = 5\sin x$ b) $7 + 2cosx = 8sin^2x$ c) $2sinx – 3cosx = 0$

4. Теңдемелерди чыгар.

a) $sin10x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $cos10x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $tg10x = \sqrt{3}$ d) $ctg10x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

5. Теңдемелерди чыгар.

a) $sin4xcos3xtg8x = 0$ b) $cos4x = -cos5x$ c) $tg5x = -tg\frac{x}{3}$

6. Теңдемелерди чыгар.

a) $2sin^2x + cos^2x - 2 = 0$ b) $2sin^2x + cosx = 0$ c) $sinxcosx = 0$

7. Теңдемелерди чыгар.

a) $sin^2x - 2sinxcosx + cos^2x = 0$ b) $7cos^2x - 3sin^2x = 0$

c) $cos^22x - 10sin2xcos2x + 21sin^22x = 0$ d) $8sin^2x - cos^2x = 0$

8. Ордуна коюу усулу менен чыгар.

a) $cos^22x + 1 = 2cos^2x$ b) $3cos^2xsinx + 1 = 3cos^2x + sinx$

c) $6cos^2x + 6sin^2x - 3cosx - 3 = 0$ d) $5sin^2xcosx + 6cos^2x - 10cosx + 6 = 0$

9. Теңдемелерди чыгар.

a) $cos2x + cosx = 0$ b) $cos3x = 2cos2x - 1$

c) $2cos^2x = 4sinxcosx - 1$ d) $cos^2x - 3sinxcosx = -1$

10. Теңдемелерди $sinx + cosx = t$ алмаштыруу жардамында чыгар.

a) $2(sinx + cosx) + sin2x + 1 = 0$ b) $sin\,x + cos\,x = 1 + \frac{sin\,2x}{2}$

11. Теңдемелерди баалоо ыкмасы менен чыгар.

a) $2sin^8x - 3cos^8x = 5$ b) $(cos2x - cos4x)^2 = 4 - 4cos^23x$

12. Теңдемелерди жардамчы бурч киритүү ыкмасы менен чыгар.

a) $12cosx - 5sinx = -13$ b) $sinx + cosx = \sqrt{2}$

13. Барабарсыздыктарды чыгар.

a) $\sqrt{2}\,cos\,2x \le 1$ b) $2sin3x > -1$ c) $sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \le \frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $sin\left(\frac{x}{4} - 3\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}$ f) $cos\left(\frac{x}{3} + 2\right) < \frac{1}{2}$

14. Барабарсыздыктарды чыгар.

a) $sin^2x + 2sinx > 0$ b) $cos^2x - cosx < 0$

ЫКТЫМАЛДУУЛУК ТЕОРИЯСЫ

1. Лотереяда 2000 чыпта болуп, алардын 400 ү байгеге ээ. Тобокелге салынган 2 чыптанын бирөө гана байгеге жетүү ыктымалдуулугун тап.

2. Эки кубик ыргытылып, алардын капталындагы упайлардын суммасы 7ге, көбөйтүндүсү 6 га барабар болуу ыктымалдуулугун тап.

3. 7 кара жана 8 ак шары бар идиштен кокустан бир шар алынганда, анын: а) ак; б) анын кара шар болуу ыктымалдуулугун тап.

4. Тобокелге салынган 25 тен аз натуралдык сан тандалганда анын 3 кө эселүү болуу ыктымалдуулугун тап.

5. Басмаканадан туш келди тандалып алынган 1000 китептен турган партияда 7 китеп жараксыз деп табылган. Жараксыз китептердин салыштырмалуу жыштыгын тапкыла.

6. Квадраттын ичине тегерек чийилген. Квадратка тобокелге коюлган чекиттин айлананын ичинде болуп калуу ыктымалдуулугун тап.

7. Эки кубик кокустан ыргытылганда түшкөн сандардын суммасы алтыдан кичине болуу ыктымалдуулугун тап.

8. Коробкада 11 ак жана 9 кара шар бар. Тобокелге салынган 4 шардын экинчиси ак болуу ыктымалдуулугун тап.

9. Идиште 7 кызыл жана 13 көк шар бар. Тобокелге салынган 2 шардын түрдүү түстө болуу ыктымалдуулугун тап.

10. Кутуда 7 ак жана 3 кара тоголок бар. Андан тобокелуне алынган шардын ак болуп калуу ыктымалдуулугун тап.

11. Чалуучу телефон номерин терип, үч номерин унутуп койду. Тобокелге салынган номерди терип жатканда, талап кылынган сандардын терүү ыктымалдуулугун тап.

12. Бир кутуда 100 лампа бар, анын 10 у жараксыз. 4 лампочканы тобокелге салганда алардын 2 өөсү жараксыз болуу ыктымалдуулугун тап.

13. 3 көк, 4 кызыл жана 5 жашыл шардын ичинен туш келгени тандалган 3 шардын ар кандай түстө болуу ыктымалдуулугун тап.

14. Эгерде 0,8 жарактуулугунун салыштырмалуу жыштыгы менен буюмдардын партиясында 250 буюм текшерилсе, жараксыз буюмдардын санын тапкыла.

15. Бир баштыкта 5 көк жана 7 сары шар бар жана кокустан тартылган эки шардын ар кандай түстө болуу ыктымалдуулугун тап.

16. Себетте 5 жашыл, 7 сары жана 8 кызыл алма бар. Ыктыярдуу алынган 3 алманын түсү ар кандай болуу ыктымалдуулугун тап.

17. Кутучада 6 бирдей номерленген таякчалар бар. Бардык таякчаларды бир-бирден тобокелге салып алганда таякчалардын номерлеринин кемүү тартибинде чыгуу ыктымалдуулугун тап.

18. Кутучада 12 ак жана 18 кызыл шар бар. 4 шардын 3 өө кызыл болуу ыктымалдуулугун тап.

19. Класста 36 окуучу бар, алардын 13 ү шахмат клубунда окушат. Ошол эле класстан тобокелдик тобуна кирген 7 окуучунун жок дегенде бирөө шахмат клубуна катышуу ыктымалдуулугун тап.

O'quv nashri

АЛГЕБРА
VA ANALIZ ASOSLARI

Umumiy o'rta ta'lim maktablarining
10-sinfi uchun darslik
(Qirg'iz tilida)

Которгон Гулмира Кадиркулова
Редактор Айсулуу Тойчубаева
Көркөм редактор Сарвар Фармонов
Техникалык редактор Акмал Сулайманов
Сүрөтчү Бехзод Зуфаров
Дизайнер Илхом Болтаев
Барактын редактору Рустам Худайберганов
Корректор Гүлзада Шерматова

Басып чыгарууга уруксат этилди 21.10.2022-ж.
Форматы 60x84 1/8. "Cambria" гарнитурасы. Көлөмү 12.
Офсеттик басуу. Шарттуу басма табагы 20,46.
Жарыялоочунун табагы 21,59.
Нускасы 859. Заказ № 1150-5.

print.uz
ОПЕРАТИВНО и КАЧЕСТВЕННО

"PRINTUZ" ЖЧК басмаканасында басылды.
100105, Ташкент ш. Мирабад району,
Кушкуприк көчөсү, 28/1-үй

Ижарага алынган окуу китебинин абалын көрсөткөн таблица

№	Окуучунун аты жана фамилиясы	Окуу жылы	Окуу китебин алгандагы абалы	Класс жетек-чисинин колу	Окуу китебинин тапшыруу-дагы абалы	Класс жетек-чисинин колу
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Окуу китеби ижарага берилип, окуу жылынын аягында кайтып келгенде, жогорудагы таблица төмөнкү баалоо критерийлеринин негизинде класс жетекчиси тарабынан толтурулат:

Жаңы	Окуу китеби биринчи жолу пай даланууга берилгендеги абалы.
Жакшы	Мукабасы бүтүн, окуу китебинин негизги бөлүгүнөн бөлүнгөн эмес. Бардык барактар бар, жыртылган эмес, жылдырылбаган, барактарында эч кандай жазуу, саптар жок.
Канааттан-дырарлык	Мукаба май даланган, бир аз чий илген, четтери бүктөлгөн, окуу китебинин негизги бөлүгүнөн ажыраган абал бар, колдонуучу тарабынан канааттандырарлык оңдолгон. Жыртылган беттери оңдолуп, ай рим беттерине сызык тартылган.
Канааттан-дырарлык эмес	Капкагы чий илген, жыртылган, негизги корпустан бөлүнгөн, же толугу менен жок же канааттандырарлык эмес оңдолгон. Барактары жыртылып, барактары жок, чийилип, боёлгон. Окуу китебин калыбына келтирүү мүмкүн эмес.