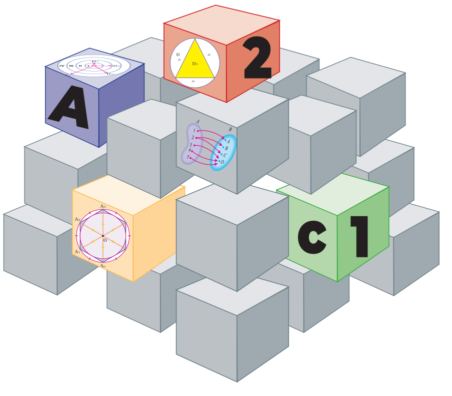
АЛГЕБРА
ЖӘНЕ АНАЛИЗ НЕГІЗДЕРІ
10



Жалпы орта білім беретін мектептердің 10-сыныбына арналған оқулық

Өзбекстан Республикасы Халыққа білім беру министрлігі баспаға ұсынған

Жаңа басылым

ТАШКЕНТ – 2022

УЎК 512(075.3)
КБК 22.14 я 72
А 39

Түзушілер:

Адилбек Заитов, Раъно Ҳамраева, Бахтиёр Абдиев, Калмурза Сагидуллаев, Умид Раҳмонов, Балжан Уринбаева

Халықаралық сарапшы:

Марсело Старикофф

Пікір жазғандар:

М. А. Мирзаахмедов – Мухаммед әл- Хорезми атындағы мамандандырылған мектебінің математика пәнінің мұғалімі, физика- математика пәндерінің доценті.

Ж. А. Қойжанов – Навои облысы, Хатирчи ауданындағы 5-ші жалпы орта мектептің математика пәнінің мұғалімі.

Д. Д. Ароев – Қоқан мемлекеттік педагогика институты математика кафедрасы доценті PHD.

Алгебра және анализ негіздері [Мәтін]: 10-сыныбына арналған оқулық/ А.Заитов [және т.б.] - Ташкент: Республикалық білім орталығы, 2022. – 192 б.

Өзбекстандағы ЮНИСЕФ өкілдігімен бірлесіп дайындалды

Өзбекстан Республикасы Ғылым академиясының В.И.Романовский атындағы Математика институтының қорытындылары негізінде жетілдірілді.

Оригинал макет пен дизайн тұжырымдамасын Республикалық білім орталығы дайындаған.

Республикалық мақсатты кітап қорының қаржылары есебінен басылды.

ШАРТТЫ БЕЛГІЛЕР

– оңай тапсырмалар

– күрделірек тапсырмалар

– күрделі тапсырмалар

– кіші тақырыптар

ISBN 978-9943-8459-6-1

МАЗМҰНЫ

3-ТАРАУ. КӨРСЕТКІШТІК ЖӘНЕ ЛОГАРИФМДІК ФУНКЦИЯЛАР

4-ТАРАУ. ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ФУНКЦИЯЛАР

5-ТАРАУ. ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ЖӘНЕ ТЕҢСІЗДІКТЕР

6-ТАРАУ. ЫҚТИМАЛДЫҚТАР ТЕОРИЯСЫ

10-СЫНЫП "АЛГЕБРА ЖӘНЕ АНАЛИЗ НЕГІЗДЕРІ" ОҚУЛЫҒЫ ҮШІН БІЛІМ БЕРУШІ ҚОСЫМША

10-СЫНЫП "АЛГЕБРА ЖӘНЕ АНАЛИЗ НЕГІЗДЕРІ" ОҚУЛЫҒЫ ҮШІН ВИДЕОСАБАҚТАР

ҚАЙТАЛАУ

- КВАДРАТТЫҚ ФУНКЦИЯ
- КВАДРАТ ТЕҢСІЗДІК
- ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ТЕПЕ-ТЕҢДІКТЕР
- АРИФМЕТИКАЛЫҚ ЖӘНЕ ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ ПРОГРЕССИЯЛАР

КВАДРАТТЫҚ ФУНКЦИЯ

Квадраттық функцияның анықтамасы

Анықтама

$y = ax^2 + bx + c$ функция **квадраттық функция** деп аталады, мұндағы a, b, c берілген нақты сандар, $a \neq 0$, x – нақты айнымалы.

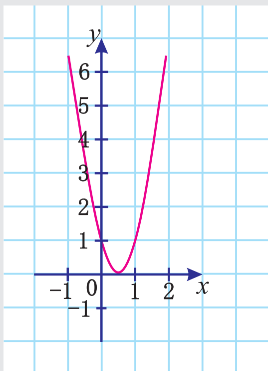
Мысалы төмендегі функциялар квадраттық функцияға мысал болады:

$y = 3x^2 + 2x - 1$, $y = -4x^2 - 5x$, $y = 6x^2 - 3$, $y = 4x^2$, $y = 2 - x^2$.

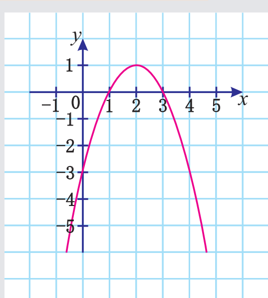
Квадраттық функцияның графигі

1. $y = ax^2 + bx + c$ квадраттық функцияның графигі *парабола* деп аталатын қисықтан тұрады. 1-суретте $y = 4x^2 - 4x + 1$ және 2-суретте $y = -x^2 + 4x - 3$ функциялардың графиктері бейнеленген.
2. $y = ax^2 + bx + c$ парабола тармақтары $a > 0$ болғанда (3-*сурет*) ордината осі бойынша жоғарыға бағытталған, ал $a < 0$ болғанда (4-*сурет*) төменге бағытталған болады.
3. $y = ax^2 + bx + c$ парабола төбесінің координаталары $(x_0; y_0)$ төмендегі $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$, $y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$ немесе $y_0 = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$ формулалармен есептеледі.
4. $y = ax^2 + bx + c$ парабола өзінің төбесі арқылы ордината осіне параллел өтетін түзуге қатысты симметриялы болады.
5. $y = ax^2 + bx + c$ параболаның Ox осімен қиылысу нүктелерінің абсциссалары квадраттық функцияның нөлдері болады. Квадраттық функция нөлдерін табу үшін $ax^2 + bx + c = 0$ теңдеуді шешу керек.
6. Квадраттық функцияның Oy осімен қиылысу нүктесінің ординатасы функцияның $x = 0$ нүктедегі мәніне тең.

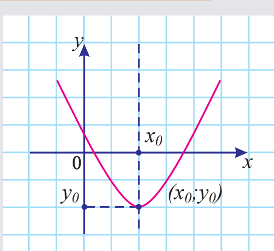
1-сурет



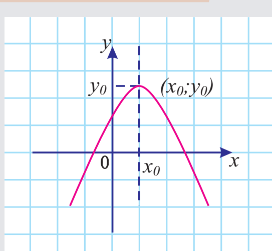
2-сурет



3-сурет



4-сурет



$y = ax^2 + bx + c$ квадраттық функция графигін салу:

1. Парабола тармақтары бағыты анықталады.
2. Парабола ұшының координаталарын $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$, $y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$ формулалар көмегімен табу және координата жазықтығында белгіленеді.
3. Параболаның абсцисса осімен қиылысу нүктелерін (нөлдерін) табылады. Егер функция нөлдері жоқ болса, онда әдетде параболаның симметрия осіне қатысты симметриялы болған нүкте табылады. Мысалы, координаталары $(0; c)$ және оған симметриялы болған $(2x_0; c)$.
4. Салынған нүктелерді үзіліссіз тегіс қисықпен қосылады (Егер қажет болса, параболаның тағы да бір неше нүктесін салуға болады).

Квадраттық функцияның қасиеттері

1. Анықталу облысы:

$D(y)=(-\infty;\infty)$.

2. Мәндер жиыны:

a) $a>0$ болса, $E(y)=[y_0;\infty)$.

b) $a<0$ болса, $E(y)=(-\infty;y_0]$.

3. Ең үлкен және ең кіші мәндері:

a) $a>0$ болса, $x=x_0$ нүктеде ең кіші мәнін қабылдайды, бұл мән $y_0=ax_0^2+bx_0+c$ -ға тең болады, ал ең үлкен мәнін қабылдамайды;

b) $a<0$ болса, $x=x_0$ нүктеде ең үлкен мәніне қабылдайды, бұл мән $y_0=ax_0^2+bx_0+c$ ға тең болады, ал ең кіші мәнін қабылдамайды.

4. Функцияның нөлдері:

a) $D=b^2-4ac>0$ болса, екі нөлі бар: $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ және $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$.

b) $D=b^2-4ac=0$ болса, функцияның бір (өзара тең екі) нөлі бар: $x=\dfrac{-b}{2a}$.

c) $D=b^2-4ac<0$ болса, функцияның нөлі жоқ.

5. Бір сарынды аралықтары:

a) $a>0$ болса, $y=ax^2+bx+c$ функция $(-\infty;x_0]$ де кемімелі, $[x_0;\infty)$ де өспелі болады;

b) $a<0$ болса, $y=ax^2+bx+c$ функция $(-\infty;x_0]$ де өспелі, $[x_0;\infty)$ де кемімелі болады, мұндағы (мұндағы x_0 – парабола төбесінің абсциссасы).

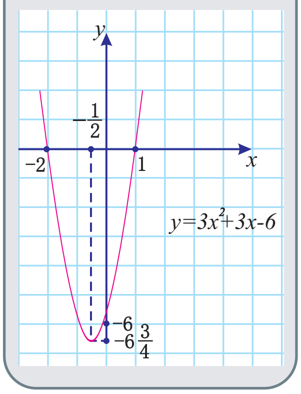
1-мысал. $y=3x^2+3x-6$ квадраттық функция берілген болсын. Оның қасиеттерін жазыңдар және графигін салыңдар.

Шешуі:

1. Анықталу облысы: $D(y)=(-\infty;\infty)$.
2. $a=3>0$ және $x_0=-\dfrac{1}{2}$, $y_0=-6,75$, $\mathrm{E}(y)=[-6,75;\infty)$.
3. $x=-\dfrac{1}{2}$ болғанда ең кіші мәнін қабылдайды: $y=-6,75$; ең үлкен мәнін қабылдамайды.
4. $D=81>0$, демек, нөлдері екеу: $x_1=1, x_2=-2$.
5. $x\in(-\infty;-2)\cup(1;\infty)$ де $y>0$ және $x\in(-2;1)$ де $y<0$ болады.
6. Функция жұп та, тақ та емес;
7. Функция $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right]$ аралықта кемімелі, $\left[-\dfrac{1}{2};\infty\right)$ аралықта өспелі болады.

Функция графигі 5-суретте бейнеленген.

5-сурет



МЫСАЛДАР

1. Қайсы функция квадраттық функция болады?

a) $y=\frac{1}{3}x+2$ b) $y = -x^2 + 5x + 1$ c) $y=x^2-x^3$ d) $y = x^2$

2. $x=-3$ болғанда, $y=4x^2+7x-5$ функцияның мәні нешеге тең болады?

3. x -тің қандай мәнінде $y=-3x^2+x+1$ функцияның мәні -1 -ге тең болады?

4. $y=-5x^2+x+\sqrt{7}$ функция х тің қандай мәндерінде анықталған?

5. -5 саны $y=x^2-5x$ функцияның мәні болады ма?

6. Функция графигін салыңдар.

a) $y=x^2$ b) $y=-x^2$ c) $y=3x^2$

d) $y=-3x^2-5$ e) $y=x^2-2x$ f) $y=-2x^2+5x$

7. Функцияның нөлдерін табыңдар.

a) $y=2x^2+5x+2$ b) $y=3x^2+10x+3$ c) $y=-2x^2+x-5$

8. Функцияның мәндер жиынын табыңдар.

a) $y=x^2+2$ b) $y=(x-4)^2-1$ c) $y=(x-5)^2+3$ d) $y=3-4x^2$

e) $y=3x-x^2$ f) $y = 3x^2+2x$ g) $y=2x^2-8x+19$ h) $y=-3x^2-12x+1$

9. x -тің қандай мәндерінде функция ең үлкен (немесе ең кіші) мән қабылдайтынын анықтаңдар және оны табыңдар.

a) $y=x^2+9x+34$ b) $y=-9x^2-3x+7$ c) $y=-2x^2-5x+1$

10. t -нің қандай мәндерінде $y=2x^2-tx+8$ функцияның нөлдері болмайды?

11. x -тің қандай мәндерінде $y=5x^2-4x-1$ функцияның мәндері теріс болады?

12. $y=x^2+6x+13$ функция теріс мәндерді қабылдай ма?

13. $y=-x^2-4x-5$ функция оң мәндерді қабылдай ма?

14. $y=6x^2+7x+1$ функция графигін сал және график бойынша x -тің функция мәндері оң, теріс болатын мәндерін табыңдар.

15. $y=-x^2+4x-3$ функцияның графигін сал. График көмегімен функцияның өсу және кему аралықтарын табыңдар.

16. x -тің қандай мәндерінде $y=x^2-22x+27$ және $y=2x^2-20x+3$ функциялардың мәндері тең болады?

17. Егер параболаның $(-1;\ 6)$ нүктеден өтуі және оның төбесі $(1;\ 2)$ нүктеде екені белгілі болса, параболаның теңдеуін табыңдар.

18. $y=x^2+px+q$ параболаның төбесі $A(1;\ -2)$ болса, p және q -ді табыңдар.

19. Егер $y=ax^2+bx+c$ параболаның төбесі $M(-1;\ -7)$ және парабола ординаталар осімен $N(0;\ -4)$ нүктеде қиылысса, a, b, c -ларды табыңдар.

20. Графигі $A(1;\ 4)$, $B(-1;\ 10)$, $C(2;\ 7)$ нүктелерден өтетін $y = ax^2 + bx + c$ функцияны табыңдар.

КВАДРАТ ТЕҢСІЗДІК

Анықтама

Егер теңсіздіктің сол бөлігінде квадрат үшмүшелік, ал оң бөлігінде нөл тұрған болса, мұндай теңсіздікті **квадрат (бір айнымалылы екінші дәрежелі) теңсіздік** деп атайды.

$ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c<0$, $ax^2+bx+c\geq 0$, $ax^2+bx+c\leq 0$ $(a\neq 0)$ теңсіздіктер квадрат теңсіздіктер, мұндағы a,b,c– берілген сандар, ал x белгісіз сан .

Теңсіздіктің шешімі деп, айнымалының сол теңсіздікті дұрыс сандық теңсіздікке айналдыратын барлық мәндері жиынына айтылады.

Теңсіздікті шешу **–** оның барлық шешімдерін табу немесе олардың жоқ екенін көрсету.

Квадрат теңсіздікті төмендегі тәсілдермен шешуге болады:

1-тәсіл. Сызықты теңсіздіктер жүйесіне келтіріп шешу

Егер $ax^2+bx+c=0$ квадрат теңдеудің екі түрлі түбірі бар болса, онда квадрат теңсіздіктерді шешуді, квадрат теңсіздіктің сол бөлігін көбейтушілерге жіктеп, бірінші дәрежелі теңсіздіктер жүйесін шешуге келтіруге болады.

1-мысал. $x^2-5x+6<0$ теңсіздікті шешіңдер.

Шешуі

Теңсіздіктің сол жағын көбейтушілерге жіктейміз:

$$(x-2)(x-3)<0.$$

1-жағдай: $\begin{cases} x-2>0 \\ x-3<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>2 \\ x<3 \end{cases} \Rightarrow x\in(2;3).$ 2-жағдай: $\begin{cases} x-2<0 \\ x-3>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<2 \\ x>3 \end{cases} \Rightarrow x\in\varnothing.$

Жауабы: (2; 3).

2-тәсіл. Квадрат теңсіздікті квадраттық функция графигі көмегімен шешу

Квадрат теңсіздіктерді квадраттық функция графигін схемалы бейнесін салу, кейін график бойынша бұл функция оң немесе теріс мәндерді қабылдайтын аралықтарын тауып шешуге болады.

Квадрат теңсіздікті график тәсілде шешу үшін:

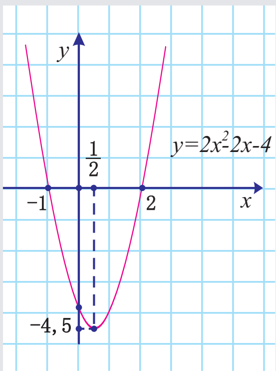
1) парабола тармақтары бағытын анықталады;

2) функция нөлдерін (егер олар бар болса,) табу немесе олардың жоқ екенін анықталады;

3) $y = ax^2 + bx + c$ функция графигінің эскизі сызылады;

4) график бойынша функция оң немесе теріс мәндер қабылдайтын аралықтар анықталады.

1-сурет



2-мысал. $2x^2-2x-4\geq 0$ теңсіздікті квадраттық функция графигі көмегімен шешіңдер .

Шешуі: $y=2x^2-2x-4$ функция графигін саламыз. Алдымен парабола төбесін табамыз:

$$x_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{-2}{4}=\frac{1}{2};\quad y_0=2\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\cdot\frac{1}{2}-4=-4,5.$$

Кейін дискриминантты есептеп, $D = b^2 - 4ac = 4 + 32 = 36$, функцияның нөлдерін табамыз:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{2\pm\sqrt{36}}{4}=\frac{2\pm 6}{4},$$

$x_1=-1$, $x_2=2$.

Жауабы: $(-\infty;-1]\cup[2;\infty)$.

Теңсіздікті бұл тәсілде шешуде, парабола төбесінің координаталарын табу, жалпы алғанда шарт емес, сондай-ақ параболаның Oy осімен қиылысу нүктелерін графикте көрсету де маңызды емес. Ең бастысы, парабола тармақтарының бағытын және функция нөлдері бар немесе жоқ екенін білу маңызды.

3-тәсіл. Квадрат теңсіздікті интервалдар тәсілімен шешу

Егер қандайда бір $(a;\,b)$ аралықта $y = f(x)$ функция графигін қаламды қағаздан үзбестен сызу мүмкін болса, онда бұл функция $(a;\,b)$ аралықта **үзіліссіз** делінеді.

Мысалға, $y = kx + b$, $y = ax^2 + bx + c$ функциялар өз анықталу облысында үзіліссіз функциялар болады.

Үзіліссіз функциялардың маңызды қасиетін дәлелдеусіз қабылдаймыз.

Егер $f(x)$ функция $(a;\,b)$ интервалда үзіліссіз болса және бұл интервалда нөл мәнін қабылдамаса, онда осы интервалда функцияның мәндері бір түрлі таңбалы болады, яғни бұл интервалда функция таңбасын сақтайды.

Квадраттық функция анықталу облысында шекті сандағы x_1 және x_2 нөлдері көмегімен үш $(-\infty;\,x_1)$, $(x_1;\,x_2)$, $(x_2;\,\infty)$ интервалдарға бөлуге болады (мұндағы $x_1 < x_2$). Бұл интервалдардың әрбірінде квадраттық функция үзіліссіз және нөлге айналмайды, яғни өз таңбасын сақтайды. Бір айнымалылы теңсіздіктерді шешудің **интервалдар тәсілі** деп аталатын тәсіл осы дерекке негізделген.

Квадрат теңсіздіктерді шешуге интервалдар тәсілінің қолданылуын қарастырамыз.

1-жағдай. $D > 0$. Бұл жағдайда квадраттық функцияның нөлдері деп аталатын екі нақты x_1 және x_2 $(x_1<x_2)$ сандар бар болады. Олар квадраттық функцияның анықталу облысын үш бөлікке бөледі: $(-\infty;\,x_1)$, $(x_1;\,x_2)$, $(x_2;\,\infty)$. Бұл интервалдардың әрбірінде функция мәндерінің таңбасы тұрақты (“+” немесе “–”) болады.

Квадраттық функция мәндерінің алынған интервалдардың әрбіреуіндегі таңбасын әр түрлі жолман табуға болады:

1) $y = ax^2+bx+c$ функция мәнінің $(-\infty;\,x_1)$, $(x_2;\,\infty)$ интервалдардың әрбіріндегі таңбасы a коэф фициентінің таңбасымен бірдей болады; ал $(x_1;\,x_2)$ интервалдағы таңбасы a коэффициент таңбасына қарама-қарсы болады;

2) функция мәндерінің таңбасын әрбір интервалда "ыңғайлы" нүктеде анықтауға болады;

3) $y = ax^2 + bx + c$ функцияны басқа $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ аналитикалық көріністе жазып, әрбір интервалда сызықтық көбейткіштердің таңбаларын табу арқылы анықтауға болады.

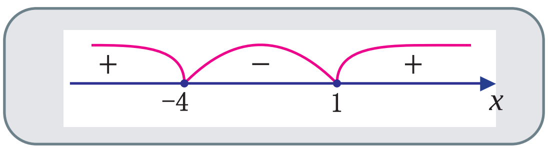
3-мысал. $x^2 + 3x - 4 \le 0$ теңсіздікті интервалдар тәсілімен шешіңдер.

Шешуі: Теңсіздіктің оң жағындағы квадрат үшмүшелікті көбейтушілерге жіктейміз.

$(x+4)(x-1) \le 0$.

және оның нөлдерін табамыз – 4 және 1.

Табылған нүктелерді сандар осінде белгілейміз және сандар осін интервалдарға бөлеміз. Әрбір интервалда $y = x^2 + 3x - 4$ функцияның таңбасын анықтаймыз:



Берілген мысалдың шартында функция оң болмаған мәндерін қайсы аралықта қабылдайтыны сұралған, сондықтан [−4;1] болады.

Жауабы: [−4; 1].

2-жағдай. $D = 0$ болсын. Онда $y = ax^2 + bx + c$ функция тек бірғана x_0 нүктеде нөлге тең болады. x_0 нүкте координата осін екі $(-\infty; x_0)$ және $(x_0; \infty)$ аралықтарға бөледі. Әрбір $x \ne x_0$ үшін $y = ax^2 + bx + c$ квадраттық функция мәндерінің таңбасы a коэффициенттің таңбасымен бірдей болады (2, 3-*суреттер*).

3-жағдай. $D < 0$. Онда $y = ax^2 + bx + c$ квадраттық функцияның нөлдері жоқ. Бұл жағдайда x тің кез келген мәндерінде функцияның мәндерінің таңбасы a коэффициенттің таңбасымен бірдей болады:

1) Егер $a > 0$ болса, x тің кез келген мәнінде $ax^2 + bx + c > 0$;

2) Егер $a < 0$ болса, x тің кез келген мәнінде $ax^2 + bx + c < 0$.

Мына деректерді білу және қолдану маңызды:

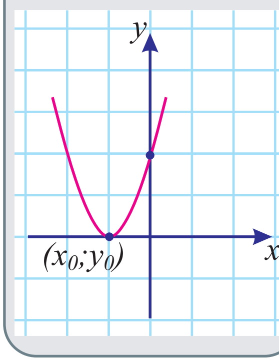
1) $a > 0$ және $D < 0$ болғанда $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \ge 0$ теңсіздіктердің шешімдері барлық нақты сандар жиыны болады (4-*сурет*);

2) $a > 0$ және $D < 0$ болғанда $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \le 0$ теңсіздіктердің шешімдері құр жиын болады (4-сурет);

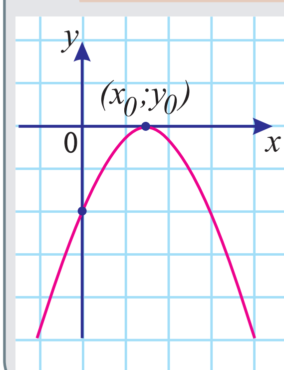
3) $a < 0$ және $D < 0$ болғанда $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \ge 0$ 0 теңсіздіктердің шешімдері құр жиын болады (5-сурет);

4) $a < 0$ және $D < 0$ болғанда $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \le 0$ теңсіздіктердің шешімдері барлық нақты сандар жиыны болады (5-*сурет*).

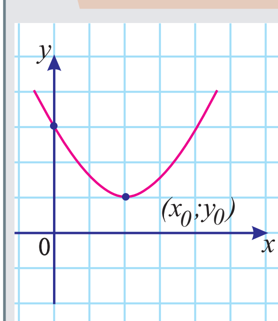
2-сурет



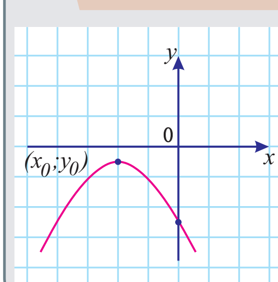
3-сурет



4-сурет



5-сурет



МЫСАЛДАР

1. 0; –2; 3 сандардан қайсы бірі $-4x^2+5x-5>0$ теңсіздіктің шешімі болады?

2. Төмендегі теңсіздіктерді сызықтық теңсіздіктер жүйесіне келтіріп шешіңдер.

a) $(x+4)(2x-3)>0$ b) $x^2+10x-11<0$

c) $(5x-2)(4x+3)\le 0$ d) $2x^2-5x+2\ge 0$

3. Теңсіздіктер мәндес пе?

a) $5x^2>2x$ және $5x>2$ b) $3x^3<7x^2$ және $3x<7$ c) $\frac{x^2-1}{x}>0$ және $(x^2-x)(x+1)>0$

4. Теңсіздіктерді шешіңдер.

a) $x^2>0$ b) $4x^2\ge 0$ c) $x^2<0$

d) $-x^2\le 0$ e) $x^2+7>0$ f) $5x^2+11\le 0$

g) $-x^2-5>0$ h) $3x^2-2x<0$ i) $-4x^2+11x<0$

j) $x^2-9x+20<0$ k) $x^2-10x+25>0$ l) $-x^2+6x-8>0$

m) $3x^2-x+2\ge 0$ n) $-9x^2+24x+20>0$ o) $-7\cdot(3-x)^2>0$

5. Шешімі берілген аралықтар болатын қандай да бір квадрат теңсіздік құрастырыңдар.

a) $(-\infty;-3)\cup(6;\infty)$ b) $(-\infty;\infty)$

6. Абсциссалар осінде $x^2+9x\le -14$ теңсіздіктің шешімі болған кесіндінің ұзындығын табыңдар.

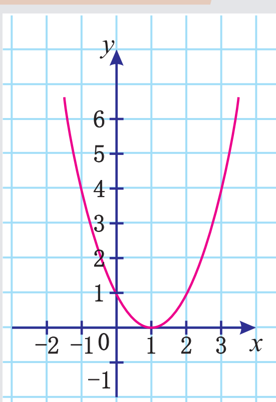
7. Неше бүтін сан $2x^2+7x-15<0$ теңсіздіктің шешімі болады?

8. Теңсіздікті интервалдар тәсілімен шешіңдер.

a) $x^2+5x-6>0$ b) $-x^2+x+2<0$ c) $x^2+3x+7>0$ d) $x^2+3x+7\le 0$

e) $-2x^2+5x+3>0$ f) $6x^2-x-2<0$ g) $2x^2+5x+9\le 0$ h) $49x^2-28x+4\le 0$

6-сурет



9. Теңсіздіктерді шешіңдер.

a) $8x^2+3x-5\ge 0$ b) $5x^2-12x+8\le 0$

c) $49x^2-70x+25>0$ d) $(2x^2+3x+4)(x+3)\ge 0$

e) $(7+6x-x^2)(3x-5)<0$

10. Теңсіздікті квадраттық функция графигі көмегімен шешіңдер.

a) $2x^2+5x-3>0$ b) $4x^2-9x-90>0$

11. 6-суретте $y=ax^2+bx+c$ функция графигі бейнеленген. Төмендегі теңсіздіктердің шешімін табыңдар.

a) $ax^2+bx+c>0$ b) $ax^2+bx+c\le 0$

12. Теңсіздіктің барлық бүтін шешімдері қосындысын табыңдар.

a) $2x^2-9x+4<0$ b) $\frac{x-1}{4}+\frac{3-2x}{2}>\frac{3x+x^2}{8}$

c) $(5x+7)(x-2)\leq 21x^2-11x+3$

13. $3x(x-2)-2x(x+4)-(x-16)\leq 0$ теңсіздіктің $[0;9]$ кесіндіге тиісті болған неше бүтін шешімі бар?

14. $y=-x^2+4x-3$ функция графигі көмегімен, төмендегі теңсіздіктердің шешімін табыңдар.

a) $-x^2+4x-3>0$ b) $-x^2+4x-3\geq 0$ c) $-x^2+4x-3<0$ d) $-x^2+4x-3\leq 0$

15. a -ның қандай мәндерінде $ax^2+2ax+4=0$ теңдеудің нақты түбірлері болмайды?

16. Теңсіздікті шешіңдер: $(x-1)^2(x^2-2)<(x-1)^2(6-2x)$

17. $f(x)=(x-1)^4(x+1)^3x^2$ функция берілген.

a) $f(x)<0$ b) $f(x)\leq 0$ c) $f(x)>0$ d) $f(x)\geq 0$

болатын x -тің барлық мәндерін табыңдар.

18. Теңсіздіктерді шешіңдер:

a) $x^2-2(b-c)x+a^2>0$, мұндағы a, b, c лар үшбұрыштың қабырғалары;

b) $x^2+(a^2+b^2-c^2)x+a^2b^2>0$, мұндағы a, b, c лар үшбұрыштың қабырғалары.

19. Егер $a^2+12b<0$ болса, $3x^2-b\leq ax$ теңсіздікті шешіңдер.

20. Егер $b>0,05a^2$ болса, $5x^2-ax+b>0$ теңсіздікті шешіңдер.

21. Егер $b^2\leq 4ac$ және $a+c>b$ болса, $ax^2+bx+c\leq 0$ теңсіздікті шешіңдер.

22. c -ның қандай мәндерінде $y=cx^2+x+c$ және $y=cx+1-c$ функциялар графиктерінің ортақ нүктесі болмайды?

23. p -ның қандай мәндерінде $y=px^2-24x+1$ және $y=12x^2-2px-1$ функциялар графигі қиылыспайды?

24. a -ның қандай мәндерінде $x^2+3x+a=0$ теңдеудің түбірлері $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}+1>0$ шартты қанағаттандырады?

25. b -ның қандай мәндерінде $x^2-2bx+b+6=0$ теңдеудің:

a) түбірлері теріс таңбалы; b) түбірлері оң таңбалы; c) түбірлері әр түрлі таңбалы болады?

26. a -ның қандай мәндерінде барлық нақты сандар теңсіздікті қанағаттандырады?

a) $x^2-(a+2)x+8a+1>0$ b) $\frac{1}{24}x^2+ax-a+1>0$

27. b -ның қандай мәндерінде теңсіздіктің шешіміне ие емес?

a) $x^2+2bx+1<0$ b) $bx^2+4bx+5<0$ c) $bx^2+(2b+3)x+b-1\geq 0$

ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ТЕПЕ-ТЕҢДІКТЕР

Негізгі тригонометриялық тепе-теңдіктер

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

2. $tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \cos\alpha \neq 0$

3. $ctg\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \sin\alpha \neq 0$

4. $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$

5. $1 + tg^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}, \quad \cos\alpha \neq 0$

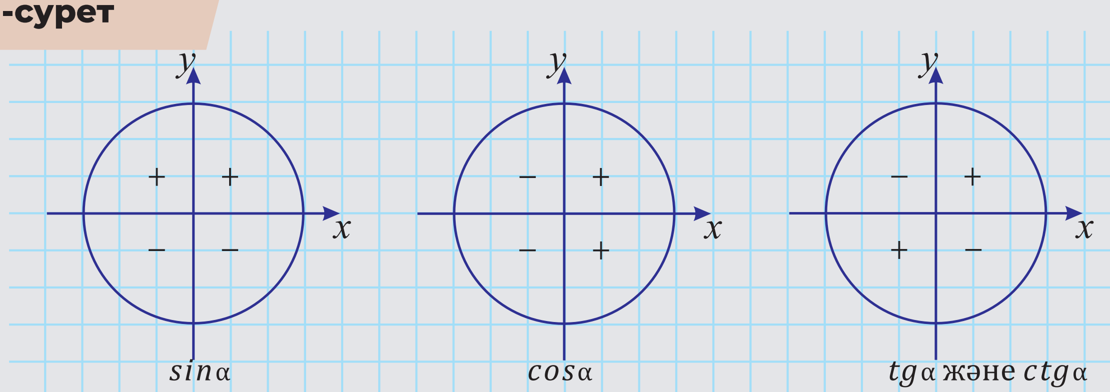
6. $1 + ctg^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}, \quad \sin\alpha \neq 0$

Кейбір бұрыштардың синусы, косинусы, тангенсі және котангенсінің мәндері

α	$0^0\,(0)$	$30°\left(\frac{\pi}{6}\right)$	$45°\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$60°\left(\frac{\pi}{3}\right)$	$90°\left(\frac{\pi}{2}\right)$	$180°(\pi)$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1
$tg\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	мәні жоқ	0
$ctg\alpha$	мәні жоқ	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	мәні жоқ

Синус, косинус, тангенс және котангенстің таңбалары

1-сурет



α және (–α) бұрыштардың синусы, косинусы, тангенсі және котангенсі

1. $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

2. $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

3. $tg(-\alpha) = -tg\alpha$

4. $ctg(-\alpha) = -ctg\alpha$

Келтіру формулалары

	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$
$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
$tg\,\alpha$	$ctg\,\alpha$	$-ctg\,\alpha$	$-tg\,\alpha$	$tg\,\alpha$	$ctg\,\alpha$	$-ctg\,\alpha$	$-tg\,\alpha$	$tg\,\alpha$
$ctg\,\alpha$	$tg\,\alpha$	$-tg\,\alpha$	$-ctg\,\alpha$	$ctg\,\alpha$	$tg\,\alpha$	$-tg\,\alpha$	$-ctg\,\alpha$	$ctg\,\alpha$

Келтіру формулаларындағы мына заңдылыққа назар аудар: егер α ны I ширекке тиісті деп алсақ, $\pi\pm\alpha$, $2\pi\pm\alpha$ бұрыштар үшін функция аталуы өзгермейді, $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$, $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$ бұрыштар үшін синус косинусқа, косинус синусқа, тангенс котангенсге, котангенс тангенсге өзгереді.

Мысалы, $\sin\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)$ ны қарастырайық. $\frac{\pi}{2}$ лер санын анықтайтын n – натурал сан жұп болса, функция аталуы алмаспайды; тақ болса, функция аталуы алмасады. Ал таңбаны анықтау $n\cdot\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ бұрыш қайсы ширекке тиісті екені және бұл ширекте синустың таңбасы бойынша анықталады.

1-мысал. Есептеңдер.

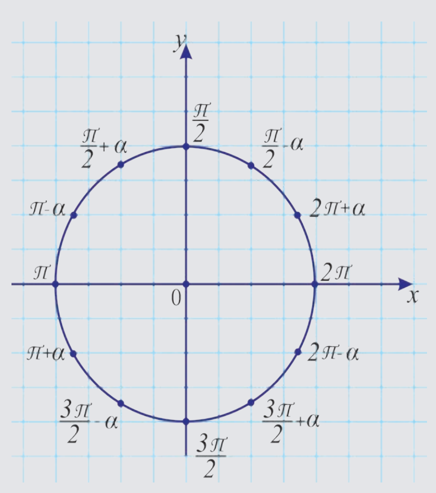
a) $\sin 855^\circ = \sin(9\cdot 90^\circ+45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos 2025^\circ = \cos(22\cdot 90^\circ+45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $tg 1680^\circ = tg(18\cdot 90^\circ+60^\circ) = tg 60^\circ = \sqrt{3}$

d) $ctg 1200^\circ = ctg(13\cdot 90^\circ+30^\circ) = -tg 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

2-сурет



ҚАЙТАЛАУ

Қосу формулалары

1. $sin(\alpha+\beta)=sin\alpha cos\beta+cos\alpha sin\beta$
2. $sin(\alpha-\beta)=sin\alpha cos\beta-cos\alpha sin\beta$
3. $cos(\alpha+\beta)=cos\alpha cos\beta-sin\alpha sin\beta$
4. $cos(\alpha-\beta)=cos\alpha cos\beta+sin\alpha sin\beta$
5. $tg(\alpha+\beta)=\dfrac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}$
6. $tg(\alpha-\beta)=\dfrac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha tg\beta}$
7. $ctg(\alpha+\beta)=\dfrac{ctg\alpha ctg\beta-1}{ctg\alpha+ctg\beta}$
8. $ctg(\alpha-\beta)=\dfrac{ctg\alpha ctg\beta+1}{ctg\beta-ctg\alpha}$

Екі еселенген бұрыш формулалары

1. $sin 2\alpha=2 sin\alpha\cdot cos\alpha$
2. $cos 2\alpha=cos^2\alpha-sin^2\alpha=2cos^2\alpha-1=1-2sin^2\alpha$
3. $tg2\alpha=\dfrac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$
4. $ctg2\alpha=\dfrac{ctg^2\alpha-1}{2ctg\alpha}$

Қосындысы мен айырымын көбейтіндіге түрлендіру формулалары

1. $sin\alpha+sin\beta=2sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
2. $sin\alpha-sin\beta=2sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cdot cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$
3. $cos\alpha+cos\beta=2cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
4. $cos\alpha-cos\beta=-2sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
5. $tg\alpha+tg\beta=\dfrac{sin(\alpha+\beta)}{cos\alpha\cdot cos\beta}$
6. $tg\alpha-tg\beta=\dfrac{sin(\alpha-\beta)}{cos\alpha\cdot cos\beta}$
7. $ctg\alpha+ctg\beta=\dfrac{sin(\alpha+\beta)}{sin\alpha\cdot sin\beta}$
8. $ctg\alpha-ctg\beta=\dfrac{-sin(\alpha-\beta)}{sin\alpha\cdot sin\beta}$

Көбейтіндісін қосындыға түрлендіру формулалары

1. $sin\alpha\cdot cos\beta=\dfrac{1}{2}(sin(\alpha+\beta)+sin(\alpha-\beta))$
2. $cos\alpha\cdot cos\beta=\dfrac{1}{2}(cos(\alpha+\beta)+cos(\alpha-\beta))$
3. $sin\alpha\cdot sin\beta=\dfrac{1}{2}(cos(\alpha-\beta)-cos(\alpha+\beta))$

Дәрежені бұрыштың формулалары

1. $sin^2\alpha=\dfrac{1-cos2\alpha}{2}$
2. $cos^2\alpha=\dfrac{1+cos2\alpha}{2}$
3. $tg^2\alpha=\dfrac{1-cos2\alpha}{1+cos2\alpha}$
4. $ctg^2\alpha=\dfrac{1+cos2\alpha}{1-cos2\alpha}$

Жарты аргументтің тригонометриялық функциялары

1. $cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+cos\alpha}{2}$
2. $sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-cos\alpha}{2}$
3. $tg^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-cos\alpha}{1+cos\alpha}$
4. $ctg^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+cos\alpha}{1-cos\alpha}$
5. $tg\frac{\alpha}{2}=\frac{sin\alpha}{1+cos\alpha}=\frac{1-cos\alpha}{sin\alpha}$
6. $ctg\frac{\alpha}{2}=\frac{sin\alpha}{1-cos\alpha}=\frac{1+cos\alpha}{sin\alpha}$

$sin\alpha$, $cos\alpha$, $tg\alpha$ ны $tg\frac{\alpha}{2}$ -арқылы өрнектеу формулалары

1. $sin\alpha=\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$
2. $cos\alpha=\frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$
3. $tg\alpha=\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}$

МЫСАЛДАР

1. Егер $ctg\alpha=-\frac{3}{4}$ және $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$ болса, $cos\alpha$ -ны табыңдар.

2. Егер $tg\alpha=-\sqrt{5}$ және $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ болса, $sin\alpha$ -ны табыңдар.

3. Егер $tg\alpha=\frac{3}{2}$ болса, $\frac{2sin\alpha+5cos\alpha}{3sin\alpha-4cos\alpha}$ ны табыңдар.

4. Ықшамдаңдар.

a) $\frac{2sin^2\alpha-1}{2cos^2\alpha-1}$ b) $\frac{ctg\left(2sin^2\alpha+tg\alpha\right)}{\left(sin\alpha+cos\alpha\right)^2}$ c) $\frac{1-cos^2\alpha}{sin^4\alpha}-ctg^2\alpha$ d) $2-\frac{1-sin^4\alpha}{cos^2\alpha}$

5. Есептеңдер.

a) $4cos150°-sin240°-3tg210°$ b) $2cos135°+tg60°-ctg240°$

c) $sin300°-3cos135°+2cos210°$ d) $tg150°-ctg315°+5sin135°$

6. Есептеңдер.

a) $tg\frac{7\pi}{6}-2tg\frac{5\pi}{3}+3tg\frac{11\pi}{6}$ b) $2cos\frac{4\pi}{3}+sin\frac{5\pi}{4}-cos\frac{4\pi}{3}$

c) $20ctg\frac{3\pi}{2}-sin\frac{2\pi}{3}+cos\frac{4\pi}{3}$ d) $ctg\frac{7\pi}{4}+2ctg\frac{4\pi}{3}-2cos\frac{5\pi}{6}$

7. Ықшамдаңдар.

a) $\frac{1-tg(360°-\alpha)tg\alpha}{tg(270°-\alpha)+tg\alpha}$ b) $\frac{cos(90°+\alpha)+sin(90°-\alpha)}{cos(270°-\alpha)+cos(180°+\alpha)}$

8. Ықшамдаңдар.

a) $\dfrac{sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\beta\right)}{tg^2\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\beta}{2}\right)-ctg^2\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\beta}{2}\right)}$ b) $\dfrac{cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-2a\right)+sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+2a\right)}{cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+2a\right)+sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-2a\right)}$

9. Тепе-теңдікді дәлелдеңдер.

a) $\dfrac{sin(\pi-2\alpha)-2sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}{sin^2(\pi+\alpha)-cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}=2ctg\alpha$ b) $\dfrac{sin^4\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)-cos^2(2\alpha+\pi)}{1-3cos(2\alpha+\pi)}=\dfrac{sin^2\alpha}{2}$

10. Есептеңдер.

a) $sin(-43°)cos88°+cos(-43°)sin88°$ b) $cos11°cos19°-sin19°sin11°$

11. Есептеңдер.

a) $sin\dfrac{2\pi}{7}cos\dfrac{3\pi}{14}+cos\dfrac{2\pi}{7}sin\dfrac{3\pi}{14}$ b) $\dfrac{1+tg33°tg78°}{tg78°-tg33°}$

12. Есептеңдер.

a) $cos\left(-\dfrac{19\pi}{36}\right)cos\dfrac{7\pi}{9}-sin\dfrac{7\pi}{9}sin\left(-\dfrac{19\pi}{36}\right)$ b) $\dfrac{1-tg\dfrac{\pi}{11}tg\dfrac{5\pi}{66}}{tg\dfrac{5\pi}{66}+tg\dfrac{\pi}{11}}$

13. Ықшамдаңдар.

a) $cos(\alpha-\beta)-sin\alpha sin\beta$ b) $sin(\alpha-\beta)+sin(\alpha+\beta)$

c) $sin4\alpha\, cos\alpha-cos4\alpha\, sin\alpha$ d) $cos\alpha\, cos2\alpha+sin2\alpha\, sin\alpha$

e) $\dfrac{1}{2}cos\alpha+\dfrac{\sqrt{3}}{2}sin\alpha$ f) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}cos\alpha-\dfrac{\sqrt{2}}{2}sin\alpha$

14. a) $cos\alpha=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ және $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$ болса, $cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$ -ны табыңдар.

b) $cos\alpha=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ және $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$ болса, $sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)$ -ны табыңдар.

15. Есептеңдер.

a) $\dfrac{6sin10°cos10°}{sin20°}$ b) $\dfrac{sin88°}{sin22°cos22°cos44°}$ c) $sin\dfrac{\pi}{12}\left(2sin^2\dfrac{\pi}{24}-1\right)$

16. a) Егер $cos\alpha=0,4$ болса, $cos2\alpha$ -ны табыңдар.

b) Егер $sin\alpha=-0,7$ болса, $cos2\alpha$ -ны табыңдар.

17. a) Егер $cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ және $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ болса, $sin2\alpha$ -ны табыңдар.

b)Егер $sin\alpha = \frac{1}{5}$ және $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ болса, $sin2\alpha$ -ны табыңдар.

18. Ықшамдаңдар:

a) $2cos^2\frac{\alpha}{2}(cos\alpha - 1)$ b) $\frac{sin2\alpha}{1+cos2\alpha}$

19. Егер $tg\alpha = -2$ болса, $sin2\alpha$, $cos2\alpha$, $tg2\alpha$, $ctg2\alpha$ -ны табыңдар.

20. a) $cos123°tg231°sin312°$ өрнегінің таңбасын анықтаңдар.

b) $sin\frac{1}{3}cos\frac{7}{8}tg4ctg5{,}7$ өрнегінің таңбасын анықтаңдар.

21. Сандарды салыстырыңдар: $sin200°$ және $sin(-200°)$.

22. $sin\alpha = \frac{12}{13}$ және $cos\alpha = \frac{5}{13}$ теңдіктердің бір уақытта орындалуы мүмкін бе?

23. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер.

a) $\left(sin\alpha + \frac{1}{sin\alpha}\right)^2 + \left(cos\alpha + \frac{1}{cos\alpha}\right)^2 - \left(tg^2\alpha + ctg^2\alpha\right) = 7$ b) $\frac{tg3\alpha}{tg^2 3\alpha - 1}\cdot\frac{1-ctg^2 3\alpha}{ctg3\alpha} = 1$

24. Өрнекті ықшамдаңдар.

a) $\frac{1-ctg^2(-\alpha)}{cos\alpha + sin(-\alpha)}\cdot sin(-\alpha) + ctg(-\alpha)$ b) $\frac{sin(\alpha-\beta) - sin(\beta-\alpha)}{cos(\alpha-\beta) + cos(\beta-\alpha)}$

25. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер.

a) $sin\alpha + cos\alpha = \sqrt{2}\,cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$ b) $2sin2\alpha cos5\alpha = sin7\alpha - sin3\alpha$.

26. $cos\alpha = \frac{2}{3}$; $sin\beta = -\frac{\sqrt{7}}{4}$; $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$; $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$ болса, $cos(\alpha+\beta)$-ны табыңдар.

27. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер. $\frac{tg\alpha - tg\beta}{tg\alpha + tg\beta} = \frac{sin(\alpha-\beta)}{sin(\alpha+\beta)}$.

28. Есептеңдер: $sin(-300^0)cos(-135^0)tg(-210^0)ctg(-120^0)$.

29. Егер $sin\alpha + cos\alpha = \frac{2}{3}$ болса, $sin\alpha cos\alpha$ -ны табыңдар..

30. Егер $sin\alpha\, cos\alpha = \frac{1}{3}$ және $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$ болса, $sin\alpha + cos\alpha$ -ны табыңдар.

АРИФМЕТИКАЛЫҚ ЖӘНЕ ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ ПРОГРЕССИЯЛАР

Арифметикалық прогрессия

1. $a_{n+1} = a_n + d$, $n \in N$;

2. $a_n = a_1 + (n-1)d$, $n \in N$;

3. $a_n = a_k + (n-k)d$, $n, k \in N$, $n > k$;

4. $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, $n \in N$;

5. $a_n = \dfrac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$, $n, k \in N$, $n > k$;

6. $\{a_n\}$ арифметикалық прогрессия мүшелері үшін $a_n + a_m = a_k + a_l$ теңдік орынды, мұндағы $n + m = k + l$;

7. $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$;

8. $S_n = \dfrac{(2a_1 + (n-1)d)n}{2}$.

Геометриялық прогрессия

1. $b_{n+1} = b_n \cdot q$, $n \in N$;

2. $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, $n \in N$;

3. $b_n = b_k \cdot q^{n-k}$, $n, k \in N$ және $n > k$;

4. $b_n^2 = b_{n-k} \cdot b_{n+k}$, $n, k \in N$, $n > k$;

5. $\{b_n\}$ Геометриялық прогрессия мүшелері үшін $b_n \cdot b_m = b_k \cdot b_l$ теңдік орынды, мұндағы $n + m = k + l$;

6. $S_n = \dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}$, $q \neq 1$, егер $q = 1$ болса, $S_n = b_1 \cdot n$;

7. $S_n = \dfrac{b_n q - b_1}{q-1}$, $q \neq 1$;

8. Шексіз кемімелі геометриялық прогрессия (барлық мүшелері) қосындысы:

$$S = \frac{b_1}{1-q}, \quad |q| < 1, q \neq 0.$$

МЫСАЛДАР

1. Егер $a_1 = -3$ және $d = 6$ болса, арифметикалық прогрессияның сексенінші мүшесін табыңдар.

2. 2, 6, 10, 14, 18, ... тізбек арифметикалық прогрессия құрайды. Оның n-мүшесі формуласын жазыңдар.

3. Арифметикалық прогрессияда:
a) $a_7 = -5$, $a_{32} = 70$ болса, a_1 және d -ны табыңдар;
b) $a_5 = 2$, $a_{40} = 142$ болса, a_7 -ні табыңдар;
c) $a_{14} = 5$, $a_{12} = 1$ болса, a_{13} -ті табыңдар;
d) $a_{25} - a_{20} = 10$, $a_{16} = 13$ болса, a_{10} -ды табыңдар.

4. Егер геометриялық прогрессияда $b_2 = 4$ және $b_3 = 6$ болса, b_7 -ні табыңдар.

5. Егер геометриялық прогрессияда $b_1 = 3$ және $q = -2$ болса, b_8 -ді табыңдар.

6. Геометриялық прогрессияда:

a) $b_1 = 18$, $q = \frac{1}{9}$ болса, b_2 -ні; b) $b_1 = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$ болса, b_7 -ні;

c) $b_4 = 8$, $b_8 = 128$ болса, b_1 және q -ді; d) $b_9 = -1$, $q = -1$ болса, b_1 және b_{17} -ні табыңдар.

7. Геометриялық прогрессияда $b_1 = 3$, $q = 2$ болса, S_6 -ны табыңдар.

8. Геометриялық прогрессияда $b_2 = 6$, $q = 3$ болса, S_8 -ді табыңдар.

9. Геометриялық прогрессияда $b_1 = 4$, $q = \frac{1}{2}$ болса, алғашқы 10 мүшесінің қосындысын табыңдар.

10. Геометриялық прогрессияның бірінші мүшесі 5, алтыншы мүшесі 1215 ке тең. Осы прогрессия еселігін табыңдар.

11. Шексіз кемімелі геометриялық прогрессияда $b_1 = 8$, $q = \frac{1}{2}$ болса, оның қосындысын табыңдар.

12. 12, 4, $\frac{4}{3}$, ... шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның қосындысын табыңдар.

13. Геометриялық прогрессияда:

a) $b_1 = 24$, $b_2 = 36$ болса, q -ді; b) $b_5 = 36$, $b_7 = 144$ болса, b_6 -ны;

c) $b_6 = \frac{1}{486}$, $b_8 = \frac{1}{4374}$ болса, b_7 -ні табыңдар.

14. Шексіз кемімелі геометриялық прогрессия қосындысы 150 ге тең. Егер $q = \frac{1}{3}$ болса, b_1 -ді табыңдар.

15. Шексіз кемімелі геометриялық прогрессияда $b_1 = \frac{1}{4}$, $S = 16$ болса, q -ды табыңдар.

16. Геометриялық прогрессияда:

a) $b_1 = 3$, $q = 5$ болса, S_4 -ті; b) $b_2 = 8$, $b_3 = 4$ болса, S_6 -ны;

c) $b_1 = -2$, $b_6 = -486$ болса, S_6 -ны табыңдар.

17. Геометриялық прогрессияда $q=-\frac{1}{2}$, $S_8=\frac{85}{64}$ болса, b_1 -ді табыңдар.

18. Арифметикалық прогрессияның n-мүшесінің формуласын жазыңдар.

a) $a_1=5,\ a_2=-5$ b) $a_1=-3,\ a_6=12$ c) $a_1=6,\ a_{10}=33$

19. Арифметикалық прогрессияның төртінші және алтыншы мүшелері сәйкесінше 16 және 19 ға тең болса, бірінші мүшесін табыңдар.

20. Алғашқы 25 натурал сандардың қосындысын табыңдар.

21. $\{a_n\}$ арифметикалық прогрессияда $a_3+a_7=5$ және $a_4=1$ болса, оның алғашқы он мүшесінің қосындысын табыңдар.

22. Арифметикалық прогрессияда $a_1=-20{,}7$, $d=1{,}8$ болса, қайсы нөмерлі мүшесінен бастап прогрессияның барлық мүшелері оң болады?

23. Арифметикалық прогрессияда $a_{12}+a_{15}=20$ болса, S_{26} -ны табыңдар.

24. Арифметикалық прогрессияда $a_2+a_6=44$, $a_5-a_1=20$ болса, a_{100} -ді табыңдар.

25. Арифметикалық прогрессияның үшінші және тоғызыншы мүшелерінің қосындысы 8 ге тең. Осы прогрессияның алғашқы он бір мүшелерінің қосындысын табыңдар.

26. Арифметикалық прогрессияда $S_n=3n^2+n$ болса, a_1 және d -ны табыңдар.

27. Өспелі геометриялық прогрессияда $b_{12}=4\cdot b_{10}$ және $b_3=6$ болса, b_7 -ні табыңдар.

28. Геометриялық прогрессияда $b_5=\sqrt[3]{2}$. Осы прогрессияның алғашқы тоғыз мүшесінің көбейтіндісін табыңдар

29. Геометриялық прогрессияда $S_4=10\frac{5}{8}$, $S_5=42\frac{5}{8}$, $b_1=\frac{1}{8}$ болса, q -ды табыңдар.

30. Геометриялық прогрессияда $b_1=1$ және $b_3+b_5=90$ болса, q -ды табыңдар.

31. Мына үш x, y және 12 сандары кемімелі геометриялық прогрессия құрайды. Егер 12 нің орнына 9 қойылса, үш сан арифметикалық прогрессия құрайды. $x+y$ -ті табыңдар.

32. Геометриялық прогрессияда $b_2\cdot b_4\cdot b_6=216$ және $b_3=12$. Осы прогрессияның алғашқы алты мүшесінің қосындысын табыңдар.

33. Шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның тақ орындағы барлық мүшелерінің қосындысы 36 ға тең. Жұп орындарда орналасқан барлық мүшелерінің қосындысы 12 ге тең. Осы прогрессияның еселігін және екінші мүшесін табыңдар.

34. Шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның бірінші және төртінші мүшелерінің қосындысы 54, екінші және үшінші мүшелерінің қосындысы 36 ға тең. Осы прогрессияның қосындысын табыңдар.

35. Арифметикалық прогрессияда:

a) $a_1=-3$, $a_3\cdot a_7=24$ болса, S_{12} -ні; b) $a_2+a_9=20$ болса, S_{10} -ды;

c) $a_3+a_6=19$ болса, S_8 -ді; d) $S_4=-28$, $S_6=58$ болса, S_{16} -ны табыңдар.

1-ТАРАУ. ФУНКЦИЯЛАР

- ФУНКЦИЯ. ФУНКЦИЯНЫҢ БЕРІЛУ ТӘСІЛДЕРІ
- ФУНКЦИЯНЫҢ АНЫҚТАЛУ ОБЛЫСЫ ЖӘНЕ МӘНДЕР ЖИЫНЫ
- ФУНКЦИЯЛАРДА ОРЫНДАЛАТЫН АМАЛДАР
- КҮРДЕЛІ, КЕРІ, ПЕРИОДТЫ ФУНКЦИЯЛАР
- ФУНКЦИЯ ҚАСИЕТТЕРІ
- ФУНКЦИЯ ГРАФИКТЕРІНДЕ ҚАРАПАЙЫМ ТҮРЛЕНДІРУЛЕР
- СЫЗЫҚТЫҚ ЖӘНЕ КВАДРАТТЫҚ МОДЕЛЬДЕУЛЕР
- ЖОБАЛЫҚ ЖҰМЫС

ФУНКЦИЯ. ФУНКЦИЯНЫҢ БЕРІЛУ ТӘСІЛДЕРІ

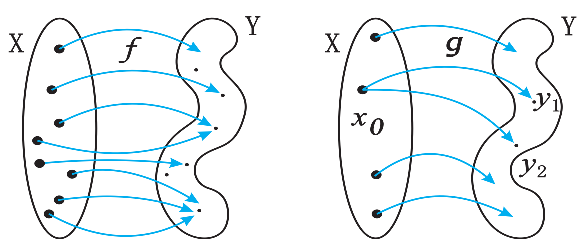
Функция

Табиғат, өндіріс, экономика және басқа салаларда қаралатын шамалар арасындағы байланыстырады (тәуелділікті) үйренуде **функция** деп аталатын ұғымның маңызы өте үлкен.

X және Y сандық жиындар болсын. Әрбір $x \in X$ нүктеге тек бір ғана $y \in Y$ нүктені сәйкес қоятын заңдылық **функция** деп аталады.

Функцияны анықтайтын заңдылықтар f, g, ... әріптермен белгіленеді. $y = f(x)$ жазу f заңдылық $x \in X$ нүктеге $y \in Y$ нүктені сәйкес қоятынын білдіреді және мұнда X жиынның нүктелерін Y жиынның нүктелеріне сәйкес қоятын f функция берілген деп аталады. Мұнда x ***тәуелсіз айнымалы*** немесе ***аргумент***, ал y – ***тәуелді айнымалы*** немесе ***функция*** деп айтылады. f функция әдетте $y = f(x)$ немесе $f(x)$ көріністерде өрнектеледі.

1-сурет



f заңдылық функция болады: X тің әрбір x элементіне Y ден тек бір ғана y элемент сәйкес қойылған.

g заңдылық функция болмайды: $x_0 \in X$ элементке екі $y_1, y_2 \in Y$ элемент сәйкес қойылған.

Функция болатын (f) және функция болмайтын (g) заңдылықтар

Төменде кейбір функциялар келтірілген:

1) *сызықты функция*: $y = kx + b$

2) *квадраттық функция*: $y = ax^2 + bx + c$

3) *дәрежелі функция*: $y = x^n$

4) *бөлшек дәрежелі функция*: $y = \sqrt[n]{x^m}$

5) *кері пропорционалдық функциясы*:
$y = \dfrac{k}{x}$ (мұндағы $k \neq 0$)

6) *модульді функция*: $y = |x|$

Функцияның берілу тәсілдері

Функциялар төмендегі тәсілдерде берілуі мүмкін:

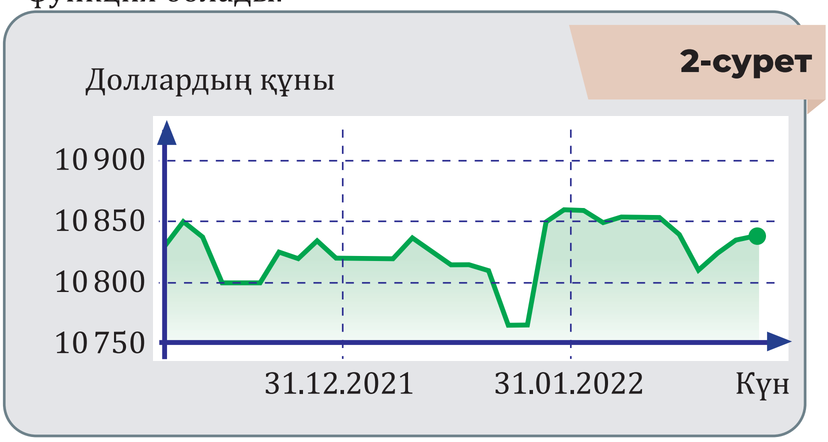
1. Функция берілуінің ***аналитикалық тәсілі***. Егер функция бір немесе бірнеше формула немесе теңдеулермен берілген болса, онда бұл функция аналитикалық тәсілде берілген деп аталады. Мысалға, материялық нүктенің әрекет теңдеуі $s = 20 - 5t + \frac{1}{4}t^2$ аналитикалық тәсілде берілген функцияға мысал болады.

2. Функция берілуінің ***кесте тәсілі*** әдетте тәжірибелерде айнымалылар арасындағы өзара байланысты орнатады. Мысалға, температураның күндік өзгеруін кесте тәсілінде беруге болады.

Бұл жерде күн сағаттары – тәуелсіз айнымалы (яғни аргумент), ал температура – тәуелді айнымалы (яғни функция) болады. Ташкент қаласында 2022-жыл 20–26-январь күндері ауа температурасының апталық өзгеруі төмендегі кестеде келтірілген.

Күн		20.01	21.01	22.01	23.01	24.01	25.01	26.01
Температура, t °C	Күндізі	13	9	3	4	6	7	8
	Кешкілік	–2	–3	–1	–2	–3	–4	–3

3. Кейбір практикалық жұмыстарда айнымалылардың тәуелділігі **графиктік тәсілде** беріледі. Мысалы, доллардың сумға қатысты құнының айлық, жылдық өзгеруін графиктік тәсілде өрнектеуге болады. Мұнда күндер – аргумент, доллардың сумға қатысты құны – функция болады.



2-сурет

4. Функция ***мәтін тәсілінде*** берілуі де мүмкін. Мысалы: 4 мүшесі бар жанұя палау демдеу үшін 1 *kg* күріш жұмсайды. Үйге екі қонақ келгенде қанша күріш демдеу керек? – деген мәселеде пісірілген күріш мөлшері үйдегі кісілердің санының функциясы болады. Мұндағы кісілер саны – аргумент, күріш мөлшері – функция екені айқын.

МЫСАЛДАР

1. Мәтінмен берілген функцияның аналитикалық көрінісін жазыңдар. (Мысалы, “аргументтің квадратынан 5 -ті азайтыңдар” ережесі төмендегі функцияны береді: $f(x) = x^2 - 5$.

a) аргументті 3 -ке көбейтіп, нәтижеден 5 -ті азайтыңдар.
b) аргументтің квадратына 2 -ні қосыңдар.
c) аргументтен 1 -ді азайтып, кейін квадратқа шығарыңдар
d) аргументке 1 -ді қосып, кейін квадрат түбірін тауып, 6 -ға бөліңдер.

2. Функцияның мәтінді ережесі берілген. Бұл функцияның (a) **аналитикалық**, (b) **кесте** және (d) **графиктік** көрінісін табыңдар:

a) $f(x)$ ті табу үшін аргументті 3 -ке бөліңдер, кейін $\frac{2}{3}$ -ні қосыңдар.

b) $g(x)$ ті табу үшін аргументтен 4 -ті азайтыңдар, соң $\frac{3}{4}$ -ке көбейтіңдер.
c) $T(x)$ функция x сумға сатып алынған өнімнің салық мөлшерінің функциясы болсын. Салық мөлшерін табу үшін өнім бағасының 8% -ын есептеңдер.

d) $V(d)$ функция d диаметрлі шардың көлемін табу функциясы болсын, көлемді табу үшін диаметрдің 3-ші дәрежесін π -ге көбейтіп 6 -ға бөліңдер.

3. Берілген функциялар үшін мәндер кестесін толтырыңдар:

a) $f(x) = 2(x-1)^2$

x	$f(x)$
–1	
0	
1	
2	
3	

b) $g(x) = |2x+3|$.

x	$g(x)$
-3	
-2	
0	
1	
3	

4. Функцияның берілген аргументтегі мәнін табыңдар.

a) $f(x) = x^2-6$ $\quad f(-3),\ f(3),\ f(0),\ f\left(\frac{1}{2}\right)$

b) $f(x) = x^3+2x$ $\quad f(-2),\ f(-1),\ f(0),\ f\left(\frac{1}{2}\right)$

c) $f(x)=\frac{|x|}{x}$ $\quad f(-2), f(-1), f(0), f(5), f(x^2), f\left(\frac{1}{x}\right)$

d) $f(x)=\frac{1-2x}{3}$ $\quad f(2), f(-2), f\left(\frac{1}{2}\right), f(a), f(-a), f(a-1)$

e) $h(x)=\frac{x^2+4}{5}$ $\quad h(2), h(-2), h(a), h(-x), h(a-2), h(\sqrt{x})$

f) $f(x)=x^2+2x$ $\quad f(0), f(3), f(-3), f(a), f(-x), f\left(\frac{1}{a}\right)$

g) $h(t)=t+\frac{1}{t}$ $\quad h(-1),\ h(2),\ h\left(\frac{1}{2}\right),\ h(x-1),\ h\left(\frac{1}{x}\right)$

5. Берілген теңдіктерден қайсылары x айнымалының функциясы болады?

a) $3x-5y=7$ b) $3x^2-y=5$ c) $x=y^2$ d) $x^2+(y-1)^2=4$

e) $2x-4y^2=3$ f) $2x^2-4y^2=3$ g) $2xy-5y^2=4$ h) $\sqrt{y}-x=5$

i) $2|x|+y=0$ j) $2x+|y|=0$ k) $x=y^3$ l) $x=y^4$

6. Берілген кестелерден қайсы бірі x айнымалының функциясы бола алады?

a)

x	y
–5	–12
9	2
11	2

b)

x	y
–10	–9
$3\frac{1}{2}$	–6
–10	–1

c)

x	y
2	0
–5	–3
–17	7
6	17
11	7

d)

x	y
–4	$3\frac{1}{2}$
$3\frac{1}{2}$	$-3\frac{1}{2}$
$9\frac{3}{5}$	–10

ФУНКЦИЯНЫҢ АНЫҚТАЛУ ОБЛЫСЫ ЖӘНЕ МӘНДЕР ЖИЫНЫ

Функцияның анықталу облысы және мәндер жиыны

$y = f(x)$ функцияда x аргумент қабылдауы мүмкін болған сандар жиыны $y=f(x)$ ***функцияның анықталу облысы***, $y = f(x)$ функция қабылдауы мүмкін болған сандар жиыны $y = f(x)$ функцияның ***мәндер жиыны*** деп аталады және олар сәйкесінше $D(f)$ және $E(f)$ арқылы белгіленеді.

Кейбір функциялар үшін анықталу облысы және мәндер жиынының кестесі:

Функция	Анықталу облысы	Мәндер жиыны
1) $y = kx + b$	$D(y) = (-\infty; +\infty)$	$E(y) = (-\infty;\ +\infty)$
2) $y = x^2$	$D(y) = (-\infty; +\infty)$	$E(y) = [0;\ +\infty)$
3) $y = \|x\|$	$D(y) = (-\infty; +\infty)$	$E(y) = [0;\ +\infty)$
4) $y = \frac{k}{x}$	$D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
5) $y = \sqrt{x}$	$D(y) = [0; +\infty)$	$E(y) = [0;\ +\infty)$
6) $y = \sqrt[2n]{x}$	$D(y) = [0; +\infty)$	$E(y) = [0;\ +\infty)$
7) $y = \sqrt[3]{x}$	$D(y) = (-\infty; +\infty)$	$E(y) = (-\infty;\ +\infty)$
8) $y = \sqrt[2n+1]{x}$	$D(y) = (-\infty; +\infty)$	$E(y) = (-\infty;\ +\infty)$

x аргументтің $y = f(x)$ функцияның анықталу облысына тиісті болмаған кез келген мәнінде $y = f(x)$ функция анықталмаған болады немесе басқаша айтқанда, $f(x)$ өрнектің мағынасы болмайды. Мысалға, $y = \sqrt{x}$ функция $x = -1$ болғанда, $y = \frac{k}{x}$ функция $x = 0$ болғанда мағынасы жоқ.

1-мысал. $y = \dfrac{1}{x^2 - x}$ функцияның анықталу облысын табыңдар.

Шешуі: Рационал өрнектің бөлімі нөлге тең болуы мүмкін емес, яғни:

$$x^2 - x \neq 0$$
$$x(x-1) \neq 0$$
$$x \neq 0 \text{ және } x \neq 1.$$

Демек, x аргумент 0 және 1 мәндерді қабылдамайды. Сондықтан, берілген функцияның анықталу облысы $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

Жауабы: $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

2-мысал. $y=\sqrt{9-x^2}$ функцияның анықталу облысын табыңдар.

Шешуі: Квадрат түбір астындағы өрнек теріс болмайды. Яғни,

$$9-x^2\geq 0$$
$$(3-x)(3+x)\geq 0$$
$$-3\leq x\leq 3.$$

Демек, x аргумент тек $[-3;\ 3]$ кесіндіден мән қабылдайды. Сондықтан функцияның анықталу облысы: $D(y)=[-3;3]$.

Жауабы: $D(y)=[-3;3]$.

3-мысал. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ функцияның анықталу облысын табыңдар.

Шешуі: Берілген функция бөлімінде квадрат түбір астындағы өрнек берілген, бұл өрнек нөлге тең, тағы да нөлден кіші болмауы қажет. Сондықтан,

$$x+1>0$$
$$x>-1.$$

Демек, функцияның анықталу облысы $D(y)=(-1;\infty)$.

Жауабы: $D(y)=(-1;\infty)$.

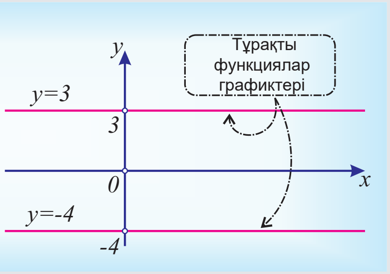
Функция графигі

$y=f(x)$ функция өзінің $D(f)$ анықталу облысынан алынған әрбір x элементке $E(f)$ мәндер жиынынан тек бір ғана $f(x)$ мән сәйкес қояды. Нәтижеде әрбір $x\in D(f)$ элемент Oxy координаталық жазықтығында тек бір ғана $(x, f(x))$ нүктені анықтайды.

Oxy координаталық жазықтығындағы барлық $(x, f(x))$ нүктелер жиыны $y=f(x)$ ***функцияның графигі*** *деп аталады.*

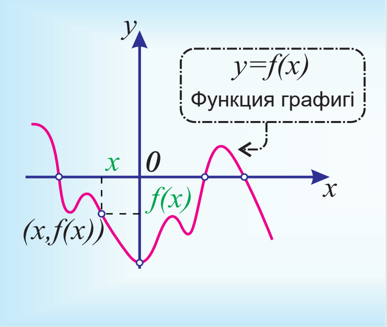
1-, 2-суретте функция графиктері бейнеленген.

1-сурет



Функция графигі

2-сурет



Функция графигі

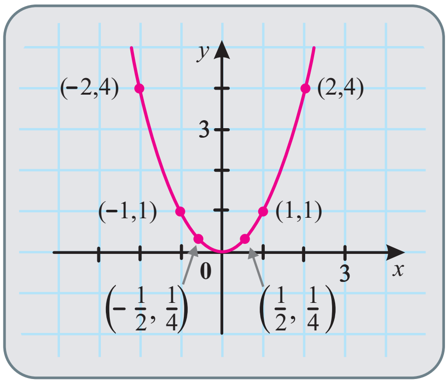
4-мысал. Төмендегі функциялардың графиктерін салыңдар.

a) $y=x^2$ b) $y=x^3$ d) $y=\sqrt{x}$

Шешуі: Бұл функциялардың графиктерін салу үшін алдымен, мәндер кестесін жасаймыз. Кейін бұл нүктелерді координаталық жазықтығында белгілейміз және оларды тегіс қисықпен қосамыз.

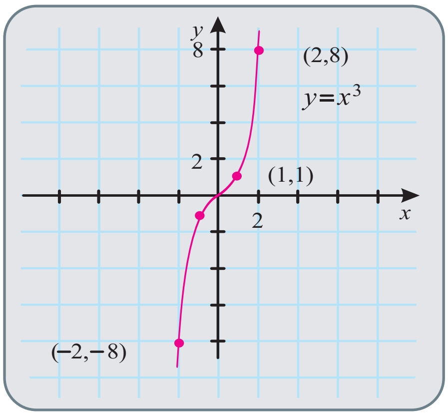
a)

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$y = x^2$	9	4	1	0	1	4	9



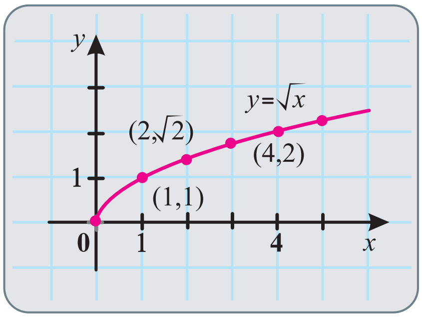
b)

x	–2	–1	–1/2	0	1/2	1	2
$y = x^3$	–8	–1	–1/8	0	1/8	1	8



c)

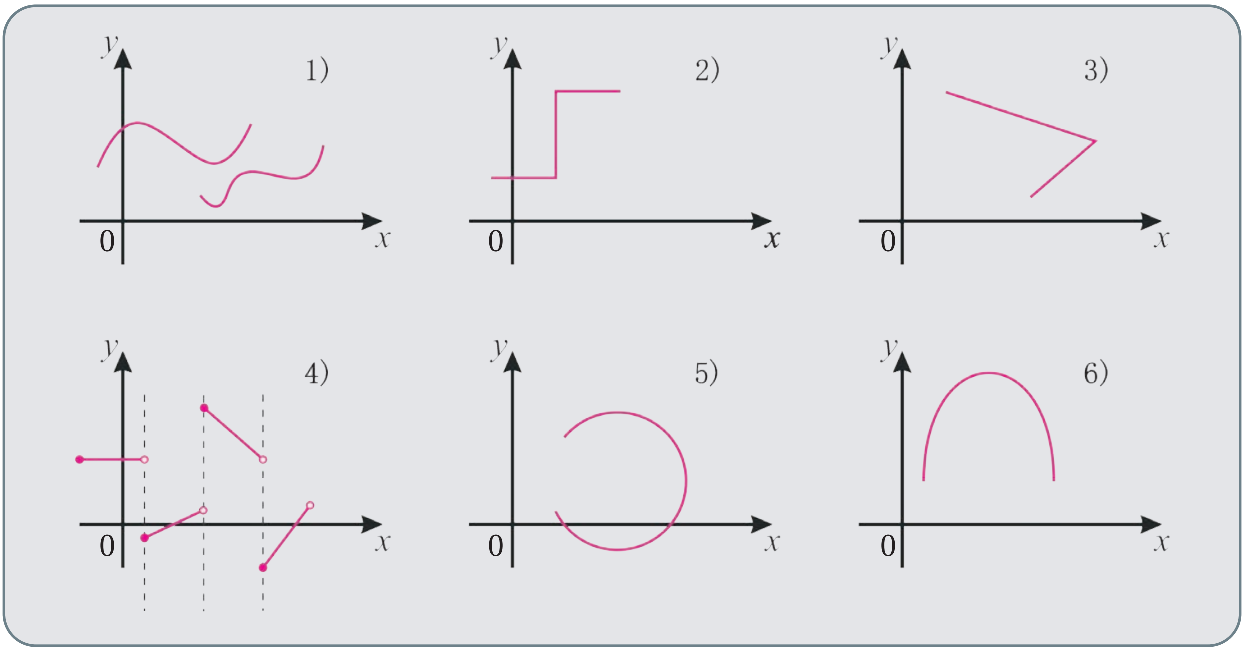
x	0	1/4	1	2	4	9
$y = \sqrt{x}$	0	1/2	1	$\sqrt{2}$	2	3



Oy осіне параллель болған кез келген түзу Oxy жазықтығындағы пішінді бірден артық болмаған нүктеде қиып өтсе, онда бұл пішін қандай да бір $y = f(x)$ функцияның графигі болады.

Егер Oy осіне параллел болған қандайда бір түзу берілген пішінді бірден артық нүктелерде қиып өтсе, онда бұл пішін еш қандай функцияның графигі бола алмайды.

Төмендегі суретте келтірілген және пішіндер қандай да бір функцияның графигі болады, ал 1, 2, 3 және 5 пішіндер функция графигі болмайды.



МЫСАЛДАР

1. Функцияның анықталу облысын және мәндер жиынын табыңдар.

a) $f(x)=3x$ b) $f(x)=3x$, $2\le x\le 6$

c) $f(x)=5x^2+2$ d) $f(x)=5x^2+2,\ 0\le x\le 2$

2. Функцияның анықталу облысын табыңдар.

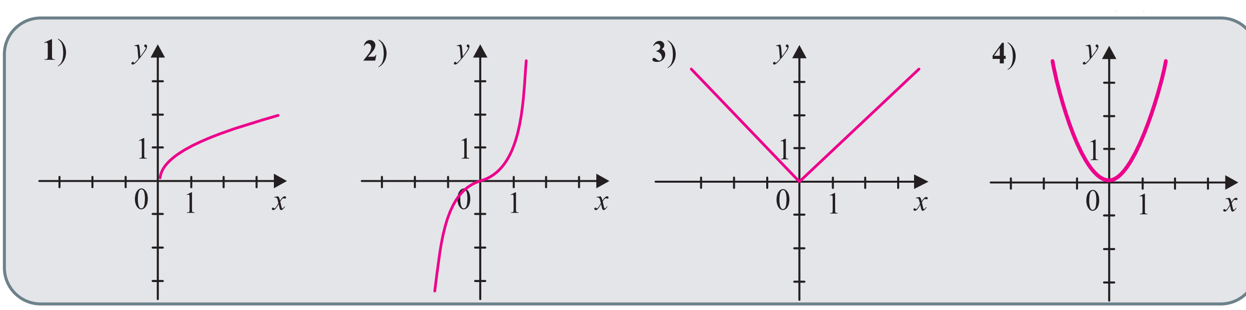
a) $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$ b) $f(x)=\dfrac{1}{3x-6}$ c) $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-1}$

d) $f(x)=\dfrac{x^4}{x^2+x-6}$ e) $f(t)=\sqrt{t+1}$ f) $g(t)=\sqrt{t^2+9}$

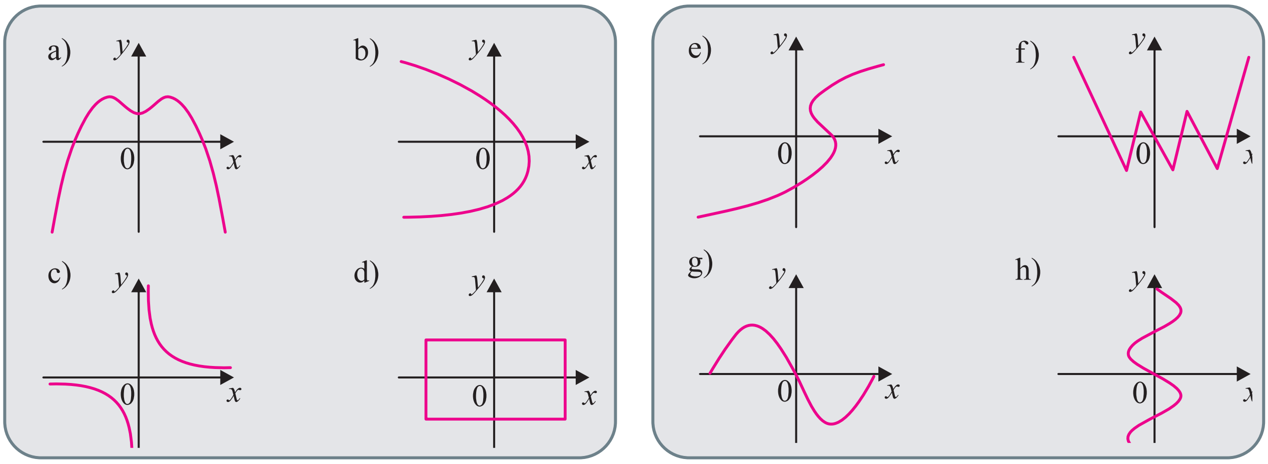
g) $f(t)=\sqrt[3]{t-1}$ h) $g(x)=\sqrt{7-3x}$ i) $f(x)=\sqrt{1-2x}$

3. Функцияға сәйкес графикті анықтаңдар.

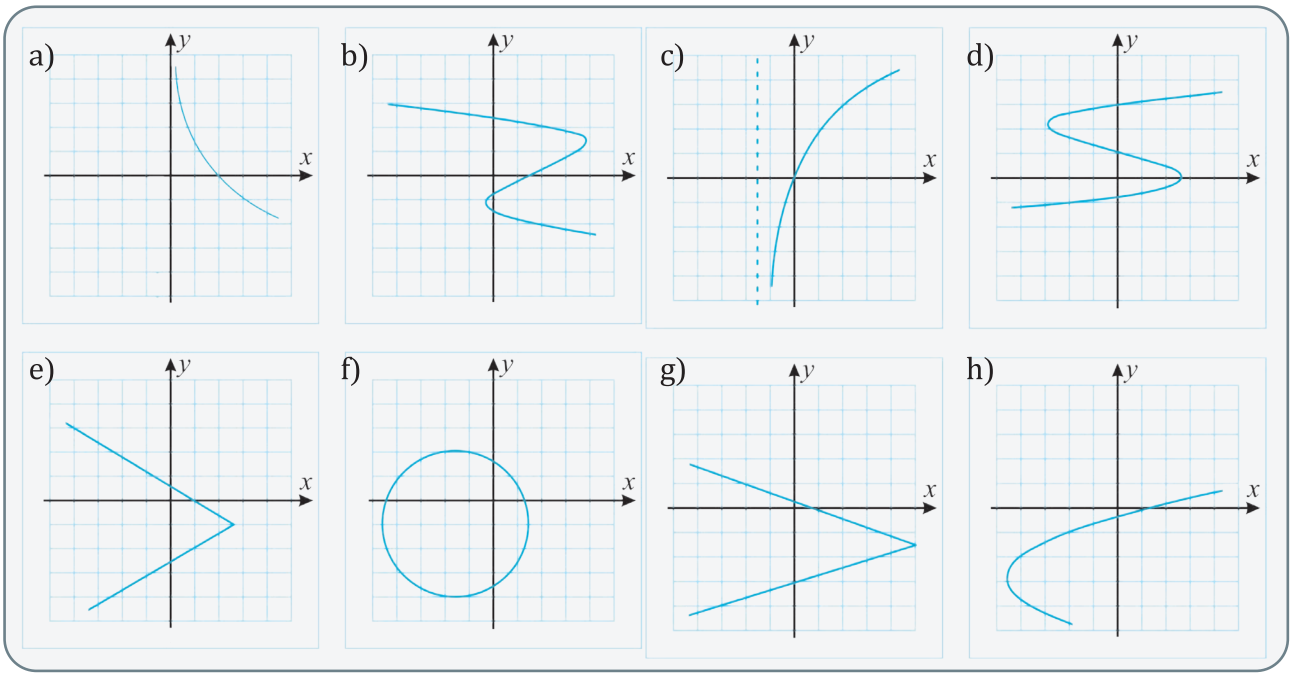
a) $f(x)=x^2$ b) $f(x)=x^3$ c) $f(x)=\sqrt{x}$ d) $f(x)=|x|$



4. Берілген қисықтардың қайсы бірі функцияның графигі болады?



5. Берілген қисықтардың қайсы бірі функцияның графигі болмайды?



6. Берілген функциялардың графигін салыңдар.

a) $f(x)=8x-x^2$ b) $g(x)=x^2-x-20$ c) $h(x)=x^3-5x-4$

7. Берілген функциялардың мәндер кестесін құрыңдар және графиктерін салыңдар.

a) $f(x)=-x^2$ b) $f(x)=x^2-4$ c) $g(x)=-(x+1)^2$

d) $r(x)=3x^4$ e) $r(x)=1-x^4$ f) $g(x)=x^3-8$

g) $k(x)=\sqrt[3]{-x}$ h) $k(x)=-\sqrt[3]{x}$ i) $f(x)=1+\sqrt{x}$

j) $C(t)=\dfrac{1}{t^2}$ k) $C(t)=-\dfrac{1}{t+1}$ l) $H(x)=|2x|$

m) $G(x)=|x|+x$ n) $G(x)=|x|-x$ o) $f(x)=|2x-2|$

ФУНКЦИЯЛАРҒА ҚОЛДАНЫЛАТЫН АРИФМЕТИК АМАЛДАР

Функцияларға қолданылатын арифметик амалдар

Функцияларға қосу (+), азайту (–), көбейту (·), бөлу (:) арифметикалық амалдарды қолдануға болады.

$f(x)$ және $g(x)$ функциялардың анықталу облысы сәйкесінше A және B жиындар болсын. Бұл функциялардың $A \cap B$ жиындағы ***қосындысы*** деп, әрбір $x \in A \cap B$ элементте $f(x) + g(x)$ мәнді қабылдайтын функцияға айтылады. $f(x)$ және $g(x)$ функциялардың қосындысы $(f + g)(x)$ деп белгіленеді. Демек,

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

Дәл солай $f(x)$ және $g(x)$ функциялардың ***айырымы, көбейтіндісі, бөліндісін*** анықтауға болады:

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Назар аудар!

1. $A \cap B = \varnothing$ болса, бұл амалдар анықталмайды.

2. Екі $f(x)$ және $g(x)$ функциялардың бөліндісін анықтағанда X -тен алынған әрбір x элемент үшін $g(x) \neq 0$ болуы талап етіледі.

МЫСАЛДАР

1-мысал. $f(x) = \frac{1}{x-2}$ және $g(x) = \sqrt{x}$ функциялар берілген.

a) $(f+g)(x), (f-g)(x), (f \cdot g)(x)$ және $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ функцияларды және олардың анықталу облысын табыңдар.

b) $(f+g)(4), (f-g)(4), (fg)(4)$ және $\left(\frac{f}{g}\right)(4)$ мәндерін табыңдар.

Шешуі: a) f тің анықталу облысы $x \neq 2$, ал g ның анықталу облысы $x \geq 0$. f және g -ның анықталу облыстарының қиылысуы $[0; 2) \cup (2; \infty)$ болады.

Арифметикалық амалдар төмендегідей орындалады:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{1}{x-2} + \sqrt{x}$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{1}{x-2} - \sqrt{x}$$

$$(f\cdot g)(x) = f(x)g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{(x-2)\sqrt{x}}.$$

b) $x = 4$ мәні әрбір жаңа функцияның анықталу облысына тиісті болғандықтан төмендегі мәндер анықталған:

$$(f+g)(4) = f(4)+g(4) = \frac{1}{4-2}+\sqrt{4} = \frac{5}{2}$$

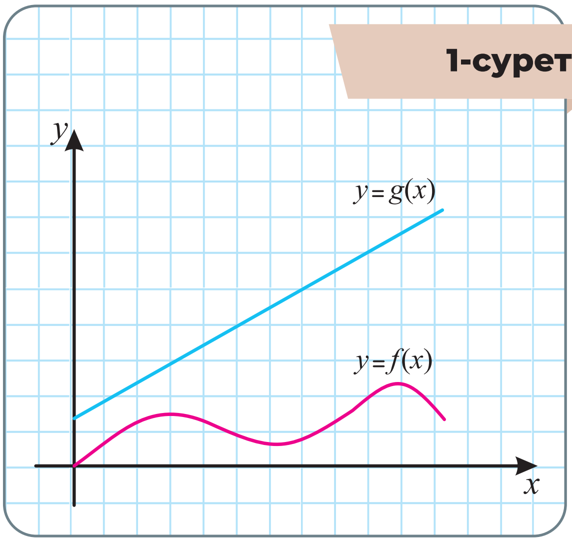
$$(f-g)(4) = f(4)-g(4) = \frac{1}{4-2}-\sqrt{4} = -\frac{3}{2}$$

$$(fg)(4) = f(4)g(4) = \left(\frac{1}{4-2}\right)\sqrt{4} = 1$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(4) = \frac{f(4)}{g(4)} = \frac{1}{(4-2)\sqrt{4}} = \frac{1}{4}.$$

2-мысал. Функцияларды графиктік тәсілде қосу.

f және g функциялардың графигі 1-суретте берілген. Графиктік тәсілде қосу көмегімен $f + g$ функцияның графигін салыңдар.



1-сурет

Шешуі. f функция графигі Oxy жазықтықта

$$\{(x, f(x)) : x \in D(f)\}$$

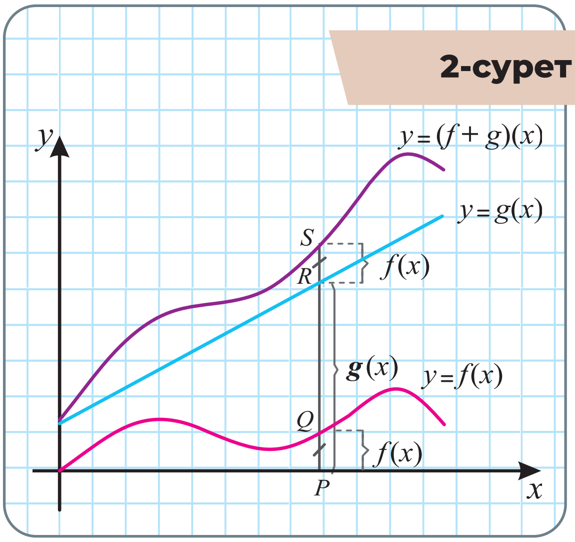
жиынынан, g функцияның графигі

$$\{(x, g(x)) : x \in D(g)\}$$

жиынынан тұрады. f және g функцияларды графиктік тәсілмен қосу нәтижесінде мына жиын келіп шығады:

$$\{(x, f(x) + g(x)) : x \in D(f) \cup D(g)\}.$$

$f + g$ функция графигінің S нүктесін салу үшін PR кесіндінің жоғары жалғасына PQ кесіндінің нұсқасы ($PQ=RS$) көшірілген.



2-сурет

МЫСАЛДАР

1. Функцияларды қосыңдар және азайтыңдар.

a) $f(x) = 5x+1,\ g(x) = -2x$

b) $f(x) = -3x+3,\ g(x) = -5x+4$

c) $f(x) = 2x+1,\ g(x) = -5x+3$

d) $f(x) = -3x^2+7x,\ g(x) = 2x+4$

2. Функцияларды көбейтіңдер.

a) $f(x) = -x^2$, $g(x) = -3x + 1$

b) $f(x) = -3x^2 + 3$, $g(x) = -x$

c) $f(x) = -x + 3$, $g(x) = 5x + 6$

d) $f(x) = -4x + 5$, $g(x) = -3x + 1$

3. $(f+g)(x), (f-g)(x), (f \cdot g)(x)$ және $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ функцияларды және олардың анықталу облысын табыңдар.

a) $f(x) = x$, $g(x) = 2x$

b) $f(x) = x$, $g(x) = \sqrt{x}$

c) $f(x) = x^2 + x$, $g(x) = x^2$

d) $f(x) = 3 - x^2$, $g(x) = x^2 - 4$

e) $f(x) = 5 - x$, $g(x) = x^2 - 3x$

f) $f(x) = x^2 + 2x$, $g(x) = 3x^2 - 1$

g) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$, $g(x) = \sqrt{x + 3}$

h) $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$, $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

i) $f(x) = \frac{2}{x}$, $g(x) = \frac{4}{x + 4}$

j) $f(x) = \frac{2}{x + 1}$, $g(x) = \frac{x}{x + 1}$

4. Функцияның анықталу облысын табыңдар.

a) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{3 - x}$

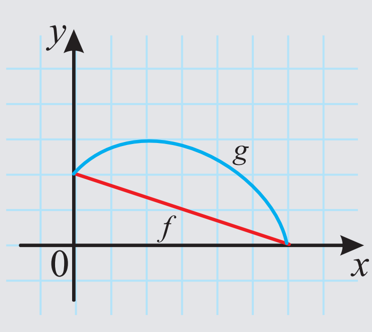
b) $f(x) = \sqrt{x + 4} - \frac{\sqrt{1 - x}}{x}$

c) $h(x) = (x - 3)^{-\frac{1}{4}}$

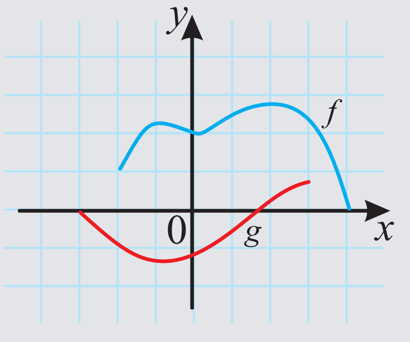
d) $k(x) = \frac{\sqrt{x + 3}}{x - 1}$

5. Функциялар графиктік тәсілде берілген $f + g$ функцияның графигін салыңдар (3-4-*суреттер*).

3-сурет



4-сурет



КҮРДЕЛІ, КЕРІ, ПЕРИОДТЫ ФУНКЦИЯЛАР

Күрделі функция

Функцияларды тізбектеп қолдану нәтижесінде айнымалылардың жаңа тәуелділіктері пайда болады. Егер X жиында $y = f(x)$ функция берілген, x аргумент T жиында анықталған қандай да бір $x = g(t)$ функция болса, онда T жиында $y = f(g(t))$ ***күрделі функция*** анықталған деп аталады.

Мысалы, $y = 2x^2-3x$ функция $X = (-\infty; +\infty)$ жиында, ал $x=\sqrt{t}$ функция $T=[0;+\infty)$ жиында берілген болсын. Онда $y=2t-3\sqrt{t}$ функция $T=[0;+\infty)$ жиында $y=2x^2-3x$ және $x=\sqrt{t}$ функциялардың күрделі функциясы болады.

1-мысал. $f(x)=x^2$ және $g(x)=x-3$ функциялар берілген:

a) $f(g(x))$ және $g(f(x))$ күрделі функцияларды және олардың анықталу облысын табыңдар;

b) $f(g(5))$ және $g(f(7))$ -ні табыңдар.

Шешуі. a) Төмендегі теңдіктер орынды:

g функцияның берілуіне орай $f(g(x)) = f(x-3)$,

f функцияның берілуіне орай $f(g(x)) = (x-3)^2$ болады.

f функцияның берілуіне орай $g(f(x)) = g(x^2)$,

g функцияның берілуіне орай $g(f(x)) = x^2-3$ болады.

$f(g(x))$ және $g(f(x))$ функциялардың анықталу облыстары нақты сандар жиыны.

b) Табылған күрделі функцияларда x тің орнына берілген мәнді қоямыз:

$f(g(5)) = (5-3)^2 = 2^2 = 4$, $g(f(7)) = 7^2 - 3 = 49 - 3 = 46$.

2-мысал. Егер $f(x)=\sqrt{x}$ және $g(x)=\sqrt{2-x}$ берілген болса, төмендегі функцияларды және олардың анықталу облысын табыңдар (1-*сурет*).

a) $f(g(x))$ b) $g(f(x))$

c) $f(f(x))$ d) $g(g(x))$

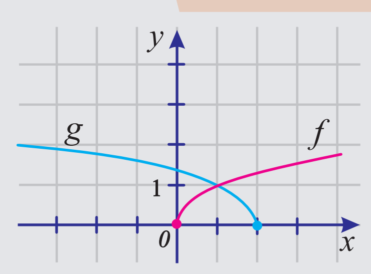
Шешуі. a) Күрделі функцияның анықтамасы және f пен g -ның берілуіне орай,

$$f(g(x)) = f\left(\sqrt{2-x}\right)=\sqrt{\sqrt{2-x}} = \sqrt[4]{2-x} \text{ болады.}$$

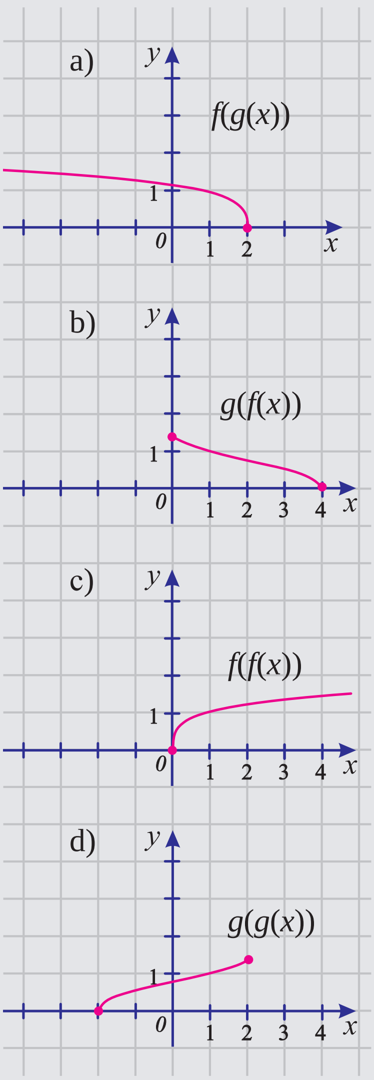
$\sqrt[4]{2-x}$ нің анықталу облысы $2-x\geq 0$. бұдан $x \leq 2$.

Демек, $f(g(x))$ -тің анықталу облысы $(-\infty; 2]$ аралықтан тұрады (2а-*сурет*).

1-сурет



2-сурет



b) f -тің берілуіне орай, $g(f(x)) = g\left(\sqrt{x}\right)$,

g -тің берілуіне орай , $g(f(x)) = \sqrt{2-\sqrt{x}}$ болады.

$\sqrt{x}$ -тің анықталу облысы: $x \geq 0$.

$\sqrt{2-\sqrt{x}}$ -тің анықталу облысы : $2-\sqrt{x} \geq 0$, бұдан

$\sqrt{x} \leq 2$ немесе $x \leq 4$. Демек, $0 \leq x \leq 4$ (2b-*сурет*).

c) f -тің берілуіне орай $f(f(x)) = f\left(\sqrt{x}\right)$,

f -тің берілуіне орай, $f(f(x)) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$ болады.

$\sqrt[4]{x}$ -тің анықталу облысы: $[0; \infty)$ (2c-*сурет*).

d) g -ның берілуіне орай, $g(g(x)) = g\left(\sqrt{2-x}\right)$,

g -ның берілуіне орай, $g(g(x)) = \sqrt{2-\sqrt{2-x}}$ болады.

$\sqrt{2-\sqrt{2-x}}$ тің анықталу облысы: $2-x \geq 0$ және $\sqrt{2-x} \leq 2$ Бұдан $x \leq 2$ және $x \geq -2 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$, демек, $g(g(x))$ -тің анықталу облысы: $[-2; 2]$ (2d-*сурет*).

3-мысал. $f(x)=\dfrac{x}{x+1}, g(x)=x^{10}$ және $h(x)=x+3$ болса,

$f(g(h(x)))$ -ті табыңдар.

Шешуі. h тың берілуіне орай
$f(g(h(x))) = f\left(g(x+3)\right)$, g -ның берілуіне орай,

$f(g(h(x))) = f\left((x+3)^{10}\right)$,

f -тің берілуіне орай $f(g(h(x))) = \dfrac{(x+3)^{10}}{(x+3)^{10}+1}$ болады.

4-мысал. $F(x)=\sqrt[4]{x+9}$ функция берілген. $F(x) = f(g(x))$болатын f және g функцияларға мысал келтіріңдер.

Шешуі. f және g функцияларды былайша алуға болады: $g(x)=x+9$ және $f(x)=\sqrt[4]{x}$.

Мұнда, g -ның берілуіне орай, $f(g(x)) = f(x+9)$ болып, f -тің берілуіне орай, $f(g(x)) = \sqrt[4]{x+9}$ болады.

Бұл тапсырма шартын қанағаттандыратын f және g функцияларын бір неше тәсілде таңдауға болады. Мысалға $f(x)=\sqrt{x}$ және $g(x)=\sqrt{x+9}$.

5-мысал. Күрделі функцияның қолданылуы.

Кеме 20 km/h тұрақты жылдамдықта жағаға параллел әрекеттенуде. Кеме маяктің тұсынан сағат 12:00 де, жағадан 5 km қашықтықта өтеді.

a) маяк және кеме арасындағы s қашықтықты кеменің сағат 12:00 ден кейін жүрген қашықтығы d ға тәуелді функциясы көрінісінде жазыңдар:

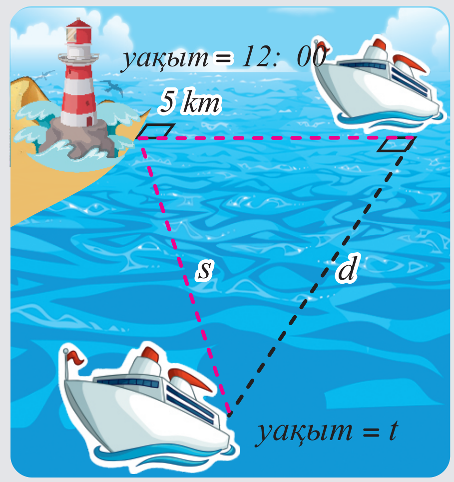
$$s=f(d).$$

b) d -ны сағат 12:00 ден кейін өткен уақыт t -ға тәуелді функция көрінісінде жазыңдар:

$$d=g(t).$$

c) $f(g(t))$ күрделі функцияны табыңдар. Бұл функция нені өрнектейді?

3-сурет



Шешуі. 3-суретке қараймыз.

a) s және d ара қашықтықтар арасындағы байланысты Пифагор теоремасынан табамыз, s -тің d -ға тәуелді функция екенін былайша өрнектейміз:

$$s=f(d)=\sqrt{25+d^2}.$$

b) кеме 20 km/h тұрақты жылдамдықта әрекеттенгені үшін d қашықтықтың t -ға тәуелді функциясын төмендегідей өрнектеуге болады:

$$d=g(t)=20t$$

көріністе функция арқылы өрнектеуіміз мүмкін

c) сонымен,

g -ның берілуіне орай, $f(g(t))=f(20t)$,

f -тің берілуіне орай, $f(g(t))=\sqrt{25+(20t)^2}$ болады. Мұндағы $f(g(t))$ функция кеме және маяк арасындағы қашықтықтың уақытқа тәуелді функциясын өрнектейді.

Кері функция

Егер $f(x)=y$ теңдеудің әрбір у үшін x -ке қатысты тек бір ғана $g(y)$ түбірі бар болса, онда сол x -ке y -ті сәйкес қою нәтижесінде $x=g(y)$ функцияны аламыз. Осы функция $y=f(x)$ функцияға кері функция деп аталады. $x=g(y)$ функция орнына әдеттегі белгілеулерге орай, $y=g(x)$ жазу қолданылады. $y=f(x)$ функцияға кері функция $y=f^{-1}(x)$ деп жазылады.

1-мысал. $y=3x-5$ функцияны қаралық. x ті y арқылы өрнектейміз:

$$3x-5=y \Rightarrow 3x=y+5 \Rightarrow x=\frac{y+5}{3}.$$

Соңғы теңдікте x және y тердің орындарын ауыстырып:

$$y=\frac{x+5}{3}$$

функцияны аламыз. Бұл $f^{-1}(x)=\dfrac{x+5}{3}$ функция $y=3x-5$ функцияға кері функция болады.

Ескерту. Берілген $y=f(x)$ функция және оған кері $y=f^{-1}(x)$ функция үшін $D\left(f^{-1}\right)=E(f)$ және $E\left(f^{-1}\right)=D(f)$ болады.

Назар аудар! $(f(x))^{-1}=\dfrac{1}{f(x)}$ болады, бұл теңдіктегі (-1) дәреже көрсеткіш. Ал $f^{-1}(x)$ жазудағы (-1) кері функцияны білдіреді. Жалпы айтқанда, $(f(x))^{-1} \neq f^{-1}(x)$. Мысалға, $f(x)=3x-5$ функция үшін $f^{-1}(x)=\dfrac{x+5}{3}$, ал $(f(x))^{-1}=\dfrac{1}{3x-5}$ болады.

2-мысал. Берілген функцияның кері функциясын табыңдар: $f(x)=\dfrac{x^5-3}{2}$.

Шешуі. Функцияны $y=\dfrac{x^5-3}{2}$ түрінде жазып аламыз және оны x -ке қатысты шешеміз.

$$y=\frac{x^5-3}{2}$$

$$2y=x^5-3$$

$$x^5=2y+3$$

$$x=\sqrt[5]{2y+3}.$$

Endi x және y тердің орындарын ауыстырамыз: $y=\sqrt[5]{2x+3}$. Демек, кері функция: $f^{-1}(x)=\sqrt[5]{2x+3}$.

3-мысал. Берілген функцияның кері функциясын табыңдар: $f(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}$.

Шешуі. Функцияны төмендегідей жазып аламыз: $y=\dfrac{2x+3}{x-1}$, және оны x -ті y арқылы өрнектейміз.

$$y=\frac{2x+3}{x-1}$$

$$y\cdot(x-1)=2x+3$$

$$yx-y=2x+3$$

$$yx-2x=y+3$$

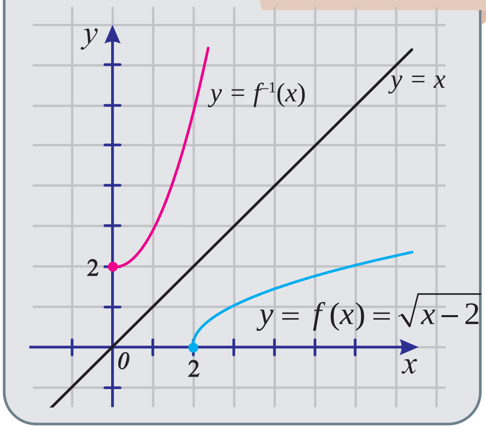
$$x\cdot(y-2)=y+3$$

$$x = \frac{y+3}{y-2}$$

Демек, $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{x-2}$ кері функция болады.

4-мысал. Кері функцияның графигін салу.

$f(x) = \sqrt{x-2}$ функцияның графигінен пайдаланып f^{-1} функцияның графигін салыңдар және оның аналитикалық өрнегін жазыңдар.



4-сурет

Шешуі.

1. $y = \sqrt{x-2}$ функцияның графигі 4-суретте келтірілген.

2. f^{-1} функцияның графигі f функцияны графигін $y = x$ түзуге қатысты симметриялы түрлендіру көмегімен салынады (4-*сурет*).

3. $y = \sqrt{x-2}$ өрнектен x ті y арқылы өрнектейміз, мұндағы $y \ge 0$ екенін ескереміз.

$$\sqrt{x-2} = y$$

$$x - 2 = y^2$$

$$x = y^2 + 2, \quad y \ge 0.$$

Енді x және y тердің орындарын ауыстырамыз: $y = x^2 + 2$, $x \ge 0$.

Демек, кері функция $f^{-1}(x) = x^2 + 2$ болады, мұндағы $x \ge 0$.

Бұл табылған $f^{-1}(x)$ кері функция графигі $y = x^2 + 2$ параболаның оң тармағынан тұрады. Мұны графиктен де көруге болады.

Периодты функциялар

$D(f)$ берілген $y = f(x)$ оның анықталу облысы болсын. $T \neq 0$ саны табылып әрбір $x \in D(f)$ үшін:

1. $x - T$ және $x + T$ лар $D(f)$ ке тиісті болып,

2. $f(x-T) = f(x) = f(x+T)$ теңдігі орындалса, онда $y = f(x)$ ***периодты функция*** деп аталады.

Егер T саны $y = f(x)$) функцияның периоды болса, онда әрбір n бүтін сан үшін nT саны да $y = f(x)$ функцияның периоды болады:

$$f(x + nT) = f(x), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

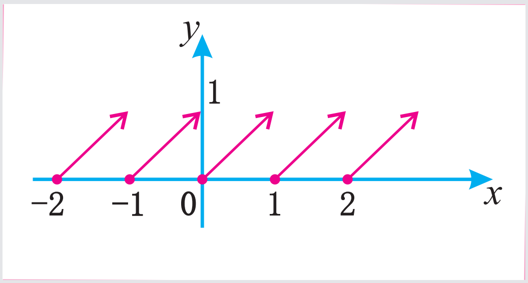
Ең кіші оң T период $f(x)$ функцияның ***негізгі периоды*** деп аталады.

Периодты функцияның графигін бір период аралығында салу жеткілікті, басқа период аралықтарында осы график қайталанады.

Мысалға, санның бөлшек бөлігі $\{x\}$ – берілген x санға оның бөлшек бөлігін сәйкес қоятын функция (5-*сурет*) – периодты функция болады. Оның негізгі периоды $T_0 = 1$, яғни кез келген $x \in (-\infty; +\infty)$ сан үшін $(x + 1) \in (-\infty; +\infty)$ және $\{x+1\} = \{x\}$ теңдік орынды болады.

Егер $y = f(x)$ функцияның негізгі периоды T_0 болса, онда $y = kf(ax+b)+c$ функцияның негізгі периоды $T_1 = \frac{T_0}{|a|}$ болады $(a \neq 0)$.

5-сурет



$y = \{x\}$ функция графигі

МЫСАЛДАР

1. $f(x) = 2x - 3$ және $g(x) = 4 - x^2$ екенінен пайдаланып күрделі функциялардың мәндерін табыңдар.

a) $f(g(0))$ b) $g(f(0))$ c) $f(f(2))$ d) $g(g(3))$

e) $f(g(-2))$ f) $g(f(-2))$ g) $f(f(-1))$ h) $g(g(-1))$

2. $f(g(x))$, $g(f(x))$, $f(f(x))$ және $g(g(x))$ функцияларды және олардың анықталу облысын табыңдар.

a) $f(x) = 2x+3$, $g(x) = 4x-1$ b) $f(x) = 6x-5$, $g(x) = \frac{x}{2}$

c) $f(x) = x^2$, $g(x) = x+1$ d) $f(x) = x^3+2$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$

e) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = 2x+4$ f) $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x-3}$

g) $f(x) = |x|$, $g(x) = 2x+3$ h) $f(x) = 4-x$, $g(x) = |x+4|$

i) $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $g(x) = 2x-1$ j) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $g(x) = x^2-4x$

k) $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $g(x) = \frac{1}{x}$ l) $f(x) = \frac{2}{x}$, $g(x) = \frac{x}{x+2}$

3. $f(x) = 3-x$ және $g(x) = x^2+1$ болса, функцияларды табыңдар.

a) $f(g(x))$ b) $g(f(x))$ c) $f(f(x))$ d) $g(g(x))$

4. $f(g(h(x)))$ күрделі функцияны табыңдар.

a) $f(x) = x-1$, $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = x-1$

b) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x^3$, $h(x) = x^2+2$

c) $f(x)=x^4+1,\ g(x)=x-5,\ h(x)=\sqrt{x}$

d) $f(x)=\sqrt{x},\ g(x)=\dfrac{x}{x-1},\ h(x)=\sqrt[3]{x}$

5. F(x) = $f(g(x))$теңдікті қанағаттандыратын f және g қарапайым функцияларға мысалдар келтіріңдер.

a) $F(x)=(x-9)^5$ b) $F(x)=\sqrt{x}+1$ c) $F(x)=\dfrac{x^2}{x^2+4}$

d) $F(x)=\dfrac{1}{x+3}$ e) $F(x)=\left|1-x^3\right|$ f) $F(x)=\sqrt{1+\sqrt{x}}$

6. Берілген f функцияға кері функцияны табыңдар.

a) $f(x)=3x+5$ b) $f(x)=7-5x$ c) $f(x)=5-4x^3$

d) $f(x)=3x^3+8$ e) $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ f) $f(x)=\dfrac{5}{x-6}$

g) $f(x)=\dfrac{3-4x}{8x-1}$ h) $f(x)=\dfrac{3x}{x-2}$ i) $f(x)=\dfrac{2x+5}{x-7}$

j) $f(x)=\sqrt{5+8x}$ k) $f(x)=2+\sqrt[3]{x}$ l) $f(x)=x^6,\ x\ge 0$

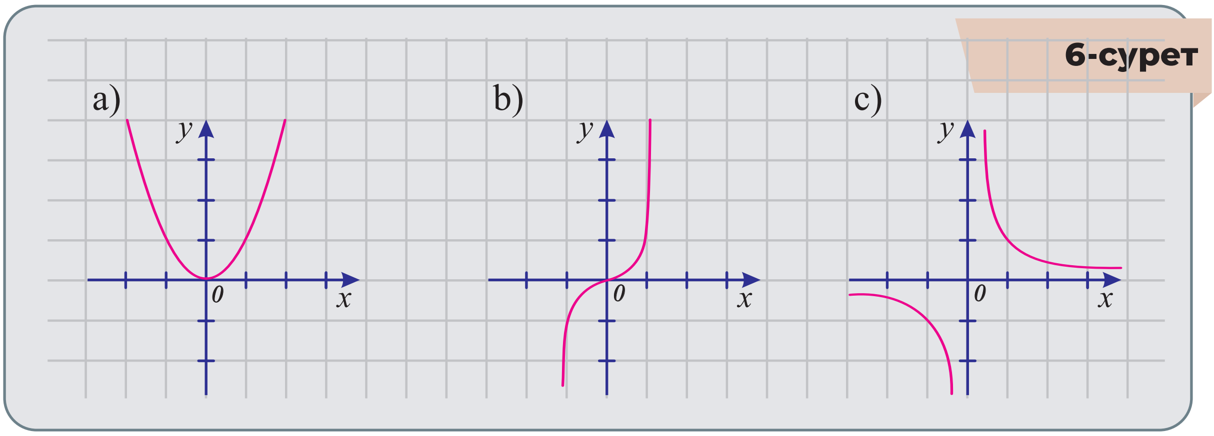
m) $f(x)=\dfrac{1}{x^2},\ x>0$ n) $f(x)=4-x^2,\ x\ge 0$ o) $f(x)=x^2+x,\ x\ge -\dfrac{1}{2}$

7. Берілген функцияға кері функцияны табыңдар. f функцияның графигінен пайдаланып кері функцияның графигін салыңдар.

a) $f(x)=3x-6$ b) $f(x)=16-x^2,\ x\ge 0$

c) $f(x)=\sqrt{x+1}$ d) $f(x)=x^3$

8. 6-суретте берілген графиктерге сәйкес функцияларды сұрыптаңдар және оларға сәйкес кері функциялардың графиктерін салыңдар: 1) $f(x)=x^3$; 2) $f(x)=\dfrac{1}{x}$; 3) $f(x)=x^2$



6-сурет

9. $T=\sqrt{2}$ сан $f(x)=5$ функцияның периоды болатындығын дәлелдеңдер.

10. Берілген функциялардың периодты еместігін көрсетіңдер.

a) $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$ b) $f(x)=-\dfrac{2}{x-2}$ c) $f(x)=\dfrac{x}{x}$

d) $f(x)=x^2-4$ e) $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x^2+5x+8}$ f) $f(x)=\sqrt[3]{x}+3x-1$

ФУНКЦИЯ ҚАСИЕТТЕРІ

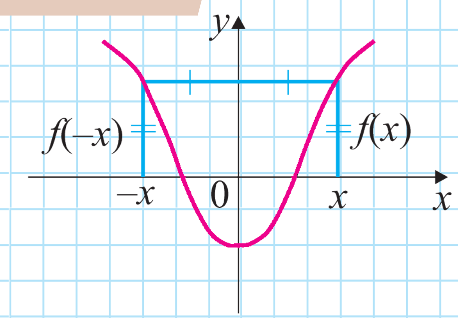
Жұп және тақ функциялар

Егер кез келген $x \in D(f)$ үшін $f(-x) = f(x)$ теңдік орындалса, онда $f(x)$ ***жұп функция*** деп аталады. Жұп функцияның графигі Oy осіне қатысты симметриялы болады (1-*сурет*).

Егер кез келген $x \in D(f)$ үшін $f(-x) = -f(x)$ теңдік орындалса, онда $f(x)$ ***тақ функция*** деп аталады. Тақ функцияның графигі координаталар басына қатысты симметриялы болады (2-*сурет*).

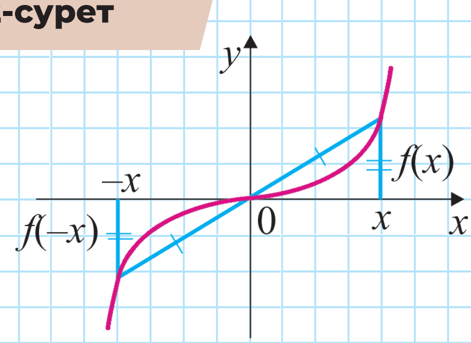
Егер жоғарыдағы екі теңдіктің біреуі де орындалмаса, онда $f(x)$ ***жұпта емес, тақта емес функция*** деп аталады.

1-сурет



$f(x)$ – жұп функция

2-сурет



$f(x)$ – тақ функция

1-мысал. $f(x) = 2x^2 + 5$ функцияны жұп немесе тақ екенін тексеріңдер.

Шешуі.

$f(x) = 2x^2 + 5$ функция үшін:

$$f(-x) = 2(-x)^2 + 5 = 2x^2 + 5 = f(x)$$

болғандықтан $f(x)$ функция жұп функция болады.

2-мысал. $f(x) = 2x^3 + 5x$ функцияны жұп немесе тақ екенін тексеріңдер.

Шешуі.

$f(x) = 2x^3 + 5x$ функция үшін:

$$f(-x) = 2(-x)^3 + 5(-x) = -\left(2x^3 + 5x\right) = -f(x)$$

болғандықтан $f(x)$ функция тақ функция болады.

3-мысал. $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x + 1$ функцияны жұп немесе тақ екенін тексеріңдер.

Шешуі.

$$f(-x) = 2(-x)^3 + 5(-x)^2 - 3(-x) + 1 =$$

$$= -\left(2x^3 - 5x^2 - 3x - 1\right)$$

Демек, $f(-x) \neq f(x)$, $f(-x) \neq -f(x)$, болып бұл функция жұп та емес, тақ та емес.

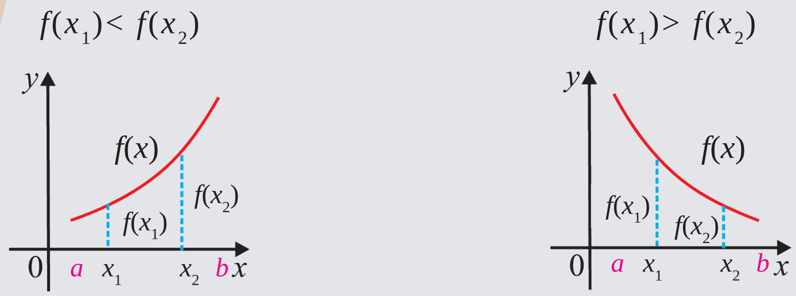
Функциялардың өсуі және кемуі.

$f(x)$ функция $(a;\ b)$ аралықта анықталған болып, $x_1 < x_2$ шартты қанағаттандыратын барлық $x_1, x_2 \in (a;\ b)$ лар үшін:

- $f(x_1) < f(x_2)$ болса, $f(x)$ функция $(a;\ b)$ аралықта өспелі;
- $f(x_1) > f(x_2)$ болса, $f(x)$ функция $(a;\ b)$ аралықта кемімелі;
- $f(x_1) \geq f(x_2)$ болса, $f(x)$ функция $(a;\ b)$ аралықта өспейтін;
- $f(x_1) \leq f(x_2)$ болса, $f(x)$ функция $(a;\ b)$ кемімейтін функция деп аталады.

Өспелі, кемімелі, өспейтін және кемімейтін функциялар жалпы атаумен ***бірсарынды функциялар*** деп аталады.

3-сурет



өспелі функция **кемімелі функция**

Функция экстремум нүктелері және экстремумдары

- Егер:

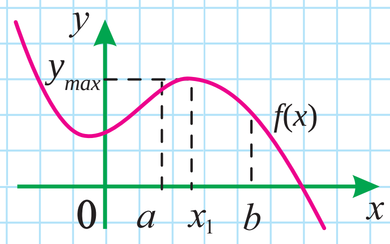
1) $f(x)$ функция x_1 нүкте тиісті болған қандай да бір $(a;\ b)$ интервалда анықталған;

2) $(a;\ b)$интервалдың x_1 -ден өзгеше барлық x нүктелерінде $f(x) < f(x_1)$ шарт орындалса, онда x_1 нүкте $f(x)$ ***функцияның максимум нүктесі*** деп аталады. (4-*сурет*).

Егер $x_1 \in D(f)$ нүкте $f(x)$ функция үшін максимум нүкте болса, онда $f(x)$ функцияның x_1 нүктедегі $f(x_1)$ мәні ***функцияның максимумы*** деп аталады және $y_{\max}$ деп белгіленеді. Демек,

$$y_{\max} = f(x_1).$$

4-сурет



$f(x)$ үшін $(a;\ b)$ интервалда x_1 – функцияның максимум нүктесі; $y_{max} = f(x_1)$ – функцияның максимумы.

- Егер:

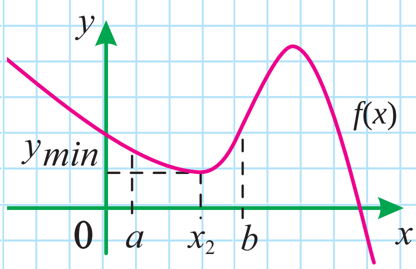
1) $f(x)$ функция x_2 тиісті болған қандай да бір $(a;\ b)$ интервалда анықталған;

2) $(a;\ b)$ интервалдың x_2 -ден өзгеше барлық x нүктелерінде $f(x) > f(x_2)$ шарт орындалса, онда x_2 нүкте $f(x)$ ***функцияның минимум нүктесі*** *деп аталады*. (5-*сурет*).

Егер $x_2 \in X$ нүкте $f(x)$ функция үшін минимум нүкте болса, онда $f(x)$ функцияның x_2 нүктедегі $f(x_2)$ мәні $f(x)$ ***функцияның минимумі*** деп аталады және $y_{\min}$ деп белгіленеді. Демек,

$$y_{\min} = f(x_2).$$

5-сурет



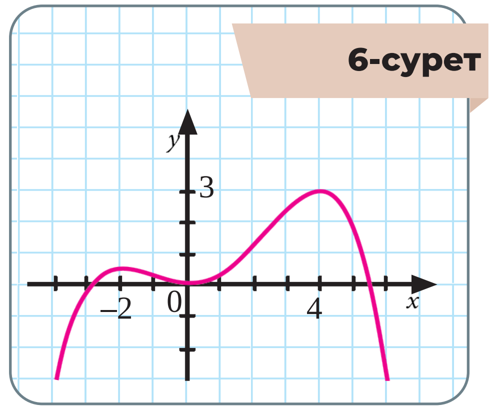
$f(x)$ үшін $(a;\ b)$ интервалда x_2 – функцияның минимум нүктесі; $y_{\min} = f(x_2)$ – функцияның минимумы.

Функцияның максимум және минимум нүктелері **экстремум нүктелер** деп аталады.

4-мысал. $f(x)$ функцияның графигі 6-суретте келтірілген. Функцияның өсу, кему аралықтарын табыңдар.

Шешуі.

$f(x)$ функцияның графигінен, функция $(-\infty;-2]$ және $[0;\ 4]$ аралықтарды өспелі $[-2;\ 0]$ және $[4;\infty)$ аралықтарда кемімелі екенін анықтаймыз.



6-сурет

МЫСАЛДАР

1. Берілген функциялардың жұп немесе тақ екенін тексеріңдер.

a) $f(x)=x^4$ b) $f(x)=x^3$

c) $f(x)=x^2+x$ d) $f(x)=x^4-4x^2$

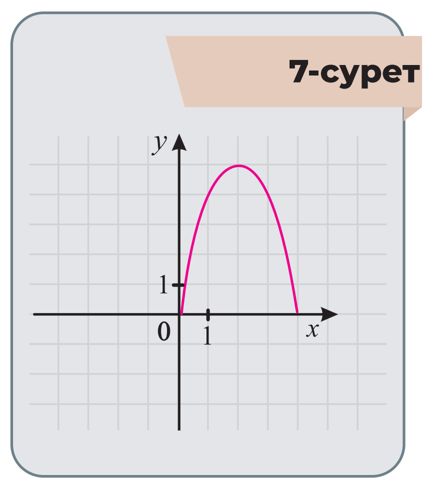
e) $f(x)=x^3-x$ f) $f(x)=3x^3+2x^2+1$

g) $f(x)=1-\sqrt[3]{x}$ h) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$

2. 7-суретте $x\geq 0$ облыс үшін функцияның графигі берілген. $x<0$ облысқа графикті жалғастырыңдар, нәтижеде ол:

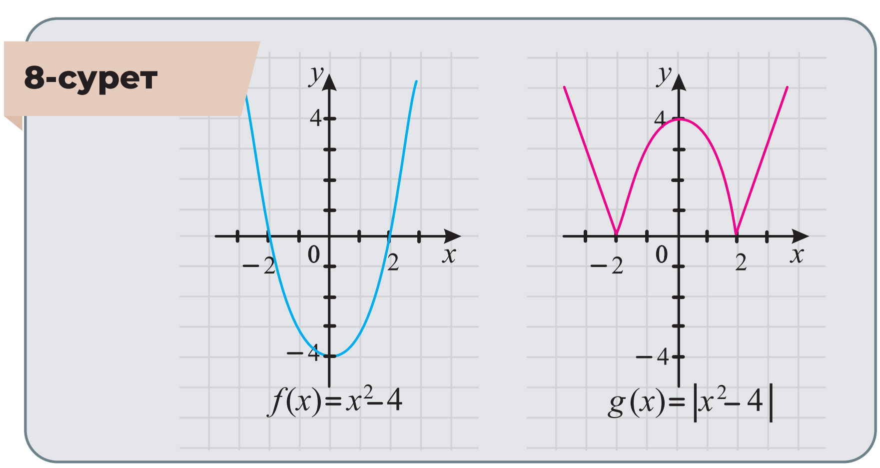
1) жұп функция;

2) тақ функция графигі болсын.



7-сурет

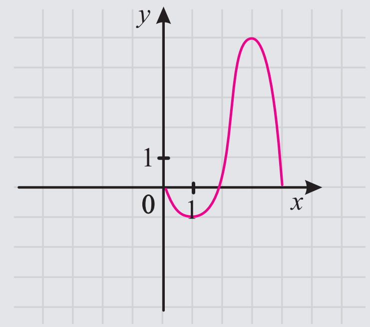
3. 8-суретте $f(x)=x^2-4$ және $g(x)=|x^2-4|$ функциялардың графиктері берілген. $g(x)$ функцияның графигі $f(x)$ функцияның графигінен қандай алынғанын түсіндіріңдер.



8-сурет

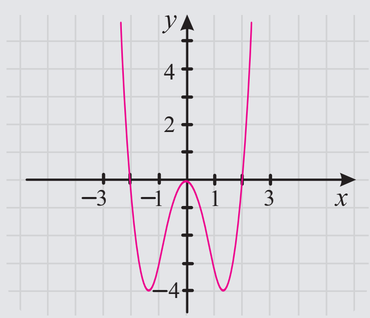
4. 9-суретте $x \geq 0$ облыс үшін функцияның графигі берілген. $x < 0$ облыста графикті мынадай жалғастырыңдар,
1) жұп функция графигі болсын;
2) тақ функция графигі болсын.

9-сурет

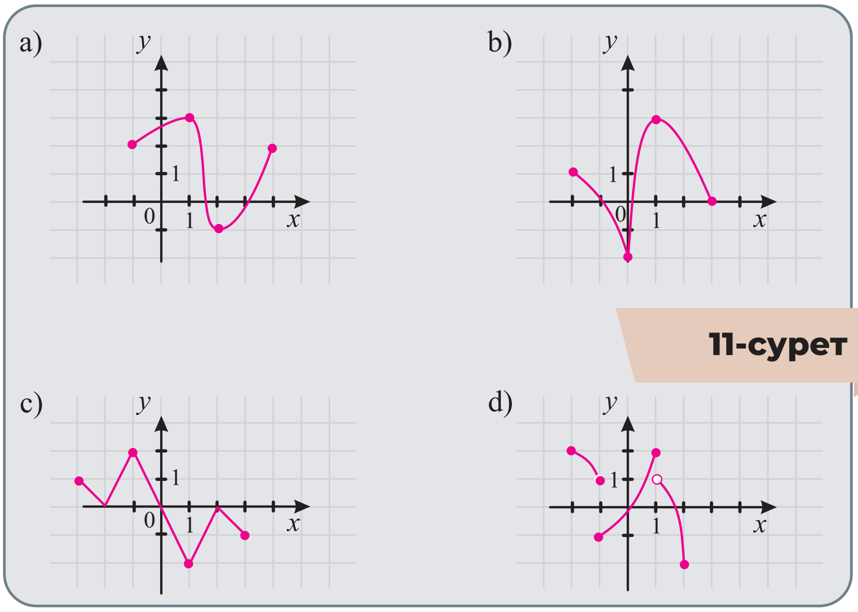


5. $f(x) = x^4 - 4x^2$ функцияның графигі берілген (10-*сурет*). Осыдан пайдаланып, $g(x) = |x^4 - 4x^2|$ функцияның графигін салыңдар.

10-сурет



6. 11-суретте f функцияның графигі берілген. Бұл графиктен пайдаланып төмендегілерді анықтаңдар:
1) f функцияның анықталу облысын және мәндер жиынын.
2) f тің өсу және кему аралықтарын.



11-сурет

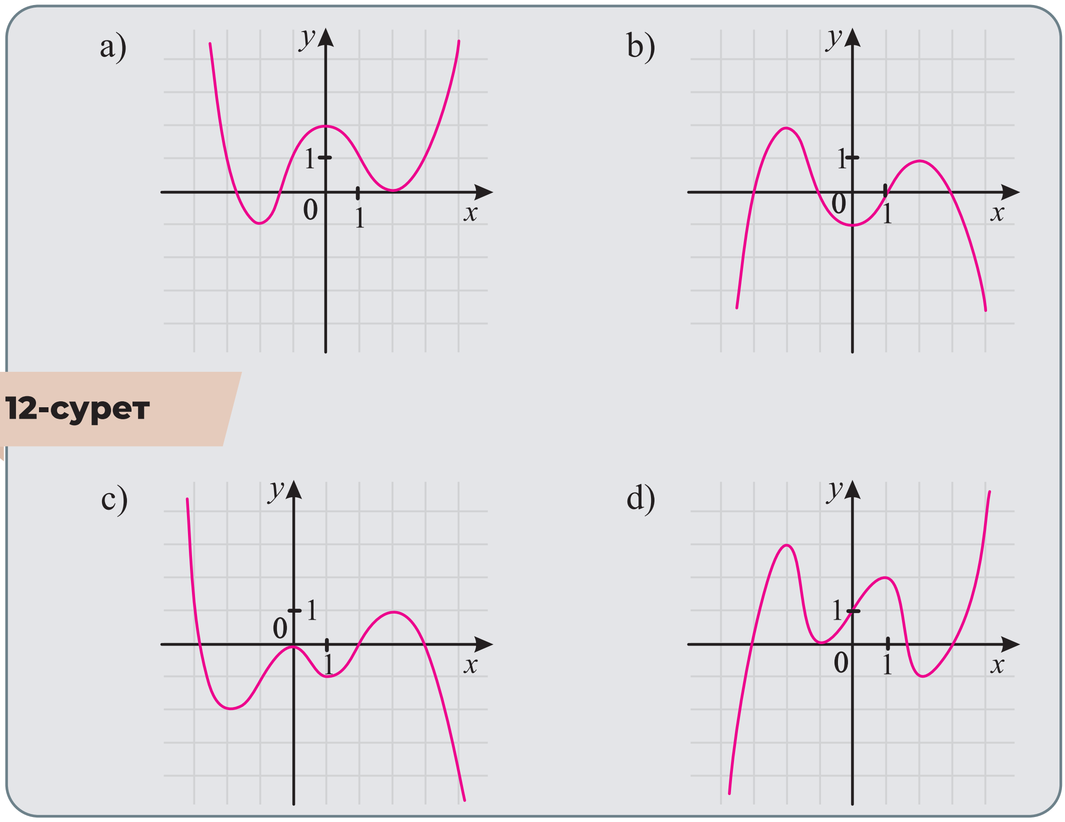
7. Берілген функциялардың графигін салыңдар, анықталу облысын және мәндер жиынын анықтаңдар, өсу және кему аралықтарын шамамен табыңдар.

a) $f(x)=x^2-5x$ b) $f(x)=x^3-4x$ c) $f(x)=x^4-16x^2$

8. f функцияның графигі 12-суретте берілген. Бұл графиктен пайдаланып төмендегілерді шамамен анықтаңдар:

1) функцияның барлық экстремум нүктелерін және экстремумдерін;

2) функцияның өсу және кему аралықтарын



12-сурет

9. Төмендегі мәліметтерге негізделіп, функция графигінің эскизін салыңдар.

a) $(-\infty;3]$ де кемиді, $[3;+\infty)$ де өседі;

b) $(-\infty;0]\cup[1;+\infty)$ де кемиді, $[0;1]$ де тұрақты;

c) $(-\infty;-6]$ де кемиді, $[-6;0]$ де өседі, $[0;+\infty)$ де тұрақты;

d) $[-5;10]$ да өседі, $[10;+\infty)$ тұрақты және $x=-5$ те ең кіші мәнін қабылдайды.

ФУНКЦИЯ ГРАФИКТЕРІН ҚАРАПАЙЫМ ТҮРЛЕНДІРУЛЕР

Функция графигін көшіру

Берілген $f(x)$ функцияның графигін Oxy жазықтығында көшіруге болады. Функция графигінің төмендегі көшірулерін қарастырамыз.

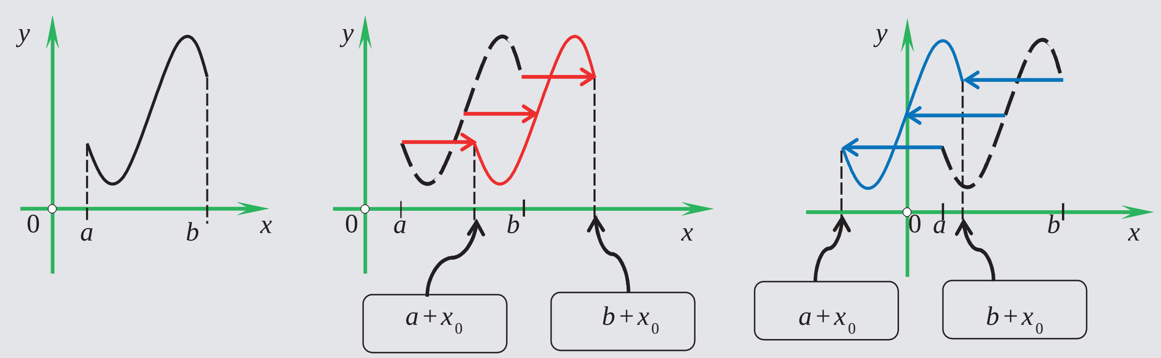
1. Функция графигін Ox осі бойлап көшіру.
2. Функция графигін Oy осі бойлап көшіру.
3. Функция графигін қандай да бір вектор бағытында көшіру.

1. Функция графигін Ox осі бойлап x_0 бірлікке көшіру (1-*сурет*).

a) егер $x_0>0$ болса, график Ox осі бағытында x_0 бірлікке көшеді.

b) егер $x_0<0$ болса, график Ox осі бағытына қарсы $|x_0|$ бірлікке көшеді.

1-сурет **$y=f(x)$ функция графигін Ox осі бойлап көшіру**



a) берілген $y=f(x)$ функция графигі

b) $x_0>0$ болғанда $y=f(x-x_0)$ функция графигі; $y=f(x)$ функция графигі оңға x_0 бірлік көшкен.

c) $x_0<0$ болғанда $y=f(x-x_0)$ функция графигі; $y=f(x)$ функция графигі солға $|x_0|$ бірлік көшкен

1-мысал. $f(x)=x^2$ функция графигінен пайдаланып, төмендегі функциялардың графиктерін салыңдар.

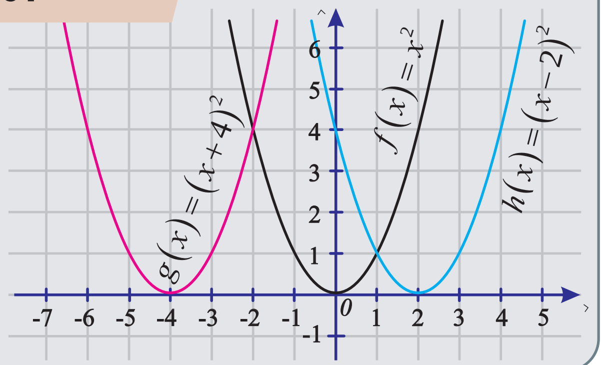
a) $g(x)=(x+4)^2$ b) $h(x)=(x-2)^2$

Шешуі. 2-суретте көрсетілгендей,

a) g функцияның графигін салу үшін, f функцияның графигін солға 4 бірлікке көшіреміз.

b) h функцияның графигін салу үшін, f функцияның графигін оңға 2 бірлікке көшіреміз.

2-сурет



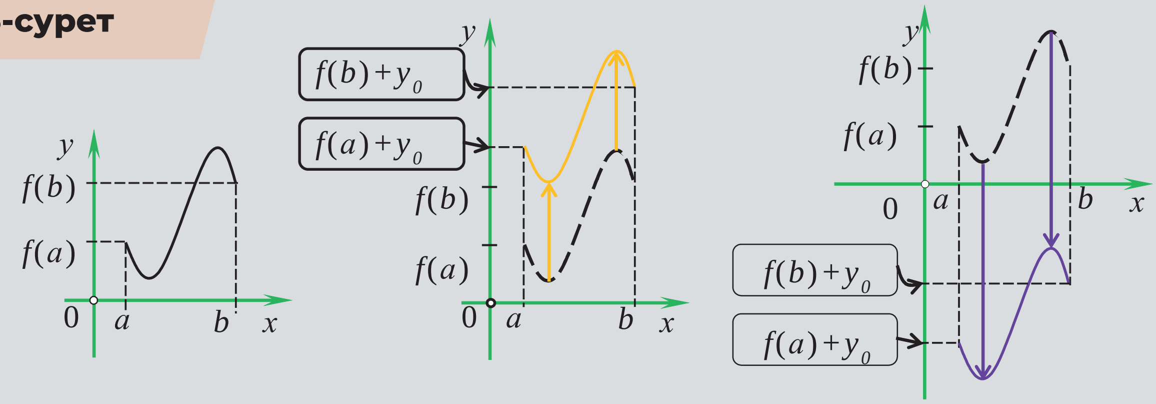
2. Функция графигін Oy осі бойлап y_0 бірлікке көшіру (3-*сурет*)

a) егер $y_0>0$ болса, график Oy осі бағытында y_0 бірлікке көшеді;

b) егер $y_0<0$ болса, график Oy осі бағытына қарсы $|y_0|$ бірлікке көшеді (3-*сурет*).

3-сурет

$y = f(x)$ функция графигіні Oy осі бойынша жылжыту.



a) Берілген $y = f(x)$ функция графигі.

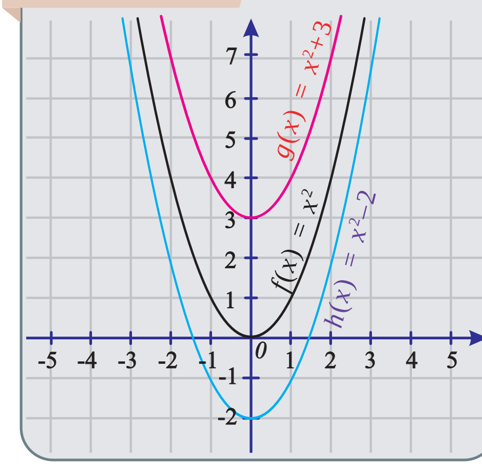
b) $y_0>0$ болғанда $y = f(x)+y_0$ функция графигі. $y = f(x)$ функция графигі жоғарыға y_0 бірлікке көшкен.

c) $y_0<0$ болғанда $y = f(x)+y_0$ функция графигі. $y = f(x)$ функция графигі төменге $|y_0|$ бірлікке көшкен.

2-мысал. $f(x) = x^2$ функция графигінен пайдаланып, төмендегі функциялардың графигін салыңдар.

a) $g(x)=x^2+3$ b) $h(x)=x^2-2$

4-сурет



Шешуі.

a) Төмендегіге назар аударыңдар:

$$g(x)=x^2+3=f(x)+3$$

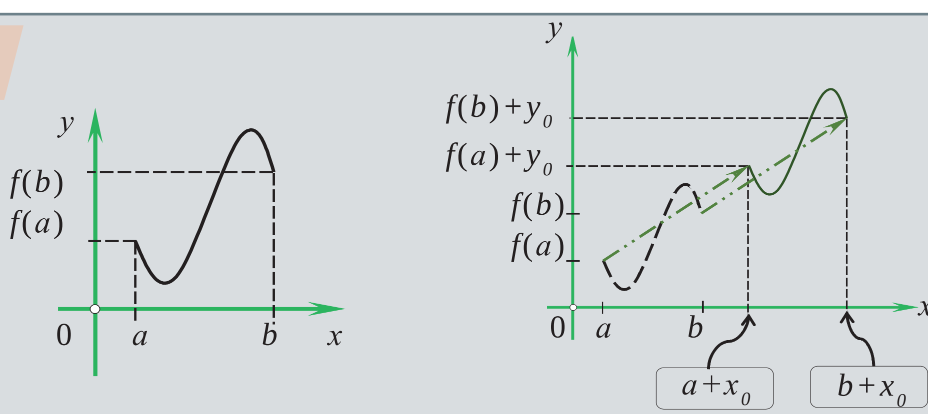
Демек, 4-суретте көрсетілгендей g функцияның графигін салу үшін, f функцияның графигін жоғарыға 2 бірлікке көшіреміз.

b) Дәл солай, h функцияның графигін салу үшін, f функцияның графигін төменге бірлікке көшіреміз.

3. Функция графигін әрі Ox, әрі Oy остері бойынша көшіру (5-*сурет*).

$y=f(x-x_0)+y_0$ функция графигін салу үшін $y=f(x)$ функция графигін Ox осі бойынша x_0 бірлікке, ал Oy осі бойынша y_0 бірлікке көшіру жеткілікті.

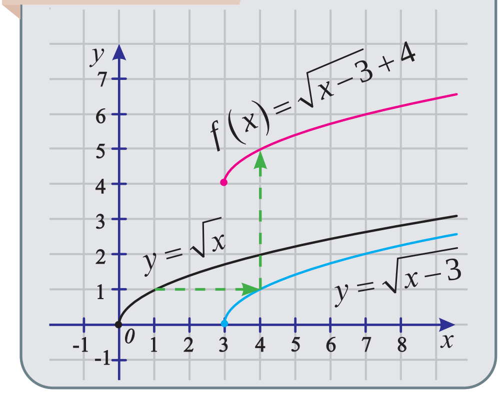
5-сурет



3-мысал. $f(x)=\sqrt{x-3}+4$ функцияның графигін салыңдар.

Шешуі

Графикті $y=\sqrt{x}$ функцияның графигін салудан бастаймыз. Оны 3 бірлікке оңға көшіреміз, нәтижеде $y=\sqrt{x-3}$ функцияның графигін аламыз. Кейін бұл графикті 4 бірлікке жоғарыға көшіріп $f(x)=\sqrt{x-3}+4$ функцияның графигін аламыз (6-*сурет*).



6-сурет

Функция графиктерін сығу және созу

Берілген $f(x)$ функция графигін Oxy жазықтығынды деформациялауға (сығу немесе созу) болады. Екі маңызды жағдайларды қарастырамыз.

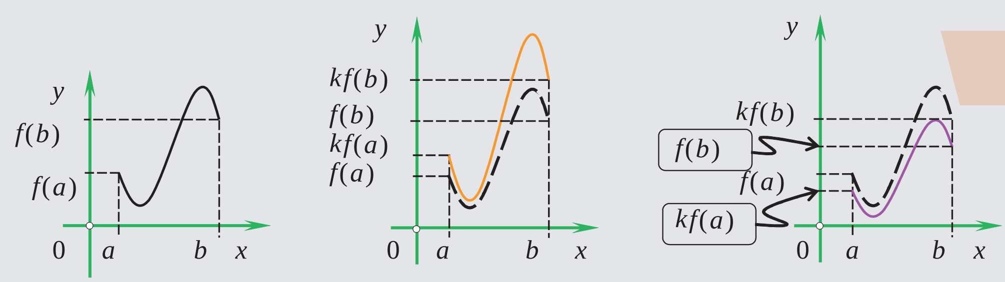
1-жағдай. Берілген $y = f(x)$ функция графигінен пайдаланып, $y = kf(x)$ функция графигі былайша салынады:

a) егер $k>1$ болса, график Ox осінен Oy осі бойынша κ есе созылады.

b) егер $0<k<1$ болса, график Ox осінен Oy осі бойынша $\frac{1}{k}$ есе сығылады.

c) егер $k<0$ болса, онда $y = kf(x)$ функция графигі $y = |k|f(x)$ функция графигінің Ox осіне қатысты симметриялы образы болады.

$y = kf(x)$ функция графигін салу



7-сурет

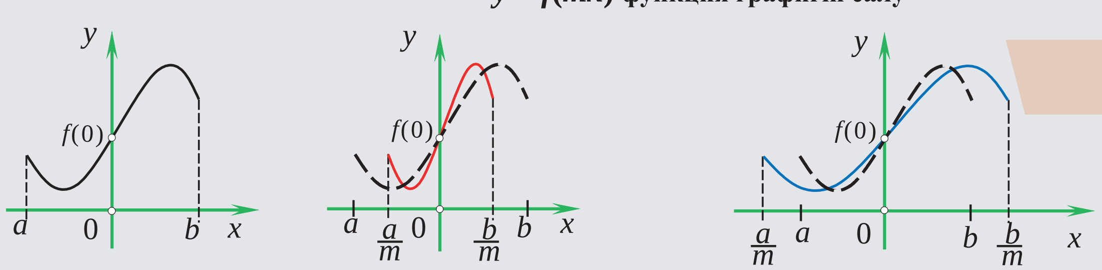
2-жағдай. Берілген $y = f(x)$ функция графигінен пайдаланып $y = f(mx)$ функция графигі былайша салынады (8-*сурет*):

a) егер $m>1$ болса, график Oy осіне Ox осі бойлап m есе сығылады;

b) егер $0<m<1$ болса, график Oy осінен Ox осі бойлап $\frac{1}{m}$ есе созылады.

c) егер $m<0$ болса, онда $y = f(mx)$ функцияның графигі $y = f(|m|x)$ функция графигіне Oy оске қатысты симметриялы образы болады.

$y = f(mx)$ функция графигін салу



8-сурет

4-мысал. Төмендегі функцияның графигін салыңдар.

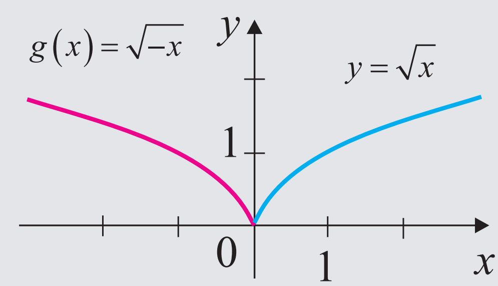
$$g(x)=\sqrt{-x}$$

Шешуі.

9-суретте $y=\sqrt{x}$ функцияның графигіні сызамыз. Бұл графикті y осіне қатысты симметриялы ауыстырып, $g(x)=\sqrt{-x}$ функцияның графигі салынады.

Назар аудар: $g(x)=\sqrt{-x}$ функцияның анықталу облысы: $x\leq 0$ болады.

9-сурет



5-мысал. 10-суретте $f(x)=x^2$ функцияның графигі берілген, осыдан пайдаланып төмендегі функциялардың графигін салыңдар.

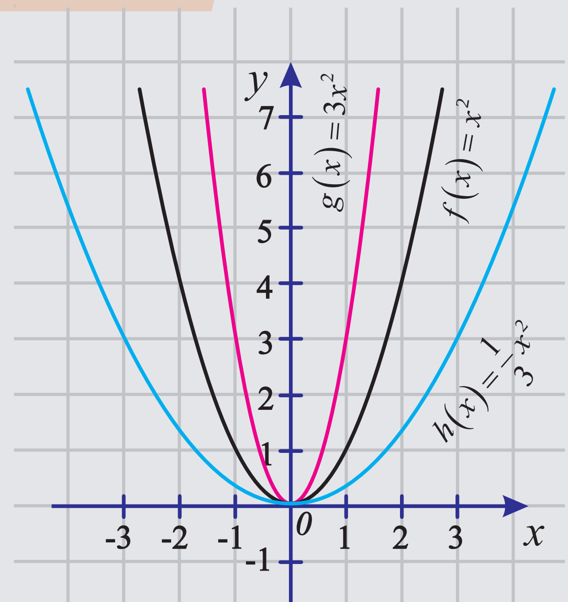
a) $g(x)=3x^2$ b) $h(x)=\frac{1}{3}x^2$

Шешуі.

a) g функцияның графигі f функцияның әрбір нүктесінің y координатасын 3 -ке көбейтуден пайда болады. Яғни, g функцияның графигін алу үшін, f функцияның графигін вертикал 3 есе созу керек.

b) h функцияның графигі f функцияның әрбір нүктесінің y координатасын $\frac{1}{3}$ ге көбейтуден пайда болады. Яғни, h функцияның графигін алу үшін f функцияның графигін вертикал бағытта Ox оске 3 есе сығу қажет.

10-сурет

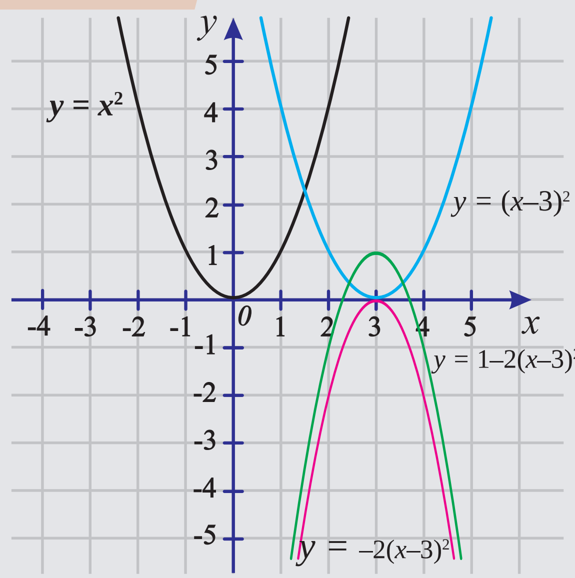


6-мысал. $f(x)=1-2(x-3)^2$ функцияның графигін салыңдар.

Шешуі.

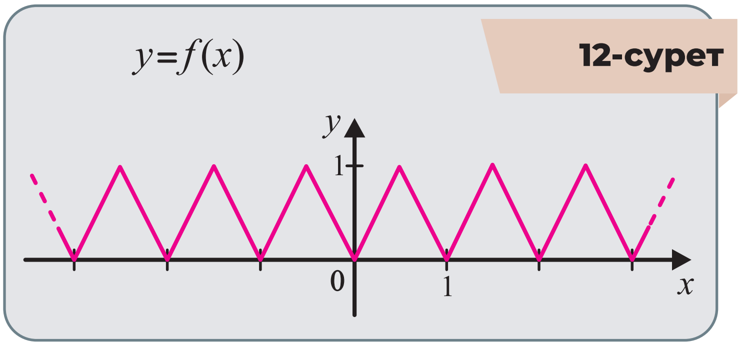
Алдымен $y=x^2$ функцияның графигін оңға 3 бірлікке горизонтал көшіреміз және $y=(x-3)^2$ функцияның графигін аламыз. Кейін бұл графикті Ox осіне қатысты симметриялы түрлендіреміз. Oy осі бойынша 2 есе созуды орындаймыз, нәтижеде $y=-2(x-3)^2$ функцияның графигін аламыз. Соң бұл графикті жоғарыға 1 бірлікке көшіріп, $f(x)=1-2(x-3)^2$ функцияның графигін аламыз. (11-*сурет*).

11-сурет



7-мысал. 12- суретте $y=f\left(x\right)$ функцияның графигі берілген. Бұл графиктен пайдаланып, төмендегі функциялардың графигін салыңдар.

a) $y=f\left(2x\right)$; b) $y=f\left(\frac{1}{2}x\right)$.

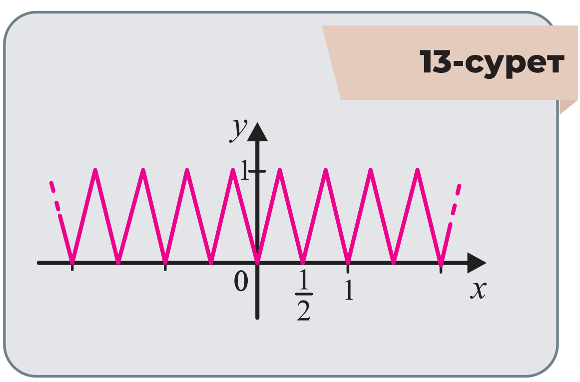


12-сурет

Шешуі

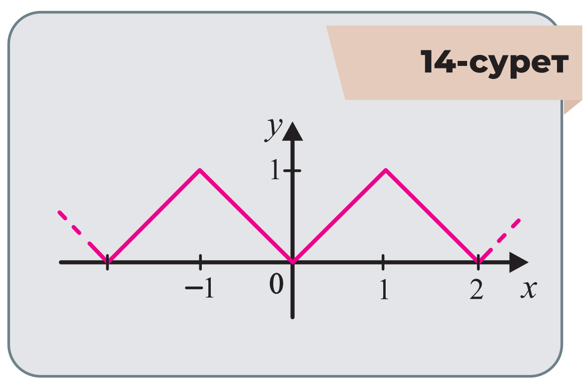
a) $y=f\left(2x\right)$ функция графигін салу үшін $f(x)$ функция графигін Oy осіне Ox осі бойынша 2 есе сығамыз (13-*сурет*).

b) $y=f\left(\frac{1}{2}x\right)$ функция графигиін салу үшін $f(x)$ функция графигін Oy осіне Ox осі бойынша 2 есе созамыз (14-*сурет*).



13-сурет

$y=f\left(2x\right)$



14-сурет

$y=f\left(\frac{1}{2}x\right)$

МЫСАЛДАР

1. $f(x)$ функция графигі берілген болса, төмендегі функциялардың графигін қандай салуды түсіндіріңдер.

a) $y=f\left(x\right)-1$ b) $y=f\left(x-2\right)$ c) $y=f\left(\frac{1}{4}x\right)$

d) $y=f\left(x\right)+4$ e) $y=f\left(-x\right)$ f) $y=3f\left(x\right)$

g) $y=-f\left(x\right)$ h) $y=\frac{1}{3}f\left(x\right)$ i) $y=f\left(x-5\right)+2$

j) $y=f\left(x+1\right)-1$ k) $y=4f\left(x+1\right)+3$ l) $y=f\left(4x\right)$

m) $y=-f\left(x\right)+5$ n) $y=3f\left(x\right)-5$ o) $y=1-f\left(-x\right)$

2. g функцияның графигин f функцияның графигінен қандай түрлендірулер көмегімен алуға болатындығын түсіндіріңдер.

a) $f(x)=x^2,\ \ g(x)=(x+2)^2$ b) $f(x)=x^2,\ \ g(x)=x^2+2$

c) $f(x)=x^3,\ \ g(x)=(x-4)^3$ d) $f(x)=x^3,\ \ g(x)=x^3-4$

e) $f(x)=|x|,\ \ g(x)=|x+2|-2$ f) $f(x)=|x|,\ \ g(x)=|x-2|+2$

g) $f(x)=\sqrt{x},\ \ g(x)=-\sqrt{x}+1$ h) $f(x)=\sqrt{x},\ \ g(x)=\sqrt{-x}+1$

3. $y=x^2$ функцияның графигінен пайдаланып, төмендегі функциялардың графигін салыңдар.

a) $g(x)=x^2+1$ b) $g(x)=(x-1)^2$

c) $g(x)=-x^2$ d) $g(x)=(x-1)^2+3$

4. $y=\sqrt{x}$ функцияның графигінен пайдаланып, төмендегі функциялардың графигін салыңдар.

a) $g(x)=\sqrt{x-2}$ b) $g(x)=\sqrt{x}+1$

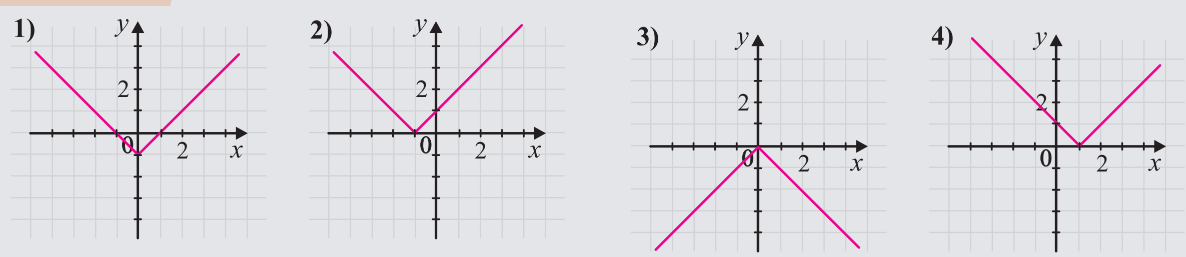
c) $g(x)=\sqrt{x+2}+2$ d) $g(x)=-\sqrt{x}+1$

5. Берілген функцияларға 15-суретте берілген графиктерден сәйкесін табыңдар.

a) $y=|x+1|$ b) $y=|x|-1$

c) $y=|x-1|$ d) $y=-|x|$

15-сурет



6. Төмендегі функциялардың графиктерін стандарт функцияның графигінен сәйкес түрлендірулерді орындап салыңдар.

a) $f(x)=x^2+3$ b) $f(x)=\sqrt{x}+1$ c) $f(x)=|x|-1$

d) $f(x)=\sqrt{x}+1$ e) $f(x)=(x-5)^2$ f) $f(x)=(x+1)^2$

g) $f(x)=|x+2|$ h) $f(x)=\sqrt{x-4}$ i) $f(x)=-x^3$

j) $f(x)=-|x|$ k) $y=\sqrt[4]{-x}$ l) $y=\sqrt[3]{-x}$

m) $y=\dfrac{1}{4}x^2$ n) $y=-5\sqrt{x}$ o) $y=3|x|$

p) $y=\dfrac{1}{2}|x|$ q) $y=(x-3)^2+5$ r) $y=\sqrt{x+4}-3$

s) $y=3-\dfrac{1}{2}(x-1)^2$ t) $y=2-\sqrt{x+1}$ u) $y=|x+2|+2$

v) $y=2-|x|$ w) $y=\dfrac{1}{2}\sqrt{x+4}-3$ x) $y=3-2(x-1)^2$.

7. Берілген f функцияның графигіне төмендегі түрлендірулер қолданылған. Соңғы функцияның формуласын жазыңдар.

a) $f(x)=x^2$, 3 бірлік төменге көшіріңдер.

b) $f(x)=x^3$, 5 бірлік жоғарыға көшіріңдер.

c) $f(x)=\sqrt{x}$, 2 бірлік солға көшіріңдер.

d) $f(x)=\sqrt[3]{x}$, 1 бірлік оңға көшіріңдер.

e) $f(x)=|x|$, 2 бірлік солға және 5 бірлік төменге көшіріңдер.

f) $f(x)=|x|$, x осіне қатысты симметриялы алмастырып, 4 бірлік оңға және 3 бірлік жоғарыға көшіріңдер.

g) $f(x)=\sqrt[4]{x}$, y осіне қатысты симметриялы түрлендіріңдер және 1 бірлік жоғарыға көшіріңдер.

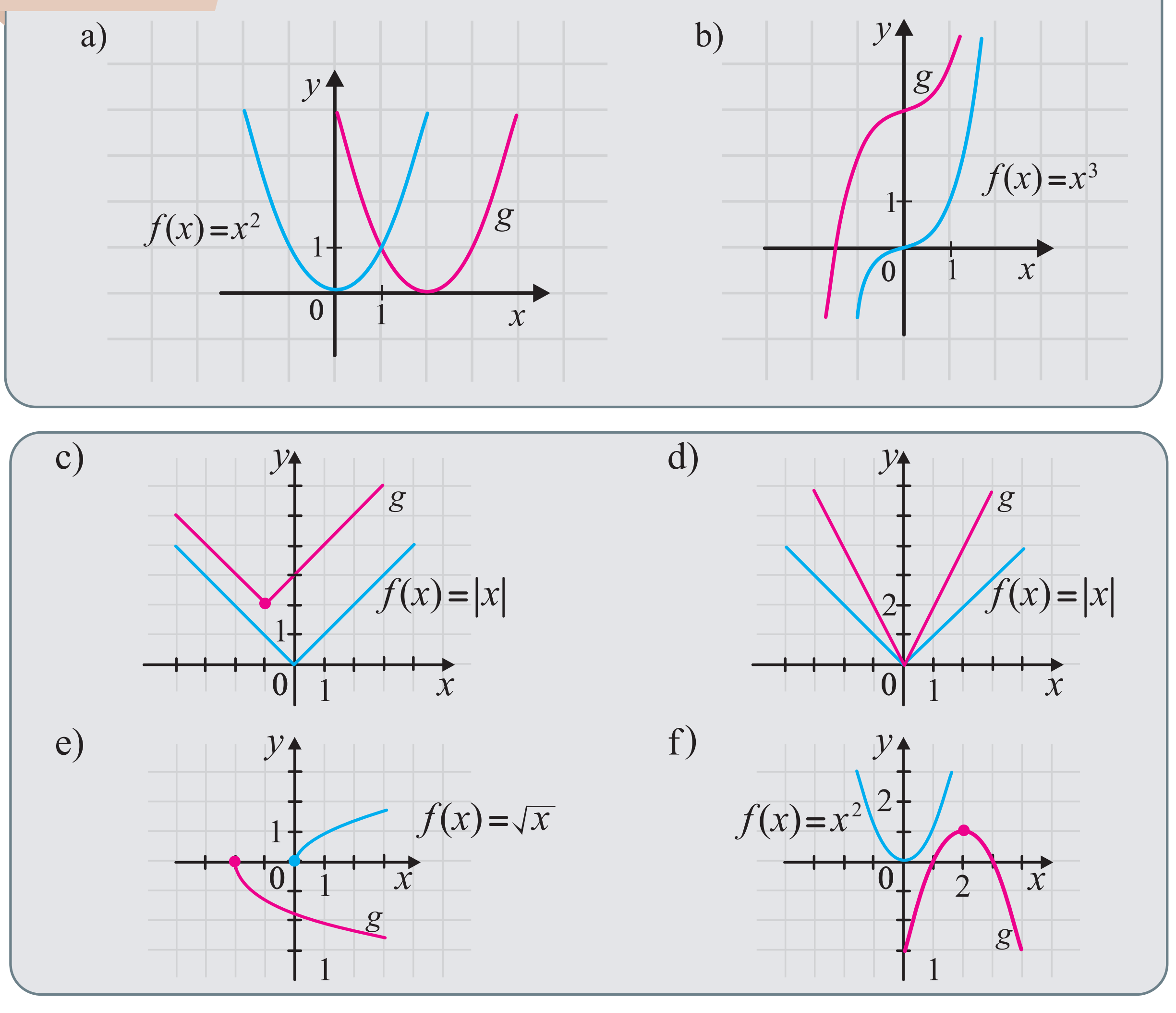
h) $f(x)=x^2$,2 бірлік солға көшіріңдер және x осіне қатысты симметриялы түрлендіріңдер.

i) $f(x)=x^2$, 2 есе вертикаль созып, 2 бірлік төменге және 3 бірлік оңға көшіріңдер.

j) $f(x)=|x|$, $\frac{1}{2}$ есе вертикаль бағытта сығуды орындап, 1 бірлік солға және 3 бірлік жоғарыға көшіріңдер.

8. f және g функциялардың графигі берілген (16-*сурет*). f функциядан пайдаланып g функцияның формуласын табыңдар.

16-сурет



9. $y = f(x)$ функция берілген, 16-суретте төмендегілерге сәйкес графикті табыңдар.

a) $y = f(x-4)$

b) $y = f(x)+3$

c) $y = 2f(x+6)$

d) $y = -f(2x)$

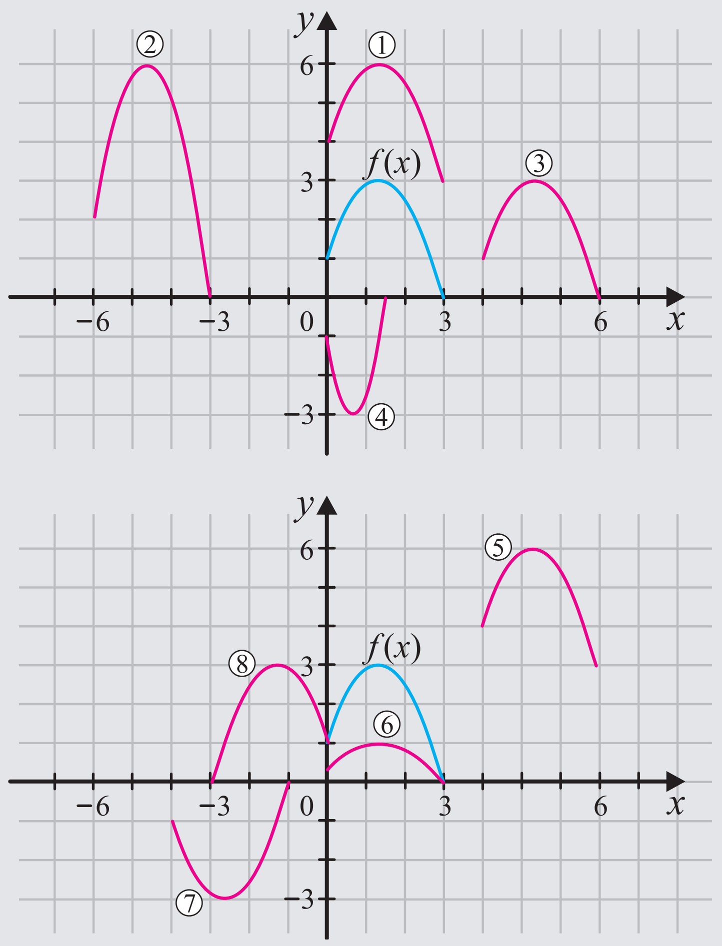
e) $y = \frac{1}{3}f(x)$

f) $y = -f(x+4)$

g) $y = f(x-4)+3$

h) $y = f(-x)$

17-сурет



СЫЗЫҚТЫҚ ЖӘНЕ КВАДРАТТЫҚ МОДЕЛЬДЕУЛЕР

Математикалық модельдеу күнделік өмірдегі түрлі процестерді үйренудің негізгі аналитикалық құралы болып табылады.

Мына есептерді қарастырайық.

1-есеп. Поршеньді сорғы суды айдай алатын максималды тереңдікті тап (1-*сурет*).

Шешуі.

Поршеньді сорғы құбырындағы су бағанының қысымы

$$p = \rho g h$$

формуласымен есептеледі.

Мұнда $\rho = 1000\ kg/m^3$ – судың тығыздығы, $g = 10\ m/h^2$ – еркін түсу үдеуі, h – су бағанының биіктігі.

Сорғы жер деңгейінде орналасқандықтан, су бағанының биіктігі су тереңдігі деп аталады.

Сонымен, судың тереңдігі

$$h = \frac{p}{\rho g}$$

теңдеуінен табуға болады.

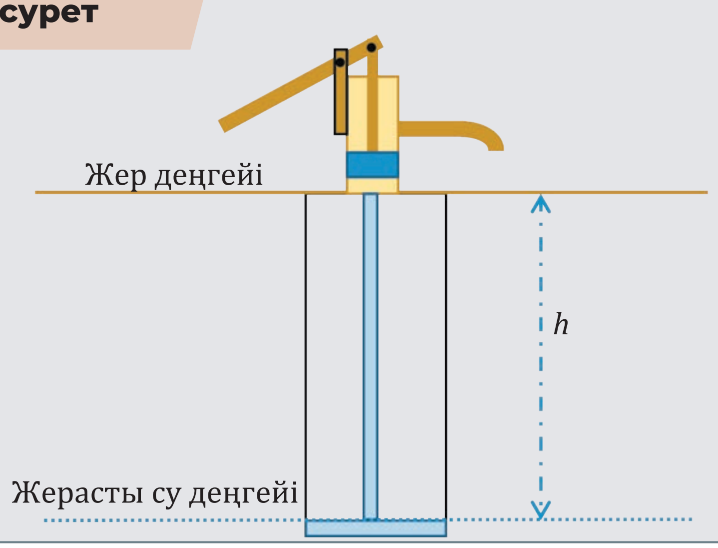
1643-жылы итальян физигі Эванрелиста Торричелли тәжірибелерінде су бағанының қысымы атмосфералық қысымнан $p_0 = 100\,000\ Pa$ дан аспайтыны дәлелденді, яғни $p \le p_0$. Сондықтан поршень сорғыдағы су тереңдігі

$$h = \frac{p}{\rho g} \le \frac{p_0}{\rho g} = \frac{100000}{1000 \cdot 10} = 10\ m$$

ден асып кете алмайды.

Жауабы: Поршеньді сорғы суды ең артығымен 10 *m* тереңдіктен шығара алады.

1-сурет



Бұл модельдегі айнымалылар бірінші ретті және өзара сызықтық амалдармен (қосу және санға көбейту) байланысты. Сондықтан оларды ***сызықтық модельдер*** деп атайды. Берілген есепті ***сызықтық модель*** түріне келтіру процесі сызықтық ***модельдеу*** деп аталады.

2-есеп. Оқушы *Oxy* координаталық жазықтығын былайша таңдап алды: өзінің үйі координата басы $O(0; 0)$ болды. Соң оқушы өзі оқитын мектеп $C(4; 3)$ нүктеде орналасқанын анықтады, жолдың үй мен мектеп арасындағы түзу бөлігі *Ox* осін (6; 0) нүктеде, *Oy* осін (0; 4) нүктеде қиып өтетінін есептеп шығарды.

Мектепте ұялы байланыс антенасы орнатылған. Оқушы жолда әрекеттенетін автомобилдегі жолаушының ұялы байланыс құралы антенадан тарқалатын толқынды ең жақсы ұстайтын нүктені табуға қызығып қалды.

Тапсырма. Сен бұл есепті қандай шешкен болар едің?

Шешуі. Жолдың мектепке ең жақын нүктесінде ұялы байланыс құралы толқынды ең жақсы ұстайды. Бұл есепті шешуде жолды өрнектейтін (AB) түзу теңдеуін құрастыру және оның мектепке ең жақын нүктесінің координаталарын табу керек. Ол үшін алдымен айтылғандар негізінде берілген жағдайдың сызбасы салынады (2-*суретке қараңдар*).

Соң $A(6; 0)$ және $B(0; 4)$ нүктелерден өтетін түзу теңдеуі құрылады. Сол мақсатта түзудің. Мұның үшін түзу сызықтың

$$y = kx+b$$

теңдеуіне $A(6; 0)$ және $B(0; 4)$ нүктелердің координаталарын қоямыз, мына

$$0 = k\cdot 6+b$$

$$4 = k\cdot 0+b$$

теңдіктерді аламыз. Бұлардан

$$b = 4,\ \ k = -\frac{2}{3}$$

коэффициенттер табылады. Демек, (AB) түзу теңдеуі

$$y = -\frac{2}{3}x+4$$

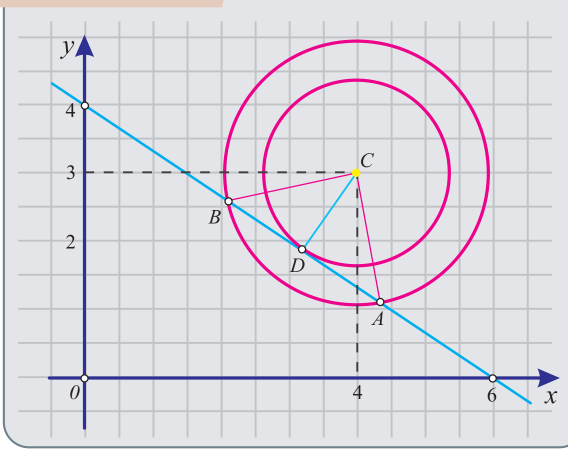
болады.

Есептің шешімі (AB) түзудің $C(4; 3)$ нүктеге ең жақын $D(x; y)$ нүктесін табудан тұрады. Бұл жағдайдың математикалық моделі төмендегідей жазылады:

$$F = \sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2} \to min,$$

$$y = -\frac{2}{3}x+4$$

2-сурет



Бұл модельдегі айнымалылар бірінші және екінші дәрежелі болғандықтан мұндай типтегі математикалық модельдер ***квадраттық модельдер*** деп аталады. Берілген есепті квадраттық модель түріне алып келу процессі ***квадраттық модельдеу*** деп аталады.

МЫСАЛДАР

1. Әрбір берілген тапсырманың сызықтық моделін жазыңдар:

a) Сен велосипедті 10 000 сум бастапқы төлеу және сағатына 5000 сум тариф бойынша жалға алдың?

b) Автомобилдерді жөндеу шеберханасы 50 000 сум негізгі төлеу және сағатына 15 000 сумнан төлеу белгіледі.

c) Шамның ұзындығы 30 *cm* және ол сағатына 1,4 *cm* жылдамдықта жанады.

d) Дәстүрлеу бойынша маман кеңес үшін \$75 бөлек және сонан соң сағатына \$35 алады.

e) Қазірде температура 25 °C, оның кешкілік әр сағатта 2 °C -ге төмендеуі күтілуде.

f) Қыстақ тұрғындары 6791 кісіден тұрады және жылына жетеуге азайып келеді

2. Берілген кестедегі функция сызықтық немесе квадраттық екенін анықтаңдар.

x	0	1	3	4	6
y	5	10	20	25	35

3. Доп жоғарыға және төменге секіргенде, оның жететін биіктігі үнемі азайып келеді. Төмендегі кестеде уақыт бойынша секіру биіктігі көрсетілген.

a) ең сәйкес келетін квадрат функцияны табыңдар.

b) Доптың көтерілетін максимал биіктігін табыңдар.

c) 2,5 секундда доптың қанша биіктікте болғанын шамалаңдар.

t (*s*)	2	2,2	2,4	2,6	3
h (*дюйм*)	2	16	26	33	42

4. 70 метрлік ғимараттың төбесінен атылған тастың уақытқа байланысты биіктігі $h(t) = -5t^2 - 20t + 70$ квадраттық функциямен берілген, мұндағы t секундта, ал биіктік метрде. Неше секундтан соң тас жерге түседі?

5. Маликаға бөлмесін тазалау үшін Умидадан екі есе көп уақыт керек болады. Азизаға бөлмесін тазалау үшін Умидадан 10 минут көбірек уақыт кетеді. Олар бөлмелерін тазалау үшін жалпы 90 минут жұмсайды. Малика бөлмесін тазалау үшін қанша уақыт жұмсайды?

6. Дилшод теңізге інжу алу үшін сүңгіді. Оның t секундтан кейінгі сүңгу тереңдігі $h(t) = -4t^2 + 4t + 3$ метр болды, $t \geq 0$.

a) інжулер қандай тереңдікте орналасқан?

b) Дилшод інжуді алу үшін қанша уақыт жұмсайды?

c) Дилшод қандай биіктіктен суға сүңгіді?

7. Жасмина көйлек тігу үшін тапсырыс алды. Ол бір күнде x дана көйлек тіксе, $P(x) = -x^2 + 20x$ сум мөлшерінде табыс алады.

a) ең үлкен табыс алу үшін ол қанша көйлек тігуі керек?

b) ең үлкен табыс неше сумға тең?

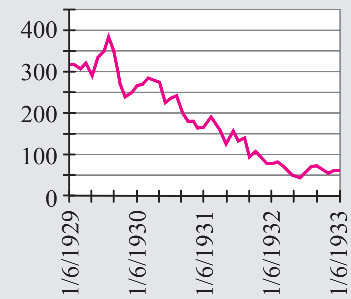
8. 2005 жылда Зарафшон қаласы тұрғындары 55 000 ға жақын еді. Сол кезде тұрғындар саны жылына 2000 ға жақын қарқынмен өсіп барды. Кез келген жыл үшін Зарафшон тұрғындары санын табу үшін оның сызықтық моделін құрыңдар. 2010 жылда Зарафшон тұрғындары қанша болған? 2025 жыл үшін Зарафшон тұрғындарының саны қанша болуын есептеңдер.

ЖОБАЛЫҚ ЖҰМЫС

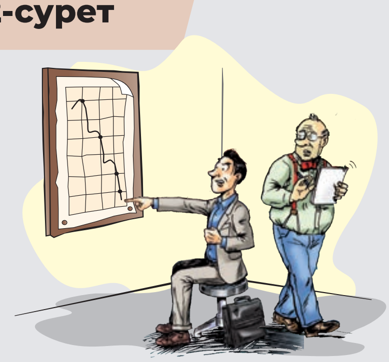
Әрбір график оқиғаны баяндайды

Егер сурет мың сөзге тұрарлық болса, график кем дегенде бірнеше сөйлем жолына тұрарлық. Шындығында, график кейде оқиғаны көптеген сөздерге қарағанда тезірек және тиімдірек айта алады. 1929 жылғы Dow Jones индексі құлдырауының жойқын әсерлері (DJIA) графигінен бірден көрінеді (1-*сурет*). Сол кездегі газеттер қираудың ауқымын жеткізудің тиімді әдісі ретінде осындай графикті жариялады.

1-сурет



2-сурет



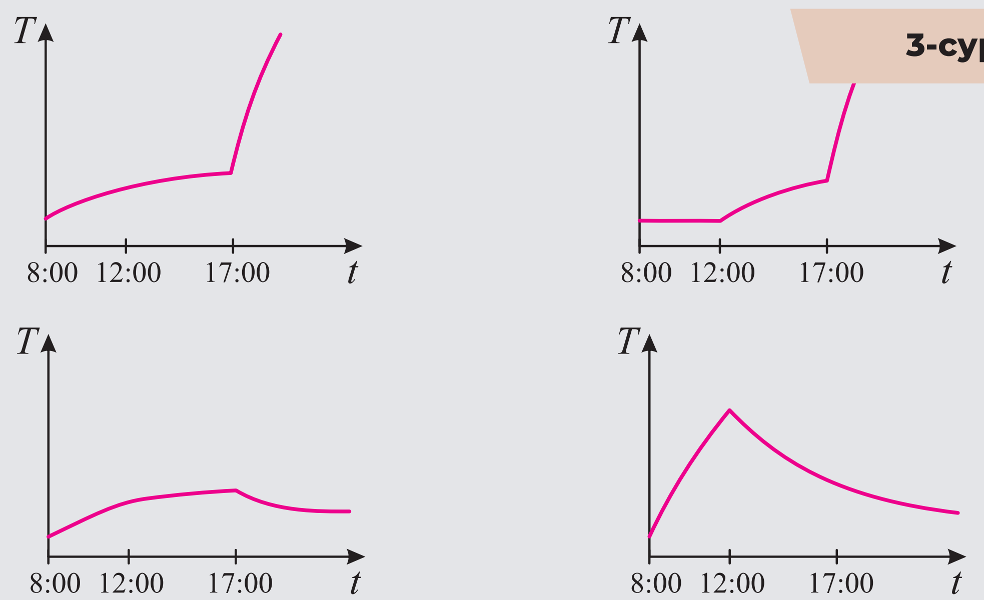
2-суреттегі хабарды жеткізу үшін ешқандай сөз қажет емес. График қарапайым оқиғаны айтады: бірдеңе төмендеді - мүмкін сату, пайда немесе өнімділік - және жауапты адам қатты уайымда.

Бұл ғылыми жобада біз графиктер айтатын оқиғаларды зерттейміз және біз әңгімелейтін график жасаймыз.

Әңгімені графиктен оқу

1. Төменде температураның уақытқа қатысты төрт графигі (таңертеңгі сағат 8:00-ден бастап) көрсетілген болып, одан кейін үш оқиға берілген (3-*сурет*).

3-сурет



a) Әр әңгімені графиктердің біріне сәйкес қойыңдар.

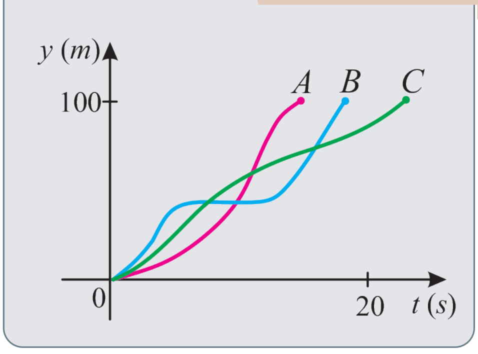
b) Ешбір оқиғаға сәйкес келмейтін график үшін ұқсас әңгіме жаз.

1-әңгіме	Түсте етті мұздатқыштан алып, еріту үшін үстелге қойдым, соң жұмысқа кеттім. Жұмыстан үйге келген соң етті пеште пісірдім.
2-әңгіме	Таңертең етті тоңазытқыштан алып, еріту үшін үстелге қойдым, соң жұмысқа кеттім. Жұмыстан үйге келген соң етті пеште пісірдім.
3-әңгіме	Таңертең етті тоңазытқыштан алып, еріту үшін үстелге қойдым, соң жұмысқа кеттім. Мен оны ұмытып кетіппін, жұмыстан қайтып келе жатқанда кафеде тамақтандым. Үйге келген соң етті тоңазытқышқа қойдым.

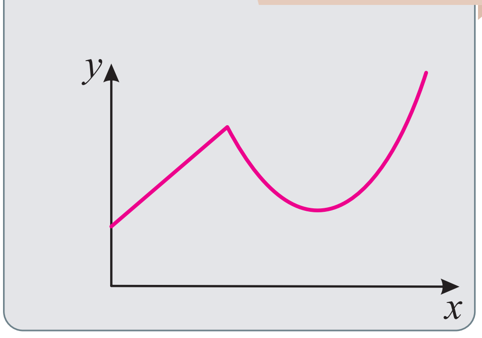
2. 100 метрге кедергілер арқылы жүгіруге үш жүгіруші қатысты. График әр жүгіруші үшін уақыт функциясы ретінде қашықтықты көрсетеді (4-*сурет*). График осы жарыс туралы не айтып тұрғанын сипатта. Жарыста кім жеңді? Әрбір жүгіруші жарысты аяқтады ма? B спортшысына не болды деп ойлайсың?

3. Төмендегі сызбаға сәйкес әңгіме (кез келген жағдайды қамтитын) құрастырыңдар (5-*сурет*).

4-сурет



5-сурет



2-ТАРАУ. РАЦИОНАЛ ТЕҢДЕУЛЕР МЕН ТЕҢСІЗДІКТЕР. ИРРАЦИОНАЛ ТЕҢДЕУЛЕР

- РАЦИОНАЛ ТЕҢДЕУЛЕР
- РАЦИОНАЛ ТЕҢДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІ
- РАЦИОНАЛ ТЕҢСІЗДІКТЕР
- РАЦИОНАЛ ТЕҢСІЗДІКТЕР ЖҮЙЕСІ
- ИРРАЦИОНАЛ ТЕҢДЕУЛЕР
- ИРРАЦИОНАЛ ТЕҢДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІ

РАЦИОНАЛ ТЕҢДЕУЛЕР

Негізгі ұғымдар мен анықтамалар

Анықтама

$f(x)=g(x)$ көріністегі теңдік бір белгісізді теңдеу деп аталады (мұндағы $f(x)$ және $g(x)$ лар x белгісізге қатысты өрнектер).

Теңдеудің түбірі деп белгісіздің берілген теңдеуді дұрыс теңдікке айналдыратын мәніне айтылады.

Теңдеуді шешу дегенде – оның барлық түбірлерін табу немесе оның түбірі жоқ екенін дәлелдеу түсініледі.

Теңдеудің барлық түбірлері жиыны ***теңдеудің шешімі*** деп аталады.

Егер x белгісіздің еш бір мәні теңдеудің түбірі болмаса, онда ***"теңдеудің түбірі жоқ"*** немесе ***"теңдеудің шешімі – құр жиын"*** сөз тіркесі қолданылады, бұл жағдай $x \in \varnothing$ ретінде де жазуға болады.

1-мысал. $(x+3)(2x-1)(x-2)=0$ теңдеуді шешіңдер.

Шешуі. Бұл теңдеудің оң жағы нөлге тең, ал сол жағы 3 өрнектің көбейтіндісінен тұрады. Көбейткіштерден еш болмағанда бірі нөлге тең болғанда ғана көбейтінді нөлге тең болғандықтан, әрбір көбейтуші нөлге тең болған жағдайларды бөлек қарастырамыз $x+3=0,\ \ 2x-1=0,\ \ x-2=0$. Бұл теңдеулерден берілген теңдеудің түбірлері

$$x_1=-3,\ \ x_2=\frac{1}{2},\ \ x_3=2$$ екенін анықтаймыз.

2-мысал. Түбірлері 0, –1 және $\sqrt{2}$ ге тең болған теңдеу құрыңдар.

Шешуі. Жауап ретінде түрлі көріністегі теңдеулерді көрсетуге болады. Ең қарапайым теңдеу $x(x+1)\left(x-\sqrt{2}\right)=0$ көрінісінде болатындығын ескертіп өтеміз. Бұл сандар тағыда мынадай теңдеудің де түбірі бола алады:

$$(x^2+x^3)\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x^2+3\right)=0$$

Анықтама.

Егер $f(x)=g(x)$ теңдеудің барлық түбірлері $f_1(x)=g_1(x)$ теңдеудің түбірлері болса, және керісінше, $f_1(x)=g_1(x)$ теңдеудің барлық түбірлері $f(x)=g(x)$ теңдеудің түбірлері болса, яғни олардың шешімдері бетпе-бет түссе, мұндай теңдеулер ***мәндес теңдеулер*** деп аталады.

3-мысал. $3x-6=0$ және $2x-1=3$ теңдеулерді мәндестігін тексеріңдер.

Шешуі. $3x-6=0$ және $2x-1=3$ теңдеулер мәндес, өйткені әр бірінің түбірі $x=2$ ден тұрады.

Шешімі құр жиын болған әр қандай екі теңдеу мәндес болады.

Мәндес теңдеулер былайша белгіленеді: $3x-6=0 \Leftrightarrow 2x-1=3$.

Теңдеу төмендегі жағдайларда өзіне мәндес болған теңдеуге өтеді:

а) Теңдеудің қандайда бір мүшесі теңдіктің бір бөлігінен екінші бөлігіне қарама-қарсы таңбамен өткізілгенде. Мысалы $f(x)=g(x)+t(x) \Leftrightarrow f(x)-g(x)=t(x)$.

b) Теңдеудің екі жағын нөлден өзгеше санға көбейткенде немесе бөлгенде.

Бүтін рационал теңдеулер

Егер $f(x)$ және $g(x)$ өрнектер бүтін рационал өрнектермен берілген болса,

$$f(x)=g(x)$$

теңдеу, ***бүтін рационал теңдеу*** деп аталады.

Мұндай теңдеудің анықталу облысы барлық нақты сандар жиыны болады.

Анықтама.

Төмендегі көріністегі теңдеу $a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0,\ a_0\neq 0$ **стандарт көріністегі *n*-дәрежелі бүтін рационал теңдеу** деп аталады мұндағы a_0, a_1, ..., a_{n-1} коэффициенттер, a_n бос мүше, $n \in N$.

Егер $a_0 = 1$ болса, $x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0$ **теңдеу келтірілген *n*-дәрежелі бүтін рационал теңдеу** деп аталады.

n - дәрежелі көпмүше түбірлерінің саны n нен артық болмайтындығы мәлім, демек, әрбір стандарт көріністегі *n* - дәрежелі бүтін рационал теңдеудің түбірлері саны да *n* нен артық болмайды.

Теорема. Бүтін коэффициентті келтірілген бүтін рационал теңдеудің түбірлері бүтін сан болса, олар бос мүшенің бөлушілері болады.

4-мысал. $x^4+2x^3=11x^2-4x-4$ теңдеуді шешіңдер.

Шешуі. Алдымен оны стандарт көрініске келтіреміз: $x^4+2x^3-11x^2+4x+4=0$.

Бұл теңдеудің бүтін түбірлері бар екенін тексеру үшін бос мүшесі 4 -тің барлық бөлушілерін жазып аламыз: $\pm1, \pm2, \pm4$. Бұл сандарды кезекпен кезек теңдеуге қойып, $x_1=1$ және $x_2=2$ сандар теңдеудің түбірлері болатынын анықтаймыз. Демек, $x^4+2x^3-11x^2+4x+4$ көпмүше $(x-1)(x-2)=x^2-3x+2$ көпмүшеге қалдықсыз бөлінеді.

$$\begin{array}{r|l}
x^4+2x^3-11x^2+4x+4 & x^2-3x+2 \\ \cline{2-2}
-\ x^4-3x^3+2x^2 \qquad\qquad & x^2+5x+2 \\ \cline{1-1}
5x^3-13x^2+4x+4 & \\
-\ 5x^3-15x^2+10x \quad & \\ \cline{1-1}
2x^2-6x+4 & \\
-\ 2x^2-6x+4 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Теңдеуді $(x-1)(x-2)(x^2+5x+2)=0$ көріністе жазып аламыз.

Пайда болған теңдеу бірінші теңдеуге мәндес теңдеу. Әрбір көбейтушіні нөлге теңдеп, теңдеудің түбірлерін табамыз.

Жауабы: $x_1 = 1;\ \ x_2 = 2,\ \ x_{3,4} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}.$

5-мысал. $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$ теңдеуді шешіңдер.

Шешуі. Бос мүшенің бөлушілері: ±1, ±3, ±5. Бұлардан –3, 1, 5 саны теңдеудің түбірі екенін оңай көруге болады. Демек, $x^3 - 3x^2 - 13x + 15$ көпмүшелікті былайша көбейтушілерге жіктеуге болады:

$$x^3 - x^2 - 2x^2 + 2x - 15x + 15 = 0$$

$$x^2(x-1) - 2x(x-1) - 15(x-1) = 0$$

$$(x-1)(x^2 - 2x - 15) = 0$$

$$(x-1)(x-5)(x+3) = 0$$

Бұл көбейтушілердің әрбіреуін 0 ге теңестіріп, теңдеудің түбірлері $x_1 = 1,\ x_2 = 5,\ x_3 = -3$ екенін табамыз.

Жауабы: $x_1 = 1,\ x_2 = 5,\ x_3 = -3.$

6-мысал. $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$ теңдеуді шешіңдер.

Шешуі. Берілген теңдеу 4-дәрежелі симметриялық теңдеу. Оны шешу үшін теңдеудің екі жағын $x^2 \neq 0$ ге бөліп, оған мәндес теңдеуді аламыз:.

$$x^2 - 5x + 8 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 8 = 0$$

$x + \dfrac{1}{x} = t$ белгілеу енгіземіз. Онда

$$t^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2 \text{ болады.}$$

Бұлардан $t^2 - 5t + 6 = 0$ теңдеуді аламыз. Бұл теңдеудің түбірлері: $t_1 = 2$ және $t_2 = 3$.

Бұл мәндерін белгілеуге қайта қойып, берілген теңдеудің шешімі $x + \dfrac{1}{x} = 2$ және $x + \dfrac{1}{x} = 3$ теңдеулердің шешімдері бірігуіне тең болатынын көреміз.

Бұл теңдеулерді шешіп, $x_1 = 1, x_2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ және $x_3 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ екенін табамыз.

Жауабы: $x_1 = 1, x_2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}, x_3 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}.$

7-мысал. $3x^3 + 4x^2 + 4x + 3 = 0$ теңдеуді шешіңдер.

Шешуі. Берілген теңдеу 3-дәрежелі симметриялық теңдеу. Оны шешу үшін алдымен көбейтушілерге жіктейміз және оған мәндес теңдеуді аламыз:

$$3(x^3 + 1) + 4x(x + 1) = 0$$

$$(x + 1)(3x^2 - 3x + 3 + 4x) = 0$$

$$(x + 1)(3x^2 + x + 3) = 0.$$

Бұл теңдеудің шешімі төмендегі 2 теңдеудің шешімдері бірігуіне тең.

$$x + 1 = 0 \quad \text{және} \quad 3x^2 + x + 3 = 0.$$

1-теңдеудің шешімі $x = -1$, 2-теңдеудің нақты шешімі жоқ.

Жауабы: $x = -1$.

Бөлшек-рационал теңдеулер

$\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ көрініске келтіру мүмкін болған теңдеулерге ***бөлшек-рационал теңдеу*** деп аталады (мұндағы $f(x)$ және $g(x)$ –x белгісізді көпмүшеліктер).

$\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ көріністегі рационал теңдеудің **анықталу облысы** $g(x) \neq 0$.

Рационал теңдеулерді шешу қадамдары:

- теңдеудегі барлық өрнектер теңдіктің сол жағына өткізіледі;
- барлық өрнектер ортақ бөлімге келтіріледі;
- теңдеу $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ көрініске келтіріледі;
- алымының нөлдері табылады;
- анықталу облысы табылады;
- анықталу облысына тиісті болған алымының нөлдері теңдеудің түбірлері болады.

Немесе $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ рационал теңдеудің шешімін табу үшін оны мына $\begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$ мәндес жүйе көрінісінде жазып алынады және шешіледі.

Мысалға, төмендегі теңдеуді қарастырайық: $\dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1} = 0.$

Бөлшектің алымын нөлге теңестіреміз:

$$x^2 + x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -2, \; x_2 = 1.$$

Бұл теңдеудің анықталу облысы $x \neq 1$, яғни $x = 1$ мән берілген теңдеудің шешімі бола алмайды, демек , $x = 1$ бөгде түбір болады.

8-мысал. Теңдеудің түбірін табыңдар: $\frac{2x+3}{x-1}=0$.

Шешуі. $\begin{cases} 2x+3=0 \\ x-1\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x=-3 \\ x\neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1,5 \\ x\neq 1 \end{cases}$

Жауабы: $x=-1,5$.

9-мысал. Теңдеуді шешіңдер: $\frac{4x+4}{3(x+2)-3}=0$.

Шешуі. $\begin{cases} 4x+4=0 \\ 3(x+2)-3\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x=-4 \\ 3x+6-3\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x\neq -1 \end{cases}$

x -тің мәні -1 -ге тең болуы мүмкін емес. Сондықтан.

Жауабы: $x\in\varnothing$.

10-мысал. Теңдеудің түбірін табыңдар: $\frac{-2x-4}{x^2-4}=\frac{x+5}{x-2}$.

Шешуі. Барлық өрнектерді теңдіктің сол жағына өткізіп, ортақ бөлімге келтіреміз.

$$\frac{x+5}{x-2}+\frac{2x+4}{x^2-4}=0\Rightarrow\frac{(x+5)(x+2)+2x+4}{x^2-4}=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{x^2+7x+10+2x+4}{x^2-4}=\frac{x^2+9x+14}{x^2-4}=0$$

Бөлшек-рационал өрнектің алымын нөлге теңдестіреміз және нөлдерін табамыз. Виет теоремасынан пайдаланамыз:

$$x^2+9x+14=0\Rightarrow x=-2;\, x=-7$$

Анықталу облысы $x^2-4=(x-2)(x+2)\neq 0\Rightarrow x\neq -2; x\neq 2$

Демек, теңдеудің тек бір түбірі бар: $x=-7$.

Жауабы: $x=-7$.

Назар аудар! Бөлшек-рационал теңдеуді шешуде әрқашан алымының нөлдерін теңдеудің анықталу облысына тиісті екенін тексеріңдер.

11-мысал. Теңдеуді шешіңдер: $\frac{(x^2-x-56)(x-3)}{x^2+5x+6}=0$.

Шешуі. Берілген теңдеу бөлшек-рационал теңдеу. Алдымен алымының нөлдерін табамыз.

$$(x^2-x-56)(x-3)=0\Rightarrow x=3;\quad x^2-x-56=0$$
$$D=(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-56)=225=15^2$$
$$x_{1,2}=\frac{1\pm 15}{2}\Rightarrow x_1=8;\, x_2=-7.$$

Алымының 3 нөлін таптық: $x_1=8$; $x_2=-7$; $x_3=3$.

Бұл нөлдерді берілген теңдеудің бөліміндегі өрнекке қойып тексереміз және олардың бөлімнің нөлі емес екеніне көз жеткіземіз.

Жауабы: $x_1=8$; $x_2=-7$; $x_3=3$.

12-мысал. Теңдеудің түбірлерін табыңдар.

$$\frac{2}{(x-2)(x+2)}-\frac{1}{x(x-2)}=\frac{4-x}{x(x+2)}$$

Шешуі. Теңдіктің оң жағындағы өрнекті сол жағына өткіземіз:

$$\frac{2}{(x-2)(x+2)}-\frac{1}{x(x-2)}-\frac{4-x}{x(x+2)}=0$$

жалпы ортақ бөлімге келтіреміз:

$$\frac{2x-(x+2)-(4-x)(x-2)}{x(x-2)(x+2)}=0$$

Алымындағы жақшаларды ашып, квадрат теңдеуге келеміз:

$$\frac{2x-x-2-4x+x^2+8-2x}{x(x-2)(x+2)}=0\Rightarrow\frac{x^2-5x+6}{x(x-2)(x+2)}=0$$

Алымының нөлдерін табамыз:

$$x^2-5x+6=0\Rightarrow D=(-5)^2-4\cdot 6=1,\ x_{1,2}=\frac{5\pm 1}{2}\Longrightarrow x_1=2;\ \ x_2=3.$$

Табылған x мәндерін берілген теңдеудің бөліміндегі өрнекке қою арқылы тексереміз. $x = 2$ мәнінде бөлшектің бөлімі нөлге тең, сондықтан $x = 2$ бөгде түбір. Сонымен, теңдеудің бір ғана түбірі $x = 3$.

Жауабы: $x = 3$.

13-мысал. Теңдеуді шешіңдер: $x^2+x+1=\dfrac{15}{x^2+x+3}$.

Шешуі. $x^2+x+1=t$ белгілеу енгіземіз. Теңдеу төмендегі көрініске келеді:

$$t=\frac{15}{t+2}$$

$t\neq -2$ болатынын ескеріп, төмендегі теңдеуді шешеміз:

$$t(t+2)=15$$

$$t^2+2t-15=0$$

$$t_1=-5;\ t_2=3$$

t-ның орнына қойып, $x^2 + x + 1 = -5$ және $x^2 + x + 1 = 3$ теңдеулерді аламыз. Олардың әр біреуін бөлек шешеміз:

$x^2 + x + 6 = 0 \Rightarrow$ нақты түбірі жоқ; $x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -2; x_2 = 1$.

Жауабы: $x_1 = -2$; $x_2 = 1$.

Мәтінді есептер шешуде де рационал теңдеулер қолданылуы мүмкін. Төменде әрекетке және жұмысқа қатысты есептер рационал теңдеу көрінісіндегі модельдеумен шешілген.

Әрекетке қатысты есеп.

Тікұшақ жел бағыты бойынша 120 *km* арақашықтықты ұшып өтті және арқаға қайтты. Егер тікұшақтың желсіз ауадағы жылдамдығы 45 *km/h* қа тең болса, желдің жылдамдығын табыңдар.

Шешуі. Желдің жылдамдығын x *km/h* пен белгілейік. Онда жел бағыты бойынша тікұшақтың жылдамдығы $(45 + x)$ *km/h* , желге қарсы бағытта жылдамдығы $(45 – x)$ *km/h* ке тең болады. Есептің шарты бойынша, тікұшақ жалпы 6 сағат уақыт жұмсаған. Демек

$$\frac{120}{45+x}+\frac{120}{45-x}=6$$

Нәтижеде бөлшек рационал теңдеуді алдық: $\frac{120}{45+x}+\frac{120}{45-x}-6=0$

$$\frac{120(45-x)+120(45+x)-6(45+x)(45-x)}{(45+x)(45-x)}=0$$

Алымын ықшамдап, нөлге теңестіріп шешеміз:

$$6x^2-1350=0$$
$$x^2=225$$
$$x_1=-15;\ x_2=15$$

Жылдамдық теріс мән қабылдамайды, сондықтан $x=-15$ түбір бола алмайды. Демек, желдің жылдамдығы 15 *km/h*.

Жауабы: Желдің жылдамдығы 15 *km/h*.

Жұмысқа қатысты есеп

Екі тракторист бірлесіп даланы 4 күнде жыртады. Егер 1-трактористке даланы жеке жырту үшін 2-трактористке қарағанда 6 күн кем уақыт керек болса, әрбір тракторист жұмысты неше күнде орындайды?

Шешуі. 1-тракторист даланы x күнде жыртсын. Онда 2-тракторист сол даланы $(x + 6)$ күнде жыртады. Демек, 1-тракторист 1 күнде даланың $\frac{1}{x}$ бөлігін, ал 2-тракторист $\frac{1}{x+6}$ бөлігін жыртады. Есептің шартына орай, сол даланы олар бірлесіп 4 күнде жыртады. Яғни, екеуі 1 күнде даланың $\frac{1}{4}$ бөлігін жыртады.

Теңдеуді құрастырамыз және шешеміз: $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+6}=\frac{1}{4}$

$$\frac{4(x+6)+4x-x(x+6)}{4x(x+6)}=0$$

$$\frac{-x^2+2x+24}{4x(x+6)}=0$$

Бұл рационал теңдеу төмендегі теңдеулер жүйесіне мәндес.

$$\begin{cases} x^2-2x-24=0; \\ 4x(x+6)\neq 0; \end{cases} \qquad D=(-2)^2-4\cdot(-24)=100;\ x_{1,2}=\frac{2\pm 10}{2}\Rightarrow x_1=6;\ \ x_2=-4$$

$x = –4$ түбір теріс болғандықтан есептің жауабы бола алмайды. Демек, 1-тракторист даланы 6 күнде, 2-тракторист $x+6=6+6=12$ күнде жыртады.

Жауабы: 1-тракторист 6 (күн), 2-тракторист 12 (күн).

МЫСАЛДАР

Бөлшек-рационал теңдеулерді шешіңдер (1–10).

1. $\frac{1}{x}-\frac{2x}{x+1}=0$

2. $\frac{2y-5}{y+5}=\frac{3y+21}{2y-1}$

3. $\frac{5x-7}{x-3}=\frac{4x-3}{x}$

4. $\frac{x+1}{2(x-1)}=\frac{9}{2(x+4)}+\frac{1}{x-1}$

5. $\frac{2x}{x-1}-\frac{1}{x+1}=\frac{4x}{x^2-1}$

6. $\frac{x^2-2x}{x-2}=x^2-2$

7. $\frac{7}{2x+9}-6=5x$

8. $\frac{15}{x-2}=\frac{14}{x}+1$

9. $\frac{4}{x-2}+\frac{4}{x+2}=\frac{3}{2}$

10. $\frac{3x}{x^2-1}=2\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)$

Бөлшек-рационал теңдеулерді шешіңдер (11–30).

11. $\frac{1}{x^2-12x+36}+\frac{12}{36-x^2}=\frac{1}{x+6}$

12. $\frac{8c-3}{4c^2-2c+1}+\frac{6}{8c^3+1}=\frac{2}{2c+1}$

13. $\frac{3x-2}{x-1}+\frac{x-4}{x+3}=\frac{3x^2+1}{(x-1)(x+3)}$

14. $\frac{2-3x}{x+1}-\frac{4}{3}\cdot\frac{x+1}{2-3x}=\frac{4}{3}$

15. $\frac{x-49}{x+6}+\frac{2x+50}{x+5}=2$

16. $\frac{(x+2)^2-9}{x-1}\cdot(x-5)=-24$

17. $(x+4)(x^2-1)=4x^2+24x-\frac{4x^2+20x}{5x+x^2}$

18. $\frac{25x-21}{2x^2+5x-12}=\frac{x-4}{2x-3}-\frac{2x-3}{x+4}$

19. $\frac{3}{x^2-2x+1}+\frac{2}{1-x^2}=\frac{1}{1+x}$

20. $\frac{6}{x-1}+\frac{6}{(x-1)(x-3)}+\frac{3}{3-x}=7$

21 $\frac{x^5-4x^3}{x-2}=16+2x^3$

22. $\frac{1}{(x-2)(x-3)}-\frac{9}{(x+2)(x-7)}=1$

23. $x^2+x+1=\frac{15}{x^2+x+3}$

24. $\frac{x^2+2}{3x-2}-\frac{3x-2}{x^2+2}=2\frac{2}{3}$

25. $x^2-5x+\frac{24}{x^2-5x}+10=0$

26. $\frac{x^2+1}{x}+\frac{x}{x^2+1}=2\frac{1}{2}$

27. $\frac{2}{x^2+3}+\frac{4}{x^2+7}=1$

28. $\frac{1}{x(x+2)}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{1}{12}$

29. $\dfrac{x^2-3x-1}{x^2-2x+4}=\dfrac{x^2-2x}{x^2-x+1}$

30. $\dfrac{x^2-4x-1}{x^2-3x+5}=\dfrac{x^2-3x+1}{x^2-2x+2}$

31. Екі қала арасындағы ара қашықтық өзен жолымен 80 *km*. Кеме осы қалалардың бірінен екіншісіне барып келу үшін 8 сағат 20 минут уақыт жұмсады. Өзен ағымының жылдамдығы 4 *km/h* болса, кеменің тұрғын судағы жылдамдығын табыңдар.

32. Екі жұмысшы бір жұмысты бірлесіп орындаса, 12 күнде аяқтайды. Егер алдымен біріншісі бастап, жұмыстың жартысын аяқтағаннан соң оның орнына екіншісі жұмыс істесе, жұмыс 25 күнде аяқталады. Осы жұмысты әрбір жұмысшы жалғыз өзі істесе, неше күнде аяқтайды?

33. “A” тракторы 3 күнде сағатта 7 га, ал “B” тракторы 2 күнде 17 га жерді жырта алады. Фермер шаруашылығында “ A ” трактордан екеу және “B” трактордан біреу бар. Егер бұл тракторлар бірлесіп жұмыс істесе, 237 га жерді неше күнде жыртады?

34. Автомобил жолдың 80 километрлік бөлігінде 120 *km/h*, кейінгі 25 *km* бөлігінде 50 *km/h*, соңғы 35 *km* бөлігінде 70 *km/h* жылдамдықпен әрекеттенеді. Оның бүтін жолдағы орташа жылдамдығын табыңдар.

35. Бірінші жұмысшы жалғыз өзі жұмысты *a* күнде орындайды, екінші жұмысшы сол жұмысты орындау үшін бірінші жұмысшыға қарағанда *b* күн артық уақыт жұмсаса, үшінші жұмысшының жалғыз өзі *b* күн тез орындайды. Осы жұмысты үш жұмысшы бірлесіп орындаса, неше күнде орындайды?

36. Өзен жағасындағы A және B қалалары арасындағы қашықтық 96 *km*. Катерде A қаладан B қалаға барып келу үшін 10 сағат жұмсалады. Егер өзен ағымының жылдамдығы 4 *km/h* болса, кеменің тұрғын судағы жылдамдығын табыңдар.

РАЦИОНАЛ ТЕҢДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІ

Екі белгісізді екі теңдеуді қамтитын жүйелерді шешу белгілі алгебралық қосу, орнына қою, айнымалыны ауыстыру тәсілдеріне сүйенеді. Мұнда қатысатын бөлшек-рационал өрнектің бөлімі нөлге тең болмауын атап өтеміз.

Орнына қою тәсілі

1-мысал. Төмендегі теңдеулер жүйесін орнына қою тәсілінен пайдаланып шешіңдер.

$$\begin{cases} 3xy = 21 \\ x - 8y = -1 \end{cases}$$

Шешуі. 2-теңдеуден $x - 8y = -1 \Rightarrow x = 8y - 1$.

x тің өрнегін 1-теңдеуге қойып, $3(8y-1)y = 21$ теңдеуге келеміз.

Бұл теңдеуді шешіп,

$$(8y-1)y = 7$$

$8y^2 - y - 7 = 0 \Rightarrow y_1 = -\frac{7}{8}; y_2 = 1$ мәндерін табамыз. Оларды $x = 8y - 1$ ге қойып $\Rightarrow x_1 = -8$; $x_2 = 7$ екенін табамыз.

Жауабы: $\left(-8; -\frac{7}{8}\right), (7;1)$.

2-мысал. Орнына қою тәсілінен пайдаланып $\begin{cases} 2x^2 + y = 4 \\ x^4 + y^2 = 16 \end{cases}$ теңдеулер жүйесін шешіңдер.

Шешуі.

$$y = 4 - 2x^2.$$

$$x^4 + \left(4 - 2x^2\right)^2 = 16$$

$$x^4 + 16 - 16x^2 + 4x^4 = 16$$

$$5x^4 - 16x^2 = 0$$

$$x^2\left(5x^2 - 16\right) = 0, \quad \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = \frac{4}{\sqrt{5}},\ x_3 = -\frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow\ y_1 = 4;\ y_2 = -\frac{12}{5};\ y_3 = -\frac{12}{5}$$

Жауабы: $(0;4)$, $\left(\frac{4}{\sqrt{5}}; -2\frac{2}{5}\right), \left(-\frac{4}{\sqrt{5}}; -2\frac{2}{5}\right)$.

Алгебралық қосу тәсілі

3-мысал. Мына теңдеулер жүйесін шешіңдер: $\begin{cases} x^2 + y = 27 \\ x - y = 3 \end{cases}$

Шешуі. Екі теңдеуде де y белгісіз қарама-қарсы таңбалы коэффициентпен қатынасқан, сондықтан бұл теңдеулерді мүшелеп қосамыз.

$$+\begin{cases} x^2+y=27 \\ x-y=3 \end{cases}$$
$$\overline{x^2+x=30}$$

$x^2+x-30=0$ бір белгісізді квадрат теңдеуге келді.

$$x_1=\frac{-1-11}{2}=-6 \Rightarrow y_1=-9$$

$$x_2=\frac{-1+11}{2}=5 \Rightarrow y_2=2$$

Жауабы: (–6; –9), (5; 2).

4-мысал. Теңдеулер жүйесін алгебралық қосу тәсілімен шешіңдер:

$$\begin{cases} x^3-y^3-3x^2+3y^2x=-2 \\ x^2-x^2y=1. \end{cases}$$

Шешуі. 2-ші теңдеуді 3 ке көбейтіп 1-ші теңдеуге қосамыз:

$$+\begin{cases} x^3-y^3-3x^2+3y^2x=-2 \\ 3x^2-3x^2y=3 \end{cases}$$

теңдеу айырманың кубы формуласына келеді: $x^3-y^3-3x^2y+3y^2x=1$.

Бұдан
$$\begin{cases} (x-y)^3=1 \\ x^2-x^2y=1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x-y=1 \\ x^2-x^2y=1 \end{cases}$$

Енді, орнына қою тәсілінен пайдаланамыз және жүйені шешеміз:

$$\begin{cases} y=x-1 \\ x^2-x^2(x-1)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x-1 \\ x^2-x^3+x^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x-1 \\ x^3-2x^2+1=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \begin{cases} y=x-1 \\ (x-1)(x^2-x-1)=0 \end{cases} \Rightarrow x_1=1;\quad x_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2};\quad x_3=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, бұл мәндерін $y=x-1$ теңдеуге қойып, $y_1=0$, $y_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $y_3=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ екенін табамыз.

Жауабы: $(1;0),\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right),\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$.

Айнымалыларды алмастыру тәсілі

5-мысал. Теңдеулер жүйесін шешіңдер:

$$\begin{cases} x+xy+y=11 \\ x^2y+xy^2=30. \end{cases}$$

Шешуі. Мынадай белгілеу енгіземіз:

$$x+y=a \quad \text{және} \quad xy=b$$

Нәтижеде жүйе төмендегі көрініске келеді:

$$\begin{cases} a+b=11 \\ ab=30 \end{cases}$$

Бұл жүйені шешіп, $a_1=6,\ b_1=5$ және $a_2=5,\ b_2=6$ ларды анықтаймыз. Енді төмендегі жүйелерді шешеміз:

$$\begin{cases} x+y=6 \\ xy=5 \end{cases} \text{ және } \begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}$$

Олардың түбірлерінен құралған жиын теңдеулер жүйесінің шешімі болады.

Жауабы: $(5;1),\ (1;5),\ (2;3),\ (3;2)$.

МЫСАЛДАР

Теңдеулер жүйесін шешіңдер.

1. $\begin{cases} y-x^2+x=1 \\ x=y-4 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4x^2-y=2 \\ 3x-2y=-1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 4x+3y=-1 \\ 2x^2=y+11 \end{cases}$

4. $\begin{cases} xy=20 \\ x-4y=2 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^2+y^2-2xy=1 \\ x+y=3 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x-y=10 \\ x^2-y^2=20-xy \end{cases}$

7. $\begin{cases} x+y=8 \\ x^2+y^2=36 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x\cdot y=300 \\ x+y=35 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x^2+y^2=74 \\ x+y=12 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x+y=8 \\ xy=15 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x+y=1 \\ x^3+y^3=19 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x^3+8y^3=35 \\ x^2-2xy+4y^2=7 \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dfrac{xy}{x+2y}+\dfrac{x+2y}{xy}=2 \\ \dfrac{xy}{x-2y}+\dfrac{x-2y}{xy}=4 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x^2-xy+\dfrac{1}{4}y^2+x-\dfrac{1}{2}y=2 \\ \dfrac{1}{4}x^2+xy+y^2+2y+x=3 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x^2-xy+y^2=19 \\ x^2+xy+y^2=49 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x^2+y^2=x+y \\ x^4+y^4=\dfrac{1}{2}(x+y)^2 \end{cases}$

17. $\begin{cases} \dfrac{x-y}{x+y}+6\dfrac{x+y}{x-y}=5 \\ xy=-2 \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dfrac{2x}{y}+\dfrac{3y}{x}+6=\dfrac{3}{xy} \\ \dfrac{6y}{x}+\dfrac{4x}{y}-1=\dfrac{45}{xy} \end{cases}$

19. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5 \\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=13 \end{cases}$

20. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{xy}+\dfrac{xy}{x+y}=2 \\ \dfrac{x-y}{xy}+\dfrac{xy}{x-y}=\dfrac{5}{2} \end{cases}$

21. $\begin{cases} x^3-y^3=61(x-y) \\ (x+1)(y+1)=12 \end{cases}$

22. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=\dfrac{9}{2} \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

23. $\begin{cases} x^4+y^4=17(x+y)^2 \\ xy=2(x+y) \end{cases}$

24. $\begin{cases} x^2+y^2=x-y \\ x^4+y^4=\dfrac{1}{2}(x-y)^2 \end{cases}$

25. $\begin{cases} x^2\left(1+y+y^2+y^3\right)=160 \\ x^2\left(1-y+y^2-y^3\right)=-80 \end{cases}$

26. $\begin{cases} 2x^2y^2-3y^2+5xy-6=0 \\ 3x^2y^2-4y^2+3xy-2=0 \end{cases}$

27. $\begin{cases} x^3y+xy^3=\dfrac{10}{9}(x+y)^2 \\ x^4y+xy^4=\dfrac{2}{3}(x+y)^3 \end{cases}$

28. $\begin{cases} \dfrac{x\left(y^2+1\right)}{x^2+y^2}=\dfrac{3}{5} \\ \dfrac{y\left(x^2-1\right)}{x^2+y^2}=\dfrac{4}{5} \end{cases}$

29. $\begin{cases} \dfrac{y^2}{x}+\dfrac{x^2}{y}=12 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3} \end{cases}$

30. $\begin{cases} xy=6 \\ yz=15 \\ zx=10 \end{cases}$

РАЦИОНАЛ ТЕҢСІЗДІКТЕР

Рационал теңсіздіктерді шешу рационал теңдеулерді шешу сияқты, алдымен теңсіздікті қарапайым мәндес теңсіздікке келтіру арқылы орындалады. Мұнда төмендегі ережелерге ұстанған жөн:

1-ереже. Теңсіздіктің кез келген мүшесін теңсіздіктің бір бөлігінен екінші бөлігіне қарама-қарсы таңбамен өткізуге болады.

2-ереже. Теңсіздіктің екі бөлігін бірдей оң санға көбейту немесе бөлуге болады, мұнда теңсіздік белгісі өзгермейді.

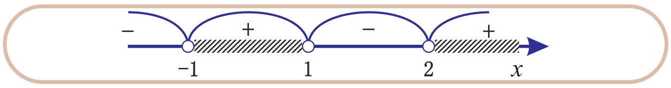
3-ереже. Теңсіздіктің екі бөлігін бірдей теріс санға көбейту немесе бөлуге болады, мұнда теңсіздік белгісі қарама-қарсысына өзгереді.

Рационал теңсіздікті шешуде, ***интервалдар тәсілінен*** пайдаланылады.

1-мысал. Теңсіздікті шешіңдер: $(x-1)(x+1)(x-2)>0$.

Шешуі. 1. Теңсіздіктің оң жағы нөлге тең, демек, сол жағындағы өрнектің нөлдерін табамыз: $x=1, x=-1, x=2$.

2. x -тің бұл мәндерін сан осінде белгілейміз, алынған әрбір интервалда өрнектің таңбасын анықтаймыз.



3. Теңсіздіктің берілуіне орай, өрнек оң болатын интервалдар теңсіздіктің шешімі болады.

Жауабы: $x\in(-1;1)\cup(2;\infty)$

2-мысал. Теңсіздікті шешіңдер: $x^4-3<2x(2x^2-x-2)$.

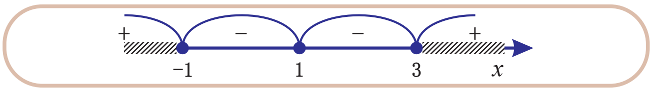
Шешуі. 1. Бұл бүтін рационал теңсіздік. Оны шешу үшін алдымен барлық өрнектерді теңсіздіктің сол жағына өткіземіз:

$$x^4-4x^3+2x^2+4x-3<0$$

2. Сол жағындағы пайда болған өрнекті көбейтушілерге жіктейміз. Ол үшін оның нөлдерін табамыз: $x_1=-1$, $x_2=1$ және $x_3=3$.

$$(x-1)^2(x+1)(x-3)\geq 0$$

3. Нөлдерді сандар осінде белгілейміз, әрбір интервалда соңғы теңсіздіктің оң жағындағы өрнектің таңбаларын белгілейміз:



4. Сол жағындағы өрнекте $(x-1)$ екімүше екінші (жұп) дәрежеде, сондықтан сан осінде 1 санының екі жағында орналасқан интервалдарда өрнек бірдей таңбалы болады.

5. Теңсіздіктің белгісі нөлден үлкен немесе тең болғандықтан, оң таңбалы аралықтар және 1 саны теңсіздіктің шешімі болады:

Жауабы: $x\in(-\infty;-1]\cup[3;+\infty)\cup\{1\}$

Бөлшек-рационал теңсіздіктер

$\frac{f(x)}{g(x)}>0$, $\frac{f(x)}{g(x)}<0$, $\frac{f(x)}{g(x)}\geq 0$, $\frac{f(x)}{g(x)}\leq 0$ көрініске келтіру мүмкін болған теңсіздіктер ***бөлшек-рационал теңсіздіктер*** деп аталады (мұндағы $f(x)$ және $g(x)$ лар x белгісізге қатысты өрнектер).

Бөлшек-рационал теңсіздіктерді шешу қадамдары:

- алымының нөлдері табылады;
- бөлімінің нөлдері табылады;
- алымы мен бөлімінің нөлдері сан осінде белгіленеді;
- пайда болған интервалдарда $\frac{f(x)}{g(x)}$ өрнектің таңбалары табылады;
- теңсіздікті қанағаттандыратын аралық (немесе аралықтар бірігуі) теңсіздіктің шешімі болады.

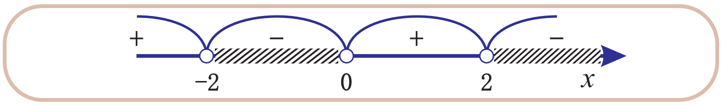
3-мысал. Теңсіздікті шешіңдер: $\frac{4}{x}-x<0$.

Шешуі

1. Ортақ бөлімге келтіреміз: $\frac{4-x^2}{x}<0$.

2. Алымының нөлдері $x=2$, $x=-2$, бөлімінің нөлі $x=0$.

3. Нөлдерді сан осінде белгілейміз және интервалдарда өрнектің таңбаларын анықтаймыз.



Теңсіздіктің белгісі нөлден кіші болғандықтан, теріс таңбалы аралықтар бірігуі теңсіздіктің шешімі болады.

Жауабы: $x\in(-2;0)\cup(2;\infty)$.

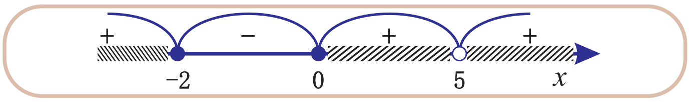
4-мысал. Теңсіздікті шешіңдер: $\frac{x(x+2)^3}{(x-5)^2}\geq 0$.

Шешуі

1. Алымының нөлдері $x=0$ және $x=-2$.

2. Бөлімінің нөлі $x = 5$.

3. Сандар осінде бұл мәндерді белгілейміз және интервалдарда өрнектің таңбаларын анықтаймыз, мұнда сол жағындағы өрнекте $(x-5)$ өрнек екінші (жұп) дәрежеде, сондықтан сан осінде 5 санының екі жағында орналасқан интервалдарда өрнек бірдей таңбалы болады.



4. Теңсіздіктің белгісі нөлден үлкен немесе тең болғандықтан, өрнек оң және нөл мән қабылдайтын аралықтар бірігуі теңсіздіктің шешімі болады:

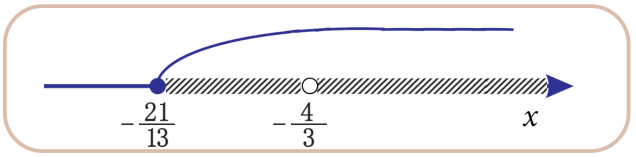
Жауабы: $x\in(-\infty;-2]\cup[0;5)\cup(5;\infty)$.

Назар аудар! $\frac{f(x)}{g(x)}<a$ көріністегі теңсіздіктерді шешуде теңсіздіктің екі жағын $g(x)\neq 0$ деп есептеп, $g(x)$ ке көбейтуден бастама. Себебі $g(x)$ тің оң немесе теріс екені анық емес.

Мысалы, $\frac{2x-1}{3x+4}\le 5 \quad \Big|\cdot(3x+4)\neq 0$

$$\begin{cases}\frac{2x-1}{3x+4}\cdot(3x+4)\le 5\cdot(3x+4)\\ 3x\neq -4\end{cases} \qquad \begin{cases}2x-1\le 15x+20\\ x\neq -\frac{4}{3}\end{cases} \qquad \begin{cases}x\ge -\frac{21}{13}\\ x\neq -\frac{4}{3}\end{cases}$$

Бұл жүйені сандар осінде бейнелейміз:



Көрініп тұр, теңсіздіктің шешімі $\left[-\frac{21}{13};-\frac{4}{3}\right)\cup\left(-\frac{4}{3};\infty\right)$ болады деген қате тұжырымға келеміз.

Дұрыс жауапты табу үшін бұл теңсіздікті өз бетіңше шешіңдер. Жоғарыда айтылған тәсіл неге дұрыс жауапты бермегенін ойлап көріңдер.

МЫСАЛДАР

Теңсіздіктерді шешіңдер.

1. $\frac{x+4}{(x+5)x}<0$

2. $\frac{x-4}{(x-3)x}<0$

3. $\frac{5+4x}{(x-2)(x+1)}\ge 0$

4. $\frac{4-3x}{(x+2)(x-1)}\ge 0$

5. $\frac{4x+3}{x+2}>5$

6. $\frac{4x-3}{x-5}>5$

7. $\frac{25-16x^2}{x^2+4x+4}>0$

8. $\frac{16-25x^2}{x^2-4x+4}>0$

9. $\frac{2x-7}{6}+\frac{7x-2}{3}<3-\frac{1-x}{2}$ теңсіздіктің бүтін сандардан тұратын шешімдерінен ең үлкенін көрсетіңдер.

10. $\frac{x-4}{2x+6}\le 0$ теңсіздіктің барлық бүтін сандардағы шешімдерінің қосындысын табыңдар.

11. $\frac{1}{x}<1$ теңсіздіктің $(-3;3)$ аралықтағы бүтін шешімдері санын табыңдар.

12. $\frac{(x+3)(x-5)}{x+1}\geq 0$ теңсіздіктің бүтін сандардан тұратын шешімдерінің ең үлкені мен ең кішісінің айырмасын табыңдар.

13. $\frac{(x+4)^2-8x-25}{(x-6)^2}\geq 0$ теңсіздіктің бүтін сандардан тұратын шешімдерінің нешеуі $[-5;\ 6]$ кесіндіге тиісті?

14. $\frac{6x-1}{4x+3}\leq\frac{3x-2}{2x-1}$

15. $\frac{5}{-6x+3}+\frac{6x}{1-2x}\geq 0$

16. $\frac{x^2+3x}{49x^2+70x+25}\leq 0$

17. $\frac{6x+1}{4x-3}\leq\frac{3x+2}{2x+1}$

18. $\frac{6}{-4x+2}-\frac{5x}{1-2x}\leq 0$

19. $\frac{49x^2-70x+25}{x^2-3x}\leq 0$

20. $\frac{x^2+3x-2}{(x-1)^2-9}-\frac{3x+1}{3x-12}\leq 0$

21. $\frac{x^2+7x+8}{(x+1)^2-9}-\frac{3x+7}{3x-6}\leq 0$

22. $\frac{1}{2x^2-5x}-\frac{2}{25+10x}+\frac{4}{25-4x^2}\geq 0$

23. $\frac{6}{-4x-x^2}-\frac{2}{x^2-4x}+\frac{x}{x^2-16}\geq 0$

24. $\left(\frac{4}{x^2+4x}+\frac{32-3x}{x^3+64}\right):\frac{x+8}{x^3-4x^2+16x}\geq\frac{4}{4+x}$

25. $\left(\frac{x^2+2x+4}{4x^2-1}\cdot\frac{2x^2-x}{-x^3+8}-\frac{2-x}{2x^2+x}\right):\frac{4}{x^2-2x}\geq\frac{4-x}{x+2x^2}$

РАЦИОНАЛ ТЕҢСІЗДІКТЕР ЖҮЙЕСІ

Теңсіздіктер жүйесін шешу қадамдары:

- әрбір теңсіздіктің шешімі бөлек табылады;
- екі теңсіздік үшін ортақ болған шешім табылады (бұл қадам сандар өсінде бейнелеу арқылы орындалуы мүмкін).

1-мысал. Теңсіздіктер жүйесін шешіңдер: $\begin{cases} x^2-9\geq 0 \\ 2x-8<0 \end{cases}$

Шешуі

$$\begin{cases} x^2-9\geq 0 \\ 2x-8<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+3)(x-3)\geq 0 \\ x<4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in(-\infty;-3]\cup[3;\infty) \\ x<4 \end{cases} \Rightarrow x\in(-\infty;-3]\cup[3;4)$$

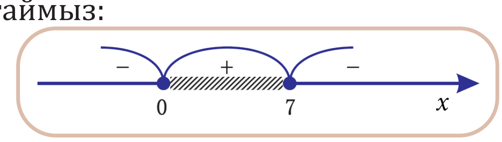
Жауабы: $x\in(-\infty;-3]\cup[3;4)$.

2-мысал. Теңсіздіктер жүйесін шешіңдер: $\begin{cases} 7x-x^2\geq 0 \\ x^2-6x+5<0 \end{cases}$

Шешуі

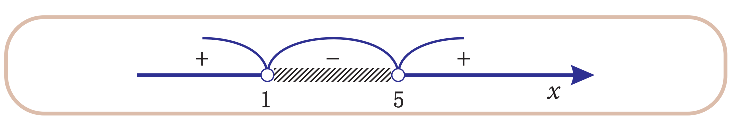
1-теңсіздікті шешеміз: $x(7-x)\geq 0$.

$x=0$ және $x=7$ нөлдерін сандар осінде белгілейміз, пайда болған интервалдарда өрнектің таңбаларын анықтаймыз:

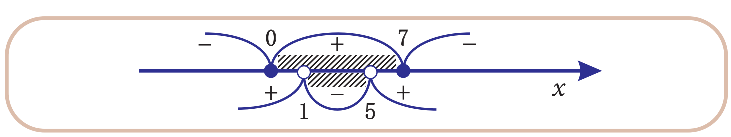


2-теңсіздікті шешеміз: $x^2-6x+5<0$.

Нөлдері $x=1$ және $x=5$ ке тең. Оларды сан осінде белгілейміз, пайда болған интервалдарда өрнектің таңбаларын анықтаймыз:



Екі теңсіздіктің шешімін бір сан осінде белгілейміз және екі теңсіздікті те қанағаттандыратын аралық жүйенің шешімі болады.



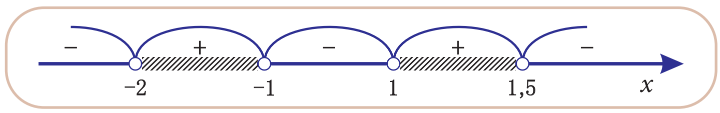
Жауабы: $x\in(1;5)$.

3-мысал. Теңсіздіктер жүйесін шешіңдер. $\begin{cases} \dfrac{(3-2x)(x+2)}{x^2-1}>0 \\ 1+2x\leq\dfrac{3}{x} \end{cases}$

1-ші теңсіздікті шешеміз:

$$\frac{(3-2x)(x+2)}{x^2-1}>0$$

Алымымен бөлімінің $x=-2, x=-1, x=1,\ x=1,5$ нөлдерді сандар осінде белгілейміз және пайда болған интервалдарда өрнектің таңбаларын анықтаймыз:

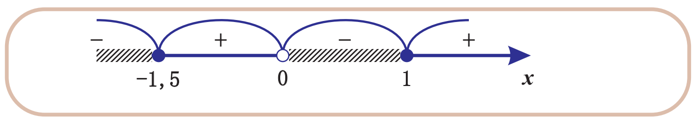


2-ші теңсіздікті шешеміз: $1+2x\leq\frac{3}{x}$.

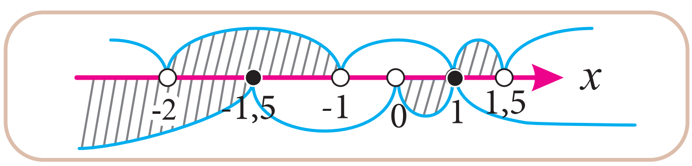
Барлық өрнектерді теңсіздіктің сол жағына өткіземіз және ортақ бөлімге келтіреміз.

$$\frac{2x^2+x-3}{x}\leq 0$$

Бөлшектің нөлдері $x=1$ және $x=-1,5$, анықталу облысы $x\neq 0$ болған мәндерден тұрады. Оларды сан осінде белгілейміз, пайда болған интервалдарда соңғы өрнектің таңбаларын анықтаймыз:



Екі теңсіздіктің шешімін бір сан осінде белгілейміз және екі теңсіздікті те қанағаттандыратын аралық жүйенің шешімі болады.



Жауабы: $x\in(-2;-1,5]$.

МЫСАЛДАР

1. Теңсіздіктер жүйесінің шешімі болатын барлық бүтін сандарды табыңдар.

a) $\begin{cases}0,2x>-1\\ -\frac{x}{3}\geq 1\end{cases}$ b) $\begin{cases}\frac{x-1}{2}<\frac{x}{3}\\ \frac{x+1}{2}\geq\frac{x}{5}\end{cases}$ c) $\begin{cases}1-\frac{x}{4}>x\\ x-\frac{x-4}{5}>1\end{cases}$ d) $\begin{cases}x-\frac{x}{4}\geq 2\\ \frac{x-1}{2}+\frac{x-2}{3}>1\end{cases}$

2. Теңсіздіктер жүйесін шешіңдер.

a) $\begin{cases}\frac{x-1}{2}-\frac{x-2}{3}\geq\frac{x-3}{4}-x\\ 1-x>0,5x-4\end{cases}$ b) $\begin{cases}\frac{5x+7}{6}-\frac{3x}{4}<\frac{11x-7}{12}\\ \frac{1-3x}{2}-\frac{1-4x}{3}\geq\frac{x}{6}-1\end{cases}$

c) $\begin{cases}\frac{2x-1}{6}+\frac{x+2}{3}-\frac{x-8}{2}>x-1\\ 2-2x>0,5+0,5\end{cases}$ d) $\begin{cases}\frac{8x+1}{3}>\frac{4x+9}{2}-\frac{x-1}{3}\\ \frac{5x-2}{3}<\frac{2x+13}{2}-\frac{x+2}{3}\end{cases}$

3. Өрнектің анықталу облысын табыңдар.

a) $\sqrt{(x-3)(x-5)}+\sqrt{(1-x)(7-x)}$ b) $\sqrt{\frac{3x+2}{5-x}}+\sqrt{\frac{4-x}{7-2x}}$

c) $\sqrt{(x-2)(x-3)}+\sqrt{(5-x)(6-x)}$ d) $\sqrt{\frac{4x+1}{x+2}}+\sqrt{\frac{2x+1}{x-7}}$

4. Функцияның анықталу облысын табыңдар.

a) $y=\sqrt{12-3x}+\sqrt{x+2}$ b) $y=\frac{\sqrt{3-5x-2x^2}}{10x}$ c) $y=\sqrt{15-3x}+\sqrt{4+x}$ d) $y=\frac{\sqrt{-3x^2+12}}{1-5x}$

5. Теңсіздіктер жүйесін шешіңдер.

a) $\begin{cases}\frac{2x+1}{x-2}<1\\ \frac{3x+2}{2x-3}>2\end{cases}$ b) $\begin{cases}\frac{7-3x}{2-5x}\le 2\\ \frac{2x+1}{3x-3}>4\end{cases}$ c) $\begin{cases}\frac{3x-2}{x-2}<2\\ \frac{5x+1}{4x-5}\ge 3\end{cases}$ d) $\begin{cases}\frac{x+3}{3x-1}\le 1\\ \frac{2x+5}{x-4}\ge 2\end{cases}$

6. Теңсіздіктер жүйесін шешіңдер.

a) $\begin{cases}x^2\le 9\\ x>0\end{cases}$ b) $\begin{cases}3x^2+7x-6\le 0\\ 6(x+4)-3(4-3x)<2\end{cases}$ c) $\begin{cases}5x^2-2x+1\le 0\\ 2(x+3)-(x-8)<4\end{cases}$

d) $\begin{cases}-2x^2+3x-2<0\\ -3(6x-1)-2x<x\end{cases}$ e) $\begin{cases}12(x+2)-5(5-4x)<2\\ 9x^2-6x-8\le 0\end{cases}$ f) $\begin{cases}3x-1<0\\ x^2-3x+2\ge 0\end{cases}$

7. Теңсіздіктер жүйесін қанағаттандыратын бүтін сандар қосындысын табыңдар.

a) $\begin{cases}\frac{9-x^2}{x}\ge 0\\ 2x-1\ge 0\end{cases}$ b) $\begin{cases}\frac{(x+5)(x-1)}{x}\ge 0\\ 10x-1<0\end{cases}$ c) $\begin{cases}\frac{(x-2)(x+3)}{x(x+7)}<0\\ 20x\ge 20\end{cases}$ d) $\begin{cases}\frac{25-x^2}{x}\le 0\\ 5x-10\le 35\end{cases}$

8. Теңсіздіктер жүйесін шешіңдер.

a) $\begin{cases}3x^2-5x-2<0\\ 4-x^2>0\end{cases}$ b) $\begin{cases}3x^2+x+2>0\\ x^2<9\end{cases}$ c) $\begin{cases}2x^2+5x+10>0\\ x^2\ge 16\end{cases}$ d) $\begin{cases}-7x^2+5x-2>0\\ x^2\le 25\end{cases}$

e) $\begin{cases}\frac{x+7}{x-5}+\frac{3x+1}{2}\ge 0\\ (5-x)^2\le 4\end{cases}$ f) $\begin{cases}-5x^2+x-1>0\\ x^2>81\end{cases}$ g) $\begin{cases}x^2-6x+8<0\\ x^2-36\ge 0\end{cases}$ h) $\begin{cases}x^2-16\ge 0\\ x^2-7x+12\ge 0\end{cases}$

i) $\begin{cases}x^2-5x+4\ge 0\\ 2x^2-5x+2\le 0\end{cases}$ j) $\begin{cases}x^2-9x+14<0\\ x^2-7x-8\le 0\end{cases}$ k) $\begin{cases}x^2+4x+3\le 0\\ 2x^2+5x<0\end{cases}$ l) $\begin{cases}\frac{(x-3)^2}{(x-3)(x+1)}\ge 0\\ (x-4)(x+4)\le 0\end{cases}$

ИРРАЦИОНАЛ ТЕҢДЕУЛЕР

$\sqrt{2x-5}=7$, $2\sqrt{x}+5=8$, $\sqrt[3]{x+3}=-1-x$ теңдеулерді белгісіз түбір белгісі астында қатынасқан. Бұл сияқты теңдеулер ***иррационал теңдеулер*** деп аталады.

Мына $\sqrt{2+\sqrt{x-5}}=\sqrt{13-x}$, $\sqrt[5]{(x+1)^2}-\sqrt[5]{(x-1)^2}=\sqrt[5]{x^2-1}$ теңдеулер де иррационал теңдеулер болады.

Көп жағдайларда иррационал теңдеулер, өзінің нәтижесі болған рационал теңдеулерге келтіріп шешіледі. Мұнда **төмендегі қадамдар орындалады:**

- иррационал теңдеуді рационал теңдеуге келтіру үшін берілген теңдеудің екі жағын бір немесе бір неше рет қандайда бір дәрежеге шығарылады;
- пайда болған рационал теңдеудің түбірлері табылады, олардың берілген иррационал теңдеуді қанағаттандыруы тексеріледі.

Бұны төмендегі теорема негіздейді.

Теорема. $f_1(x)=f_2(x)$ теңдеудің екі жағын квадратқа шығарудан пайда болған $f_1^2(x)=f_2^2(x)$ теңдеудің түбірлері $f_1(x)=f_2(x)$ және $f_1(x)=-f_2(x)$ теңдеудің түбірлерінен тұрады.

Бұл теорема $f_1(x)=f_2(x)$ теңдеуден $f_1^2(x)=f_2^2(x)$ теңдеуге өткенде түбірлер жоғалмайтындығын, керісінше бөгде түбірлердің пайда болуы мүмкін екенін көрсетеді.

Иррационал теңдеуде бір ғана түбір таңбасы қатысса, бұл түбірді теңдеудің бір жағында қалдырып, теңдеудің қалған мүшелерін екінші жағына көшіреміз. Соң теңдеудің екі жағын теңдеу түбірден құтылатындай дәрежеге шығарамыз. Нәтижеде рационал теңдеу пайда болады. Бұл пайда болған теңдеуді шешіп, оның түбірлерін берілген иррационал теңдеуге қойып, тексеріп көру керек. Табылған түбірлерден кейбіреулері берілген теңдеуді қанағаттандырмаса, олар бөгде түбірлер болады.

1-мысал. $\sqrt{2x-1}=5$ теңдеуді шешіңдер.

Шешуі. Теңдеудің анықталу облысы $2x-1\geq 0 \Rightarrow x\geq\frac{1}{2}$

Теңдеудің әр екі жағын квадратқа шығарамыз. $\left(\sqrt{2x-1}\right)^2=5^2$

$2x-1=25$ теңдеу пайда болды. Бұдан $x=13$ екені келіп шығады.

Тексеру: $\sqrt{2\cdot 13-1}=\sqrt{25}=5$.

Жауабы: $x=13$.

2-мысал. $\sqrt{x^2-x-2}=x-3$ теңдеуді шешіңдер.

Шешуі. $\sqrt{x^2-x-2}=x-3$ теңдеудің екі жағын квадратқа шығарамыз: $x^2-x-2=x^2-6x+9 \Rightarrow 5x=11 \Rightarrow x=2,2$.

Тексеру: $\sqrt{2,2^2-2,2-2}=2,2-3$, $\sqrt{0,64}=-0,8$; $0.8\neq -0,8$. Демек, $x=2,2$ бөгде түбір, теңдеудің шешімі жоқ.

Жауабы: Ø.

Иррационал теңдеулерді шешу:

I. $\sqrt{f(x)} = g(x)$ көріністегі теңдеуді оған мәндес болған $\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$ жүйеге келтіріп шешуге болады.

3-мысал. $\sqrt{3x^2 - 6x + 16} = 2x - 1$ теңдеуді шешіңдер.

Шешуі.

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 16} = 2x - 1 \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6x + 16 = (2x-1)^2 \\ 2x - 1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 6x + 16 = 4x^2 - 4x + 1 \\ 2x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 15 = 0 \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$x^2 + 2x - 15 = 0$ теңдеуді шешеміз. $x_{1,2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} = \dfrac{-2 \pm 8}{2}$, $\Rightarrow$ $x_1 = 3$, $x_2 = -5$.

$x \geq \dfrac{1}{2}$ болғандықтан, теңдеудің шешімі $x = 3$.

Жауабы: $x = 3$.

II. $\sqrt{f(x)} \cdot g(x) = 0$ көріністегі теңдеу төмендегідей шешіледі.

1-қадам: $g(x) = 0$ және $f(x) \geq 0$ 2-қадам: $f(x) = 0$

4-мысал. Теңдеуді шешіңдер: $(x^2 - 25)\sqrt{6 - 2x} = 0$.

Шешуі.

1-қадам: $\begin{cases} x^2 - 25 = 0 \\ 6 - 2x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1,2} = \pm 5 \\ x \geq 3 \end{cases} \Rightarrow x = -5$ 2-қадам: $6 - 2x = 0 \Rightarrow x = 3$

Жауабы: $x_1 = -5$; $x_2 = 3$.

III. $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ көріністегі теңдеу төмендегі жүйелердің біріне келтіріледі:

$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$ немесе $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$

5-мысал. Теңдеуді шешіңдер: $\sqrt{x + 1} = \sqrt{2x - 3}$.

Шешуі.

$$\begin{cases} x + 1 = 2x - 3 \\ 2x - 3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x \geq 1,5 \end{cases} \Rightarrow x = 4$$

Жауабы: $x = 4$.

6-мысал. Теңдеуді шешіңдер: $\sqrt{x^2+4x}=\sqrt{14-x}$.

Шешуі.

Теңдеудің екі жағын квадратқа шығарамыз. $\left(\sqrt{x^2+4x}\right)^2=\left(\sqrt{14-x}\right)^2$

$x^2+4x=14-x$ Бұдан $x_1=2;\quad x_2=-7$ екенін табамыз.

Тексеру бұл сандардың берілген иррационал теңдеудің түбірі болуын көрсетеді.

Жауабы: $x_1=2;\quad x_2=-7$.

IV. $\sqrt{f(x)}\cdot\sqrt{g(x)}=0$ көріністегі теңдеуді өзіне мәндес екі жүйелерге келтірумен шешуге болады:

$$\begin{cases} f(x)=0 \\ g(x)>0 \end{cases} \quad \text{және} \quad \begin{cases} g(x)=0 \\ f(x)>0 \end{cases}$$

Кейбір жағдайларда теңдеуде қатнасқан функцияның анықталу облысын білу, теңдеудің шешімі бар немесе жоқ екенін анықтауға, немесе шешімін табуға көмектеседі.

7-мысал. Теңдеуді шешіңдер: $\sqrt{x^2-4}\cdot\sqrt{x+5}=0$.

1) $\begin{cases} x^2-4=0 \\ x+5\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1,2}=\pm 2 \\ x\ge -5 \end{cases} \Rightarrow x_1=-2;\ x_2=2$

2) $\begin{cases} x+5=0 \\ x^2-4\ge 0 \end{cases} \Rightarrow x=-5$

Жауабы: $x_1=2;\ x_2=-2;\ x_3=-5$.

8-мысал. Теңдеуді шешіңдер: $\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{x^2-9}=0$.

Шешуі.

Теңдеудің анықталу облысын табамыз.

$$\begin{cases} 1-x^2\ge 0, \\ x^2-9\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2\le 1, \\ x^2\ge 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1\le x\le 1, \\ x\le -3,\ x\ge 3 \end{cases} \Rightarrow \varnothing$$

Теңдеудің анықталу облысы құр жиын болғандықтан, теңдеудің шешімі жоқ.
Жауабы: Ø.

9-мысал. $\sqrt{3x+7}-\sqrt{x+1}=2$ теңдеуді шешіңдер.

Шешуі.
Теңдеудің екі жағын квадратқа шығарамыз.

$$\left(\sqrt{3x+7}-\sqrt{x+1}\right)^2=2^2$$

$$3x+7-2\sqrt{(3x+7)(x+1)}+x+1=4,$$

$$\sqrt{(3x+7)(x+1)}=2x+2$$

$\sqrt{(3x+7)(x+1)}=2x+2$ теңдеудің екі жағын квадратқа шығарсақ,

$(3x+7)(x+1)=4x^2+8x+4$ теңдеу пайда болады. Бұдан $x^2-2x-3=0$ келіп шығады.

Бұл теңдеудің түбірлері $x_1=-1,\ x_2=3$.

Тексеру: $x=-1$ де $\sqrt{3(-1)+7}-\sqrt{-1+1}=2-0=2$.

$x=3$ те $\sqrt{3\cdot3+7}-\sqrt{3+1}=4-2=2$.

Екі түбір де берілген теңдеуді қанағаттандырады.

Жауабы: $x_1=-1;\ x_2=3$.

10-мысал. Теңдеуді шешіңдер: $\sqrt{3-2x}+\sqrt{x-7}=5$.

Шешуі.

Теңдеудің анықталу облысын табамыз.

$$\begin{cases}3-2x\ge0\\ x-7\ge0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\le1{,}5\\ x\ge7\end{cases}\Rightarrow x\in\varnothing$$

Теңдеудің анықталу облысы құр жиын болғандықтан, теңдеудің шешімі жоқ.

Жауабы: $\varnothing$.

11-мысал. $\sqrt[5]{25+\sqrt{x+13}}-2=0$ теңдеуді шешіңдер.

Шешуі.

$$\sqrt[5]{25+\sqrt{x+13}}=2\ \Rightarrow\ 25+\sqrt{x+13}=2^5\ \Rightarrow\ \sqrt{x+13}=7$$

$\sqrt{x+13}=7,\ x+13=7^2,\ x=49-13=36$

Тексеру: $\sqrt[5]{25+\sqrt{36+13}}=\sqrt[5]{25+\sqrt{49}}=\sqrt[5]{25+7}=\sqrt[5]{32}=2$

Жауабы: $x=36$.

12-мысал. $\sqrt{\dfrac{3x+2}{x}}+\sqrt{\dfrac{x}{3x+2}}=\dfrac{5}{2}$ теңдеуді шешіңдер.

Шешуі.

1. $\sqrt{\dfrac{3x+2}{x}}=a$ белгілеу енгізсек, $\sqrt{\dfrac{x}{3x+2}}=\dfrac{1}{a}$ болып, теңдеу $a+\dfrac{1}{a}=\dfrac{5}{2}$ көрініске келеді.

Бұл теңдеуді шешіп, $a_1=2$ және $a_2=\dfrac{1}{2}$ лерді табамыз.

2. $\sqrt{\dfrac{3x+2}{x}}=a$ алмастырудан пайдалансақ $x_1=2$ және $x_2=-\dfrac{8}{11}$ келіп шығады. Демек, теңдеудің түбірлері $x_1=2$ және $x_2=-\dfrac{8}{11}$.

Жауабы: $x_1=2$ және $x_2=-\dfrac{8}{11}$.

13-мысал. $\sqrt[3]{x^3+4x^2+3x-3}=x+1$ теңдеуді шешіңдер.

Шешуі.

$\sqrt[3]{x^3+4x^2+3x-3}=x+1 \Rightarrow x^3+4x^2+3x-3=(x+1)^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^3+4x^2+3x-3=x^3+3x^2+3x+1 \Rightarrow x^2-4=0.$

$x^2=4,\ x_{1,2}=\pm 2.$

Тексеру. $x=2$ де $\sqrt[3]{2^3+4\cdot 2^2+3\cdot 2-3}=2+1,\ \sqrt[3]{27}=3.$

$x=-2$ де $\sqrt[3]{(-2)^3+4\cdot(-2)^2+3\cdot(-2)-3}=-2+1,\ \sqrt[3]{-1}=-1.$

Жауабы: $x=\pm 2.$

14-мысал. $\sqrt{x^2-3x+5}+x^2=3x+7$ теңдеуді шешіңдер.

Шешуі.

$\sqrt{x^2-3x+5}+x^2=3x+7 \Rightarrow \sqrt{x^2-3x+5}+x^2-3x+5-12=0$

$\sqrt{x^2-3x+5}=a$ белгілеу енгізсек, $a^2+a-12=0$ квадрат теңдеу пайда болады.

$a^2+a-12=0$ теңдеуді шешсек, $a_1=3;\ a_2=-4.$

$a=3$ болғанда $\sqrt{x^2-3x+5}=3$, $x^2-3x+5=9$, $x^2-3x-4=0$ теңдеуді шешеміз: $x_1=4;\ x_1=-1.$

$a=-4\notin[0;\infty)$ болғандықтан $\sqrt{x^2-3x+5}=-4$ теңдеу шешімі жоқ.

$x_1=4;\ x_1=-1$ теңдеудің шешімдері.

Жауабы: $x_1=4;\ x_2=-1.$

Теңдеудің анықталу облысы деп теңдеудің сол және оң жақтары мағынаға ие болатын белгісіздің мәндері жиынына айтады. Иррационал теңдеуді анықталу облысын таппай-ақ дұрыс шешуге болады. Тек тексеру қажет. Кейбір теңдеулердің анықталу облысын табу пайдалы.

Мысалы:

1) $\sqrt{x^3+4x-1-8\sqrt{x^4-x}}=\sqrt{x^3-1}+2\sqrt{x}$ теңдеудің анықталу облысын табу айтарлықтай күрделі және пайдасыз *(кеңес: теңдеудің оң және сол жақтарын квадратқа шығарыңдар).*

2) Ал $\sqrt{x^2-x}+\sqrt{2-x-x^2}=\sqrt{x}-1$ теңдеудің анықталу облысын табу пайдалы. Оны өз бетіңше тексеріңдер.

V. $\sqrt{f^2(x)}=f(x)$ теңдеу $f(x)\geq 0$ теңсіздікке мәндес,

$\sqrt{f^2(x)}=-f(x)$ теңдеу $f(x)\leq 0$ теңсіздікке мәндес.

МЫСАЛДАР

Теңдеулерді шешiңдер.

1. $\sqrt{5x+2}=10$

2. $\sqrt{4x-6}=12$

3. $\sqrt{10-2x}=4$

4. $\sqrt{-12+7x}=x$

5. $\sqrt{x+12}+x=0$

6. $\sqrt{4+3x}=-x$

7. $x-3=\sqrt{9-x}$

8. $-x=\sqrt{15-2x}$

9. $x-6=\sqrt{8-x}$

10. $\sqrt{\dfrac{3x-17}{7}}=4$

11 $\sqrt{\dfrac{11}{6-4x}}=\dfrac{1}{2}$

12. $\sqrt{\dfrac{4}{5x-2}}=1$

13. $\sqrt{5x-3}=\sqrt{2x}$

14 $\sqrt{4-2x}=2\sqrt{x-1}$

15. $\sqrt{x^2-3x+1}=\sqrt{2x-5}$

16. $3x+2\sqrt{2x^2+3x-5}=12$

17. $3+\sqrt{3x^2-8x+14}=2x$

18. $\sqrt{15x^2-7x+8}=4x$

19. $\sqrt{x^2+x}=2-x$

20. $(x^2-25)\sqrt{6-2x}=0$

21. $(4-x^2)\sqrt{-1-3x}=0$

22. $(x^2-16)(x-3)(x-6)\sqrt{5-x}=0$

23. $(x^2-9x+14)\sqrt{x^2-9}=0$

24. $(x-4)\cdot\sqrt{3+2x-x^2}=0$

25. $\sqrt{5x+4}-\sqrt{x+3}=1$

26. $\sqrt{x-2}+\sqrt{1-x}=2$

27. $\sqrt{x-13}+\sqrt{10-x}=4$

28. $\sqrt{(2x-3)^2}=2x-3$

29. $\sqrt{3x-2}+\sqrt{x-1}=3$

30. $2\sqrt{x-2}+2=\sqrt{3x+1}$

31. $\sqrt{x^2+77}-2\sqrt[4]{x^2+77}-3=0$

32. $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}=12$

33. $\sqrt{x}+\sqrt{x-2}=1-x$

34. $\sqrt{x^2+32}=2\sqrt[4]{x^2+32}+3$

35. $x^2+5x+4-5\sqrt{x^2+5x+28}=0$

36. $x^2+\sqrt{x^2+2x+8}=12-2x$

37. $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-1}=\sqrt{3x-5}$

38. $\sqrt{x+2}+\sqrt{x+5}=\sqrt{2x+11}$

39. $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}$

40. $\sqrt[3]{7-x}=\sqrt{3-x}$

ИРРАЦИОНАЛ ТЕҢДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІ

Иррационал теңдеулер жүйесін шешу мәндес жүйелерге немесе нәтижелерге өту ережелеріне негізделеді. Иррационал теңдеулер жүйесін шешуде түрлі тәсілдер қолданылады: көбейтушілерге жіктеу, айнымалыларды жою, алгебралық қосу, айнымалыларды алмастыру және т.б.

1-мысал. $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=8 \\ \sqrt{xy}=7 \end{cases}$ теңдеулер жүйесін шешіңдер.

Шешуі.

Теңдеулер жүйесінің анықталу облысын табамыз: $x \geq 0$, $y \geq 0$.

$\sqrt{x}=a, \sqrt{y}=b$ белгілеулер енгіземіз.

$$\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=8 \\ \sqrt{xy}=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=8 \\ ab=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=8-b \\ (8-b)b=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=8-b \\ b^2-8b+7=0 \end{cases}$$

$b^2-8b+7=0$ теңдеуді шешеміз, $b_{1,2}=\dfrac{8\pm\sqrt{64-28}}{2}=\dfrac{8\pm 6}{2}, \Rightarrow b_1=7, b_2=1.$

$a_1=8-b_1 = 8-7=1, \Rightarrow a_1=1.$

$a_2=8-b_2 = 8-1=7, \Rightarrow a_2=7.$

4) $a_1=1, \ b_1=7$ -де $\sqrt{x}=1, \sqrt{y}=7. \Rightarrow x=1, y=49.$

$a_2=7, b_2=1$ -де $\sqrt{x}=7, \sqrt{y}=1. \Rightarrow x=49, y=1.$

Тексеру: $x=1, y=49$ -да

$$\begin{cases} \sqrt{1}+\sqrt{49}=8 \\ \sqrt{49}=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+7=8 \\ 7=7 \end{cases}$$

$x=49, y=1$ -де

$$\begin{cases} \sqrt{49}+\sqrt{1}=8 \\ \sqrt{49}=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7+1=8 \\ 7=7 \end{cases}$$

Жауабы: (1; 49), (49; 1).

2-мысал. $\begin{cases} x-y=21 \\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=3 \end{cases}$ теңдеулер жүйесін шешіңдер.

Шешуі.

Теңдеулер жүйесінің анықталу облысын табамыз: $x \geq 0$, $y \geq 0$.

$x-y=(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})$ қысқа көбейту формулаларынан пайдаланып шешеміз.

$$\begin{cases} x-y=21 \\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)=21 \\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)=21 \\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$+\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=7 \\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=5 \\ \sqrt{y}=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=25 \\ y=4. \end{cases}$$

Тексеру: $x=25,\ y=4$ те $\begin{cases} 25-4=21 \\ \sqrt{25}-\sqrt{4}=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 21=21 \\ 5-2=3 \end{cases}$

Жауабы: (25; 4).

3-мысал. $\begin{cases} x+y+\sqrt{x+y}=20 \\ x^2+y^2=136 \end{cases}$ теңдеулер жүйесін шешіңдер.

Шешуі.

Алдымен жүйедегі бірінші теңдеуді шешіп аламыз.

$x+y+\sqrt{x+y}=20$, $\sqrt{x+y}=a$ белгілеу енгізсек, $a^2+a-20=0$ квадрат теңдеу пайда болады. $\sqrt{x+y}\ge 0$ болғандықтан $a\ge 0$ болады, яғни $a\in[0;\infty)$.

$a^2+a-20=0$ теңдеуді шешеміз, $a_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+80}}{2}=\dfrac{-1\pm 9}{2}$, $a_1=4,\ a_2=-5$.

$4\in[0;\infty)$, $-5\notin[0;\infty)$. Демек, $\sqrt{x+y}=4$. $x+y=16$.

$$\begin{cases} x+y+\sqrt{x+y}=20 \\ x^2+y^2=136 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=16 \\ x^2+y^2=136 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=16-y \\ (16-y)^2+y^2=136 \end{cases}$$

$(16-y)^2+y^2=136 \Rightarrow y^2-16y+60=0$ теңдеуді шешеміз.

$$y_{1,2}=\frac{16\pm\sqrt{256-240}}{2}=\frac{16\pm 4}{2},\ \Rightarrow y_1=10,\ y_2=6.$$

$y_1=10,\ y_2=6$ болса, $x+y=16$ дан $x_1=6,\ x_2=10$ келіп шығады. (10; 6) және (6; 10) жүйенің шешімі.

Тексеру: $\begin{cases} 10+6+\sqrt{10+6}=16+4=20 \\ 10^2+6^2=100+36=136 \end{cases}$

Жауабы: (10; 6), (6; 10).

4-мысал. $\begin{cases} x+y=28 \\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=4 \end{cases}$ теңдеулер жүйесін шешіңдер.

Шешуі.

$\sqrt[3]{x}=a,\ \sqrt[3]{y}=b$ белгілеу енгіземіз: $x=a^3,\ y=b^3$.

$$\begin{cases} x+y=28 \\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3+b^3=28 \\ a+b=4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)=28 \\ a+b=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\left(a^2-ab+b^2\right)=28 \\ a+b=4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2-ab+b^2=7 \\ a+b=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a+b)^2-3ab=7 \\ a+b=4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4^2-3ab=7 \\ a+b=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3ab=9 \\ a+b=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab=3 \\ a+b=4 \end{cases}$$

$\begin{cases} ab=3 \\ a+b=4 \end{cases}$ теңдеулер жүйесінен $a_1=1,\ b_1=3$ және $a_2=3,\ b_2=1$ келіп шығады.

$\sqrt[3]{x}=a,\ \sqrt[3]{y}=b,\ a_1=1,\ b_1=3$ те $\sqrt[3]{x}=1,\ \sqrt[3]{y}=3 \Rightarrow x=1,\ y=27$.

$a_2=3,\ b_2=1$ де $\sqrt[3]{x}=3,\ \sqrt[3]{y}=1 \Rightarrow x=27, y=1$.

Тексеру: $x=1, y=27$ немесе $x=27, y=1$ де $\begin{cases} 1+27=28 \\ \sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{27}=1+3=4 \end{cases}$

Жауабы: (1; 27), (27; 1).

5-мысал. $\begin{cases} 3x-\sqrt{y+2x}=1 \\ y+3x=5 \end{cases}$ теңдеулер жүйесін шешіңдер.

Шешуі. 1) $\begin{cases} 3x-\sqrt{y+2x}=1 \\ y+3x=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x-\sqrt{y+2x}=1 \\ y=5-3x \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x-\sqrt{5-3x+2x}=1 \\ y=5-3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{5-x}=3x-1 \\ y=5-3x \end{cases}$$

2) $\sqrt{5-x}=3x-1$ теңдеуді шешеміз. $\sqrt{5-x}\ge 0$ болғандықтан

$$3x-1\ge 0,\ \Rightarrow\ 3x\ge 1,\ \Rightarrow\ x\ge \frac{1}{3},\ \Rightarrow\ x\in\left[\frac{1}{3};\infty\right).$$

$\sqrt{5-x}=3x-1$ теңдіктің екі жағын квадратқа шығарсақ,

$5-x=(3x-1)^2$, $\Rightarrow$ $5-x=9x^2-6x+1$, $\Rightarrow$ $9x^2-5x-4=0$ квадрат теңдеу пайда болады. Теңдеудің түбірлерін табамыз:

$$x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25+144}}{18}=\frac{5\pm 13}{18}, \Rightarrow x_1=1,\ x_2=-\frac{4}{9}.$$

$x\in\left[\frac{1}{3};\infty\right)$ болғандықтан $1\in\left[\frac{1}{3};\infty\right)$, $-\frac{4}{9}\notin\left[\frac{1}{3};\infty\right)$.

$x=1$ де $y=5-3x=5-3=2$, $y=2$. (1; 2) жүйенің шешімі.

Тексеру: (1; 2) де $\begin{cases}3\cdot1-\sqrt{2+2\cdot1}=3-\sqrt{4}=3-2=1\\ 2+3\cdot1=5\end{cases}$

Жауабы: (1; 2).

6-мысал. $\begin{cases}\sqrt{x-2y+2}=2,\\ \sqrt{y-2x+11}=x-5\end{cases}$ теңдеулер жүйесін шешіңдер.

Шешуі.

$\sqrt{y-2x+11}\geq 0$ болғандықтан $x-5\geq 0$, $x\geq 5$. $x\in[5;\infty)$.

$$\begin{cases}\sqrt{x-2y+2}=2,\\ \sqrt{y-2x+11}=x-5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left(\sqrt{x-2y+2}\right)^2=4\\ \left(\sqrt{y-2x+11}\right)^2=(x-5)^2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x-2y+2=4,\\ y-2x+11=x^2-10x+25\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-2y=2,\\ y=x^2-8x+14\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x-2(x^2-8x+14)=2,\\ y=x^2-8x+14\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x^2-17x+30=0,\\ y=x^2-8x+14\end{cases}$$

$2x^2-17x+30=0$ теңдеуді шешеміз, $x_{1,2}=\frac{17\pm\sqrt{289-240}}{4}=\frac{17\pm 7}{4}$,

$x_1=6$, $x_2=\frac{5}{2}$.

$x\in[5;\infty)$ шартты тексереміз, $6\in[5;\infty)$, $\frac{5}{2}\notin[5;\infty)$.

$x_1=6$ да $y_1=6^2-8\cdot6+14=36-48+14=2$. $\Rightarrow y_1=2$

Тексеру: (6; 2) де $\begin{cases}\sqrt{6-2\cdot2+2}=\sqrt{4}=2,\\ \sqrt{2-2\cdot6+11}=6-5=1\end{cases}$

Жауабы: (6; 2).

7-мысал. $\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{2x+y+2}=7\\ 3x+2y=23\end{cases}$ теңдеулер жүйесін шешіңдер.

Шешуі.

$\sqrt{x+y}=a$ және $\sqrt{2x+y+2}=b$ белгілеулер енгізсек, $a\ge 0$, $b\ge 0$ болады.

$x+y=a^2$, $2x+y+2=b^2$

$$+\begin{cases} x+y=a^2 \\ 2x+y+2=b^2 \end{cases} \Rightarrow 3x+2y+2=a^2+b^2.$$

$3x+2y=23$ екенін ескерсек, $3x+2y+2=a^2+b^2 \Rightarrow 25=a^2+b^2$.

$$\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{2x+y+2}=7 \\ 3x+2y=23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=7 \\ a^2+b^2=25 \end{cases} \Rightarrow a_1=3, b_1=4.\ a_2=4, b_2=3.$$

$$a_1=3, b_1=4 \text{ те } \begin{cases} \sqrt{x+y}=3, \\ \sqrt{2x+y+2}=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=9, \\ 2x+y+2=16 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y=9 \\ 2x+y=14 \end{cases} \Rightarrow x=5, y=4.$$

$$a_2=4, b_2=3 \text{ те } \begin{cases} \sqrt{x+y}=4, \\ \sqrt{2x+y+2}=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=16, \\ 2x+y+2=9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y=16 \\ 2x+y=7 \end{cases} \Rightarrow x=-9,\ y=25.$$

Тексеру: $(5;\ 4)$ те $\begin{cases} \sqrt{5+4}+\sqrt{2\cdot 5+4+2}=\sqrt{9}+\sqrt{16}=3+4=7, \\ 3\cdot 5+2\cdot 4=15+8=23 \end{cases}$

$(-9;\ 25)$ те $\begin{cases} \sqrt{(-9)+25}+\sqrt{2\cdot(-9)+25+2}=\sqrt{16}+\sqrt{9}=4+3=7, \\ 3\cdot(-9)+2\cdot 25=-27+50=23 \end{cases}$

Жауабы: $(5;\ 4), (-9;\ 25)$.

МЫСАЛДАР

Теңдеулер жүйесін шешіңдер.

1. a) $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=4 \\ 2\sqrt{x}+3\sqrt{y}=18 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3\sqrt{x}-\sqrt{y}=8 \\ \sqrt{x}+2\sqrt{y}=19 \end{cases}$

2. a) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=3 \\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=1 \\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3 \end{cases}$

3. a) $\begin{cases} 2\sqrt[3]{x}+3\sqrt[3]{y}=-1 \\ 2\sqrt[3]{x}-3\sqrt[3]{y}=-7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{y}=3 \\ 3\sqrt[3]{x}-2\sqrt[3]{y}=-9 \end{cases}$

4. a) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=26 \\ \sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}=6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=5 \\ \sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}=1 \end{cases}$

5. a) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=9 \\ \sqrt[6]{x}+\sqrt[6]{y}=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=7 \\ \sqrt[6]{x}-\sqrt[6]{y}=1 \end{cases}$

6. a) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=8 \\ \sqrt{x}\sqrt{y}=15 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=7 \\ \sqrt{x}\sqrt{y}=12 \end{cases}$

7. a) $\begin{cases} \sqrt{x}+3\sqrt{y}=10 \\ \sqrt{x}\sqrt{y}=8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2\sqrt{x}-\sqrt{y}=5 \\ \sqrt{x}\sqrt{y}=3 \end{cases}$

8. a) $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=4 \\ x-y=32 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=8 \\ x-y=16 \end{cases}$

9. a) $\begin{cases} \sqrt{6+x}-3\sqrt{3y+4}=-10 \\ 4\sqrt{3y+4}-\sqrt{6+x}=14 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2\sqrt{x-2}+\sqrt{5y+1}=8 \\ 3\sqrt{x-2}-2\sqrt{5y+1}=-2 \end{cases}$

10. a) $\begin{cases} \sqrt[4]{x+y}-\sqrt[4]{x-y}=2 \\ \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt[4]{x+y}+\sqrt[4]{x-y}=4 \\ \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=10 \end{cases}$

11. a) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=5 \\ x\cdot y=216 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=3\dfrac{3}{4} \\ x\cdot y=1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=-3 \\ x\cdot y=8 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=2 \\ x\cdot y=27 \end{cases}$

12. a) $\begin{cases} y\sqrt{x}+x\sqrt{y}=30 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y\sqrt{x}-x\sqrt{y}=-12 \\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=1 \end{cases}$

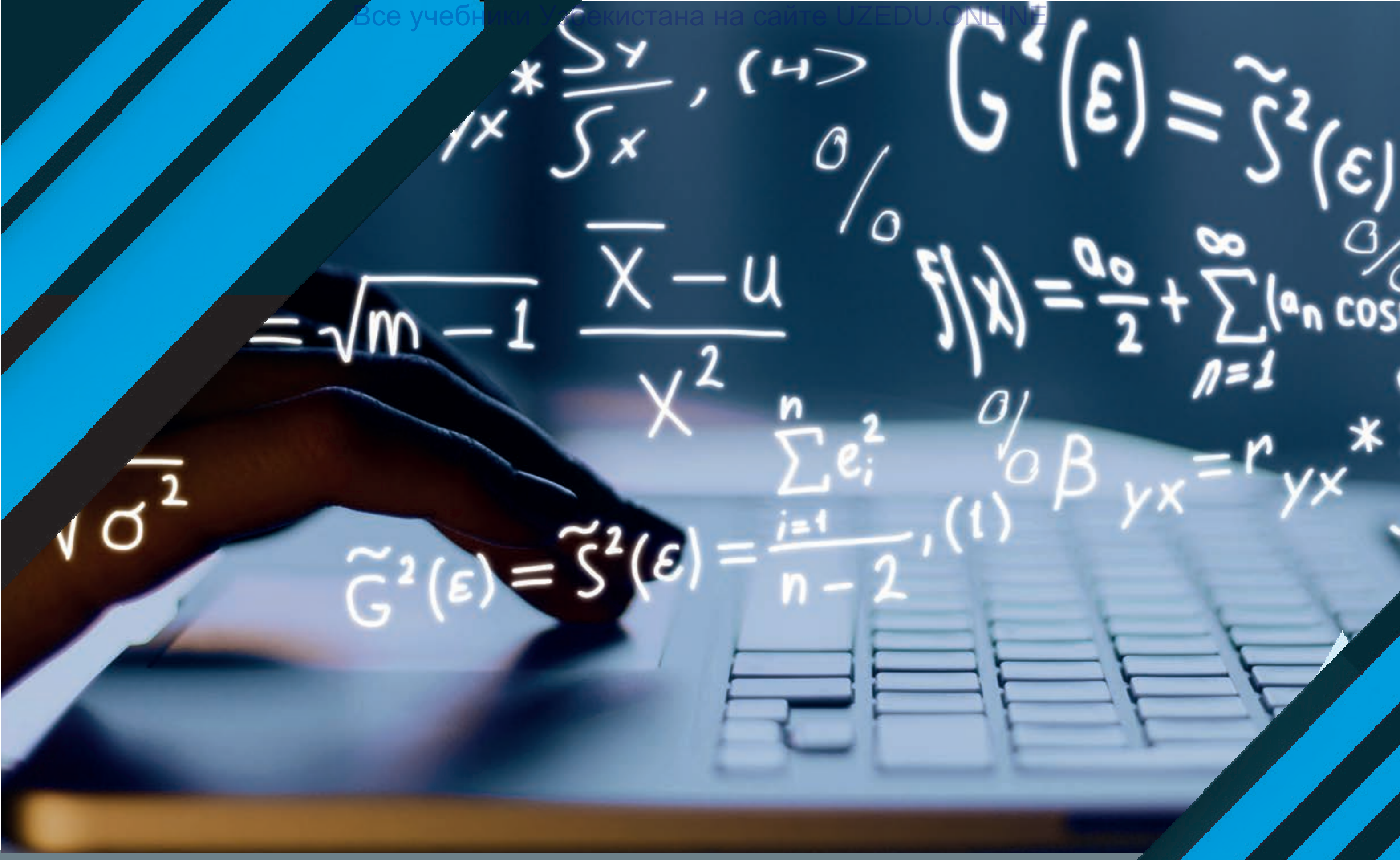
13. a) $\begin{cases} y+x-\sqrt{xy}=7 \\ xy=9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y+\sqrt{xy}=20 \\ xy=64 \end{cases}$

14. a) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=3 \\ \sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=-1 \\ \sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}=7 \end{cases}$

15. a) $\begin{cases} 3\sqrt{\dfrac{x}{y}}+2\sqrt{\dfrac{y}{x}}=5 \\ 4\sqrt{x}+\sqrt{y}=10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4\sqrt{\dfrac{x}{y}}+2\sqrt{\dfrac{y}{x}}=9 \\ 7\sqrt{x}+2\sqrt{y}=48 \end{cases}$

16. a) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{10}{3} \\ y^2+x^2=82 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{5}{2} \\ y^2-x^2=15 \end{cases}$

17. a) $\begin{cases} 4y+5x-\sqrt{xy}=79 \\ 5x-4y+\sqrt{xy}=81 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 9y+2x-\sqrt{xy}=71 \\ 2x-9y+\sqrt{xy}=73 \end{cases}$



3-ТАРАУ. КӨРСЕТКІШТІК ЖӘНЕ ЛОГАРИФМДІК ФУНКЦИЯЛАР

- КӨРСЕТКІШТІК ФУНКЦИЯ
- КӨРСЕТКІШТІК ТЕҢДЕУЛЕР
- КӨРСЕТКІШТІК ТЕҢСІЗДІКТЕР
- ЛОГАРИФМ ҰҒЫМЫ. ЛОГАРИФМДІК ФУНКЦИЯ
- ЛОГАРИФМДІК ӨРНЕКТЕРДІ ТЕПЕ-ТЕҢ ТҮРЛЕНДІРУ
- ЛОГАРИФМДІК ТЕҢДЕУЛЕР
- КӨРСЕТКІШТІК ЖӘНЕ ЛОГАРИФМДІК ТЕҢДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІ
- ЛОГАРИФМДІК ТЕҢСІЗДІКТЕР
- КӨРСЕТКІШТІК ЖӘНЕ ЛОГАРИФМДІК ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ ҚОЛДАНЫЛУЫ

КӨРСЕТКІШТІК ФУНКЦИЯ

Соңғы кездері жер деңгейінен шаңның көтерілуі жиі байқалады. Шаң көтерілген сайын оның мөлшері азаятыны дәлелденген. Шаң мөлшерінің биіктікке тәуелділігі көрсеткіштік функциямен өрнектеледі. Сонымен қатар, вирустардың көбеюі, радиоактивті заттардың ыдырауы сияқты құбылыстар да көрсеткіштік функциялармен сипатталады.

Мысалы, y шаң мөлшерінің x биіктігіне тәуелділігі $y = p \cdot e^{-qx}$ түріндегі функциямен бейнеленеді. Мұндағы p, q сандары – ***параметрлер*** деп аталатын шамалар, ал e – ***Эйлер саны*** деп аталатын иррационал сан. Оның жуық мәні 2,71-ге тең.

Көрсеткіштік функцияларды үйрену үшін төмендегі қасиеттерді білу қажет:

1) $a^0 = 1, \quad a \neq 0$ 2) $a^1 = a$ 3) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

4) $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ 5) $\left(a^n\right)^m = a^{nm}$ 6) $(ab)^n = a^n \cdot b^n$

7) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}, \quad b \neq 0$ 8) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \quad a > 0,\ n \in N,\ m \in Z$

Бөлшек көрсеткішті $a^{\frac{m}{n}}$ немесе нақты көрсеткішті a^p көріністегі дәрежелерді де қарастыруға болатындығы белгілі. Мұнда көрсеткіштің кейбір мәндерінде a^p дәреже мағынасысыз болуы мүмкін. Мысалға, $(-3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-3}$ өрнек нақты сандар жиынында мағынасыз. Одан басқа, $0^{-3} = \dfrac{1}{0^3} = \dfrac{1}{0}$ өрнек те анықталмаған. Осындай жағдайлардың алдын алу үшін нақты p көрсеткішті a^p дәреже үшін $a > 0$ теңсіздік орындалуы талап етіледі. Әрқандай p нақты сан үшін $1^p = 1$ болғандықтан негізі 1 болған дәрежелерді үйрену арқылы ешқандай жаңа мәлімет алуға болмайды.

Сонымен, жоғарыда айтылғандарға сүйене отырып, мынадай қорытынды жасауға болады.

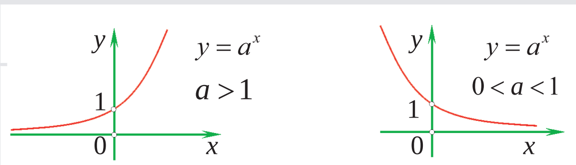
Қорытынды. Кез келген p нақты көрсеткішті a^p дәреже анық мән қабылдауы үшін a негіз $a > 0$ және $a \neq 1$ шарттарды қанағаттандыруы қажет.

$a > 0$ және $a \neq 1$ шарттарды қанағаттандыратын a нақты санды қарастырайық. Мына $y = a^x$ көріністегі функция ***көрсеткіштік функция*** деп аталады (дәреже көрсеткіші – айнымалы шама).

$y = a^x$ көрсеткіштік функцияның мынадай қасиеттері бар:

- $y = a^x$ көрсеткіштік функцияның анықталу облысы барлық нақты сандар жиынынан тұрады: $D(y) = (-\infty; +\infty)$.
- $y = a^x$ көрсеткіштік функцияның мәндер жиыны барлық оң нақты сандар жиынынан тұрады: $E(y) = (0; +\infty)$.
- $y = a^x$ көрсеткіштік функцияның графигі Ox осімен қиылыспайды.
- $y = a^x$ көрсеткіштік функцияның графигі Oy осімен (0,1) нүктеде қиылысады.

1-сурет



Көрсеткіштік функцияның графигі

● Көрсеткіштік функция периодты емес, жұп та емес, тақ та емес.

● a негіздің $0 < a < 1$ теңсіздіктерді қанағаттандыратын мәндерінде функция кемиді: Кему аралығы $(-\infty; +\infty)$ дан тұрады.

● a негіздің $a > 1$ теңсіздіктерді қанағаттандыратын мәндерінде функция өседі: Өсу аралығы $(-\infty; +\infty)$.

1-мысал. $(0,1)^{\sqrt{2}}$ ді 1 мен салыстырыңдар.

Шешуі.

$1=(0,1)^0$ және $y=(0,1)^x$ функция $x \in R$ де кемімелі болғандықтан

$$\sqrt{2}>0 \Rightarrow (0,1)^{\sqrt{2}}<(0,1)^0 \Rightarrow (0,1)^{\sqrt{2}}<1$$

Жауабы: $(0,1)^{\sqrt{2}}<1$.

2-мысал. Мына $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y=e^x$, $y=2,6^x$ функциялардан қайсылары кемімелі?

Шешуі.

Берілген үш функциядан тек бірінші функцияда қатынасушы өрнектің негізгі 0 мен 1 арасында жатады, сол себепті бірінші функция кемімелі функция болады.

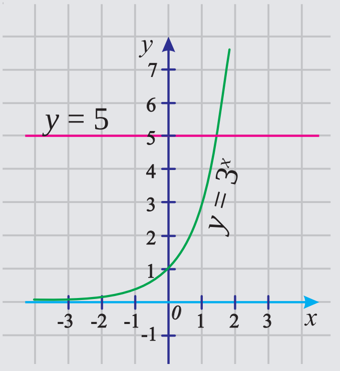
Жауабы: $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

3-мысал. $3^x=5$ теңдеудің тек бір ғана түбірі бар екенін көрсетіңдер.

Шешуі.

$y=3^x$ және $y=5$ функциялардың графиктерін бір координаталар жазықтығында саламыз (2-*сурет*).

2-сурет



Суреттен графиктер тек жалғыз нүктеде қиылысатыны көрініп тұр. Демек, теңдеудің бір ғана түбірі бар екен.

МЫСАЛДАР

1. Функцияның қасиеттерін айтыңдар және оның графигін салыңдар.

a) $y=3^x$ b) $y=0,4^x$ c) $y=0,8^x$ d) $y=1,5^x$

2. Функцияның мәндер жиынын табыңдар.

a) $y=3^x$ b) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x-1$;

c) $y=-\left(\frac{1}{3}\right)^x$ d) $y=4^x+2$

3. Сандарды салыстырыңдар.

a) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$ және 1; b) $3,2^{-\sqrt{2}}$ және 1; c) $0,7^{\frac{\sqrt{5}}{9}}$ және $0,7^{\frac{1}{6}}$; d) $5^{-\sqrt{13}}$ және $\left(\frac{1}{5}\right)^{2,1}$

4. Есептеңдер.

a) $((\sqrt{3})^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}$ b) $3^{1-2\sqrt{3}}\cdot 9^{1+\sqrt{3}}$ c) $64^{\sqrt{2}}:64^{3\sqrt{2}}$ d) $(5^{\sqrt[5]{16}})^{\sqrt[5]{2}}$

5. Өрнекті ықшамдаңдар.

a) $(c^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}$ b) $b^{\sqrt{2}}\cdot(\frac{1}{b})^{\sqrt{2}-1}$ c) $x^{\pi}\cdot\sqrt[4]{x^2}:6x^{4\pi}$ d) $y^{\sqrt{2}}\cdot y^{1,5}:6\sqrt[3]{y^{3\sqrt{2}}}$

6. Мына $y=\left(\frac{5}{9}\right)^x$, $y=\pi^x$, $y=1,7^x$ функциялардан қайсы бірі өспелі?

7. Төмендегі функциялардың графиктерінің эскизін салыңдар.

a) $y=2^{|x|}$ b) $y=-2^{|x|+1}$ c) $y=2^{-|x|}-1$

8. Өрнекті ықшамдаңдар.

a) $\frac{a^{2\sqrt{2}}-b^{2\sqrt{3}}}{(a^{\sqrt{2}}-b^{\sqrt{3}})^2}+1$ b) $\frac{\left(a^{2\sqrt{3}}-1\right)\left(a^{2\sqrt{3}}+a^{\sqrt{3}}+a^{3\sqrt{3}}\right)}{a^{4\sqrt{3}}-a^{\sqrt{3}}}$

c) $\frac{a^{\sqrt{5}}-b^{\sqrt{7}}}{a^{\frac{2\sqrt{5}}{3}}+a^{\frac{\sqrt{5}}{3}}b^{\frac{\sqrt{7}}{3}}+b^{\frac{2\sqrt{7}}{3}}}$ d) $\sqrt{\left(x^{\pi}+y^{\pi}\right)^2-\left(4^{\frac{1}{\pi}}xy\right)^{\pi}}$

9. Екі функциядан қайсы бірі өспелі, қайсы бірі кемімелі екенін анықтаңдар.

a) $y=\left(\sqrt{2}\right)^x$, $y=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$ b) $y=\left(\frac{\pi}{3}\right)^x$, $y=\left(\frac{3}{\pi}\right)^x$

c) $y=\left(\sqrt{5}-2\right)^x$, $y=\frac{1}{\left(\sqrt{5}-2\right)^x}$ d) $y=\left(3-\sqrt{7}\right)^x$, $y=\frac{1}{\left(3-\sqrt{7}\right)^x}$

10. Функцияның мәндер жиынын табыңдар.

a) $y=3^{x+1}-3$ b) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+2$ c) $y=\left|2^x-2\right|$ d) $y=4^{|x|}$

11. Функцияның ең үлкен және ең кіші мәнін табыңдар.

a) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{sinx}$ b) $y=4^{cosx}$ c) $y=5+3^{|cosx|}$ d) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{|sinx|}-2$

12. a ның таңбасын анықтаңдар.

a) $3^a=10$ b) $10^a=4$ c) $0,3^a=0,1$ d) $0,7^a=5$

13. Өрнектің мәнін табыңдар.

a) $6^{x-1}=12$ болса, $6^x=?$ b) $5^{x-3}=4$ болса, $5^{4-x}=?$ c) $12^{x+5}=6$ болса, $12^{-3-x}=?$

14. Қайсы жағдайларда $3^{x_1} > 3^{x_2}$ теңсіздік орындалады?

15. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ функцияның x натурал сан болғанда функция мәндерінің тізбегі геометриялық прогрессия болатындығын дәлелдеңдер.

Көрсеткіштік функцияның өмірде қолданылуы

Қайнап жатқан шәйнекті оттан алған кезде ол алдымен тез салқындайды, содан кейін салқындау жылдамдығы баяулайды. Өйткені, салқындау жылдамдығы шәйнектің температурасы мен сыртқы ортаның температурасы арасындағы айырмашылыққа пропорционалды. Бұл айырмашылық неғұрлым аз болса, шайнек соғұрлым баяу салқындайды. Шәйнектің бастапқы температурасы T_0, ауаның темпереатурасы T_1 болса, онда t секунддан кейін шәйнек температурасы $T = (T_1 - T_0)e^{-kt} + T_1$ формуламен анықталады.

Физикада қолданылуы

Ауасыз кеңістікте (вакуумда) зат еркін құлаған кезде оның жылдамдығы артады. Ауада да заттардың құлау жылдамдығы артады, бірақ белгілі бір мәннен аспайды. Егер ауа кедергісі парашютшінің түсу жылдамдығына тура пропорционал болса, яғни $F = kv$ болса, онда t секундтан соң оның түсу жылдамдығы $v = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right)$ болады, мұндағы m парашютшінің массасы.

Тұрғындардың өсуі

Белгілі бір уақыт аралығындағы ел тұрғындары санының өзгеруі мына $N = N_0e^{kt}$ формуламен көрсетіледі, мұнда $t = 0$ уақыттағы тұрғындар саны N_0, t болса N, k уақыттағы тұрғындар саны N, ал k тұрақты сан.

Биологияда қолданылуы

Органикалық дүниенің көбею заңы: тірі организмдер ағзаға қолайлы ортада көрсеткіштік функция заңы бойынша көбейеді (жыртқыштардың саны аз, азық мөлшері жеткілікті). Мысалы, бір үй шыбыны жаз бойы $8 \cdot 10^{14}$ жаңа ұрпақ береді. Олардың салмағы бірнеше миллион тонна болар еді (ал екі үй шыбынының ұрпақтары планетаның массасынан асып түскен болар еді) және олар өте үлкен аумақты алып жатқан болар еді. Егер олар тізбекте орналасса, онда бұл тізбектің ұзындығы Жерден Күнге дейінгі қашықтықтан үлкенірек болар еді. Дегенмен, табиғатта шыбынның табиғи "жауы" саналатын жануарлар мен өсімдіктердің өте көп болуы шыбындар санының соншалықты көбеюіне мүмкіндік бермейді.

КӨРСЕТКІШТІК ТЕҢДЕУЛЕР

Көрсеткіштік теңдеулер

Дәреже көрсеткішінде белгісіз қатнасқан теңдеу ***көрсеткіштік теңдеу*** деп аталады. $3^x = 9$, $4^x - 9 = 7$, $2^{x+1} = 2^{8-2x}$ теңдеулер көрсеткіштік теңдеуге мысал болады.

Белгісіздің берілген көрсеткіштік теңдеуді дұрыс сандық теңдікке айналдыратын мәні осы көрсеткіштік теңдеудің ***түбірі*** деп аталады.

Көрсеткіштік теңдеулер және оларды шешу

x белгісізді $a^x = a^p$ көрсеткіштік теңдеудің шешімі $x = p$ болады.

Көрсеткіштік теңдеулерді шешуде мына ереже пайдаланылады:

$a > 0$, $a \neq 1$ болғанда $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ теңдеудің түбірлері $f(x) = g(x)$ теңдеудің түбірлерінен тұрады.

1-мысал. Теңдеуді шешіңдер: $2^{x-1} = 16$.

Шешуі.

Теңдеуді мына көріністе жазып аламыз: $2^{x-1} = 2^4 \Rightarrow x - 1 = 4 \Rightarrow x = 5$

Жауабы: $x = 5$.

2-мысал. Теңдеуді шешіңдер: $3^{2x} \cdot 3^{x^2} = 3^{15}$.

Шешуі.

Теңдеуді мынадай көріністе жазып аламыз: $3^{2x+x^2} = 3^{15} \Rightarrow 2x + x^2 = 15$.

$x^2 + 2x - 15 = 0$ квадрат теңдеудің түбірлері $x_1 = -5; x_2 = 3$ болады.

Жауабы: $x_1 = -5$; $x_2 = 3$.

3-мысал. Теңдеуді шешіңдер: $\left(5^{x+1}\right)^x = \left(\dfrac{5^x}{5^{24}}\right)^{-1}$.

Шешуі.

Теңдеуді мынадай көріністе жазып аламыз: $5^{x^2+x} = 5^{24-x} \Rightarrow x^2 + x = 24 - x$.

$x^2 + 2x - 24 = 0$ квадрат теңдеудің түбірлері $x_1 = -6; x_2 = 4$ болады.

Жауабы: $x_1 = -6; x_2 = 4$.

4-мысал. $6^{x^2} + 36 = 2^{1-x^2} \cdot 12^{x^2}$ теңдеудің түбірлері көбейтіндісін табыңдар.

Шешуі.

$12^{x^2} = (6 \cdot 2)^{x^2} = 6^{x^2} \cdot 2^{x^2}$ екенінен пайдаланып, теңдеуді былайша жазып аламыз:

$$6^{x^2}+36=2^{1-x^2}\cdot 6^{x^2}\cdot 2^{x^2} \Rightarrow 6^{x^2}+36=2^{1-x^2+x^2}\cdot 6^{x^2} \Rightarrow 6^{x^2}+36=2\cdot 6^{x^2}; \Rightarrow 6^{x^2}=36 \Rightarrow 6^{x^2}=6^2$$

$$x^2=2 \Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{2}$$

Демек, $x_1\cdot x_2=-\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=-2$

Жауабы: –2.

5-мысал. Теңдеуді шешіңдер: $3^{2x-1}=7^{2x-1}$.

Шешуі

Берілген теңдеуде теңдіктің екі жағындағы көрсеткішті өрнектердің дәреже көрсеткіштері бірдей. Бұл теңдеуді шешу үшін теңдіктің екі жағын 7^{2x-1} өрнекке бөлеміз:

$$\frac{3^{2x-1}}{7^{2x-1}}=\frac{7^{2x-1}}{7^{2x-1}} \Rightarrow \left(\frac{3}{7}\right)^{2x-1}=1 \Rightarrow \left(\frac{3}{7}\right)^{2x-1}=\left(\frac{3}{7}\right)^{0} \Rightarrow 2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

Жауабы: $x=\frac{1}{2}$.

6-мысал. $9^{x^2-1}-36\cdot 3^{x^2-3}+3=0$ теңдеудің түбірлері қосындысын табыңдар.

Шешуі.

Теңдеуді мынадай көріністе жазып аламыз:

$$\frac{1}{9}\cdot 9^{x^2}-\frac{36}{27}\cdot 3^{x^2}+3=0$$

$3^{x^2}=t$ деп белгілейміз, демек , $9^{x^2}=t^2$

$\frac{1}{9}\cdot t^2-\frac{4}{3}\cdot t+3=0$ квадрат теңдеуді шешіп, $t_1=9;\ t_2=3$ екенін табамыз.

$$3^{x^2}=9 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{2} \quad \text{және} \quad 3^{x^2}=3 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x_{3,4}=\pm 1$$

теңдеу түбірлерінің қосындысы: $x_1+x_2+x_3+x_4=-\sqrt{2}+\sqrt{2}-1+1=0$.

Жауабы: 0.

МЫСАЛДАР

1. Көрсеткіштік теңдеуді шешіңдер.

a) $3^x\cdot 3=81$ b) $4^{3x}\cdot 2^x=128$ c) $5^{x+1}-4\cdot 5^x=25$ d) $7^x\cdot 8^x=1$

e) $4^{x^2-3x-4}=1$ f) $0,3^{2x-1}=0,09$ g) $2^{2x}=4^{2\sqrt{3}}$ h) $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x}=9$

i) $27^x=\frac{1}{3}$ j) $400^x=\frac{1}{20}$ k) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x}=\frac{1}{81}$ l) $0,6^{x+3}=0,6^{2x-5}$

2. Теңдеуді шешіңдер.

a) $3^x = 81$ b) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{1024}$ c) $7^x = -49$ d) $13^x = -169$

e) $5^x = 0$ f) $8^{2x} = 0$ g) $3^{6-x} = 3^{3x-2}$ h) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x+1} = \left(\frac{7}{3}\right)^{5x-9}$

i) $2^{7x-15} = 2^{9-4x}$ j) $13^{5-2x} = 13^{6x+1}$ k) $2^{x^2+x-0,5} = 4\sqrt{2}$ l) $\left(\frac{4}{9}\right)^x \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} = \frac{2}{3}$

3. $\left(\frac{21}{6}\right)^{29x^2-8x} = \left(\frac{6}{21}\right)^{8x^2-29x}$

4. $\sqrt[3]{5^{2x-3}} = \frac{5}{\sqrt[4]{5}}$

5. $\left(\frac{37}{5}\right)^{71\sqrt{x}-3} = \left(\frac{5}{37}\right)^{3\sqrt{x}-293}$

6. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{x^2-9x} = 1$

7. $2^{x^2-3} \cdot 5^{x^2-3} = 0,01\left(10^{x-1}\right)^3$

8. $2^{x+1} = 5^{x+1}$

9. $7^{x+2} + 4 \cdot 7^{x-1} = 347$

10. $2 \cdot 3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-2} = 150$

11. $5^{2x} + 5^{2x+2} + 5^{2x+4} = 651$

12. $4 \cdot 7^{x+3} - 7^{x+2} - 3 \cdot 7^{x+1} = 1302$

13. $6 \cdot 2^{x+4} - 4 \cdot 2^{x+3} + 3 \cdot 2^{x+2} = 152$

14. $7^{3x} - 7^{3x-1} = 6$

15. $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$

16. $5 \cdot 25^x - 6 \cdot 5^x + 1 = 0$

17. $9^x + 3 \cdot 3^x - 18 = 0$

18. $3^{2x+3} - 4 \cdot 3^{x+1} + 1 = 0$

19. $(0,25)^{2-x} = \frac{256}{2^{x+3}}$

20. $3^{4\sqrt{x}} - 4 \cdot 3^{2\sqrt{x}} + 3 = 0$

21. $9 \cdot 16^x + 2 \cdot 12^x - 32 \cdot 9^x = 0$

22. $64 \cdot 9^x - 84 \cdot 12^x + 27 \cdot 16^x = 0$

23. $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$

24. $4^{x^2} + 6^{x^2} = 2 \cdot 9^{x^2}$

25. $8^x - 6 \cdot 12^x + 11 \cdot 18^x = 2 \cdot 27^{x+\frac{1}{3}}$

26. $x \cdot 3^{x-1} + 3 \cdot 3^{\sqrt{3-x}} = 3^x + x \cdot 3^{\sqrt{3-x}}$

27. $x^2 \cdot 4^{\sqrt{6-x}} + 4^{2+x} = 16 \cdot 2^{2\sqrt{6-x}} + x^2 \cdot 2^{2x}$

28. $\left(\frac{1}{2}\right)^{2-x} + 2^{x-3} = 80 + \sqrt{4^{x-4}}$

КӨРСЕТКІШТІК ТЕҢСІЗДІКТЕР

$4^x < 64$, $8^x + 11 > 75$, $2^{x-2} \le 2^{5+3x}$, $9^x < 7^x$ теңсіздіктер көрсеткіштік теңсіздіктерге мысал болады.

Төмендегі кестеде бірдей негізді көрсеткіштік теңсіздіктерді рационал теңсіздіктерге келтіру көрсетілген.

Көрсеткіштік теңсіздіктердің түрлері	$a^{f(x)} \le a^{g(x)}$	$a^{f(x)} < a^{g(x)}$	$a^{f(x)} > a^{g(x)}$	$a^{f(x)} \ge a^{g(x)}$
$0 < a < 1$ болғанда	$f(x) \ge g(x)$	$f(x) > g(x)$	$f(x) < g(x)$	$f(x) \le g(x)$
$a > 1$ болғанда	$f(x) \le g(x)$	$f(x) < g(x)$	$f(x) > g(x)$	$f(x) \ge g(x)$

1-мысал. Теңсіздікті шешіңдер: $2^x > 32$.

Шешуі.

Теңсіздікті былайша жазып аламыз: $2^x > 2^5$.

$2 > 1$ болғандықтан $x > 5$.

Жауабы: $(5; \infty)$.

2-мысал. Теңсіздікті шешіңдер: $\left(\frac{3}{4}\right)^x \ge \frac{16}{9}$.

Шешуі.

Теңсіздікті былайша жазып аламыз: $\left(\frac{3}{4}\right)^x \ge \left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$

$0 < \frac{3}{4} < 1$ болғандықтан $x \le -2$.

Жауабы: $(-\infty; -2]$

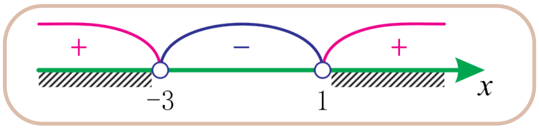
3-мысал. $3^{x^2+2x} > 3^3$ теңсіздікті шешіңдер.

Шешуі.

$3 > 1$ болғандықтан $x^2 + 2x > 3$ теңсіздіктің шешімін табу жеткілікті.

$$x^2 + 2x - 3 > 0,$$

$$(x+3)(x-1) > 0,$$



Жауабы: $x \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$.

Түрлі негізді көрсеткіштік теңсіздікдерді шешу

$a > 0$, $a \ne 1$ және $b > 0$, $b \ne 1$ болғанда мына $a^{f(x)} < b^{f(x)}$ көрсеткіштік теңсіздік $\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} < 1$ көрсеткіштік теңсіздікке келтіріп шешіледі.

МЫСАЛДАР

Теңсіздіктерді шешіңдер.

1. $4^x > 256$

2. $\left(\frac{1}{3}\right)^x \le \frac{1}{729}$

3. $7^x < -49$

4. $13^x > -169$

5. $5^x < 0$

6. $8^{2x} > 0$

7. $10^x \le 0$

8. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{x}{2}} > \sqrt{3}$

9. $\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{2x}{15}} < \sqrt[5]{6}$

10. $2^x > \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$

11. n -нің неше натурал мәні $9 \le 3^n \le 79$ қос теңсіздікті қанағаттандырады?

12. x -тің қандай мәндерінде $y = 5^x - 5$ функция оң мәндер қабылдайды?

13. $\left(\frac{4}{9}\right)^x \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x > \left(\frac{2}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-2x}$ теңсіздіктің ең үлкен бүтін шешімін табыңдар.

14. $3 \cdot 9^{2x-2} > \left(\frac{1}{27}\right)^{3x-1}$

15. $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x-3} > 4^{1-2x}$

16. $2 \cdot 8^{4-5x} < \left(\frac{1}{16}\right)^{x+2}$

17. $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{x+1}{x+2}} > \frac{\sqrt{3}}{2}$

18. $6 \cdot 2^{x+3} - 5 \cdot 2^{x+2} + 4 \cdot 2^x > 128$

19. $7 \cdot 3^{x+4} + 2 \cdot 3^{x+3} - 5 \cdot 3^{x+2} \le 192$

20. $10 \cdot 3^{x+2} - 4 \cdot 10^{x+2} < 3^{x+4} - 3 \cdot 10^{x+2}$

21. $5^{x+2} - 5^{x+1} > 2^{x+2} + 2^{x+4}$

22. $\left(\frac{3}{4}\right)^{6x+10-x^2} < \frac{27}{64}$

23. $\left(\frac{1}{25}\right)^{2x} < \left(\sqrt{5}\right)^{x^2+2.75}$

24. $\left(\frac{1}{16}\right)^{x^2} < 8 \cdot \sqrt{2}^{16-2x}$

25. $2^{x^2} > \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-3}$

26. $0{,}04^x - 26 \cdot (0{,}2)^x + 25 \le 0$

27. $25^x - 4 \cdot 5^x - 5 \ge 0$

28. $4^x - 10 \cdot 2^x + 16 < 0$

$3^{2x+1} + 1 < 4 \cdot 3^x$

30. $3^{8x} - 4 \cdot 3^{4x} \le -3$ теңсіздіктің бүтін шешімдерінің қосындысын табыңдар.

31. $x^2 \cdot 3^x - 3^{x+1} \le 0$ теңсіздіктің бүтін шешімдері нешеу?

ЛОГАРИФМ ҰҒЫМЫ. ЛОГАРИФМДІК ФУНКЦИЯ

Логарифмдер күнделікті өмірдің әртүрлі салаларында кеңінен қолданылады. Мысалы, логарифмдер банкке қойылған қаржының белгілі бір мөлшерге өсуі үшін қанша уақыт қажет екенін анықтау үшін қолданылады. Немесе дыбыс биіктігін бағалау үшін логарифмдік қатынас қолданылады.

Логарифм ұғымын және логарифмдік функцияны үйрену үшін:
1) көрсеткіштік функцияны;
2) көрсеткіштік функциялардың қасиеттерін **білу талап етіледі.**

Логарифм ұғымы

1-мысал. Теңдеуді шешіңдер: $3^x = 27$

Шешуі.

$3^x = 3^3 \quad \Rightarrow \quad x = 3$

Жауабы: $x = 3$.

2-мысал. Теңдеуді шешіңдер: $2^x = 5$

Шешуі.

Бұл теңдеудің түбірі бар, бірақ түбірі рационал сан емес. Мұндай теңдеулердің түбірін өрнектеу үшін ***логарифм*** ұғымы енгізіледі. Берілген теңдеудің түбірі $\log_2 5$ деп жазылған 5-тің 2 негізді логарифмі деп аталатын шамаға тең. Сонымен , $x = \log_2 5$

Жауабы: $x = \log_2 5$.

Жалпы алғанда, $a^x = b$ теңдеудің түбірі $x = \log_a b$ ға тең, мұндағы $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$.

Анықтама

b санының негізі a болғандағы логарифмі деп, b саны шығу үшін негіз a шығарылатын дәреже көрсеткішке айтылады. Негізі a болатын b санының логарифмі $\log_a b$ арқылы белгіленеді, бұл жерде a – логарифм негізі, b – логарифм астындағы өрнек.

$\log_a b$ өрнек ***логарифм a негізде b*** деп оқылады.

Мысалға, $\log_2 5$ өрнек логарифм 2 негізде 5 деп оқылады.

$\log_{10} b$ өрнек қысқаша $\lg b$ деп белгіленеді және ондық логарифм деп аталады, яғни $\log_{10} b = \lg b$.

$\log_e b$ өрнек қысқаша $\ln b$ деп белгіленеді және натурал логарифм деп аталады, яғни $\log_e b = \ln b$. Мұнда $e \approx 2{,}71$.

$a^x = b$ теңдеудің түбірі $\log_a b$ ны теңдеудегі x тің орнына қойсақ,

$$a^{\log_a b} = b \qquad (a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0)$$

теңдік пайда болады. Бұл теңдік ***негізгі логарифмдік тепе-теңдік*** деп аталады.

3-мысал. Анықтама бойынша есептеңдер: a) $\log_2 32$; b) $\log_3 \frac{1}{9}$; c) lg100; d) $\ln e^3$.

Шешуі.

a) $\log_2 32 = 5$, өйткені $2^5 = 32$ b) $\log_3 \frac{1}{9} = -2$, өйткені $3^{-2} = \frac{1}{9}$

c) lg100 = 2, өйткені $10^2 = 100$ d) $\ln e^3 = 3$, өйткені $e^3 = e^3$

Жауабы: a) 5; b) –2; c) 2; d) 3.

4-мысал. Есептеңдер: $\log_{64} 32$.

Шешуі.

Өрнектің мәнін көрсеткіштік теңдеу көмегімен табуға болады. $\log_{64} 32 = x$ болсын.

$$64^x = 32 \quad \Rightarrow \quad 2^{6x} = 2^5 \quad \Rightarrow \quad 6x = 5 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5}{6}$$

Жауабы: $\frac{5}{6}$.

5-мысал. Негізгі логарифмдік тепе-теңдік көмегімен есептеңдер: $64^{\log_8 3}$.

Шешуі.

$$64^{\log_8 3} = \left(8^2\right)^{\log_8 3} = \left(8^{\log_8 3}\right)^2 = 3^2 = 9$$

Жауабы: 9.

Логарифмдік функция және оның қасиеттері, графигі

$a > 0$ және $a \neq 1$ шарттарды қанағаттандыратын a нақты санды қарастырайық. Мына

$$y = \log_a x$$

көріністегі функция ***логарифмдік функция*** деп аталады.

Мысалы, $y = \log_2 x$, $y = \log_{\frac{1}{3}} x$, $y = \lg x$, $y = \ln x$ сияқты функциялар логарифмдік функциялар болады.

Логарифмдік функциялардың мынадай қасиеттері бар:

- $y = \log_a x$ логарифмдік функцияның анықталу облысы барлық оң нақты сандар жиынынан тұрады:

$$D(y) = (0; +\infty)$$

- $y = \log_a x$ логарифмдік функцияның мәндер жиыны барлық нақты сандар жиынынан тұрады:

$$E(y) = (-\infty; +\infty)$$

- $y = \log_a x$ функция периодты емес;
- $y = \log_a x$ функция жұп та емес, тақ та емес;
- $0<a<1$ болғанда $y = \log_a x$ функция $(0; +\infty)$ аралықта кемімелі;
- $a > 1$ болғанда $y = \log_a x$ функция $(0; +\infty)$ аралықта өспелі.

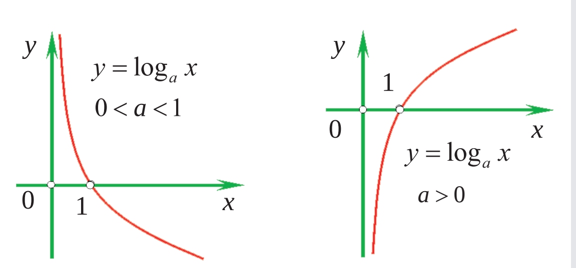
6-мысал. Салыстырыңдар: a) $\log_{0,3}7$ және $\log_{0,3}8$ b) $\log_7 0,28$ және $\log_7 0,31$.

Шешуі.

$y=\log_{0,3}x$ функция кемімелі және 7<8 болғандықтан, $\log_{0,3}7>\log_{0,3}8$ болады.

$y=\log_7 x$ функция өспелі және 0,28<0,31 болғандықтан $\log_7 0,28<\log_7 0,31$ болады.

1-сурет



Логарифмдік функцияның графигі

7-мысал. Функцияның анықталу облысын табыңдар: $y=\log_7\left(x^2-5x+6\right)$.

Шешуі.

Логарифм астындағы өрнек оң болуы қажет, бұдан

$$x^2-5x+6>0\Rightarrow(x-2)(x-3)>0\Rightarrow x\in(-\infty;2)\cup(3;\infty)$$

Жауабы: $D(y)=(-\infty;2)\cup(3;\infty)$.

8-мысал. $y=\log_{4-x}\left(x^2-9\right)$ функцияның анықталу облысын табыңдар.

Шешуі.

$$\begin{cases}4-x>0\\4-x\neq1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<4\\x\neq3\end{cases}\qquad x^2-9>0\Rightarrow x\in(-\infty;-3)\cup(3;\infty)$$

Жауабы: $D(y)=(-\infty;-3)\cup(3;4)$.

9-мысал. Функцияның графигін салыңдар:

$$y=-1+\log_2(x-1).$$

Шешуі.

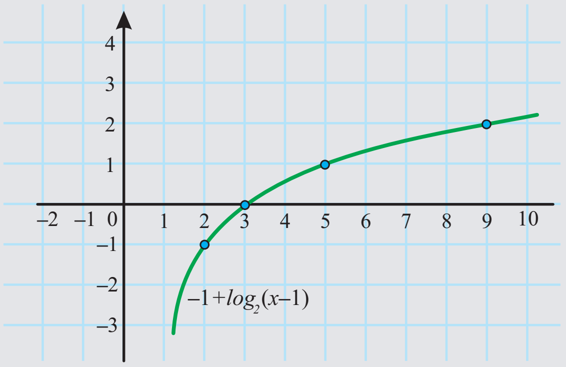
Анықталу облысын табамыз:

$$x-1>0\Rightarrow x>1$$

Мәндер кестесін құрамыз:

x	2	3	5	9
y	-1	0	1	2

2-сурет



Табылған нүктелерді координаталар жазықтығында белгілеп, оларды тегіс қисықпен қосамыз (2-*сурет*).

МЫСАЛДАР

1. Берілген функциялардың өспелі немесе кемімелі екенін анықтаңдар.

a) $y=\log_{0,075} x$ b) $y=\log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} x$ c) $y=\lg x$

d) $y=\log_{11} x$ e) $y=-\log_{\frac{1}{e}} x$ f) $y=-\log_{\pi} x$

2. Салыстырыңдар.

a) $\log_e 0,5$ және $\log_e 0,35$ b) $\log_{0,1}100$ және $\log_{0,1}101$ c) $\log_{\frac{\sqrt{15}}{4}}\sqrt{37}$ және $\log_{\frac{\sqrt{15}}{4}} 6$

3. Сандарды өсу ретімен орналастырыңдар.

a) $a=\log_{\frac{1}{5}} 10,\ b=\log_{\frac{1}{5}} 15,\ c=\log_{\frac{1}{5}} 20$

b) $a=\log_2 5,\ b=\log_{\frac{1}{4}} 3,\ c=\log_{\frac{1}{2}} 3$

c) $a=\log_{\frac{1}{6}} 4,\ b=\log_{\frac{1}{5}} 6,\ c=\log_{\frac{1}{5}} 4$

4. Мына тұжырымдардың дұрыс екенін мысалдарда тексеріңдер.

a) $a > 1$ және $b > 1$ болса, $\log_a b > 0$

b) $0 < a < 1$ және $0 < b < 1$ болса, $\log_a b > 0$

c) $a > 1$ және $0 < b < 1$ болса, $\log_a b < 0$

d) $0 < a < 1$ және $b > 1$ болса, $\log_a b < 0$

5. Берілген сандардың қайсылары оң?

a) $a=\log_{0,2} 8$ b) $b=\log_3 0,8$ c) $c=\log_{0,9} 9$

d) $d=\log_4 2$ e) $p=\log_{0,9} 0,6$ f) $l=\log_{1,2}\frac{3}{8}$

g) $z=\log_{0,02} 0,001$ h) $p=\log_{|-13,08|} 2022$ i) $q=\log_{|-3|} 3$

6. $y=\log_2 x$ және $y=-\log_2 x$ функциялардың графиктері абсцисса осіне қатысты симметриялы екенін көрсетіңдер.

7. Функцияның анықталу облысын табыңдар.

a) $y = \log_4 x$ b) $y = \log_2(x-1)$

c) $y = \log_3(x^2-2x-3)$ d) $y = \log_4(x^2-4)$

e) $y = \lg(3-x)$ f) $y = -\log_2(x^2+5x-6)$

8. Функцияның графигін салыңдар.

a) $y = \log_3 x$ b) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ c) $y = \lg x$ d) $y = \ln x$

9. Функцияның анықталу облысын табыңдар.

a) $y = \log_{x^2}(4 - x)$ b) $f(x) = \log_{x^2}(x-1) + \sqrt{2-x}$

c) $f(x) = \sqrt{9 - x^2} + \lg(x-1) - \sqrt{x}$ d) $f(x) = \sqrt{x+4} + \log_2(x^2 - 4)$

e) $f(x) = \dfrac{\log_{x^2+1}(6-x)}{\sqrt{x+2}}$ f) $y = \sqrt{2 + \log_{\frac{1}{2}}(3-x)}$

10. Функцияның графигін салыңдар.

a) $y = \log_2(x - 1)$ b) $y = \log_3(5x + 1)$ c) $y = \log_4(1 - x)$

d) $y = \lg(x - 3)$ e) $y = \log_6(3x - 2)$ f) $y = 1 - \ln x$

g) $y = \log_8 x - 4$ h) $y = \lg x + 3$ i) $y = \log_6(x - 2) - 1$

11. Функциялар графиктері қиылысу нүктелері нешеу?

a) $y = \log_2 x;\quad y = -x + 1$ b) $y = \log_{\frac{1}{2}} x;\quad y = 2x - 5$ c) $y = \log_{\frac{1}{2}} x;\quad y = 4x^2$

d) $y = \log_3 x;\quad y = 2 - \frac{1}{3}x^2$ e) $y = 2^x;\quad y = \log_{0,5} x$ f) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x;\quad y = \log_3 x$

ЛОГАРИФМДІК ӨРНЕКТЕРДІ ТЕПЕ-ТЕҢ ТҮРЛЕНДІРУ

Логарифмдік өрнектерде амалдарды орындауда және оларды ықшамдауда тепе-тең түрлендірулерден пайдаланылады. Бұл қасиеттерде қатысқан өрнектер логарифм анықталған болуы үшін талап етілетін шарттарды қанағаттандырады деп аламыз.

Логарифмнің анықтамасынан оның мынадай ***қасиеттері*** келіп шығады:

1°. $\log_a 1 = 0$.

2°. $\log_a a = 1$.

3°. $a^{\log_a b} = b$ $(a > 0, a \neq 1, b > 0)$.

4°. Көбейтіндінің логарифмі көбейтушілер логарифмдерінің қосындысына тең:

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c.$$

5°. Бөліндінің логарифмі бөлінуші мен бөлушінің логарифмдерінің айырмасына тең:

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c.$$

6°. Дәреженің логарифмі дәреже көрсеткіші мен негіз логарифмінің көбейтіндісіне тең:

$$\log_a b^p = p\log_a b.$$

7°. Бір негізден басқа негізге өту формуласы: $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$.

8°. $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$.

9°. $\log_{a^k} b = \dfrac{1}{k}\log_a b$.

10°. $\log_{a^k} b^p = \dfrac{p}{k}\log_a b$.

Көрсеткіштік және логарифмдік өрнектерді ықшамдау

Логарифмнің және логарифмдік функцияның, сонымен бірге, дәреженің және көрсеткіштік функцияның қасиеттерімен таныстық. Бұл қасиеттерден логарифмдік және көрсеткіштік өрнектерді түрлендірулерде пайдаланылады.

1-мысал. Есептеңдер: $\log_3 18 + \log_3 \dfrac{1}{54}$

Шешуі.

$$\log_3 18 + \log_3 \frac{1}{54} = \log_3\left(18 \cdot \frac{1}{54}\right) = \log_3 \frac{1}{3} = -1$$

Жауабы: –1.

2-мысал. Есептеңдер: $3\log_2 8 - 2\log_3 9$

Шешуі.

$$3\log_2 8 - 2\log_3 9 = 3\log_2 2^3 - 2\log_3 3^2 = 3\cdot 3\cdot \log_2 2 - 2\cdot 2\cdot \log_3 3 = 9\cdot 1 - 4\cdot 1 = 5$$

Жауабы: 5.

3-мысал. Есептеңдер: $10^{1+\lg 5}$.

Шешуі.

$$10^{1+\lg 5} = 10^1 \cdot 10^{\lg 5} = 10\cdot 5 = 50$$

Жауабы: 50.

4-мысал. Есептеңдер: $\log_2 \log_5 \sqrt[8]{5}$.

Шешуі.

$$\log_2 \log_5 \sqrt[8]{5} = \log_2 \log_5 5^{\frac{1}{8}} = \log_2\left(\frac{1}{8}\cdot \log_5 5\right) = \log_2 \frac{1}{8} = \log_2 2^{-3} = -3\log_2 2 = -3$$

Жауабы: –3.

5-мысал. Есептеңдер: $2^{\log_4\left(2-\sqrt{3}\right)^2} + 3^{\log_9\left(2+\sqrt{3}\right)^2}$.

Шешуі.

$$2^{\log_4\left(2-\sqrt{3}\right)^2} + 3^{\log_9\left(2+\sqrt{3}\right)^2} = 2^{\log_{2^2}\left(2-\sqrt{3}\right)^2} + 3^{\log_{3^2}\left(2+\sqrt{3}\right)^2} = 2^{\frac{1}{2}\cdot 2\log_2\left(2-\sqrt{3}\right)} + 3^{\frac{1}{2}\cdot 2\log_3\left(2+\sqrt{3}\right)} =$$

$$= 2^{\log_2\left(2-\sqrt{3}\right)} + 3^{\log_3\left(2+\sqrt{3}\right)} == 2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3} = 4.$$

Жауабы: 4.

6-мысал. Есептеңдер: $\sqrt{5^{\frac{2}{\log_3 5}} + 0{,}5^{-\log_2 7}}$

Шешуі.

$$\sqrt{5^{\frac{2}{\log_3 5}} + 0{,}5^{-\log_2 7}} = \sqrt{5^{2\log_5 3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-\log_2 7}} = \sqrt{5^{\log_5 3^2} + 2^{\log_2 7}} = \sqrt{9+7} = \sqrt{16} = 4$$

Жауабы: 4.

7-мысал. Есептеңдер: $\dfrac{2}{1+\log_2 5} + \lg 25$

Шешуі.

$$\frac{2}{1+\log_2 5} + \lg 25 = \frac{2}{\log_2 2 + \log_2 5} + \lg 25 = \frac{2}{\log_2\left(2\cdot 5\right)} + \lg 25 = \frac{2}{\log_2 10} + \lg 25 =$$

$$= 2\lg 2 + \lg 25 = \lg 2^2 + \lg 25 = \lg\left(4\cdot 25\right) = \lg 100 = 2$$

Жауабы: 2.

8-мысал. $3^{2+\log_3 2}$ ні есептеңдер.

Шешуі. Бұл мысалды шешуде $a^{m+n}=a^n\cdot a^m$ және $a^{\log_a b}=b$ теңдіктерден пайдаланылады. Нәтижеде мынаны аламыз:

$$3^{2+\log_3 2}=3^2\cdot 3^{\log_3 2}=9\cdot 2=18.$$

Көрсеткіштік және логарифмдік өрнектерді ықшамдауда кең қолданылатын

$$\boxed{a^{\log_b c}=c^{\log_b a}}$$

теңдікті дәлелдейміз. Мұнда $a, b, c>0$ және $b\neq 1$ шарттардың орындалуы талап етіледі. Осы шарттар орындалғанда $\log_b c$ және $\log_b a$ өрнектер анықталған болады. Мына

$$\log_b c\log_b a=\log_b a\log_b c$$

теңдік орынды екені айқын. Бұл тепе-теңдіктен логарифмнің $n\log_p q=\log_p q^n$ қасиетіне орай

$$\log_b a^{\log_b c}=\log_b c^{\log_b a}$$

теңдік келіп шығады. Соңғы теңдіктен

$$a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$$

теңдікті аламыз

9-мысал. Егер $a=sin\dfrac{\pi}{6}$ болса, $\log_4 a$ ны есептеңдер.

Шешуі.

$a=sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$ болғандықтан $\log_4 a=\log_4\dfrac{1}{2}=\log_{2^2}2^1=-\dfrac{1}{2}\log_2 2=-\dfrac{1}{2}\cdot 1=-\dfrac{1}{2}$

Жауабы: $-\dfrac{1}{2}$.

10-мысал. Есептеңдер: $\dfrac{\log_2^2 14+\log_2 14\cdot\log_2 7-2\log_2^2 7}{\log_2 14+2\log_2 7}$

Шешуі.

Алымын көбейтушілерге жіктеп, төмендегіні аламыз:

$$\frac{\log_2^2 14+\log_2 14\cdot\log_2 7-2\log_2^2 7}{\log_2 14+2\log_2 7}=\frac{(\log_2 14+2\log_2 7)(\log_2 14-\log_2 7)}{\log_2 14+2\log_2 7}=$$

$$=\frac{\cancel{(\log_2 14+2\log_2 7)}(\log_2 14-\log_2 7)}{\cancel{\log_2 14+2\log_2 7}}=\log_2 14-\log_2 7=\log_2\frac{14}{7}=\log_2 2=1$$

Жауабы: 1.

11-мысал. $f(x)=\log_4\dfrac{x^2}{4}-2\log_4\left(4x^4\right)$ өрнекті ықшамдаңдар және оның $x=-2$ -дегі мәнін есептеңдер.

Шешуі.

Берілген өрнек $x \neq 0$ де анықталған. Төмендегі теңдіктер логарифмнің қасиеттерінен келіп шығады:

$$f(x) = \log_4 \frac{x^2}{4} - 2\log_4\left(4x^4\right) = \log_4 x^2 - \log_4 4 - 2\left(\log_4 4 + \log_4 x^4\right) =$$

$$= 2\log_4 |x| - 1 - 2\left(1 + 4\log_4 |x|\right) = -6\log_4 |x| - 3$$

$$f(-2) = -6\log_4 |-2| - 3 = -6\log_{2^2} 2 - 3 = -\frac{6}{2}\log_2 2 - 3 = -3 - 3 = -6$$

12-мысал. Егер $a = \log_{98} 112$ болса, $\log_7 2$ ні a арқылы өрнектеңдер.

Шешуі.

$$a = \log_{98} 112 = \frac{\log_7 112}{\log_7 98} = \frac{\log_7\left(7\cdot 2^4\right)}{\log_7\left(7^2\cdot 2\right)} = \frac{\log_7 7 + \log_7 2^4}{\log_7 7^2 + \log_7 2} = \frac{1 + 4\log_7 2}{2 + \log_7 2}$$

$$\frac{1 + 4\log_7 2}{2 + \log_7 2} = a$$

$$1 + 4\log_7 2 = 2a + a\log_7 2$$

$$4\log_7 2 - a\log_7 2 = 2a - 1$$

$$(4 - a)\log_7 2 = 2a - 1$$

$$\log_7 2 = \frac{2a - 1}{4 - a}.$$

МЫСАЛДАР

1. Логарифмдік өрнектің мәнін есептеңдер.

a) $\log_2 4$ b) $\log_2 1$ c) $\log_2 16$ d) $\log_4 16$

e) $\log_2 64$ f) $\log_8 64$ g) $\log_4 64$ h) $\log_{64} 64$

2. Логарифмдік өрнектің мәнін есептеңдер.

a) $\log_5 25$ b) $\log_{324} 18$ c) $\log_{128} 4$ d) $\log_{10}(0{,}001)$

e) $\log_9 3$ f) $\lg 1000$ g) $\ln e$ h) $\lg\left(\frac{1}{100}\right)$

3. Есептеңдер.

a) $\log_2 8 + \log_2 4$ b) $\log_3 6 + \log_3 \frac{3}{2}$ c) $\log_2 15 - \log_2 \frac{15}{16}$

d) $\log_{\frac{1}{3}} 54 - \log_{\frac{1}{3}} 2$ e) $\log_{0,2} 75 - \log_{0,2} 3$ f) $\log_{36} 9 + \log_{36} 4$

4. Төмендегі сандардың қайсы бірі қалған үшеуіне тең емес?

a) $m = 2\log_2 8 - \log_2 4$ b) $n = \log_2 400 - 2\log_2 5$

c) $p = \log_5 125 + \log_5 5$ d) $q = \ln 12e - \ln 2$

5. Төмендегі сандардан қайсы бірі 2 -ден кіші?

a) $M=\log_5 100-\log_5 4$ b) $N=4\log_2 3-\log_2 9$

c) $P=\log_6 72-\log_6 2$ d) $Q=\log_4 16+\log_4 \frac{1}{8}$

6. Есептеңдер.

a) $3-\lg 50+\frac{1}{2}\lg 25$ b) $\log_2 32+\log_{32} 2$ c) $\frac{\log_4 13+\log_4 25}{\log_{64} 325}$

d) $\frac{\log_4 11+\log_4 23}{\log_8 253}$ e) $\frac{1}{\log_8 12}+\frac{1}{\log_{18} 12}$. f) $\frac{1}{\log_{45} 15}+\frac{1}{\log_5 15}$

7. Есептеңдер.

a) $81^{\log_3 5}$ b) $4^{-2\log_{\frac{1}{4}} 3}$ c) $32^{\log_8 27}$

d) $121^{\log_{11} 12}$ e) $3\log_{\sqrt{8}} 2+2^{-2\log_{\frac{1}{2}} 2}$ f) $3\log_{\sqrt{64}} 4+4^{-2\log_{\frac{1}{4}} 3}$

8. a -ның берілген мәнінде өрнектің мәнін табыңдар.

a) $3\log_{\frac{1}{3}} a,\ a=2\cos\frac{\pi}{6}$ b) $3\log_{\frac{1}{3}} a,\ a=\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}$ c) $4\log_3 a,\ a=\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}$

9. Есептеңдер.

a) $\log_{\frac{1}{3}}\log_3 27$ b) $\log_4\log_3\sqrt{81}$ c) $\log_3^2\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{125}$

10. Есептеңдер.

a) $\frac{2\log_3 12-4\log_3^2 2+\log_3^2 12+4\log_3 2}{3\log_3 12+6\log_3 2}$

b) $\frac{\log_2^2 28+\log_2 28\cdot\log_2 7-2\log_2^2 7}{\log_2 28+2\log_2 7}$

c) $\frac{\log_{35}^2 7-2\log_{35} 7\cdot\log_{35} 5-3\log_{35}^2 7}{2\left(\log_{35} 7-3\log_{35} 5\right)}$

d) $\frac{\log_2^2 12-2\log_2 12+2\log_2^2 3-3\log_2 3\cdot\log_2 12+4\log_2 3}{\log_2 12-2\log_2 3}$

11. Төмендегі функциялардың анықталу облысын табыңдар.

a) $y=\log_2(x+3)$ b) $y=\log_{0,2}(x^2-4x)$

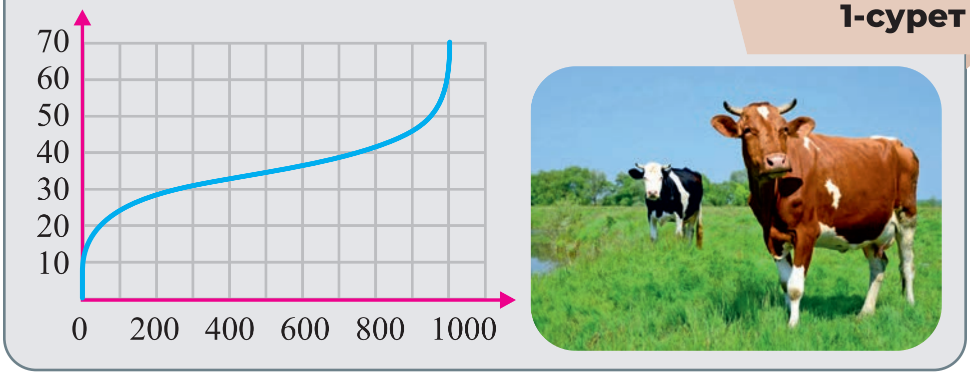
c) $y=\log_{0,7}\left(2x-\dfrac{1}{8}\right)$ d) $y=\log_2(5-3x)$

12. *a* арқылы өрнектеңдер.

a) $a=\log_2 3$ болса, $\log_{36}108=?$ b) $a=\log_7 3$ болса, $\log_{147}63=?$

c) $a=\log_{288}72$ болса, $\log_3 2=?$ d) $a=\log_{441}189$ болса, $\log_3 7=?$

13. Егер малшының 1000 бас табындағы бір сиыр жұқпалы аурумен ауырған болса, онда t күнде n сиырдың ауру көрсеткіші моделі $t=-5\cdot\ln\left(\dfrac{1000-n}{999n}\right)$ формуламен өрнектелген. 100 , 800 , 1000 сиыр неше күнде ауыратынын табыңдар. Сызба негізінде қорытынды дайындаңдар (1-*сурет*).



1-сурет

14. Кестелер негізінде функция графигін салыңдар.

a)

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y=\log_2 x$	-2	-1	0	1	2	3

b)

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y=\log_{\frac{1}{2}} x$	2	1	0	-1	-2	-3

15. Төмендегі функцияларға кері функцияларды анықтаңдар.

a) $f(x)=10^x$ b) $f(x)=\log_3(x+1)$

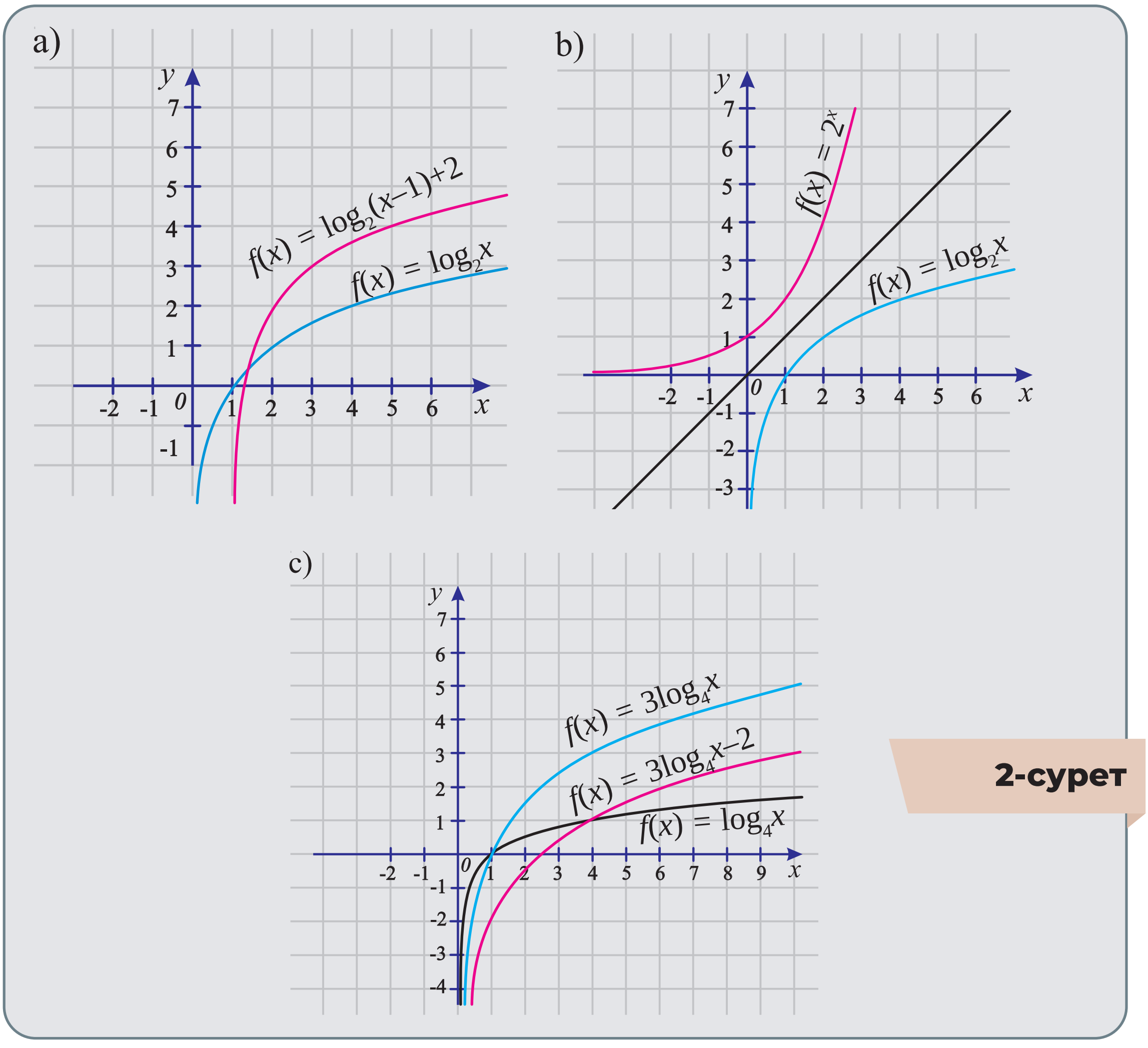
c) $f(x)=2+e^{x+4}$ d) $f(x)=5+\log_2(x-3)$

16. *a* және *b* -лардың мәндерін табыңдар.

a) $\log_3 b=2$ b) $\log_a 8=3$ c) $\log b^2=\lg 4$ d) $\log_a 36=2$

17. $y=\ln e^x$ және $y=e^{\ln x}$ функциялардың графигін салыңдар. Ұқсастығы мен айырмашылығын түсіндіріңдер.

18. 2- суреттегі функцияларда қандай амалдар орындалғанын айтыңдар.



2-сурет

Логарифмдік функцияның өмірде қолданылуы

Дыбыс қарқындылығының деңгейі

Дыбыс толқынының аудан бірлігіне уақыт бірлігінде тасымалдайтын энергиясы *дыбыс қарқындылығы* деп аталады. Дыбыс серпімді орта арқылы таралса, таралмайтынмен салыстырғанда артық қысым пайда болады, оны ***дыбыс қысымы*** деп атайды. Дыбыстың қарқындылығы дыбыс қысымының амплитудасына және қоршаған ортаның қасиеттеріне және оның толқын формасына байланысты. Дыбыс деңгейінің қарқындылығы децибелмен (дБ) өлшенеді.

I – дыбыстың қарқындылығы

I_0 – дыбыстың салыстырмалы қарқындылығы

L – дыбыс деңгейінің қарқындылығы

$$L = 10\log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right) dB$$

Смартфонның құлаққапқа жіберетін дыбыс қарқындылығы 100 децибелден асады. 80 децибелден аспайтын дыбыс деңгейі адам құлағы үшін қауіпсіз болып саналады. Осы деңгейден жоғары шамадан тыс дыбыс есту қабілетінің жоғалуына немесе зақымдалуына әкелуі мүмкін.

ЛОГАРИФМДІК ТЕҢДЕУЛЕР

Логарифмдік теңдеулер

Белгісіз логарифм астындағы өрнекте қатысқан теңдеу ***логарифмдік теңдеу*** деп аталады. Мысалы, $\log_2 x = 3$, $\log_x 625 = 2$, $\log_x(x+2) = 2$, $\lg(2x–2) = \lg(x+2)$ теңдеулер логарифмдік теңдеуге мысал болады.

Белгісіздің берілген логарифмдік теңдеуді дұрыс теңдікке айналдыратын мәні логарифмдік ***теңдеудің шешімі*** деп аталады.

Қарапайым логарифмдік теңдеулерді шешу

$a > 0$, $a \neq 1$ болғанда мына $\log_a x = b$ теңдеу қарапайым логарифмдік теңдеу болады. Бұл теңдеудің шешімі $x = a^b$ болады.

Логарифмдік теңдеулерді шешуде мына ереже пайдаланылады:

$a > 0$, $a \neq 1$ болғанда $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ теңдеудің түбірлері $f(x) = g(x)$ теңдеудің $f(x) > 0$ (немесе $g(x) > 0$) шартты қанағаттандыратын түбірлерінен тұратын болады.

Енді логарифмдік теңдеулерді шешудің үлгілерін келтіреміз.

1-мысал. $\log_5 x = -2$ теңдеуді шешіңдер.

Шешуі.

Теңдеуді шешуде $x > 0$ шартпен логарифмнің анықтамасынан пайдаланамыз:

$$\log_5 x = -2 \Rightarrow x = 5^{-2} \Rightarrow x = \frac{1}{25}$$

$x = \frac{1}{25} > 0$ екенінен, табылған бұл мән теңдеудің түбірі болады.

Жауабы: $x = \frac{1}{25}$.

2-мысал. $\log_3\left(x^2 - 4\right) = \log_3(5x - 8)$ теңдеуді шешіңдер.

Шешуі.

Анықталу облысын табамыз:

$$\begin{cases} x^2 - 4 > 0 \\ 5x - 8 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-2)(x+2) > 0 \\ 5x > 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty) \\ x > 1,6 \end{cases} \Rightarrow x \in (2; \infty)$$

Енді $x^2 - 4 = 5x - 8$ теңдеуді шешеміз.

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-1)(x-4) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1, \; x_2 = 4$$

Белгісіздің $x_1 = 1$ мәні $(2; \infty)$ аралыққа тиісті еместігі айқын, ал $x_2 = 4$ мәні бұл аралыққа тиісті. Демек, $x_1 = 1$ берілген теңдеудің бөгде түбірі, $x_2 = 4$ теңдеудің түбірі болады.

Жауабы: $x = 4$.

3-мысал. $\log_5^2 x - 3\log_5 x - 4 = 0$ логарифмдік теңдеуді шешіңдер.

Шешуі.

Алдымен $x > 0$ анықталу облысы екенін анықтаймыз және $\log_5 x = t$ белгілеу енгізіп, төмендегілерді аламыз:

$$t^2 - 3t - 4 = 0 \;\Rightarrow\; (t+1)(t-4) = 0 \;\Rightarrow\; t_1 = -1,\; t_2 = 4.$$

Демек, $\log_5 x = -1$ және $\log_5 x = 4$. Бұдан $x_1 = \frac{1}{5} = 0,2$; $x_2 = 5^4 = 625$.

Жауабы: $x_1 = 0,2$; $x_2 = 625$.

4-мысал. $\log_{x-1} 16 = 2$ теңдеуді шешіңдер.

Шешуі.

Алдымен

$$\begin{cases} x-1>0 \\ x-1\neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1 \\ x\neq 2 \end{cases} \Rightarrow x\in(1;\,2)\cup(2;\,\infty)$$

жиынға тиісті болуы керектігін анықтап аламыз. Кейін логарифм анықтамасынан пайдаланамыз:

$$\log_{x-1} 16 = 2 \quad \Rightarrow (x-1)^2 = 16$$

$$x-1 = 4 \quad \Rightarrow x_1 = 5$$

$$x-1 = -4 \quad \Rightarrow x_2 = -3$$

Жауабы: $x = 5$.

5-мысал. $\log_5 \log_2 \log_7 x = 0$ теңдеуді шешіңдер.

Шешуі.

Теңдеуді шешуде логарифм анықтамасынан пайдаланамыз:

$$\log_2 \log_7 x = 5^0 \Rightarrow \log_2 \log_7 x = 1 \Rightarrow \log_7 x = 2^1 \Rightarrow x = 7^2 = 49$$

Жауабы: $x = 49$.

6-мысал. $\lg\left(x^2 - 3\right)\cdot \lg x = 0$ теңдеуді шешіңдер.

Шешуі.

Әрбір көбейтушіні 0 -ге теңестіреміз:

$$\lg\left(x^2-3\right) = 0 \Rightarrow x^2 - 3 = 1 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 2$$

$$\lg x = 0 \Rightarrow x_3 = 1$$

Анықталу облысына қарай, $x^2-3>0$ және $x>0$ болуы қажет. Сондықтан тек $x = 2$ түбір болады.

Жауабы: $x = 2$.

МЫСАЛДАР

1. Логарифмдік теңдеулерді шешіңдер.

a) $\log_2 x = -3$ b) $\log_4 2x = \frac{1}{2}$ c) $\lg\frac{5x}{2} = 1$

d) $\log_{\frac{1}{4}} x = -2$ e) $\log_3(3x-1) = 2$ f) $\log_7(x+3) = 2$

g) $\log_9 x^3 + \log_{\sqrt{3}} x = 3$ h) $\log_4(2x-3) = 4$ i) $\log_2 x - 2\log_{\frac{1}{2}} x = 9$

2. Логарифмдік теңдеулерді шешіңдер.

a) $\log_5 x = 2\log_5 3 + 4\log_{25} 2$ b) $\log_{\frac{1}{2}}(7-8x) = 2$

c) $\log_2 x + \log_8 x = 0$ d) $\log_3 x = 9\log_{27} 8 - 3\log_3 4$

e) $\log_{0,5}(3x+1) = -2$ f) $\log_{0,2}(x+3) = -1$

g) $\log_{0,25}(x+30) = -2$ h) $\log_{\sqrt{3}}(1-2x) = 4$

i) $\log_2\sqrt{x-1} = 1$ j) $\log_3(x^2-4x+3) = \log_3(3x+21)$

k) $\log_3(2x-5) = \log_3(20-3x)$ l) $\log_7(9x-1) = \log_7 x$

m) $\log_3(2x^2-3x) = 2\log_3 x$ n) $\lg(2x) = 2\lg(4x-15)$

3. $\lg(3x-11) + \lg(x-27) = 3$

4. $\log_{81} x - 2\log_3 x + 5\log_9 x = 1,5$

5. $\log_3((x-1)(2x-1)) = 0$

6. $3\lg x^2 - \lg^2 x = 9$

7. $\log_{\frac{1}{3}}\frac{x^2+4x}{2x-3} = 1$

8. $\log_{\frac{3}{4}}\frac{2x-1}{x+2} = 1$

9. $\log_\pi(\log_2(\log_3 3x)) = 0$

10. $\log_2^2 x + 3 = \log_2 x^2$

11. $(x^2-6x-7)\log_2(3x-1) = 0$

12. $(x^2-2x-15)\lg(4x-3) = 0$

13. $\log_5(x+4) - \log_5(1-2x) = -\log_5(2x+3)$

14. $\log_2^2 x - 5\log_2 x = 4$

15. $\log_3 x + \log_x 9 = 3$

16. $\log_{x+2} 7 + 3\log_7(x+2) = 4$

17. $\log_3 x \cdot \log_9 x \cdot \log_{27} x \cdot \log_{81} x = \frac{2}{3}$

18. $\log_5\sqrt{x-9} + \log_5\sqrt{2x-1} = \log_5 10$

КӨРСЕТКІШТІК ЖӘНЕ ЛОГАРИФМДІК ТЕҢДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІ

Көрсеткіштік теңдеулер жүйесі және оны шешу

Көрсеткіштік өрнегі бар теңдеулер кіретін теңдеулер жүйесі ***көрсеткіштік теңдеулер жүйесі*** деп аталады. Көрсеткіштік теңдеулер жүйесі әртүрлі формада болады. Әрбір осындай жүйені шешу бірегей тәсілді талап етеді. Бұл жерде көрсеткіштік және логарифмдік өрнектердің қасиеттері кеңінен қолданылады.

1-мысал. $\begin{cases} 3^x = 9^{y+1}, \\ 4y = 5 - x \end{cases}$ теңдеулер жүйесін шешіңдер.

Шешуі.

$9 = 3^2$ екенінен пайдаланамыз. Онда $3^x = 3^{2(y+1)}$ бұдан $x = 2y + 2$ келіп шығады. Жүйедегі екінші теңдікте x орнына $2y + 2$ өрнекті қойып, y -тің мәнін табамыз: $4y = 5 - (2y + 2) \Rightarrow y = \frac{1}{2}$. Енді $x = 2y + 2$ теңдіктегі y орнына оның мәнін қойып, x -тің мәнін табамыз: $x = 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \Rightarrow x = 3$.

Жауабы: $\left(3;\ \frac{1}{2}\right)$.

2-мысал. $\begin{cases} 9^{x+y} = 729, \\ 3^{x-y-1} = 1 \end{cases}$ теңдеулер жүйесін шешіңдер.

Шешуі.

$729 = 9^3$ және $1 = 3^0$ екенінен пайдаланамыз. Онда

$$\begin{cases} 9^{x+y} = 9^3, \\ 3^{x-y-1} = 3^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 3, \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow (2;\ 1).$$

Жауабы: (2; 1).

3-мысал. $\begin{cases} x^{y+1} = 27, \\ x^{2y-5} = \frac{1}{3} \end{cases}$ теңдеулер жүйесін шешіңдер.

Шешуі.

Теңдеулер жүйесінің берілуінен $x > 0$, $x \neq 1$ шарттар орындалуы келіп шығады. Сондықтан бірінші және екінші теңдеулердің сол және оң жағындағы өрнектерді логарифмдеуге болады. Бұл өрнектерді 3 негіз бойынша логарифм дейміз және мыналарды табамыз:

$$\begin{cases} (y+1)\log_3 x = 3, \\ (2y-5)\log_3 x = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_3 x = \dfrac{3}{y+1}, \\ (2y-5)\dfrac{3}{y+1} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3, \\ y = 2 \end{cases}$$

Жауабы. (3; 2).

4-мысал. $\begin{cases} 2^x + 2^y = 5, \\ 2^{x+y} = 4 \end{cases}$ теңдеулер жүйесін шешіңдер.

Шешуі.

Бірінші теңдіктен $2^y = 5 - 2^x$ байланысты табамыз. $2^{x+y} = 2^x \cdot 2^y$ теңдікті ескеріп, екінші теңдікті $2^x \cdot 2^y = 4$ бұдан $2^x\left(5 - 2^x\right) = 4$, ал одан $2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$ теңдеуді аламыз. $t = 2^x$ белгілеу енгізіп, мына квадрат теңдеуге келеміз, $t^2 - 5t + 4 = 0$ мұнда $t > 0$.

Бұл квадрат теңдеудің шешімі $t_1 = 1$, $t_2 = 4$, x белгісіздердің оларға сәйкес мәндері

$t_1 = 1$: $\quad 1 = 2^{x_1} \Rightarrow x_1 = 0$; $\quad 2^{y_1} = 5 - 2^0 = 4, \Rightarrow y_1 = 2$

$t_2 = 4$: $\quad 4 = 2^{x_2} \Rightarrow x_2 = 2$; $\quad 2^{y_2} = 5 - 2^2 = 1, \Rightarrow y_2 = 0$ болады.

Жауабы: (0; 2) және (2; 0).

Түсіндіру. Жоғарыда келтірілген мысалдар көрсеткіштік теңдеулердің әрбір жүйесін шешу шығармашылық көзқарасты қажет ететінін көрсетеді.

Логарифмдік теңдеулер жүйесі және оны шешу

Құрамында логарифмдік өрнегі бар теңдеулер жүйесі ***логарифмдік теңдеулер жүйесі*** деп аталады. Көрсеткіштік теңдеулер жүйесі сияқты логарифмдік теңдеулер жүйесі де түрлі көріністе болады. Олардың әрқайсысын шешу көрсеткіштік және логарифмдік өрнектердің қасиеттерін пайдаланады және нақты тәсілді қажет етеді.

5-мысал. $\begin{cases} \log_9 \dfrac{x^2}{\sqrt{y}} = \dfrac{1}{2}, \\ \log_3 xy = 3 \end{cases}$ теңдеулер жүйесін шешіңдер.

Шешуі

Жүйедегі логарифмдік өрнектердің мағынасы бар болуы үшін

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{y}} > 0, \\ xy > 0 \end{cases}$$

теңсіздіктер орындалуы талап етіледі. $\dfrac{x^2}{\sqrt{y}} > 0$ теңсіздік $y > 0$ және $x \neq 0$ болғанда ғана орынды. Онда жүйедегі екінші $xy > 0$ теңсіздіктен $x > 0$ және $y > 0$ болуы қажеттігі келіп шығады. Енді логарифм қасиеттерінен пайдаланып $x > 0$ және $y > 0$ болғанда берілген жүйені былайша

$$\begin{cases} \log_9 x^2 - \log_9 \sqrt{y} = \dfrac{1}{2}, \\ \log_3 x + \log_3 y = 3 \end{cases}$$

қайта жазуға болады. $\log_9 x^2 = \log_{3^2} x^2 = \log_3 x$ және $\log_9 \sqrt{y} = \log_{3^2} y^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{4}\log_3 y$

теңдіктерден пайдалансақ, жүйе мына көрініске келеді $\begin{cases} \log_3 x - \frac{1}{4}\log_3 y = \frac{1}{2}, \\ \log_3 x + \log_3 y = 3. \end{cases}$

Екінші теңдеуден бірінші теңдеуді азайтып, $\frac{5}{4}\log_3 y = \frac{5}{2}$ теңдікке ие боламыз. Бұдан $\log_3 y = 2$ $y = 9$ келіп шығады. Енді жүйенің екінші теңдеуіне y -тің бұл мәнін қойып, x белгісізді табамыз:

$$\log_3 x + \log_3 9 = 3 \Rightarrow \log_3 x + 2 = 3 \Rightarrow \log_3 x = 1 \Rightarrow x = 3.$$

Жауабы: (3; 9).

6-мысал. $\begin{cases} x^{\lg y} = 1000, \\ \log_y x = 3 \end{cases}$ теңдеулер жүйесін шешіңдер.

Шешуі.

Жүйедегі өрнектер орынды болуы үшін $x > 0$, $x \neq 1$, $y > 0$, $y \neq 1$ шарттар орындалуы қажет. $x^{\lg y} = 1000$ теңдікті 10 негіз бойынша логарифмдейміз:

$$\lg x^{\lg y} = \lg 1000 \Rightarrow \lg y \lg x = 3$$

$\log_y x = 3$ теңдіктің сол жағындағы логарифмнің негізін алмастырамыз:

$$\log_y x = \frac{\lg x}{\lg y} \Rightarrow \frac{\lg x}{\lg y} = 3 \Rightarrow \lg x = 3\lg y$$

Нәтижеде $\lg^2 y = 1$ теңдеуге келеміз.

Оны шешеміз

$$\lg y = -1 \Rightarrow y = \frac{1}{10}, \quad \lg y = 1 \Rightarrow y = 10.$$

келіп шығады.

$\lg x = 3\lg y$ теңдіктен $x = y^3$ одан, x -тің сәйкес мәндерін табамыз:

$$y = \frac{1}{10} \Rightarrow x = \frac{1}{1000}$$

$$y = 10 \Rightarrow x = 1000$$

Жауабы: $\left(\frac{1}{1000}; \frac{1}{10}\right)$ және (1000; 10).

7-мысал. $\begin{cases} \log_2 (x - y) = 1, \\ 2^x \cdot 3^{y+1} = 72 \end{cases}$ теңдеулер жүйесін шешіңдер.

Шешуі.

Жүйе $x - y > 0$, яғни $x > y$ шартта анықталған. Онда жүйенің бірінші теңдеуінен

$$x - y = 2 \Rightarrow y = x - 2$$

байланыс келіп шығады. Жүйенің екінші теңдеуінде y орнына $x - 2$ өрнекті қойып:

$$2^x \cdot 3^{x-2+1} = 72 \Rightarrow 2^x \cdot 3^x = 3 \cdot 72 \Rightarrow 6^x = 216 \Rightarrow 6^x = 6^3 \Rightarrow x = 3$$

табылады. Соң $y = 1$ мән табылады.

Жауабы: (3; 1).

МЫСАЛДАР

1. Теңдеулер жүйесін шешіңдер.

a) $\begin{cases} 3^x \cdot 7^y = 63 \\ 3^x + 7^y = 16 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 9^x - 3 \cdot 5^y = 3 \\ 9^x \cdot 5^y = 18 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3^y \cdot 2^x = 972 \\ y - x = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4^{x+y} = 128 \\ 5^{3y-2x-3} = 1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 3^{-x} \cdot 2^y = 1152 \\ x + y = 5 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2^x \cdot 9^y = 648 \\ 3^x \cdot 4^y = 432 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = \dfrac{1}{9} \\ \dfrac{1}{9} \cdot 3^y = 3^x \end{cases}$ h) $\begin{cases} 2^y \cdot 8^{-x} = 8\sqrt{2} \\ y + 3x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ i) $\begin{cases} 4^{y-1} \cdot 5^x = 6400 \\ y - x = 3 \end{cases}$

2. Теңдеулер жүйесін шешіңдер.

a) $\begin{cases} \log_7 7x + \log_7 y = 2 \\ y - 5x = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \log_2 x - \log_2 y = 4 \\ y - x = 6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \log_2\left(x^2 + y^2\right) = 5 \\ \log_2 x + \log_2 y = 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \log_3 2x - \log_3\left(\dfrac{2}{y}\right) = 1 \\ 4x - y = 1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} \log_2 x - \log_4 y = 0 \\ \log_4 x + \log_2 y = 5 \end{cases}$ f) $\begin{cases} \log_2 2x + \log_2\left(\dfrac{y}{2}\right) = -1 \\ x - y = -\dfrac{7}{4} \end{cases}$

3. Теңдеулер жүйесін шешіңдер.

a) $\begin{cases} 3^x - 2^{y^2} = 77 \\ 3^{\frac{x}{2}} - 2^{\frac{y^2}{2}} = 7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3 \cdot 2^x - 2^{x+y} = -2 \\ 5 \cdot 2^{x+1} - 2^{x+y+1} = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 9^x - 3 \cdot 2^y = 3 \\ 9^x \cdot 2^y = 18 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \lg x(\lg x + \lg y) = 2 \\ \lg x - \lg y = 3 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 3^x \cdot 25^y = 5625 \\ 5^x \cdot 9^y = 2025 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^{\sqrt{y}} = y \\ y^{\sqrt{y}} = x^4 \end{cases}$ теңдеулер жүйесі түбірлерін өрнектейтін нүктелер арасындағы қашықтықты табыңдар.

5. $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 972, \\ \log_{\sqrt{3}}(x - y) = 2 \end{cases}$ x және y теңдеулер жүйесі түбірлері болса, xy -ті табыңдар.

6. $\begin{cases} x^{y+1} = 27, \\ x^{2y-5} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$ x және y теңдеулер жүйесі түбірлері болса, $x + y$ -ті табыңдар.

ЛОГАРИФМДІК ТЕҢСІЗДІКТЕР

Логарифмдік теңсіздіктер

$a>0$ және $a\neq 1$ болсын. Онда

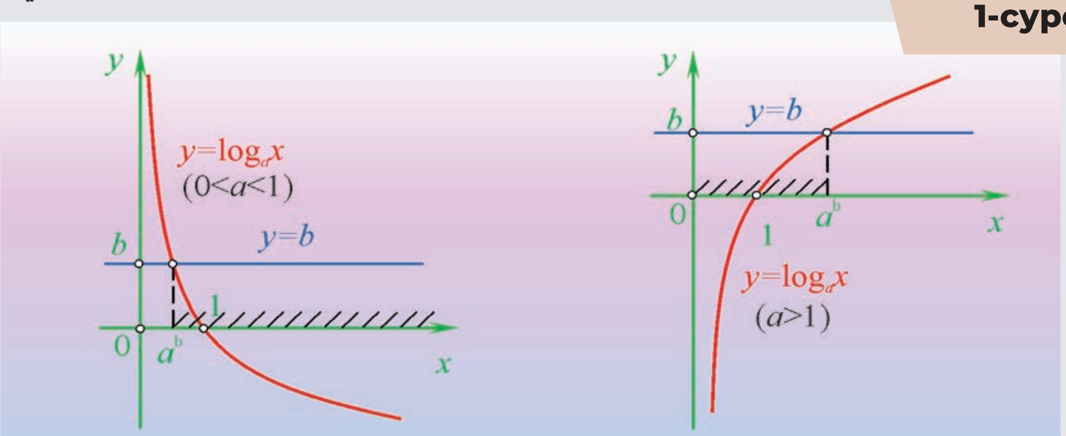
$$\log_a x<b,\ \log_a x>b,\ \log_a x\leq b,\ \log_a x\geq b$$

теңсіздіктер логарифмдік теңсіздіктер болады. Оларды шешуде $y=\log_a x$ функцияның бірсарындылығынан пайдаланылады.

$\log_a x<b$ теңсіздікті қарастырайық. Бұл теңсіздіктің шешімі x айнымалының $y=\log_a x$ функцияның Oxy координаталар жүйесіндегі графигі $y=b$ түзуден төменде орналасатын мәндері жиыны болады.

$\log_a x<b$ теңсіздік шешімінің геометриялық түсініктемесі

1-сурет



a) $\log_a x<b$ *теңсіздіктің* $0<a<1$ *болғандағы шешімі* $(a^b;+\infty)$ *аралық болады.*

b) $\log_a x<b$ *теңсіздіктің* $a>1$ *болғандағы шешімі* $(0;a^b)$ *аралық болады.*

$\log_a x>b$, $\log_a x\leq b$, $\log_a x\geq b$ теңсіздіктер шешімдерінің геометриялық түсініктемесін өз бетінше беріңдер.

Логарифмдік теңсіздіктерді шешу

Мына $\log_a f(x)<\log_a g(x)$ қарапайым логарифмдік теңсіздіктің шешімі:

$0<a<1$ болғанда $\begin{cases} f(x)>g(x), \\ g(x)>0 \end{cases}$

теңсіздіктер жүйесінің шешімінен;

$a>1$ болғанда $\begin{cases} f(x)<g(x), \\ f(x)>0 \end{cases}$ теңсіздіктер жүйесінің шешімінен тұрады.

$\log_a f(x)\leq\log_a g(x)$, $\log_a f(x)>\log_a g(x)$ және $\log_a f(x)\geq\log_a g(x)$ теңсіздіктерді шешу төмендегі кестеде келтірілген.

Логарифмдік теңсіздіктердің түрі	$\log_a f(x) \le \log_a g(x)$	$\log_a f(x) < \log_a g(x)$	$\log_a f(x) > \log_a g(x)$	$\log_a f(x) \ge \log_a g(x)$
$0<a<1$ болғанда	$\begin{cases} f(x) \ge g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} f(x) \le g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$
$a>1$ болғанда	$\begin{cases} f(x) \le g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} f(x) \ge g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$

1-мысал. $\log_{27} x > \frac{1}{3}$ теңсіздікті шешіңдер.

Шешуі.

Анықталу облысы $x>0$. Логарифм негізі 1 -ден үлкен екенінен және логарифмнің анықтамасынан пайдаланамыз:

$$\log_{27} x > \frac{1}{3} \Rightarrow x > 27^{\frac{1}{3}} \Rightarrow x > \sqrt[3]{27} \Rightarrow x > 3 \begin{cases} x > 3 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 3 \Rightarrow x \in (3;\ \infty)$$

Жауабы: $x \in (3;\ \infty)$

2-мысал. $\log_{0,5}(2x-3) > \log_{0,5}(x+1)$ теңсіздікті шешіңдер.

Шешуі.

Теңсіздікті оған мәндес болған төмендегі жүйеге келтіріп шешеміз:

$$\begin{cases} 2x-3 < x+1 \\ 2x-3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 4 \\ x > 1,5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 4 \\ x > 1,5 \end{cases} \Rightarrow x \in (1,5; 4)$$

Жауабы: (1,5; 4)

3-мысал. $\log_7^2 x - 13\log_7 x + 42 \ge 0$ теңсіздікті шешіңдер.

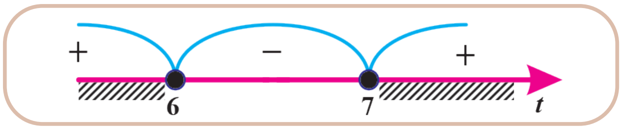
Шешуі.

$t = \log_7 x$ белгілеу енгіземіз. Нәтижеде

$$t^2 - 13t + 42 \ge 0$$

теңсіздікті аламыз.

$(t-6)(t-7) \ge 0$ теңсіздікті шешеміз.



Демек , $t \le 6$ немесе $t \ge 7$ екен. $\log_7 x \le 6$ немесе $\log_7 x \ge 7$ болады. Бұдан $x \le 7^6$ немесе $x \ge 7^7$ пайда болады. $x>0$ Жоғарыдағы шартты ескерсек,

$$x \in \left(0;\ 7^6\right] \cup \left[7^7; \infty\right)$$

болады.

Жауабы: $x \in \left(0;\ 7^6\right] \cup \left[7^7; \infty\right)$.

$A \cdot \log_a^2 x + B \cdot \log_a x + C < 0$ ге ұқсас теңсіздіктер $\log_a x = t$ белгілеумен квадрат теңсіздікке келтіріп шешіледі.

4-мысал. $\log_3^2 x - 3\log_3 x + 2 \le 0$ теңсіздікті шешіңдер.

Шешуі.

Теңсіздіктің анықталу облысы $x > 0$.

$\log_3 x = t$ белгілеу енгіземіз

$t^2 - 3t + 2 \le 0$ теңсіздікті шешеміз,

$(t-1)(t-2) \le 0$, бұдан $1 \le t \le 2$

$1 \le \log_3 x \le 2 \quad \Rightarrow \log_3 3 \le \log_3 x \le \log_3 9 \qquad \Rightarrow 3 \le x \le 9$

Жауабы: $[3;9]$

5-мысал. $\log_{x+1}\left(x^2 + 2x + 1\right)^{x^2+2x+5} > 4x + 28$ теңсіздікті шешіңдер.

Шешуі.

Теңсіздікті былайша жазып аламыз:

$$\log_{x+1}(x+1)^{2(x^2+2x+5)} > 4x + 28$$

Бұл жерде екі жағдай болуы мүмкін:

1-жағдай. $0 < x+1 < 1 \Rightarrow -1 < x < 0$

Мұнда: $2(x^2 + 2x + 5) < 4x + 28 \;\Rightarrow\; x^2 + 2x + 5 < 2x + 14 \;\Rightarrow\; x^2 - 9 < 0 \;\Rightarrow\; x \in (-3;\ 3)$

$-1 < x < 0$ екенінен $x \in (-1; 0)$.

2-жағдай. $x + 1 > 1 \Rightarrow x > 0$

Мұнда :

$2(x^2 + 2x + 5) > 4x + 28 \;\Rightarrow\; x^2 + 2x + 5 > 2x + 14 \;\Rightarrow\; x^2 - 9 > 0 \;\Rightarrow\; x \in (-\infty; -3) \cup (3; \infty)$

$x > 0$ екенінен $x \in (3; \infty)$.

1- және 2-жағдайларды бірлестіріп, теңсіздіктің шешімін табамыз:

$$x \in (-1; 0) \cup (3;\ \infty)$$

Жауабы: $x \in (-1; 0) \cup (3;\ \infty)$.

МЫСАЛДАР

1. Теңсіздікті шешіңдер.

a) $\log_2 x > 3$ b) $\log_{0,5} x > 2$ c) $\log_2 8 > x$

d) $\log_5 x > 3$ e) $\log_3 x > 4$ f) $\log_3 x \geq \log_6 36$

g) $\log_2 x < \log_{49} 7$ h) $\log_{\frac{1}{5}}(x-5) > -2$ i) $\log_3(x+20) < 3$

j) $\log_3(4x+2) - \log_3 10 < 0$ k) $\log_8 64 > \log_{\frac{1}{5}} x$ l) $\log_4(5-x^2) > 1$

m) $\log_5(3x-2x^2) > 0$ n) $\log^2_{\frac{1}{2}} x - 9 \leq 0$ o) $5^{\log_5(x-7)} < 4$

2. $\log_2(4-x) - \log_2 7 < 0$ теңсіздікті қанағаттандыратын бүтін сандар нешеу?

3. Теңсіздікті шешіңдер.

a) $\log_{\frac{4}{3}}(x+6) - \log_{\frac{4}{3}} 9 < \log_{\frac{4}{3}} 2 - \log_{\frac{4}{3}} 6$ b) $\log_2(x-1) < \log_2(3x-1)$

c) $\log_{\frac{1}{3}}(2x-4) \geq \log_{\frac{1}{3}}(x+1)$ d) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x-6) \geq -3$

e) $\lg^2 x + 11 \cdot \lg x + 10 < 0$ f) $\log_2^2 x - 6\log_2 x + 8 \leq 0$

g) $\log_2 \log_{\sqrt{2}}(x+1) < 1$ h) $2\log_{\frac{1}{5}}(x-2) + 3\log_5(x-2) < 1$

i) $\log_x x^2 + x > 1$ j) $\lg(x+2) + \lg(x-3) \leq \lg x^2$

4. Теңсіздікті шешіңдер.

a) $\lg 10^{\lg(x^2+21)} > 1 + \lg x$ b) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\log_{0,25}(x^2-5x+8)} \leq 2{,}5$

c) $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}\left(6^{x+1} - 36^x\right) \geq -2$ d) $\log_{\frac{x-1}{5x-6}}\left(\sqrt{6} - 2x\right) > 0$

e) $x^{1+\lg\sqrt{x}} < 0{,}1^{-2}$ f) $\sqrt{x^{4\lg x}} < 10x$

5. $\log_{0,2}(x^4+2x^2+1) > \log_{0,2}(6x^2+1)$ теңсіздіктің барлық теріс шешімдері жиынын табыңдар.

КӨРСЕТКІШТІК ЖӘНЕ ЛОГАРИФМДІК ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ ҚОЛДАНЫЛУЫ

Күрделі пайыз формуласы және оның қолданылуы

Айталық, қандайда бір Q_0 мөлшерде қарыз алмақшы. Қарыз беруші белгіленген мерзімде алғашқы мөлшерді қандайда бір P пайдамен қайтаруды талап етуі мүмкін. Демек, көрсетілген мерзімде қарыз алушы қайтаратын мөлшер

$$Q_1 = Q_0 + P$$

болады. Мерзім ретінде бір күн, екі күн, ..., бір апта, екі апта, ..., бір ай, екі ай және басқа алынуы мүмкін. Мұнда шама

$$p = \frac{P}{Q_0} \cdot 100\%$$

шама алынған қарызды өз мерзімінде қайтару пайызы деп аталады.

1. Қарапайым пайыз формуласы. Егер пайыз тек қана алынған Q_0 мөлшерге қолданылса, бірінші мерзім соңында қарыз мөлшері

$$Q_1 = Q_0 + \frac{p}{100} \cdot Q_0 = \left(1 + \frac{p}{100}\right) Q_0$$

болады. Мұнда,

$$P_1 = \frac{p}{100} \cdot Q_0 = P$$

– қарыз берушінің бірінші мерзім соңындағы пайдасы. Бұл процесті n рет қайталап, n-мерзім соңында қарыз мөлшері

$$Q_n = \left(1 + \frac{np}{100}\right) Q_0$$

қарыз берушінің n-мерзім соңындағы пайдасы

$$P_n = \frac{np}{100} \cdot Q_0 \quad (P_n = nP \text{ екені айқын})$$

табылады. Мұндай есептелген пайыз ***қарапайым пайыз***,

$$Q_n = \left(1 + \frac{np}{100}\right) Q_0$$

формула ***қарапайым пайыз формуласы*** деп аталады.

2. Күрделі пайыз формуласы. Пайызды алынған қарызға пайда болған пайданы қосып қолдануға болады. Мұнда бірінші мерзім соңында қарыз мөлшері

$$Q_1 = Q_0 + \frac{p}{100} \cdot Q_0 = \left(1 + \frac{p}{100}\right) Q_0$$

болады. Мұнда

$$P_1 = \frac{p}{100} \cdot Q_0 = P$$

Бұл процесті n-рет қайталап n мерзім соңында қарыз мөлшері

$$Q_n = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n Q_0$$

қарыз берушінің n-мерзім соңындағы пайдасы

$$P_n = Q_n - Q_0 = \left(\left(1+\frac{p}{100}\right)^n - 1\right)Q_0$$

табылады. Мұндай есептелген пайыз ***күрделі пайыз***, ал

$$Q_n = \left(1+\frac{p}{100}\right)^n Q_0$$

формула ***күрделі пайыз формуласы*** деп аталады.

Қарапайым және күрделі пайыз формулаларын қолдануға байланысты көптеген практикалық мысалдар мен есептер кездеседі. Қазіргі уақытта *несие, ипотекалық қарыз* сияқты тіркестер жиі кездеседі.

Төменде ипотекалық қарызды есептеу мәселесін шешудің үлгісін көрсетеміз. Әдетте несие беруші – банк, ал қарыз алушы – клиент. Банктер тұрғын үйге (ипотека), көлік құралына немесе тұрмыстық заттарға (теледидар, тоңазытқыш, ұялы телефон және т.б.) бірнеше жылға дейін ұзақ мерзімге (несие) береді және клиенттен ай сайын несиенің белгілі бір мөлшерін төлеуді талап етеді.

1-мысал. Жас отбасы бастапқы бағасы 360 000 000 сум болатын пәтерді жылдық 20 пайыздық ставкамен 15 жылдық ипотека арқылы сатып алды. 15 жылда банкке қанша ақша қайтарылады? Бұдан банк қанша пайда көреді?

Шешуі.

Бастапқы 360 000 000 сомды банк тілінде "***негізгі қарыз***" ақша деп атайды. 1 жыл 12 айдан тұратынын ескереміз. Сондықтан клиент банкке әр айда негізгі қарыздың

$$\frac{360\ 000\ 000}{15\cdot 12} = 2\ 000\ 000$$

сум мөлшерін қайтаруы керек. Төлемнің бірінші айында есептелген пайыз келесідей анықталады:

$$a_1 = 360\ 000\ 000\cdot\frac{20\%}{100\%}\cdot\frac{1}{12} = 6\ 000\ 000 \text{ сум.}$$

Демек, клиент бірінші ай соңында жалпы

$$2\ 000\ 000 + 6\ 000\ 000 = 8\ 000\ 000 \text{ сум}$$

қайтаруы керек. Содан соң қалған ақша

$$360\ 000\ 000 - 2\ 000\ 000 = 358\ 000\ 000$$

сом болады. Екінші ай соңында тұтынушы "негізгі қарыз" ақшаның 2 000 000 сум мөлшерін және пайда болған мына

$$360\ 000\ 000 - 2\ 000\ 000 = 358\ 000\ 000$$

сум пайыз мөлшерін, ал жалпы

$$2\ 000\ 000 + 5\ 966\ 667 = 7\ 966\ 667$$

сум қаржыны қайтаруы тиіс.

$(n-1)$-айдың қаржысы төленгеннен соң,

$$360\ 000\ 000 - 2\ 000\ 000\cdot(n-1)$$

сум мөлшерде "негізгі қарыз" ақша қалады. n-ші ай соңында клиент банкке $2\ 000\ 000+a_n$ мөлшерде ақша төлейді. Мұндағы a_n ші айдың пайызы,

$$a_n=\left(360\ 000\ 000-2\ 000\ 000\cdot(n-1)\right)\cdot\frac{20\%}{100\%}\cdot\frac{1}{12}=(181-n)\cdot\frac{100\ 000}{3}$$

теңдік арқылы табылады, a_1, a_2, ... , a_n кемімелі арифметикалық прогрессия, оның айырмасы

$$d=a_n-a_{n-1}=(181-n)\cdot\frac{100\ 000}{3}-\left(181-(n-1)\right)\cdot\frac{100\ 000}{3}=-\frac{100\ 000}{3}\,, \quad \text{яғни} \quad d=-\frac{100\ 000}{3}$$

ке тең.

15 жыл 180 айдан тұрады, сондықтан $1\le n\le 180$ болады. Демек,

$$a_1=6\ 000\ 000\,,\ a_{180}=\frac{100\ 000}{3}$$

болып, арифметикалық прогрессияның 180 мүшесінің қосындысы

$$S_{180}=\frac{a_1+a_{180}}{2}\cdot 180=\frac{6\ 000\ 000+\frac{100\ 000}{3}}{2}\cdot 180=$$

$$=\frac{18\ 000\ 000+100\ 000}{3}\cdot 90=18\ 100\ 000\cdot 30=543\ 000\ 000$$

болады. Демек, клиент банкке жалпы

$$360\ 000\ 000+543\ 000\ 000=903\ 000\ 000$$

сум қайтаруы керек екен. Мұнда банктің пайдасы 543 000 000 сум болады.

Радиоактивті ыдырау

Жартылай ыдырау периоды. Кейбір химиялық элементтер өз ядроларынан бөлшектер шығарады. Мұндай элементтерді радиоактивті элементтер деп атайды, олардың ядроларынан бөлшектер шығару процесі ***радиоактивті ыдырау*** деп аталады. Радиоактивті ыдырау нәтижесінде бастапқы химиялық элемент басқа химиялық элементке айналады.

Алғашқы химиялық элементтің массасы m_0 болып, оның жартылай ыдырауға кететін уақыты T_1 болсын. Онда $t_1 = T_1$ уақыттан соң ыдырамай қалған элемент массасы $m_1=\frac{m_0}{2}$ болып, m_1 массаның жартысы ыдырау үшін T_2 уақыт жұмсалған. $t_2 = T_1 + T_2$ уақыттан соң ыдырымай қалған элемент массасы $m_2=\frac{m_1}{2}=\frac{m_0}{2^2}$ болып, массаның жартысы ыдырау үшін T_3 уақыт жұмсалсын. Дәл солай, $t_3 = T_1 + T_2 + T_3$ уақыттан соң ыдырамай қалған элемент массасы $m_3=\frac{m_2}{2}=\frac{m_0}{2^3}$ болып, m_3 массаның жартысы ыдырау үшін T_4 уақыт жұмсалсын. Бұл процесс шексіз жалғассын.

Көпжылдық тәжірибе нәтижесінде $T_1=T_2=T_3=\ldots=T_n=T_{n+1}=\ldots$ екені дәлелденді. Сонымен, бір элементтің массасының жартысы ыдырауға кететін уақыт тұрақты шама. Бұл шама ***элементтің жартылай ыдырау периоды*** деп аталады және T арқылы белгіленеді

$$T=T_1=T_2=T_3=\ldots=T_n=T_{n+1}=\ldots.$$

Нәтижеде

$$t_1 = T_1 = T,$$
$$t_2 = T_1 + T_2 = 2T,$$
$$t_3 = T_1 + T_2 + T_3 = 3T, \ldots,$$
$$t_n = T_1 + T_2 + T_3 + \ldots + T_n = nT$$

теңдіктер пайда болады. Демек, бастапқы массасы m_0 болған элементтің $t_n = nT$ уақыттан кейінгі ыдырамаған бөлігінің массасы $m_n = \frac{m_0}{2^n} = 2^{-n} m_0$ болады. Мұндағы $n = \frac{t_n}{T}$ екенін ескерсек, $m_n = 2^{-\frac{t_n}{T}} m_0$ теңдікке келеміз. Бұл формула кез келген t момент үшін де орынды:

$$m(t) = 2^{-\frac{t}{T}} m_0.$$

Сонымен, радиоактивті элементтің ыдырамаған бөлігінің массасы уақыттың көрсеткіштік функциясы болады екен.

2-мысал. Тәуліктің алғашқы 8 сағатында радиоактивті заттың активтігі 4 есе төмендеді. Заттың активтігі тәулік ішінде неше рет төмендейді?

Шешуі. Қарастырылып отырған заттың бастапқы массасы m_0 ал жартылай ыдырау периоды T болсын. 8 сағаттан кейін оның массасы $m(8) = \frac{m_0}{4}$ болған. Бұл берілгендер үшін $m(t) = 2^{-\frac{t}{T}} m_0$ формуласын қолданып, заттың жартылай ыдырау периоды табылады:

$$m(8) = 2^{-\frac{8}{T}} m_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{m_0}{4} = 2^{-\frac{8}{T}} m_0 \quad \Rightarrow \quad 2^{\frac{8}{T}} = 2^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{8}{T} = 2 \quad \Rightarrow \quad T = 4 \text{ сағат.}$$

Енді $m(t) = 2^{-\frac{t}{T}} m_0$ формуланы тағы бір рет $t = 24$ (бір тәулік = 24 сағат) үшін пайдаланып, радиоактивті заттың активтігі тәулік ішінде неше рет төмендейтіні анықталды:

$$m(24) = 2^{-\frac{24}{T}} m_0 = 2^{-6} m_0 = \frac{m_0}{64}.$$

Демек, тәулік ішінде радиоактивті заттың активтігі 64 рет кемиді.

Қосылған құн салығы

Қосылған құн салығы қысқартылған түрде ҚҚС деп аталады.

Сен салық ұғымымен таныссың. Тауарды өндіруші немесе импорттаушы (көтерме немесе бөлшек сатушы) мемлекетке сату салығын төлеуі керек. Қосылған құн салығы – өндірушіден бөлшек сатушыға дейін жеткізу тізбегінің көптеген нүктелеріне үкімет салатын салық. Әрбір кезеңде тек тауарға қосылған құнға ғана сату салығы салынады. Сату салығының соңғы жағдайы тұтынушыда қалады.

Бұл бастапқы өндірушіден сатушыға тауарлардың әрбір ауысуы кезіндегі қосылған құн салығы.

Айталық, ҚҚС мөлшерлемесі 10% және кәсіпкер 8 000 000 сумға тауар сатып алды делік, оның төлейтін салығы = 8 000 000 сумның 10% = 800 000 сум.

Енді сол өнімді 11 500 000 сумға сатса, одан алынатын салық = 1 150 000 сумның 10% = 1 150 000 сум.

Кәсіпкер үшін ҚҚС = 1 150 000 – 800 000 = 350 000 сум болады.

МЫСАЛДАР *(калькулятордан пайдалануға болады)*

1. Бастапқы бағасы 360 млн сумдық үйді 20 жылға жылдық 18 пайызбен ипотека арқылы алған отбасы мерзімі біткен соң банкке қанша ақша қайтарады? Банк қанша пайда табады?

2. Жылдық 8% пен 3 жыл мерзімге 5000 АҚШ доллары бойынша күрделі пайыздарды табыңдар.

3. Вохид 50 млн сум қарыз алды, бірінші, екінші және үшінші жыл үшін сәйкесінше 10%, 12% және 14% ставкада пайыз төлеуге разы болды. 3 жылдан соң төлеу керек болған жалпы ақшаны табыңдар.

4. Бір кісі банкке 100 млн сум қойған. Соның есесіне ол 133,1 млн сум алды. Банк жылына 10 пайыз берді. Ол ақшаны қанша уақыт банкте сақтаған?

5. Салымшы 26 миллион сумды банк шотына өткізді. 18 айдан кейін оның шотында 32 млн сум болды. Жылдық пайыз ставкасы қанша?

6. Менде 400 доллар бар. Менің досым маған банкке ақша салуды ұсынды. Мен жылдық 13% шетел валютасындағы шотқа және әр айда 1% толтырылатын сумма шотына инвестиция кіріттім.

a) Валюталық шотқа ақша салсам, бір жылда қанша аламын?

b) Бұл ақшаны толығымен сумға айналдырып, сумма шотына салсам, бір жылда қанша доллар аламын? Доллар мен сумның айырбас бағамын ескер.

7. Мұрат 10 миллион сумға тауар алса, 7 пайыз салық төлейді. Сол тауарды 13 миллион сумға сатса, 9 пайыз салық алады. Мұрад төлейтін ҚҚС-ты табыңдар.

8. Егер кәсіпкер тауарын 7 500 000-ға сатса, ол сатып алушыдан 12% ставка бойынша сату салығын алады. Егер ол 180 000 сум көлемінде ҚҚС төлесе, кәсіпкер төлеген салықты ескере отырып, бастапқы бағаны есептеңдер.

9. Өндіруші өз өнімінің бағасын әрқайсысы 12 000 000 деп жариялады. Ол көтерме сатушыға 30%, ал көтерме сатушы өз кезегінде бөлшек сатушыға жарияланған бағадан 20% жеңілдікке рұқсат берді. Егер тауарға сатудан алынатын салық ставкасы 10% болса және бөлшек саудагер оны тұтынушыға жарияланған бағамен сатса, көтерме және бөлшек саудагер төлеген қосылған құн салығын тап.

10. Бөлшек саудагер көтерме сатушыдан 80 000 сумға тауар сатып алады, ал көтерме сатушы 8% белгіленген ставка бойынша сату салығын алады. Сатушы бағаны 100 000 сум етіп белгілеп, тұтынушыдан сол ставка бойынша сату салығын алады. Сатушы мемлекетке қанша ҚҚС төлейді?

4-ТАРАУ. ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ФУНКЦИЯЛАР

- ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ФУНКЦИЯЛАР. ПЕРИОДТЫ ПРОЦЕСТЕР
- КЕРІ ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ФУНКЦИЯЛАР

ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ФУНКЦИЯЛАР ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ, ГРАФИГІ. ПЕРИОДТЫ ПРОЦЕСТЕР

Тригонометриялық функциялар. Периодты процестер

Табиғатта, технологияда, өндірісте және басқа салаларда уақыт өте келе қайталанатын оқиғалар мен процестер көп. Мысалы, күннің шығуы, жыл мезгілдерінің ауысуы, іштен жанатын қозғалтқыштағы поршеннің қозғалысы және т.б. уақыт өте қайталанады. Мұндай процестер ***периодты процестер*** деп аталады. Периодтық процестер тригонометриялық функциялармен сипатталады.

Тригонометриялық функцияларды үйренуде:

1) бұрыш шамасының градус өлшеуін;

2) 1° бұрыштың 60 -тан бір бөлігі 1 *минут* (белгіленуі $1'$), $1'$ тың 60 тан бір бөлігі 1 секунд

(белгіленуі $1''$) екенін, яғни

$$1' = \frac{1^\circ}{60},\ 1'' = \frac{1'}{60} = \frac{1^\circ}{3600}$$

теңдіктерді;

3) бұрыш шамасының радиан өлшеуін;

4) бұрыштың радиан өлшеуінен градус өлшеуіне өту

$$\alpha\ rad = \left(\frac{180}{\pi}\cdot\alpha\right)^\circ$$

формуласын;

5) бұрыштың градус өлшеуінен радиан өлшеуіне өту

$$\alpha^\circ = \left(\frac{\pi}{180}\cdot\alpha\right)rad$$

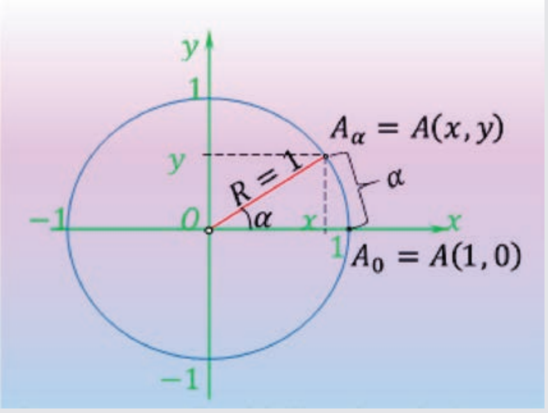
формуласын;

6) келтіру формулаларын білу талап етіледі.

Бұрыштың синусы, косинусы, тангенсі және котангенсі

Oxy Декарт координаталар жүйесі енгізілген жазықтықта центрі координаталар басында болған **бірлік шеңбер** (яғни радиусы 1 ге тең шеңбер) ді қарастырамыз. $A_\alpha = A\ (1;\ 0)$ нүктені тағайындап аламыз. Шеңберде A_0 нүктеден сағат көрсеткісінің қозғалысына карсы (яғни **оң**) бағытта ұзындығы α ға тең доға аламыз және оның соңын A_α арқылы белгілейміз (1-*сурет*). Бұрыш шамасының радиан өлшеуінің анықталуы бойынша A_0OA_α бұрыштың өлшеуі α радианға тең болады:

1-сурет



α радиан бірлік шеңбердегі ұзындығы α болған $\overset{\frown}{A_0A_\alpha}$ доғаның центрлік бұрышының бұрыштық шамасы

$$\alpha = \angle A_0OA_\alpha.$$

Назар аудар! A_α нүктенің Oxy жазықтықта қандайда бір координаталары бар болады. Айталық, A_α нүктенің Oxy жазықтықтағы координаталары $(x; y)$ болсын.

Анықтама

1) x шама α бұрыштың *косинусы* деп аталады және $cos\alpha$ арқылы белгіленеді;

2) y шама α бұрыштың *синусы* деп аталады және $sin\alpha$ арқылы белгіленеді;

3) $\frac{y}{x}$ қатынас α бұрыштың *тангенсі* деп аталады және $tg\alpha$ арқылы белгіленеді;

4) $\frac{x}{y}$ қатынас α бұрыштың *котангенсі* деп аталады және $ctg\alpha$ арқылы белгіленеді.

Демек, анықтама бойынша:

$$cos\alpha = x, \qquad sin\alpha = y, \qquad tg\alpha = \frac{y}{x}, \qquad ctg\alpha = \frac{x}{y} \qquad (1)$$

болады.

Ескерту! Егер бірлік шеңбер орнына кез келген R радиусты шеңбер қаралған болса, онда

$$cos\,\alpha = \frac{x}{R}, \qquad sin\,\alpha = \frac{y}{R}, \qquad tg\,\alpha = \frac{y}{x}, \qquad ctg\,\alpha = \frac{x}{y} \qquad (1')$$

теңдіктер пайда болады.

Шеңбердегі A_0 нүктені берілген бұрышқа төмендегідей екі бағытта центрлік бұруға болатыны айқын:

Оң бұру: бұру сағат көрсеткіші қозғалысына қарсы бағытта орындалады.

Теріс бұру: бұру сағат көрсеткіші қозғалысы бағытында орындалады.

$y = sinx$, $y = cosx$, $y = tgx$, $y = ctgx$ функциялар және олардың қасиеттері, графигі

Әрбір x санға бірлік шеңбердегі A_0 нүктеден бастап x бұрышқа бұруда пайда болатын A_x нүктені сәйкес қоямыз. Онда, шеңбердегі A_x нүкте үшін $sinx$, $cosx$, tgx, $ctgx$ мәндерді есептеуге болады. Нәтижеде x санға $sinx$, $cosx$, tgx, $ctgx$ мәндерді сәйкес қоятын және ***тригонометриялық функциялар*** деп аталатын мына

$$y = sinx,\ y = cosx,\ y = tgx,\ y = ctgx$$

функцияларды аламыз.

Бұл функциялар периодты, яғни әрбір $n \in Z$ үшін төмендегі теңдіктер орынды болады:

$$sin(x+2\pi n)=sinx$$

$$cos(x+2\pi n)=cosx$$

$$tg(x+\pi n)=tgx$$

$$ctg(x+\pi n)=ctgx$$

Демек , $y = \sin x$ және $y = \cos x$ функциялардың негізгі периоды $T_0 = 2\pi$, ал $y = tgx$ және $y = ctgx$ функциялардың негізгі периоды $T_0 = \pi$ екен.

$y = \cos x$ функция жұп:

$$f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x).$$

$y = \sin x$, $y = tgx$, $y = ctgx$ функциялар тақ:

$$f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$$

$$f(-x) = tg(-x) = -tg\, x = -f(x)$$

$$f(-x) = ctg(-x) = -ctg\, x = -f(x)$$

Мыналар айқын,

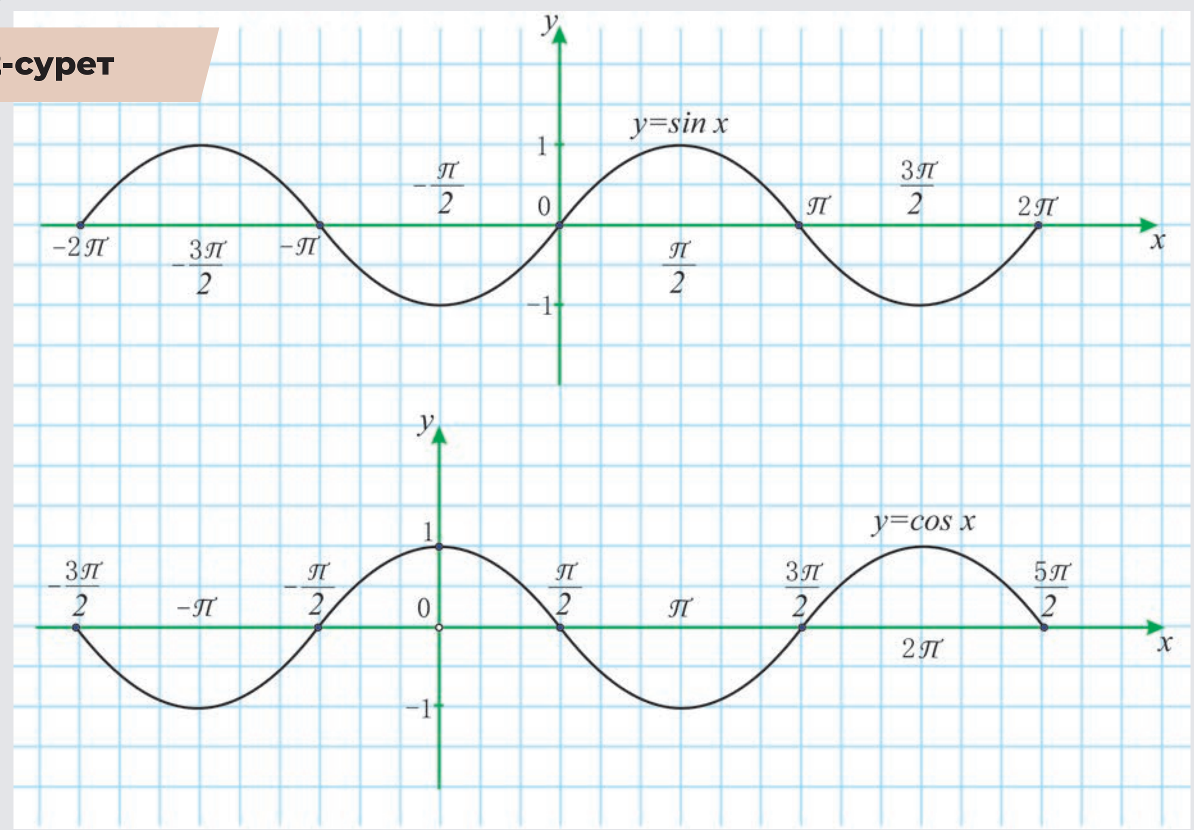
$y = \sin x$ және $y = \cos x$ функциялар үшін $D(y) = (-\infty; +\infty)$, $E(y) = [-1; 1]$,

$y = tgx$ функция үшін $D(y) = \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in Z$, $E(y) = (-\infty, +\infty)$,

$y = ctgx$ функция үшін $D(y) = (\pi k;\ \pi + \pi k)$, $k \in Z$, $E(y) = (-\infty, +\infty)$ болады.

Төмендегі суреттерде тригонометриялық функциялар графиктері келтірілген.

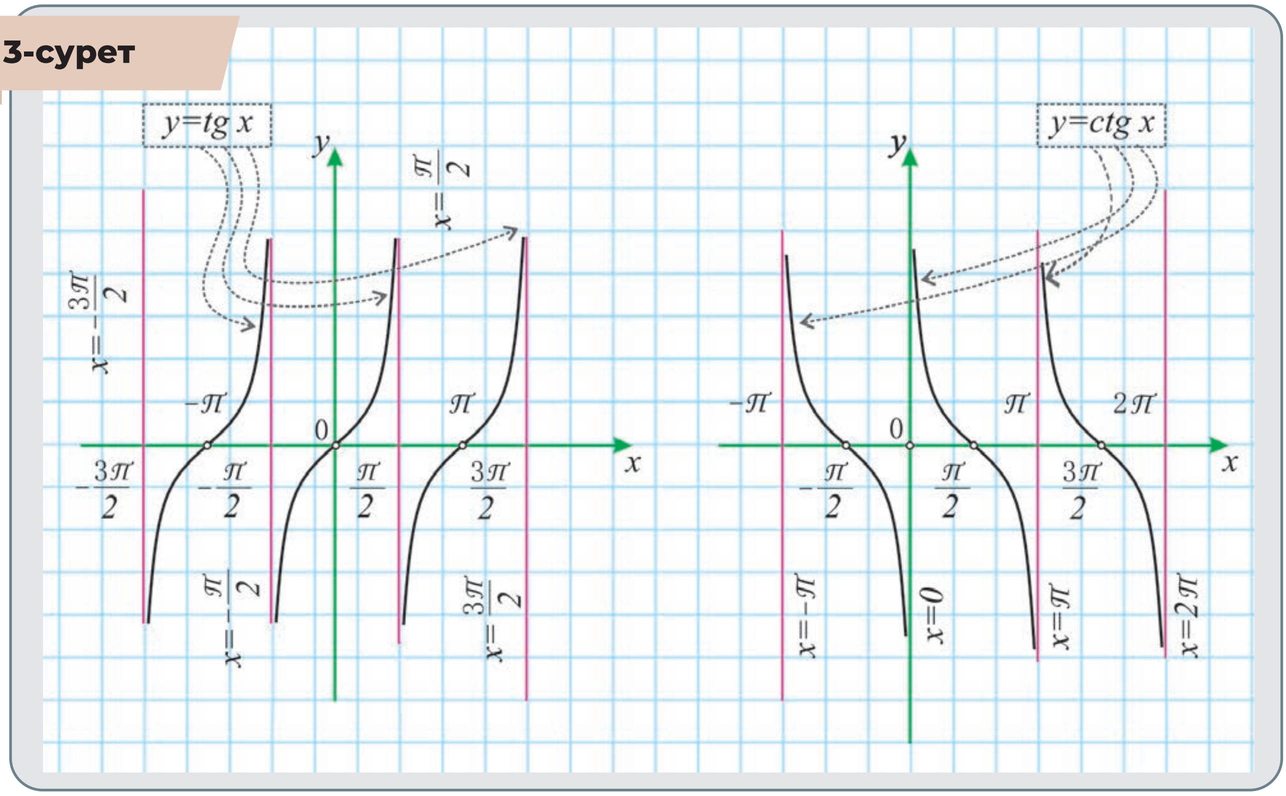
2-сурет



Бұл графиктерден төмендегі маңызды қорытындылар келіп шығады:

1) $y = \sin x$ функция $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ аралықта өседі және бұл аралықтан алынған әрбір x -ке y -тің $[-1; 1]$ кесіндідегі тек бір ғана мәні сәйкес келеді;

3-сурет



2) $y = cosx$ функция $[0; \pi]$ аралықта кемиді және бұл аралықтан алынған әрбір x -ке y -тің $[-1; 1]$ кесіндідегі тек бір ғана мәні сәйкес келеді;

3) $y = tgx$ функция $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ аралықта өседі және бұл аралықтан алынған әрбір x -ке y -тің $(-\infty; +\infty)$ аралықтағы тек бір ғана мәні сәйкес келеді;

4) $y = ctgx$ функция $(0; \pi)$ аралықта кемиді және бұл аралықтан алынған әрбір x -ке y -тің $(-\infty; +\infty)$ аралықтағы тек бір ғана мәні сәйкес келеді.

Анықталу облысын табуға берілген мысалдарды шешуде айрықша жағдайларда функцияның анықталу облысына тиісті болмаған нүктелерді көрсету жеткілікті болады.

1-мысал. $y = 2tg(3x-1)$ функцияның анықталу облысын табыңдар.

Шешуі. $y = tgx$ функция $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$ нүктелерінде анықталмаған, сондықтан $y = 2tg(3x-1)$ функция аргументтің $3x-1 = \frac{\pi}{2} + \pi n$ мәндерінде анықталмаған. Бұдан $x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{1}{3} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z$.

Жауабы: $y = 2tg(3x-1)$ функция $x = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{3} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z$ нүктелерден басқа барлық нақты сандарда анықталған.

2-мысал. $y = 2 - \frac{1}{3}cos(5x-4)$ функцияның мәндер жиынын табыңдар.

Шешуі. Бұл мысалды шешуде

$$-1 \leq cos\, x \leq 1$$

қос теңсіздік x -тің барлық мәндерінде орынды екенінен пайдаланамыз. Демек,

$$-1 \le cos(5x-4) \le 1$$

Жоғарыдағы қостеңсіздікті $-\frac{1}{3}$ ке көбейтеміз: және төмендегі қос теңсіздікті аламыз:

$$-\frac{1}{3} \le -\frac{1}{3}cos(5x-4) \le \frac{1}{3}$$

Бұл қос теңсіздіктің барлық бөлігіне 2 ні қосамыз,

$$2-\frac{1}{3} \le 2-\frac{1}{3}cos(5x-4) \le 2+\frac{1}{3}$$

$$1\frac{2}{3} \le 2-\frac{1}{3}cos(5x-4) \le 2\frac{1}{3}$$

немесе

$1\frac{2}{3} \le y \le 2\frac{1}{3}$ болады.

Жауабы: Берілген функцияның мәндер жиыны $\left[1\frac{2}{3};2\frac{1}{3}\right]$ кесіндіден тұрады, немесе $E(y)=\left[1\frac{2}{3};2\frac{1}{3}\right]$.

Егер, $y=f(x)$ функцияның негізгі периоды T болса, $y=af(kx+b)$ функция үшін $\frac{T}{|k|}$ сан ең кіші оң периоды болатындығы белгілі, мұнда k нөлден өзгеше сан.

3-мысал. $y=2sin\left(\frac{4}{3}x+7\right)$ функцияның ең кіші оң периодын табыңдар.

Шешуі. $y=sin\,x$ функцияның негізгі периоды 2π -ге тең. Сондықтан $y=2sin\left(\frac{4}{3}x+7\right)$ функцияның ең кіші оң периоды

$T=\frac{2\pi}{\frac{4}{3}}=\frac{3\pi}{2}$ болады.

Жауабы: Берілген функцияның ең кіші оң периоды $\frac{3\pi}{2}$.

МЫСАЛДАР

1. Функцияның анықталу облысын табыңдар.

a) $y=cos\,3x$ b) $y=sin\frac{2x-1}{5}$ c) $y=sin\frac{1}{x+5}$ d) $y=sin\sqrt{\frac{1-x}{x+3}}$

e) $y=tg3x$ f) $y=ctg\frac{2x}{5}$ g) $y=tg\frac{1}{x}$

2. Функцияның мәндер жиынын табыңдар.

a) $y=-1+cos\,x$ b) $y=-6\,sin\,3x\,cos\,3x$ c) $y=2+cos\,x$ d) $y=-3\,sin\,2x+2$

e) $y=5tg\,4x$ f) $y=3-4\,cos\,5x$ g) $y=-5+\frac{1}{2}cos\,x\,sin\,x$

3. Функцияның жұп немесе тақ екенін анықтаңдар.

a) $y=2xtgx$ b) $y=x^3-tg^3x$ c) $y=tgx\,sin^2x$ d) $y=tg\,2x+2\,sin\,x$

e) $y = x^2 + tg^2 x$ f) $y = tg10|x|$ g) $y = \dfrac{x^2 + \cos x}{2}$ h) $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{x+5}$

4. $y = sinx$ функция графигінен пайдаланып, төмендегі функциялардың графиктерін салыңдар.

a) $y = -sinx$ b) $y = 2sinx$ c) $y = -0{,}5sinx$ d) $y = |sinx|$

e) $y = \sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$ f) $y = |sin|x||$ g) $y = 1 + sinx$ h) $y = sin2x$

5. $y = cosx$ функция графигінен пайдаланып, төмендегі функциялардың графиктерін салыңдар.

a) $y = -cosx$ b) $y = 0{,}5cosx$ c) $y = cos2x$ d) $y = |cosx|$

e) $y = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$ f) $y = |cos|x||$ g) $y = 2 - cosx$ h) $y = cos4x$

6. Функция графигін салыңдар.

a) $y = tg2x$ b) $y = ctg\dfrac{x}{2}$ c) $y = 2tgx$ d) $y = \dfrac{1}{3}ctgx$

7. Функцияның жұп немесе тақ екенін анықтаңдар.

a) $y = \dfrac{\cos 2x - \sin^2 x}{x^2}$ b) $y = ctg3x + 5sinx$ c) $y = sin5x$

d) $y = 2sin^2x$ e) $y = sin^2x + sinx$ f) $y = 5sin^3x + 2sinx$

8. $f(x)$ функция $(-\infty;\infty)$ аралықта анықталған болсын:

a) $f(x) + f(-x)$ жұп функция екенін көрсетіңдер;

b) $f(x) - f(-x)$ тақ функция екенін көрсетіңдер.

9. Функцияның ең кіші оң периодын табыңдар.

a) $f(x) = cos(3x+1)$ b) $f(x) = \sin\left(\dfrac{x}{4} - 3\right)$ c) $f(x) = tg(2x+1)$

d) $f(x) = sin2\pi x$ e) $f(x) = \cos\sqrt{3x}$ f) $f(x) = tg(4\pi x - 3)$

10. Берілген *f(x)* функцияның ең кіші оң периодын табыңдар.

a) $f(x) = \sin\dfrac{3x}{2} + tg7x$ b) $f(x) = \cos x + 2\sin\left(\dfrac{3x}{5} + \dfrac{\pi}{6}\right)$

c) $f(x) = ctg(x-1) - 3sin3x$ d) $f(x) = \sin 3x + \cos\dfrac{3x}{4} + \dfrac{1}{2}tg\dfrac{9x}{5}$

11. $T = -5\pi$ саны $f(x) = \sin 6x$ функцияның периоды болатындығын көрсетіңдер.

12. $T = \pi$ саны $f(x) = \sqrt{\sin 2x + 1}$ функцияның периоды болатындығын көрсетіңдер.

13. Төмендегі функциялардан қайсыларының ең кіші оң периоды π ге тең?

a) $y = sinx$ b) $y = cosx$ c) $y = tgx$ d) $y = ctgx$

14. Функция графигін салыңдар.

a) $y = |\sin x|$ b) $y = |\cos x|$ c) $y = |tgx|$ d) $y = |ctgx|$

КЕРІ ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ФУНКЦИЯЛАР ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ, ГРАФИГІ

Кері тригонометриялық функциялар

Күнделікті өмірімізде ғимараттарды, көпірлерді, көліктерді, электр станцияларын, ұшақтарды және басқа құрылғыларды бұзатын резонансты құбылысқа тап боламыз. Резонанстық құбылыс периодтық процестердің өзара үйлестіруінің нәтижесінде байқалады. Мұндай жағдайларды болдырмау үшін тригонометриялық функциялар аргументтің қандай мәнінде берілген мәнді қабылдайтынын, яғни кері тригонометриялық функцияларды білу қажет.

Кері тригонометриялық функцияларды үйренуде:

1) тригонометриялық функциялардың периодтылығын және олардың негізгі периодтарын;

2) $y = sinx$ функция $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ аралықта өсуі және бұл аралықтан алынған әрбір x -ке y -тің [–1; 1] кесіндідегі тек бір ғана мәні сәйкес келетінін;

3) $y = cosx$ функция $[0; \pi]$ аралықта кемуі және бұл аралықтан алынған әрбір x -ке y -тің [–1; 1] кесіндідегі тек бір ғана мәні сәйкес келетінін;

4) $y = tgx$ функция $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ аралықта өсуі және бұл аралықтан алынған әрбір x -ке y -тің $(-\infty; +\infty)$ аралықтағы тек бір ғана мәні сәйкес келетінін;

5) $y = ctgx$ функция $(0; \pi)$ аралықта кемуі және бұл аралықтан алынған әрбір x -ке y -тің $(-\infty; +\infty)$ аралықтағы тек бір ғана мәні сәйкес келетінін білу талап етіледі.

$y = arcsinx$ функция және оның қасиеттері, графигі

$y = sinx$ теңдеу $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ аралықта x айнымалыға қатысты бір мәнді шешіледі және бұл түбір

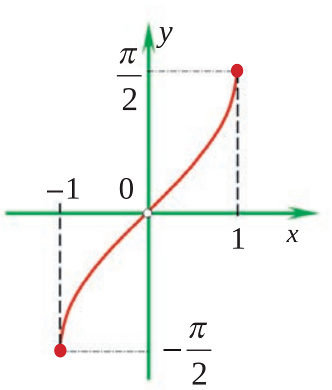
$$x = arcsiny$$

көріністе жазылады. Бұл теңдікпен [–1; 1] жиынның әрбір y элементіне $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ жиынның тек бір ғана x элементін сәйкес қоятын арксинус функциясы анықталады. Анықталған бұл сәйкестікте аргументті x арқылы, функцияны y арқылы белгілеп, оны

$$y = arcsinx$$

көріністе жазамыз (1-*сурет*).

1-сурет



$y = arcsinx$ функцияның графигі

$y = arcsinx$ функция $y = sinx$ функцияға кері функция болады:

$$sin(arcsinx) = x, \quad x \in [-1; 1]$$

$$arcsin(sinx) = x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$y = arcsinx$ функцияның мынадай қасиеттері бар:

- $D(y) = [-1;1]$;
- $E(y) = \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$;
- $y = arcsinx$ – өспелі функция;
- $y = arcsinx$ функцияның ең үлкен мәні $\frac{\pi}{2}$ ге, ең кіші мәні $-\frac{\pi}{2}$ ге тең;
- $y = arcsinx$ функция графигі координата басынан өтеді;
- $y = arcsinx$ – тақ функция, яғни $arcsin(-x) = -arcsinx$;
- $y = arcsinx$ функция периодты емес.

1-мысал. $arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$ өрнектің мәнін табыңдар.

Шешуі. Айталық, $arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = x$ болсын. Онда берілген тапсырманы басқаша қоюға болады: $sinx = \frac{\sqrt{3}}{2}$ теңдікті қанағаттандыратын x тің $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ аралықтағы мәнін табыңдар. $sinx = \frac{\sqrt{3}}{2}$ теңдік $x = \frac{\pi}{3}$ болғанда орындалатыны белгілі. Демек, $arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$.

Төмендегі кестеде *arcsinx* өрнектің кейбір мәндері келтірілген.

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$arcsinx$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

$y = arccosx$ функция және оның қасиеттері, графигі

$$y = cosx$$

теңдік $[0; \pi]$ аралықта x айнымалыға қатысты бір мәнді шешіледі және бұл шешім

$$x = arccosy$$

көріністе жазылады. Бұл теңдікпен $[-1; 1]$ жиынның әрбір y элементіне $[0; \pi]$ жиынның тек бір ғана x элементін сәйкес қоятын арккосинус функциясы анықталады. Анықталған бұл сәйкестікте аргументті x арқылы, функцияны у арқылы белгілеп, оны

$$y = arccosx$$

көріністе жазамыз (2-*сурет*).

$y = arccosx$ функция **$y = cosx$** функцияға кері функция болады:

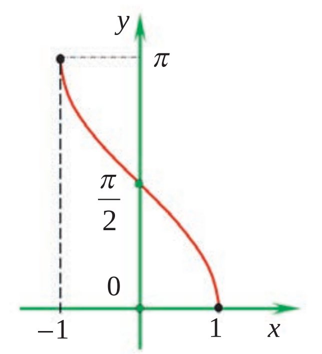
$$cos(arccosx) = x, \quad x \in [-1; 1]$$

$$arccos(cosx) = x, \quad x \in [0; \pi]$$

$y = arccosx$ функцияның мынадай қасиеттерге ие:

- $D(y) = [-1; 1]$;
- $E(y) = [0; \pi]$;
- $y = arccosx$ – кемімелі функция;
- $y = arccosx$ функцияның ең үлкен мәні π -ге, ең кіші мәні 0 -ге тең;
- $y = arccosx$ функция графигі Ox осін абсциссасы $x = 1$ болған (1; 0) нүктеде, Oy осін ординатасы $y = \frac{\pi}{2}$ болған $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ нүктеде қиып өтеді;
- $y = arccosx$ – тақ та емес, жұп та емес. Мұнда $arccos(-x) = \pi - arccosx$ теңдік орынды болады;
- $y = arccosx$ функция периодты емес.

2-сурет



$y = arccosx$ функцияның графигі

2-мысал. $arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$ өрнектің мәнін табыңдар.

Шешуі. Айталық, $arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = x$ болсын. Онда, берілген тапсырманы басқаша қоюға болады: $cosx = \frac{\sqrt{2}}{2}$ теңдікті қанағаттандыратын x -тің $[0; \pi]$ аралықтағы мәнін табыңдар.

$cosx = \frac{\sqrt{2}}{2}$ теңдік $x = \frac{\pi}{4}$ болғанда орындалады. Демек,

$$arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Төмендегі кестеде $arccosx$ өрнектің кейбір мәндері келтірілген.

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$arccosx$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

$y = arctgx$ функция және оның қасиеттері, графигі

$$y = tgx$$

теңдік $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ аралықта x айнымалыға қатысты бір мәнді шешіледі және бұл шешім

$$x = arctgy$$

көріністе жазылады. Бұл теңдікпен $R = (-\infty; +\infty)$ жиынның әрбір y элементіне $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

жиынның тек бір ғана x элементін сәйкес қоятын арктангенс функциясы анықталады. Анықталған бұл сәйкестікте аргументті x арқылы, функцияны y арқылы белгілеп, оны

$$y = arctgx$$

көріністе жазамыз (3-*сурет*).

$y = arctgx$ функция $y = tgx$ функцияға кері функция болады:

$$tg(arctgx) = x, \quad x \in (-\infty; +\infty)$$

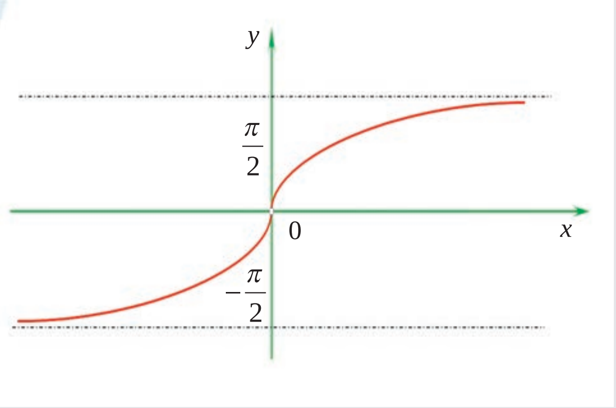
$$arctg(tgx) = x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

$y = arctgx$ функцияның мынадай қасиеттері бар:

- $D(y) = (-\infty; +\infty)$;
- $E(y) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;
- $y = arctgx$ – өспелі функция;
- $y = arctgx$ функция ең үлкен және ең кіші мәндерді қабылдамайды;
- $y = arctgx$ функция графигі координата басынан өтеді;
- $y = arctgx$ – тақ функция, яғни

  $$arctg(-x) = -arctgx;$$
- $y = arctgx$ функция периодты емес.

3-сурет



$y = arctgx$ функцияның графигі

3-мысал. $arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ өрнектің мәнін табыңдар.

Шешуі. Айталық, $arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = x$ болсын. Онда $tgx = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ теңдікті қанағаттандыратын x тің мәнін табу талап етіледі.

$tg\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ екені белгілі. Демек, $arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$.

Төмендегі кестеде *arctgx* өрнектің кейбір мәндері келтірілген.

x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$arctgx$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

$y = arcctgx$ функция және оның қасиеттері, графигі

$$y = ctgx$$

теңдік $(0; \pi)$ аралықта x айнымалыға қатысты бір мәнді шешіледі және бұл шешім

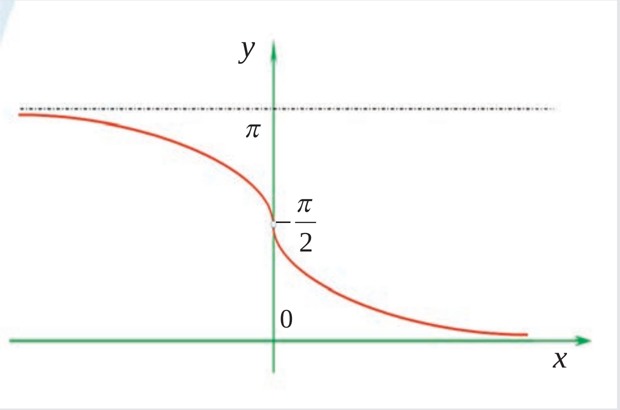
$$x = arcctgy$$

көріністе жазылады. Бұл теңдікпен $R = (-\infty; +\infty)$ жиынның әрбір y элементіне $(0; \pi)$ жиынның тек бір ғана x элементін сәйкес қоятын арккотангенс функциясы анықталады. Анықталған бұл сәйкестікте аргументті x арқылы, функцияны y арқылы белгілеп, оны

$$y = arcctgx$$

көріністе жазамыз (4-*сурет*).

4-сурет



$y = arcctgx$ функцияның графигі

$y = arcctgx$ функция $y = ctgx$ функцияға кері функция болады:

$$ctg(arcctgx) = x, \quad x \in (-\infty; +\infty), \quad arcctg(ctgx) = x, \quad x \in (0; \pi).$$

$y = arcctgx$ функцияның мынадай қасиеттері бар:

- $D(y) = (-\infty; +\infty)$;
- $E(y) = (0; \pi)$;
- $y = arcctgx$ – функцияның мынадай қасиеттері бар:
- $y = arcctgx$ функция ең үлкен және ең кіші мәндері жоқ;
- $y = arcctgx$ функция графигі Ox осімен қиылыспайды, Oy осімен ординатасы $y = \frac{\pi}{2}$ болған $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ нүктеде қиылысады;
- $y = arcctgx$ – тақ та емес, жұп та емес. Бұл функция үшін $arcctg(-x) = \pi - arcctg\, x$ теңдік орындалады;
- $y = arcctgx$ функция периодты емес.

4-мысал. $arcctg\sqrt{3}$ өрнектің мәнін табыңдар.

Шешуі. Айталық, $arcctg\sqrt{3} = x$ болсын. Онда $ctgx = \sqrt{3}$ теңдікті қанағаттандыратын x тің мәнін табу талап етіледі. $ctg\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$ екені белгілі. Демек, $arcctg\sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$.

Төмендегі кестеде $arcctgx$ өрнектің кейбір мәндері келтірілген.

x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$arcctgx$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

МЫСАЛДАР

1. Төмендегі өрнектердің мағынасы бар ма?

a) $arcsin(\sqrt{3}-1)$ b) $arcsin(4-\sqrt{5})$ c) $arccos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

d) $arccos\left(\sqrt{2}\right)$ e) $arctg(\sqrt{2})$ f) $arcctg(-100)$

2. Есептеңдер.

a) $arcsin\frac{1}{2}$ b) $arcsin\ (-1)$ c) $arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}$ d) $arcsin\,0$

e) $arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$ f) $arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ g) $arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ h) $arccos\frac{1}{2}$

i) $arccos\,0$ j) $arccos\frac{1}{\sqrt{2}}$ k) $arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ l) $arctg\,0$

m) $arctg(-1)$ n) $arctg\frac{1}{\sqrt{3}}$ o) $arctg\sqrt{3}$ p) $arctg1$

q) $arctg(-\sqrt{3})$ r) $arcctg\sqrt{3}$ s) $arcctg(-1)$ t) $arcctg\frac{1}{\sqrt{3}}$

3. Есептеңдер.

a) $arcsin\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}-1}-\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}\right)$ b) $arccos\left(\frac{10+5\sqrt{5}}{\frac{5}{2}(3+\sqrt{5})}-\frac{\frac{5}{2}(3+\sqrt{5})}{10+5\sqrt{5}}\right)$

c) $arctg\left(\frac{1-2(2+\sqrt{3})}{3+\sqrt{3}}-\frac{1}{1+\sqrt{3}}\right)$ d) $arcctg\left(\frac{1+\sqrt{\frac{7}{3}}-\frac{2}{\sqrt{3}}}{1-\sqrt{\frac{7}{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}}-\frac{1-\sqrt{\frac{7}{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\sqrt{\frac{7}{3}}-\frac{2}{\sqrt{3}}}\right)$

4. Есептеңдер.

a) $cos(arctg2)$ b) $sin(arctg7)$ c) $cos\left(arcsin\frac{1}{4}\right)$

d) $ctg(arctg5)$ e) $sin(arctg11)$ f) $sin\left(arccos\frac{1}{5}\right)$

g) $cos(arcctg(-4))$ h) $ctg(arcsin(-0{,}9))$ i) $sin\left(arccos\left(-\frac{4}{7}\right)\right)$

j) $ctg(arctg(-15))$ k) $tg(arccos(-0{,}3))$ l) $ctg\left(arccos\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right)$

5. Есептеңдер.

a) $cos(2arcsin0,2)$ b) $sin\left(2\,arccos\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$ c) $sin\left(2arcctg\sqrt{26}\right)$

d) $tg(2arccos0,6)$ e) $tg\left(2arcsin\frac{7}{9}\right)$ f) $cos(2arccos(-0{,}8))$

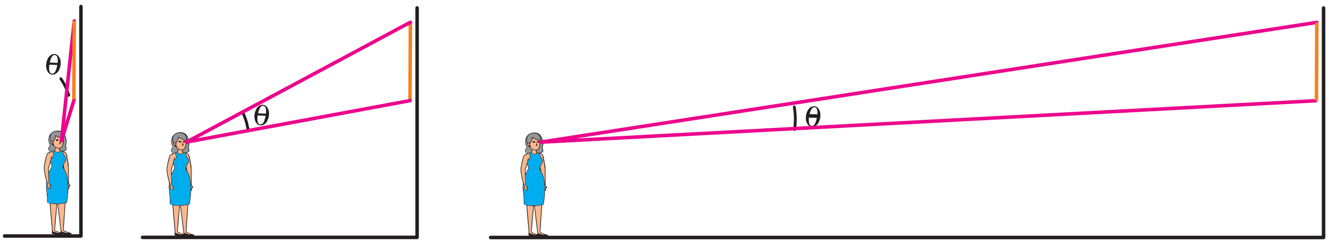
g) $tg(2arcctg(-3))$ h) $sin(2arcsin(-0{,}1))$ i) $tg(2arcctg\,20)$

ЖОБАЛЫҚ ЖҰМЫС

КИНОТЕАТРДА ҚАЙ ЖЕРДЕ ОТЫРУ КЕРЕК?

Заттың көрінетін өлшемі оның көрерменнен қашықтығына байланысты екенін бәрі біледі. Нысан неғұрлым алыс болса, оның көрінетін өлшемі соғұрлым аз болады. Көрінетін өлшем объектінің көрерменнің көзіне қарайтын бұрышымен анықталады.

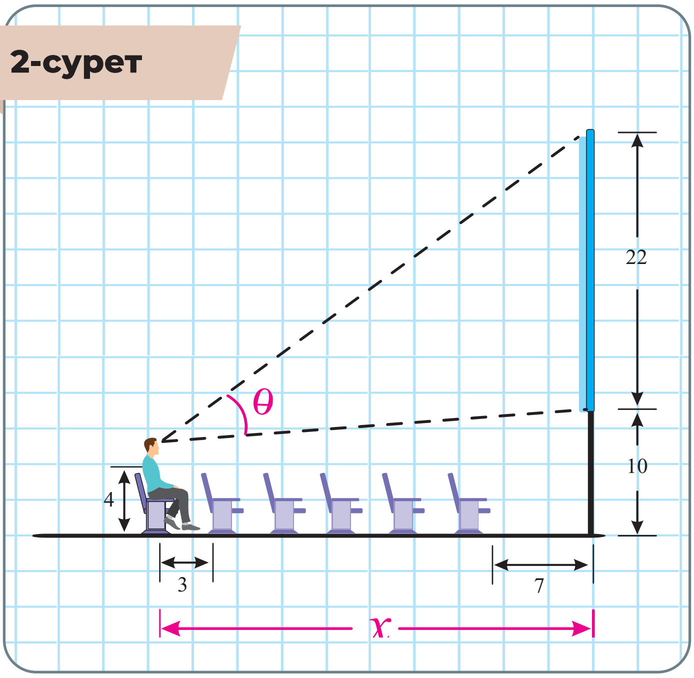
Қабырғадағы суретке қарап отырсаң, максималды көрініс алу үшін қанша қашықтықта болуың керек? Егер сурет көз деңгейінен жоғары ілулі болса, төмендегі суреттерде көрсетілгендей тым жақын немесе тым алыс болсаң, көз назары астындағы бұрыш кіші екені анық.



Кинотеатрда орын таңдау кезінде де солай болады.

1. Кинотеатрдағы экран биіктігі 22 фут және тегіс еденнен 10 фут биіктікте орналасқан. Орындықтардың бірінші қатары экраннан 7 фут, ал қатарлары 3 фут қашықтықта орналасқан. Сен максималды көрінетін қатарға, яғни экранның көз назарың астындағы бұрышы θ максималды болатын жерде отыруды қаладың. Көздерің суреттегідей еденнен 4 фут биіктікте және экраннан x қашықтықта (1 фут = 0,3048 м) отырсың делік (2-*сурет*).

2-сурет



Төмендегіні дәлелдеңдер: $\theta = arctg28x - arctg6x$.

Төмендегі өрнекті келтіріп шығару үшін айырманың тангенсі формуласынан пайдаланыңдар:

$$\theta = arctg\left(\frac{22x}{x^2+168}\right)$$

Geogebra қосымшасынан пайдаланып θ -ның x -ке қатысты функция ретінде графигін салыңдар. θ масимал мән қабылдайтын x -тің мәнін табыңдар? Қайсы қатарға отыру керек? Сол қатардағы көру бұрышы қандай?

Енді орындықтардың бірінші қатарынан бастап отыру аймағы көлденең жазықтықтан жоғары деп есептейік. Еден бұрышпен бүгілген және оның көлбеуде отырған қашықтығы суретте көрсетілгендей x -ге тең (3-*сурет*).

1. Төмендегіні келтіріп шығару үшін косинустар теоремасынан пайдаланыңдар:

$$\theta = arccos\left(\frac{a^2+b^2-484}{2ab}\right).$$

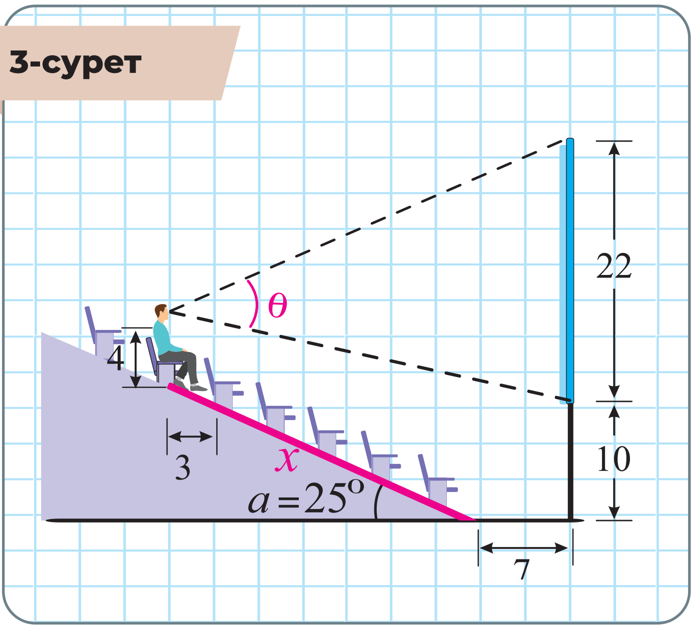
Мұндағы

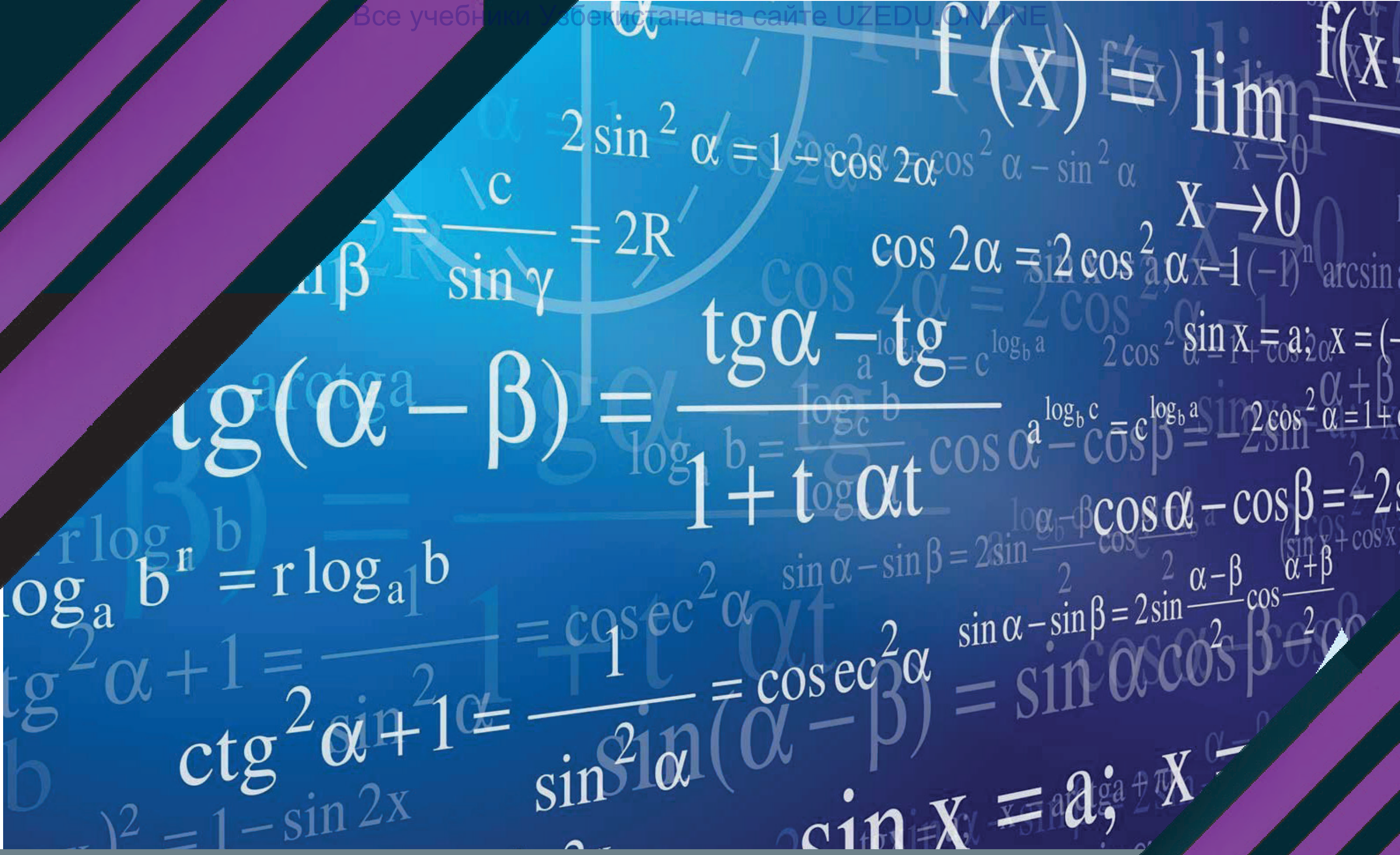
$$a^2 = (7 + x\cos\alpha)^2 + (28 - x\sin\alpha)^2$$

$$\text{және } b^2 = (7 + x\cos\alpha)^2 + (x\sin\alpha - 6)^2$$

2. ***Geogebra*** график қосымшасынан пайдаланып θ -ның x -тің функциясы ретінде графигін салыңдар жән θ максимал мән қабылдайтын x -тің мәнін табыңдар. Қайсы қатарда отыру керек? Бұл қатарда көріну бұрышы қандай?

3-сурет





5-ТАРАУ. ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ЖӘНЕ ТЕҢСІЗДІКТЕР

- ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР
- КЕЙБІР ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРДІ ШЕШУ ТӘСІЛДЕРІ
- ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ТЕҢСІЗДІКТЕР

ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР

Ең қарапайым тригонометриялық теңдеулер

Периодтық функциялармен сипатталатын процестер мәндерді қашан қандай мән қабылдайтынын білу маңызды. Ол үшін периодтық функциялар қатысатын

$$\sin x = a\,,\ \cos x = a\,,\ tgx = a\,,\ ctgx = a$$

көріністегі ең қарапайым тригонометриялық теңдеулерді шешуді білуі қажет.

Ең қарапайым тригонометриялық теңдеулерді шешуді үйрену үшін:

1) теңдеу ұғымын;

2) теңдеудің түбірі ұғымын; түбірлер жиыны шешім деп аталатынын;

3) тригонометриялық функциялар периодты болғандықтан, тригонометриялық теңдеудің шексіз көп түбірлері бар болатындығын;

4) табылған түбірлердің шексіз санын жалпылауды және оларды қысқа формулалар арқылы жазуды білу қажет (мұнда әрбір k бүтін саны үшін $n = 2k$ өрнегі жұп санды, $n = 2k + 1$ өрнегі тақ санды білдіреді).

1-мысал. $\sin x = \dfrac{1}{2}$ теңдеуді шешіңдер.

Шешуі. $\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$ екені белгілі. $\sin x = \dfrac{1}{2}$ теңдік x -тің $\dfrac{5\pi}{6} = \pi - \dfrac{\pi}{6}$ мәнінде де орындалады (1-*сурет*). Синус периодты функция әрқандай n бүтін сан үшін

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$$

немесе

$$x = \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2\pi n = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$$

болғанда да $\sin x = \dfrac{1}{2}$ болады (2-*сурет*). Бұл екі теңдікті былайша жалпылауға болады:

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

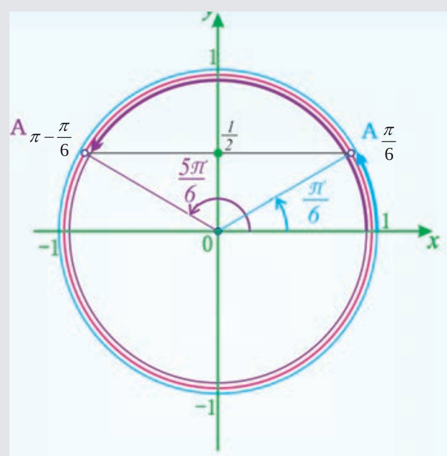
Шынында да, n жұп, яғни, $x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n$ теңдікті; n тақ, яғни, $x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n$ теңдікті аламыз.

Сөйтіп, $\sin x = \dfrac{1}{2}$ теңдік x -тің

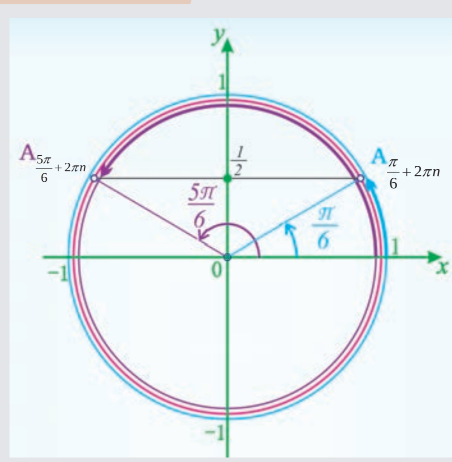
$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}.$$

мәндерінде орынды екен.

1-сурет



2-сурет



$sinx = a$ көріністегі теңдеу

$a > 1$ немесе $a < -1$ болса, онда $\sin x = a$ теңдеудің түбірі жоқ. Сондықтан бұл жағдайларда $\sin x = a$ теңдеудің шешімі құр жиын $\varnothing$ деген жауабы жазылады;

$-1 \le a \le 1$ болса, $\sin x = a$ теңдеудің шешімі

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z$$

көріністе болады.

Дербес жағдайлар.

1) $sinx = -1$ теңдеудің шешімі x тәуелсіз айнымалының

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\quad n \in \mathbb{Z}$$

мәндерінен тұрады.

2) $sinx = 0$ теңдеудің шешімі x тәуелсіз айнымалының

$$x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$$

мәндерінен тұрады.

3) $sinx = 1$ теңдеудің шешімі x тәуелсіз айнымалының

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\quad n \in \mathbb{Z}$$

мәндерінен тұрады.

$cosx = a$ көріністегі теңдеу

$\boldsymbol{\cos x = a}$ көріністегі теңдеуде

егер $a > 1$ немесе $a < -1$ болса, онда $\cos x = a$ теңдеудің түбірі жоқ. Мұндай жағдайларда $\cos x = a$ теңдеудің шешімі $\varnothing$ деген жауабы жазылады;

$-1 \le a \le 1$ болса, $\cos x = a$ теңдеудің шешімі

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n,\ n \in Z$$

болады.

Дербес жағдайлар.

1) $cosx = -1$ теңдеудің шешімі x -тің

$$x = \pi + 2\pi n,\quad n \in \mathbb{Z}$$

мәндерінен тұрады

2) $cosx = 0$ теңдеудің шешімі x -тің

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$$

мәндерінен тұрады

3) $cosx = 1$ теңдеудің шешімі x -тің

$$x = 2\pi n,\quad n \in \mathbb{Z}$$

мәндерінен тұрады.

2-мысал. $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ теңдеуді шешіңдер.

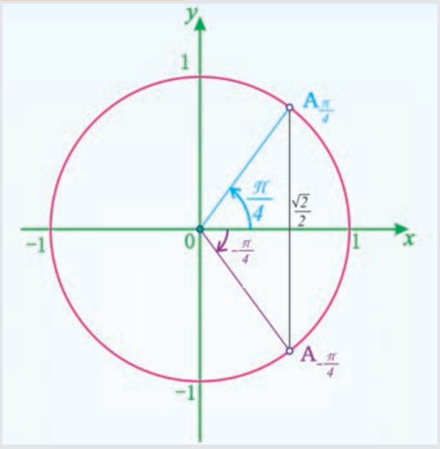
Шешуі.

$\cos\frac{\pi}{4} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ екені белгілі (3-*сурет*). Косинус периодты функция болғандықтан кез келген n бүтін сан үшін

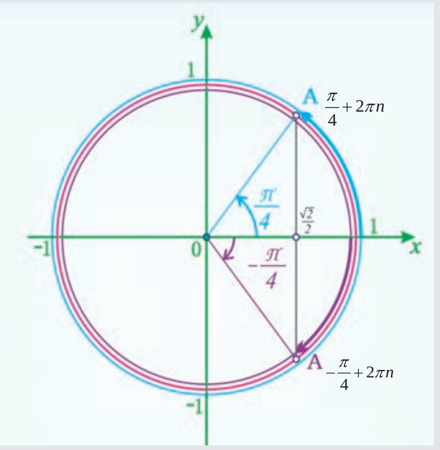
$$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \text{ немесе } x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$$

болғанда да $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ болады (4-*сурет*). Бұл екі теңдікті былайша жалпылауға болады: $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

3-сурет



4-сурет



$tgx = a$ көріністегі теңдеу

Әрбір n бүтін саны үшін x тәуелсіз айнымалының

$$x = arctga + \pi n$$

мәні $tgx = a$ теңдеудің түбірі болады. Бұл жағдайда шешім

$$x = arctga + \pi n,\ n \in Z$$

көріністе болады.

$ctgx = a$ көріністегі теңдеулер

Әрбір n бүтін саны үшін x тәуелсіз айнымалының

$$x = arcctga + \pi n$$

мәні $ctgx = a$ теңдеудің түбірі болады. Бұл жағдайда шешім

$$x = arcctga + \pi n,\ n \in Z$$

көріністе болады.

3-мысал. Теңдеуді шешіңдер: $tg\left(x+\frac{\pi}{7}\right)=-1$

Шешуі.

$tg\left(x+\frac{\pi}{7}\right)=-1,\ \ x+\frac{\pi}{7}=arctg(-1)+\pi k, k\in Z,\ \ x+\frac{\pi}{7}=-\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z,\ \ x=-\frac{11\pi}{28}+\pi k, k\in Z$.

Жауабы: $x=-\frac{11\pi}{28}+\pi k, k\in Z$.

4-мысал. Теңдеуді шешіңдер: $ctg\frac{3x}{2}=\sqrt{3}$.

Шешуі.

$ctg\frac{3x}{2}=\sqrt{3}$, $\frac{3x}{2}=arcctg\sqrt{3}+\pi k, k\in Z$, $\frac{3x}{2}=\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z$, $3x=\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in Z$,

$x=\frac{\pi}{9}+\frac{2}{3}\pi k, k\in Z$.

Жауабы: $x=\frac{\pi}{9}+\frac{2}{3}\pi k, k\in Z$.

МЫСАЛДАР

1. Теңдеуді шешіңдер.

a) $sin2x=1$ b) $sin\frac{x}{3}=-1$ c) $sin\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)=0$

d) $2sin4x=\sqrt{5}$ e) $sin(4x-1)=-\frac{\pi}{3}$ f) $sinx=\frac{1}{2}$

g) $sinx=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ h) $sin4x = 1$ i) $sin2x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

j) $sin\left(x+\frac{\pi}{7}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ k) $sin\frac{2x}{3}=-1$ l) $sin\left(2x+\frac{\pi}{5}\right)=0$

m) $sin(3x+1)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ n) $sin(-x)=-\frac{1}{2}$ o) $sin\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)=1$

2. Теңдеуді шешіңдер.

a) $cos\frac{2x}{5}=1$ b) $cos\left(2x-\frac{\pi}{7}\right)=-1$ c) $cos8x=0$

d) $cos3x=1,2$ e) $2cos(x-1)=\frac{11}{2}$ f) $cosx=\frac{\sqrt{3}}{2}$

g) $cosx=-\frac{1}{2}$ h) $cosx=-1$ i) $cos\frac{x}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

j) $\cos\left(x-\frac{\pi}{5}\right)=\frac{1}{2}$ k) $\cos\frac{3x}{4}=0$ l) $\cos 4x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

m) $\sqrt{3}+2\cos\frac{\pi x}{9}=0$ n) $1-2\cos\frac{3\pi x}{4}=0$ o) $\cos(\pi(x-3))=1$

p) $\sin^2\frac{2}{3}x=\frac{3}{4}$ q) $\cos^2\frac{3}{2}x=\frac{1}{4}$ r) $2\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}=0$

3. Теңдеуді шешіңдер.

a) $tgx=\frac{1}{\sqrt{3}}$ b) $tgx=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ c) $tgx=-1$

d) $tgx=\sqrt{3}$ e) $tg\frac{2x}{5}=-\sqrt{3}$ f) $tg\left(x+\frac{7\pi}{3}\right)=1$

g) $tg(\frac{\pi}{4}(x-1))=0$ h) $1-\sqrt{3}tg\frac{2\pi x}{7}=0$ i) $tg9x=tg45°$

j) $tg6x=tg\frac{2\pi}{3}$ k) $3tg\left(x+\frac{5\pi}{36}\right)+\sqrt{3}=0$

4. Теңдеуді шешіңдер.

a) $ctgx=\sqrt{3}$ b) $ctgx=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ c) $ctg4x=\sin 0°$

d) $ctg(\pi(2x+3))=\cos 0°$ e) $\sqrt{3}+ctg\frac{\pi x}{5}=0$ f) $ctg7x=-\sqrt{3}$

g) $ctg\frac{3x}{2}=1$ h) $ctg3x=\sqrt{3}$ i) $ctg\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)=0$

5. Теңдеулердің берілген кесіндідегі түбірлерін табыңдар.

a) $\sin 3x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $[0;2\pi]$ b) $\cos 3x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $[-\pi;\pi]$

c) $tg\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $[0;\pi]$ d) $ctg4x=-1$, $[-3\pi;3\pi]$

6. a -ның қандай мәндерінде $tgx=\frac{a+1}{a-1}$ теңдік орынды болады?

7. a -ның қандай мәндерінде $\sin x=a+\frac{1}{a}$ теңдік орынды болады?

8. a -ның қандай мәндерінде $5\cos(2x-3)=a-\frac{6}{a}$ теңдік орынды болады?

9. a -ның қандай мәндерінде $5\sin(x-7)=a-\frac{4}{a}$ теңдеудің шешімі болмайды?

КЕЙБІР ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРДІ ШЕШУ ТӘСІЛДЕРІ

Квадрат теңдеуге келтірілетін теңдеулер

1-мысал. Теңдеуді шешіңдер: $2\sin^2 x-3\sin x+1=0$.

Шешуі.

Бұл теңдеу $\sin x$ -ке қатысты квадрат теңдеу. $\sin x=t$ деп белгілесек, $2t^2-3t+1=0$ бұдан $t_1=1,\quad t_2=\dfrac{1}{2}$ келіп шығады.

1) $\sin x=1,\ x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$ 2) $\sin x=\dfrac{1}{2},\ x=(-1)^n\cdot\dfrac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$

Жауабы: $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ x=(-1)^n\cdot\dfrac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$.

2-мысал. Теңдеуді шешіңдер: $2\cos^2 x-5\sin x+1=0$.

Шешуі.

$\cos^2 x$ ті $1-\sin^2 x$ пен алмастырып $2(1-\sin^2 x)-5\sin x+1=0$ немесе $2\sin^2 x+5\sin x-3=0$,

$\sin x=y$ белгілеу енгізіп, $2y^2+5y-3=0$ теңдеуді аламыз. Бұдан $y_1=-3;\ y_2=\dfrac{1}{2}$.

$\sin x=-3$ теңдеудің шешімі жоқ, себебі $|-3|>1$.

$\sin x=\dfrac{1}{2}$ теңдеуді шешеміз. Бұдан $x=(-1)^n\arcsin\dfrac{1}{2}+\pi n=(-1)^n\dfrac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$

Жауабы: $x=(-1)^n\dfrac{\pi}{6}+\pi n,\quad n\in Z.$

3-мысал. Теңдеуді шешіңдер: $tgx-2ctgx+1=0$.

Шешуі.

$tgx-\dfrac{2}{tgx}+1=0$, бұдан $tg^2x+tgx-2=0$. $tgx=t$ деп белгілесек,

$t^2+t-2=0$

$t_1=1,\quad t_2=-2$

1) $tgx=1,\ x=arctg1+\pi n,\ n\in Z,\ \ x=\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$

2) $tgx=-2,\ x=-arctg2+\pi n,\ \ n\in Z$

Жауабы: $x=\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\quad x=-arctg2+\pi n,\ \ n\in Z$.

4-мысал. Теңдеуді шешіңдер: $3\sin^2 x + 5\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0$.

Шешуі.

Теңдеудің екі жағын $\cos^2 x$ -ке бөлеміз. $3tg^2 x + 5tgx + 2 = 0$

$tgx = t$ деп белгілесек, $3t^2 + 5t + 2 = 0$. Будан $t_1 = \frac{-5-1}{6} = -1$, $t_2 = \frac{-5+1}{6} = -\frac{2}{3}$

$$1)\ tgx = -1,\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$$

$$2)\ tgx = -\frac{2}{3},\ x = -arctg\frac{2}{3} + \pi n,\ n \in Z$$

Жауабы: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = -arctg\frac{2}{3} + \pi n$, $n \in Z$.

$a\sin x + b\cos x = c$ көріністегі теңдеулер

5-мысал. Теңдеуді шешіңдер: $3\sin x - 2\cos x = 0$.

Шешуі.

1) Теңдеудің екі жағын $cosx$ -ке бөліп, $3tgx - 2 = 0$ теңдеуді аламыз.

2) $3tgx - 2 = 0$, $tgx = \frac{2}{3}$, $x = arctg\frac{2}{3} + \pi n$, $n \in Z$.

$asinx + bcosx = 0$ теңдеуді $cosx$ (немесе $sinx$)) ке бөлгенде, берілген теңдеуге мәндес теңдеу пайда болады ($cosx = 0$ және $sinx = 0$ бір уақытта орындалмайды).

Жауабы: $x = arctg\frac{2}{3} + \pi n$, $n \in Z$.

6-мысал. Теңдеуді шешіңдер: $2\sin x + \cos x - 2 = 0$.

Шешуі.

$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, $\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$, $2 = 2\cdot 1 = 2\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)$ формулаларға орай,

$$4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = 2\sin^2\frac{x}{2} + 2\cos^2\frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad 3\sin^2\frac{x}{2} - 4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} = 0$$

Теңдеудің екі жағын $\cos^2\frac{x}{2}$ -ке бөлеміз. $3tg^2\frac{x}{2} - 4tg\frac{x}{2} + 1 = 0$ $tg\frac{x}{2} = t$ белгілеу енгіземіз.

$3t^2 - 4t + 1 = 0$, $D = 16 - 12 = 4$

$t_1 = \frac{4+2}{6} = 1$, $t_2 = \frac{4-2}{6} = \frac{1}{3}$

1) $tg\frac{x}{2} = 1$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$

2) $tg\frac{x}{2} = \frac{1}{3}$, $x = 2arctg\frac{1}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$

Жауабы: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = 2arctg\frac{1}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$.

7-мысал. Теңдеуді шешіңдер: $sinx + cosx = 1$.

Шешуі.

Теңдеудің екі жағын $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ бөлеміз.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\frac{1}{\sqrt{2}}=\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}$ болғандықтан, теңдеуді төмендегідей жазып аламыз:

$$\sin\frac{\pi}{4}\sin x+\cos\frac{\pi}{4}\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad\Rightarrow\quad \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad\Rightarrow\quad x-\frac{\pi}{4}=\pm\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}+2\pi n,\ n\in Z$$

$$x=\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z \quad\Rightarrow x=2\pi n,\ \ x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ \ n\in Z.$$

Жауабы: $x=2\pi n,\ \ x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ \ n\in Z.$

Сол бөлігін көбейтушілерге жіктеп шешілетін теңдеулер

8-мысал. Теңдеуді шешіңдер: $\sin 9x-\sin x=\cos 5x$.

Шешуі.

$$2\sin 4x\cos 5x=\cos 5x \qquad\Rightarrow\qquad \cos 5x\left(2\sin 4x-1\right)=0$$

1) $\cos 5x=0,\ x=\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5},\ n\in Z$

2) $\sin 4x=\frac{1}{2},\ 4x=\left(-1\right)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z,\ x=\left(-1\right)^n\cdot\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{4},\ n\in Z$

Жауабы: $x=\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5},\ x=\left(-1\right)^n\cdot\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{4},\ \mathrm{n}\in Z$.

9-мысал. Теңдеуді шешіңдер: $2\sin x\cos x+5\sin x+5\cos x+1=0$.

Шешуі.

$2\sin x\cos x+5\left(\sin x+\cos x\right)+1=0$, $\sin x+\cos x=t$ деп белгілесек, $2\sin x\cos x=t^2-1$ болады.

$$t^2-1+5t+1=0 \ \Rightarrow\ t^2+5t=0 \ \Rightarrow\ t(t+5)=0 \ \Rightarrow\ t_1=-5;\ t_2=0$$

1) $\sin x+\cos x=-5$ теңдеудің түбірлері жоқ.

2) $\sin x+\cos x=0,\ \ tgx+1=0,\ \ tgx=-1,\ x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$

Жауабы: $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \mathrm{n}\in Z$.

МЫСАЛДАР

Теңдеулерді шешіңдер.

1. $2cos^2x-5cosx+2=0$
2. $cos^2x-cosx-2=0$
3. $2ctg^2 3x-3ctg3x+1=0$
4. $tg^2x-2tgx=3$
5. $2cos^2 x+sin x-1=0$
6. $3sin^2 2x+7cos2x-3=0$
7. $2cos x=1-\sqrt{cosx}$
8. $sin2x=cos^4x-sin^4x$
9. $sin5x=\frac{2}{3}cos^2 5x$
10. $cos^4\frac{x}{5}+sin^2\frac{x}{5}=1$
11. $3tg2x-2ctg2x-1=0$
12. $2tgx-2ctgx=3$
13. $\sqrt{3}sinx-cosx=0$
14. $sin2x+cos2x=0$
15. $sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=0$
16. $\sqrt{3}sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right)+cos\left(x+\frac{\pi}{12}\right)=0$
17. $cosx-sinx=1$
18. $sinx+cosx=\sqrt{2}$
19. $sin\frac{x}{2}+cos\frac{x}{2}=-1$
20. $\sqrt{3}sinx+cosx=\sqrt{2}$
21. $3sinx+4cosx=3$
22. $sin4x+cos4x=4$
23. $sin2x=cos^4\frac{x}{2}-sin^4\frac{x}{2}$
24. $cos2x=\sqrt{2}(cosx-sinx)$
25. $cos3xcos2x=sin3xsin2x$
26. $sin5xcos4x-cos5xsin4x=\frac{\sqrt{3}}{2}$
27. $cos9x-cos7x+cos3x-cosx=0$
28. $cos7x+sin8x=cos3x-sin2x$
29. $sin3x+sin5x=sin4x$
30. $sin2xsin6x=cosxcos3x$
31. $(2cos x-3)\cdot ctgx=0$
32. $(tgx-3)(cosx-\frac{1}{2})=0$
33. $tg3xcosx=0$
34. $sin2xtgx=0$
35. $\frac{cos2x}{1+tgx}=0$
36. $\frac{1-2cos2x}{cos2x-2}=0$
37. $\frac{tgx}{sin5x}=0$
38. $\frac{cosx}{1-cos4x}=0$
39. $|cos2x-1|-2|cos2x+2|=0$
40. $sin^3x+cos^4x=1$
41. $cosx\sqrt{sinx}=0$
42. $cos3x+2cosx=0$
43. $sin^{13}x+cos^{13}x=1$
44. $sin9x = 2sin3x$

ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ТЕҢСІЗДІКТЕР

Ең қарапайым тригонометриялық теңсіздіктерді шешуде:

1) *Oy* осі **синустар осі** деп аталуын;
2) *Ox* осі **косинустар осі** деп аталуын;
3) *x* айнымалының әрбір мәнінде $-1 \le \sin x \le 1$ болатындығын;
4) *x* айнымалының әрбір мәнінде $-1 \le \cos x \le 1$ болатындығын білу талап етіледі.

Айталық, $f(x)$ жазу $\sin x$, $\cos x$, tgx немесе $ctgx$ тригонометриялық функциялардан бірін білдірсін, яғни $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = tgx$ немесе $f(x) = ctgx$ болсын.

Онда қандайда бір *a* саны үшін $f(x) < a$, $f(x) \le a$, $f(x) > a$, $f(x) \ge a$ көріністегі теңсіздіктер ең қарапайым ***тригонометриялық теңсіздіктер*** деп айтылады.

$\sin x < a$ және $\sin x \le a$ теңсіздіктерді шешу

1) $a \le -1$ болса, $\sin x < a$ теңсіздіктің шешімі $\varnothing$ болады (1a-*сурет*).

2) $a > 1$ болса, $\sin x < a$ теңсіздіктің шешімі $(-\infty; +\infty)$ болады (1b-*сурет*).

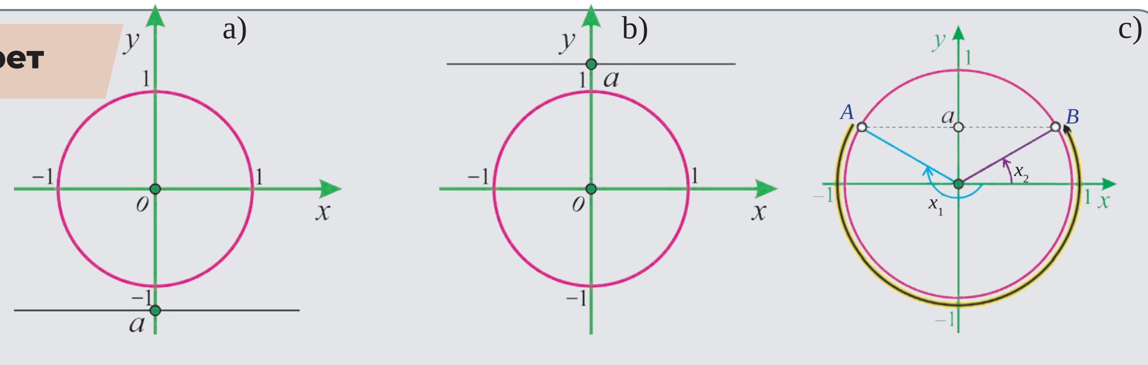
3) $a < -1$ болса, $\sin x \le a$ теңсіздіктің шешімі $\varnothing$ болады.

4) $a \ge 1$ болса, $\sin x \le a$ теңсіздіктің шешімі $(-\infty; +\infty)$ болады.

5) $a = -1$ болса, $\sin x \le -1$ теңсіздіктің шешімі $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$ болады.

6) $a = 1$ болса, $\sin x < 1$ теңсіздіктің шешімі $x \ne \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$ болады.

1-сурет



7) $-1 < a < 1$ болғанда $\sin x < a$ теңсіздіктің шешімі (1c-*сурет*).

$$x_1 < x < x_2$$

$$x_1 = -\pi - \arcsin a$$

$$x_2 = \arcsin a$$

$$\boldsymbol{-\pi - \arcsin a + 2\pi n < x < \arcsin a + 2\pi n,\ n \in Z}$$

8) $-1 < a < 1$ болғанда $\sin x \le a$ теңсіздіктің шешімі

$$\boldsymbol{-\pi - \arcsin a + 2\pi n \le x \le \arcsin a + 2\pi n,\ n \in Z}$$

1-мысал. Теңсіздікті шешіңдер: $\sin x \le -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Шешуі.

$$-\pi - \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi n \le x \le \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi n,\ n \in Z$$

$$-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \le x \le -\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$$

Жауабы: $\left[-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n;\ -\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$.

cosx < *a* және *cosx* ≤ *a* теңсіздіктерді шешу

1) $a \le -1$ болса, $\cos x < a$ теңсіздіктің шешімі $\varnothing$ болады (2a-*сурет*).

2) $a > 1$ болса, $\cos x < a$ теңсіздіктің шешімі $(-\infty; +\infty)$ болады (2b-*сурет*).

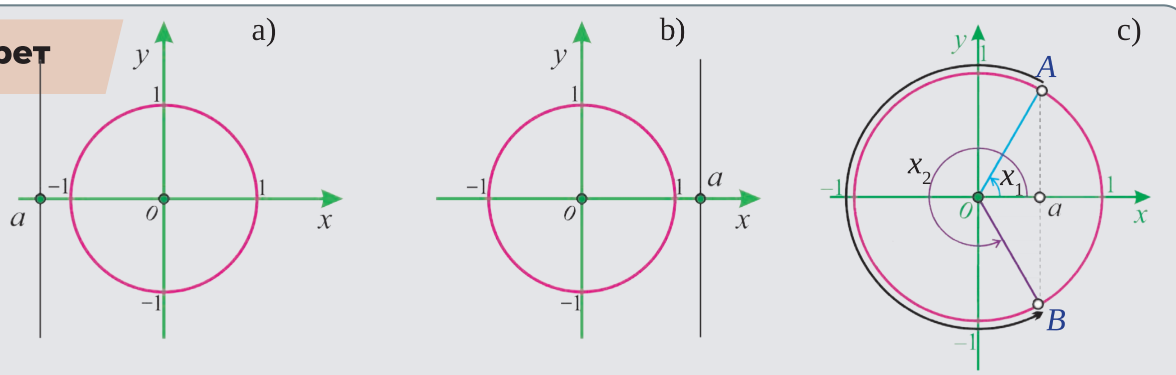
3) $a < -1$ болса, $\cos x \le a$ теңсіздіктің шешімі $\varnothing$ болады.

4) $a = -1$ болса, $\cos x \le -1$ теңсіздіктің шешімі $x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$ нүктелерден тұрады.

5) $a = 1$ болса, $\cos x < 1$ теңсіздіктің шешімі $x \ne 2\pi n,\ n \in Z$ болады.

6) $a \ge 1$ болса, $\cos x \le a$ теңсіздіктің шешімі $(-\infty; +\infty)$ болады.

2-сурет



7) $-1 < a < 1$ болса, $\cos x < a$ теңсіздіктің шешімі (2c-*сурет*).

$$x_1 < x < x_2$$

$$x_1 = \arccos a$$

$$x_2 = 2\pi - \arccos a$$

$$\boxed{\arccos a + 2\pi n < x < 2\pi - \arccos a + 2\pi n,\ n \in Z}$$

8) $-1 < a < 1$ болса, $\cos x \le a$ теңсіздіктің шешімі

$$\boxed{\arccos a + 2\pi n \le x \le 2\pi - \arccos a + 2\pi,\ n \in Z.}$$

2-мысал. Теңсіздікті шешіңдер: $\cos x \geq -\frac{1}{2}$

Шешуі.

$$-\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+2\pi n \leq x \leq \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+2\pi n,\ \ n \in Z$$

$$-\frac{2\pi}{3}+2\pi n \leq x \leq \frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n \in Z$$

Жауабы: $\left[-\frac{2\pi}{3}+2\pi n; \frac{2\pi}{3}+2\pi n\right],\ n \in Z$

tgx < a және *tgx ≤ a* теңсіздіктерді шешу

tgx < *a* теңсіздікті шешуде *y* = *tgx* функция графигінен пайдаланайық.

3-суреттен айқын, *tgx* < *a* теңсіздік *x* айнымалының $-\frac{\pi}{2} < x < arctga$ қос теңсіздікті қанағаттандыратын мәндерінде орындалады. *y* = *tgx* функция периодты екендігінен *tgx* < *a* теңсіздіктің шешімі

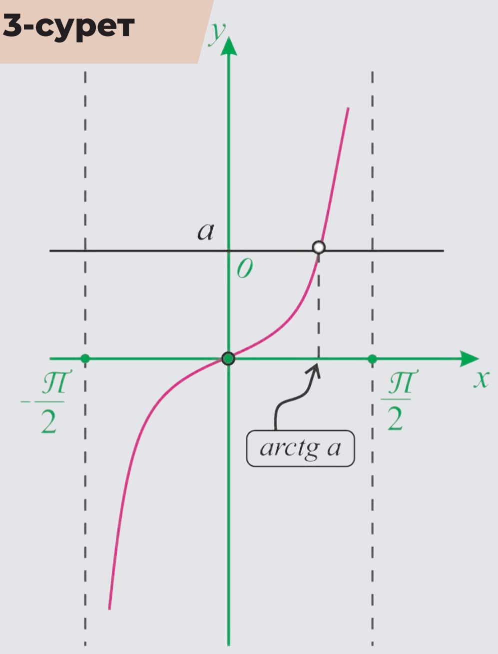
$$-\frac{\pi}{2}+\pi n < x < arctga+\pi n,\ n \in Z$$

болатындығы келіп шығады. Дәл солай: *tgx* ≤ *a* теңсіздіктің шешімі

$$-\frac{\pi}{2}+\pi n < x \leq arctga+\pi n,\ n \in Z$$

болады.

3-сурет



3-мысал. Теңсіздікті шешіңдер: $tg\frac{x}{4} \leq -1$.

Шешуі.

$$-\frac{\pi}{2}+\pi n < \frac{x}{4} \leq arctg(-1)+\pi n,\ \ n \in Z$$

$$-\frac{\pi}{2}+\pi n < \frac{x}{4} \leq -\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \ n \in Z$$

$$-2\pi+4\pi n < x \leq -\pi+4\pi n,\ \ n \in Z$$

Жауабы: $(-2\pi+4\pi n; -\pi+4\pi n],\ \ n \in Z$.

$ctgx < a$ және $ctgx \le a$ теңсіздіктерді шешу

$ctgx < a$ теңсіздікті шешуде $y = ctgx$ функция графигінен пайдаланамыз.

$ctgx < a$ теңсіздік x айнымалының

$$arcctga < x < \pi$$

қос теңсіздікті қанағаттандыратын мәндерінде орындалатыны айқын (4-*сурет*). $y=ctgx$ функция периодты екенінен $ctgx < a$ теңсіздіктің шешімі

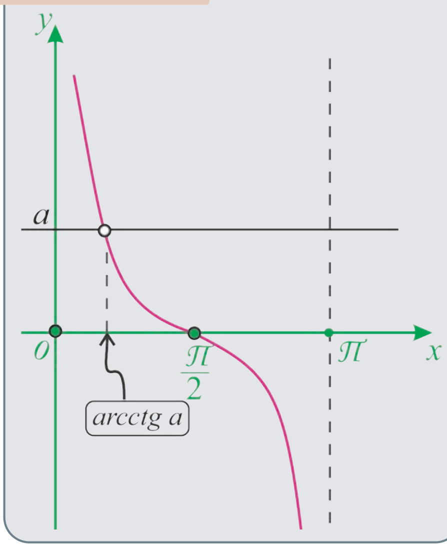
$$arcctga + \pi n < x < \pi + \pi n,\ n \in Z$$

болатындығы келіп шығады. Дәл солай, $ctgx \le a$ теңсіздіктің шешімі

$$arcctga + \pi n \le x < \pi + \pi n,\ \ n \in Z$$

болады.

4-сурет



4-мысал. Теңсіздікті шешіңдер: $ctg\dfrac{x}{5} < -\sqrt{3}$.

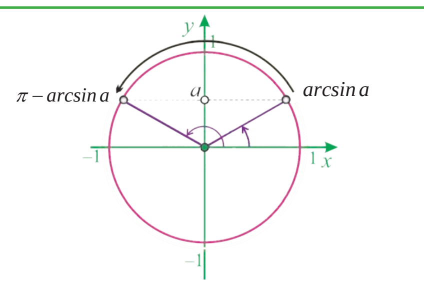
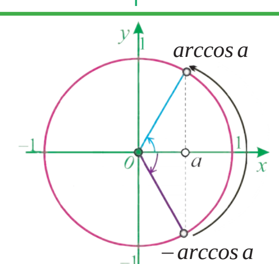
Шешуі.

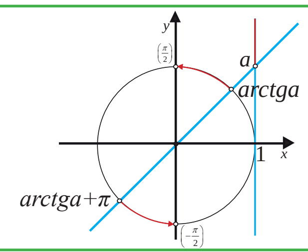
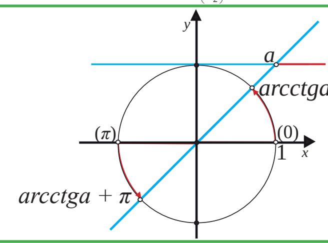
$$arcctg\left(-\sqrt{3}\right) + \pi n < \frac{x}{5} < \pi + \pi n,\ n \in Z \quad \Rightarrow \quad \frac{5\pi}{6} + \pi n < \frac{x}{5} < \pi + \pi n,\ n \in Z \quad \Rightarrow$$

$$\frac{25\pi}{6} + 5\pi n < x < 5\pi + 5\pi n,\ n \in Z$$

Жауабы: $\left(\dfrac{25\pi}{6} + 5\pi n; 5\pi + 5\pi n\right),\ n \in Z$.

Кейбір теңсіздіктердің шешімі

Теңсіздік	Шешімі	Тригонометриялық шеңбердегі бейнесі
$sinx > a$	$\arcsin a + 2\pi n < x < \pi - \arcsin a + 2\pi n,\ n \in Z$	
$cosx > a$	$-\arccos a + 2\pi n < x < \arccos a + 2\pi n,\ \ n \in Z$	

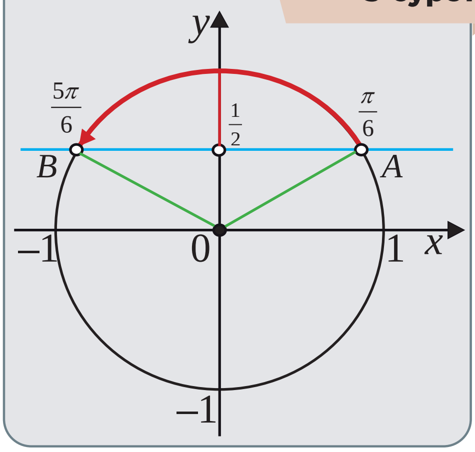
$tgx > a$	$arctga + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$	
$ctgx > a$	$\pi n < x < arcctga + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$	

5-мысал. Теңсіздікті шешіңдер: $sinx > \frac{1}{2}$.

Шешуі.

Бірлік шеңберді (5-*сурет*) *A* және *B* нүктелерде қиып өтетін $y = \frac{1}{2}$ түзуді саламыз. *sinx* -тің табу керек болған мәндері сол түзудің жоғарысында орналасқан. *y=sinx* және $y = \frac{1}{2}$ лер $x = \frac{\pi}{6}$ және $x = \frac{5\pi}{6}$ де қиылысады. Суреттен *x* айнымалы $\frac{\pi}{6}$ ден үлкен және $\frac{5\pi}{6}$ ден кіші болғанда *sinx* өрнек $\frac{1}{2}$ ден үлкен болатындығы көрінеді.

5-сурет



Сонымен, $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$ болады. $\sin x > \frac{1}{2}$ теңсіздіктің барлық шешімдері мына формуламен табылады:

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Жауабы: $\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z.$

6-мысал. Теңсіздікті шешіңдер: $cos\, x\, cos\frac{\pi}{4} - sin\, x\, sin\frac{\pi}{4} \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Шешуі.

Теңсіздіктің сол жағын қосындының косинусы формуласынан пайдаланып ықшамдаймыз:

$$cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Бірлік шеңберде (6-*сурет*) $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ түзуді саламыз. Бұл түзу шеңберді $x + \frac{\pi}{4}$ тің $-\frac{3\pi}{4}$ және $\frac{3\pi}{4}$ мәндеріне сәйке нүктелерінде қиып өтеді.

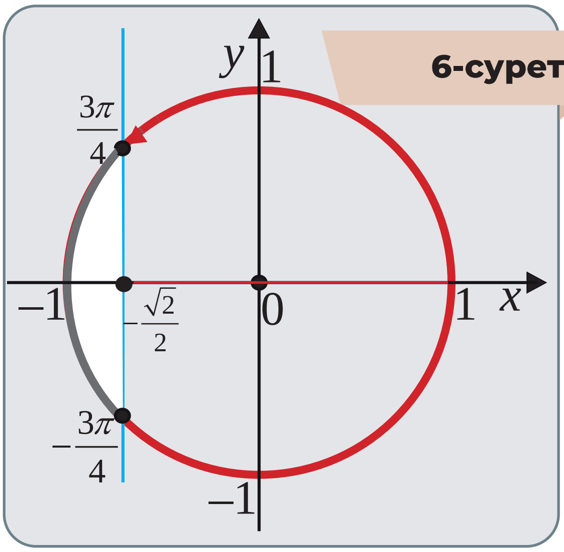
Бізге $x+\frac{\pi}{4}$ тің мәндері керек:

$$-\frac{3\pi}{4}+2\pi n \le x+\frac{\pi}{4} \le \frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z.$$

Қос теңсіздіктің әрбір мүшесінен $\frac{\pi}{4}$ ті азайтып, төмендегіні аламыз:

$$-\pi+2\pi n \le x \le \frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$$

Жауабы: $x\in\left[-\pi+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right], n\in Z.$



6-сурет

7-мысал. Теңсіздікті шешіңдер: $tg\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\ge 1.$

Шешуі.

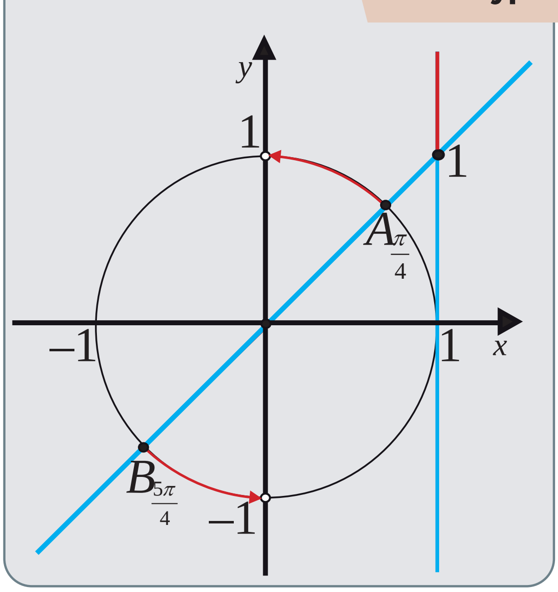
7-суреттен $2x-\frac{\pi}{4}$ шаманың мына шарттарды қанағаттандыруы келіп шығады:

$$\frac{\pi}{4}+\pi n \le 2x-\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in Z$$

$$\frac{\pi}{2}+\pi n \le 2x < \frac{3\pi}{4}+\pi n,\quad n\in Z$$

$$\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2} < x < \frac{3\pi}{8}+\frac{\pi n}{2},\quad n\in Z$$

Жауабы: $\left[\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2};\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}\right),\quad n\in Z$



7-сурет

8-мысал. Теңсіздікті шешіңдер: $sin\,x > cos\,x$.

Шешуі.

$$sin\,x - sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)>0 \Rightarrow 2\,sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)cos\frac{\pi}{4}>0 \Rightarrow sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)>0$$

$$arcsin\,0+2\pi n < x-\frac{\pi}{4} < \pi - arcsin\,0+2\pi n, n\in Z$$

$$2\pi n < x-\frac{\pi}{4} < \pi+2\pi n, n\in Z \Rightarrow \frac{\pi}{4}+2\pi n < x < \frac{5\pi}{4}+2\pi n, n\in Z$$

Жауабы: $\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n;\frac{5\pi}{4}+2\pi n\right),\ n\in Z.$

МЫСАЛДАР

1. Теңсіздікті шешіңдер.

a) $sinx > 1$ b) $sinx \geq 1$ c) $sinx < 1$ d) $sinx \leq 1$

e) $sinx > -1$ f) $sinx \geq -1$ g) $sinx < -1$ h) $sinx \leq -1$

i) $sinx > 1,5$ j) $sinx \geq -1,2$ k) $sinx < 1,1$ l) $sinx \leq -2$

2. Теңсіздікті шешіңдер.

a) $cosx > 1$ b) $cosx \geq 1$ c) $cosx < 1$ d) $cosx \leq 1$

e) $cosx > -1$ f) $cosx \geq -1$ g) $cosx < -1$ h) $cosx \leq -1$

i) $cosx > 2$ j) $cosx \geq -1,6$ k) $cosx < 1,4$ l) $cosx \leq -1,7$

3. Теңсіздікті шешіңдер.

a) $\sin 2x \geq 0$ b) $\cos 3x \leq 0$ c) $\cos x \leq \frac{1}{2}$ d) $\sin x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\cos 2x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ f) $\sin 3x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ g) $\sqrt{2} - 2\sin x > 0$ h) $2\cos x + \sqrt{3} \leq 0$

4. Теңсіздікті шешіңдер.

a) $\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) < 0$ b) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \leq 0$

c) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) > -\frac{\sqrt{2}}{2}$

5. Теңсіздікті шешіңдер.

a) $tg\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \geq \sqrt{3}$ b) $tg\left(2x - \frac{5\pi}{6}\right) > 0$ c) $ctg\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) > -\frac{\sqrt{3}}{3}$

d) $ctg\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \geq 0$ e) $ctg\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) < 0$ f) $tg\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) \leq -1$

6. $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) < -\frac{1}{2}$ теңсіздіктің $[0; \pi]$ аралықтағы шешімдерін табыңдар.

7. $tg\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) < -\sqrt{3}$ теңсіздіктің $\left[-\frac{3}{8}; \frac{21}{8}\right]$ аралықтағы шешімдерін табыңдар.

8. Теңсіздікті шешіңдер.

a) $cos^2x - 3cosx < 0$ b) $2sin^2x - 5sinx + 3 \geq 0$

c) $3cos^2x + 7cosx + 4 \leq 0$ d) $tg^2x - 4tgx + 3 < 0$

9. Теңсіздікті шешіңдер.

a) $\cos\left(3\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right) < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\sin\left(\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right) > -\frac{1}{2}$

6-ТАРАУ. ЫҚТИМАЛДЫҚТАР ТЕОРИЯСЫ

- КЕЗДЕЙСОҚ ОҚИҒАЛАР
- ЫҚТИМАЛДЫҚТЫҢ АНЫҚТАМАЛАРЫ
- ҚАЙТАЛАУ

КЕЗДЕЙСОҚ ОҚИҒАЛАР

Ықтималдықтар теориясы математикалық ғылым болып, қазіргі математиканың негізгі салаларының бірі. Ықтималдықтар теориясының пәні кездейсоқ оқиғалармен реттелетін заңдарды зерттейді. Оның негізгі ұғымдары тәжірибе мен оқиға.

Тәжірибе деп белгілі бір шарттар жиынтығын жүзеге асыру түсініледі. Тәжірибе нәтижесі ***оқиға*** деп аталады.

Оқиғалар үш түрге яғни, мүмкін емес (ешқашан болмайды), сөзсіз (әрқашан болады) және кездейсоқ (болуы немесе болмауы мүмкін) бөлінеді. Олардан ең негізгісі кездейсоқ оқиғалардың ықтималдықтарын есептеуді үйрену.

Табиғат пен қоғам заңдылығында болатын кез келген оқиға кездейсоқтыққа байланысты. Мысалы, олардың кейбіреулерін болжауға болады, ал кейбіреулері шамамен: ауа-райы, баға, егіннің молдығы мен аздығы, т.б. болжау қиын. Ықтималдықтар теориясы, белгілі бір күрделі шарттар орындалғанда, көп рет қайталанатын жаппай кездейсоқ оқиғаның негізгі қасиеті ықтималдық деп аталатын шама арқылы көрсетіледі.

XVII ғасырдың орталарында Паскаль, Ферма, Бернулли сияқты ғалымдар құмар ойындарында байқалатын кейбір оқиғалардың заңдылықтарын зерттеуге байыпты көңіл бөліп, процестерді зерттеу, нәтижесінде болашақ ықтималдықтар теориясы деп аталатын ғылымның пайда болуына үлкен үлес қосты. Ықтималдықтар теориясы әр түрлі салаларда, соның ішінде экономика, биология, медицина, ауыл шаруашылығы, техника және басқа салаларда кеңінен қолданылады.

Кез келген оқиғаны бақылау немесе тәжірибе ретінде зерттеу белгілі бір сынақтарды жүргізу арқылы жүзеге асырылады.

Оқиғалар туралы ұғым

Анықтама. Тәжірибе сынақтарының кез келген нәтижесі (немесе салдары) ***оқиға*** деп аталады. Оқиғалар латын әліпбиінің ***A, B, C, ...*** сияқты бас әріптерімен белгіленеді.

Кәдімгі өмірде, практикалық әрекеттер мен ғылыми зерттеулерде нәтижелерін толық сеніммен болжау мүмкін болмаған тәжірибелер мен сынақтар жиі кездеседі.

Мысалы, тиынды лақтырғанда оның бір немесе екінші жағымен түсуін толық сенімді түрде айту мүмкін емес, нысананы атқанда оның тиетіні немесе тимейтіні белгісіз. Сүйек лақтырылады. Бұл жағдайда 6 ұпайдың түсуі алдын ала белгілі емес, сондай-ақ қандайда бір нөмірлі лотерея билетінің ұтып алатынын болжау мүмкін емес.

Анықтама. Тәжірибе нәтижесінде болатыны анық болған оқиғалар (сөзсіз болатын) ***ақиқат оқиғалар*** деп аталады және әдетте Ω әрпімен белгіленеді.

Мысалы, ойын сүйегі лақтырылған кезде 1-ден 6-ға дейінгі сандар түсуі, тәуекелмен таңдалған сөзде 1000 -нан артық артық әріптің болуы, түннің артынан күн келуі, т.б. ақиқат оқиғалар.

Анықтама. . Тәжірибе нәтижесінде ешқашан болмайтын оқиға ***мүмкін емес (жалған) оқиға*** деп аталады және әдетте $\varnothing$ белгісімен белгіленеді.

Мысалы, бір лотереядан екі ұтыс шығуы, ғарыш кемесінің күнге қонып қайтуы т.б. мүмкін емес оқиғалар.

Анықтама. Тәжірибе нәтижесінде оқиға болуы немесе болмауы мүмкін оқиға ***кездейсоқ оқиға*** деп аталады.

Мысалы, тиын лақтырылған кезде оның елтаңба жағына түсуі, оқ атылғанда нысанаға тиюі, лотерея билетіне ұтық шығуы, ойын сүйегі лақтырылған кезде 6 ұпайдың түсуі және т.б. кездейсоқ оқиғалар болады.

Анықтама. Бірі орындалғанда екіншісі орындалмайтын оқиғалар ***үйлесімсіз оқиғалар*** деп аталады.

1-мысал. Бір деталь салынған қораптан тәуекелмен бір деталь алынды. Мұнда сапалы деталь шығуы сапасыз деталь шығуын жоққа шығарады немесе керісінше. "Сапалы деталь шықты" және "сапасыз деталь шықты" оқиғалары үйлесімсіз оқиғалар болады.
2-мысал. Тиын лақтырылған кезде елтаңба жағының түсуі сандық жағының түсуін жоққа шығарады. "Елтаңба жағы түсті" және "Сандық жағы түсті" оқиғалары үйлесімсіз оқиғалар.

Анықтама. Егер оқиғалар қатар орындалуы мүмкін болса, онда бұл оқиғалар ***үйлесімді оқиғалар*** деп аталады.

Мысалы, "күн шықты" және "күн салқын" қатар орындалуы мүмкін болған оқиғалар.

Анықтама. Тәжірибенің әрбір нәтижесін көрсететін оқиға ***элементар оқиға*** деп аталады.

Анықтама. Элементар оқиғаларға бөлуге болатын оқиғаны күрделі оқиға деп атайды.

Анықтама. Бірнеше оқиғалардың кез келгенінің басқаларына қарағанда тәжірибе нәтижесінде пайда болу мүмкіндігі жоғары деп айтуға негіз болмаса, мұндай оқиғалар ***тең мүмкіндікті оқиғалар*** деп аталады.

Мысалы, тиын лақтырылған кезде елтаңба немесе сан жағымен түсуі немесе сүйек лақтырылғанда бір ұпай, екі ұпай,..., алты ұпай түсуі - мұның бәрі тең мүмкіндікті оқиғалар.

Анықтама. A оқиғаның ***қарама-қарсы оқиғасы*** деп A оқиғасының орындалмайтынын білдіретін кездейсоқ $\overline{A}$ оқиғаға айтылады.

Тәуелді және тәуелсіз болмаған оқиғалар туралы ұғым

Анықтама. Екі оқиғаның біреуінің болуы екінші оқиғаның пайда болуына немесе болмауына байланысты болмаса, бұл оқиғалар ***(өзара) тәуелсіз оқиғалар*** деп аталады.

3-мысал. Тиын екі рет лақтырылады. Бірінші лақтырғанда елтаңбаның түсу ықтималдығы (A оқиғасы) оның екінші лақтырылғанда (B оқиғасы) елтаңбаның түсу-түспеуіне байланысты емес. Өз кезегінде, екінші тәжірибеде елтаңба жағының түсуі бірінші тәжірибенің нәтижесіне байланысты емес. Осылайша, A және B оқиғалары тәуелсіз.

4-мысал. Тиын және ойын сүйегін лақтырғанда *A* – тиынның елтаңба жағы, ал *B* – сүйектің жұп ұпай түсу оқиғалары болсын. Мұндағы *A* және *B* тәуелсіз оқиғалар.

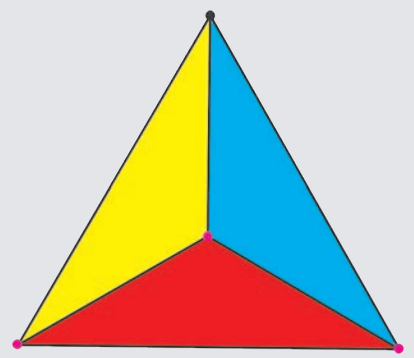
5-мысал. Екі ойын сүйегін лақтыруда *A* бірінші сүйекте, *B* екінші сүйекте жұп ұпай түсу оқиғалары болсын. Мұндағы *A* және *B* тәуелсіз оқиғалар.

Анықтама. Бірнеше оқиғаның кез келген екеуі бір-бірімен тәуелсіз болса, олар ***жұп-жұбымен тәуелсіз*** деп аталады.

6-мысал. Тиын 3 рет лақтырылды. *A*, *B*, *C* оқиғалар сәйкесінше бірінші, екінші және үшінші тәжірибелерде елтаңба түсу оқиғалары болсын. Қарастырылып отырған екі оқиғаның (яғни, *A* және *B*, *A* және *C*, *B* және *C*) бір-бірімен байланысы жоқ екені анық. Осылайша, *A*, *B* және *C* жұп-жұбымен тәуелсіз оқиғалар.

7-мысал. Дұрыс тетраэдрдің бір беті қызыл, екінші беті сары, үшінші беті көк, төртінші беті осы үш түсте (1-*сурет*). Тетраэдрді лақтырғанда *A* қызыл түстің түсуі оқиғасы, *B* сары түстің түсуі оқиғасы, *C* көк түстің түсуі оқиғасы жұп-жұбымен тәуелсіз.

1-сурет



Анықтама. Егер екі оқиғаның біреуінің пайда болу ықтималдығы екінші оқиғаның пайда болуына немесе болмауына байланысты болса, бұл оқиғалар ***тәуелді*** деп аталады.

8-мысал. Ыдыста 80 ақ және 20 қара шар бар. Бір шар тәуекелге алынады және ол ыдысқа қайта салынбайды. Егер бірінші алуда ақ шардың шығуы *A* оқиғасы болса, екінші алудағы ақ шардың шығуы *B* оқиғасы болса, онда *B* оқиғаның пайда болуы *A* оқиғасына байланысты. Яғни *A* және *B* оқиғалары тәуелді.

ЫҚТИМАЛДЫҚ АНЫҚТАМАЛАРЫ

Ықтималдық ұғымы ықтималдықтар теориясының негізгі ұғымдарының бірі болып табылады. Мысал келтірейік: Ыдыста жақсы араласқан 12 бірдей шар бар делік, оның 5-еуі қызыл, 4-еуі қара, 3-еуі ақ. Шынында ыдыстан алынған шардың қызыл немесе қара болуы ықтималдығы оның ақ болу ықтималдығынан артық, бұл мүмкіншілікті сандық түрде анықтауға болады ма? Иә, болады екен. Бұл сан ***оқиғаның ықтималдығы*** деп аталады.

Сонымен, ықтималдық - оқиғаның орындалу мүмкінділігін сипаттайтын сан.

Өзімізге тәуекеліне алынған шардың қызыл немесе қара болуы ықтималдығын анықтау міндетін алайық. Қызыл немесе қара шардың шығарылуын А оқиғасы деп есептейміз. Тәжірибенің мүмкін болатын нәтижелерінің әрқайсысы (тәжірибе ыдыстан шарды алудан тұрады), яғни тәжірибеде болуы мүмкін әрбір оқиға элементар оқиға деп аталады. Элементар оқиғаларды $E_1, E_2, E_3, E_4, ...$ деп белгілейміз. Біздің мысалда келесі 12 элементар оқиға орындалуы мүмкін: E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 – қызыл шар шықты; E_6, E_7, E_8, E_9– қара шар шықты; E_{10}, E_{11}, E_{12}– ақ шар шықты.

Бұл нәтижелер жалғыз мүмкін болған (бір шар міндетті түрде шығады) және бірдей мүмкіндікті (шар тәуекеліне алынады, шарлар бірдей және жақсы араласқан) оқиға екенін байқау оңай.

Оқиғаның пайда болуына әкелетін элементарлық оқиғаларды біз осы оқиғаның пайда болуына қолайлық тудыратын оқиғалар деп атаймыз. Біздің мысалда A оқиғасының (қызыл немесе қара шар) пайда болуына келесі 9 элементар оқиға ықпал етеді: $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7, E_8, E_9$. A оқиғасының пайда болуын қолайлық тудыратын элементар оқиғалар санының олардың жалпы санына қатынасы A оқиғасының ықтималдығы деп аталады және $P(A)$ арқылы белгіленеді. Берілген мысалда барлығы 12 элементар оқиға бар, оның 9-ы A оқиғасына қолайлық тудырады. Сонымен, алынған шардың қызыл немесе қара болуы ықтималдығы: $P(A)=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$. Табылған сан (ықтималдық) алдымызға қойған есепте қызыл немесе қара шардың шығу ықтималдығының сандық бағасын береді.

Ықтималдықтың әртүрлі анықтамалары бар. Бұл классикалық, статистикалық және геометриялық анықтамалар.

Ықтималдықтың классикалық анықтамасы

Анықтама. ***А оқиғасының ықтималдығы*** деп бұл оқиғаның пайда болуына қолайлық тудыратын тәжірибе нәтижелері *m* санының тәжірибенің барлық мүмкін болатын элементар оқиғаларының *n* санына қатынасына айтылады және келесі түрде белгіленеді:

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

Ықтималдылықтың анықтамасынан келесі қасиеттер шығады:

1. Ақиқат оқиғаның ықтималдығы 1-ге тең. Яғни $P(\Omega)=1$.

Шын мәнінде, егер оқиға ақиқат болса, онда тәжірибенің кез келген элементар нәтижесі осы оқиғаның пайда болуына қолайлық тудырады. Бұл жағдайда $m = n$, демек,

$$P(\Omega)=\frac{m}{n}=\frac{n}{n}=1$$

1-мысал. Ыдыста 1-ден 20-ға дейін нөмірленген 20 шар бар. Ыдыстан бір шарды тәуекелімен алды. Осы шардың реттік саны 20-дан көп емес (A оқиғасы) ықтималдығы қандай?

Шешуі. Ыдыстағы шарлардың кез келгенінің реттік нөмірі 20-дан аспайды. Демек, осы оқиғаның пайда болуына ықпал ететін оқиғалар саны мен барлық мүмкін болатын жағдайлардың саны өзара тең: $m = n = 20$ және $P(A)=\frac{m}{n}=1$. Бұл жағдайда A оқиғасы ақиқат оқиға болып табылады.

2. Мүмкін емес (жалған) оқиғаның ықтималдығы нөлге тең.

Шынында да, егер оқиға орындалмаса, тәжірибенің ешбір элементар нәтижесі оның пайда болуына қолайлық тудырмайды. Бұл жағдайда $m = 0$, демек

$$P(\varnothing)=\frac{m}{n}=\frac{0}{n}=0$$

2-мысал. Қорапта 10 шар бар, оның 4-еуі ақ, қалғаны қара. Бұл қораптан бір шарды тәуекелімен алды. Оның қызыл шар (A оқиғасы) болу ықтималдығы қандай?

Шешуі. Қорапта қызыл шар жоқ, сондықтан $m = 0$, бірақ n=10. Демек, $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{0}{n}=0$. Бұл жағдайда A оқиғасы мүлдем мүмкін емес, яғни жалған оқиға.

3. Кездейсоқ оқиғаның ықтималдығы 0 мен 1 арасындағы оң сан.

Шынында да, тәжірибенің барлық элементар оқиғаларының бір бөлігі ғана кездейсоқ оқиғаның пайда болуын жеңілдетеді. Бұл жағдайда $0<m<n$. Сондықтан $0<\frac{m}{n}<1$. Демек, $0<P(A)<1$.

Сонымен, қалаған оқиғаның ықтималдығы келесі қос теңсіздікті қанағаттандырады:

$$0 \le P(A) \le 1$$

Енді келесі мысалдарды шешуден алдын бір формуланы келтіреміз.

Ыдыста n шар бар, оның n_1 ақ, n_2 қара, n_3 қызыл т.б. және n_k сары. Осы ыдыстан тәуекелімен m шар алынғанда олардың m_1 ақ, m_2 қара, m_3 қызыл және т.б. m_k сары болу A оқиғасының ықтималдығын табу формуласы:

$$P(A)=\frac{C_{n_1}^{m_1}\cdot C_{n_2}^{m_2}\cdot C_{n_3}^{m_3}\cdot\ldots\cdot C_{n_k}^{m_k}}{C_n^m},$$

Ескерту: $P_n=n!$, $A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}$, $C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}$

3-мысал. Қапта 12 шар бар: 3 ақ, 4 қара және 5 қызыл. Бір шарды тәуекелге алды. Оның қара шар шығу (A оқиғасы) ықтималдығын табыңдар.

Шешуі. Қолайлық тудырушы элементар оқиғалардың саны $m = 4$, ал элементар оқиғалардың жалпы саны $n = 12$, сондықтан A оқиғасының ықтималдығы:

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$

4-мысал. Қорапта 10 шар бар: 6 ақ және 4 қара. Тәуекелге 2 шар алынды. Екі шардың да ақ болу A оқиғасының ықтималдығын табыңдар.

Шешуі. Бұл есептегі барлық мүмкін жағдайлардың саны, $n=C_{10}^{2}=\frac{10\cdot 9}{1\cdot 2}=45$ -ке тең.

A оқиғаға қолайлық тудыратын жағдайлар саны $m=C_{6}^{2}=\frac{5\cdot 6}{1\cdot 2}=15$ Бұдан, $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{15}{45}=\frac{1}{3}$.

5-мысал. 2000 лотарея билеті сатылды. 1 билетке 100 000 сум, 4 билетке 50 000 сум, 10 билетке 20 000 сум, 20 билетке 10 000 сум, 165 билетке үшін 5 000 сум, 400 билет үшін 1 000 сум ұтыс шығуы белгіленген, қалған билеттер ұтықсыз. Бір билеттен 10 000 сумнан кем болмаған ұтыс шығу ықтималдығы қандай?

Шешуі. Мұнда $m=1+4+10+20=35$, $n=2000$. Өйткені, 35 билетте 10 000 сумнан жоғары ұтыс бар. Сондықтан

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{35}{2000}=0{,}0175.$$

6-мысал. Дүкенде 6 ер адам, 4 әйел адам жұмыс істейді. Табельдегі реттік нөмірге сәйкес 7 адам кездейсоқ таңдалды. Таңдап алғандар арасында 3 әйел болу ықтималдығын табыңдар.

Шешуі. Жалпы оқиғалар саны 10 адамнан 7-ні таңдауға мүмкіндіктер санына тең. Бұл, $n=C_{10}^{7}=\frac{8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3}=120$ -ға тең, енді қолайлық тудыратын элементар оқиғалар санын табу керек. Оның үшін 7 кісілік топты төмендегідей құрамыз: 4 әйелден үшеуін, 6 еркектен төртеуін алуымыз керек. Яғни $m=C_{4}^{3}\cdot C_{6}^{4}=\frac{4}{1}\cdot\frac{5\cdot 6}{1\cdot 2}=60$. Демек, бұл оқиғаның ықтималдығы $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{60}{120}=\frac{1}{2}$ -ге тең.

7-мысал. Бір сөреге әртүрлі 2 математика, 2 физика және 2 химия кітаптары қойылған. Химия кітаптарының қатарлас болу ықтималдығы қандай?

Шешуі. Біз барлық алмастырулардың санын таба аламыз, яғни 6 кітаптың орын ауыстырулар санын $n=P_6=6!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6=720$ Енді химия кітаптары бір-бірінің қасында болатындай етіп, 1 кітап деп есептей отырып, барлық орын ауыстырулар санын есептейміз – $P_5=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=120$. Химия кітаптарының да барлық орын ауыстыруларын есептейміз $P_2=2!=1\cdot 2=2$. Бұлардан, $m=P_5\cdot P_2=120\cdot 2=240$ Демек, ықтималдықтың классикалық анықтамасы бойынша $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{240}{720}=\frac{1}{3}$ ке тең екен.

8-мысал. Абонент телефон нөмірін теру кезінде соңғы үш цифрды есіне түсіре алмады. Бірақ ол сандар басқаша екенін біледі. Барлық терулерден дұрыс нөмірді теру ықтималдығы неге тең болады?

Шешуі. Дұрыс нөмірді теру оқиғасын A арқылы, оның ықтималдығын $P(A)$ арқылы белгілейміз.

Соңғы үш санды A_{10}^{3} тәсілмен теруге болады. Сонда сынақтардың жалпы саны $n=A_{10}^{3}=\frac{10!}{(10-3)!}=8\cdot 9\cdot 10=720$ -ға тең болады. Ізделген телефон нөмері осы 720 нөмірдің бірі болады, яғни $m=1$. Ықтималдықтың классикалық анықтамасы бойынша $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{1}{720}$ ға тең.

Ықтималдықтың статистикалық анықтамасы

Салыстырмалы жиілік ықтималдықпен бірге ықтималдықтар теориясының негізгі ұғымдарының бірі болып табылады.

Анықтама. ***Оқиғаның салыстырмалы жиілігі*** оқиға орындалған тәжірибелер санының нақты жүргізілген тәжірибелердің жалпы санына қатынасы. Сонымен, A оқиғасының салыстырмалы жиілігі мына формуламен анықталады:

$$W(A)=\frac{M}{N}$$

мұндағы M – оқиғаның қайталану саны, N – тәжірибелердің жалпы саны.

Анықтама. Статистикалық ықтималдық – бұл тәжірибелер санының үлкен мәндеріндегі салыстырмалы жиілік.

Ықтималдық пен салыстырмалы жиіліктің анықтамаларын салыстыра отырып, мынадай қорытындыға келеміз: ықтималдық анықтамасы тәжірибелердің іс жүзінде жүргізілгенін талап етпейді, ал салыстырмалы жиіліктің анықтамасы тәжірибелердің нақты жүргізілгенін талап етеді. Қарапайым тілмен айтқанда, ықтималдық тәжірибеге дейін (бұрын) және салыстырмалы жиілік тәжірибеден кейін (соң) есептелінеді.

Егер $M = N$ болса, яғни жүргізілген тәжірибелер саны оқиғаның орындалу санына тең болса, онда бұл оқиға ақиқат оқиға болып табылады.

Егер $M = 0$ болса, яғни тәжірибе нәтижесінде оқиға бір рет болса да болмайды, онда бұл оқиға мүмкін емес (жалған) оқиға болып табылады.

1-мысал. Мерген нысанаға 30 оқ атты. Оның 23-і нысанаға тигені белгілі болса, мерген оқтарының нысанаға тиюінің салыстырмалы жиілігін табыңдар.

Шешуі. Мерген оқтарының 23-і нысанаға тиді, сондықтан оқиғаның орындалу саны $M = 23$ және нысанға атылған оқтардың жалпы саны $N = 30$, сондықтан бұл оқиғаның салыстырмалы жиілігі $W(A)=\frac{23}{30}$ болады.

2-мысал. Алғашқы 1000 натурал сандардың ішінен алынған санның 5-ке еселі болуының салыстырмалы жиілігін табыңдар.

Шешуі. Мұнда 5 еселі санның шығу оқиғасын A арқылы, ал салыстырмалы жиілігін $W(A)$ арқылы белгілейміз. Орындалған сынақтардың жалпы саны $N = 1000$ үшін алғашқы 1000 натурал санның ішінде еселігі 5-ке тең 200 натурал сан бар, сондықтан $m = 200$, ал салыстырмалы жиілік $= \frac{200}{1000} = \frac{1}{5}$

3-мысал. Шетелден елден келген туристер және осы елдің аумағында саяхаттаған азаматтар (ішкі туристер) туралы келесі мәліметтер берілген.

Жылдар	Шет елдік туристер	Ішкі туристер	Туристер саны
2018	610 623	403 989	1 014 612
2019	746 224	348 953	1 095 177
2020	822 558	316 897	1 139 455
2021	774 262	346 103	1 120 365
2022	811 314	351 028	1 162 342
$\sum$	3 764 981	1 766 970	5 531 951

Қарастырылып отырған жылдарда ел ішінде саяхаттаған ел азаматтары санының салыстырмалы жиілігін табыңдар.

Ел ішінде саяхаттайтын азаматтар саны: $M = 1\,766\,970$.

Шетелдік туристер саны: $K = 3\,764\,981$.

Туристердің жалпы саны: $\boldsymbol{N} = 1\,766\,970 + 3\,764\,981 = 5531951$.

$$W = \frac{M}{N} = \frac{1766970}{5531951} \approx 0{,}3194.$$

Ықтималдықтың геометриялық анықтамасы

Барлық нүктелердің мүмкіндігі тең болатын Ω облыс (түзу, бет немесе көлем) берілген болып, осы облысқа лақтырылған нүктенің оған түсуі сөзсіз болсын. Осы берілген облыстан шағын ω облысты (сызықтың немесе беттің немесе көлемнің бөлігі) бөліп алайық. Ω Облысқа лақтырылған нүктенің берілген шағын ω облысқа түсу ықтималдығы сұралсын. Шағын облыс неғұрлым үлкен болса, нүктенің оған түсу ықтималдығы соғұрлым жоғары болады және шағын ω облыс Ω облысқа тең болған кезде түсу ықтималдығы сөзсіз болады. Сондықтан лақтырылған нүктенің ω облысқа түсу ықтималдығы ω облыс өлшеміне тура пропорционал және оны геометриялық тұрғыдан түсіндіру керек болады. Бұл жерде ықтималдықтың классикалық немесе статистикалық анықтамаларын пайдалану онша дұрыс емес

Егер лақтырылған нүкте Ω облысқа түсуі сөзсіз болса, онда бұл нүктенің осы облыстан бөлінген ω облысқа түсу ықтималдығы ω облыс өлшеуінің Ω облыс өлшеуінің қатынасына тең:

$$P(A)=\frac{m(\omega)}{m(\Omega)}$$

Мұндағы $m(\omega)$ – ω облыстың өлшеуі, яғни бір өлшемді болғанда ұзындық, екі өлшемді болғанда аудан, үш өлшемді болғанда көлем, т.б.

Егер Ω облыс ұзындығы L -ге тең қисық ω облыс ұзындығы l -ге тең қисық (берілген ұзындығы, L -ге тең қисықтың бөлігі) деп алсақ, ұзындығы l -ге тең қисыққа түсу ықтималдығы келесідей болады:

$$P(A)=\frac{l}{L}$$

Егер Ω облыс ауданы S -ке тең бет ретінде және ω облыс ауданы s -ке тең бет деп алсақ, ауданы , S -ке тең бетке лақтырылған нүктенің ауданы s бетке түсу ықтималдығы келесідей болады:

$$P(A)=\frac{s}{S}$$

Егер Ω облыс көлемі V -ге тең және ω облыс көлемі v -ге тең облыс деп алсақ, ауданы, V облысқа лақтырылған нүктенің ауданы v облысқа түсу ықтималдығы төмендегіге тең болады:

$$P(A)=\frac{v}{V}$$

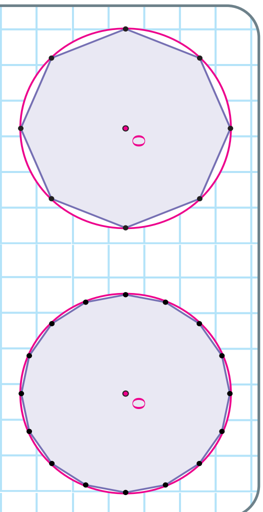
Геометриялық анықтаманы уақытқа қатысты да қолдануға болады. Егер оқиғаның T уақытында болуы сөзсіз болса, онда бұл оқиғаның t уақытында орындалу ықтималдығы:

$$P(A)=\frac{t}{T} \text{ болады.}$$

1-мысал. Радиусы R болатын дөңгелекке нүкте лақтырылды. Түсірілген нүктенің дөңгелекке іштей сызылған дұрыс n-бұрышқа түсу ықтималдығын табыңдар.

Шешуі. $S(D_n)$ – n-бұрыштың ауданы, $S(D)$ – дөңгелектің ауданы болсын (1-*сурет*). Онда

1-сурет



$$P(B_n)=\frac{S(D_n)}{S(D)}=\frac{n\cdot\frac{R^2}{2}\cdot\sin\frac{2\pi}{n}}{\pi R^2}=\frac{n\cdot\sin\frac{2\pi}{n}}{2\pi}=\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}$$

а) Радиусы R дөңгелекке нүкте лақтырылды. Дөңгелекке іштей сызылған дұрыс үшбұрыштың ішіне нүктенің түсу ықтималдығын табыңдар.

Шешуі. $S(D_3)$ – үшбұрыштың ауданы, $S(D)$ – дөңгелектің ауданы болсын (2-*сурет*).

B_3 – нүктенің дұрыс үшбұрышқа түсу оқиғасы. Онда

$$P(B_3)=\frac{S(D_3)}{S(D)}=\frac{3\sqrt{3}R^2}{4\pi R^2}=\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}\approx 0,4137$$

b) Радиусы R болған дөңгелекке нүкте лақтырылды. Лақтырылған нүктенің дөңгелекке іштей сызылған квадратқа түсу ықтималдығын табыңдар.

Шешуі. $S(D_4)$ – квадраттың ауданы, $S(D)$ – дөңгелектің ауданы болсын (3-*сурет*).

B_4 – нүктенің квадратқа түсу оқиғасы. Онда

$$P(B_4)=\frac{S(D_4)}{S(D)}=\frac{2R^2}{\pi R^2}=\frac{2}{\pi}\approx 0,637$$

c) Радиусы R дөңгелекке нүкте лақтырылды. Дөңгелекке іштей сызылған дұрыс алтыбұрыштың ішіне нүктенің түсу ықтималдығын табыңдар.

Шешуі. $S(D_6)$ – дұрыс алтыбұрыштың ауданы, $S(D)$ – дөңгелектің ауданы болсын (4-*сурет*).

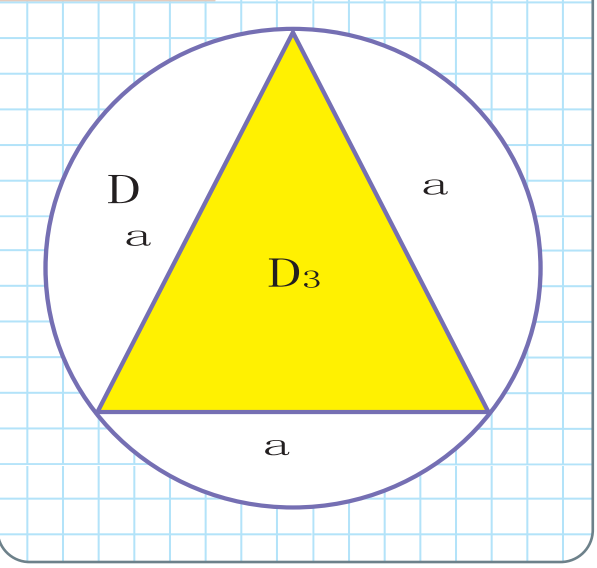
B_6 – нүктенің дұрыс алтыбұрышқа түсу оқиғасы. Онда

$$P(B_6)=\frac{S(D_6)}{S(D)}=\frac{3\sqrt{3}R^2}{2\pi R^2}=\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\approx 0,8274$$

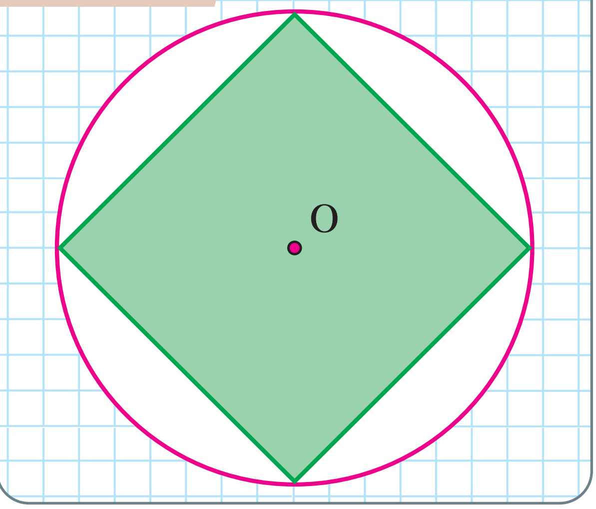
2-мысал. Ұзындығы 30 *cm* болатын L-кесінді 12 *cm*-лік l -кесіндімен бірге қойылады. Үлкен кесіндіге тәуекелімен лақтырылған нүктенің кіші кесіндіге де түсу ықтималдығын табыңдар. Нүктенің кесіндіге түсу ықтималдығы кесіндінің ұзындығына тура пропорционал және оның орналасуына тәуелсіз деп қабылданады.

Шешуі. Лақтырылған нүктенің L кесіндіге түсуі сөзсіз. $P(E)$ – L кесіндіге орналасқан l кесіндісіне түсу ықтималдығын табамыз (5-*сурет*). Суретте тек үш жағдай көрсетілген.

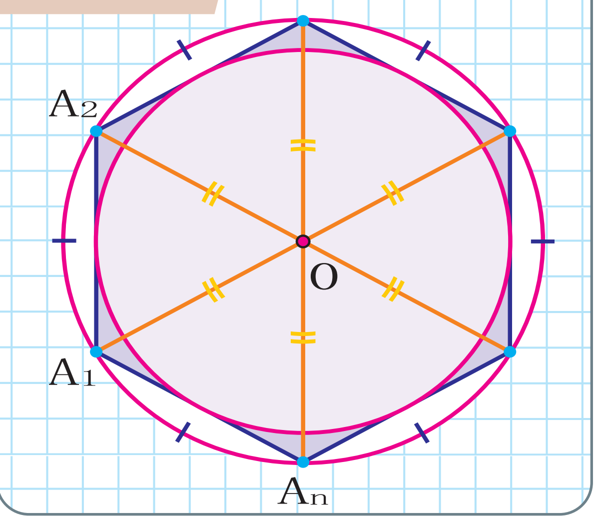
2-сурет



3-сурет



4-сурет

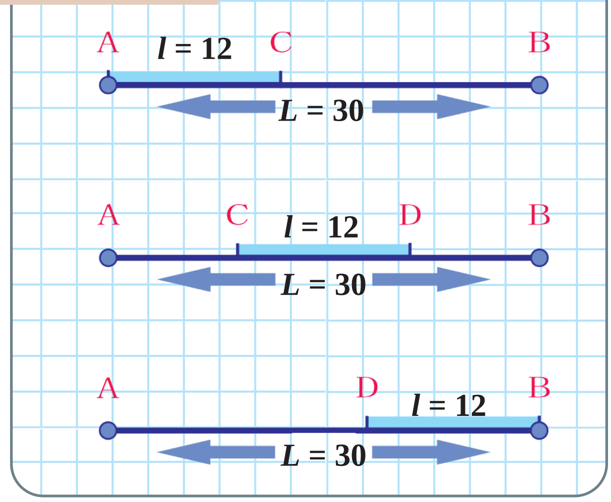


Бірақ l кесінді L кесіндінің кез келген бөлігінде орналасуы мүмкін.

$$P(E) = \frac{l}{L} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$$

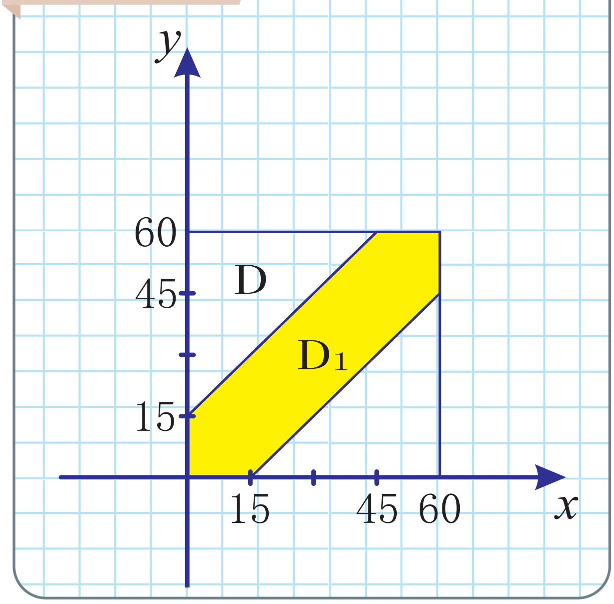
3-мысал. Екі дос сағат 9 мен 10 арасында кездескісі келді. Бірінші келген адам досын 15 минут күтеді деп алдын ала келісілген. Осы уақыт ішінде досы келмесе, кетіп қалуы мүмкін. Егер олар кез келген уақытта сағат 9 мен 10 аралығында келе алатын болса және келу уақыты көрсетілген уақыт ішінде кездейсоқ болса және өзара келіспеген болса, бұл екі достың кездесу ықтималдығы қандай?

5-сурет



Шешуі. Бірінші кісінің келу уақыты x, екінші кісінің келу уақыты y болсын. Олардың кездесуі үшін $|x - y| \leq 15$ теңсіздігінің орындалуы қажетті және жеткілікті. x пен y-ті жазықтықтағы декарттық координаталары ретінде сипаттап, масштаб бірлігі ретінде минуттарды алайық. Орындалуы мүмкін болған барлық мүмкіндіктерді қабырғалары 60 болатын квадраттың нүктелері және кездесуге ыңғайлы мүмкіндіктер (кездесуге қолайлық тудыратын оқиғалар) боялған нүктелеріден тұрады (6-*сурет*).

6-сурет



Сондықтан ықтималдықтың геометриялық анықтамасы бойынша ізделінген ықтималдық боялған облыс ауданының квадрат ауданына қатынасына тең болады:

$S(D_1)$ – боялған облыстың ауданы, $S(D)$ – квадраттың ауданы (6-*сурет*). A – достардың кездесу оқиғасы болсын.

$$S(D_1) = 60 \cdot 60 - 2 \cdot \frac{45 \cdot 45}{2} = 1575 \qquad S(D) = 60 \cdot 60 = 3600$$

Ізделінген ықтималдық:

$$P(A) = \frac{S(D_1)}{S(D)} = \frac{1575}{3600} = \frac{7}{16}; \qquad P(A) = \frac{7}{16}$$

ЕСЕПТЕР

1. Лотареяда 1000 билет бар. Оның 500-і сәтті, 500-і сәтсіз. Екі билет сатып алынды. Екі билеттің де ұту ықтималдығы қандай?

2. Тиын екі рет лақтырылады. Елтаңбаның екі рет түсу ықтималдығы қандай?

3. Тәуекеліне сөрелерге 20 кітап қойылды. 20 кітаптың дәл 5-еуі қатар болу ықтималдығы қандай (A оқиғасы)?

4. Екі ойын сүйегі лақтырылды. Олардың ұпайларының қосындысы жұп сан. Сондай-ақ, лақтырылған сүйектердің кем дегенде біреуі әрқашан 6 ұпай түсу ықтималдығын табыңдар.

5. Екі ойын сүйегі лақтырылды. Оларда түскен ұпайлар қосындысы 5-ке, көбейтіндісі 4-ке тең болу ықтималдығын табыңдар.

6. Екі ойын сүйегі лақтырылды. Оларда түскен ұпайлардың қосындысы 7-ге тең болу ықтималдығын табыңдар.

7. Әр түрлі екі таңбалы сандар ойластырылды. Ойланған санның кездейсоқ айтылған екі таңбалы сан болу ықтималдығын табыңдар.

8. Қорапта 10 шар бар: 7 қара және 3 ақ. Қораптан кездейсоқ шар шығарылды. Бұл шар: а) ақ; б) қара шар болу ықтималдығын табыңдар.

9. Техникалық бақылау бөлімі кездейсоқ таңдалған 100 кітап топтамасынан 5 ақаулы кітапты тапты. Жарамсыз кітаптарды шығарудың салыстырмалы жиілігін табыңдар.

10. Нысанаға 20 оқ атылды. Оның ішінде 18 оқ нысанаға тиді. Нысанаға тиудің салыстырмалы жиілігін табыңдар.

11. Заттар партиясын сынау кезінде жарамды элементтердің салыстырмалы жиілігі 0,9 құрады. Барлық 200 элемент тексерілсе, жарамды элементтердің санын табыңдар.

12. Бір қаладағы 920 адам жұмысқа қалай жетеді деп сұрағанда, олардың 350-і көлікпен, 420-сы қоғамдық көлікпен, 80-і велосипедпен, 70-і жаяу жүретіні анықталды.

1) Көлікте;

2) қоғамдық көлікте;

3) велосипедте;

4) жаяу жүргіншілер санының салыстырмалы жиілігін табыңдар.

13. Радиусы 20 *cm* шеңберде бірінің радиусы 5 *cm*, екіншісінің радиусы 10 *cm* болатын қиылыспайтын екі шеңбер сызылған. Үлкен шеңбердің ішіне енген нүктенің кіші шеңберлердің бірінің ішінде болу ықтималдығын табыңдар.

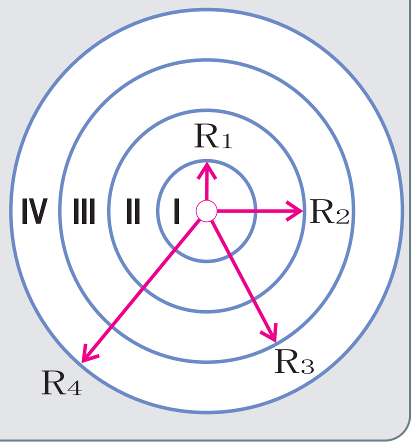
14. Екі дос сағат 10 мен 11 аралығында белгілі бір жерде кездесуге келісіпті. Бірінші келген екіншісін 20 минут күтеді, содан кейін кетеді. Берілген уақыт аралығында келу мүмкіндіктері бірдей болса, достардың кездесу ықтималдығын табыңдар.

15. Қатты дауылдың салдарынан 40 пен 70 шақырым аралығында телефон желісі үзілді. Үзіліс 50 мен 55 километр аралығында болу ықтималдығын табыңдар.

16. Шеңберге квадрат іштей сызылған. Шеңбердің ішіне лақтырылған нүктенің квадратның ішінде болу ықтималдығы қандай?

17. Нысана радиустары $R_1 = r,\ R_2 = 2r,\ R_3 = 3r,\ R_4 = 4r$ болатын концентрлік дөңгелектерден тұрады. Егер нысанаға лақтырылған найзаның дөңгелекке тиюі сөзсіз болса, онда найзаның әр аймаққа түсу ықтималдығын табыңдар (7-*сурет*).

7-сурет



18. Екі ойын сүйегі бір уақытта лақтырылды. Түскен ұпайлар қосындысының 5 -ке тең болу ықтималдығын табыңдар.

19. Топта 30 оқушы бар, оның 10-ы математика үйірмесіне қатысады. Топ ішінде тәуекел 6 оқушы таңдалды. Олардың кем дегенде біреуі математика үйірмесіне қатысатын оқушы болу ықтималдығын табыңдар.

20. 3 көк және 4 жасыл шардың ішінен кездейсоқ таңдалған 3 шардың 2-сі көк, 1-і жасыл болу ықтималдығын табыңдар.

21. Ойын сүйегін бір рет лақтырылған. Жұп ұпай түсу ықтималдығын табыңдар.

22. Тасымалдау кезінде 10 000 қарбыздың 26-сы жарылған. Жарылған қарбыздардың салыстырмалы жиілігін табыңдар.

23. Қорапта 7 ақ және 3 қара шар бар. Одан тәуекелге алынған шардың ақ болу ықтималдығын табыңдар.

24. Телефонда нөмір терген абонент соңында екі нөмірді ұмытып, бұл нөмірлердің басқа екенін біле тұра, тәуекел терді. Дұрыс сандар терілген болу ықтималдығын табыңдар.

25. Құрылғы 5 элементтен тұрады, оның екеуі ескірген. Құрылғы іске түсірілген кезде 2 элемент кездейсоқ қосылды. Іске түсіру кезінде ескірмеген элементтер қосылған болу ықтималдығын табыңдар.

26. Техникалық бақылау бөлімі кездейсоқ таңдалған 100 кітап топтамасынан 5 ақаулы кітапты тапты. Ақаулы кітаптардың салыстырмалы жиілігін табыңдар.

27. Нысанаға 20 оқ атылды. Оның ішінде 18 оқ нысанаға тиді. Нысанаға тиудің салыстырмалы жиілігін табыңдар.

ҚАЙТАЛАУ

ФУНКЦИЯ ЖӘНЕ ОНЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ

1. Функцияның анықталу облысын табыңдар.

a) $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2-4}$ b) $y=\sqrt{3x-x^3}$ c) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-5}-\sqrt{9-x}}$

d) $y=\sqrt{\dfrac{(x-1)(3-x)}{x(4-x)}}$ e) $y=\sqrt{\dfrac{x(x+1)}{(x-2)(4-x)}}$ f) $y=\sqrt{25-x^2}+\dfrac{2x-3}{x+1}$

2. Егер $f(x)=x^2$ және $g(x)=2x-1$ болса x -тің неше мәнінде $f(g(x))=g(f(x))$ болады?

3. Егер $f(x+1)=x^2-3x+2$ болса, $f(x)=?$

4. Егер $f(x)=\sqrt{x^3-1}$ болса, $f\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)$ неге тең?

5. Егер $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$ болса, $f\left(\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{1}{f(x)}$ неге тең?

6. Функция қандай мәндерді қабылдайды?

a) $f(x)=\dfrac{3}{x-4}$ b) $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$ c) $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x-2}+2$

d) $y=-x^4+2x^2+5$ e) $y=\dfrac{x^2-4x+9}{x^2-4x+5}$ f) $y=\sqrt{x^2-6x+11}$

7. Берілген функциялардан қайсы бірі жұп функция?

a) $y=\dfrac{5x^2}{(x-3)^2}$ b) $y=\dfrac{x(x-2)(x-4)}{x^2-6x+8}$ c) $y=x^2+|x+1|$

d) $f(x)=x^3-\dfrac{2}{x^3}$ e) $y=\begin{cases}-x^2, x<0\\ x^2, x\ge 0\end{cases}$ f) $y=\sqrt{x^2-6x+11}$

8. Берілген функциялардан қайсы бірі тақ функция?

a) $y=3x^5+x^3$ b) $y=(0,25)^x+(0,25)^{-x}$ c) $y=\begin{cases}x, x<0\\ -x, x\ge 0\end{cases}$

d) $y=|x|-1$ e) $y=\dfrac{x^4-2x^2}{3x}$ f) $y=\sqrt{3-x^2-2x}$

РАЦИОНАЛ ТЕҢДЕУЛЕР

Теңдеуді шешіңдер (2-21)

1. t-ның қандай мәндерінде $18x+7=5$ және $18x+7+t=5+t$ теңдеулер мәндес болады?

2. $\dfrac{4x^2-7x-2}{x^2-5x+6}=0$

3. $2+\dfrac{4}{x^2}=\dfrac{9}{x}$

4. $1-\dfrac{15}{x}=\dfrac{16}{x^2}$

5. $\dfrac{9}{x}+\dfrac{13}{2x}=2$

6. $\dfrac{2}{x-3}=\dfrac{x}{x+3}$

7. $\dfrac{x^3-3x^2}{x+2}\cdot\dfrac{x^2-4}{x^2}=0$

8. $\dfrac{1-x}{(2-x)(x-3)}+1=\dfrac{1}{2-x}$

9. $\dfrac{1}{x^2-9}+\dfrac{1}{3x-x^2}=\dfrac{3}{2x+6}$

10. $\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2-\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)^2=0$

11. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{36}{9x-x^2}-\dfrac{x-5}{9-x}=0$

12. $\dfrac{x-49}{50}+\dfrac{x-50}{49}=\dfrac{49}{x-50}+\dfrac{50}{x-49}$

13. $5-\dfrac{x^2-14x-51}{x^2-x-12}=\dfrac{3}{x-4}$

14. $\dfrac{2}{x^2-4}+\dfrac{x-4}{x^2+2x}=\dfrac{1}{x^2-2x}$

15. $\dfrac{30}{x^2-1}-\dfrac{13}{x^2+x+1}=\dfrac{18x+7}{x^3-1}$

16. $\dfrac{x^2-3x}{x-2}+\dfrac{x-2}{x^2-3x}=2,5$

17. $\dfrac{4}{x^2-3x+2}-\dfrac{3}{2x^2-6x+1}+1=0$

18. $\dfrac{x-2}{x+1}+\dfrac{4(x+1)}{x-2}=5$

19. $\dfrac{x^2-x}{x^2-x+1}-\dfrac{x^2-x+2}{x^2-x-2}=1$

20. $\dfrac{1}{x^2+2x-3}+\dfrac{18}{x^2+2x+2}=\dfrac{18}{x^2+2x+1}$

21. $x^2+\dfrac{x^2}{(x+1)^2}=\dfrac{40}{9}$

22. Пойыз жолда 30 *min* тоқтады. Пойыз кестеге сай келуі үшін машинист 80 *km* қашықтықта жылдамдықты 8 *km/h* дейін арттырды. Кестеге сәйкес пойыз қандай жылдамдықпен жүру керек еді?

23. Өзеннің ағысы бағытымен моторлы қайықта 28 *km* және ағыс бағытына қарсы 25 *km* жүрді. Мұнда бүкіл жолға жұмсалған уақыт тұрғын суда 54 *km* өтуге кеткен уақытқа тең. Өзен ағысының жылдамдығы 2 *km/h* болса, моторлы қайықтың тұрғын судағы жылдамдығын тап.

Теңдеуді шешіңдер (24-38)

24. $\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x}=\dfrac{x}{3}+\dfrac{3}{x}$

25. $\dfrac{1+x}{6}-\dfrac{6}{1+x}=\dfrac{4}{x+1}-\dfrac{x+1}{4}$

26. $\dfrac{x-2}{x+2}+\dfrac{x+2}{x-2}=3\dfrac{1}{3}$

27. $\dfrac{2x+1}{2x-1}+\dfrac{2x-1}{2x+1}=5,2$

28. $\dfrac{x^2-2x}{x-1}-\dfrac{2x-1}{1-x}=3$

29. $\dfrac{2}{x-4}+\dfrac{4}{x^2-4x}=0,625$

30. $\dfrac{(x^2+1)x}{(x^2-x+1)^2}=\dfrac{10}{9}$

31. $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{3}{x-3}=\dfrac{6}{x+6}$

32. $x^2+\dfrac{1}{x^2}-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+4=0$

33. $x^4-6x^3+10x^2-6x+1=0$

34. $31\left(\dfrac{24-5x}{x+1}+\dfrac{5-6x}{x+4}\right)+370=29\left(\dfrac{17-7x}{x+2}+\dfrac{8x+55}{x+3}\right)$

35. $\dfrac{x+3}{4x^2-9}-\dfrac{3-x}{4x^2+12x+9}=\dfrac{2}{2x-3}$

36. $\dfrac{30}{x^2-1}+\dfrac{7-18x}{x^3+1}=\dfrac{13}{x^2-x+1}$

37. $\dfrac{2x+7}{x^2+5x-6}+\dfrac{3}{x^2+9x+18}=\dfrac{1}{x+3}$

38. $2x^4+x^3-x^2+x+2=0$

РАЦИОНАЛ ТЕҢДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІ

Теңдеулер жүйесін шешіңдер (1-8)

1. $\begin{cases}\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=2,5\\ x^2-y^2=3\end{cases}$

2. $\begin{cases}x+y+\dfrac{x}{y}=9\\ \dfrac{(x+y)x}{y}=20\end{cases}$

3. $\begin{cases}2xy-\dfrac{3x}{y}=15\\ xy+\dfrac{x}{y}=15\end{cases}$

4. $\begin{cases}\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{2}{x-y}=3\\ \dfrac{3}{x+y}+\dfrac{4}{x-y}=7\end{cases}$

5. $\begin{cases}\dfrac{x}{y}-\dfrac{3y}{x}=\dfrac{1}{2}\\ x^3-\dfrac{y^3}{8}=-28\end{cases}$

6. $\begin{cases}\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{25}{12}\\ x^2-y^2=7\end{cases}$

7. $\begin{cases}\dfrac{4y}{x}+\dfrac{x}{y}=5\\ xy=4\end{cases}$

8. $\begin{cases}x+y=5\\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=-\dfrac{13}{6}\end{cases}$

Теңдеулер жүйесін шешшіңдер (9-13)

9. $\begin{cases}\dfrac{2}{2x-y}+\dfrac{3}{x-2y}=\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{2}{2x-y}-\dfrac{1}{x-2y}=\dfrac{1}{18}\end{cases}$

10. $\begin{cases}\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{10}{3}\\ 2x^2+y^2=27\end{cases}$

11. $\begin{cases}\dfrac{6}{x+y}+\dfrac{5}{x-y}=7\\ \dfrac{3}{x+y}-\dfrac{2}{x-y}=-1\end{cases}$

12. $\begin{cases} \dfrac{11}{2x-3y}+\dfrac{18}{3x-2y}=13 \\ \dfrac{27}{3x-2y}-\dfrac{2}{2x-3y}=1 \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dfrac{2}{x}+\dfrac{y}{3}=3 \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{3}{y}=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

РАЦИОНАЛ ТЕҢСІЗДІКТЕР

Теңсіздіктерді шешіңдер.

1. $(-4x+3)(-5x+4)>0$

2. $(x^2-16)^3(x+7)<0$

3. $(x-2)^2(x-1)(x+7)(x-5)\geq 0$

4. $\dfrac{(x+6)^3(x-4)}{(7-x)^5}<0$

5. $(x^2-1)(x^2+5x+6)(x^2-5x+6)\leq 0$

6. $\left(2x+\dfrac{1}{x}\right)^2+2x+\dfrac{1}{x}-12<0$

7. $\dfrac{5x+4}{x-2}<1$

8. $\dfrac{3x+2}{x-3}>1$

9. $\dfrac{x-4}{x^2-9x+14}>0$

10. $\dfrac{x^4-10x^2+9}{6-2x}<0$

11. $\dfrac{x^2+1}{x-3}>0$

12. $\dfrac{x+3}{x^2+7}<0$

13. $(3-\sqrt{10})(2x-7)<0$

14. $\dfrac{(x^2-x-2)^2}{x^2+7x-8}\geq 0$

15. $\dfrac{3x-1}{x^2+x+1}\leq 0$

16. $\dfrac{x^2+2x-15}{3x^2+5x-8}\leq 0$

17. $\dfrac{2}{x+2}<\dfrac{1}{x-3}$

18. $\dfrac{3}{2-x}>\dfrac{1}{x+3}$

19. $\dfrac{2}{x+3}<\dfrac{1}{2x-1}$

20. $\dfrac{x+1}{x-2}>\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{1}{2}$

21. $\dfrac{x^3-5x^2+8x-4}{x-3}\leq 0$

22. $\dfrac{6}{x-1}\leq\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{7}{x+2}$

23. $\dfrac{14x(2x+3)}{x+1}<\dfrac{(9x-30)(2x+3)}{x-4}$

24. $\dfrac{(5x+4)(3x-2)}{x+3}\leq\dfrac{(3x-2)(x+2)}{1-x}$

25. $(x-3)^2+\dfrac{1}{x^2-6x+9}>2$

26. $\dfrac{2x-3}{4\sqrt{6}-10}>5+2\sqrt{6}$

РАЦИОНАЛ ТЕҢСІЗДІКТЕР ЖҮЙЕСІ

Теңсіздіктер жүйесін шешіңдер.

1. $\begin{cases} 2x-14<0 \\ -3x+9<0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 6x-1>9-4x \\ 3-2x<x+16 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3(2-3x)+2(3-2x)>x \\ 6<x^2-x(x-8) \end{cases}$

4. $\begin{cases} 5\left(1-\dfrac{x-4}{4}\right)-7(2x-3)>0 \\ \dfrac{3x-14}{5}-\dfrac{3x-10}{20}-0,7(x+8)<0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^2\le 9 \\ x+1>0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 4x+\dfrac{2x-3}{2}>\dfrac{7x-5}{2} \\ \dfrac{7x-2}{3}-2x>\dfrac{5(x-2)}{4} \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dfrac{5x-4}{4}-\dfrac{4x+1}{3}\ge\dfrac{x+2}{4}-7 \\ \dfrac{4x}{3}-1-\dfrac{6x+2}{2}>x+\dfrac{6}{5} \end{cases}$

8. $\begin{cases} x^2+5x-6<0 \\ x+3\ge 0 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 13-\dfrac{3-7x}{10}+\dfrac{x+1}{2}<14-\dfrac{7-8x}{2} \\ 7(3x-5)+4(17-x)>18-\dfrac{5(2x-6)}{2} \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dfrac{x}{3}-\dfrac{3x-1}{6}<\dfrac{2-x}{12}-\dfrac{x+1}{2}+3 \\ x>\dfrac{5x-4}{10}-\dfrac{3x-1}{5}-2,5 \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dfrac{3}{4}(x-1)+\dfrac{7}{8}<\dfrac{1}{4}(x-1)+\dfrac{5}{2} \\ \dfrac{x}{4}-\dfrac{2x-3}{3}<2 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x^2+x+8<0 \\ x^2+6x+5\ge 0 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 5x\ge 2 \\ -0,3x^2+4,8<0 \\ -2x^2+17x+19\ge 0 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2-5x\le 0 \\ x-x^2\ge 0 \\ -4x^2-5x+21\ge 0 \end{cases}$

15. $\begin{cases} \dfrac{x-4}{4}-x+1<\dfrac{x-2}{2}-\dfrac{x-3}{3} \\ 3-x>2x-10 \end{cases}$

16. $\begin{cases} \dfrac{2x}{3}-1<3-2(1-2x) \\ 3x-5>1-2(1-x) \\ 1-2x<3(2x-1) \end{cases}$

17. $\begin{cases} 7<2x+1<11 \\ \dfrac{x+2}{x-5}<\dfrac{x-6}{x-3} \end{cases}$

18. $\begin{cases} -2<2-x<1 \\ \dfrac{x+3}{1-x}\le\dfrac{8-x}{x-4} \end{cases}$

19. $\begin{cases} \dfrac{2}{7}<2^n<3 \\ 3^n>2 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 1<\left(\dfrac{2}{3}\right)^n<3 \\ \left(\dfrac{3}{4}\right)^n<1,5 \end{cases}$

21. $\begin{cases} \dfrac{1}{5}<3^n<4 \\ 2<\left(\dfrac{1}{3}\right)^n<10 \end{cases}$

ИРРАЦИОНАЛ ТЕҢДЕУЛЕР

Теңдеулерді шешіңдер.

1. $\sqrt{x-1}=-4$
2. $\sqrt{x}=8$
3. $\sqrt{x}=-16$
4. $\sqrt[3]{x+1}=2$
5. $\sqrt[4]{x-7}=-3$
6. $\sqrt{x^2+2x-6}\cdot\sqrt{x-9}=0$
7. $1+\sqrt{x+3}=0$
8. $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=1$
9. $\sqrt{x-4}+\sqrt{x^2-3}=0$
10. $\sqrt{1+4x-x^2}=x-1$
11. $\sqrt{x-3}+\sqrt{2x+4}=-11$
12. $\sqrt{2x^2+8x+7}-2=x$
13. $\sqrt{x^2-7x+12}=2x-6$
14. $\sqrt{4-x}=\sqrt{x-7}$
15. $\sqrt{3+\sqrt{5-x}}=\sqrt{x}$
16. $\sqrt{4-x}+\sqrt{5+x}=3$
17. $2\sqrt{x+18}+\sqrt{4x-3}=15$
18. $\sqrt{x+20}-\sqrt{x-1}=3$
19. $\sqrt{x-5}+\sqrt{1-x}=7$
20. $(x^2-5x+6)\cdot\sqrt{2-x}=0$
21. $(2-x)\cdot\sqrt{x^2-x-20}=12-6x$
22. $(x-1)\cdot\sqrt{\dfrac{x-2}{x^2-1}}=0$
23. $(4x-x^2-3)\cdot\sqrt{x^2-2x}=0$
24. $\sqrt[3]{9x+1}=1+3x$
25. $\sqrt{x+5}+\sqrt[4]{x+5}=12$
26. $x^2+11+\sqrt{x^2+4}=42$
27. $x^2+5x+\sqrt{x^2+5x-5}=17$
28. $\sqrt{x^2-x}+\sqrt{2-x-x^2}=\sqrt{x}-1$
29. $\sqrt{4-x}+\sqrt{x-4}=0$
30. $\sqrt{7-5x}+\sqrt{5x-7}=29$
31. $\sqrt{\dfrac{x-1}{2x+1}}+\sqrt{\dfrac{2x+1}{x-1}}=\dfrac{10}{3}$
32. $\sqrt{5+2x}=10-3\sqrt[4]{5+2x}$
33. $\sqrt{3-x}+\sqrt{x-2}=(x-7)^2\cdot(x-5)$
34. $2\sqrt{x-1}-5=\dfrac{3}{\sqrt{x-1}}$
35. $\dfrac{\sqrt{x^2-3x-4}}{x+2}=\dfrac{\sqrt{x^2-3x-4}}{4-x}$
36. $x^2+\sqrt{x^2+20}=22$
37. $\sqrt{x^3+4x-1-8\sqrt{x^4-x}}=\sqrt{x^3-1}+2\sqrt{x}$
38. $6x^2+7x\sqrt{1+x}=24(1+x)$
39. $\sqrt{(x^2+8x)^2}=x^2+8x$
40. $\sqrt{(4x^2-5x)^2}=5x-4x^2$
41. $\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}=2-\sqrt{x-4}$
42. $\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}-2}=x-\dfrac{1}{x}$

43. $\sqrt{5-x}+\sqrt{x-6}=x^2+2x$

44. $\sqrt{x+6\sqrt{x-9}}+\sqrt{x-6\sqrt{x-9}}=6$

45. $\sqrt{x+8\sqrt{x-16}}+\sqrt{x-8\sqrt{x-16}}=2\sqrt{x-16}$

46. $\dfrac{\sqrt[4]{x^4-16}+\sqrt[6]{x^3-8}}{3x-x^2-2}=0$

ИРРАЦИОНАЛ ТЕҢДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІ

Теңдеулер жүйесін шешіңдер.

1. $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=8\\ \sqrt{x}\cdot\sqrt{y}=15\end{cases}$

2. $\begin{cases}\sqrt{xy}=12\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=7\end{cases}$

3. $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=6\\ x-y=12\end{cases}$

4. $\begin{cases}\sqrt{x+3y+6}=2\\ \sqrt{2x-y+2}=1\end{cases}$

5. $\begin{cases}x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=30\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=5\end{cases}$

6. $\begin{cases}3\sqrt{x}-\sqrt{y}=8\\ \sqrt{x}+2\sqrt{y}=19\end{cases}$

7. $\begin{cases}25y+x=100-10\sqrt{xy},\\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=4,\end{cases}$

8. $\begin{cases}xy=64\\ x-y+\sqrt{xy}=20\end{cases}$

9. $\begin{cases}\sqrt{x+y-1}=1\\ \sqrt{x-y+2}=2y-2\end{cases}$

10. $\begin{cases}x+y-\sqrt{xy}=7\\ xy=9\end{cases}$

11. $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=26\\ \sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}=6\end{cases}$

12. $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=-3\\ xy=8\end{cases}$

13. $\begin{cases}\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=3\dfrac{3}{4}\\ xy=1\end{cases}$

14. $\begin{cases}\sqrt{x}-\sqrt{y}=5\\ \sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}=1\end{cases}$

15. a) $\begin{cases}5x+3\sqrt{xy}+4y=12\\ 3x+2\sqrt{xy}+3y=8\end{cases}$ b) $\begin{cases}2x-6\sqrt{xy}+7y=9\\ x-4\sqrt{xy}+5y=6\end{cases}$

16. a) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=5\\ x+y+4\sqrt{xy}=37\end{cases}$ b) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=4\\ x+y-3\sqrt{xy}=1\end{cases}$

17. a) $\begin{cases}x\sqrt{x}+12y\sqrt{x}=28\\ 8y\sqrt{y}+6x\sqrt{y}=36\end{cases}$ b) $\begin{cases}x\sqrt{x}+27y\sqrt{x}=36\\ 27y\sqrt{y}+9x\sqrt{y}=28\end{cases}$

КӨРСЕТКІШТІК ТЕҢДЕУЛЕР

1. Теңдеуді шешіңдер.

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{1024}$ b) $\left(\frac{5}{4}\right)^{2x-1} = (0{,}8)^{x-2}$ c) $0{,}5^{\sqrt{x+1}} \cdot 0{,}5^{-1} = 0{,}5^{\sqrt{x}}$

d) $4^{x-1} - 4^{x+1} + 4^{x+2} = 49$ e) $2^{x+1} + 3\cdot 2^{x-1} - 5\cdot 2^x + 6 = 0$ f) $5^{x+1} + 3\cdot 5^{x-1} - 6\cdot 5^x + 10 = 0$

2. $49^x+7^x+1= 57$ теңдеудің неше түбірі бар?

3. $9^x - 3^{x+1} + 2 = 0$ теңдеудің ең үлкен түбірін табыңдар.

КӨРСЕТКІШТІК ТЕҢСІЗДІКТЕР

1. Теңсіздікті шешіңдер.

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x^2-3x} \le \frac{3}{2}$ b) $\left(\frac{1}{7}\right)^{3x+4} \cdot 7\sqrt{7} < \frac{1}{7}$ c) $(0,04)^{2x} > (0,2)^{x(3-x)}$

d) $25^x + 5^x > 0$ e) $3^{\frac{x-1}{x+1}} > 27$ f) $3{,}2^{2(x-\frac{1}{2})} \ge 3{,}2\sqrt{3{,}2}$

g) $7^{2x-9} > 7^{3x-6}$ h) $0,5^{4x+3} \le 0,5^{6x-1}$ i) $2\sqrt{2}\cdot 2^{x-3} \ge \frac{1}{2}$

2. Теңсіздікті қанағаттандыратын натурал сандар нешеу?

a) $8^{-2x+8} > 512$ b) $2^{5x-7} \le 16$ c) $2^{5x-7} \ge 16$ d) $0,1^{4x-5} > 0,001$

3. Теңсіздіктің ең үлкен бүтін шешімін табыңдар.

a) $2,5^{2x+3} \le 6,25$ b) $1,1^{5x-3} < 1,21$ c) $0,7^{9x+4} > 0,343$ d) $\left(\frac{2}{5}\right)^{7x-9} \ge \frac{8}{125}$

ЛОГАРИФМ ҰҒЫМЫ. ЛОГАРИФМДІК ФУНКЦИЯ

1. $A(-2;-1)$ нүкте қайсы функция графигіне тиісті емес?

1) $y = \log_2\left(-\frac{1}{x}\right)$ 2) $y = \log_2|x|$ 3) $y = \log_{\frac{1}{2}}|x|$ 4) $y = -\log_2(-x)$

2. Функцияның анықталу облысын табыңдар.

a) $y = \lg(x+2) + \lg(3-x)$ b) $y = \ln(x+|x|)$

3. $y = \log_x(x+1)$ функция $x \in \{2;3;4;5;6\}$ болғанда аргументтің қайсы мәнінде ең үлкен мәнін қабылдайды?

4. $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ функция графигін $y = \log_3 x$ функция графигінен қандай тәсілмен алуға болады?

ЛОГАРИФМДІК ӨРНЕКТЕРДІ ТЕПЕ-ТЕҢ ТҮРЛЕНДІРУ

1. Өрнектің мәнін табыңдар.

a) $\log_{12}\sqrt[5]{144}$ b) $\log_3 5-\log_3\dfrac{5}{27}$ c) $\dfrac{\log_{27}2}{\log_3 8}$

d) $\dfrac{\log_{11}12}{\log_{11}6}+\dfrac{\log_5 3}{\log_5 6}$ e) $\dfrac{3\log_7 2-\frac{1}{2}\log_7 64}{4\log_5 2+\frac{1}{3}\log_5 27}$ f) $81^{\frac{1}{\log_5 3}}+27^{\log_3 4}+3^{\frac{4}{\log_7 9}}$

g) $\dfrac{1}{2}\log_3\log_5 125$ h) $-\log_2\log_2\sqrt{\sqrt[4]{2}}$

ЛОГАРИФМДІК ТЕҢДЕУЛЕР

1. Теңдеуді шешіңдер.

a) $\log_5 x=2$ b) $\log_{0,2}x=4$ c) $\log_{\frac{1}{3}}x=-1$ d) $\log_7 x=\dfrac{1}{3}$

2. Теңдеуді шешіңдер.

a) $\log_3 x+\log_{\frac{1}{3}}x+2=0$ b) $3\log_{\frac{1}{7}}x=\log_{\frac{1}{7}}9+\log_{\frac{1}{7}}3$

c) $\log_2(3x-6)=\log_2(2x-3)$ d) $\log_6(14-4x)=\log_6(2x+2)$

3. Теңдеуді шешіңдер.

a) $\log_2^2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-1=0$ b) $\log_{\frac{1}{2}}^2\left(x^2+x\right)+\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2+x\right)=0$

c) $\lg^2 x-\lg x+1=\dfrac{9}{\lg 10x}$ d) $\log_2^2 x+7\log_2 x+49=\dfrac{-218}{\log_2\dfrac{x}{128}}$

4. Теңдеуді шешіңдер.

a) $x^{5+\log_2 x}=\dfrac{1}{16}$ b) $5^{2(\log_5 2+x)}-2=5^{x+\log_5 2}$

c) $\lg\left(625\sqrt[5]{5^{x^2+20x+5}}\right)=0$ d) $x^{\lg 2}+2^{\lg x}=4$

5. $\log_2(x+4)=-2\log_2\dfrac{1}{2-x}$ теңдеудің неше бүтін түбірі бар?

КӨРСЕТКІШТІК ЖӘНЕ ЛОГАРИФМДІК ТЕҢДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІ

1. Теңдеулер жүйесін шешіңдер.

a) $\begin{cases}3\cdot7^x-3^y=12\\7^x\cdot3^y=15\end{cases}$ b) $\begin{cases}3^{-x}\cdot2^y=\dfrac{4}{9}\\x+y=4\end{cases}$ c) $\begin{cases}2^x+2y=1\\3y-6y^2=2^{x-1}\end{cases}$

d) $\begin{cases}2^x+2y=1\\3y-6y^2=2^{x-1}\end{cases}$ e) $\begin{cases}3\cdot2^x+y=13\\2^{2x+1}+3y=35\end{cases}$ f) $\begin{cases}3\cdot7^x+3^y=12\\7^x\cdot3^y=4\end{cases}$

2. Теңдеулер жүйесін шешіңдер.

a) $\begin{cases} \log_5(x+y)=1 \\ 2^x+2^y=12 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \log_4 x+\log_4 y=1+\log_4 9 \\ 2^{\frac{x+y}{2}}=1024 \end{cases}$

ЛОГАРИФМДІК ТЕҢСІЗДІКТЕР

1. Теңсіздікті шешіңдер.

a) $\log_4(x+5)<0$ b) $\log_3(2-5x)<1$ c) $\log_{\frac{1}{7}}(x+5)>-1$

d) $\log_{0,2}(x-3)+2\geq 0$ e) $\log_{\frac{1}{2}}(2x+3)>\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$ f) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2+x+1)\leq 0$

g) $\log_3(13-4^x)>2$ h) $2\log_3 x-\log_x 81<2$ i) $\log_2(x-1)+\log_2(x+1)\geq 3$

2. $\dfrac{1}{\log_3 x-2}>\dfrac{1}{\log_3 x}$ теңсіздіктің 5 -тен кіші натурал шешімдері нешеу?

3. $2\log_5 x-\log_x 125<1$ теңсіздіктің натурал шешімдері қосындысын табыңдар.

4. $\log_x(3-x)>1$ теңсіздіктің неше бүтін шешімі бар?

ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ФУНКЦИЯЛАР

1. Функцияның анықталу облысын табыңдар.

a) $y=\dfrac{1}{\sin x}$ b) $y=\dfrac{1}{\cos x}$ c) $y=\dfrac{\cos x}{\sin x-2\sin^2 x}$

d) $y=\dfrac{3x}{2\cos x-1}$ e) $y=\cos x+\sin x$ f) $y=\cos x+ctgx$

2. Функцияның мәндер жиынын табыңдар.

a) $y=3\cos x-1$ b) $y=2-\sin x$ c) $y=1-2\sin^2 x$ d) $y=2\cos^2 x-1$

3. Функцияның жұп немесе тақ екенін анықтаңдар.

a) $y=\dfrac{\sin x}{x}$ b) $y=x\cos x$ c) $y=\sin x+x^2$ d) $y=\cos x-x^2$

4. Функцияның ең кіші оң периодын табыңдар.

a) $y=\sin\dfrac{x}{2}$ b) $y=\cos(3x-1)$ c) $y=tg2x$ d) $y=\cos\dfrac{x}{3}$

5. Функцияның ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңдар.

a) $y=\cos^4 x-\sin^4 x$ b) $y=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ c) $y=1-2|\sin 3x|$

6. Функцияның нөлдерін табыңдар.

a) $y=\sin x-2$ b) $y=2\cos x+1$ c) $y=x\cos x$ d) $y=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$

КЕРІ ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ФУНКЦИЯЛАР

1. Функцияның анықталу облысын табыңдар.

a) $y = arccos\frac{2x+3}{4}$ b) $y = arcsin(2 + 3x)$

c) $y = arcsin\left(3\sqrt{x}+2\right)$ d) $y = arccos\frac{4-x}{3}$

2. Салыстырыңдар.

a) $arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$ және $arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$ b) $arctg(-1)$ және $arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$

c) $arccos\sqrt{3}$ және $arcsin1$ d) $arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ және $arcsin\frac{1}{2}$

3. Өрнектердің мәнін табыңдар.

a) $2arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+arctg(-1)+arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $arcsin\frac{1}{2}+4arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+arctg\left(-\sqrt{3}\right)$

c) $arctg\left(-\sqrt{3}\right)+arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+arccos1$ d) $arcsin1-\frac{1}{2}+arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+6arctg\sqrt{3}$

4. Есептеңдер.

a) $2arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+3arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$ b) $2arc\cos\left(-\frac{1}{2}\right)+arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $2arc\,tg1+3arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ d) $2arc\,tg(-1)+3arctg\left(\sqrt{3}\right)$

5. Есептеңдер.

a) $sin\left(arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ b) $tg\left(arccos\frac{1}{2}\right)$ c) $tg\left(arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

d) $sin(4arcsin1)$ e) $cos(arcsin1)$ f) $sin\left(arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ЖӘНЕ ТЕҢСІЗДІКТЕР

1. $0 \le x < 360^{\circ}$ аралықта теңдеуді шешіңдер.

a) $sinx = -0,3$ b) $sinx = 0,15$ c) $cosx = 0,6$ d) $cosx = -0,43$

2. Аралықтарды ескерген жағдайда x -тің мәнін табыңдар.

a) $4sinx + 2 = 0,\ 0 \le x < 2\pi$ b) $ctgx - \sqrt{3} = 0,\ 0 \le x < 2\pi$

c) $2sin^2x + 5sinx = 3\quad 0 \le x < 2\pi$ d) $cos2x = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0 \le x < 2\pi$

3. $0 \le x < 360^{\circ}$ аралықта теңдеуді шешіңдер.

a) $7-6\cos^2 x = 5\sin x$ b) $7 + 2cosx = 8sin^2x$ c) $2sinx - 3cosx = 0$

4. Теңдеуді шешіңдер.

a) $\sin 10x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\cos 10x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $tg 10x = \sqrt{3}$ d) $ctg 10x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

5. Теңдеуді шешіңдер.

a) $\sin 4x \cos 3x\, tg 8x = 0$ b) $\cos 4x = -\cos 5x$ c) $tg 5x = -tg \frac{x}{3}$

6. Теңдеуді шешіңдер.

a) $2\sin^2 x + \cos^2 x - 2 = 0$ b) $2\sin^2 x + \cos x = 0$ c) $\sin x \cos x = 0$

7. Теңдеуді шешіңдер.

a) $\sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x = 0$ b) $7\cos^2 x - 3\sin^2 x = 0$

c) $\cos^2 2x - 10\sin 2x \cos 2x + 21\sin^2 2x = 0$ d) $8\sin^2 x - \cos^2 x = 0$

8. Орнына қою тәсілімен шешіңдер.

a) $\cos^2 2x + 1 = 2\cos^2 x$ b) $3\cos^2 x \sin x + 1 = 3\cos^2 x + \sin x$

c) $6\cos^2 x + 6\sin^2 x - 3\cos x - 3 = 0$ d) $5\sin^2 x \cos x + 6\cos^2 x - 10\cos x + 6 = 0$

9. Теңдеуді шешіңдер.

a) $\cos 2x + \cos x = 0$ b) $\cos 3x = 2\cos 2x - 1$

c) $2\cos^2 x = 4\sin x \cos x - 1$ d) $\cos^2 x - 3\sin x \cos x = -1$

10. Теңдеуді $\sin x + \cos x = t$ алмастыру көмегімен шешіңдер.

a) $2(\sin x + \cos x) + \sin 2x + 1 = 0$ b) $\sin x + \cos x = 1 + \frac{\sin 2x}{2}$

11. Теңдеуді бағалау тәсілімен шешіңдер.

a) $2\sin^8 x - 3\cos^8 x = 5$ b) $(\cos 2x - \cos 4x)^2 = 4 - 4\cos^2 3x$

12. Теңдеуді көмекші бұрыш енгізу тәсілімен шешіңдер.

a) $12\cos x - 5\sin x = -13$ b) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$

13. Теңсіздікті шешіңдер.

a) $\sqrt{2}\cos 2x \le 1$ b) $2\sin 3x > -1$ c) $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \le \frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\sin\left(\frac{x}{4} - 3\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}$ f) $\cos\left(\frac{x}{3} + 2\right) < \frac{1}{2}$

14. Теңсіздікті шешіңдер.

a) $\sin^2 x + 2\sin x > 0$ b) $\cos^2 x - \cos x < 0$

ЫҚТИМАЛДЫҚТАР ТЕОРИЯСЫ

1. Лотареяда 2000 билет болса, оның 400-і ұтыс билеттері. Алынған 2 билеттің біреуі ғана ұтысты болу ықтималдығын тап.

2. Екі ойын сүйегі лақтырылып, олардың жағындағы ұпайлардың қосындысы 7-ге, көбейтіндісі 6-ға тең болу ықтималдығын тап.

3. 7 қара және 8 ақ шары бар ыдыстан бір шар кездейсоқ алынғанда, оның: а) ақ; б) қара шар болу ықтималдығын тап.

4. Тәуекеліне 25-тен үлкен болмаған натурал сан таңдалғанда оның 3-ке еселі болу ықтималдығын тап.

5. Баспаханада кездейсоқ таңдалған 1000 кітап топтамасында 7 кітап жарамсыз деп танылды. Жарамсыз кітаптардың салыстырмалы жиілігін тап.

6. Квадратқа іштей шеңбер сызылған. Квадратқа қойылған нүктенің шеңбер ішінде болу ықтималдығын тап.

7. Екі ойын сүйегі бірдей лақтырылғанда түскен сандардың қосындысы алтыдан кем болу ықтималдығын тап.

8. Қорапта 11 ақ және 9 қара шар бар. 4 шардың 2-сі ақ болу ықтималдығын тап.

9. Ыдыста 7 қызыл және 13 көк доп бар. Тәуекеліне алынған 2 доптың түсі әр түрлі болу ықтималдығын тап.

10. Қорапта 7 ақ және 3 қара шар бар. Тәуекеліне алынған 2 шардың түсі әр түрлі болу ықтималдығын тап.

11. Телефон нөмірін терген абонент соңындағы үш нөмірді ұмытып кеткен. Тәуекеліне нөмірді тергенде дұрыс нөмірлердің терілу ықтималдығын тап.

12. Қорапта 100 электр шамы бар, оның 10-ы жарамсыз. Тәуекелге 4 шамды алған кезде олардың 2-нің жарамсыз болу ықтималдығын тап.

13. 3 көк, 4 қызыл және 5 жасыл шардың ішінен кездейсоқ таңдалған 3 шардың түрлі түсті болу ықтималдығын тап.

14. Жарамдылықтың салыстырмалы жиілігі 0,8 элементтер партиясында 250 зат тексерілсе, жарамды заттардың санын тап.

15. Қапшықта 5 көк және 7 сары шар бар, кездейсоқ алынған екі шардың түсі әр түрлі болу ықтималдығын тап.

16. Себетте 5 жасыл, 7 сары, 8 қызыл алма бар. Кездейсоқ алынған 3 алманың түсі әртүрлі болу ықтималдығын тап.

17. Қорапта 6 бірдей нөмірленген текше бар. Барлық текшелерді бір-бірден салғанда, текшелердің нөмірлері кему ретімен шығу ықтималдығын тап.

18. Қорапта 12 ақ және 18 қызыл шар бар. Кездейсоқ алынған 4 шардың 3-і қызыл болу ықтималдығын тап.

19. Сыныпта 36 оқушы бар, оның 13-і шахмат үйірмесіне қатысады. Осы сыныптағы кездейсоқ алынған 7 оқушының кем дегенде біреуінің шахмат үйірмесіне қатысу ықтималдығын тап.

O‘quv nashri

ALGEBRA
VA ANALIZ ASOSLARI

Umumiy o‘rta ta’lim maktablarining
10-sinfi uchun darslik

(Qozoq tilida)

Аудармашы Рыскелді Тургунбаев
Редактор Айдын Тәжібаева
Көркем редактор Сарвар Фармонов
Техникалық редакторы Акмал Сулайманов
Суретші Бехзод Зуфаров
Дизайнер Илхом Болтаев
Корректор Дилнура Байдиллаева

Басуға 28.09.2022 ж. рұқсат етілген. Өлшемі 60х84 1/8.
"Cambria" гарнитурасы. Кегли 12. Офсеттік баспа.
Көлемі шартты баспа табақ 20,46.
Есептік баспа табақ 21,59. Таралымы 6248.
Тапсырыс № 1150.

Жалға берілген оқулықтың жағдайын көрсететін кесте

№	Оқушының аты-жөні	Оқу жылы	Оқулықты алғандағы жағдайы	Сынып жетекшісінің қолы	Оқулықты тапсырғандағы жағдайы	Сынып жетекшісінің қолы.
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Оқулық жалға беріліп, оқу жылының соңында қайтып алғанда жоғарыдағы кестені сынып жетекшісі келесі бағалау критерийлері бойынша толтырады:

Жаңа	Оқулықтың бірінші рет пайдалануға берілгендегі жағдайы.
Жақсы	Мұқабасы бүтін, оқулық негізгі бөлігінен бөлінбеген. Барлық парақтары бар, жыртылмаған, беттерінде жазу –сызу жоқ.
Қанағаттанарлы	Мұқабасы езілген, аздап сызылған, шеттері мүжілген, оқулықтың негізгі бөлігінен бөлінген, қолданушы тарапынан қанағаттанарлық жөндеуден өткен. Көшкен парақтары жөнделген, кейбір беттеріне сызылған.
Қанағаттанарсыз	Мұқабасы сызылған, жыртылған, негізгі бөлігінен ажыраған немесе мүлдем жоқ, қанағаттанарсыз жөндеуден өткен. Беттері жыртылған, беттері жоқ, сызылған, боялған. Оқулықты қалпына келтіруге болмайды.