МАТЕМАТИКА 10

АЛГЕБРА ЖӘНЕ АНАЛИЗ БАСТАМАЛАРЫ
ГЕОМЕТРИЯ
I БӨЛІМ

Орта білім беретін мекемелердің 10-сынып оқушыларына арналған оқулық

1-басылымы

Өзбекстан Республикасы Халыққа білім беру министрлігі бекіткен

ТАШКЕНТ
2017

УДК 51(075.3)
ББК 22.1
М 54

Алгебра және анализ бастамалары бөлімінің авторлары:

М.А. Мирзаахмедов, Ш.Н. Исмаилов, А.Қ. Аманов.

Геометрия бөлімінің авторы:

Б.Қ. Хайдаров

Пікір жазғандар:

Б.Қ. Бешимов – Мырза Ұлықбек атындағы Өзбекстан Ұлттық университетіндегі "Геометрия және топология" кафедрасының меңгерушісі, физика-математика ғылымдарының докторы.

М.Д. Пардаева – Республикалық Білім орталығы директорының орынбасары.

Д.Е. Давлетов – Низами атындағы ТМПУ-дегі "Математиканы оқыту әдістемесі" кафедрасының меңгерушісі, физика-математика ғылымдарының кандидаты.

Ғ.М. Рахимов – ТИАШМИИ-дің жанындағы академиялық лицейдің оқытушысы, физика-математика ғылымдарының кандидаты, доцент.

А.А Акмалов – Ташкент қалалық ХББҚҚДБЖИ-дің проректоры, педагогика ғылымдарының кандидаты, доцент.

Оқулықтың "Алгебра және анализ бастамалары" бөлімінде пайдаланылған белгілер және олардың білдіретін мағынасы:

△ – мысалды шешу (дәлелдеу) басталды

▲ – мысалды шешу (дәлелдеу) аяқталды

(!) – бақылау жұмыстары мен тест (сынақ) жаттығулары

(?) – сұрақтар мен тапсырмалар

– негізгі мәлімет

– күрделі жаттығулар

Республикалық мақсатты кітап қоры қаржыларының есебінен басылды.

ISBN 978-9943-48-595-2

I ТАРАУ

ЖИЫНДАР. ЛОГИКА

1-4 ЖИЫН ҰҒЫМЫ, ЖИЫНДАРМЕН АМАЛ ОРЫНДАУ. ЖИЫННЫҢ ТОЛЫҚТАУЫШЫ

Жиын математикадағы бастапқы ұғымдардың бірі болып, оған оның өзінен қарапайымдау ұғымдар арқылы анықтама беруге болмайды. Өмірде белгілі бір объектілер кешеніне біртұтас зат ретінде карауға тура келеді. Мысалы, биолог белгілі бір өлкедегі өсімдіктер мен жануарлар әлемін үйреніп, оларды түрлер бойынша, түрлерді ұрықтар бойынша топтарға ажыратып шығады. Әрбір түр біртұтас бүтін деп каралатын тірі табиғат кешені.

Жиын кез келген түрдегі нысандардан құралған болуы мүмкін. Мысалы, Азия құрлығындағы барлық өзендер немесе сөздіктегі барлық сөздер жиын болады.

Кешендердің математикалық сипаттамасын беру үшін танымал неміс математигі **Г.Кантор** (1845–1918) төмендегі жиын ұғымын енгізген:

«Жиын пікірдегі бір бүтін деп қаралатын көптік».

Жиынды құрайтын объектілерге оның *элементтері* делінеді.

Жиын, әдетте, қолайлы болу үшін, латын әліппесінің бас әріптерімен, мысалы, $A, B, C, \ldots$, ал оның элементтері кіші әріптерімен, мысалы, $a, b, c, \ldots$ белгіленеді.

Элементтері $a, b, c, \ldots$ болған A жиыны жақшаның көмегімен $A = \{a, b, c, \ldots\}$ түрінде жазылады.

Мына $\{6, 11\}$, $\{11, 6\}$, $\{11, 6, 6, 11\}$ өрнек бір ғана жиынды білдіреді.

Мысалы, $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ – ондық санақ жүйесіндегі сандардың жиыны, $V = \{a, e, i, o, u\}$ – ағылшын тіліндегі дауысты әріптердің жиыны. 10-а сыныптағы оқушылардың жиынын $\{a_1, a_2, \ldots, a_{30}\}$ деп белгілесек, a_1 – журналдағы бірінші нөмірлі оқушыны, ..., ал a_{30}– журналдағы отызыншы нөмірлі оқушыны білдіреді.

x-тің A жиынның элементі екені $x \in A$, ал элементі еместігі $x \notin A$ ретінде жазылады және бірінші жағдайда "*x элементі A-ға тиісті*", ал екінші жағдайда "*x элементі A-ға тиісті емес*" деп оқылады.

Мысалы, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ үшін $4 \in A$, бірақ $9 \notin A$.

Егер жиынды құрайтын элементтердің саны шектеулі болса, мұндай жиын **шекті жиын,** кері жағдайда **шексіз жиын** делінеді.

Мысалы, $A = \{2, 3, 5, 8, 13, 21\}$ шекті жиын, ал $\mathbb{N}=\{1, 2, ..., n, ...\}$ − барлық натурал сандардың жиыны шексіз жиын.

$n(A)$ деп шекті A жиынның барлық элементтерінің санын белгілесек, $A=\{2, 3, 5, 8, 13, 21\}$ жиынның барлық элементтерінің саны 6-ға тең болғаны үшін, $n(A)=6$ болады.

Шексіз жиынға тағы бір мысал ретінде 13-тен кіші болмаған барлық натурал сандардың жиынын айтуға болады.

Бірде-бір элементке ие болмаған жиын **бос жиын** делінеді және $\emptyset$ белгісімен белгіленеді.

$\emptyset$ жиыны да шекті жиын болып саналады және ол үшін $n(\emptyset)= 0$.

Шексіз A жиын үшін $n(A)= \infty$ белгісі қабылданған.

Егер A жиынның барлық элементі B жиынға тиісті болса, A жиын B жиынның **ішкі жиыны** делінеді және $A \subseteq B$ түрінде жазылады.

Мұндай жағдайда "*A жиын B-да жатады*" немесе "*A жиын B-ның бөлігі*" деп аталады.

$\{a\}$ жиын $\emptyset$ мен *$\{a\}$-ға*, яғни, екі ішкі жиынға ие.

Ал $\{a, b\}$ жиын төрт: $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$ және $\{a, b\}$ ішкі жиындарға ие.

Мысалы, $\{2, 3, 5\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, өйткені бірінші жиынның барлық элементтері екінші жиынның да элементтері болып табылады.

A жиынның B жиынға тиісті болмаған элементтері бар болса, A жиын B жиынның ішкі жиыны бола алмайды және $A \not\subset B$ түрінде жазылады.

Мысалы, $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{2, 3, 4, 5\}$ болсын. $1 \notin B$ болғандықтан $A \not\subset B$.

$\emptyset \subseteq A$, $A \subseteq A$ қатынасы орынды екені белгілі.

$A \subseteq B$ және $B \subseteq A$ болса, осы жиындар дәл бірдей элементтерден құралып, олар **тең** (сәйкес түсетін) **жиындар** делінеді және $A = B$ түрінде жазылады.

Мысалы тұрақты үшбұрыштар жиыны барлық бұрыштары өзара тең болған үшбұрыштардың жиынымен сәйкес түседі. Мұның себебі кез келген дұрыс үшбұрыштардың барлық бұрыштары тең және керісінше, егер үшбұрышта барлық бұрыштар тең болса, ол дұрыс болады.

Негізгі санды жиындарды есіңе түсір:

$\mathbb{N}=\{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$ – натурал сандар жиыны; $\mathbb{Z}=\{0, \pm1, \pm2, \pm3, ...\}$ – бүтін сандар жиыны; $\mathbb{Q}=\{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\}$ – рационал сандар жиыны;

$\mathbb{R}=(-\infty;+\infty)$ – нақты сандар жиыны.

Жиындардың бірігуі мен қиылысуы

1) *A, B* жиындарының **бірігуі** деп осы жиындардың ең кемінде біреуінің элементі болған элементтерден құралған жиынға айтылады.

A, B жиындарының бірігуі $A \cup B$ түрінде белгіленеді.

Мысалы, $P=\{1, 3, 4\}$ мен $Q=\{2, 3, 5\}$ үшін $P \cup Q=\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

2) *A, B* жиындарының **қиылысуы** деп осы жиындардың ортақ элементтерінен құралған жиынға айтылады.

A, B жиындарының қиылысуы $A \cap B$ түрінде белгіленеді.

Мысалы, $P=\{1, 3, 4\}$ мен $Q=\{2, 3, 5\}$ үшін $P \cap Q=\{3\}$.

Ортақ элементтерге ие болмаған екі жиын **өзара қиылыспайтын** жиындар деп айтылады.

1-мысал. $M = \{2, 3, 5, 7, 8, 9\}$ мен $N = \{3, 4, 6, 9, 10\}$ жиындары үшін төмендегілерді анықта:

a) ақиқат немесе жалған екенін: **I** $4 \in M$; **II** $6 \notin M$;

b) жиындарды тап: **I** $M \cap N$; **II** $M \cup N$;

c) ақиқат немесе жалған екенін: **I** $M \subseteq N$; **II** $\{9, 6, 3\} \subseteq N$.

а) 4 саны *M* жиынның элементі болмағаны үшін $4 \in M$ қатынасы жалған. 6 саны *M* жиынның элементі болмағаны үшін $6 \notin M$ қатынасы ақиқат.

ә) $M \cap N = \{3, 9\}$, өйткені тек 3 және 9 сандары ғана екі жиынның да элементі. $M \cup N$ жиынды табу үшін я *M*-ға, немесе *N*-ға тиісті болған элементтерді жазамыз: $M \cup N = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$;

б) $M \subseteq N$ қатынасы жалған, өйткені *M* жиында *N*-ға тиісті болмаған элементтер бар. $\{9, 6, 3\} \subseteq N$ қатынасы шын, өйткені *N*-да $\{9, 6, 3\}$ жиын элементтері бар.

Жаттығулар

1. $\in$, $\notin$, $\subseteq$ белгілерін пайдаланып жаз:

a) 5 саны *D* жиынның элементі;

b) 6 саны *G* жиынның элементі емес;

c) $\{2, 5\}$ жиын $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ жиынның ішкі жиыны;

d) $\{3, 8, 6\}$ жиын $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ жиынның ішкі жиыны емес;

2. a) $A = \{6, 7, 9, 11, 12\}$, $B = \{5, 8, 10, 13, 9\}$;
b) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{5, 6, 7, 8\}$;
c) $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ жиындары үшін $A \cup B$ мен $A \cap B$-ларды тап.

3. Жиындар элементтерінің санын тап:
a) $A = \{6, 7, 9, 11, 12\}$;
b) $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;
c) $A \cap B$;
d) $A \cup B$.

4. Жиынның шекті немесе шексіз екенін анықта:
a) 10-нан үлкен бірақ 20-дан кіші натурал сандардың жиыны;
b) 5-тен үлкен болған натурал сандардың жиыны.

5. Жиындардың қайсылары өзара қиылыспайды:
a) $A = \{1, 3, 5, 7\}$; $B = \{2, 4, 6, 8\}$;
b) $P = \{3, 5, 6, 7, 8, 10\}$; $Q = \{4, 9, 10\}$?

Кейбір жағдайда жиынды беру үшін оның элементтеріне орынды, басқа элементтер үшін орынсыз *характеристикалық қасиет* көрсетіледі. Егер x элемент *P қасиетке* ие деген пікір қысқаша $P(x)$ деп жазылса, P қасиетке ие болған барлық элементтердің жиыны $\{x|P(x)\}$ көрінісінде беріледі.

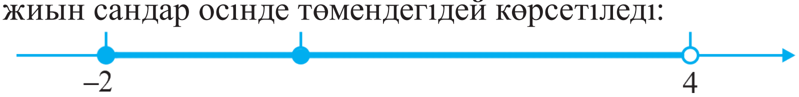
Мысалы, $A = \{\, x \mid -2 \leqslant x \leqslant 4, x \in \mathbb{Z}\}$ өрнегі төмендегідей оқылады: "–2-ден үлкен немесе оған тең және 4-тен кіші немесе оған тең болған барлық бүтін сандардың жиыны".

Осы жиын сандар осінде төмендегідей көрсетіледі:

Көрініп тұрғанындай, $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ және ол шекті, мұнда $n(A) = 7$.

Дәл осылай $B = \{\, x \mid -2 \leqslant x < 4, x \in \mathbb{R}\}$ өрнегі былай оқылады: "–2-ден үлкен немесе оған тең және 4-тен кіші барлық нақты сандардың жиыны".

Осы жиын сандар осінде төмендегідей көрсетіледі:



Көрініп тұрғанындай, $B = [-2, 4)$ және ол шексіз, мұнда $n(B) = \infty$.

2-мысал. $A = \{\, x \mid 3 < x \leqslant 10, x \in \mathbb{Z}\}$ болсын.
a) Осы өрнек қалай оқылады?
b) Осы жиынның элементтерін бір-бірлеп атап жаз;
c) $n(A)$-ны тап.

a) "3-тен үлкен және 10-нан кіші немесе оған тең болған барлық бүтін сандардың жиыны";

b) $A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$;

c) $n(A) = 7$.

Жаттығулар

6. Жиындардың қай бірі шекті, қай бірі шексіз:

a) $\{ x \mid -2 \leqslant x \leqslant 1, x \in \mathbb{Z}\}$; b) $\{ x \mid -2 \leqslant x \leqslant 1, x \in \mathbb{R}\}$;

c) $\{ x \mid x \geqslant 5, x \in \mathbb{Z}\}$; d) $\{ x \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, x \in \mathbb{Q}\}$?

7. Өрнектерді оқы:

a) $A = \{ x \mid -1 \leqslant x \leqslant 7, x \in \mathbb{Z}\}$; b) $A = \{ x \mid -2 < x \leqslant 8, x \in \mathbb{N}\}$;

c) $A = \{ x \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, x \in \mathbb{R}\}$; d) $A = \{ x \mid 5 \leqslant x \leqslant 6, x \in \mathbb{Q}\}$.

Егер мүмкіндік болса, осы жиындардың элементтерін бір-бірлеп атап жазып шық.

8. Төмендегі жиындарды жаз:

a) "−100-ден үлкен және 100-ден кіші болған барлық бүтін сандардың жиыны";

b) "1000-нан үлкен болған барлық нақты сандардың жиыны";

c) "2-ден үлкен немесе оған тең болған және 3-тен кіші немесе оған тең болған барлық рационал сандардың жиыны".

9. Сұрақтарға жауап бер:

a) $\{a, b, c\}$ және $\{a, b, c, d\}$ жиындарының барлық ішкі жиындарын жаз. Олар нешеу?

b) Егер B жиын n элементке ие болса, онда B жиын неше ішкі жиынға ие?

10. Қандай жағдайларда $A \subseteq B$ болады?

a) $A = \varnothing$ және $B = \{2, 5, 7, 9\}$; b) $A = \{2, 5, 8, 9\}$ және $B = \{8, 9\}$;

c) $A = \{ x \mid 2 \leqslant x \leqslant 3, x \in \mathbb{R}\}$ және $B = \{ x \mid x \in \mathbb{R}\}$;

d) $A = \{ x \mid 3 \leqslant x \leqslant 9, x \in \mathbb{Q}\}$ және $B = \{ x \mid 0 \leqslant x \leqslant 10, x \in \mathbb{R}\}$;

e) $A = \{ x \mid -10 \leqslant x \leqslant 10, x \in \mathbb{Z}\}$ және $B = \{ z \mid 0 \leqslant z \leqslant 5, z \in \mathbb{Z}\}$;

f) $A = \{ x \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, x \in \mathbb{Q}\}$ және $B = \{ y \mid 0 < y \leqslant 2, y \in \mathbb{Q}\}$.

Ойша көз алдымызға келтірейік, бізді 1-ден үлкен немесе оған тең және 8-ден кіші немесе оған тең болған барлық натурал сандар қызықтырсын және біз оның ішкі жиындарын қарастырмақшымыз.

Әдетте, мұндай жағдайда $U = \{ x \mid 1 \leqslant x \leqslant 8, x \in \mathbb{N}\}$ жиыны енгізіліп, ол **универсал жиын** деп аталады.

A жиынның *A′* **толықтауышы** деп *U* универсал жиынның *A*-ға тиісті болмаған барлық элементтерінің жиынына айтылады.

Мысалы, $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ универсал жиын болса, $A = \{1, 3, 5, 7, 8\}$ жиынның **толықтауышы** $A' = \{2, 4, 6\}$жиын болады.

Көрініп тұрғанындай,
- $A \cap A' = \emptyset$
- $A \cup A' = U$
- $n(A) + n(A') = n(U)$,

яғни *A* мен *A′* жиындары ортақ элементтерге ие емес және оларды құрайтын барлық элементтерден *U* туындайды.

3-мысал. Универсал жиын $U = \{$*барлық натурал сандар*$\}$ болса, C' -ны тап.

a) $C = \{$*барлық жұп сандар*$\}$;

b) $C = \{ x \mid x \geqslant 2, x \in \mathbb{Z}\}$, $U = \mathbb{Z}$.

a) $C' = \{$*барлық тақ сандар*$\}$;

b) $C' = \{ x \mid x \leqslant 1, x \in \mathbb{Z}\}$.

4-мысал. $U = \{ x \mid -5 \leqslant x \leqslant 5, x \in \mathbb{Z}\}$, $A = \{ x \mid 1 \leqslant x \leqslant 4, x \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{ x \mid -3 \leqslant x < 2, x \in \mathbb{Z}\}$ болса, төмендегі жиын элементтерін жаз:

a) A; b) B; c) A'; d) B';

e) $A \cap B$; f) $A \cup B$; g) $A' \cap B$; h) $A' \cup B'$.

a) $A = \{1, 2, 3, 4\}$;

b) $B = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$

c) $A' = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 5\}$;

d) $B' = \{-5, -4, 2, 3, 4, 5\}$

e) $A \cap B = \{1\}$;

f) $A \cup B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

g) $A' \cap B = \{-3, -2, -1, 0\}$;

h) $A' \cup B' = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 2, 3, 4, 5\}$.

Жаттығулар

11. C'-ны тап.

a) $U = \{$*ағылшын тілінің әріптері*$\}$, $C = \{$*дауысты әріптер*$\}$;

b) $U = \{$*бүтін сандар*$\}$, $C = \{$*теріс бүтін сандар*$\}$;

c) $U = \mathbb{Z}$, $C = \{ x \mid x \leqslant -5, x \in \mathbb{Z}\}$;

d) $U = \mathbb{Q}$, $C = \{ x \mid x \leqslant 2$ *немесе,* $x \geqslant 8, x \in \mathbb{Q}\}$.

12. $U = \{ x \mid 0 \leqslant x \leqslant 8, x \in \mathbb{Z}\}$, $A = \{ x \mid 2 \leqslant x \leqslant 7, x \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{ x \mid 5 \leqslant x \leqslant 8, x \in \mathbb{Z}\}$ болса, төмендегілерді тап:

a) A; b) A'; c) B; d) B';

e) $A \cap B$; f) $A \cup B$; g) $A \cap B'$.

13. $n(U) = 15$, $n(P) = 6$, $n(Q') = 4$ болса, төмендегілерді тап:

a) $n(P')$; b) $n(Q)$.

14. $U = \{x \mid 0 < x \leqslant 12, x \in \mathbb{Z}\}$, $A = \{x \mid 2 \leqslant x \leqslant 7, x \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{x \mid 3 \leqslant x \leqslant 9, x \in \mathbb{Z}\}$, $C = \{x \mid 5 \leqslant x \leqslant 11, x \in \mathbb{Z}\}$ болса, төмендегілерді тап:

a) B' b) C' c) A' d) $A \cap B$
e) $(A \cap B)'$ f) $A' \cap C$ g) $B' \cup C$ h) $(A \cup C) \cap B'$

5-misol. $U = \mathbb{N}$, $P = \{$*4 санының 50-ден кіші болған еселіктері*$\}$ және $Q = \{$*6 санының 50-ден кіші болған еселіктері*$\}$ болсын.

a) P, Q жиындарының элементтерін жаз;
b) $P \cap Q$-ді тап;
c) $P \cup Q$-ді тап;
d) $n(P \cup Q) = n(P) + n(Q) - n(P \cap Q)$ теңдіктің орындалуын тексер.

△ a) $P = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48\}$,
$Q = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48\}$;
b) $P \cap Q = \{12, 24, 36, 48\}$;
c) $P \cup Q = \{4, 6, 8, 12, 16, 18, 20, 24, 28, 30, 32, 36, 40, 42, 44, 48\}$;
d) $n(P \cup Q) = 16$ және $n(P) + n(Q) - n(P \cap Q) = 12 + 8 - 4 = 16$.

Демек, $n(P \cup Q) = n(P) + n(Q) - n(P \cap Q)$ теңдік дұрыс екен. ▲

Жаттығулар

15. $U = N$, $P = \{$*25-тен кіші болған жай сандар*$\}$ және $Q = \{2, 4, 5, 11, 12, 15\}$ болсын.

a) P жиынның элементтерін жаз;
b) $P \cap Q$-ді тап;
c) $P \cup Q$-ді тап;
d) $n(P \cup Q) = n(P) + n(Q) - n(P \cap Q)$ теңдіктің орындалуын тексер.

16. $U = \mathbb{N}$, $P = \{$*30-дың бөлгіштері*$\}$ және $Q = \{$*40-тың бөлгіштері*$\}$ болсын.

a) P, Q жиындарының элементтерін жаз;
b) $P \cap Q$-ді тап;
c) $P \cup Q$-ді тап;
d) $n(P \cup Q) = n(P) + n(Q) - n(P \cap Q)$ теңдіктің орындалуын тексер.

17. $U = \mathbb{N}$, $P = \{$*4 санының 30 бен 60 сандарының арасындағы еселіктері*$\}$ және $Q = \{$*6 санының 30 бен 60 сандарының арасындағы еселіктері*$\}$ болсын.

a) P, Q жиындарының элементтерін жаз;
b) $P \cap Q$-ді тап; c) $P \cup Q$-ді тап;
d) $n(P \cup Q) = n(P) + n(Q) - n(P \cap Q)$ теңдіктің орындалуын тексер.

18. $U = \{ x \mid 0 < x \leqslant 12, x \in \mathbb{Z}\}$, $A = \{ x \mid 2 \leqslant x \leqslant 7, x \in \mathbb{Z}\}$,
$B = \{ x \mid 3 \leqslant x \leqslant 9, x \in \mathbb{Z}\}$, $C = \{ x \mid 5 \leqslant x \leqslant 11, x \in \mathbb{Z}\}$ болса, төмендегілерді тап:

a) B'; b) C'; c) A';
d) $A \cap B$; e) $(A \cap B)'$; f) $A' \cap C$;
g) $B' \cup C$; h) $(A \cup C) \cap B'$.

19. $U = \mathbb{Z}$, $C = \{ y \mid -4 \leqslant y \leqslant -1, y \in \mathbb{Z}\}$ және
$D = \{ y \mid -7 \leqslant y < 0, y \in \mathbb{Z}\}$ болсын.

a) C, D жиындарының элементтерін жаз;
b) $C \cap D$-ны тап;
c) $C \cup D$-ны тап;
d) $n(C \cup D) = n(C) + n(D) - n(C \cap D)$ теңдіктің орындалуын тексер.

20. $U = \mathbb{N}$, $P = \{12\text{-нің бөлгіштері}\}$, $Q = \{18\text{-дің бөлгіштері}\}$ және
$R = \{27\text{-нің бөлгіштері}\}$ болсын.

a) P, Q, R жиындарының элементтерін жаз;
b) **I** $P \cap Q$; **II** $P \cap R$;
III $Q \cap R$; **IV** $P \cup Q$;
V $P \cup R$; **VI** $Q \cup R$;
c) **I** $P \cap Q \cap R$; **II** $P \cup Q \cup R$,
жоғарыдағыларды тап.

21. $U = \mathbb{N}$, $A = \{4 \text{ санының } 40\text{-тан кіші болған еселіктері}\}$,
$B = \{6 \text{ санының } 40\text{-тан кіші болған еселіктері}\}$ және
$C = \{12 \text{ санының } 40\text{-тан кіші болған еселіктері}\}$ болсын.

a) A, B, C жиындарының элементтерін жаз;
b) **I** $A \cap B$; **II** $B \cap C$;
III $A \cap C$; **IV** $A \cap B \cap C$.
c) $A \cup B \cup C$-ны тап;
d) $n(A \cup B \cup C) = n(A)+n(B)+n(C)-n(A \cap B)-n(B \cap C)-n(A \cap C)+$
$+n(A \cap B \cap C)$ теңдіктің орындалуын тексер.

22. $U = \mathbb{N}$, $A = \{6 \text{ санының } 31\text{-ден кіші болған еселіктері}\}$,
$B = \{30\text{-дың бөлгіштері}\}$ және
$C = \{30\text{-дан кіші болған жай сандар}\}$ болсын.

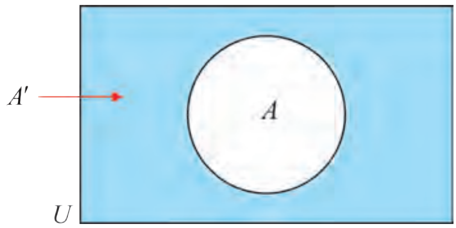
Жиындардың элементтерін жаз;
a) A, B, C;
b) **I** $A \cap B$; **II** $B \cap C$;
III $A \cap C$; **IV** $A \cap B \cap C$.
c) $A \cup B \cup C$-ны тап;

d) $n(A \cup B \cup C) = n(A)+n(B)+n(C)-n(A \cap B)-n(B \cap C)-n(A \cap C)+$ $+n(A \cap B \cap C)$ теңдіктің орындалуын тексер.

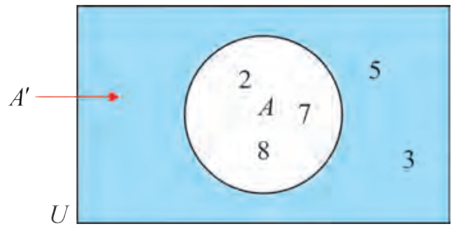
Венн диаграммалары

Жиындарды *Венн диаграммасының* көмегімен өрнектеу мақсатқа сай. Венн диаграммасында U универсал жиын – тік төртбұрыш, ал жиын осы тік төртбұрыштың ішіндегі шеңбер түрінде бейнеленеді.

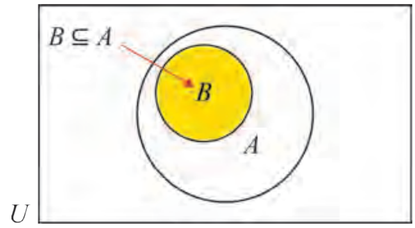
Мысалы, суретте U универсал жиынның ішіндегі A жиын өрнектелген. Шеңбердің сыртындағы боялған өріс A жиынның A' толықтауышын білдіреді:



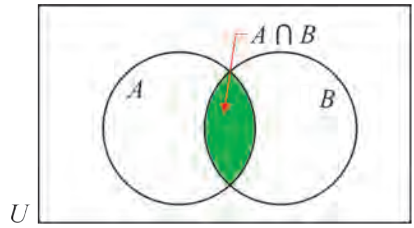
$U = \{2,3,5,7,8\}$, $A = \{2,7,8\}$ және $A' = \{3,5\}$ болса, осы жиындар Венн диаграммасында төмендегідей бейнеленеді:



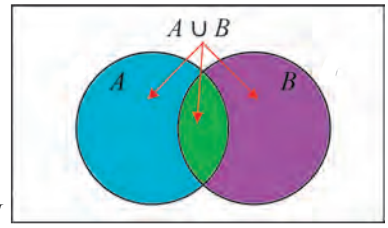
Егер $B \subseteq A$ болсы, онда B жиынның кез келген элементі A жиынға тиісті. Демек, оған сәйкес Венн диаграммасында B жиынды өрнектейтін шеңбер A жиынды бейнелейтін шеңбердің ішіне енеді:



$A \cap B$ қиылысу элеменеттері A-ға да, B-ға да тиісті болады. Демек осыған сәйкес Венн диаграммасында $A \cap B$ жиынды өрнектейтін боялған өріс осылай бейнеленеді:



$A \cup B$ бірігу элементтері я A-ға немесе B-ға, я болмаса екеуіне де тиісті болады. Демек, осыған сәйкес Венн диаграммасында $A \cup B$ жиынды өрнектейтін өріс төмендегідей бейнеленеді:

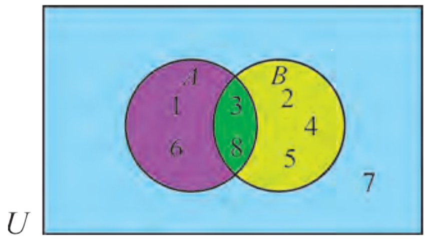


6-мысал. $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ болса, төмендегі жиындарды Венн диаграммасында бейнеле:

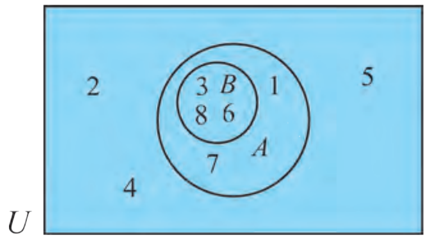
a) $A = \{1, 3, 6, 8\}$ және $B = \{2, 3, 4, 5, 8\}$;

b) $A = \{1, 3, 6, 7, 8\}$ және $B = \{3, 6, 8\}$.

a) $A \cap B = \{3, 8\}$



ә) $A \cap B = \{3, 6, 8\}$, $B \subseteq A$



Жаттығулар

23. A, B жиындарын Венн диаграммасында өрнекте:

a) $U = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{2, 4, 6\}$ және $B = \{5, 7\}$;

b) $U = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{2, 4, 6\}$ және $B = \{3, 5, 7\}$;

c) $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{2, 4, 5, 6\}$ және $B = \{1, 4, 6, 7\}$;

d) $U = \{3, 4, 5, 7\}$, $A = \{3, 4, 5, 7\}$ және $B = \{3, 5\}$.

24. $U = \{ x \mid 1 \leqslant x \leqslant 10, x \in \mathbb{Z}\}$, A = {10-*нан кіші болған тақ сандар*} және B = {10-*нан кіші болған жай сандар*} болсын.

a) A, B жиындарының элементтерін жаз;

b) A, B жиындарын Венн диаграммасында өрнекте:

c) $A \cap B$ және $A \cup B$ жиындарын тап.

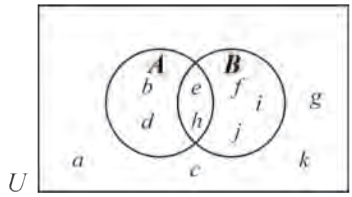
25. $U = \{ x \mid 1 \leqslant x \leqslant 10, x \in \mathbb{Z}\}$, A = {6-*ның еселіктері*} және B = {9-*дың еселіктері*} болсын.

a) A, B жиындарының элементтерін жаз;

b) $A \cap B$ және $A \cup B$ жиындарын тап;

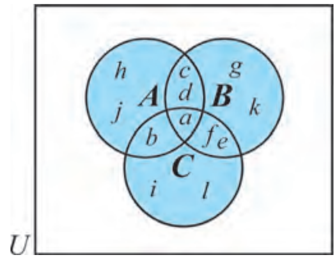
c) A, B жиындарын Венн диаграммасында өрнекте:

26. *A*, *B* жиындары Венн диаграммасында бейнеленген.
Төмендегі жиындардың элементтерін жаз:



II A; **II** B; **III** A'; **IV** B';
V $A \cap B$; **VI** $A \cup B$; **VII** $(A \cup B)'$; **VII** $A' \cup B'$.

27. *A, B, C* жиындары Венн диаграммасында бейнеленген.

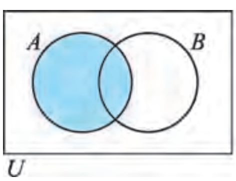


a) Жиындардың элементтерін жаз:

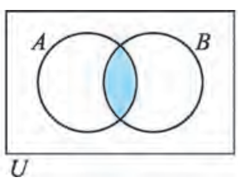
I A; **II** B;
III C; **IV** $A \cap B$;
V $A \cup B$; **VI** $B \cap C$;
VII $A \cap B \cap C$; **VII** $A \cup B \cup C$.

b) Төмендегілерді тап:
I $n(A \cup B \cup C)$;
II $n(A) + n(B) + n(C) -$
$- n(A \cap B) - n(A \cap C) -$
$- n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$.

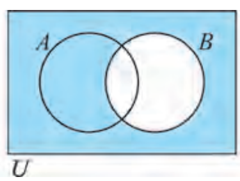
Венн диаграммасында жиындарды бояп өрнектеуге болады.
Мысалы, суретте, сәйкесінше, A, $A \cap B$, B', $A \cap B'$ жиындары боялған:



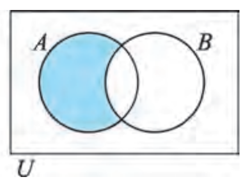
A



$A \cap B$



B'

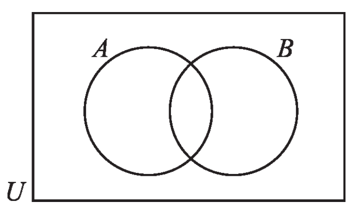


$A \cap B'$

Жаттығулар

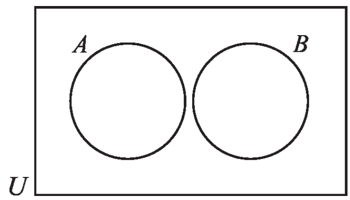
Диаграммаларды дәптерге көшір және көрсетілген жиындарды боя:

28.



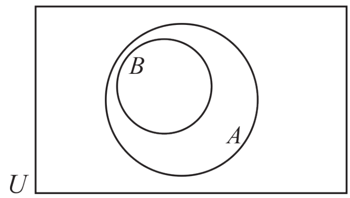
a) $A \cap B$; b) $A \cap B'$;
c) $A' \cup B$; d) $A \cup B'$;
e) $(A \cap B)'$; f) $(A \cup B)'$.

29.



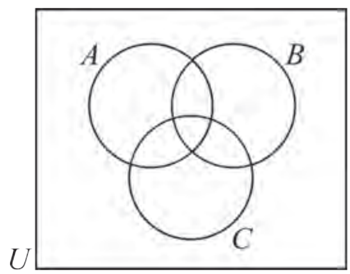
a) A; b) B;
c) A'; d) B';
e) $A \cap B$; f) $A \cup B$;
g) $A' \cap B$; h) $A \cup B'$;
i) $(A \cap B)'$.

30.



a) A; b) B;
c) A'; d) B';
e) $A \cap B$; f) $A \cup B$;
g) $A' \cap B$; h) $A \cup B'$;
i) $(A \cap B)'$.

31.



a) A; b) B';
c) $B \cap C$; d) $A \cup B$;
e) $A \cap B \cap C$; f) $A \cup B \cup C$;
g) $(A \cap B \cap C)'$; h) $(A \cup B) \cup C$;
i) $(B \cap C) \cap A$.

5-7 ТҰЖЫРЫМДАР. ТЕРІСТЕУ, КОНЪЮНКЦИЯ ЖӘНЕ ДИЗЪЮНКЦИЯ

Ақиқат немесе жалған болған хабарлы сөйлем ***тұжырым*** делінеді.

Сұраулы сөйлем, тұлғаның көзқарасын білдіретін хабарлы сөйлемдер, мысалы, "Жасыл түс жағымды" деген сөйлем тұжырым бола алмайды.

Кейбір тұжырымдардың ақиқат я жалған екені бір мәнмен анықталмайды.

Мысалы, "Бұл жазушы Ташкентте туылған" тұжырымы белгілі бір жазушыға қатысты ақиқат, басқа жазушыға қатысты жалған болуы мүмкін.

1-мысал. Төмендегілердің қай бірі тұжырым бола алады? Егер ол тұжырым болса, оның ақиқат я жалған екені бір мәнмен анықтала ма?

a) 20:4=80; b) 25·8=200;
c) Менің қаламым қайда? d) Сенің көздерің көгілдір түсте.

△ a) Бұл тұжырым және ол жалған, өйткені 20:4=5 болады;
b) бұл тұжырым және ол ақиқат;
c) бұл сұраулы сөйлем болғаны үшін, ол тұжырым бола алмайды;

d) бұл тұжырым, оның ақиқат я жалған екені бір мәнмен анықталмайды, өйткені кейбір адамға қатысты жалған, кейбіреуіне қатысты ақиқат. ▲

Біз тұжырымдарды *p, q, r* ... әріптерімен белгілейміз.

Мысалы, *p:* Сейсенбі күні жаңбыр жауды;
q: 20:4=5;
r: *x* – жұп сан.

Күрделірек тұжырымдарды құрастыру үшін ∧ (конъюнкция – "және", "бірақ"), ∨ (дизъюнкция – "немесе"), ¬ (терістеу – "... емес", "... қате") ***логикалық жалғаулар*** деп аталатын арнаулы белгілер пайдаланылады. Оларды қарастырып көрейік.

Терістеу

p тұжырым үшін "*p* емес" немесе "*p* екені дұрыс емес (қате)" түріндегі тұжырым *p*-ның ***терістеуі*** делінеді және ¬*p* түрінде өрнектеледі.

Мысалы, *p*: Сейсенбі күні жаңбыр жауды тұжырымды терістеу
¬*p*: Сейсенбі күні жаңбыр жаумады;

p: Мәдинаның көзі көгілдір тұжырымды терістеу
¬*p*: Мәдинаның көзі көгілдір емес болады.

Демек, *p* ақиқат болса, ¬*p* жалған, *p* жалған болса ¬*p* ақиқат тұжырым болады. Бұл мәлімет ***ақиқат кестесінің*** көмегімен сипатталады. Мұндай кесте *p*-ға қарап жаңа ¬*p* тұжырымның ақиқат мәнінің ақиқат T[1] немесе жалған F[1] екенін анықтайды:

p	¬*p*
T	F
F	T

Жаттығулар

32. Төмендегілердің қай бірі тұжырым болады? Егер ол тұжырым болса, оның ақиқат я жалған екені бір мәнмен анықталады ма?

a) 11−5=7; b) 12 – жұп сан; c) $\frac{m}{n} | m \in \square, n \in \square$; d) $2 \notin Q$.
e) Параллелограмм 4 қабырғаға ие;
f) 37 – жай сан;
g) Сенің бойың неше сантиметр?
h) Барлық квадраттар төртбұрыш; i) Қар жауып жатыр ма?
j) Төрт бұрыш параллелограм емес; k) Сенің інің 13 жаста;

[1] T мен F әріптері, сәйкесінше, ағылшынша "true" (ақиқат), "false" (жалған) сөздерінің бас әріптері.

l) Саған тарихи кітаптар ұнайды ма?
m) Мәдина жақсы ән айтады;
n) Сен Самарқантта туылғансың;
o) Қарама-қарсы бұрыштар өзара тең;
p) Параллель тура сызықтар қиылысады.

33. Тұжырымдардың терістеуін жаз. Осы тұжырым мен терістеуінің ақиқат я жалған екенін анықта.

a) *p:* барлық төртбұрыштар параллелограм болады;
b) *q:* $\sqrt{5}$ – иррационал сан;
c) *r:* 7 – рационал сан;
d) *s:* 23–14=12;
e) *t:* 52:4=13;
f) *u:* кез келген екі жұп санның айырмасы тақ болады;
g) *p:* ізбе-із келген натурал сандардың көбейтіндісі әрдайым жұп сан болады;
h) *q:* барлық доғал бұрыштар өзара тең;
i) *r:* барлық трапециялар параллелограмм болып табылады;
j) *s:* егер үшбұрыштың екі бұрышы өзара тең болса, ол теңбүйірлі болады;

34. $x, y \in \mathbb{R}$ болсын. Тұжырымның терістеуін жаз:

a) $x > 5$;
b) $x \geqslant 3$;
c) $y < 8$;
d) $y \leqslant 10$.

35. Берілген *r, s* тұжырымдар үшін *s* тұжырым *r* тұжырымның терістеуі бола ма ?
Егер s тұжырым *r* тұжырымның терістеуі болмаса, *r* тұжырымның дұрыс терістеуін тап.

a) *r:* Мәдинаның бойы 140 см-ден биік; *s:* Мәдинаның бойы 140 см-ден төмен;
b) *r:* Акбар футболмен шұғылданады; *s:* Акбар музыкамен шұғылданады;
c) *r:* Мен бүгін қара шай іштім; *s:* Мен бүгін көк шай іштім;
d) *r:* Мен Самарқантта болғанмын; *s:* Мен ешқашан Самарқантта болған емеспін.

2-мысал.

Тұжырымның терістеуін құрастыр:

a) x – қауын, $x \in$ {*қауындар, қарбыздар*}; b) $x \geqslant 2, x \in \mathbb{N}$; c) $x \geqslant 2, x \in \mathbb{Z}$;

△ a) x – қарбыз; b) $x = 1$; c) $x < 2$ және $x \in \mathbb{Z}$. ▲

Жаттығу

36. Тұжырымның терістеуін құрастыр.

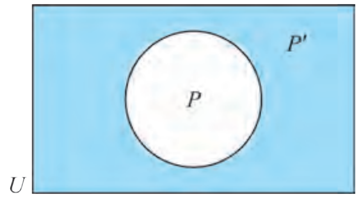
a) $x \in \{1, 2, 3, 4\}$; b) $x \in$ {*жылқылар, қойлар*};

c) $x \geqslant 0, x \geqslant \mathbb{Z}$; d) x – оқушы ұл, $x \in$ {*оқушылар*};

e) x – оқушы қыз, $x \in$ {*қыздар*}.

Тұжырымның терістеуін Венн диаграммасын пайдаланып құрастыруға болады.

Мысалы, *p:* "*x* сан 10-нан үлкен" деген тұжырымды қарастырайық.

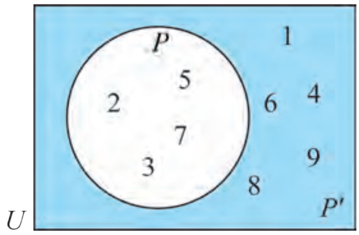


Диаграммада U – барлық сандардың жиыны, P жиын p тұжырымның **ақиқат жиыны**, яғни ол ақиқат тұжырым болатын x-тардың жиыны, P' жиын деп $\neg p$ терістеудің ақиқат жиыны өрнектелген.

3-мысал. $U = \{ x \mid 0 < x < 10, x \in \mathbb{N}\}$-дағы p: x – жай сан тұжырымын қарастырайық. p мен $\neg p$-ның ақиқат жиынын тап.

△ P жиын p тұжырымның ақиқат жиыны, P' жиын $\neg p$ терістеудің ақиқат жиыны болсын. Бұл жағдайда $P = \{2, 3, 5, 7\}$, $P' = \{1, 4, 6, 8, 9\}$.

Осы жиындар Венн диаграммасында төмендегідей өрнектеледі:



▲

Жаттығулар

37. Тұжырымдардың терістеуін құрастыр, Венн диаграммасында өрнекте:

a) $U = \{ x \mid 20 < x < 30\}$-дағы p: x – жай сан;

b) $U = \{ x \mid 1 < x < 10\}$-дағы p: x – жұп сан.

38. U = {*10-сынып оқушылары*}, M = {*музыка үйірмесіне қатысатын оқушылар*}, O = {*оркестрде музыка орындайтын оқушылар*} болса, төмендегі тұжырымдарды Венн диаграммасында өрнекте:

a) музыка үйірмесіне қатысатын барлық оқушылар оркестрде музыка орындайды;

b) оркестрде музыка орындайтын оқушылардың ешбірі музыка үйірмесіне қатыспайды;

c) оркестрде музыка орындайтын оқушылардың барлығы музыка үйірмесіне қатыспайды.

39. $U = \{ x \mid 5 < x < 15, x \in \mathbb{N}\}$-дағы p: $x < 9$ тұжырымды Венн диаграммасында өрнекте және $\neg p$ терістеудің ақиқат жиыны элементтерін жаз.

40. $U = \{ x \mid x < 10, x \in \mathbb{N}\}$-дағы p: x – жұп сан тұжырымды Венн диаграммасында өрнекте және терістеудің ақиқат жиыны элементтерін жаз.

Конъюнкция

Егер екі тұжырым **"және" ("мен")** сөзімен жалғанса, пайда болған жаңа тұжырым берілген тұжырымдар *конъюнкциясы* делінеді.

p, q тұжырымдардың конъюнкциясы $p \wedge q$ түрінде белгіленеді.

Мысалы,

p: Елдар түскі асқа палау жеді;

q: Елдар түскі асқа самса жеді.

Тұжырымдардың конъюнкциясы төмендегідей болады:

p∧q: Елдар түскі асқа палау және самса жеді.

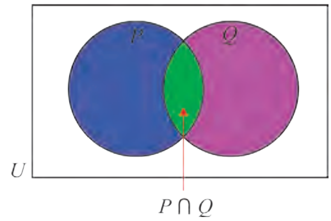
Көрініп тұрғанындай, $p \wedge q$ тұжырым Елдар түскі тамаққа палау да, самса да жеген кезінде, яғни p, q тұжырымдардың екеуі де ақиқат болғанда ғана ақиқат болады. Егер p, q тұжырымдардың бірі жалған болса, онда $p \wedge q$ тұжырым ақиқат болмайды.

p, q тұжырымдардың конъюнкциясы төмендегі ақиқат кестесіне ие:

p	q	$p \wedge q$	
T	T	T	p, q тұжырымдардың екеуі де ақиқат болғанда $p \wedge q$ ақиқат болады.
T	F	F	p, q тұжырымдардың біреуі жалған болғанда $p \wedge q$ тұжырым жалған болады.
F	T	F	
F	F	F	

Бірінші және екінші бағандар p, q тұжырымдардың мүмкін болған ақиқат мәндерінен құралған.

Диаграммада P жиын p тұжырымның, ал Q жиын q тұжырымның ақиқат жиыны болса, $p \wedge q$ тұжырымның ақиқат жиыны екі тұжырым ақиқат болған $P \cap Q$ жиын болады:



Жаттығулар

41. Төмендегі тұжырымдардың конъюнкциясын жаз:

a) p: Мәдина – терапевт; q: Муниса – стоматолог;
b) p: x сан 15-тен үлкен; q: x сан 30-дан кіші;
c) p: ауа бұлтты; q: жаңбыр жауып жатыр;
d) p: Ғалымның шашы қара; q: Ғалымның көзі көк.

42. $p \wedge q$ тұжырымның ақиқат-жалған екенін анықта:

a) p: 5 – тақ сан; q: 5 – жай сан;
b) p: квадрат төрт қабырғаға ие; q: үшбұрыш бес қабырғаға ие;
c) p: $39 < 27$; q: $16 > 23$;
d) p: 12 саны 3-ке бөлінеді; q: 12 саны 4-ке бөлінеді;
e) p: $5+8 = 12$; q: $6+9 = 15$.

43. $U = \{ x \mid 1 \leqslant x \leqslant 12, x \in \mathbb{Z}\}$ үшін p: x – жұп сан, q: x саны 7-ден кіші тұжырымдары берілген.

a) Венн диаграммасында p, q тұжырымдардың ақиқат жиынын;
b) $p \wedge q$ тұжырымның ақиқат жиынын өрнекте.

Дизъюнкция

Егер екі тұжырым **"немесе"** (**"яки"**) сөзімен жалғанса, пайда болған жаңа тұжырым берілген тұжырымдар *дизъюнкциясы* делінеді.

p, q тұжырымдардың дизъюнкциясы $p \vee q$ түрінде белгіленеді.

Мысалы,

p: Елдар бүгін кітапханаға барды; *q: Елдар бүгін театрға барды.*

Тұжырымдардың дизъюнкциясы төмендегідей өрнектеледі:

p∨q: Елдар бүгін кітапханаға немесе театрға барды.

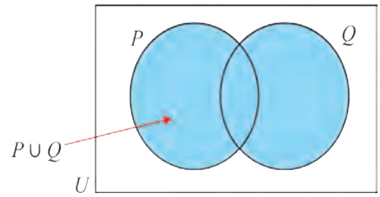
Көрініп тұрғанындай, $p \vee q$ тұжырым Елдар бүгін кітапханаға немесе театрға, яки екеуіне де барғанда ақиқат болады.

Егер p, q тұжырымдардың екеуі де жалған болса, онда $p \vee q$ тұжырым ақиқат болмайды.

p, q тұжырымдардың дизъюнкциясы төмендегі ақиқат кестесіне ие:

p	q	$p \vee q$	
T	T	T	p, q тұжырымдардың біреуі ақиқат болғанда $p \vee q$ ақиқат болады.
T	F	T	
F	T	T	
F	F	F	p, q тұжырымдардың екеуі де жалған болғанда $p \vee q$ тұжырым жалған болады.

Диаграммада P жиын p тұжырымның, ал Q жиын q тұжырымның ақиқат жиындары болса, $p \vee q$ тұжырымның ақиқат жиыны олардың кемінде біреуі ақиқат болған $P \cup Q$ жиын болады:



Жаттығулар

44. $p \vee q$ тұжырымның ақиқат-жалған екенін анықта:

a) p: 24 саны 4-ке бөлінеді, q: 24 саны 6-ға бөлінеді;

b) p: $-8>-5$, q: $5<0$.

45. $p \vee q$ тұжырымның ақиқат-жалған екенін анықта:

a) p: 5 және 9 сандарының арифметикалық орта мәні 7-ге тең, q: 8 және 14 сандарының арифметикалық орта мәні 10-ға тең;

b) p: $5+8 = 12$, q: $6+9 = 15$.

46. $U = \{ x \mid 1 \leqslant x \leqslant 20, x \in \mathbb{Z}\}$ үшін:

p: x сан 3-ке еселі, q: x – жай сан тұжырымдарын қарастырайық.

a) Венн диаграммасында p, q тұжырымдарының ақиқат жиындарын өрнекте;

b) **I** $\neg p$; **II** $p \vee q$; **III** $p \wedge q$ тұжырымның ақиқат жиындарын өрнекте.

47. $U = \{ x \mid 1 \leqslant x \leqslant 12, x \in \mathbb{Z}\}$ үшін:

p: x – жай сан, q: x сан 12-нің бөлгіші тұжырымдарын қарастырайық.

a) Берілген Венн диаграммасында p, q тұжырымдардың ақиқат жиындарын өрнекте;

b) **I** $\neg p$; **II** $p \vee q$; **III** $p \wedge q$ тұжырымның ақиқат жиындарын өрнекте.

48. x: Сардар ертең жүзуге барады;

y: Сардар ертең футболға барады.

Төмендегілерді x, y және $\neg$, $\vee$, $\wedge$ логикалық жалғауларымен өрнекте:

a) Сардар ертең жүзуге бармайды;

b) Сардар ертең жүзуге және футболға барады;

c) Сардар ертең жүзуге немесе футболға барады;

d) Сардар ертең жүзуге де, футболға да бармайды;

e) Сардар ертең жүзуге барады, бірақ футболға бармайды

49. Сөйлемдерді $\neg$, $\vee$, $\wedge$ логикалық жалғаулардың көмегімен өрнекте:

a) Сардарға балмұздақ және салқын ішімдіктер ұнайды;

b) Сардарға балмұздақ ұнайды, бірақ салқын ішімдіктер ұнамайды;

c) x саны 10-нан үлкен болған жай сан;
d) компьютер істемей тұр.

50. Мына тұжырымдар Сардардың түспалдық күн тәртібін белгілейді:
p: Сардар ерте тұрды;
q: Сардар таңғы асқа каймақ жеді;
r: Сардар түскі асқа сорпа ішті;
s: Сардар кешкі асқа палау жеді;
u: Сардар спортпен шұғылданды;
v: Сардар кітап оқыды.
Төмендегілерді табиғи тілде өрнекте (айт):
a) q; b) s; c) $q \wedge u$; d) $r \wedge s$; e) $r \vee s$; f) $u \vee v$

8-9 ЛОГИКАЛЫҚ ТЕПЕ-ТЕҢДІК. ЛОГИКАЛЫҚ ЗАҢДАР

Мағынасына қарай табиғи тілдегі қарапайым тұжырымдарды әріптермен еркін белгілеп терістеу, конъюнкция және дизъюнкция сияқты логикалық жалғаулардың көмегімен күрделірек тұжырымдардың ақиқат-жалған екеніне көңіл бөлместен символдық (рәміздік) көріністерін құрастырайық.

Табиғи тілдегі тұжырым	Символдық түрі
Терістеу: 1. Сәлім үйде **емес**. 2. Қаржы оңайлықпен табыл**ма**йды. 3. Рәшиттің кітап оқып жатқаны **дұрыс емес**. 4. Мәриямның Бұхарада екендігі **жалған**.	$\neg S$ $\neg M$ $\neg R$ $\neg B$
Конъюнкция: 5. Акмал **және** Сүннәттің екеуі де оқытушы. 6. Бабыр **және** Әлі спортпен шұғылданады. 7. Бабыр күшті, **бірақ** Әлі одан күштірек. 8. Барлық медиа (ақпарат) құралдары қарсы болса **да**, "Барселона" футбол клубы ең жақсы клуб деп табылды.	$A \wedge S$ $B \wedge A$ $B \wedge A$ $M \wedge B$
Дизъюнкция: 10. Раъно метрода **немесе** автобуста келеді. 11. Бабыр **немесе** Әлі спорттың осы түрін таңдады.	$M \vee A$ $B \vee A$

Терістеу, конъюнкция мен дизъюнкцияға ақиқат кестелерін жалпылап, күрделірек тұжырымдар үшін ақиқат кестелерін құруға болады:

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	F

1-мысал. $p \vee \neg q$ тұжырымның ақиқат кестесін құрастыр.

1-қадам

Бірінші және екінші бағаны p мен q-лардың мүмкін болған ақиқат мәндерінен құралған кестені жазамыз:

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$
T	T		
T	F		
F	T		
F	F		

2-қадам

Үшінші бағандағы q-ның ақиқат мәндеріне қарай $\neg q$-ның ақиқат мәндерін жазамыз:

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$
T	T	F	
T	F	T	
F	T	F	
F	F	T	

3-қадам

Төртінші бағандағы p мен $\neg q$-ның ақиқат мәндеріне қарай $p \vee \neg q$-ның ақиқат мәндерін жазамыз:

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$
T	T	F	T
T	F	T	T
F	T	F	F
F	F	T	T

Әрдайым ақиқат болған тұжырым ***логикалық заң немесе тавтология*** делінеді.
Тұжырымның логикалық заң екенін ақиқат кестесінің көмегімен дәлелдеуге болады.

2-мысал. $p \vee \neg p$ тұжырым тавтология екенін дәлелде.

Ақиқат кестесін құрастырамыз: $p \vee \neg p$ тұжырым әрдайым ақиқат мәнді (үшінші бағанға қара) қабылдағаны үшін ол тавтология болады.

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
T	F	T
F	T	T

Екі тұжырымның ақиқат кестелеріндегі сәйкес бағандар бірдей болса, бұл тұжырымдар логикалық **тепе-тең** делінеді.

3-misol. $\neg(p \wedge q)$ және $\neg p \vee \neg q$ тұжырымдар логикалық тепе-тең екенін дәлелде.

$\triangle$ $\neg(p \wedge q)$ және $\neg p \vee \neg q$ тұжырымдар үшін ақиқат кестелерін құрастырамыз:

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
T	T	T	F	T	T	F	F	F
T	F	F	T	T	F	F	T	T
F	T	F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	T	F	F	T	T	T

$\neg(p \wedge q)$ және $\neg p \vee \neg q$ тұжырымдардың ақиқат кестеляріндегі сәйкес бағандар бірдей, демек, бұл тұжырымдар логикалық тепе-тең.
Осы қатынасты $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$ түрінде жазамыз. $\blacktriangle$

Жаттығулар

51. Тұжырымдар үшін ақиқат кестелерін құрастыр:
a) $\neg p \wedge q$; b) $\neg(p \vee q)$; c) $\neg p \vee \neg q$; d) $p \vee p$.

52. Тұжырымдар тавтология бола ма:
a) $\neg p \wedge \neg q$; b) $(p \vee q) \vee \neg p$; c) $p \wedge \neg q$?

53. Логикалық тепе-теңдікті дәлелде:
a) $\neg(\neg p) = p$; b) $p \wedge q = p$; c) $p \vee (\neg p \wedge q) = p \vee q$;
d) $\neg(q \wedge \neg p) = \neg q \wedge (p \vee q)$.

54. Мынадай тұжырымдар берілген болсын:
p: Сардар алманы жақсы көреді;
q: Сардар жүзімді жақсы көреді.
Төмендегі тұжырымдарды табиғи тілде өрнекте:
a) $p \vee q$; b) $\neg(p \vee q)$; c) $\neg p$; d) $\neg p \wedge \neg q$.

55. Ақиқат кестесін құрастырып, $\neg(p \vee q)$ және $\neg p \wedge \neg q$ тұжырымдардың логикалық тепе-тең екенін дәлелде.

10–11 ИМПЛИКАЦИЯ, КОНВЕРСИЯ, ИНВЕРСИЯ ЖӘНЕ КОНТРАПОЗИЦИЯ

Импликация

Екі тұжырым "егер ... болса, онда …" тіркесімен жалғанса, осы жағдайда тұжырымдар ***импликациясына*** ие боламыз.

"Егер p болса, онда q" импликациялық тұжырым $p \Rightarrow q$ түрінде белгіленеді және "p-дан q туындайды", "p тұжырым q үшін жеткілікті", "q тұжырым p үшін қажетті" мағыналарын да білдіреді.

Мұнда p тұжырым q үшін ***жеткілікті шарт***, q тұжырым p үшін ***қажетті шарт*** деп айтылады.

Мысалы, *p: Сардардың теледидары бар*; *q: Сардар кино көреді* тұжырымдары үшін

$p \Rightarrow q$: Сардардың теледидары болса, ол кино көреді

тұжырымын білдіреді.

Дәл солай $p \Rightarrow q$: *Сардар кино көруі үшін онда теледидар болуы жеткілікті* тұжырымын пайда етеміз.

$p \Rightarrow q$ тұжырым тек p ақиқат болып, q жалған болса ғана, p тұжырым ақиқат болғаны үшін төмендегі ақиқат кестесін пайда етеміз:

p	q	$p \Rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Қарапайым тұжырымдар мен логикалық жалғаулардың көмегімен ақиқат-жалған екеніне көңіл бөлмей күрделірек тұжырымды құрастыруға болады.

1-мысал. p: *"Анаргүл кинофильмдерді көп көреді"*; q: *"Барно кинофильмдерді көп көреді"*; r: *"Барно емтиханнан өте алмайды"*; s: *"ғажайып оқиға болады"* тұжырымдары берілген болсын.

Бұл жағдайда төмендегілерге ие боламыз:

1. $p \wedge \neg q$: *"Анаргүл кинофильмдерді көп көреді, ал Барно жоқ"*.
2. $p \Rightarrow \neg q$: *"Анаргүл кинофильмдерді көп көрсе, Барно кинофильмдерді көп көрмейді"*.
3. $p \Rightarrow (r \vee s)$: *"Барно кинофильмдерді көп көрсе, емтиханнан өте алмайды немесе ғажайып оқиға болады"*.
4. $(p \wedge \neg s) \Rightarrow r$: *"Барно кинофильмдерді көп көрсе және ғажайып оқиға болмаса, онда Барно емтиханнан өте алмайды"*.
5. $(q \wedge s) \vee r$: *"Барно кинофильмдерді көп көреді және ғажайып оқиға болады немесе Барно емтиханнан өте алмайды"*.

Эквиваленция

$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ көрінісіндегі тұжырым p және q тұжырымдардың эквиваленциясы делінеді және $p \Leftrightarrow q$ түрінде белгіленеді.

$p \Leftrightarrow q$ өрнегі "p тұжырым q үшін қажетті және жеткілікті" немесе "p тұжырым q болса ғана орынды болады", деп оқылады.

2-мысал. *p: x* – жұп сан, *q: x санның соңғы цифры жұп* тұжырымдары үшін $p \Leftrightarrow q$ тұжырым қалай оқылады?

$p \Leftrightarrow q$: *x жұп сан болса, оның соңғы цифры жұп болады;*

$q \Leftrightarrow p$: *x санның соңғы цифры жұп болса, ол жұп болады.*

тұжырымдарын қарастырсақ, $p \Leftrightarrow q$ өрнегі "x сан жұп болғаны үшін оның соңғы цифры жұп болуы қажетті және жеткілікті" немесе "x сан оның соңғы цифры жұп болса ғана жұп болады" деп оқылады.

Ал енді кез келген p және q тұжырымдар берілген болса $(p\Rightarrow q) \wedge (q\Rightarrow p)$ тұжырым үшін ақиқат кестесін құрастырамыз:

p	q	$p\Rightarrow q$	$q\Rightarrow p$	$(p\Rightarrow q) \wedge (q\Rightarrow p)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

Демек, $p\Leftrightarrow q$ тұжырымның ақиқат кестесі төмендегідей болады. Көрініп тұрғанындай, $p\Leftrightarrow q$ тұжырым p және q тұжырымдардың ақиқат мәндері бірдей (яғни екеуі де ақиқат немесе екеуі де жалған) болса ғана ақиқат болады.

p	q	$p\Leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

Жаттығулар

56. Төмендегі импликациялық тұжырымдардағы қажетті және жеткілікті шарттарды анықта және осы тұжырымдарды "қажетті", "жеткілікті" сөздерін пайдаланып өзгертіп өрнекте:

a) егер мен таңғы автобусқа үлгермесем, мектепке кешігемін;
b) егер температура жеткілікті төмендесе, арықтағы су мұздайды;
c) егер $x > 20$ болса, $x > 10$ болады;
d) егер мен гол соқсам, біздің командамыз жеңіске жетуі мүмкін.

57. $p\Rightarrow q$ тұжырымды табиғи тілде өрнекте:

a) p: күн жарқырайды, q: мен шомылуға барамын;
b) p: x сан 6-ға бөлінеді, q: x – жұп сан;
c) p: тоңызатқышта жұмыртқалар бар, q: Мәдина торт пісіреді.

58. a) $p\Rightarrow \neg q$; b) $\neg q\Rightarrow \neg p$; c) $(p\vee q)\Rightarrow p$;
d) $q\wedge(p\Rightarrow q)$; e) $p\Leftrightarrow \neg q$; f) $(p\Leftrightarrow q)\wedge \neg p$;
g) $p\Rightarrow(p\wedge\neg q)$; h) $(p\Rightarrow q) \Rightarrow\neg p$

тұжырымдардың ақиқат кестесін құрастыр.

59. Тұжырымдарды символдық түрде өрнекте:

p: жаңбыр жауды, q: көлшіктер пайда болды;

a) жаңбыр жауса, көлшіктер пайда болады;
b) көлшіктер пайда болды, демек, жаңбыр жауды;
c) көлшіктер жоқ;
d) жаңбыр жаумады;
e) егер жаңбыр жаумаса, көлшіктер пайда болмайды;
f) егер көлшіктер пайда болмаса, жаңбыр жаумаған;

g) егер көлшіктер пайда болмаса, жаңбыр жауады;
h) көлшіктер пайда болуы үшін жаңбыр жауууы қажет және жеткілікті.

60. Ақиқат кестелерін құрастырып,
$\neg p \Rightarrow q = p \vee q$;
$p \Leftrightarrow q = (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ екенін дәлелде.

61. $q \Rightarrow p$ тұжырымға логикалық тепе-тең тұжырымды тап:
a) $p \Rightarrow q$; b) $\neg q \Rightarrow p$;
c) $q \Rightarrow \neg p$; d) $\neg(\neg p \Rightarrow \neg q)$.

62. Тұжырымдардың қай бірі әрдайым ақиқат, әрдайым жалған болады?
a) $p \Rightarrow (\neg p \wedge q)$; b) $p \wedge q \Rightarrow p \vee q$;
c) $(p \Rightarrow \neg q) \vee (\neg p \Rightarrow q)$.

Конверсия

$p \Rightarrow q$ тұжырымның ***конверсиясы*** деп $q \Rightarrow p$ тұжырымға айтылады.
Конверсия төмендегі ақиқат кестесіне ие:

p	q	$q \Rightarrow p$
T	T	T
T	F	T
F	T	F
F	F	T

3-мысал.
p: үшбұрыш теңбүйірлі,
q: үшбұрыштың екі бұрышы тең тұжырымдарын қарастырайық.
$p \Rightarrow q$ тұжырымын және оның конверсиясын табиғи тілде өрнекте.

△ $p \Rightarrow q$: Егер үшбұрыш теңбүйірлі болса, онда оның екі бұрышы тең.
$q \Rightarrow p$: Егер үшбұрыштың екі бұрышы тең болса, онда мұндай үшбұрыш теңбүйірлі болады. ▲

Инверсия

$p \Rightarrow q$ тұжырымның ***инверсиясы*** деп $\neg p \Rightarrow \neg q$ тұжырымға айтылады.
Инверсия төмендегі ақиқат кестесіне ие:
Бұл кесте $q \Rightarrow p$ тұжырымның ақиқат кестесімен дәлме-дәл түседі, демек, конверсия мен инверсия логикалық тепе-тең екен.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \Rightarrow \neg q$
T	T	F	F	T
T	F	F	T	T
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

Контрапозиция

$p \Rightarrow q$ тұжырымның контрапозициясы деп $\neg q \Rightarrow \neg p$ тұжырымға айтылады.

Контрапозиция төмендегі ақиқат кестесіне ие:

Бұл кесте $p \Rightarrow q$ тұжырымның ақиқат кестесімен дәлме-дәл түседі, демек, импликация мен контрапозиция логикалық тепе-тең екен.

p	q	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \Rightarrow \neg p$
T	T	F	F	T
T	F	T	F	F
F	T	F	T	T
F	F	T	T	T

4-мысал. "Барлық оқытушылар мектепке жақын жерде жасайды" тұжырымның контрапозициясын құрастыр.

Осы тұжырымды төмендегідей өрнектеуге болады: "Егер бұл адам оқытушы болса, ол мектепке жақын жерде жасайды".

Бұл хабарлы сөйлем $p \Rightarrow q$ пішінге ие, мұнда:

p: Бұл адам – оқытушы, q: Бұл адам мектепке жақын жерде жасайды.

$\neg q \Rightarrow \neg p$ контрапозиция төмендегідей өрнектеледі:

"Егер бұл адам мектепке жақын жерде жасамайтын болса, онда ол оқытушы емес".

5-мысал. p: *Самандар кітапханада,*

q: *Самандар кітап оқып жатыр*

тұжырымдарын қарастырайық. Ол үшін импликация, конверсия, инверсия және контрапозицияны құрастыр.

Импликация $p \Rightarrow q$	Самандар кітапханада болса, ол кітап оқиды.
Конверсия $q \Rightarrow p$	Самандар кітап оқыса, ол кітапханада болады.
Инверсия $\neg p \Rightarrow \neg q$	Самандар кітапханада болмаса, ол кітіп оқымайды.
Контрапозиция $\neg q \Rightarrow \neg p$	Самандар кітап оқымай жатқан болса, ол кітапханада болмайды.

Импликация мен конверсия логикалық тепе-тең болмайтынын айту қажет, өйткені, мысалы, Самандар кітапты сыныпта оқуына да болады.

Жаттығулар

63. Конверсия мен инверсияны құрастыр:

a) егер Динара камзол кисе, ол қызады;

b) егер екі үшбұрыш ұқсас болса, олардың сәйкес бұрыштары тең болады;

c) егер $2x^2 = 12$ болса, онда $x = \pm\sqrt{6}$ болады;

d) егер Ғалым ойын ойнаса, ол қуанады;

e) егер үшбұрыш тұрақты болса, онда оның қабырғалары тең болады.

64. Төмендегі тұжырымдардың контрапозицияларын құрастыр:

a) барлық әтіргүлдер тікенді;

b) барлық судьялар (төрешілер) әрдайым дұрыс қаулы шығарады;

c) барлық жақсы футболшылар допты нысанаға дәл тебеді;

d) сұйықтық ыдысқа құйылғанда ыдыстың пішініне енеді;

e) егер адам адал және білімді болса, ол табысқа жетеді.

65. a) "барлық 10-сынып оқушылары математиканы үйренді" тұжырымның контрапозициясын құрастыр;

b) "барлық 10-сынып оқушылары математиканы үйренді" тұжырым ақиқат болса, төмендегілер туралы қандай пікірге келесің:

"Шавкат – 10-сынып оқушысы";

"Мірислам математиканы үйренбейді";

"Данияр математиканы да, ағылшын тілін де үйренуде"?

66. Тұжырымдардың контрапозицияларын құрастыр:

a) x сан 3-ке бөлінеді $\Rightarrow x^2$ саны 9-ға бөлінеді;

b) x санының соңғы саны 2 болса: $\Rightarrow x$ − жұп сан;

c) $ABCD$ − тік төртбұрыш $\Rightarrow AB||CD$ және $AD||BC$;

d) ABC − дұрыс үшбұрыш $\Rightarrow \angle ABC = 60°$.

67. p: Үй ең көбі 3 терезелі болады,

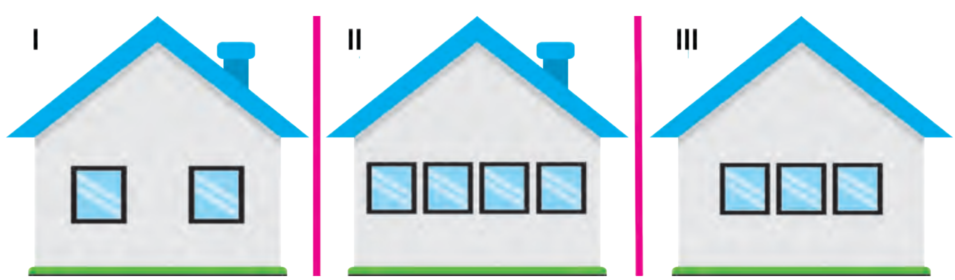
q: Үй сыртына түтін шығаратын құбырға ие

тұжырымдарын қарастырайық.

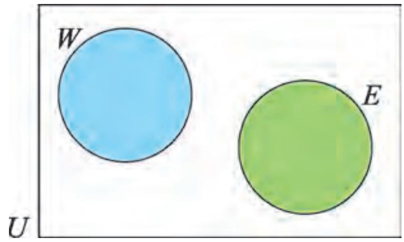
Мұнда $p \Rightarrow q$: Егер үй ең көбі 3 терезелі болса, ол сыртқа түтін шығаратын құбырға ие ;

a) конверсия, инверсия және контрапозиция құрастыр;

b) төмендегі жағдайларда импликация, конверсия, инверсия мен контрапозиция үшін ақиқат-жалған екенін анықта:



68. Диаграммада W – білімді төмен игерген оқушыларды, ал E 10-сынып оқушылары жиынын өрнектейді.
Төмендегі тұжырымдарды толықтыр:



a) .... игерген оқушылар жоқ;
b) .... игерген 10-сынып оқушылары жоқ;
c) егер $x \in W$ болса, онда ......;
d) егер $x \in E$ болса, онда ......;
e) c және d қатынастардың арасында қандай байланыс бар?

12-13 ПРЕДИКАТТАР ЖӘНЕ КВАНТОРЛАР

Предикаттар және кванторлар

Кейбір тұжырымдарға айнымалылар қатысып, осы айнымалылардың орнына нақты мәндерді қойсақ, ақиқат-жалған екені анықталған тұжырым пайда болады. Мұндай тұжырымға ***предикат*** делінеді.

1-мысал. $P(x)$: "$x^2 > x$" предикат болса,
$P(2)$, $P(\frac{1}{2})$, $P(-\frac{1}{2})$ тұжырымдардың ақиқат-жалған екенін анықта.

△ $P(2)$: $2^2>2$ – ақиқат. $P(\frac{1}{2})$: $(\frac{1}{2})^2>\frac{1}{2}$ – жалған. $P(-\frac{1}{2})$: $(-\frac{1}{2})^2>-\frac{1}{2}$ – ақиқат. ▲

Кейбір предикаттарда айнымалыны оның мағынасына қарай анықтайды.

Мысалы, "Бұл жазушы Ташкентте туылған" және "Ол Ташкентте туылған" хабарлы сөйлемдерінде айнымалы "Бұл жазушы" сөз тіркесі немесе "Ол" есімдігі. Олардың орнына "Абдулла Қадыри" мәнін қойсақ, "Абдулла Қадыри Ташкентте туылған" ақиқат тұжырымды, "Шекспир" мәнін қойсақ, "Шекспир Ташкентте туылған" жалған тұжырымды пайда етеміз.

x арқылы айнымалыны белгілесек, жоғарыдағы хабарлы сөйлемдерді "x Ташкентте туылған" түрінде өрнектеуге болады.

Предикатта бір немесе бірнеше айнымалы қатысуы мүмкін, қатысқан айнымалыларға қарай предикат $P(x)$, $P(x,y)$, $P(x,y,z)$, ... ретінде белгіленеді.

Предикаттармен бірге ∀ (жалпылық кванторы, "барлық ... -лар үшін") және ∃ (бар болу кванторы, "кейбір ... -лар бар болып") арнаулы белгілерді пайдаланып, жаңа тұжырымдар пайда етіледі. Мысалы, $\forall x P(x)$ түріндегі жаңа тұжырым x-тің барлық мәндері үшін $P(x)$ екенін, ал $\exists x P(x)$ түріндегі жаңа тұжырым x-тің $P(x)$ болатын мәні бар екенін білдіреді.

Мысалы, $P(x)$: "x Самарқантта туылған" предикатын қарастырайық. Мұнда $\forall x P(x)$ түріндегі жаңа тұжырым "барлығы Самарқантта туылған" ретінде, ал $\exists x P(x)$ түріндегі жаңа тұжырым "кейбір адамдар бар болып, олар Самарқантта туылған" ретінде оқылады.

$\forall x P(x)$, $\exists x P(x)$ түріндегі тұжырымдардың ақиқат-жалған екенін анықтау үшін мысалдар келтіреміз.

2-мысал.

$D = \{1,2,3,4,5\}$ болса, $\forall x \in D,\ x^2 \geqslant x$ тұжырымның ақиқат екенін дәлелде.

△ Көрініп тұрғанындай,

$1^2 \geqslant 1, \quad 2^2 \geqslant 2, \quad 3^2 \geqslant 3, \quad 4^2 \geqslant 4, \quad 5^2 \geqslant 5.$

Демек, $\forall x \in D,\ x^2 \geqslant x$ тұжырым ақиқат екен. ▲

$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant x$ тұжырымның жалған екенін дәлелдеу үшін x-тің ол жалған болатын бір ғана мәнін табу жеткілікті екенін айту қажет.

Шынында да, $x = \frac{1}{2}$ болғанда $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}$ болады.

x-тің $\forall x P(x)$ тұжырымның жалған екенін көрсететін қандай да бір мәні ***контрмысал*** делінеді.

3-мысал. $\exists m \in \mathbb{Z},\ m^2 \geqslant m$ тұжырымның ақиқат екенін дәлелде.

△ $1^2 = 1$ болғаны үшін, $\exists m \in \mathbb{Z},\ m^2 \geqslant m$ тұжырым ақиқат екен.

Егер $E = \{5,6,7,8\}$ болса, $\exists m \in E,\ m^2 \geqslant m$ тұжырым жалған, өйткені

$5^2 = 25 \neq 5; \quad 6^2 = 36 \neq 6; \quad 7^2 = 49 \neq 7; \quad 8^2 = 64 \neq 8.$ ▲

Терістеу амалына қатысты екі маңызды логикалық заңды келтіреміз:

$$\neg(\exists x P(x)) = \forall x(\neg P(x)), \qquad \neg(\forall x P(x)) = \exists x(\neg P(x)).$$

Осы заңдардың мағынасын түсіну үшін мысал келтірейік.

$P(x)$: "x сыныптасым үлгілі оқушы" предикатын қарастырайық.

$\neg(\exists x P(x))$ өрнегі "сыныптастарымның ішінде үлгілі оқушы жоқ" тұжырымды, ал $\forall x(\neg P(x))$ өрнегі оған тепе-тең тұжырым болған "Барлық сыныптастарым үлгілі оқушы емес" тұжырымды білдіреді.

Дәл солай, $\neg(\forall x P(x))$ формула "Барлық сыныптастарым үлгілі оқушы екені қате" тұжырымды, ал $\exists x(\neg P(x))$ формула оған тепе-тең тұжырым болған "Кейбір сыныптастарым үлгілі оқушы емес" тұжырымын білдіреді.

Көрініп тұрғанындай, $P(x,y)$ предикаттан кванторлардың көмегімен

$$\forall x P(x,y), \qquad \forall y P(x,y), \qquad \exists x P(x,y), \qquad \exists y P(x,y)$$

түріндегі бір айнымалылы предикаттарды, ал олардан, өз кезегінде,

$$\forall x \exists y P(x,y), \quad \exists y \forall x P(x,y), \quad \exists x \forall y P(x,y), \quad \forall y \exists x P(x,y),$$
$$\forall x \forall y P(x,y), \quad \forall y \forall x P(x,y), \quad \exists x \exists y P(x,y), \quad \exists y \exists x P(x,y)$$

түріндегі тұжырымдарды құруға болады.

Тіпті $\forall x \forall y P(x,y)$, $\forall y \forall x P(x,y)$ және $\exists x \exists y P(x,y)$, $\exists y \exists x P(x,y)$ тұжырымдардың мағыналары бірдей болса да, $\forall x \exists y P(x,y)$, $\exists y \forall x P(x,y)$ тұжырымдар тепе-тең емес екен.

$P(x,y)$*: ол адам x сыныптасымның әкесі* предикатын қарастырайық.

Мұнда $\forall x \exists y P(x,y)$ = "*кез келген сыныптасымның әкесі бар*"; $\exists y \forall x P(x,y)$ "*кейбір адам бар болып, ол барлық сыныптасымның әкесі болады*" тұжырымдарды білдіреді.

Дәл солай, $\exists x \forall y P(x,y)$, $\forall y \exists x P(x,y)$ тұжырымдар тепе-тең емес екенін көруге болады (өз бетіңше мысалдар келтір).

Предикаттар мен кванторлардың көмегімен логикалық заңдарды пайда етуге болады.

Мысалы, "Егер барлық қарғалар қара болса, қара болмаған құстардың ешбірі қарға емес" тұжырымы

$$\forall x(A(x) \Rightarrow B(x)) \Rightarrow \forall x\, (\neg B(x) \Rightarrow \neg A(x))$$

логикалық заңға мысал бола алады.

Жаттығулар

69. Тұжырымдарды предикаттар мен кванторлардың көмегімен өрнекте:

a) кейбір құстар ұша алмайды;
b) кейбір жазушылар ақын емес;
c) кейбір шыбындар шақпайды;
d) барлық планеталар шар пішінінде;
e) барлық әскерлер күшті адамдар;
f) барлық хирургтер – дәрігер;
g) барлық аюлар бал жейді;
h) әрқандай шеңбер – жалпақ пішінде;
i) кейбір қояндар орамажапырақты сүйсініп жейді;
j) кейбір кітаптар қызықты;
k) барлық аналар балаларын еркелейді.

Осы тұжырымдардың терістеуін құрастыр.

70. Егер мүмкіндігі болса, тұжырымдарды жалғастыр:

a) ешбір сүтқоректі желбезегімен тыныс алмайды. Сазан желбезегімен тыныс алады. Демек, ...;

b) барлық адамның кемшілігі бар. Барлық корольдар — адамдар. Демек, ...;

c) қызыл түстегі гүлдердің иісі жоқ. Бұл гүлдің иісі жоқ. Демек, ...;

d) қасқырлар қозыларды жейді. Бұл жануар қозыны жейді. Демек, ...;

e) барлық планеталар – аспан денелері. Ай – планета емес. Демек, ...;

f) барлық металдар электр тогын жақсы өткізеді. Алтын – металл. Демек, ...;

g) барлық құстар жұмыртқалайды. Барлық құстар омыртқалы. Демек, ...;

h) егер адамның температурасы жоғары болса, ол науқастанған болады. Бұл адамның темпереатурасы жоғары. Демек, ...;

i) егер адамның температурасы жоғары болса, ол науқастанған болады. Бұл адам науқас емес. Демек, ...

71. $P(x,y)$: y адам x-тің перзенті, предикаттар берілген болсын. Тұжырымдарды табиғи тілде өрнекте:

a) $\exists z P(x,z) \wedge P(z,y)$; b) $\forall x\ \exists y\ P(x,y)$; c) $\forall x\ \exists y\ P(y,x)$.

72. $F(x,y)$: x адам y-ті өзінің досы деп санайды, предикаттар берілген болсын. Тұжырымдарды табиғи тілде өрнекте:

a) $\forall x \forall y F(x,y) \Rightarrow F(x,y)$;

b) $\forall x \exists y F(x,y)$;

c) $\exists y \forall x F(x,y)$;

d) $\forall x \exists y F(y,x)$;

e) $\exists y \forall x F(y,x)$;

f) $\forall y \exists x F(x,y)$;

g) $\exists x \forall y F(y,x)$.

73. $D(m,n)$: n бүтін сан m бүтін санға қалдықсыз бөлінеді, предикаттар берілген болсын. Тұжырымдардың қай бірі ақиқат:

a) $\forall m \forall n D(m,n)$;

b) $\forall n \exists m D(m,n)$;

c) $\exists m \forall n D(n,m)$;

d) $\exists n \forall m D(n,m)$;

e) $\forall n \exists m D(n,m)$;

f) $\exists m \forall n D(n,m)$,

74. Тұжырымдардың қайсылары дұрыс? Тиісті мысалдарды келтір.

a) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ \ x < y$;

b) барлық басқа сандардан кіші болған сан бар;

c) егер $\forall x \exists y P(x,y)$ болса , онда $\exists y \forall x P(x,y)$ болады.

14-15 ДҰРЫС ПІКІРЛЕУ (АРГУМЕНТАЦИЯ) ЗАҢДАРЫ. СОФИЗМДЕР ЖӘНЕ ПАРАДОКСТАР

Ойды дұрыс баяндауға ойлау заңдарының талаптарына мойынсұнғанда ғана қол жеткізуге болады. ***Ойлау заңы*** тұжырым жасау үдерісінде пікірлер (пікірлеу элементтері) арасында болатын қажетті байланыстардан құралған. Ойлау заңдарының мазмұнынан туындайтын, дұрыс тұжырым жасауға қажетті талаптар пікірдің нақты, дәйекті, жеткілікті дәрежеде негізделген болудан құралған.

Пікірлерде предмет пен оның қасиеті, предметтердің арасындағы қатынастар, предметтің бар немесе жоқ болуы туралы ой растау немесе теріске шығару түрінде өрнектеледі. Мысалы "Темір – металл" деген пікірде предмет (темір) пен оның қасиетінің (металл екені) арасындағы қатынас айтылған. Ал "Этика құқықтан бұрын пайда болған" деген пікірде екі предметтің (этика және құқық) арасындағы қатынас көрсетілген. Мазмұны әртүрлі болған бұл пікірлердің құрылысы бірдей: олардағы предмет туралы ұғымдар кешені (S) мен предмет белгісі туралы ұғым (P) арасындағы қатынас айтылған, яғни P-ның S-ға тән екені бекітілген.

Жалпы түрде пікір $S \Rightarrow P$ логикалық пішінде өрнектеледі.

Біз S тұжырымдар кешенін **негіз**, P тұжырымды **қорытынды** деп атаймыз. Пікірде негіз бен қорытынды "демек" байланыс сөзбен жалғанады.

Әдетте $S \Rightarrow P$ пікірде негіз бен қорытынды горизонталь сызықпен былай бөлінеді: $\dfrac{S}{P}$. Қарапайым мысал айтайық.

Егер Сабыр спортпен шұғылданса, оның дені сау болады.
Сабыр спортпен шұғылданып жатыр.
Демек, Сабырдың дені сау болады.
Осы пікірдің логикалық пішінін табайық.

p: Сабыр спортпен шұғылданып жатыр.
q: Сабырдың дені сау

тұжырымдарын қарастырсақ, пікір төмендегі көрініске ие болады:

$$\dfrac{\left.\begin{matrix} p\Rightarrow q \\ p \end{matrix}\right\}\ \textit{негіз}}{q\ \}\ \textit{қорытынды}}$$

$p \Rightarrow q$ және p тұжырымдардан q тұжырым келіп шыққаны үшін, пікір $(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$ логикалық пішінге ие.

Пікірдің ақиқат кестесін құрастырамыз:

p	q	$p\Rightarrow q$	$(p\Rightarrow q)\wedge p$	$(p\Rightarrow q)\wedge p\Rightarrow q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

Нәтижеде тавтологияны пайда еттік. Бұл жағдай пікірдің **дұрыстығын** көрсетті, яғни берілген негіздерден дұрыс қорытынды шыққанын білдірді.

1-мысал. Төмендегі пікірдің қателігін дәлелде:
Егер үшбұрыш үш қабырғаға ие болса, 2+4=7.
Демек, үшбұрыш үш қабырғаға ие.

△ Осы пікірдің логикалық пішінін анықтайық.
p: үшбұрыш үш қабырғаға ие.
q: 2+4=7

тұжырымдарды қарастырсақ, пікір төмендегі көрініске ие болады:

$$\left.\begin{array}{c} p\Rightarrow q \\ p \end{array}\right\}\ \textit{негіз}$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$
$$q\ \}\ \textit{қорытынды}$$

▲

$p\Rightarrow q$ және q тұжырымдардан p тұжырым келіп шыққаны үшін, пікір $(p\Rightarrow q)\wedge q\Rightarrow p$ логикалық пішінге ие болды.

Ақиқат кестесін құрастырамыз:

p	q	$p\Rightarrow q$	$(p\Rightarrow q)\wedge q$	$(p\Rightarrow q)\wedge q\Rightarrow p$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	F
F	F	T	F	T

Нәтижеде тавтология пайда болмады. Бұл пікірдің **дұрыс еместігін** көрсетті, яғни берілген негіздерден дұрыс қорытынды шықпағанын білдірді.

Төменде біз дұрыс пікірлерді (**аргументация** зандарын) келтіреміз:

Р.с.	Пікір	Мағынасы	Мысал
1°.	$\begin{array}{c} p\Rightarrow q \\ \underline{\ \ p\ \ } \\ q \end{array}$	*p* дұрыс болғанда *q* дұрыс болсын. Мұнда *p* дұрыс. Демек, *q* да дұрыс.	Егер оқулықты оқысам, үлгілі баға аламын. Оқулықты оқыдым. Демек, үлгілі баға аламын.

2°.	$\dfrac{\begin{array}{c}p\Rightarrow q\\ \neg p\end{array}}{\neg q}$	*p* дұрыс болғанда, *q* дұрыс болсын. Бірақ *q* дұрыс емес. Демек, *p* да дұрыс емес.	Егер кітап оқысам, үлгілі баға аламын. Үлгілі баға алмадым. Демек, кітап оқымадым.
3°.	$\dfrac{\begin{array}{c}p\vee q\\ \neg p\end{array}}{q}$	*p* немесе *q* дұрыс және *p* дұрыс емес болсын. Демек, *q* дұрыс емес.	Мен кітап оқимын немесе кино көремін. Мен кітап оқымадым. Демек, мен кино көрдім.
4°.	$\dfrac{\begin{array}{c}p\Rightarrow q\\ q\Rightarrow r\end{array}}{p\Rightarrow r}$	*p*-дан *q* және *q*-дан *r* келіп шықсын. Онда *p*-дан *r* келіп шығады.	Егер ауа-райы ашық болса, мен спорт алаңына барамын. Егер мен спорт алаңына барсам, футбол ойнаймын. Демек, ауа-райы ашық болса, мен футбол ойнаймын.

Біз пікірлердің дұрыстығын дәлелдеуді жаттығу ретінде оқушыға ұсынамыз.

Жаттығулар

75. Төмендегі пікірді қарастырайық:

Әліжанға суық тисе ғана, оның дене температурасы жоғары болады.
Әліжанның дене температурасы жоғары емес.

Демек, Әліжанға суық тимеген.

a) пікірдің логикалық пішінін жаз;
b) пікірдің дұрыс екенін дәлелде.

76. Пікірлердің логикалық пішінін жаз:

a)

I $\dfrac{\begin{array}{c}p\Rightarrow q\\ \neg q\end{array}}{\neg p}$ **II** $\dfrac{\begin{array}{c}p\vee q\\ \neg p\end{array}}{q}$ **III** $\dfrac{p\vee q}{p}$ **IV** $\dfrac{\begin{array}{c}p\Rightarrow q\\ \neg p\end{array}}{\neg q}$ **V** $\dfrac{\begin{array}{c}p\Rightarrow q\\ q\Rightarrow p\end{array}}{p}$

b) әрбір пікірге ақиқат кестесін өрнектеп, олардың қай бірі дұрыс екенін тап.
c) табиғи тілде өрнектелуіне мысалдар айт.

77. Тұжырымдарды пікір түрінде жаз:

a) $(p\wedge q)\Rightarrow p$; c) $(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)\Rightarrow(p\Leftrightarrow q)$;
b) $(p\Rightarrow q)\wedge\neg q\Rightarrow p$; d) $(p\wedge\neg q)\Rightarrow(\neg p\vee p)$.

Пайда болған пікірлердің қайсылары дұрыс?

78. *p*: *x* – жай сан және *q*: *x* – тақ сан тұжырымдарын қарастырайық: Төмендегі пікірлердің қайсылары дұрыс?

a) Егер *x* – жай сан болса, ол тақ болады. *x* – тақ немесе жай сан. Демек, *x* – тақ сан;

b) x – тақ немесе жай сан, бірақ бір уақыттың өзінде емес. x – тақ сан. Демек, x – жай сан.

79. Мынадай пікір берілген: Дәурен жарысқа қатысу үшін Сингапурға немесе Гонгконгқа барады. Дәурен Сингапурға баруы мүмкін. Демек, Дәурен Гонгконгқа бармайды.

a) ақиқат кестесінің көмегімен осы пікірдің дұрыс еместігін дәлелде;

b) осы пікірдің неге дұрыс еместігін түсіндіріп бер.

80. Төмендегі пікірлердің қайбірі дұрыс, қайбірі дұрыс емес:

a) Тәліп сағат 10.00-да киноға немесе театрға барады. Тәліп сағат 10.00-да киноға бармады. Демек, Тәліп сағат 10.00-да театрға барды;

b) x саны 4-ке еселі болса, ол жұп сан болады. x – жұп сан, демек, ол 4-ке еселі;

c) x саны 30-дың немесе 50-дің бөлгіші. Демек, x саны 50-дің бөлгіші;

d) егер тізбек арифметикалық прогрессия болмаса, ол геометриялық прогрессия болады. Демек, тізбек арифметикалық немесе геометриялық тізбек болады;

e) барлық сыныптастарым жақсы оқиды. Махсума жақсы оқиды. Демек, Махсума менің сыныптасым.

81. Тұжырымдарды жалғастырып, дұрыс пікірлерді туындату қажет:

a) Қазір екеуіміздің біріміз стоматологтың қабылдауына кіріуіміз керек. Мен кірмеймін. Демек ....;

b) Мен мектепке барамын немесе әкем мені қатты ұрысады. Бүгін мен мектепке анық бармаймын. Демек ....;

c) Егер мен есепті дұрыс шешсем, оның жауабы кітаптағы жауаппен бірдей болады. Менің нәтижем кітаптағы жауаптан өзгеше. Демек ....;

d) Егер Генри үйленген болса, оның мүлкіне өмірлік жолдасы ие болады. Егер үйленбеген болса, оның мүлкіне ағасы ие болады. Демек, оның мүлкіне .....;

e) Не пойыз кешіккен, немесе ол жүруден тоқтатылған. Егер ол жүруден тоқтатылған болса, мен бүгін ешқайда кетпеймін. Егер ол кешіксе, мен жұмысқа уақытында бара алмаймын. Демек мен..........;

f) Егер 2 – жай сан болса, ол ең кіші жай сан болады. 2 – жай сан. Демек ....

Софизмдер және парадоктар

Софизм[2] – әдейі қате шығарылған қорытынды, қандай да бір растаудың дұрыс емес дәлелі. Мұнда дәлелдегі қателік шеберлікпен жасырылады.

2 Ежелгі грек. σόφισμα – айла.

Софизмге қатысты есептерді алғаш, эрамыздан бұрынғы V ғасырда Ежелгі Грецияда жасаған математик Зенон құрастырған.

Зенон, танымал желаяқ Ахиллестің алда жорғалап кете жатқан тасбақаны ешқашан қуып жете алмайтынын математикалық тұжырымдардың көмегімен төмендегідей "дәлелдеген". Ахиллес тасбақадан 10 есе жылдам жүгіреді. Бастапқыда, тасбақа 100 метр алда болсын. Ахиллес осы 100 метрді жүгіріп өткенге дейін, тасбақа 10 метрге алға жылжиды. Ахиллес бұл 10 метрді жүгіріп өткенінше тасбақа тағы да 1 метрге жылжыйды, тағы сол сияқты. Олардың арасындағы арақашықтық әрдайым қысқарып барады, бірақ ешқашан нөльге айналмайды.

Зенонның есептері шексіздік, қозғалыс, кеңістік ұғымдарымен байланысты, олар математика мен физика пәндерінің дамуында үлкен маңызға ие болды.

Кейбір софизмдер ұлы ата-бабаларымыз Фараби шығармаларында, Беруни мен Ибн Синаның жазған хаттарында талқыланған.

Біз төменде ең қарапайым софизмдерге мысалдар келтіріп, оларды түсіндіруге әрекет жасаймыз.

2-мысал. *1000 сум қайда кетті?* 3 дос асханада тамақтанған соң даяшы оларға 25000 сумдық есепшотты берді. 3 достың әрбірі 10000 сумнан ақша шығарып, 30000 сумды даяшыға берді. Даяшы оларға 5000 сумды қайтарды. Достар 1000 сумнан бөлісіп алды және 2000 сумды такси үшін берді. Қайта тұрып достардың бірі есептей бастады, "Әрбіріміз 9000 сумнан қаражат жасадық, бұл 27000 сум болады, 2000 сумды таксиге бердік, мұны қоссақ 29000 сум болады. 1000 сум қайда кетті?"

△ Мұндағы негізгі "қателік" есептеудің дұрыс жасалмағанында. 3 дос 9000 сумнан 27000 сум ақша төледі. Бұдан 25000 сумды тамаққа төлеп, 2000 сумын таксиге берді, демек, жалпы есепшот 27000 сум болады. Жоғарыдағы есептеуде 2000 сум 27000 сумның ішінде жатыр ▲

3-мысал. *"2·2=5" софизмі:* $20-16-4=25-20-5$ тура теңдікті ықшамдаймыз:

$$2(10-8-2)=25-20-5$$

$$2\cdot2\cdot(5-4-1)=5\cdot(5-4-1)$$

Соңғы теңдіктің оң және сол бөліктерін ортақ $(5-4-1)$ көбейткішке қысқартып, $2\cdot2=5$ теңдікті пайда етеміз.

△ Мұндағы жасалған негізгі "қателік" $2\cdot2\cdot(5-4-1)=5\cdot(5-4-1)$ теңдіктің екі бөлігі нөльге тең болған $(5-4-1)$ көбейткішке қысқартылғанында. ▲

Парадокс[3] – көпшілік жағынан қабылданған дәстүрлі пікірге өз мазмұнымен немесе пішінімен шұғыл қайшы келетін, күтпеген тұжырым. Әрқандай парадокс "күмәнсіз дұрыс" (негізді ме, негізсіз бе – оған қарамастан) саналған ол немесе бұл пікірді теріске шығарудай көрінеді. "Парадокс" терминінің өзі де бастапқыда антикалық философияда әрқандай бір түрлі, оригинал пікірді өрнектеу үшін қолданылған.

Парадокстар, әдетте, логикалық негіздері толығымен анықталмаған теорияларда кездеседі.

4-мысал

Өтірікші парадоксы. "Мен растаған барлық нәрсе жалған" тұжырымын қарастырайық.

△ Егер бұл тұжырым ақиқат болса, осы тұжырымның мағынасына орай айтылған тұжырымның жалған екені ақиқат. Егер бұл тұжырым жалған болса, тұжырымдағы айтылған ой – жалған. Демек, бұл тұжырым жалған деген тұжырым жалған, онда бұл тұжырым ақиқат. Қайшылық. ▲

5-мысал

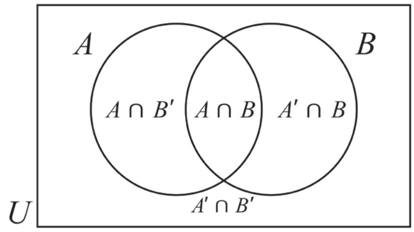
Рефлексивтік парадоксы. Өзбек тіліндегі сөздің мағынасы өзінде өрнектелсе, оны рефлексивті деп атаймыз.

Мысалы, "өзбекше" сөзі рефлексивті, ал "ағылшынша" сөзі рефлексивті емес. Дәл осылай, "он дана әріп" сөзі ондағы әріптердің саны шынында да 10-ға тең болғандықтан рефлексивті, ал "алты дана әріп" сөзі рефлексивті емес. Барлық рефлексивті сөздердің жиынын қарастырайық. Ал "Рефлексивті емес" сөзінің өзі рефлексивті ме?

△ Егер бұл сөз рефлексивті болса, онда мағынасына орай, ол рефлексивті емес. Егер бұл сөз рефлексивті емес болса, онда оның мағынасы өзінде өрнектелгені үшін рефлексивті болады. Қайшылық. ▲

16-18 ЕСЕПТЕРДІ ШЕШУ

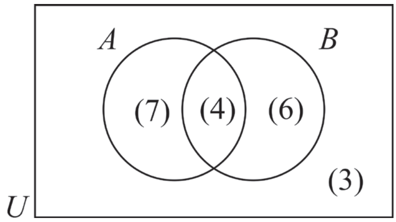
1-есеп. Қиылысатын екі *A, B* жиындар универсал жиынды төрт бөлікке бөледі:



3 Ежелгі грек. παράδοξος – күтпеген, бір түрлі.

Демек, универсал жиын элементтерінің саны осы бөліктер элементтері санының қосындысы екен.

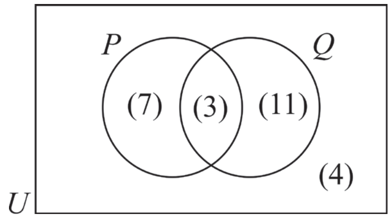
Төмендегі диаграммада универсал жиынның сәйкес бөліктері элементтерінің саны жақшаға алынып жазылған:



Мұнда, мысалы, A, B жиындардың екеуіне 4 элемент тиісті, ал 3 элемент біреуіне де тиісті емес.

U жиынның кез келген элементі 4 бөліктің еш болмағанда біреуіне тиісті болғаны үшін U жиыны элементтерінің саны 7+4+6+3=20-ға тең.

2-есеп. Суретке қарап, төмендегі жиындар элементтері санын тап:



a) P; b) Q'; c) $P \cup Q$;

d) P-ға тиісті, бірақ Q-ға тиісті болмаған элементтер жиыны;

e) Q-ға тиісті, бірақ P-ға тиісті болмаған элементтер жиыны;

f) P-ға да, Q-ға да тиісті болмаған элементтер жиыны.

a) $n(P)=7+3=10$; b) $n(Q')=7+4=11$;

c) $n(P \cup Q)=7+3+11=21$; d) $n(P$, бірақ Q емес$)=7$;

e) $n(Q$, бірақ P емес$)=11$.

3-есеп. Егер $n(U)=30$, $n(A)=14$, $n(B)=17$ және $n(A \cap B)$ болса,

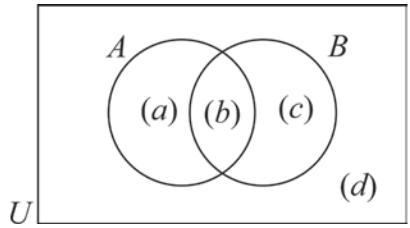
a) $n(A \cup B)$-ны тап.

b) A-ға тиісті, бірақ B-ға тиісті болмаған элементтер жиыны неше элементтен құралған?

Венн диаграммасын құрастырамыз:

$n(A \cap B)$-дан $b=6$; $n(A)$-дан $a+b=14$; $n(B)$-дан $b+c=17$; $n(U)$-дан $a+b+c+d=30$ теңдік келіп шығады.

Демек, $b=6$, $a=8$, $c=11$, $d=5$.



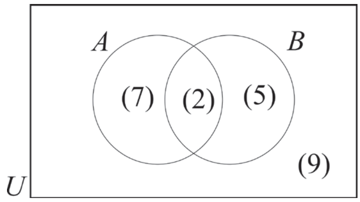
Диаграммадан төмендегілерге ие боламыз:

a) $n(A \cup B)=a+b+c=25$;

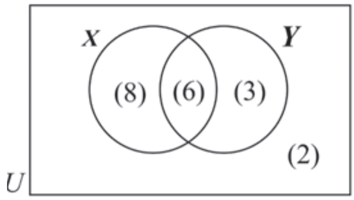
b) A-ға тиісті, бірақ B-ға да тиісті болмаған элементтер саны $a=8$-ге тең.

Жаттығулар

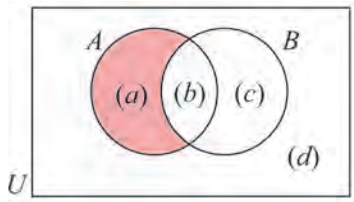
Диаграмманы пайдаланып, төмендегі жиындар элементтері санын тап:



82. a) B; b) A'; c) $A \cup B$;
d) A-ға тиісті, бірақ B-ға тиісті болмаған элементтер жиыны;
e) B-ға тиісті, бірақ A-ға тиісті болмаған элементтер жиыны;
f) A-ға да, B-ға да тиісті болмаған элементтер жиыны.



83. a) X'; b) $X \cap Y$; c) $X \cup Y$;
d) X-ке тиісті, бірақ Y-ке да тиісті болмаған элементтер жиыны;
e) Y-ке тиісті, бірақ X-ке тиісті болмаған элементтер жиыны;
f) X-ке де, Y-ке де тиісті болмаған элементтер жиыны.



84. a) $n(B)$; b) $n(A')$;
c) $n(A \cap B)$; d) $n(A \cup B)$;
e) $n((A \cap B)')$; f) $n((A \cup B)')$.

85. $n(U)=26$, $n(A)=11$, $n(B)=12$ және $n(A \cap B)=8$ болса:
a) $n(A \cup B)$-ны тап;
b) B-ға тиісті, бірақ A-ға тиісті болмаған элементтер жиыны неше элементтен құралған?

86. $n(U)=32$, $n(M)=13$, $n(M \cup N)=26$ және $n(M \cap N)=5$ болса:
a) $n(N)$; b) $n((M \cup N)')$-ны тап.

87. $n(U)=50$, $n(S)=30$, $n(R)=25$ және $n(R \cup S)=48$ болса:

a) $n(R \cap S)$;

b) S-ға тиісті, бірақ R-ға тиісті болмаған элементтер жиыны неше элементтен құралған?

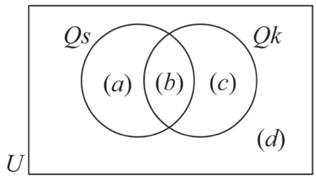
4-есеп. Спорт үйірмесіне қатысатын 27 оқушының 19-ы қара шашты, 14-і қара көзді және 11-і әрі қара шашты, әрі қара көзді.

a) Осы мәліметті Венн диаграммасында өрнекте және түсіндір.

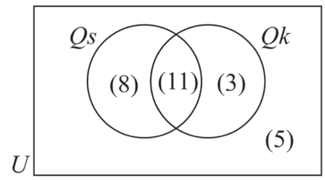
b) **I** Не қара шашты, немесе қара көзі; **II** қара шашты, бірақ қара көзді емес оқушылар нешеу?

△ a) Qs – қара шашты, ал Qk қара көзді оқушылар жиыны болсын. Төмендегі диаграммаға ие боламыз:

Мұнда
$a+b+c+d=27$; $a+b=19$; $b+c=14$;
$b=11$; $a=8$; $c=3$; $d=5$.



Яғни



b) Диаграммаға қарап, төмендегілерді анықтаймыз:

I Не қара шашты, немесе қара көзі оқушылардың саны:

$n(Qs \cap Qk)=8+11+3=22$;

II қара шашты, бірақ қара көзді емес оқушылардың саны:

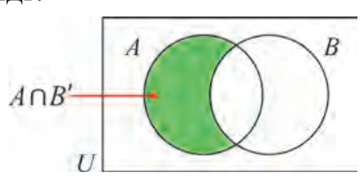
$n(Qs \cap Qk')=8$ ta. ▲

Жаттығулар

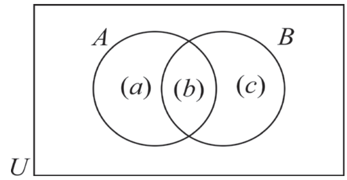
88. Бадминтон клубындағы 41 қатысушыдан 31-і жеке тәртіпте және 16-сы жұптықта ойнайды. Неше қатысушы әрі жеке тәртіпте, әрі жұптықта ойнайды?

89. Кәсіпорында 56 жұмысшы істейді. 1 аптаның ішінде олардың 47-сі күндізгі және 29-ы кешкі сменада жұмыс істейді. Неше жұмысшы әрі күндізгі, әрі кешкі сменада жұмыс істейді?

90. Төмендегі Венн диаграммасына қарап
$n(A \cap B') = n(A)-n(A \cap B)$,
$n(A' \cap B) = n(B)-n(A \cap B)$
теңдіктердің орынды екенін анықта.



91. Венн диаграммасын пайдаланып
$n(A \cup B) = n(A)+n(B)-n(A \cap B)$
формуласын келтіріп шығар.



92. 50 студенттің 40-ы ағылшын тілін, ал 25-і неміс тілін үйренеді. Екі тілді де үйреніп жатқан студенттер нешеу?

4-есеп. Футбол жарысына қаладан *A, B* және *C* үш команда қатысып жатыр. Қала тұрғындарының 20 пайызы *A* командаға, 24 пайызы *B* командаға және 28 пайызы *C* командаға жанкүйерлік етеді. Қала тұрғындарының 4 пайызы әрі *A*, әрі *B* командаға, 5 пайызы әрі *A*, әрі *C* командаға, ал 6 пайызы әрі *B*, әрі *C* командаға жанкүйерлік етеді. Бұдан тыс, қала тұрғындарының 1 пайызы барлық командаларға жанкүйерлік ететіні белгілі.

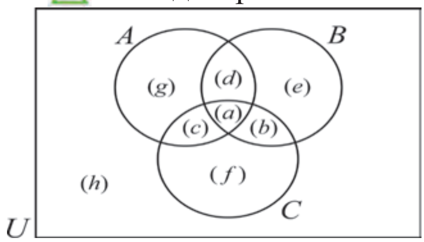
Қала тұрғындарының неше пайызы:

а) тек *A* командаға жанкүйерлік етеді;

b) әрі *A*, әрі *B* командаға жанкүйерлік етіп, *C* командаға жанкүйерлік етпейді;

c) ешқандай командаға жанкүйерлік етпейді?

Венн диаграммасын мәліметтермен толықтырамыз.



$a=1$, өйткені қала тұрғындарының 1 пайызы барлық командаларға жанкүйерлік етеді.

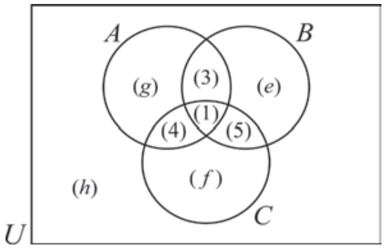
$a+d=4$, өйткені қала тұрғындарының 4 пайызы әрі *A*, әрі *B* командаға жанкүйерлік етеді.

$a+b=6$, өйткені қала тұрғындарының 6 пайызы әрі *B*, әрі *C* командаға жанкүйерлік етеді.

$a+c=5$, өйткені қала тұрғындарының 5 пайызы әрі *B*, әрі *C* командаға жанкүйерлік етеді.

Демек, $d=3$, $b=5$, $c=4$.

Нәтижеде төмендегі диаграмма пайда болады:



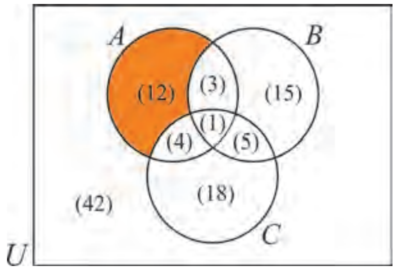
Бұдан тыс, қала тұрғындарының 20 пайызы *A* командаға жанкүйерлік еткені үшін $g+1+4+3=20$, яғни $g=12$.

Дәл солай қала тұрғындарының 24 пайызы *B* командаға жанкүйерлік еткені үшін $e+1+5+3=24$, яғни $e=15$.

Сонымен, қала тұрғындарының 28 пайызы C командаға жанкүйерлік еткені үшін f+1+5+4=28, яғни f=18.

Қала тұрғындары 100 пайыз болғаны үшін, ешқайсы командаға жанкүйерлік етпегендердің пайызы h=42-ге тең.

a) тек A командаға жанкүйерлік еткендердің пайызын сәйкес бөлікті бояп табамыз: g=20–4–3–1=12.



b) әрі A, әрі B командаға жанкүйерлік етіп, C командаға жанкүйерлік етпегендердің пайызы 12+3+15=30-ға тең.

c) ешқайсы командаға жанкүйерлік етпегендердің саны h=42-ге тең.

Жаттығулар

93. Халықаралық конференциядағы 58 қатысушы түрлі тілде, атап айтсақ 28-і араб, 27-сі қытай, ал 39-ы ағылшын тілінде сөйлесе алады.
a) тек қытай тілінде ғана сөйлесе алатындар;
b) осы тілдердің ешбірінде де сөйлесе алмайтындар;
c) не араб, не қытай тілінде сөйлесе алмайтындар нешеу?

94. Төмендегі тұжырымдардың терістеуін құрастыр:
a) күн жарқырып тұр және ауа-райы жылы;
b) егер аспан бұлтсыз болса, мен өзенге барамын;
c) жаңбыр жаумай жатыр;
d) мен не бақылау жұмысына дайындаламын, не бақылау жұмысын жақсы жаза алмаймын;
e) кейбір оқушылар дарынды;
f) барлық оқушылар дарынды;
g) дарынды оқушылар жоқ;
h) кейбір оқушылардың көздері көгілдір.

Тұжырымдарды логикалық жалғаулардың көмегімен өрнекте (**95–104**):

95. Егер студент математиканы игерсе, оның ой-санасы кеңейеді.

96. Егер мен математиканы және шет тілін игерсем, мен не үйге, не тауға демалысқа кетемін.

97. Демалыстың басталғаны жалған.

98. Егер адам жас кезінен-ақ өзін басқара алатын болса, онда оның айналасындағылар одан ренжімейді және оны құрметтейді.

99. Егер металдан электр тогы өтсе, оның температурасы артады.

100. Ол үйіне не таксиде, не пойызда кетеді.

101. Бұл жаттығу үшін қара немесе түсті металл пайдаланылған.

102. Демалыс басталуына тоқсанның аяқталуы жеткілікті.

103. Демалыстың басталуына тоқсанның аяқталуы қажет.

104. Демалыстың басталуына тоқсанның аяқталуы қажет және жеткілікті.

Тұжырымдарды логикалық жалғаулардың көмегімен өрнекте және ақиқат-жалған екенін анықта (**105–117**):

105. Егер адам психологиялық ауру болса, ол туыстарын танымайды. Бұл адам психологиялық ауру. Демек, ол туыстарын танымайды.

106. Егер мен саған сенетін болсам, сен мені алдайсың. Демек, мен саған сенбесем, сен мені алдай алмайсың.

107. Ертең біз театрға немесе мұражайға барамыз. Егер театрға барсақ, үйге кеш қайтамыз. Егер мұражайға барсақ, үйге ертерек келеміз. Бірақ біз үйге кеш қайтпаймыз. Демек, біз театрға емес, мұражайға барамыз

108. Егер ол Әлішердің әкесі болса, ол Мұраттың әкесі болмайды. Ол Әлішер мен Жәмшидтің әкесі екені дұрыс емес екен. Ол не Жәмшидтің не Мұраттың әкесі екені анықталды. Демек, ол Әлішердің әкесі емес.

109. Егер қазір қыс болса, температура төмен болады. Қазір күз болмаса, қыс болады. Қазір күз. Демек, температура төмен емес.

110. Егер Болат ізденімпаз болмаса, ол журналист болмайды. Егер Болат журналист болса, ол оқытушы болмайды. Болат өте ізденімпаз, бірақ ол оқытушы емес. Демек Болат – журналист.

111. Егер жаңбыр жауса, аспан бұлтты болады. Егер аспан бұлтты болмаса, күн шығып тұрады. Жаңбыр жауып жатыр, бірақ күн шығып тұр. Демек, күн шығып тұрса, аспан бұлтты болмайды.

112. Егер Мұрат тағы жылдамдықты арттырса, оның құжатын алып қояды. Егер Мұрат мас күйінде рөлге отырса, ол жылдамдықты арттырмайды. Бүгін Мұрат мас болмайды және жылдамдықты арттырмайды. Демек, оның құжаттарын бүгін алып коймайды.

113. Көбейту кестесін білмейтіндер сауатсыз саналады. Әліппені білмегендер де сауатсыз саналады. Ол не көбейту кестесін, не әліппені білмейді. Демек, ол сауатсыз

114. Егер ол дұрыс айтқан болса, мен кешірім сұрауым қажет. Егер мен дұрыс айтқан болсам, ол кешірім сұрауы қажет. Екеуіміздің біріміз әлбетте кешірім сұрауымыз қажет. Қорытынды: біріміздікі дұрыс.

115. Мен не мектепке барамын, не мені әкем ұрысады. Мен мектепке бармаймын. Демек, мені әкем әлбетте ұрысады.

116. Егер мен есепті қатесіз шешетін болсам, алынған нәтиже оқулықтағы жауаппен бірдей болады. Менің нәтижем мен оқулықтағы жауаптың айырмашылығы бар. Демек, мен есепті шешуде қателескенмін.

117. Пән күрделі емес немесе ол ол жақсы оқытылуда. Егер пән күрделі болмаса, оны игеремін. Егер пән жақсы оқытылса, оны игеремін. Демек, әрқандай жағдайда пәнді игеремін.

118. Ақиқат кестелерінің көмегімен төмендегі тұжырымдардың түрін анықта және табиғи тілдегі сәйкес хабарлы сөйлемге мысал айт.

a) $p \lor q \Rightarrow p \lor q$;
d) $p \lor q \Rightarrow \neg q \land p$;
b) $p \Rightarrow \neg q \lor (p \Rightarrow q)$;
e) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p) \land (p \lor q)$;
c) $\neg(q \Rightarrow \neg p) \land \neg q$;
f) $\neg(p \land q) \land (q \Rightarrow p) \land (p \Rightarrow q) \land (p \land q)$.

Төмендегі тұжырымдарды логикалық жалғаулардың көмегімен өрнекте және ақиқат-жалған екенін анықта **(119–130)**:

119. Барлық дельфиндер — сүтқоректілер. Бірде-бір балық сүтқоректі емес. Демек, бірде-бір балық дельфин емес.

120. Барлық сиырлар — сүтқоректілер. Барлық сиырлар шөп жейді. Демек, кейбір сүтқоректілер шөп жейді.

121. Кейбір студенттер істейді және кейбір студенттер жақсы оқиды. Демек, кейбір жақсы оқитын студенттердің ішінде істейтіндері бар.

122. Барлық металдар қатты пішінде. Сынап – метал. Демек, сынап қатты пішінде.

123. Ешқандай металл газ емес. Кейбір заттар металдар. Демек, кейбір заттар газ емес.

124. Барлық металдар жылуды жақсы өткізеді. Барлық металдар электр тогын өткізеді. Демек, кейбір электр өткізгіштер жылуды жақсы өткізеді.

125. Кейбір ер-азаматтар математиктер. Кейбір математиктер – философтар. Демек, кейбір философтар ер-азаматтар.

126. Барлық альпинистер ержүрек. Кейбір альпинистер ер-азаматтар. Демек, кейбір ер-азаматтар ержүрек болады.

127. Барлық ғалымдар ақылды. Кейбір ақылды адамдардың тілі өткір. Демек, кейбір тілі өткірлер ғалымдар

128. Барлық шет тілі оқытушылары шет тілін жақсы біледі. Шет тілін жақсы білетіндердің кейбірі математиканы ұнатпайды. Демек, математиканы .ұнатпайтындардың кейбірі шет тілі оқытушылары емес.

129. Барша кроманьондар – агрессив (шабуыл жасаушы). Ешбір неандертал кроманьон емес. Демек, ешбір неандертал кроманьон емес.

130. Кейбір сүтқоректілер – киттер. Барлық киттер – ірі жануарлар. Демек, кейбір ірі жануарлар сүтқоректілер.

Мәтіндерді оқы және жағдайды талқыла (**131–138**):

131. Крит философы Эпименид барлық криттіктердің өтірікші екенін айтты. Эпименид ақиқатты айтты ма?

132. Платон: Қазір Сократ айтқан барлық нәрсе жалған.
Сократ: Қазір Платон айтқан сөз жалған.
Кім ақиқатты айтты?

133. Қағаздың бір жағына: "Қағаздың басқа жағына жазылған сөз жалған", осы қағаздың екінші жағына: "Қағаздың басқа жағына жазылған сөз жалған" деп жазылған. Қағаздың қай жағына ақиқат сөз жазылған?

134. Атақты философ Протагор құқықты тегін үйрету үшін Эвалтты шәкірттікке алды. Мұнда егер Эвалт өзінің бірінші сот мәжілісінде жеңіп шықса, маған белгілі бір мөлшерде ақша төлейді деген мағынадағы келісімшарт түзілді. Оқу біткен соң Эвалт ешбір жұмысқа шықпады. Нәтижеде оның бірінші сот мәжілісіне қатысу-қатыспауы белгісіз болып қалды. Протагор өзінің шәкіртінің үстінен сотқа шағым жасайды. Сот үдерісінен көрініс:
Протагор. Әрқандай жағдайда бұл жігіт маған төлеуі қажет. Шынында да, егер ол осы сотта жеңіп шықса, келісімшартқа орай ол маған төлейді. Егер жеңбесе, соттың шешіміне орай маған төлейді.
Эвалт. Мен Протагорға ештеңе бермеймін! Егер мен сотта жеңетін болсам, жеңімпаз ретінде ештеңе бермеймін. Бірақ мен жеңілуге де дайынмын. Онда келісімшартқа орай мен ештеңе төлемеймін.

135. Бұл қызықты сөйлемде сөздердің саны жетіге тең.

136. Бұл сөйлемді оқуға тыйым салынады.

137. Бір адам тотықұсты сатқан кезінде тотықұс қалаған тілдегі естіген әрбір сөзін қайталайды, деп сендіреді. Бірақ сатып алынған тотықұс ештеңені сөйлемейді. Егер сатушы алдамағаны белгілі болса, жағдайды түсіндір.

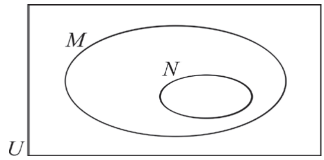
138. Даниярдағы кітаптардың саны 1000-нан көп.
Жоқ, ондағы кітаптар 1000-нан аз.
Онда кемінде бір кітап бар.
Осы үш тұжырымның еш болмағанда біреуі ақиқат. Даниярда неше кітап бар?

Бақылау тапсырмалары

I вариант

1. $U = \{ x \mid 0 < x < 10, x \in \mathbb{Z}\}$,
A = {0 *және* 9 *арасындағы барлық жұп сандар*}, *B* = {18 *санының натурал бөлгіштері*} болса, $A \cap B$ жиын элементтерін жаз .

2. Диаграмманы дәптерге көшіріп жаз және $M \cap N$ жиынды белгіле.



3. *p: x* – жұп сан, *q: x* сан 3-ке бөлінеді тұжырымдарды қарастырайық. Тұжырымдарды сөздердің көмегімен өрнекте. Олар қайсы *x*-тарда ақиқат? Жалған?
   a) $\neg p$; b) $p \Rightarrow q$ c) $p \Rightarrow \neg q$.

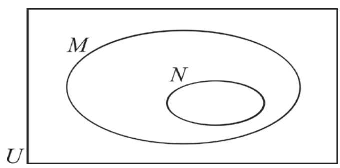
4. Төмендегілердің қайбірі логикалық тепе-тең?
   a) $p \Rightarrow q$ va $p \Leftrightarrow \neg p$; b) $p \Leftrightarrow q$ va $(p \wedge q) \wedge \neg p$.

5. Пікірлердің логикалық пішіндерін жаз. Осы пікірлердің дұрыс-дұрыс еместігін тексер.
Аспан бұлтты болса, мен қалпағымды киемін. Аспан бұлтты. Демек, мен қалпағымды киемін.

II вариант

1. $U = \{ x \mid 0 < x < 10, x \in \mathbb{Z}\}$, *A* = {0 *және* 9 *арасындағы барлық жұп сандар*},
B = {18 *санының натурал бөлгіштері*} болса, $(A \cap B)'$ жиын элементтерін жаз .

2. Диаграмманы дәптерге көшіріп жаз және $M \cap N'$ жиынды белгіле.



3. *p: x* – жұп сан, *q: x* сан 3-ке бөлінеді тұжырымдарды қарастырайық. Тұжырымдарды сөздердің көмегімен өрнекте. Олар қайсы *x*-тарда ақиқат? Жалған?
   a) $p \vee q$; b) $\neg p \wedge q$ c) $\neg p \Rightarrow \neg q$.

4. Төмендегілердің қайбірі логикалық тепе-тең?
   a) $\neg(p \wedge q)$ va $\neg p \vee \neg q$; b) $\neg p \Rightarrow \neg q$ va $q \Rightarrow p$.

5. Пікірлердің логикалық пішіндерін жаз. Осы пікірлердің дұрыс-дұрыс еместігін тексер.
Барлық оқушылар оқуға ұмтылады. Мәдина Ғалымова оқушы емес. Демек, Мәдина Ғалымова оқуға ұмтылмайды.

II ТАРАУ

ҚАРЖЫЛЫҚ МАТЕМАТИКА ЭЛЕМЕНТТЕРІ

19–21 ҚАРАПАЙЫМ ПАЙЫЗДАР, КҮРДЕЛІ ПАЙЫЗДАР

Белгілі бір мөлшердегі ақша қарызға берілгенде қарыз алушы белгіленген мерзімде қарыз берушіге (*кредиторға*) алынған соманы (*қарызды*) қайтаратыны туралы келіседі.

Бұдан тыс, әрбір қарыз алушы кредиторға қосымша қаржы төлеуді өз міндетіне алады.

Қарыздар төлейтін ақша қарыз мөлшеріне, төлеу мерзіміне және кредитордың табыс алу мақсатында белгілеген пайыз ставкасына байланысты екені көрініп тұр.

Кредитордың қарыздарға белгілі мөлшердегі ақшаны белгіленген мерзімде қарызға беруінің нәтижесінде алатын табысын есептеу үшін әдетте екі тәсіл: **қарапайым пайыздар және күрделі пайыздар** тәсілдері қолданылады.

Қарапайым пайыздар

Қарапайым пайыздар – кредитордың қарыздарға белгілі мөлшердегі ақшаны белгіленген мерзімге қарызға бергенінің нәтижесінде алатын табысын есептеу тәсілі.

Мысалы, 2 000 000 сум 3 жылға қарызға алынып жатыр. Мұнда кредитор әр жылға 17 пайыздық ставканы белгіледі.

Мұнда 1 жылда соң $\frac{17}{100}\cdot 2\,000\,000$ сум, ал 3 жылдан соң қосымша қаржы $\frac{17}{100}\cdot 2\,000\,000\cdot 3 = 1\,020\,000$ сум төленуі қажет.

Бұл мысалдан төмендегі **қарапайым пайыздар формуласы** деп аталатын қатынас туындайды:

$$I=\frac{Crn}{100},$$

Мұндағы C – бастапқы алынған қарыз мөлшері, I – C мөлшердегі ақшаны жұмсағаны үшін қарыздардың кредиторға төлейтін пайыз төлемі. Осы параметр *пайыз төлемі* немесе, жай ғана, *пайыз* деп те аталады, r – әрбір жылға белгіленген пайыз ставкасы, n – жылдар саны.

1-мысал. 8 000 000 сум жылына 7 пайыздық ставкамен 18 айға алынған болса, пайыз төлемін есепте.

△ $C = 8000000, \quad r=7\%, \quad n=\frac{18}{12} = 1{,}5$ жыл.

Демек, $I=\frac{Crn}{100}=\frac{8000000\cdot 7\cdot 1{,}5}{100} = 840\ 000$ сум. ▲

2-мысал. Кредитор пайыз ставкасын әрбір жылға 8% деп белгілеген. Кәсіпкер 4 жылдың ішінде алынған қарызды және *foiz* төлеміне қосымша 1600 АҚШ долларын төледі және қарызынан құтылды. Кәсіпкер қанша мөлшерде қарыз алған еді?

△ Қарапайым қарыздар формуласына сәйкес

$$I=\frac{Crn}{100}, \text{ мұнда } I=1600;\ r=8;\ n=4.$$

Демек, $1600=\frac{C\times 8\times 4}{100}$.

Бұдан, C=5000 (АҚШ доллары). ▲

3-мысал. Банк бастапқыда 4000 АҚШ доллары мөлшерінде қарыз беріп, 18 айда 900 АҚШ долларлық табыс алды. Егер төлем жылма-жыл жүзеге асырылатын болса, жылдық пайыз ставкасы нешеге тең?

△ Қарапайым қарыздар формуласына сәйкес

$I=\frac{Crn}{100}$, мұнда I=900; n=18 ай =1,5 жыл, C=4000.

Демек, $900=\frac{4000\times r\times 1{,}5}{100}$.

Бұдан, r=15%. ▲

4-мысал. Кредитор бастапқыда 2000 АҚШ доллары мөлшерінде қарыз беріп, бірнеше жыл барысында жылма-жыл төленгеннен соң жалпылай 3000 АҚШ долларын алды. Егер пайыз ставкасы әрбір жылға 12,5% деп белгіленген болса, төлемдер неше жылда жүзеге асырылған?

Кредитор 3000−2000=1000 (АҚШ доллары) мөлшерінде табыс алған. Қарапайым қарыздар формуласына сәйкес

$I=\frac{Crn}{100}$, мұнда I=1000; C=2000; r=12,5%.

Демек, $1000=\frac{2000\times 12,5\times n}{100}$

Жауабы: 4 жыл.

Күрделі пайыздар

Күрделі пайыз тәсілінің маңызын түсіндіру үшін төмендегі есепке назар аударамыз.

5-мысал.

Егер 6000 АҚШ доллары мөлшеріндегі қарыз жылдық күрделі пайыз ставкасын 8%-бен 3 жылда төлеу шартымен алынған болса, кредитордың алатын табысы қанша болады?

Жылдық күрделі пайыз ставкасын ескеріп, әр жылғы пайыз төлемі мөлшерін есептейміз:

Жыл	**Қарыз** (1)	**Пайыз төлемі** $=\frac{Crn}{100}$ (2)	**Баланс** (1) + (2)
1	$6000,00	$\$6000,00\times\frac{8}{100}\times1=\$480,00$	$6480,00
2	$6480,00	$\$6480,00\times\frac{8}{100}\times1=\$518,40$	$6998,00
3	$6998,00	$\$6998,00\times\frac{8}{100}\times1=\$559,87$	$7558,27

Демек, 6000 АҚШ доллары мөлшеріндегі қарыздан құтылу үшін 3 жыл барысында 7558,27 АҚШ доллары мөлшеріндегі төлемдерді төлеу қажет.

Мұнда кредитор $\$7558,27-\$6000=\$1558,27$ мөлшерде табыс алады. Бұл табыс жалпы *күрделі пайыз төлемі (үстеме пайыз)* деп жүргізілдеді.

Кредитордың табысы соңғы жылда пайда болған баланс пен бастапқы қарыз мөлшерінің айырмасына тең екені көрініп тұр.

Күрделі пайыздар тәсілін жылды жарты жылдықтарға, тоқсандарға, айларға, күндерге бөліп қолдануға болады.

6-мысал.

Егер 10000 АҚШ доллары мөлшеріндегі қарыз жылдық күрделі пайыз ставкасы 6%-бен 1 жылда тоқсандарға бөліп төлеу шартымен алынған болса, кредитордың алатын табысы қанша болады

△

Тоқсан	**Қарыз** (1)	**Пайыз төлемі** $= \frac{Crn}{100}$ (2)	**Баланс** (1) + (2)
1	\$10000,00	$\$10000,00 \times \frac{6}{100} \times \frac{1}{4} = \$150,00$	\$10150,00
2	\$10150,00	$\$10000,00 \times \frac{6}{100} \times \frac{1}{4} = \$152,25$	\$10302,25
3	\$10302,25	$\$10302,25 \times \frac{6}{100} \times \frac{1}{4} = \$154,53$	\$10456,78
4	\$10456,78	$\$10456,78 \times \frac{6}{100} \times \frac{1}{4} = \$156,85$	\$10613,63

Демек, 10000 АҚШ доллары мөлшеріндегі қарыздан құтылу үшін 1 жыл барысында 10613,63 АҚШ доллары мөлшеріндегі төлемді төлеу қажет.

Мұнда кредитор 613,63 АҚШ доллары мөлшерінде табыс алады. ▲

Егер қарыз бірнеше жылға берілген болса, қорытынды баланс төмендегідей есептеледі:

$$A = C\left(1+\frac{r}{100}\right)^n,$$

мұндағы A – қорытынды баланс, C – бастапқыда алынған қарыз мөлшері, r – әрбір жылға белгіленген пайыз ставкасы, n – жылдар саны.

Егер қарыз n жылға берілген болса, ал төлемдер әрбір жылды k бөлікке (жарты жылдықтар, тоқсандар, айлар, тағы сол сияқтылар) бөліп төленсе, төленетін жалпы мөлшер $A = C\left(1+\frac{r}{100k}\right)^{kn}$ формуласымен есептелінеді.

Екі тәсілде де жалпы күрделі пайыз төлемі (үстеме пайыз) $I = A - C$ формуласы бойынша есептелінеді.

6-мысалды осы формулаға сүйеніп шешеміз.

$C=10000$, $r=6$, $n=1$, $k=4$.

$$A=C\times\left(1+\frac{r}{100k}\right)^{kn}; \quad A=10000\times\left(1+\frac{6}{100}\right)^4; \quad A=10613,64.$$

Демек, 10000 АҚШ доллары мөлшеріндегі қарыздан құтылу үшін 1 жыл барысында 10613,64 АҚШ доллары мөлшеріндегі төлемді төлеу қажет.

Мұнда кредитор 613,64 АҚШ доллары мөлшерінде табыс алады.

Егер банкке қарапайым пайыз бойынша қойылған бастапқы қаржы C сум болса, n жылдан соң банк клиентке $a_n = C(1+\frac{nr}{100})$ сум мөлшерінде ақша төлейді, мұндағы r банктің жылдық пайыз ставкасы.

Егер, осы қаржы күрделі пайыз бойынша банкке қойылса, n жылдан соң бан клиентке $b_n = C(1+\frac{r}{100})^n$ сум мөлшерінде ақша төлейді.

a_n – тізбектің арифметикалық прогрессияны,

b_n – тізбектің геометриялық прогрессияны құрайтыны белгілі.

Жаттығулар

1. a) 3 000 фунт стерлинг жылдық пайыз ставкасы 7% бойынша 3 жылға қарызға алынса;
b) 6100 АҚШ доллары жылдық пайыз ставкасы 5,9% бойынша 15 айға қарызға алынса;
c) 800 000 Жапония иенасы жылдық пайыз ставкасы 6,5% бойынша 4 жыл 7 айға қарызға алынса;
d) 250 000 еуро жылдық пайыз ставкасы 4,8% бойынша 134 күнге қарызға алынса;
кредиторға төленетін пайыз төлемін тап.

2. 130000 АҚШ доллары қарызға берілген болса, кредитор қандай жағдайда көбірек табыс алады:
жылдық пайыз ставкасы 7% бойынша 5 жылға, немесе
жылдық пайыз ставкасы 7,7% бойынша 5,5 жылға берілгенде ме?

3. Кредитор жылдық пайыз ставкасы 7% деп белгілеген. Кәсіпкер 5 жылда алған қарызы мен пайыз төлеміне қосымша 910 АҚШ долларын төлеп қарыздан құтылды. Ол қанша мөлшерде қарыз алған?

4. Жылдық пайыз ставкасы 8% деп белгілеген. 3 жылда пайыз төлеміне қосымша 3456 фунт стерлинг төлесе, қанша мөлшерде қарыз алынған?

5. Инвестор 21 айда 2300 еуро табыс алмақшы. Жылдық пайыз ставкасы 6,5% деп белгіленсе, ол қанша мөлшерде инвестиция енгізуі қажет?

6. a) Кредитор 4500 АҚШ доллары мөлшерінде қарыз беріп, 3 жылда 900 АҚШ долларына тең табыс алды. Жылдық пайыз ставкасы қанша?
b) Кредитор 170000 Жапония иенасы мөлшерінде қарыз беріп, 2 жылда 170000 Жапония иенасына тең табыс алды. Жылдық пайыз ставкасы нешеге тең?

7. 8 ай барысында 9000 АҚШ доллары мөлшерінде қарыз алынып, қарыздан тыс 700 АҚШ доллары төленді. Жылдық пайыз ставкасы нешеге тең?

8. Азамат 26 миллион сумды банкке қойып, өзінің есепшотында 18 айда 32 миллион сум болғанын анықтады. Жылдық пайыз ставкасы нешеге тең?

9. a) Кредитор 20000 АҚШ долларын қарызға беріп, 5000 АҚШ долларына тең табыс алды. Жылдық пайыз ставкасы 7% болса, қарыз неше жылға алынған?

b) Кредитор 1200 еуро мөлшерінде қарыз беріп, 487 еуро табыс алды. Жылдық пайыз ставкасы 6,75% болса, қарыз неше жылға алынған?

10. Клиент банкке 9400 фунт стерлингті жылдық пайыз ставкасы 6,75%-бен қойды. 1800 фунт стерлинг табыс алу үшін қанша уақыт қажет?

11. Егер:

a) 4500 еуро қарыз жылдық күрделі пайыз ставкасы 7%-бен 3 жылда төлеу шартымен;

b) 6000 АҚШ долларлық қарыз жылдық күрделі пайыз ставкасы 5%-бен 4 жылда төлеу шартымен;

c) 7400 фунт стерлинг мөлшеріндегі қарыз жылдық күрделі пайыз ставкасы 6,5%-бен 3 жылда төлеу шартымен алынған болса, қорытынды балансты есепте.

22-24 ЕСЕПТЕРДІ ШЕШУ

1-есеп. Кәсіпкер 23000 АҚШ доллары мөлшеріндегі қарыздан құтылу үшін төлемдерді жылма-жыл емес, мысалы, ай сайын тең бөліктерде төлеуге шешім қабылдады. Егер төлем кезеңі 6 жыл, жылдық пайыз ставкасы 8% болса, ол әр айда қанша мөлшердегі төлемді төлеуі қажет?

1-қадам

Пайыз төлемі мөлшерін есептейміз.

C=23 000, r=8%, n=6 болғандықтан

$$I=\frac{Crn}{100}=\frac{23000\times8\times6}{100}=\$11040.$$

2-қадам

Артқан капитал қаржы мөлшерін, яғни жалпы төленетін соманы есептейміз:

$$C+I=\$23000+\$11040=\$34040.$$

3-қадам

Неше ай барысында төленуі қажет екенін есептейміз:

$$6\times12=72 \text{ ай}.$$

4-қадам

Демек, әр айда төленетін қаржы

$$\frac{\$34040}{72}\approx \$472{,}78\text{-ге тең.}$$

2-есеп.

Егер 8800 еуро қарыз жылдық күрделі пайыз ставкасы 4,5%-бен әр жылы төлеу шартымен алынған болса, кредитордың 3,5 жылда алатын табысы қанша болады?

$C=8800$, $r=4{,}5\%$, $n=3{,}5$, $k=12\times3\frac{1}{2}=42$

Демек, $A=C\times(1+\frac{r}{100k})^{kn}$; $A=8800\times(1+\frac{4.5}{1200})^{42}$,

$A=10298{,}08$, яғни $I=A-C=10298{,}08-8800=1498{,}08$

3,5 жылда алынған табыс €1498,08-ге тең.

3-есеп.

Егер банктен 50000 АҚШ доллары мөлшерінде алынған несие жылдық күрделі пайыз ставкасы 5,2%-бен әр тоқсанда төлеу шартымен алынған болса, банкке 3 жылда қанша АҚШ доллары төленеді?

$A=50000$, $r=5{,}2\%$, $n=3$, $k\cdot n=4\times3=12$

Демек, $A=C\times(1+\frac{r}{100k})^{kn}$ $50000=C\times(1+\frac{5{,}2}{400})^{12}$

$C=42820{,}99$. Банкке 3 жылда \$42821 төленеді.

Ғимараттар, құрылыстар, техникалық құралдар, аспап-құрылғылар, инвентарь мен жиһаздар, компьютерлер, тағы сол сияқтылар пайдалы қызмет ету мерзімі барысында ескіреді. Ескіру оларды пайдалану уақытында осы құралдардың техникалық өндіру қасиеттерін жоғатуы үдерісін бейнелейді.

Амортизация тұтынылған құралдардың құнын олардың ескіруіне сәйкес түрде өнімнің өзіндік бағасына, кезеңдік қаражаттарға өткізу, тұтынылған құралдардың орнын қаптау мақсатында ақша қорын жинау үдерісін бейнелейді .

Амортизация құнын есептеу үшін төмендегі формула пайдаланылады:

$$A=C\times(1-\frac{r}{100})^{n},$$

мұндағы $A-n$ кезең бөлігінен соң болған амортизация құны, $C-$ бастапқы бағасы, r – әрбір жылға белгіленген амортизация нормасы, n – кезең бөліктерінің саны (мысалы, жылдар).

4-есеп.

Құрылыс құрылғысы 2400 фунт стерлингке сатып алынған. Егер амортизация нормасы 15% деп белгіленген болса, оның 6 жылдан кейінгі құнын тап.

$A=C\times(1-\frac{r}{100})^n$, мұнда $C=2400$, $r=15$, $n=6$.

Демек,

$A=2400\times(1-0{,}15)^6$,

$A=2400\times(0{,}85)^6$.

Амортизация құны шамамен 905,16 фунт стерлинг екенін табамыз.

Демек, құрылғының 6 жылдан кейінгі құны £2400 – £905,16 = £1494,84-ке тең.

Тұтыну (мысалы мебель, электронды-тұрмыстық техника, компьютер, автомашина, тағы басқалар) тауарларын немесе тұрғын үй (ипотека) сатып алу үшін түрлі несиелер ресімделеді. Әдетте, мұндай несиелер қысқа мерзімге беріледі және тұрақты немесе өзгеретін үстеме пайыз белгіленеді.

Төменде біз формулаларды пайдаланбай-ақ жылдам есеп-қисаптар үшін несие төлемі кестесін келтірдік (1000 ақша бірлігіне сәйкес):

Айлар	Жылдық үстеме пайыз						
	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%
12	86,0664	86,5267	86,9884	87,4515	87,9159	88,3817	88,8488
18	58,2317	58,6850	59,1403	59,5977	60,0571	60,5185	60,9820
24	44,3206	44,7726	45,2273	45,6847	46,1449	46,6078	47,0735
30	35,9789	36,4319	36,8883	37,3482	37,8114	38,2781	38,7481
36	30,4219	30,8771	31,3364	31,7997	32,2672	32,7387	33,2143
42	26,4562	26,9142	27,3770	27,8445	28,3168	28,7939	29,2756
48	23,4850	23,9462	24,4129	24,8850	25,3626	25,8455	26,3338
54	21,1769	21,6416	22,1124	22,5894	23,0724	23,5615	24,0566
60	19,3328	19,8012	20,2764	20,7584	20,2470	21,7424	22,2444

5-мысал.

Азамат 9200 еуро несие алды. Оған 12% жылдық пайыз төлемі және 3,5 жылдық төлем мерзімі белгіленген. Бір айға қанша төленуі қажет? Жалпы қанша төленуі қажет?

Төлем мерзімі 42 ай болғандықтан кестеден әрбір 1000 еуроға €29,2756 еуро төленуі қажет екенін анықтаймыз.

Демек, 9200 еуро үшін әр айда €9200 = €29,2756×9,2

= €269,33552

≈ €269,340 төленуі қажет.

Жалпы = €269,40×42

= €11314,80 төленуі қажет.

Жаттығулар

12. 10000 АҚШ доллары мөлшеріндегі қарыз 10 жылға жылдық пайыз ставкасы 5,75% бойынша алынды. Қарыз төлемдерін тең бөліктерде әрбір жарты жылда қандай мөлшерде жүзеге асыру қажет?

13. 15000 еуро мөлшеріндегі қарыз 36 айға жылдық пайыз ставкасы 4,5% бойынша алынды. Қарыз төлемдерін тең бөліктерде әрбір тоқсанда қандай мөлшерде беру қажет?

14. Бір адам банктен 8000 фунт стерлингті 3,5 жылға ай сайын 230 фунт стерлинг төлеу шартымен несиеге алады. Оған қандай жылдық пайыз ставкасы белгіленген еді?

15. 6800 АҚШ доллары мөлшеріндегі қарыз 2,5 жылға жылдық пайыз ставкасы 8% бойынша алынды. Қарыз төлемдерін тең бөліктерде ай сайын төлеу үшін әр айда қандай мөлшерде беру қажет?

16. Егер

a) 950 еуро мөлшеріндегі қарыз жылдық күрделі пайыз ставкасы 5,7%-бен 2-жылдың соңында;

b) 4180 фунт стерлинг мөлшеріндегі қарыз жылдық күрделі пайыз ставкасы 5,75%-бен 3-жылдың соңында;

c) 237000 Жапония иенасы мөлшеріндегі қарыз жылдық күрделі пайыз ставкасы 7,3%-бен 4-жылдың соңында

есептелінсе, жалпы күрделі пайыз төлемін тап.

17. Макс 8500 АҚШ доллары мөлшеріндегі банк депозитіне ақша қойды. Жылдық күрделі пайыз ставкасын 6%-бен белгілеп, банк әр тоқсанда Макстың есепшотына ақша өткізуде. 1 жылдан соң Макстың есепшотында қанша ақша болады?

18. Мария 24000 фунт стерлингті жылдық күрделі пайыз ставкасы 5% бойынша банкке қойды. Әр айда банк оның есепшотына ақша өткізуде. 3 айдан соң Марияның есепшотында қанша ақша болады?

19. Кредитор 45000 АҚШ доллары мөлшерінде жылдық күрделі пайыз ставкасы 8,5% бойынша қарыз берді. Егер төлемдер

а) қарапайым пайыздар;
b) әр жарты жылда күрделі пайыздар;
c) әр тоқсанда күрделі пайыздар
бойынша төленсе, 3 жылдан соң алынған табыстарды салыстыр.

20. Офис үшін мебель 2500 еуроға сатып алынды. Мұндай жиһаздардың амортизация нормасы 15%-ға тең екені белгілі. Төмендегі кестені дәптерге көшіріп жаз және толықтыр.

Жылдар	Амортизация	Бағасы
0		€2500
1	15%·€2500 = €375	
2		
3		

21. Азамат мебель сатып алу үшін 1200 АҚШ доллары мөлшерінде несие алды. Жылдық пайыз ставкасы 8%, төлем мерзімі 5 жыл болса, ол әр айда қанша төлеуі қажет? Жалпы қанша қаржы төленеді? Несие төлемі кестесін пайдалан.

22. Азамат тұрғын үйді жөндеу үшін 14000 АҚШ доллары мөлшерінде несие алды. Жылдық пайыз ставкасы 11%, төлем мерзімі 4 жыл болса, ол әр айда қанша төлеуі қажет? Жалпы қанша қаржы төленеді? Несие төлемі кестесін пайдалан.

Бақылау тапсырмалары

1. Банк әр жылға пайыз ставкасын 14% деп белгілеген. Кәсіпкер банктен алған қарызын және пайыз төлеміне қосымша 16000000 сумды 5 жылдың ішінде төледі және қарыздан құтылды. Кәсіпкер қанша мөлшерде қарыз алған?
2. Азамат бастапқыда банкке 20000000 сум қойып, 15 айда 900000 сум табыс алды. Егер төлем жылма-жыл жүзеге асырылған болса, жылдық пайыз ставкасы қаншаға тең?
3. Егер 20000000 сум қарыз жылдық күрделі пайыз ставкасы 6%-бен 1 жылға тоқсандарға бөліп төлеу шартымен алынған болса, кредитордың алатын табысы қанша болады?
4. Джон тұрғын үй сатып алу үшін 5 жылға 25000 АҚШ доллары мөлшерінде несие алған. Жылдық күрделі пайыз ставкасы 8% болса және төлемдер әр айда жүзеге асырылатын болса ол әр айда қанша ақша төлеуі қажет? Кредитор қанша табыс алады?
5. Құрылғы 45000 АҚШ долларына сатып алынды және 2 жыл 3 айдан соң ескіруінің нәтижесінде бағасы 28500 АҚШ долларына тең. Құрылғының жылдық амортизация нормасын тап.

III ТАРАУ

ЭЛЕМЕНТАР ФУНКЦИЯЛАР ЖӘНЕ ТЕҢДЕУЛЕР

25-28 ҚАРАПАЙЫМ РАЦИОНАЛ ТЕҢДЕУЛЕР ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ ЖҮЙЕЛЕРІ

Егер бір теңдеудің барлық шешімдері екінші теңдеудің де шешімдері болса, онда екінші теңдеу біріншісінің *нәтижесі* делінеді.

Екі теңдеудің шешімдерінің жиындары дәлме-дәл түссе, мұндай теңдеулер *мәндес* делінеді.

1-мысал. Теңдеулер мәндес пе?

1) $x+2=3$ және $x+5=6$; 2) $\frac{x^2+x}{x-1}=0$ және $\frac{x+1}{x-1}=0$.

△ 1) Екі теңдеу бірдей түбірге ие: x=1. Басқа түбірлер жоқ болғандықтан бұл теңдеулер мәндес.

2) Бірінші теңдеу 0 түбіріне ие, ал екіншісі мұндай түбірге ие емес. Демек, берілген теңдеулер мәндес емес. ▲

x айнымалылы екі $P(x)$ және $Q(x)$ көпмүше берілген болсын.

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ көрінісіндегі өрнек *рационал өрнек* делінеді.

Егер $A(x)$ және $B(x)$ – рациональ өрнектер болса,

$$A(x)=B(x)$$

көрінісіндегі теңдеу *рационал теңдеу* делінеді.

Алдымен ең қарапайым көріністегі

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=0 \qquad (1)$$

рационал теңдеуді қарастырайық.

$\frac{m}{n}$ бөлшек нөльге тең болуы үшін алымы нөльге тең болуы, ал бөлімі нөльге тең болмауы (0-ге бөлуге болмайды!) қажет және жеткілікті екені белгілі.

Демек, (1) теңдеуді шешу үшін $Q(x)\neq 0$ және $P(x)=0$ шарттарын бірдей қанағаттандыратын x белгісізінің барлық мәндерін табу қажет және жеткілікті.

Бұл жағдай қысқаша көрінісінде төмендегідей жазылады:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x)=0, \\ Q(x)\neq 0. \end{cases}$$

2-мысал. Теңдеуді шеш:

1) $\frac{x^2-2x+1}{x-7}=0$; 2) $\frac{x^2-2x+3}{x-7}=0$;

3) $\frac{2x^2-5x+3}{9x-13,5}=0$; 4) $\frac{(x-1)^2(x+2)}{x-1}=0$.

△ 1) $x^2-2x+1=0$ теңдеу бір ғана $x=1$ түбірге ие. $x=1$ болғанда бөлімі нөльден ерекшеленеді. Демек, берілген теңдеу $x=1$ шешімге ие.

2) $x^2-2x+3=0$ квадрат теңдеу шешімге ие емес, өйткені $D=1-3=-2<0$. Демек, берілген теңдеу де түбірлерге ие емес.

3) $2x^2-5x+3=0$ теңдеу квадрат теңдеу болып табылады. $D=b^2-4ac=(-5)^2-4\cdot 2\cdot 3=25-24=1>0$, демек, бұл теңдеу екі түбірге ие:

$$x_{1,2}=\frac{5\pm 1}{4}; \qquad \frac{m}{n}\,|\, m\in\square,\, n\in\square\ ; \qquad x_2=\frac{5+1}{4}=1,5.$$

Бірақ 1,5 саны $\frac{2x^2-5x+3}{9x-13,5}$ өрнектің бөлімін нөльге айналдырады, ал 1 саны айналдырмайды. Демек, берілген теңдеу бір ғана $x=1$ түбірге ие.

4) $(x-1)^2(x+2)=0$ теңдеу 1 және -2 екі түбірге ие. Бірақ 1 саны $(x-1)$ бөлімді нөльге айналдырады, ал -2 саны айналдырмайды. Демек, берілген теңдеу бір ғана $x=-2$ түбірге ие. ▲

Егер $A(x)$ немесе $B(x)$ өрнектердің ең кемінде біреуі бірнеше рационал өрнектердің жиынтығы көрінісінде болса, $A(x)=B(x)$ рационал теңдеуді шешу тәртібі төмендегідей болады:

1-қадам. Теңдеуге кірген бөлшектердің ортақ бөлімі табылады;

2-қадам. Теңдеудің екі жақ бөлігін ортақ бөлімге көбейтіледі;

3-қадам. Пайда болған теңдеудің түбірлері табылады;

4-қадам. Табылған түбірлерден ортақ бөлімді нөльге айналдыратындары алып тасталады.

3-мысал. $\frac{2}{2-x}+\frac{1}{2}=\frac{4}{x(2-x)}$ теңдеуді шеш.

△ Теңдеудің екі жақ бөлігін $2x(2-x)$ ортақ бөлімге көбейтеміз.

Пайда болған $4x+x(2-x)=8$ теңдеуді ықшамдап, мынадай квадрат теңдеу көрінісіне келтіреміз: $x^2-6x+8=0$;

$D=9-8=1>0$,

Демек, бұл теңдеу екі түбірге ие: $x_1=2$; $x_2=4$.

Тексеру.

Егер $x=2$ болса, бөлімі $x(2-x)=2(2-2)=0$. Яғни $x=2$ берілген теңдеудің түбірі емес.

Егер $x=4$ болса, бөлімі $x(2-x)=4(2-4)\neq 0$. Яғни $x=4$ берілген теңдеудің түбірі . *Жауабы:* 4 ▲

Егер $A(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$; $B(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ көрінісінде болса, $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{p(x)}{q(x)}$ көрінісіндегі рационал теңдеуді шешу үшін $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ пропорцияның негізгі қасиетін пайдалану мақсатқа сай:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow ad=bc.$$

Мұнда төмендегі алгоритм қолданылады :

1-қадам. $f(x)q(x)=p(x)g(x)$ теңдеудің түбірлері табылады;

2-қадам. Табылған түбірлерден $q(x), g(x)$ бөлімдерді нөльге айналдыратындары алып тасталады.

4-мысал. $\frac{x-2}{x+2}=\frac{x+3}{x-4}$ теңдеуді шеш.

△ $(x-2)(x-4)=(x+2)(x+3)$; $x^2-4x-2x+8=x^2+3x+2x+6$;

$-6x+8-5x-6=0$; $-11x=-2$; $x=\frac{2}{11}$.

Егер $x=\frac{2}{11}$ болса, $x+2=\frac{2}{11}+2\neq 0$; $x-4=\frac{2}{11}-4\neq 0$.

Жауабы: $\frac{2}{11}$. ▲

Кейбір жағдайларда берілген теңдеуде қолайлы алмастыру орындалып, ықшамдау теңдеуге айналдыруға болады.

5-мысал. Теңдеуді шеш:

1) $\left(\dfrac{2x}{x+1}\right)^4+5\left(\dfrac{2x}{x+1}\right)^2-36=0;$ 2) $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-x+2}+\dfrac{x}{x^2-2x+2}=1.$

1) $\left(\dfrac{2x}{x+1}\right)^2=t$ алмастыруды орындаймыз. Бұл жағдайда $t\geqslant 0$ және теңдеу $t^2+5t–36=0$ көрініске келеді. Соңғы теңдеу $t=–9$ және $t=4$ түбірлерге ие, олардың екіншісі оң мәнде.

Демек, $\left(\dfrac{2x}{x+1}\right)^2=4$, яғни $\dfrac{2x}{x+1}=2$ немесе $\dfrac{2x}{x+1}=-2$.

$\dfrac{2x}{x+1}=2$ теңдеу шешімге ие емес, ал $\dfrac{2x}{x+1}=-2$ теңдеу бір ғана $x=–0,5$ шешімге ие.

Жауабы: $x=–0,5$.

2) $x=0$ саны теңдеуді қанағаттандыратыны көрініп тұр. $x\neq 0$ болсын. Теңдеудің алымы мен бөлімін x-ке бөлсек:

$\dfrac{x+3+\dfrac{2}{x}}{x-1+\dfrac{2}{x}}+\dfrac{1}{x-2+\dfrac{2}{x}}=1$ теңдеуді пайда етеміз.

$z=x+\dfrac{2}{x}-2$ алмастыруын орындасақ, берілген теңдеу

$\dfrac{z+5}{z+1}+\dfrac{1}{z}=1$ көрінісіне келеді.

Соңғы теңдеуді шешеміз:

$$\frac{z+5}{z+1}+\frac{1}{z}=1 \Leftrightarrow \frac{(z+5)z}{(z+1)z}+\frac{z+1}{z(z+1)}-\frac{z(z+1)}{z(z+1)}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{z^2+5z+z+1-z^2-z}{z(z+1)}=0 \Leftrightarrow \frac{5z+1}{z(z+1)}=0 \Leftrightarrow z=-\frac{1}{5}$$

Енді x-ті табамыз.

$$x+\frac{2}{x}-2=-\frac{1}{5} \Leftrightarrow x+\frac{2}{x}-\frac{9}{5}=0 \Leftrightarrow 5x^2-3x+10=0.$$

$5x^2–9x+10=0$ квадрат теңдеудің дискриминанты теріс мәнде болғандықтан, ол ақиқат шешімге ие емес.

Жауабы: $x=0$.

Рационал теңдеулер жүйесі

Рационал теңдеулерден құралған жүйелерді шешу бізге белгілі болған қосу, орнына қою, тағы басқа тәсілдерге сүйенеді. Бұған қатысқан рационал өрнектердің бөлімдері нөльге тең болмайтынын атап өтеміз.

6-мысал. Жүйені шеш:

1) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{5}{6}, \\ x^2-y^2=5. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2xy-3\dfrac{x}{y}=15, \\ xy+\dfrac{x}{y}=15. \end{cases}$

△ 1) Бірінші теңдеуде $\dfrac{x}{y}=t$ алмастыруды орындасақ, $\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{t}$ $(t\neq 0)$ болады.

$$t-\frac{1}{t}=\frac{5}{6}\Leftrightarrow 6t^2-5t-6=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{3}{2}, \\ t=-\dfrac{2}{3} \end{array}\right. \text{ яғни } \left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{x}{y}=-\dfrac{2}{3}. \end{array}\right.$$

Бұдан не $\begin{cases} x=\dfrac{3}{2}y, \\ x^2-y^2=5 \end{cases}$ немесе $\begin{cases} x=-\dfrac{3}{2}y, \\ x^2-y^2=-5 \end{cases}$ жүйелерін пайда етеміз.

Осы жүйелерді шешеміз:

$\begin{cases} x=\dfrac{3}{2}y, \\ \dfrac{9}{4}y^2-y^2=5 \end{cases}$ немесе $\begin{cases} x=-\dfrac{3}{2}y, \\ \dfrac{4}{9}y^2-y^2=5. \end{cases}$

Бірінші жүйе (3, 2), (–3, –2) шешімдеріне ие, ал екінші жүйе шешімге ие емес.

Жауабы: (3; 2), (–3; –2).

2) $a=xy$, $b=\dfrac{x}{y}$ белгілеуді енгізейік.

$$\begin{cases} 2a-3b=15, \\ a+b=15 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=12, \\ b=3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy=12, \\ \dfrac{x}{y}=3 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=3y, \\ y\cdot 3y=12 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=3y, \\ y^2=4. \end{cases}$$

Жауабы: (6; 2), (–6; –2). ▲

Сұрақтар мен тапсырмалар

1. Рационал теңдеулерге анықтама бер.
2. Мәндес теңдеулерге анықтама бер.
3. Мәндес теңдеулер жүйесіне мысал айт.

Жаттығулар

1. Теңдеулерді шеш (**1–2**):

a) $\frac{x+1-9}{2(x-1)}=\frac{9}{2(x+4)}+\frac{1}{x-1}$; b) $\frac{2y-5}{y+5}=\frac{3y+21}{2y-1}$; c) $\frac{5x-7}{x-3}=\frac{4x-3}{x}$;

d) $\frac{2x}{x-1}-\frac{1}{x+1}=\frac{4x}{x^2-1}$; e) $\frac{x^2-2x}{x-2}=x^2-2$; f) $\frac{1}{x}-\frac{2x}{x+1}=0$;

g) $\frac{7}{2x+9}-6=5x$; h) $\frac{4}{x-2}+\frac{4}{x+2}=\frac{3}{2}$; i) $\frac{15}{x-2}=\frac{14}{x}+1$.

2. a) $\frac{1}{x^2-12x+36}+\frac{12}{36-x^2}=\frac{1}{x+6}$; b) $\frac{8c-3}{4c^2-2c+1}+\frac{6}{8c^3+1}=\frac{2}{2c+1}$;

c) $\frac{3x-2}{x-1}+\frac{x-4}{x+3}=\frac{3x^2+1}{(x-1)(x+3)}$; d) $\frac{2-3x}{x+1}-\frac{4}{3}\cdot\frac{x+1}{2-3x}=\frac{4}{3}$;

e) $\frac{x-49}{x+6}+\frac{2x+50}{x+5}=2$; f). $\frac{(x+2)^2-9}{x-1}\cdot(x-5)=-24$.

3. Мәндес теңдеулерді көрсет:

a) $\frac{(5x-4)}{x+1}=0$; b) $5x-4=0$; c) $(5x-4)(x+1)=0$;

d) $10x=8$; e) $\left(x-\frac{4}{5}\right)(x+1)=0$; f) $6x-4=x$;

g) $x^2+2x+18=0$; h) $2x^2+2x+11=0$.

4. Теңдеулер жүйесін шеш (4–7):

a) $\begin{cases}\frac{x}{2y+3}=3,\\ \frac{y}{2y+3}=-\frac{1}{9};\end{cases}$ b) $\begin{cases}\frac{3}{x}+\frac{5}{y}=2,\\ \frac{5}{x}+\frac{3}{y}=2;\end{cases}$ c) $\begin{cases}\frac{12}{x}+\frac{25}{y}=7,\\ \frac{6}{x}+\frac{5}{y}=2.\end{cases}$

5. a) $\begin{cases}\frac{5x}{8y}=\frac{8y}{5x},\\ 5x-8y=20;\end{cases}$ b) $\begin{cases}2x+\frac{7}{y}=11,\\ 7x+\frac{2}{y}=16;\end{cases}$ c) $\begin{cases}\frac{(x-9)(x-6)}{y+8}=0,\\ \frac{(y+8)(y-8)}{x-6}=0.\end{cases}$

6. a) $\begin{cases} 4x = \dfrac{25}{y} + 15, \\ 4y = \dfrac{25}{x} + 15; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{x}{4x-7} = -\dfrac{y}{4x-7}, \\ 4x^2 - 11y + 7 = 0; \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{x}{5x-4y} = \dfrac{y}{5y-4x}, \\ xy = -16. \end{cases}$

7. a) $\begin{cases} (x+1)(x-8) = 0, \\ \dfrac{y-3}{x+y-2} = 5; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{4}{y^2}, \\ xy = -8; \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y^5} = 5\dfrac{x^2}{y^4}, \\ x - 5y = 15. \end{cases}$

8. Клубтың залында 320 орын бар, қатарларға бірдей бөлінген. Әрбір қатардағы орындар санын 4-еуге арттырып, тағы бір қатар қосылған соң залда 420 орын болды. Залдағы қатарлар саны нешеу болды?

9. 108 емтихан тапсырушы шығарма жазды. Оларға 480 парақ қағаз таратылды, сонымен бірге әрбір қыз әрбір ұлға қарағанда бір парақ артық қағаз алды. Ал барлық қыз ұлдар неше парақ қағаз алса, сонша парақ қағаз алды, Неше қыз және неше ұл болған?

29-32 ҚАРАПАЙЫМ ИРРАЦИОНАЛ ТЕҢДЕУЛЕР ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ ЖҮЙЕЛЕРІ

Айнымалысы түбір астында болатын теңдеу *иррационал теңдеу* делінеді.

Иррационал теңдеулердің кейбір түрлерін шешу тәсілдерін көрелік.

$$\text{I} \quad \sqrt{f(x)} = g(x) \qquad (1)$$

көрінісіндегі қарапайым иррационал теңдеуді қарастырайық.

$f(x)$, $g(x)$ өрнектер теріс емес болғанда осы теңдеулердің екі жақ бөлігін квадратқа шығарсақ, мәндес теңдеуге келеміз.

$f(x)=g^2(x)\geqslant 0$ болғандықтан $f(x)$ өрнек теріс емес болады.

Демек, (1) теңдеуді шешу

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \ge 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$$

ереже бойынша жүзеге асырылады.

Дәл осылай $\sqrt[2n]{f(x)} = h(x)$ көрінісіндегі теңдеу $\begin{cases} f(x) = h^{2n}(x) \\ h(x) \ge 0 \end{cases}$ жүйеге пара-пар.

1-мысал. $\sqrt{4+2x-x^2} = x-2$ теңдеуді шеш.

△ Теңдеудің әр екі жақ бөлігін квадратқа шығарып, нәтижеде $2x-x^2=x^2-4x$ немесе $2x(x-3)=0$ теңдеуге ие боламыз. Бұдан $x_1=0$, $x_2=3$ түбірлерді пайда етеміз. $x>2$ болғандықтан $x=3$ берілген теңдеудің шешімі.

II $f(x)\cdot\sqrt{g(x)}=0$ *көрінісіндегі теңдеу.*

Екі өрнектің көбейтіндісі нөльге тең болуы үшін, олардың кемінде біреуі нөльге тең болуы қажет.

Демек, $f(x)\cdot\sqrt{g(x)}=0$ болуы үшін не $g(x)=0$ теңдік немесе $\begin{cases} f(x)=0, \\ g(x)\ge 0. \end{cases}$ жүйе орынды болуы қажет.

Бұл жағдайды қысқартып $\left[\begin{array}{l} g(x)=0, \\ \begin{cases} f(x)=0, \\ g(x)\ge 0 \end{cases} \end{array}\right.$ түрінде жазамыз.

2-мысал. $(x^2+3x-10)\sqrt{x+4}=0$ теңдеуді шеш.

$$(x^2+3x-10)\sqrt{x+4}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+3x-10=0, \\ x+4\ge 0, \end{cases} \\ x+4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-5, \\ x=2, \end{array}\right. \\ x+4\ge 0, \end{cases} \\ x=-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=-4. \end{array}\right.$$

Жауабы: –4 және 2.

3-мысал. $(x-3)\sqrt{x^2-5x+4}=2x-6$ теңдеуді шеш.

Берілген теңдеу $(x-3)(\sqrt{x^2-5x+4}-2)=0$ пішінге келтіріледі. $\begin{cases} x=3, \\ x^2-5x+4\ge 0 \end{cases}$ жүйе шешімге ие болғандықтан $\sqrt{x^2-5x+4}=2$ теңдеуді қарастыру жеткілікті. Бұл теңдеудің екі жақ бөлігін квадратқа шығарсақ, оған мәндес болған $x^2-5x+4=4$ теңдеуін пайда етеміз.

Жауабы: 0 және 5.

III $\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{g(x)}$ *көрінісіндегі теңдеу.*

Мұндай теңдеулерді шешуде түбір дәрежесі n санының жұп немесе тақ екеніне қаралады және берілген теңдеу мәндес теңдеуге әкелінеді.

Егер *n - тақ болса:* $\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{g(x)} \Leftrightarrow f(x)=g(x)$.

Мысалы, $\sqrt[3]{f(x)}=\sqrt[3]{g(x)}$ теңдеу $f(x)=g(x)$ теңдеуге мәндес.

4-мысал. $\sqrt[3]{x^2+8x-8}=\sqrt[3]{2x-1}$ теңдеуді шеш.

$$\sqrt[3]{x^2+8x-8}=\sqrt[3]{2x-1} \Leftrightarrow x^2+8x-8=2x-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=-7. \end{array}\right.$$

Жауабы: 1 және –7.

Егер *n жұп*, яғни $n=2k$ болса, берілген теңдеу осы жүйелердің әрбіріне мәндес болады:

$$\sqrt[2k]{f(x)}=\sqrt[2k]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x), \\ f(x)\ge 0 \end{cases} \quad \text{немесе} \quad \sqrt[2k]{f(x)}=\sqrt[2k]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x), \\ g(x)\ge 0. \end{cases}$$

Іс жүзінде бұлардан оңайлау болғандары таңдалады.

5-мысал. $\sqrt[6]{x^2-2}=\sqrt[6]{x}$ теңдеуді шеш.

$$\triangle\ \sqrt[6]{x^2-2}=\sqrt[6]{x} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2=x, \\ x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=2, \end{array}\right. \\ x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$$

Жауабы: $x=2$. ▲

IV *Айнымалыларды алмастыру.*

6-мысал. $\sqrt{\dfrac{3-x}{x-1}}+3\sqrt{\dfrac{x-1}{3-x}}=4$ теңдеуді шеш.

△ $u=\sqrt{\dfrac{3-x}{x-1}}$ алмастыру енгіземіз. Онда

$$\begin{cases} u+\dfrac{3}{u}=4, \\ u\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} u=1, \\ u=3, \end{array}\right. \\ u\ge 0. \end{cases}$$

Енді берілген теңдеудің түбірлерін табамыз.

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{\dfrac{3-x}{x-1}}=1, \\ \sqrt{\dfrac{3-x}{x-1}}=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=1,2. \end{array}\right.$$

Жаубы: $x=2$ және $x=1,2$. ▲

7-мысал. $x^2+3x+\sqrt{x^2+3x}=6$ теңдеуді шеш.

△ $z=\sqrt{x^2+3x}$ алмастыру енгіземіз:

$$\begin{cases} z^2+z=6, \\ z\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} z=-3, \\ z=2, \end{array}\right. \\ z\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow z=2.$$

Енді берілген теңдеудің түбірлерін табамыз.

$$\sqrt{x^2+3x}=2 \Leftrightarrow x^2+3x=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4, \\ x=1. \end{array}\right.$$

Жауабы: $x=-4$ және $x=1$. ▲

Иррационал теңдеулер жүйесі

Иррационал теңдеулерден құралған жүйелерді шешуде бізге белгілі болған қосу, орнына қою, тағы басқа тәсілдерге сүйенеміз. Әрине бұған қатысқан иррационал өрнектердің бар болу салаларын ескерудің қажеттілігін атап өтеміз.

8-мысал. $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=5, \\ \sqrt{xy}=6 \end{cases}$ теңдеулер жүйесін шеш.

△ $$\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=5, \\ \sqrt{xy}=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2\sqrt{xy}=25, \\ xy=36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=13, \\ xy=36 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=13-x, \\ x(13-x)=36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=13-x, \\ x^2-13x+36=0. \end{cases}$$

Бұл жүйеден (4; 9) және (9; 4) шешімдерді табамыз. ▲

9-мысал. $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3, \\ x+y=9 \end{cases}$ теңдеулер жүйесін шеш.

△ $\sqrt[3]{x}=u$, $\sqrt[3]{y}=v$ деп белгілейміз, сондай-ақ қысқа көбейту формуласын пайдалансақ:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3, \\ x+y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=3, \\ u^3+v^3=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=3, \\ (u+v)(u^2-uv+v^2)=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=3, \\ u^2-uv+v^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=3, \\ (u+v)^2-3uv=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=3, \\ uv=2. \end{cases}$$

жүйеге ие боламыз. Бұл жүйенің шешімі $u_1=1$, $v_1=2$, $u_2=2$, $v_2=1$ болады. Бұдан (1; 8) және (8; 1) шешімдерін табамыз. ▲

10-мысал

Жазықтықта $A(3;\ 4)$ және $B(-2;\ 5)$ нүктелерден тең арақашықтықта орналасқан $C(x;\ 0)$ нүктесін тап.

△ $AC=BC$ екенінен екі нүкте арасындағы арақашықтық формуласына орай $\sqrt{(x-3)^2+(0-4)^2}=\sqrt{(x+2)^2+(0-5)^2}$ иррационал теңдеуді пайда етеміз.

Бұл теңдеуді мәндес теңдеу қасиеттерін және қысқа көбейту формулаларын пайдаланып шешсек, $(x-3)^2+16=(x+2)^2+25$ немесе $-10x=4$ теңдеуін пайда етеміз. Соңғы теңдеудің түбірі $x=-0{,}4$ болады. Демек, ізделінген нүкте $C(-0{,}4;\ 0)$ екен. ▲

11-мысал

Жазықтықта $A(-1;\ 2)$ және $B(3;\ -4)$ нүктелерден тең арақашықтықта орналасқан және $y=3x$ түзуде жататын нүктені тап.

△ Шартқа орай ізделінген нүктенің ординатасы $y=3x$ болады. Демек, ізделінген нүкте $C(x;3x)$ координаталы нүкте екен. $AC=BC$ екендіктен екі нүкте арасындағы арақашықтық формуласына орай, $\sqrt{(x+1)^2+(3x-2)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(3x+4)^2}$ иррационал теңдеуді пайда етеміз. Бұл теңдеуді шешсек, $(x+1)^2+(3x-2)^2=(x-3)^2+(3x+4)^2$, немесе $-28x=20$ теңдеуге келеміз. Соңғы теңдеудің түбірі $x=-\frac{5}{7}$ болады. Демек, ізделінген нүкте $C(-5/7;\ -15/7)$ екен.

Жауабы: $C(-5/7;\ -15/7)$. ▲

Сұрақтар мен тапсырмалар

1. Иррационал теңдеулерге анықтама бер және мысал айт.
2. Мәндес иррационал теңдеулерге анықтама бер.
3. $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=a,\\ \sqrt{xy}=b\end{cases}$ көрінісіндегі теңдеулер жүйесі қалай шешіледі?
4. $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=a,\\ x+y=b\end{cases}$ көрінісіндегі теңдеулер жүйесі қалай шешіледі?

Жаттығулар

Теңдеуді шеш (**10–19**):

10. a) $\sqrt{3x+5}=-8$; b) $\sqrt{4x-6}=9$; c) $\sqrt{5x+9}=17$; d) $\sqrt{13x+5}=-17$.

11. a) $\sqrt{12x-11}=15$; b) $\sqrt{23x+5}=-7$; c) $\sqrt{23x-7}=27$; d) $\sqrt{6x+13}=-2$.

12. a) $\sqrt{x^2-3x+1}=x+2$; b) $\sqrt{x^2+5x+2}=x+4$.

13. a) $\sqrt{x^2+7x+1}=x-1$; b) $\sqrt{x^2-6x+2}=x+5$.

14. a) $\sqrt{x^2+3x-2}=\sqrt{-2x-1}$; b) $\sqrt{-2x^2-3x-2}=\sqrt{x+1}$.

15. a) $\sqrt{x^2+8x-7}=\sqrt{-x-1}$; b) $\sqrt{-x^2+3x+5}=\sqrt{x+10}$.

16. a) $x^2+3x-1+\sqrt{x^2+3x-9}=0$; b) $x^2-x-7+\sqrt{x^2-x-9}=0$.

17. a) $x^2+2x-11+\sqrt{x^2+2x-1}=0$; b) $x^2-8x+3+\sqrt{x^2-8x-7}=0$.

18. a) $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}=3$; b) $\sqrt{x+5}+\sqrt{x}=5$.

19. a) $\sqrt{x-4}+\sqrt{x+11}=5$; b) $\sqrt{x}+\sqrt{x+4}=3$.

Теңдеулер жүйесін шеш (**20–23**):

20. a) $\begin{cases} 2\sqrt{x}=3y, \\ y^2+2\sqrt{x}=4; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5\sqrt{x}=4y, \\ y^2+5\sqrt{x}=5. \end{cases}$

21. a) $\begin{cases} x-4\sqrt{y}=1, \\ x+2y=17; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+2\sqrt{y}=-2, \\ x+2y=2. \end{cases}$

22. a) $\begin{cases} (\sqrt{x}-5)(\sqrt{y}-3)=0, \\ 3x+5y=60; \end{cases}$ b) $\begin{cases} (\sqrt{x}-2)(\sqrt{y}-3)=0, \\ 3x+2y=15. \end{cases}$

23. a) $\begin{cases} 5x-3\sqrt{y}=-34, \\ 5x+3\sqrt{y}=-16; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 6x-5\sqrt{y}=-37, \\ 6x+5\sqrt{y}=13. \end{cases}$

24. Жазықтықта $A(5;\ 7)$ және $B(-3;\ 4)$ нүктелерден тең арақашықтықта орналасқан $C(x;\ 0)$ нүктені тап.

25. Жазықтықта $A(5;\ 9)$ және $B(-6;\ 7)$ нүктелерден тең арақашықтықта орналасқан $C(x;\ 0)$ нүктені тап.

33-36 ҚАРАПАЙЫМ КӨРСЕТКІШТІК ТЕҢДЕУЛЕР ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ ЖҮЙЕЛЕРІ

Көрсеткіштік теңдеулер

Айнымалысы дәрежеде қатысқан теңдеу *көрсеткіштік теңдеу* делінеді.

Көрсеткіштік теңдеуді шешуде төмендегі тепе-теңдіктер пайдаланылады: $(a>0,\ \ a\neq 1,\ \ b>0)$

1. $a^x=a^y \Leftrightarrow x=y$;
2. $a^x a^y=a^{x+y}$;
3. $\dfrac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$;
4. $a^x b^x=(ab)^x$;
5. $\left(a^x\right)^y=a^{xy}$;
6. $a^0=1$.

Көрсеткіштік теңдеулердің кейбір түрлерін шешу тәсілдерін көрсетейік.

I *Бірдей негізге келтіру*

Бұл тәсілде теңдеу $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ көріністегі теңдеуге әкелінеді. Бұдан $f(x)=g(x)$ болады.

1-мысал. $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7}=\left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$ теңдеуді шешу.

△ $\frac{3}{7}=\left(\frac{7}{3}\right)^{-1}$ екенін ескеріп, берілген теңдеуді $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7}=\left(\frac{3}{7}\right)^{-7x+3}$ көріністе жазамыз.

1-тепе-теңдікке орай $3x-7=-7x+3, \quad x=1.$

Жауабы: 1.▲

2-мысал. $0{,}125\cdot 4^{2x-8}=\left(\frac{0,25}{\sqrt{2}}\right)^{-x}$ теңдеуді шеш.

△ Теңдеуді төмендегі көріністе жазамыз:

$$\frac{1}{8}\cdot 2^{2(2x-8)}=\left(\frac{1}{4}\cdot 2^{-\frac{1}{2}}\right)^{-x} \qquad 2^{-3}\cdot 2^{2(2x-8)}=\left(2^{-2}\cdot 2^{-\frac{1}{2}}\right)^{-x}$$

2-тепе-теңдікке орай $2^{-3+2(2x-8)}=\left(2^{-2-0,5}\right)^{-x}$ немесе $2^{4x-19}=2^{2,5x}$.

Соңғы теңдеу $4x-19=2,5x$

теңдеуге мәндес. Бұдан $x=\frac{38}{3}$.

Жауабы: $x=\frac{38}{3}$.▲

II *Жаңа айнымалыны енгізу.*

3-мысал. $5^{2x-1}+5^{x+1}=250$ теңдеуді шеш.

△ 2-тепе-теңдікті қолданып, теңдеуді $5^{2x}\cdot 5^{-1}+5^{x}\cdot 5-250=0$ етіп жазамыз.

$5^x=t>0$ деп, жаңа айынмалыны енгіземіз. Онда $\frac{1}{5}t^2+5t-250=0$ теңдеуге келеміз.

Ол $t_1=-50$, $t_2=25$ түбірлерге ие. Бірақ $t_1=-50$ түбір $t>0$ шартты қанағаттандырмайды. Демек, $5^x=25$ va $x=2$.

Жауабы: $x=2$.▲

4-мысал. $9^x+6^x=2\cdot 4^x$ теңдеуді шеш.

△ Теңдеудің екі жақ бөлігін $4^x\neq 0$-ге бөлеміз:

$$\left(\frac{9}{4}\right)^x+\left(\frac{3}{2}\right)^x=2 \text{ немесе } \left(\frac{3}{2}\right)^{2x}+\left(\frac{3}{2}\right)^x-2=0.$$

$\left(\frac{3}{2}\right)^x = t > 0$ деп, соңғы теңдеуді $t^2 + t - 2 = 0$ көрініске келтіреміз. Бұл теңдеудің шешімдерін табамыз: t_1=–2, t_2=1.

t_1-дің мәні үшін t>0 шарт орындалмады. Демек,

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1, \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^0 \quad \Rightarrow x = 0.$$

Жауабы: x=0.▲

5-мысал. $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4$ теңдеуді шеш.

△ $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)\cdot\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right) = 1$ болғандықтан $\sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$.

Теңдеуді $\left(\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4$ көрінісінде жазамыз.

$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = t > 0$ дейміз. Бұдан $\frac{1}{t} + t = 4$, яғни $t^2 - 4t + 1 = 0$.

Соңғы теңдеу $t_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$ түбірлерге ие.

1-жағдай. $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 2+\sqrt{3}, \quad \left(2+\sqrt{3}\right)^{\frac{x}{2}} = 2+\sqrt{3}, \quad \frac{x}{2} = 1, \quad x = 2.$

2-жағдай. $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 2-\sqrt{3}, \quad \left(\frac{1}{2-\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{2}x} = 2-\sqrt{3},$

$\left(2-\sqrt{3}\right)^{-\frac{1}{2}x} = 2-\sqrt{3}, \quad -\frac{x}{2} = 1, \quad x = -2.$

Жауабы: x=–2 және x=2. ▲

III *Ортақ көбейткішті жақшаның сыртына шығару.*

6-мысал. $6^x + 6^{x+1} = 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2}$ теңдеуді шеш.

△ Сол жаққа 6^x-ны, ал оң жаққа 2^x-ні жақшадан сыртқа шығарамыз. Нәтижеде $6^x(1+6) = 2^x(1+2+4)$ немесе 6^x=2^x теңдеуге келеміз. Бұл теңдеудің екі жағын $2^x \neq 0$-ге бөлсек, 3^x=1, яғни x=0-ді пайда етеміз.

Жауабы: x=0.▲

Ең қарапайым көрсеткіштік теңдеулер жүйесі

7-мысал. Теңдеулер жүйесін шеш: $\begin{cases} 3^{x+y} = 27, \\ 2^{5x-y} = 8. \end{cases}$

△ Дәреженің қасиеттеріне орай теңдеулер жүйесі төмендегі теңдеулер жүйесіне мәндес: $\begin{cases} 3^{x+y} = 3^3, \\ 2^{5x-y} = 2^3. \end{cases}$ Бұдан $\begin{cases} x+y=3, \\ 5x-y=3 \end{cases}$ жүйесіне келеміз. Оның шешімдері x=1, y=2 екені көрініп тұр.

Жауабы: x=1, y=2. ▲

8-мысал. Теңдеулер жүйесін шеш: $\begin{cases} 3^{5x+6y} = 9, \\ 2^{7x+3y} = 8. \end{cases}$

△ Дәреженің қасиеттеріне орай теңдеулер жүйесі төмендегі көрініске ие болады: $\begin{cases} 3^{5x+6y} = 3^2, \\ 2^{7x+3y} = 2^3. \end{cases}$

Ал соңғы теңдеулер жүйесі $\begin{cases} 5x+6y=2, \\ 7x+3y=3 \end{cases}$ сызықты жүйеге пара-пар. Сызықты теңдеулер жүйесінің 2-теңдеуін (–2)-ге көбейтіп 1-теңдеуге қоссақ, $-9x=-4$ теңдеуі пайда болады. Бұдан $x=\frac{4}{9}$ екені табылады. Оны 2-теңдеуге қойсақ, $\frac{28}{9}+3y=3$ немесе $3y=3-\frac{28}{9}$, немесе $3y=-\frac{1}{9}$, немесе $y=-\frac{1}{27}$ -ні табамыз. *Жауабы:* $x=\frac{4}{9}$, $y=-\frac{1}{27}$. ▲

9-мысал. Теңдеулер жүйесін шеш: $\begin{cases} 4^x + 5^y = 9, \\ 4^x - 5^y = -1. \end{cases}$

△ $4^x=u$, $5^x=v$ белгілеу қажет, берілген теңдеулер жүйесі мынадай көрініске ие болады: $\begin{cases} u+v=9, \\ u-v=-1. \end{cases}$ Көрініп тұрғанындай, бұл теңдеулердің шешімі u=4, v=5. *Онда* $4^x=4$ және $5^y=5$ теңдеулерін пайда етеміз. Осыдан x=1, y=1 шешімдерін табамыз.

Жауабы: x=1, y=1. ▲

Жаттығулар

Теңдеуді шеш (**26–35**):

26. a) $4^{3x+5}=4^{3-5x}$; b) $7^{4x+5}=7^{9-5x}$; c) $6^{x+5}=6^{3x}$;
d) $8^{x+5}=8^{2-5x}$; e) $11^{x}=11^{2+5x}$; f) $2^{x-5}=2^{25x}$.

27. a) $2\cdot2^{x+2}-3\cdot2^{x+1}-5\cdot2^{x}=-6$; b) $3\cdot5^{x+3}-5^{x+2}-2\cdot5^{x+1}=68$;
c) $2\cdot4^{x+2}+4^{x+1}-5\cdot4^{x}=31$; d) $2\cdot7^{x+2}-2\cdot7^{x+1}-14\cdot7^{x}=10$.

28. a) $11^{3x^2+46}=11^{x^2+25x}$; b) $3^{x^2-4x}=3^{2(x^2-15)}$;
c) $7^{2x^2-4}=7^{3(x^2-x)}$; d) $5^{5x^2+x}=5^{3(x^2-2x)}$.

29. a) $9^{x}+3^{x}-6=84$; b) $25^{x}+5^{x}-30=0$;
c) $5\cdot4^{x}+2^{x}-6=0$; d) $9^{x}+3^{x}-12=0$.

30. a) $9\cdot25^{x}-7\cdot15^{x}-16\cdot9^{x}=0$; b) $7\cdot16^{x}+9\cdot12^{x}-16\cdot9^{x}=0$.

31. a) $4^{x}+7\cdot6^{x}-8\cdot9^{x}=0$; b) $9\cdot16^{x}+7\cdot12^{x}-16\cdot9^{x}=0$.

32. a) $(0{,}125)^{x-1}=\sqrt{2^{5-4x}}$; b) $\frac{4}{5}\cdot(0{,}8)^{x-1}=(1{,}25)^{x+3}$.

33. a) $32^{x^2+x}=\frac{4}{16^{x}}$; b) $4^{x}-10\cdot2^{x-1}=24$ р.

34. a) $4^{\sqrt{x-2}}+16=10\cdot2^{\sqrt{x-2}}$; b) $5\cdot2^{3(x-1)}-3\cdot2^{5-3x}+7=0$.

35. a) $2^{x+\sqrt{x^2-4}}-5\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{x-2+\sqrt{x^2-4}}-6=0$; b) $8^{x}+18^{x}=2\cdot27^{x}$.

36. Клиент 100 000 000 сумды банкке 22% жылдық пайыз ставкасымен белгілі бір мерзімге қойды. Мерзім соңында ол 221 533 456 сум алды. Ақша неше жылға қойылғанын тап.

37. Кәсіпкер 10 000 000 сумды банкке 21% жылдық пайыз ставкасымен белгілі бір мерзімге қойды. Мерзім соңында ол 17 715 610 сум алды. Ақша неше жылға қойылғанын тап.

38. Тұрғындар саны жылына 4% артса, неше жылдан соң тұрғындар саны 3 есе артады?

39. Тұрғындар саны жылына 2% азайса, неше жылдан соң ол 10% азаяды?

40. Теңдеулер жүйесін шеш (**40–43**):

a) $\begin{cases}3^{5x-6y}=27,\\2^{7x+3y}=32;\end{cases}$ b) $\begin{cases}3^{x+16y}=81,\\2^{3x-5y}=4;\end{cases}$ c) $\begin{cases}3^{x+2y}=81,\\9^{3x}\cdot3^{y}=27.\end{cases}$

41. a) $\begin{cases}3^{5x-y}=243,\\2^{7x+11y}=16;\end{cases}$ b) $\begin{cases}3^{x+8y}=9,\\2^{x-12y}=64;\end{cases}$ c) $\begin{cases}2^{x}+2^{y}=6,\\2^{x}-2^{y}=2.\end{cases}$

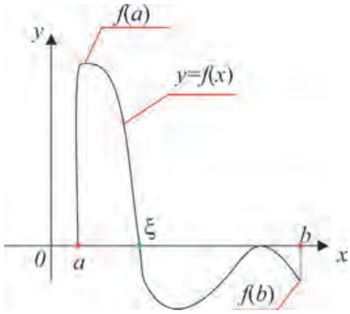
42. a) $\begin{cases} 5^{3x-y}=25 \\ 2^{x^2+xy+y^2}=8 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 5^{x+2y}=125 \\ 2^{x^2+3xy-y^2}=8 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 11^x+7^y=18 \\ 11^x-7^y=4 \end{cases}$.

43. a) $\begin{cases} 5^{x+y}=25 \\ 2^{x^2-3xy+2y^2}=1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 5^{3x-y}=25 \\ 2^{x^2+xy+y^2}=8 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 6^x+3^y=39 \\ 6^x\cdot 3^y=108 \end{cases}$.

37-38 ТЕҢДЕУЛЕРДІ ЖУЫҚТАП ШЕШУ

Егер $f(x)$ көпмүше $[a, b]$ кесіндінің ұштарында түрлі таңбадағы мәндерді қабылдаса, яғни $f(a)\cdot f(b)<0$ болса, осы кесіндінің ішінде $f(x)=0$ теңдеудің кемінде бір шешімі бар. Яғни, мынадай $\xi\in[a, b]$ ("кси" деп оқылады) бар болып $f(\xi)=0$.

Бұл растау төмендегі сызбада өрнектелген.



Теңдеудің дәл осы бір түбірін өз ішіне алған $[a, b]$ кесіндіні қарастырайық.

Кесіндіні теңдей екіге бөлу тәсілі $[a, b]$ кесіндіні пайда болатын кесіндінің ұзындығы берілген ε дәлдіктен кіші болғанға дейін теңдей екіге бөлуден құралған.

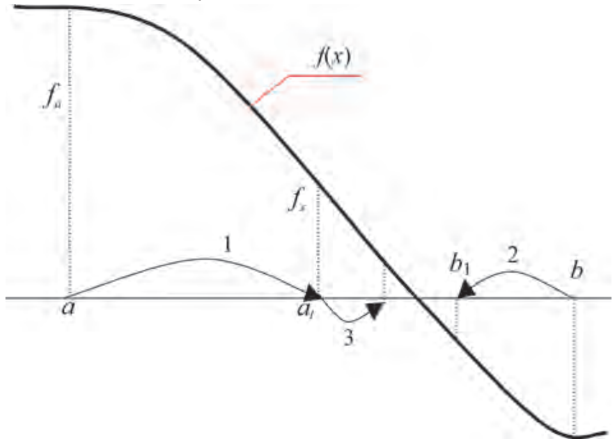
Ол үшін:

1) $x=a$-да $f(x)$ өрнектің $f_a=f(a)$ мәні есептелінеді.
2) кесінді теңдей екіге бөлінеді, яғни $x=(b-a)/2$ есептелінеді;
3) $f(x)$ өрнектің $x=(b-a)/2$-дегі f_x мәні есептелінеді.
4) $f_a\cdot f_x>0$ шарты тексеріледі;
5) егер бұл шарт орындалса, жаңа кесіндінің сол жақ шекарасы ретінде алдыңғы кесіндінің ортасы алынады, яғни $a=x, f_a=f_x$ деп алынады (кесіндінің сол жақ шекарасы ортаға өтеді);
6) егер бұл шарт орындалмаса, жаңа кесіндінің оң жақ шекарасы ортаға өтеді, яғни $b=x$ деп оқылады;

7) кесіндіні кезектегі бөлуден соң $b-a<\varepsilon$ шарт орындалуы тексеріледі.

8) егер бұл шарт орындалса, есептеулер аяқталады. Мұнда жуық шешім ретінде x-тің соңғы есептелінген мәні алынады. Егер бұл шарт орындалмаса, осы алгоритмнің 2-қадамына өтіп (қайтып), есептеулер жалғастырылады.

Кесіндіні теңдей екіге бөлу тәсілінің маңызы осы сызбада өрнектелген:



Ақиқат түбір жатқан аралықты табу

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c=0$ теңдеу түбірі жатқан аралықты табу үшін $A=max\{a,b,c\}$ және $B=max\{\frac{1}{c};\ \frac{a}{c};\ \frac{b}{c}\}$ есептелінеді.

Берілген теңдеудің түбірі үшін $\frac{1}{1+B}<|x|<1+A$ теңсіздік орынды болады. Демек, берілген теңдеудің кемінде 1 түбірі $(-1-A;\ 1+A)$ аралықта орналасқан екен. Осы түбірді жуықтап табу үшін $-1-A<d_1<d_2<1+A$ және $f(d_1)\cdot f(d_2)=(d_1^3+ad_1^2+bd_1+c)(d_2^3+ad_2^2+bd_2+c)<0$ теңсіздіктерді қанағаттандыратын d_1 және d_2 бүтін сандар табылады.

1-мысал. $2x^3+3x^2+5x+1=0$ теңдеу түбірі жатқан аралықты тап.

△ Теңдеудің әр екі жақ бөлігін 2-ге бөлсек, $x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}=0$ теңдеу пайда болады. $a=\frac{3}{2}$; $b=\frac{5}{2}$; $c=\frac{1}{2}$ болғандықтан, $A=max\{\frac{3}{2};\ \frac{5}{2};\ \frac{1}{2}\}=2,5$.

Демек, $x\in(-2,5;2,5)$ аралықта теңдеудің кемінде 1 түбірі бар. Теңдеу $(0;2,5)$ аралықта түбірге ие емес, өйткені $x_0\in(0;\ 2,5)$ болса, $2x_0^3+3x_0^2+5x_0+1>0$ болады. Демек, теңдеу $(-2,5;\ 0)$ аралықта түбірге ие екен. Осы аралықты кішірейту үшін бүтін сандарды аламыз, яғни $d_1=-2$; $d_2=-1$; $d_3=0$.

Енді $d_1=-2$; $d_2=-1$; $d_3=0$ сандарды теңдеуге қойып және төмендегі шарттарды тексеріп

$$d_1^3+\frac{3}{2}d_1^2+\frac{5}{2}d_1+\frac{1}{2}=-8+6-5+0{,}5=-6{,}5<0;$$

$$d_2^3+\frac{3}{2}d_2^2+\frac{5}{2}d_2+\frac{1}{2}=-1+1{,}5-2{,}5+0{,}5=-1{,}5<0;$$

$d_3^3+\frac{3}{2}d_3^2+\frac{5}{2}d_3+\frac{1}{2}=0{,}5>0$ теңдеудің түбірі $(-1;0)$ аралықта екенін табамыз. ▲

Теңдеулердің түбірін берілген ε дәлдікте аралықты теңдей 2-ге бөліп табу тәсілі

Жоғарыда белгілі болғанындай, егер $(\alpha^3+a\alpha^2+b\alpha+c)(\beta^3+a\beta^2+b\beta+c)<0$ болса, теңдеудің түбірі $(\alpha;\ \beta)$ аралықта болады. Енді $\gamma=\frac{\alpha+\beta}{2}$ болсын. Егер $|\gamma^3+a\gamma^2+b\gamma+c|<\varepsilon$ болса, $x=\gamma$ сан – теңдеудің ε дәлдіктегі түбірі. Егер $(\gamma^3+a\gamma^2+b\gamma+c)(\beta^3+a\beta^2+b\beta+c)<0$ болса, түбір $(\gamma;\ \beta)$ аралықтан ізделінеді; егер $(\gamma^3+a\gamma^2+b\gamma+c)(\alpha^3+a\alpha^2+b\alpha+c)<0$ болса, түбір $(\alpha;\ \gamma)$ аралықтан ізделінеді. Осы үдеріс түбір қажетті дәлдікте табылғанға дейін жалғастырылады.

2-мысал.

$x^3+1{,}5x^2+2{,}5x+0{,}5=0$ теңдеудің түбірін $\varepsilon=0{,}1$ дәлдікте тап.

△ Түбір $(-1;\ 0)$ аралықта жатқаны алдыңғы мысалда көрілді. $\gamma=\frac{-1+0}{2}=-0{,}5$ және $(-0{,}5)^3+1{,}5(-0{,}5)^2+2{,}5(-0{,}5)+0{,}5=-0{,}5<0$ болғандықтан теңдеудің түбірі $(-0{,}5;\ 0)$ аралықта екен.

$\gamma=\frac{-0{,}5+0}{2}=-0{,}25$ және $|(-0{,}25)^3+1{,}5(-0{,}25)^2+2{,}5(-0{,}25)+0{,}5|=|-0{,}046|<0{,}1$ болғандықтан теңдеудің 0,1 дәлдіктегі шешімі $x=-0{,}25$ болады. ▲

Сұрақтар мен тапсырмалар

1. $x^3+ax^2+bx+c=0$ теңдеудің түбірі жатқан аралық қалай табылады?
2. Теңдеудің түбірі берілген ε дәлдікте аралықты теңдей 2-ге бөліп табу тәсілін түсіндіріп бер.

Жаттығулар

Теңдеудің түбірі жатқан аралықты тап (**44–47**):

44. 1) $x^3+3x^2+5x+1=0$; 2) $x^3+3x^2+7x+6=0$.

45. 1) $2x^3+4x^2+5x+1=0$; 2) $x^3+4x^2+9x+17=0$.

46. 1) $4x^3+3x^2+5x+7=0$; 2) $x^3+x^2+x+19=0$.

47. 1) $2x^3+3x^2+5x+9=0$; 2) $x^3+x^2+x+19=0$.

Теңдеудің түбірін $\varepsilon=0{,}1$ дәлдікте тап (**48−51**):

48. 1) $x^3+3x^2+5x+1=0$; 2) $x^3+3x^2+7x+6=0$.

49. 1) $2x^3+4x^2+5x+1=0$; 2) $x^3+4x^2+9x+17=0$.

50. 1) $4x^3+3x^2+5x+7=0$; 2) $x^3+x^2+x+19=0$.

51. 1) $2x^3+3x^2+5x+9=0$; 2) $x^3+x^2+x+19=0$.

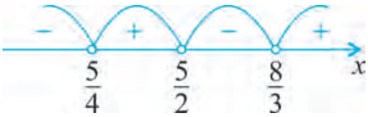
39-41 ҚАРАПАЙЫМ РАЦИОНАЛ ТЕҢСІЗДІКТЕР ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ ЖҮЙЕЛЕРІ

Бір айнымалылы рационал теңсіздіктер және оларды шешу тәсілдері

$A(x)$ және $B(x)$ рационал өрнектер үшін $A(x)>B(x)$, $A(x)<B(x)$, $A(x)\geqslant B(x)$, $A(x)\leqslant B(x)$ қатынастарға x айнымалылы теңсіздіктер делінеді. x-тің теңсіздікті дұрыс санды теңсіздікке айналдыратын әрқандай мәні теңсіздіктің шешімі делінеді.

1-мысал. Теңсіздікті шеш: $2(2x-5)(3x-8)(5-4x)<0$.

△ Теңсіздікті аралықтар тәсілімен шешеміз. Бұл тәсілмен 9-сыныпта танысқансың. Жақша ішіндегі өрнектерді нөльге теңестіріп, $x_1=\frac{5}{4}$, $x_2=\frac{5}{2}$, $x_3=\frac{8}{3}$ сандарын табамыз. Олар сандар осін $(-\infty;\ \frac{5}{4})$, $(\frac{5}{4};\ \frac{5}{2})$, $(\frac{5}{2};\ \frac{8}{3})$, $(\frac{8}{3};\ +\infty)$ аралықтарға ажыратады. Теңсіздікке $(\frac{8}{3};\ +\infty)$ аралыққа тиісті, мысалы, $x=10$ санын қойсақ, теңсіздік дұрыс теңсіздікке айналады. Демек, теңсіздік $(\frac{5}{4};\ \frac{5}{2})\cup(\frac{8}{3};\ +\infty)$ аралықтарда орынды. ▲

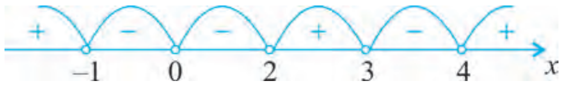


2-мысал.

Теңсіздікті шеш: $\dfrac{x^2(x+1)(x-3)}{(x-2)(x-4)}>0$.

△ $x=2$, $x=4$ сандар теңсіздіктің шешімі емес. $x\neq2$, $x\neq4$ болғанда $(x-2)^2\cdot(x-4)^2>0$ болады. Сондықтан теңсіздіктің әр екі жақ бөлігін $(x-2)^2\cdot(x-4)^2$-ке көбейту нәтижесінде берілген теңсіздікке мәндес төмендегі теңсіздік пайда болады: $(x+1)x^2(x-3)(x-2)(x-4)>0$.

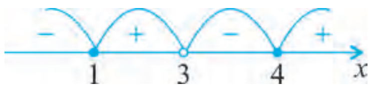
Жақшаларды нөльге теңестіріп, $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=0$, $x_4=2$, $x_5=3$, $x_6=4$ сандарын табамыз. Нәтижеде сандар осі төмендегі аралықтарға ажырайды: $(-\infty;-1)$, $(-1;0)$, $(0;2)$, $(2;3)$, $(3;4)$, $(4;+\infty)$. Мұнда нөль саны 2 рет кездеседі. Сондықтан теңсіздік нөль санының 2 жағындағы аралықта бірдей таңбалы болады. Соңғы аралықтан шекарада жатпаған $x=10$ санын алып теңсіздікке қойсақ, дұрыс санды теңсіздік пайда болады. Демек, теңсіздіктің шешімі төмендегі аралықтар: $(-\infty;-1)\cup(2;3)\cup(4;+\infty)$.



3-мысал. Теңсіздікті шеш: $\dfrac{x^2-5x+4}{x-3}\geq 0$.

$x\neq3$-ті нөльге теңестіріп, $x^2-5x+4=0$, $x_1=1$, $x_2=4$ сандарды пайда етеміз. $x_1=1$ және $x_2=4$ сандар теңсіздікті қанағаттандырады. Демек, сандар осі төмендегі аралықтарға ажырайды: $(-\infty;\ 1]$, $[1;\ 3)$, $(3;\ 4]$, $[4;\ +\infty)$.

Соңғы аралықтан шекарада болмаған $x=5$ санын алсақ, дұрыс санды теңсіздік шығады. Сондықтан $[1;3)\cup[4;+\infty)$ аралықтар теңсіздіктің шешімі.



Қарапайым рационал теңсіздіктер жүйесі

4-мысал. Теңсіздіктер жүйесін шеш: $\begin{cases}3x-8\leq 1,\\4x+3>5.\end{cases}$

Жүйенің әрбір теңсіздігін ықшамдасақ, $\begin{cases}3x\leq 1+8,\\4x>5-3\end{cases}$ $\begin{cases}3x\leq 9,\\4x>2\end{cases}$ яғни, $\begin{cases}x\leq 3,\\x>0,5\end{cases}$ теңсіздіктерді пайда етеміз. Демек, жүйенің шешімі $(-\infty;3]$ және $(0,5;\ +\infty)$ аралықтардың ортақ бөлігі, яғни $(0,5;\ 3]$ аралықтан құралған.

5-мысал. Теңсіздіктер жүйесін шеш: $\begin{cases}(3-x)(4+x)\geq 0,\\(2+x)(5-x)<0.\end{cases}$

Жүйедегі әрбір теңсіздікті шешіп, 1-теңсіздіктің шешімі $[-4;\ 3]$ аралық, ал 2-теңсіздіктің шешімі $(-\infty;\ 2)\cup(5;\ +\infty)$ аралықтар екенін табамыз. Демек, теңсіздіктер жүйесінің шешімі осы шешімдердің ортақ бөлігі, яғни $[-4;\ 2)$ аралықтан құралған болады.

Сұрақтар мен тапсырмалар

1. Теңсіздіктің шешімі не, мысалдармен түсіндіріп бер.
2. Мәндес теңсіздіктерге мысалдар келтір.
3. Ең қарапайым рационал теңсіздіктер жүйесін шешуді бір ғана мысалмен түсіндіріп бер.

Жаттығулар

Теңсіздікті шеш (**52–53**):

52. 1) $(x-6)(3-17x)(2x+8)\le 0$; 2) $(x^2+5x-6)(7x-11)>0$;

3) $(3+5x)(2x^2-6x+4)<0$; 4) $\frac{2x-5}{2x+1}\ge 0$;

5) $(x^2+6x-7)(x^2+x+1)\ge 0$; 6) $\frac{3x+11}{2-x}<0$;

7) $\frac{x-1}{4x-1}<1$; 8) $\frac{2x-7}{3-7x}\ge 1$; 9) $\frac{x^2-5x+11}{x^2-7}\le 0$; 10) $\frac{x^3-1}{2x^2-3x+1}>1$.

53. 1) $(x-5)(3-7x)(2x+8)\le 0$; 2) $(x^2-5x-6)(7x+11)>0$;

3) $(3-5x)(2x^2-4x+4)<0$; 4) $\frac{x-5}{2x+1}\ge 0$;

5) $(x^2-6x-7)(x^2+x+1)\ge 0$; 6) $\frac{3x+1}{2-x}<0$;

7) $\frac{x+1}{4x-1}<1$; 8) $\frac{2x-7}{3-7x}\ge 3$; 9) $\frac{x^2-5x+1}{x^2-7}\le 0$; 10) $\frac{x^3+1}{2x^2-3x+1}>1$.

54. Теңсіздіктер жүйесін шеш (**54–55**):

1) $\begin{cases} 3x-5\le 7x, \\ 2x+1>-2x+3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{x}{3}+\frac{2x-1}{5}<1, \\ -\frac{5x+1}{2}-\frac{7}{3}>\frac{x}{5}; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3x+5\le 7x, \\ 2x-1>-3x+3; \end{cases}$

55. 1) $\begin{cases} 2(x-5)\le 4(x+3), \\ 2x-1>-5x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{5x}{3}-\frac{2x}{4}\ge 3\frac{1}{3}, \\ 2-\frac{5-4x}{2}<\frac{6x}{5}; \end{cases}$ 3) $\frac{m}{n} \mid m\in\square,\ n\in\square$

42-43 ҚАРАПАЙЫМ ИРРАЦИОНАЛ ТЕҢСІЗДІКТЕР

Иррационал теңсіздік делінгенде түбір таңбасының астында белгісізі болған теңсіздік түсініледі.

Теңсіздіктердің шешімдерінің жиыны, әдетте, сандардың шексіз жиындарынан құралған болады. Сондықтан бұл сандарды бастапқы теңсіздікке тікелей қою жолымен шешімдер жиынын тексеру, жалпылай айтқанда мүмкін емес Жауаптың дұрыстығын білудің бір ғана жолы – бастапқы теңсіздікті әрқандай алмастыруда осы теңсіздікке мәндес теңсіздік пайда болуын бақылап баруымыз қажет.

Иррационал теңсіздіктерді шешкенде теңсіздіктің екі жақ бөлігін тақ дәрежеге көтеруде әрдайым бастапқы теңсіздікке мәндес теңсіздік пайда болуын есінде сақтауың қажет. Егер теңсіздіктің екі жақ бөлігі жұп дәрежеге шығарылатын болса, онда бастапқы теңсіздікке мәндес және осындай теңсіздік таңбасына ие болған теңсіздік тек бастапқы теңсіздіктің екі жақ бөлігі теріс емес болған жағдайда ғана пайда болады.

Иррационал теңсіздіктің шешімдер жиынын табу үшін, әдетте, теңсіздіктің екі жақ бөлігін натурал дәрежеге көтеруге тура келеді. Иррационал теңсіздікті шешудің негізгі тәсілдерінің бірі – мәндес рационал теңсіздіктерге келтіру тәсілі.

Ең қарапайым иррационал теңсіздіктер төмендегі көрініске ие:

1) $\sqrt{A(x)} < B(x)$ немесе $\sqrt{A(x)} \le B(x)$;

2) $\sqrt{A(x)} > B(x)$ немесе $\sqrt{A(x)} \ge B(x)$;

3) $\sqrt{A(x)} > \sqrt{B(x)}$ немесе $\sqrt{A(x)} \ge \sqrt{B(x)}$.

$\sqrt{A(x)} < B(x)$ немесе $\sqrt{A(x)} \le B(x)$ иррационал теңсіздік төмендегі теңсіздіктер жүйесіне мәндес

$$\begin{cases} A(x) < B^2(x), \\ A(x) \ge 0, \\ B(x) \ge 0 \end{cases} \quad \text{немесе} \quad \begin{cases} A(x) \le B^2(x), \\ A(x) \ge 0, \\ B(x) \ge 0. \end{cases} \tag{1}$$

(1) жүйедегі бірінші теңсіздік берілген теңсіздікті квадратқа шығару нәтижесінде пайда болған теңсіздік, екінші теңсіздік түбірдің бар болу шартын білдіреді, үшінші теңсіздік квадратқа шығару мүмкіндігін береді.

$\sqrt{A(x)} > B(x)$ иррационал теңсіздікті шешу үшін төмендегі жүйені қарастыру қажет:

$$\begin{cases} A(x) > B^2(x), \\ B(x) \ge 0 \end{cases} \quad \text{немесе} \quad \begin{cases} A(x) \ge 0, \\ B(x) < 0. \end{cases} \tag{2}$$

$\sqrt{A(x)} > \sqrt{B(x)}$ иррационал теңсіздік төмендегі теңсіздіктер жүйесінде пара-пар:

$$\begin{cases} A(x) > B(x), \\ B(x) \ge 0. \end{cases} \tag{3}$$

Берілген теңсіздіктің екі жақ бөлігін барлық қажетті x-тер үшін теріс емес болғандықтан оны квадратқа шығаруға болады. (3) жүйедегі бірінші теңсіздік берілген теңсіздікті квадратқа шығару нәтижесінде пайда болған теңсіздік. Екінші теңсіздік түбірдің бар болу шартын білдіреді. $A(x) \geqslant 0$ шарты әлбетте орындалатыны көрініп тұр.

(1)–(3) ережелер иррационал теңсіздікті шешудің негізгі тәсілі саналады.

Оның маңыздылығын бірнеше мысалдармен көрсетеміз.

1-мысал. Теңсіздікті шеш: $\sqrt{10x+5} < -3$.

△Бұл теңсіздіктің оң жақ бөлігі теріс, сонымен бірге сол жақ бөлігі қажетті x-тер үшін теріс емес. Сондықтан теңсіздік шешімге ие емес.

Жауабы: Шешімі жоқ. ▲

2-мысал. Теңсіздікті шеш: $\sqrt{3x-9} > -5$.

△Теңсіздіктің оң жақ бөлігі теріс, сонымен бірге сол жақ бөлігі қажетті x-тер үшін теріс емес. Демек, осы теңсіздік $x \geqslant 3$ шартын қанағаттандыратын барлық x-тер үшін орындалады.

Жауабы: $x \in [3;+\infty)$. ▲

3-мысал. Теңсіздікті шеш: $\sqrt{2x-3} < 1$.

△(1) ережеге орай $\begin{cases} 2x-3 < 1^2, \\ 2x-3 \geq 0. \end{cases}$

$B(x) = 1 \geq 0$ шарты барлық x-тер үшін орындалғандықтан, оны ерекше жазу шарт емес.

Жауабы: $\left[\frac{3}{2};2\right)$. ▲

4-мысал. Теңсіздікті шеш: $\sqrt{4x-3} > 1$.

△Бұл теңсіздік (2) ереже бойынша шешіледі. Мұнда $B(x) = 1 \geq 0$ шарты барлық x-тер үшін орындалғандықтан осы теңсіздікке пара-пар теңсіздікті тікелей жазуға болады: $4x-3 > 1^2$.

Жауабы: $x>1$. ▲

5-мысал. Теңсіздікті шеш: $\sqrt{x+18} < 2-x$.

△ Бұл теңсіздік (1) ереже бойынша шешіледі:

$$\begin{cases} x+18 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \\ x+18 < (2-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -18 \\ x \leq 2 \\ x^2 - 5x - 14 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -18 \leq x < 2 \\ \left[\begin{array}{l} x < -2 \\ x > 7 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow -18 \leq x < -2.$$

Жауабы: $x \in [-18;-2)$. ▲

6-мысал. Теңсіздікті шеш: $\sqrt{x^2+x-2} > x$.

△Бұл теңсіздік (2) ереже бойынша шешіледі:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<0,\\ x^2+x-2\ge 0,\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 0,\\ x^2+x-2>x^2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<0,\\ \left[\begin{array}{l}x\le -2,\\ x\ge 1,\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 0,\\ x>2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\le -2,\\ x>2.\end{array}\right.$$

Жауабы: $x\in(-\infty;-2]\cup(2;+\infty)$. ▲

7-мысал. Теңсіздікті шеш: $\sqrt{2x+1}>\sqrt{2-3x}$.

△Бұл теңсіздік (3) ереже бойынша шешіледі:

$$\begin{cases}2x+1>2-3x\\ 2-3x\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>\dfrac{1}{5}\\ x\le\dfrac{2}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{5}<x\le\frac{2}{3}.$$

Жауабы: $\frac{1}{5}<x\le\frac{2}{3}$. ▲

8-мысал. Теңсіздікті шеш: $\dfrac{\sqrt{x^2-25}}{x+6}<1$.

△Белгісіз x-тің теңсіздік мағынасына ие болған жиынын табамыз

$$\begin{cases}x^2-25\ge 0,\\ x+6\ne 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\le -5,\\ x\ge 5,\end{array}\right.\\ x\ne 6\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x<-6,\\ -6<x\le -5.\\ x\ge 5.\end{array}\right.$$

Егер $x+6>0$ болса, осы теңсіздікті квадратқа шығаруға болады:

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}-6<x\le -5,\\ x\ge 5,\end{array}\right.\\ \sqrt{x^2-25}<x+6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}-6<x\le -5,\\ x\ge 5,\end{array}\right.\\ x^2-25<x^2+12x+36\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}-6<x\le -5,\\ x\ge 5,\end{array}\right.\\ x>-\dfrac{61}{12}\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-\dfrac{61}{12}<x\le -5,\\ x\ge 5.\end{array}\right.$$

$x<-6$ болса, берілген теңсіздік міндетті түрде орындалады.

Жауабы: $x\in(-\infty;-6)\cup\left(-\dfrac{61}{12};-5\right]\cup[5;+\infty)$. ▲

Жаңа айнымалыны енгізу

Иррационал теңдеулерді шешуде қолданылған жаңа айнымалыны енгізу тәсілін, иррационал теңсіздіктерге де қолдануға болады.

9-мысал. Теңсіздікті шеш: $-9\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}+18\ge 0$.

Теңсіздіктерді төмендегідей етіп жазып аламыз: $-9\sqrt[4]{x}+\left(\sqrt[4]{x}\right)^2+18\geq 0$.

Жаңа айнымалыны енгіземіз: $t=\sqrt[4]{x},\ t\geq 0$. Мұнда

$$\begin{cases}-9t+t^2+18\geq 0,\\ t\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}t\geq 6,\\ t\leq 3,\end{array}\right.\\ t\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t\geq 6,\\ 0\leq t\leq 3.\end{cases}$$

Осылайша:

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt[4]{x}\geq 6,\\ 0\leq\sqrt[4]{x}\leq 3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\geq 6^4,\\ 0\leq x\leq 3^4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\geq 1296,\\ 0\leq x\leq 81.\end{array}\right.$$

Жауабы: $x\in[0;81]\cup[1296;+\infty)$.

10-мысал. Теңсіздікті шеш: $\dfrac{3-x}{\sqrt{15-x}}<1$.

Жаңа айнымалыны енгіземіз: $\sqrt{15-x}=t$, $t>0$.

Мұнда $x=15-t^2$ және t айнымалыға қатысты рационал теңсіздікті пайда етеміз:

$$\begin{cases}\dfrac{3-(15-t^2)}{t}<1,\\ t>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{t^2-t-12}{t}<0,\\ t>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{(t-4)(t+3)}{t},<0\\ t>0\end{cases}\Leftrightarrow 0<t<4.$$

Осыдан x-ті табамыз:

$$0<\sqrt{15-x}<4\Leftrightarrow 0<15-x<16\Leftrightarrow -1<x<15.$$

Жауабы: $x\in(-1;15)$.

Сұрақтар мен тапсырмалар

1. Иррационал теңсіздік деп нені айтамыз?
2. Иррационал теңсіздікті шешу үдерісінде пара-пар алмастыруға өтуге қатысты мысал айт.
3. Шешімі жоқ иррационал теңсіздікке мысал айт.

Жаттығулар

56. Белгісіздердің қандай мәндерінде теңсіздік мағынаға ие? (**56–59**)

1) $\sqrt{x}+\sqrt{2x-6}>10$; 2) $\sqrt[4]{18-2x}<3$.

57. 1) $\sqrt{10-\sqrt{x-5}}<27$; 2) $\sqrt{(x+3)(x-8)}>x+2$.

58. 1) $\sqrt[3]{x^2 - x} > -x\sqrt[3]{2}$; 2) $\sqrt{x-3} + \sqrt{1-x} > \sqrt{8x-5}$.

59. 1) $\sqrt{x^2 + 3x + 1} < x + 1$; 2) $\sqrt{\dfrac{x+3}{4-x}} \geq 2$.

Теңсіздіктерді шеш (**60-66**):

60. 1) $\sqrt{2x-1} < x+2$; 2) $\sqrt{x^2-1} > x-2$.

61. 1) $\sqrt[4]{2x^2-1} \leq x$; 2) $\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 2x + 3$.

62. 1) $x - 3 < \sqrt{x^2 + 4x - 5}$; 2) $\sqrt{x^2 - 55x + 250} < x - 14$.

63. 1) $\sqrt[3]{x^2 + 6x} > x$; 2) $\sqrt{22-x} - \sqrt{10-x} \geq 2$.

64. 1) $\sqrt{2x+1} > \sqrt{3-x}$; 2) $x > \sqrt{x(1+\sqrt{x(x-3)})}$.

65. 1) $\dfrac{x-1}{\sqrt{x}+1} \geq 4 + \dfrac{\sqrt{x}-1}{2}$; 2) $\sqrt{3x} - \sqrt{2x+1} \geq 1$.

66. 1) $\sqrt{2x+5} + \sqrt{x-1} > 8$; 2) $\sqrt[3]{x+1} \leq \sqrt[3]{5x}$.

67. Жазықтықта $A(9; 4)$, $B(-4; 5)$, $C(x; y)$ нүктелер берілген. $AC>BC$ шартты қанағаттандыратын саланы тап.

68. Жазықтықта $A(2; 4)$, $B(-3; 5)$, $C(x; y)$ нүктелер берілген. $AC>BC$ шартты қанағаттандыратын саланы тап.

69. Жазықтықта $A(4; 4)$, $B(-5; 7)$, $C(x; y)$ нүктелер берілген. $AC>BC$ шартты қанағаттандыратын саланы тап.

70. Жазықтықта $A(2; 4)$, $B(+3; -5)$, $C(x; y)$ нүктелер берілген. $AC>BC$ шартты қанағаттандыратын саланы тап.

71. Жазықтықта $A(5; 4)$, $B(-6; 5)$, $C(x; y)$ нүктелер берілген. $AC>BC$ шартты қанағаттандыратын саланы тап.

72. Жазықтықта $A(8; 4)$, $B(-7; 5)$, $C(x; y)$ нүктелер берілген. $AC>BC$ шартты қанағаттандыратын саланы тап.

Бақылау тест тапсырмалары

Сынақ тапсырмаларының әрбіріне 4-еуден "жауап" берілген. 4 "жауаптың" тек біреуі ғана дұрыс, қалғаны қате. Оқушылардың сынақ жаттығуларын орындап немесе басқа да тұжырымдардың көмегімен осы дұрыс жауапты табуы (оны белгілеуі) талап етіледі.

1. Пара-пар теңдеуді көрсет:
1) $10x=8$; 2) $6x-4=x$; 3) $x^2+2x+18=0$.
A)1 және 3; B) 2 және 3; C) 1 және 2; D) барлығы.

2. Теңдеудің үлкен түбірін тап: $(x-5)(x+4)(x-11)=0$.
A)−4; B) 5; C) 16; D)11.

3. Биквадрат теңдеудің түбірлері қосындысын тап: $3x^4+8x^2-11=0$.
A) 1; B) −1; C) 0; D) 11/3.

4. Теңдеулер жүйесінің неше шешімі бар? $\begin{cases} x^2+y^2=10, \\ xy=3. \end{cases}$
A) 1; B) 2; C) 3; D) 4.

5. Теңдеуді шеш: $\sqrt{5x+9}=7$.
A) 2; B) 4; C) 6; D) 8.

6. Теңдеулер жүйесінің неше шешімі бар? $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=11, \\ \sqrt{xy}=30. \end{cases}$
A) 1; B) 2; C) 3; D) 4.

7. Жазықтықта $A(3;\ 1)$ және $B(7;\ 3)$ нүктелерден теңдей арақашықтыққа орналасқан $C(5;\ x)$ нүктені тап.
A) (5;2); B) (5;3); C) (4;2); D) (4;3).

8. Теңдеуді шеш: $3\cdot5^{x+3}-5^{x+2}-2\cdot5^{x+1}=68$.
A) 1; B) 2; C) −1; D) 0.

9. Теңдеудің бүтін түбірлерін тап: $11^{3x^2+23}=11^{x^2+25x}$.
A) 1; B) −1; C) 2; D) 1 және −1.

10. Қандай да бір мемлекет тұрғындарының саны 3% азайса, неше жылдан соң тұрғындар саны 20% азаяды?
A) 6; B) 2; C) 8; D) 4.

11. Теңсіздікті шеш: $(x^2+6x-7)(x^2+x+1)\leqslant0$.
A) [−7; 1]; B) [−7; −1]; C) [7; −1]; D) [7; 1].

12. $|x-2|\leqslant5$ теңсіздіктің неше бүтін шешімі бар?
A) 10; B) 11; C) 8; D) 9.

13. Теңсіздікті шеш: $|4x-1|\leqslant-2$.
A) [−7;1]; B) [−7;−1]; C) [7;−1]; D) шешімі жоқ.

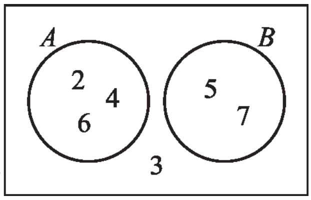
14. $\sqrt{x^2-13x+12}\leq5-x$ теңсіздіктің неше бүтін шешімі бар?
A) 3; B) 4; C) 5; D) 6.

Жауаптар

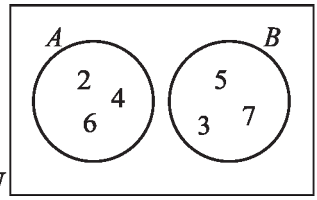
I ТАРАУ.

1. a) $5 \in D$; b) $6 \notin G$; c) $\{2, 5\} \subseteq \{1,2,3,4,5,6\}$; d) $\{3, 8, 6\} \subsetneq \{1,2,3,4,5,6\}$; **2.** a) **i)** $\{9\}$ **ii)** $\{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$. b) **i)** $\emptyset$ **ii)** $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. c) **i)** $\{1, 3, 5, 7\}$ **ii)** $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. **3.** a) 5; b) 6; c) 2; d) 9. **4.** a) шекті; b) шексіз. **5.** a) қиылыспайды; b) қиылысады. **6.** a) шекті; b) шексіз; c) шексіз; d) шексіз. **7.** a) **i)** A жиын -1-ден үлкен немесе тең және 7-ден кіші немесе тең болған бүтін сандар жиыны; **ii)** $\{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ **iii)** 9. b) **i)** A жиын –2-ден үлкен және 8-ден кіші болған натурал сандардың жиыны; **ii)** $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ **iii)** 8. c) **i)** A жиын 0-ден үлкен немесе тең және 1-ден кіші немесе тең болған ақиқат сандар жиыны; **ii)** мүмкін емес; **iii)** шексіз. d) **i)** A жиын 5-тен үлкен немесе тең және 6-ден кіші немесе тең болған ақиқат сандар жиыны; **ii)** мүмкін емес; **iii)** шексіз. **8.** a) $A=\{x|\ -100 < x < 100, x \in \mathbb{Z}\}$; b) $A=\{x|\ x > 1000, x \in \mathbb{R}\}$; c) $A=\{x|\ 2 \leqslant x \leqslant 3, x \in \mathbb{Q}\}$. **9.** a) **i)** 8 дана: $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$; **ii)** 16 ta: $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{c, d\}$, $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\}$, $\{a, b, c, d\}$; b) 2^n. **10.** a) Иә; b) Жоқ; c) Иә; d) Иә; e) Жоқ; f) Жоқ. **11.** b) $C'=\mathbb{N}$; c) $C'=\{x|\ x \geqslant -4, x \in \mathbb{Z}\}$; d) $C'=\{x|\ 2 < x < 8, x \in \mathbb{Q}\}$. **12.** a) $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; b) $\{0, 1, 8\}$; c) $\{5, 6, 7, 8\}$; d) $\{0, 1, 2, 3, 4\}$; e) $\{5, 6, 7\}$; f) $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$; g) $\{2, 3, 4\}$. **13.** a) 9; b) 11. **14.** a) $\{1, 2, 10, 11, 12\}$; b) $\{1, 2, 3, 4, 12\}$; c) $\{1, 8, 9, 10, 11, 12\}$; d) $\{3, 4, 5, 6, 7\}$; e) $\{1, 2, 8, 9, 10, 11, 12\}$; f) $\{8, 9, 10, 11\}$; g) $\{1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$; h) $\{2, 10, 11\}$; **15.** a) $P=\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$; b) $\{2, 5, 11\}$; c) $\{2, 3, 4, 5, 7, 11, 12, 13, 15, 17, 19, 23\}$; d) $12=9+6-3$ ✓. **16.** a) $P=\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$, $Q=\{1, 2, 3, 5, 8, 10, 20, 30\}$; b) $\{2, 5, 10\}$; c) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 15, 20, 30, 40\}$; d) $12=8+8-4$ ✓. **17.** a) $P=\{32, 36, 40, 44, 48, 52, 56\}$, $Q=\{36, 42, 48, 54\}$; b) $\{36, 48\}$; c) $\{32, 36, 40, 42, 44, 48, 52, 54, 56\}$; d) $9=7+4-2$ ✓. **18.** a) $R=\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, $S=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; b) $\{0, 1, 2, 3, 4\}$; c) $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; d) $9=7+7-5$ ✓. **19.** a) $C=\{-4, -3, -2, -1\}$, $D=\{-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1\}$; b) $\{-4, -3, -2, -1\}$; c) $\{-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1\}$; d) $7=4+7-4$ ✓. **20.** a) $P=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $Q=\{1, 2, 3, 5, 9, 18\}$, $R=\{1, 3, 9, 27\}$. b) **i)** $\{1, 2, 3, 6\}$; **ii)** $\{1, 3\}$; **iii)** $\{1, 3, 9\}$; **iv)** $\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18\}$; **v)** $\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 27\}$; **vi)** $\{1, 2, 3, 6, 9, 18, 27\}$. c) **i)** $\{1, 3\}$; **ii)** $\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 27\}$. **21.** a) $A=\{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36\}$, $B=\{6, 12, 18, 24, 30, 36\}$, $C=\{12, 24, 36\}$. b) **i)** $\{12, 24, 36\}$; **ii)** $\{12, 24, 36\}$; **iii)** $\{12, 24, 36\}$; **iv)** $\{12, 24, 36\}$. c) $\{4, 6, 8, 12, 16, 18, 20, 24, 28, 30, 32, 36\}$. d) $12=9+6+3-3-3-3+3$ ✓. **22.** a) $A=\{6, 12, 18, 24, 30\}$, $B=\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$, $C=\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$. b) **i)** $\{6, 30\}$; **ii)** $\{2, 3, 5\}$; **iii)** $\emptyset$; **iv)** $\emptyset$. c) $\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19, 23, 24, 29, 30\}$. d) $18=5+8+10-2-3-0+0$ ✓.

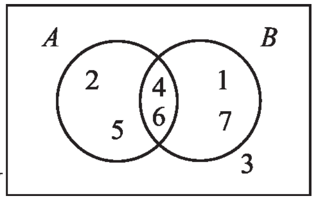
23.



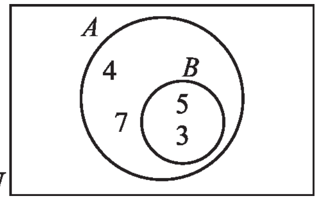
a) U



b) U

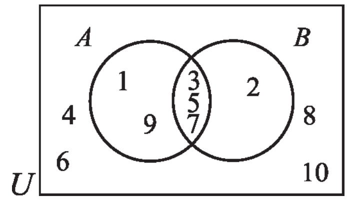


c) U

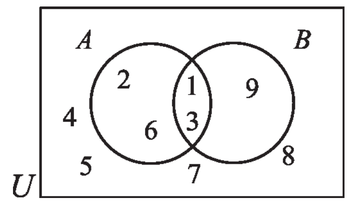


d) U

24.
a) $A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$
$B=\{2, 3, 5, 7\}$;
b) $A \cap B=\{3, 5, 7\}$
$A \cup B=\{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$;

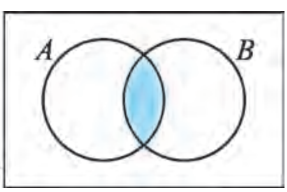


25. a) $A=\{1, 2, 3, 6\}$
$B=\{1, 3, 9\}$;
b) $A \cap B=\{1, 3\}$
$A \cup B=\{1, 2, 3, 6, 9\}$;

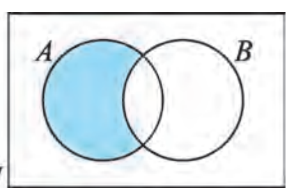


26. a) $\{b, d, e, h\}$; b) $\{e, f, h, i, j\}$; c) $\{a, c, f, g, i, j, k\}$; d) $\{a, b, c, d, g, k\}$; e) $\{e, h\}$; f) $\{b, d, e, f, h, i, j\}$; g) $\{a, c, g, k\}$; h) $\{a, b, c, d, f, g, i, j, k\}$. **27.** a) i) $\{a, b, c, d, h, j\}$; ii) $\{a, c, d, e, f, g, k\}$; iii) $\{a, b, e, f, i, l\}$; iv) $\{a, c, d\}$; v) $\{a, b, e, f, i, l\}$; vi) $\{a, e, f\}$; vii) $\{a\}$; viii) $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l\}$.

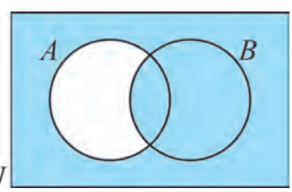
28.



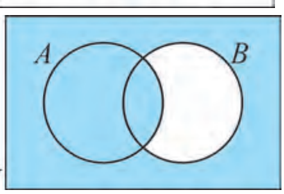
a) U



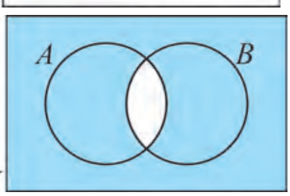
b) U



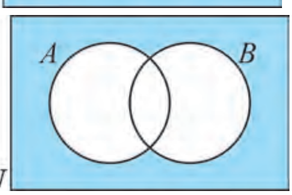
c) U



d) U

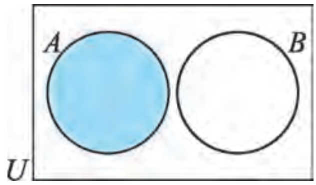


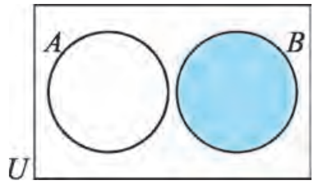
e) U

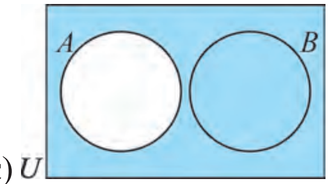


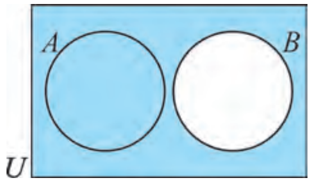
f) U

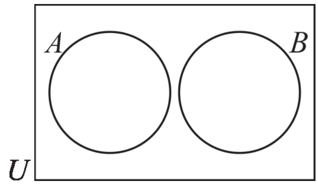
29.

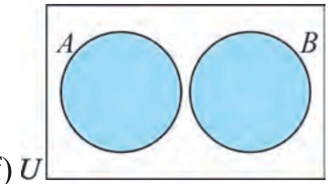
a) 

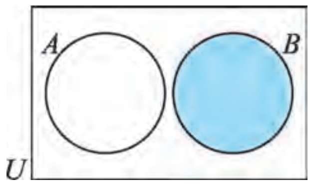
b) 

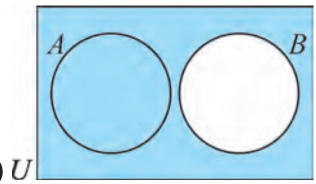
c) 

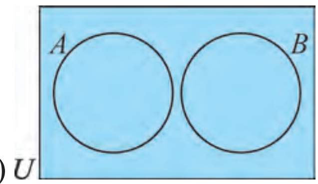
d) 

e) 

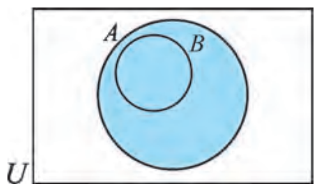
f) 

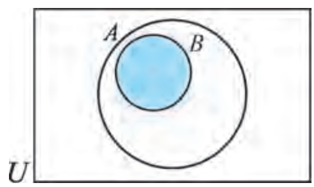
g) 

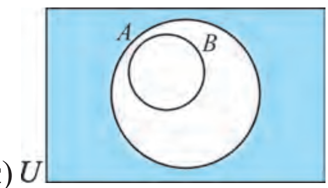
h) 

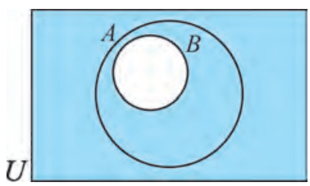
i) 

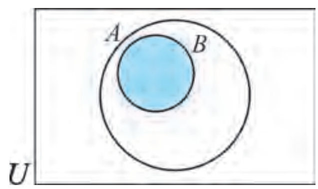
30.

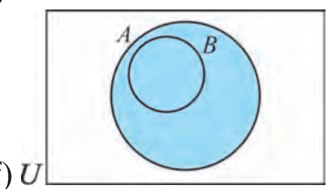
a) 

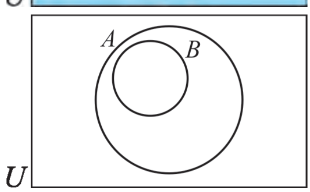
b) 

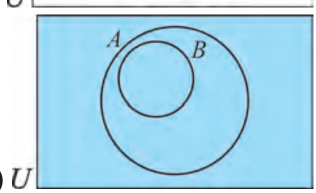
c) 

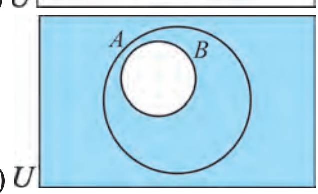
d) 

e) 

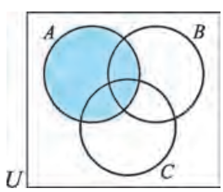
f) 

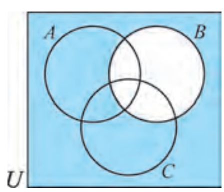
g) 

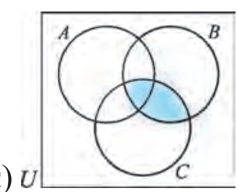
h) 

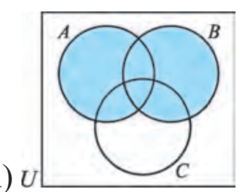
i) 

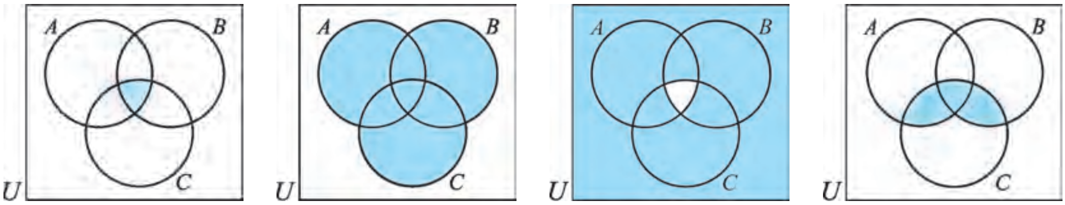
31.

a) 

b) 

c) 

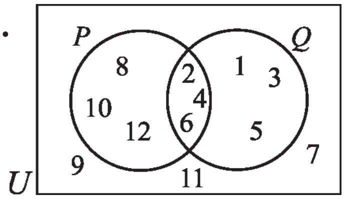
d) 



e) f) g) h)

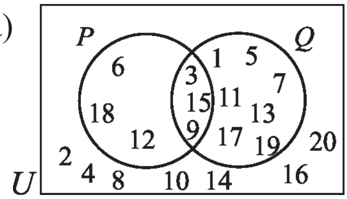
32. a) Иә, жалған; b) Иә, ақиқат; c) Иә, ақиқат; d) Иә, ақиқат; e) Иә, ақиқат; f) Иә, ақиқат; g) Жоқ; h) Иә, ақиқат; i) Жоқ; j) Иә, анық емес; k) Иә, анық емес; l) Жоқ; m) Иә, анық емес; n) Иә, анық емес; o) Иә, анық емес; p) Иә, жалған.
33. k) $\neg p$: Кейбір төртбұрыштар параллеограмм емес; m) $\neg r$: 7 – рационал сан емес; n) $\neg s$: $23-14\neq 12$; o) $\neg t$: $52:4\neq 13$; p) $\neg u$: Кейбір екі жұп сандардың айырмасы жұп болады; q) $\neg p$: Ізбе-із келген натурал сандардың көбейтіндісі әрдайым жұп сан болмайды; r) $\neg q$: Кейбір доғал бұрыштар өзара тең емес; s) $\neg r$: Кейбір трапециялар параллеограмм болып табылады; t) $\neg s$: Үшбұрышта екі бұрышы өзара тең, бірақ ол теңбүйірлі емес.
34. a) $x\geqslant 5$; b) $x<3$; c) $y\geqslant 8$; d) $y>10$; **35.** e) Жоқ, Мәдинаның бойы 140 см болуы да мүмкін; f) Жоқ; g) Иә. **36.** f) $x\geqslant 5$, $x\in\mathbb{N}$; g) x – сиыр , $x\in${*жылқылар, қойлар, сиырлар*}; h) $x<0$, $x\in\mathbb{Z}$; i) x – оқушы қыз, $x\in${*оқушылар*}; j) x – оқушы емес қыз, $x\in${*қыздар*}. **41.** e) $p \wedge q$: Мәдина – терапевт, ал Муниса стоматолог; f) $p \wedge q$: 15-тен үлкен және 30-дан кіші; g) $p \wedge q$: ауа бұлтты және жаңбыр жауып жатыр; h) $p \wedge q$: Ғалымның шашы қара және көзі көк. **42.** a) ақиқат; b) жалған; c) жалған; d) ақиқат; e) жалған.

43.



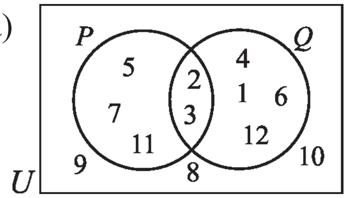
44. a) ақиқат; b) жалған.
45. a) ақиқат; b) ақиқат.

46. a)



b) **i)** {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20};
ii) {1, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19};
iii) {3, 9, 15};
iv) {1, 5, 6, 7, 11, 12, 13, 17, 18, 19}.

47. a)



b) **i)** {2, 3};
ii) {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 11, 12};
iii) {1, 4, 5, 6, 7, 11, 12}.

48. a) $\neg x$; b) $x \wedge y$; c) $x \vee y$; d) $\neg x \wedge \neg y$; e) $x \wedge \neg y$. **50.** a) Сардар ерте тұрды; b) Сардар кешкі асқа палау жеді; c) Сардар таңғы асқа қаймақ жеді және спортпен шұғылданды; d) Сардар түскі асқа сорпа ішті және кешкі асқа палау жеді; e) Сардар не түскі асқа немесе кешкі асқа сорпа ішті.

51. a)

p	q	$\neg p$	$\neg p \wedge q$
T	T	F	F
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	F

c)

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge q$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	T
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

d)

p	$p \vee q$
T	T
F	F

52. a) тавтология емес; b) тавтология; c) тавтология емес.

55.

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

57. d) күн жарқыраса, мен шомылуға барамын; e) x сан 6-ға бөлінсе, ол жұп сан болады; f) тоңазатқышта жұмыртқалар бар болса, Мәдина торт пісіреді.

59. a) $p \Rightarrow q$; b) $q \Rightarrow p$; c) $\neg q$; d) $\neg p$; e) $\neg p \Rightarrow \neg q$; f) $p \Rightarrow \neg q$; g) $\neg q \Rightarrow p$; h) $p \Leftrightarrow q$; **63.** a) Конверсия: Егер Динара қызыса, ол камзол киеді; Инверсия: Егер Динара камзол кимесе, ол қызымайды. b) Конверсия: Егер екі үшбұрыштың сәйкес бұрыштары тең болса, олар ұқсас болады; Инверсия: Егер екі үшбұрыш ұқсас болмаса, олардың сәйкес бұрыштары тең болмайды. c) Конверсия: Егер $x = \pm\sqrt{6}$ болса, онда $2x^2=12$ болады. Инверсия: Егер $2x^2 \neq 12$ болса, онда $x \neq \pm\sqrt{6}$ болады. d) Конверсия: Егер Ғалым қуанса, ол ойын ойнайды; Инверсия: Ғалым ойын ойнамаса, ол қуанбайды. e) Конверсия: Егер үшбұрыштың қабырғалары тең болса, ол дұрыс болады; Инверсия: Егер үшбұрыш дұрыс болмаса, оның қабырғалары тең болмайды. **64.** a) Егер гүл тікенді болмаса, ол әтіргүл болмайды; b) Дұрыс қаулы шығармаған адам судья емес; c) Допты нысанаға дәл тигізбеген адам жақсы футболшы болмайды; d) Егер зат құйылған ыдысының пішініне енбесе, ол сұйықтық емес; e) Егер адам табысқа жетпесе, ол адал және білімді емес; **65.** a) математиканы үйренбеген адам 10-сынып оқушысы емес; b) Шавкат – математиканы үйренеді; Мирислом 10-сынып оқушысы емес; Анық қорытынды шығара алмаймыз. **66.** a) x^2 саны 9-ға бөлінбесе, x саны 3-ке бөлінбейді; b) x – жұп сан болмаса, оның соңғы саны 2 емес; c) $AB||CD$ және $AD||BC$ болмаса, $ABCD$ – тік төртбұрыш емес; d) $\angle ACB \neq 60°$ болса, ACB – дұрыс үшбұрыш емес. **67.** **i)** Егер үй сыртқа түтін шығаратын құбырға ие болса, ең көбі 3 терезелі болады; **ii)** Егер үй 3-еуден артық терезелі болса, ол сыртқа түтін шығаратын құбырға ие болмайды; **iii)** Егер үй сыртқа түтін шығаратын құбырға ие болмаса, ең көбі 3 терезелі болады; **69.** a) $\exists x\ P(x)$; b) $\exists x\ P(x)$; c) $\forall x\ P(x)$; d) $\forall x\ P(x)$; e) $\forall x\ P(x)$; f) $\forall x\ P(x)$; g) $\forall x\ P(x)$; h) $\forall x\ P(x)$; i) $\exists x\ P(x)$; j) $\exists x\ P(x)$; k) $\forall x\ P(x)$; **70.** a) Сазан сүтқоректі емес; b) Барлық корольдарда кемшілік бар; f) Алтын токты жақсы өткізеді; g) Кейбір омыртқалылар жұмыртқалайды; h) Бұл адам науқастанған. **71.** a) y x-тің перзенті; b) Әрбір адамның перзенті бар ; c) Әрбір адам біреудің перзенті. **72.** a) Барлық адамдар үшін егер біреуі басқа біреуін дос деп санаса, ол да оны дос деп санайды; b) Кез келген адам үшін ол дос деп санайтын адам бар; c) Кейбір адам бар болып, оны барлығы дос деп санайды; d) Әрбір адам үшін оны дос деп санайтын адамдар бар; e) Кейбір адам бар болып, ол барлығын дос деп санайды; f) Кейбір адам бар болып, оны барлығы дос деп санайды. **73.** a) Кез келген бүтін сан үшін оған бөлінетін бүтін сан бар; b) Кейбір бүтін сан бар болып, ол барлық бүтін санға бөлінеді; c) Кез келген бүтін сан үшін оның бөлгіші бар; d) Кейбір бүтін сан бар болып, оған барлық бүтін сандар бөлінеді; e) Кез келген бүтін сан үшін оның бөлгіші бар; f) Кейбір бүтін сан бар болып, ол барлық бүтін сандарға бөлінеді. **82.** a) 7; b) 14; c) 14; d) 7; e) 5; f) 9. **83.** a) 5; b) 6; c) 17; d) 8; e) 3; f) 2. **84.** a) $b+c$; b) $c+d$; c) b; d) $a+b+c$; e) $a+c+d$; f) d. **85.** a) 15; b) 4. **86.** a) 18; b) 6. **87.** a) 7; b) 23.

II ТАРАУ.

1. a) £630; b) £630; c) ¥238333; d) €4402.46. **3.** $2600. **4.** £14 400. **5.** €20219,78. **6.** a) $6\frac{2}{3}\%$; b) 9,41%. **7.** $11\frac{2}{3}\%$. **8.** 15,4%. **9.** a) 4; b)7; **11.** a) €5512,69; b) $7293,04; c) £18938,83. **12.** 787,50. **13.** €1418,75. **14.** £1660. **15.** $274,83. **16.** a) €111,39; b) £763,31; c) ¥77157. **17.** $9021,58. **18.** €301,26. **19.** a) $7650; b) $8151,65; c) $8243,81.

20.

Жылдар	Амортизация	Бағасы
0		€2500
1	15% €2500 = €375	€2125
2	15% €2125 = €318,75	€1806,25
3	15% €1806,25 = €270,94	€1535,31

III ТАРАУ.

1. a) 5; b)–2;50; c)1;–9; d) ∅; e) –1; f)1;–0,5; g) –1; –4,7; i) –4;7;
2. a) 7; b) –0,25; c) түбірлері жоқ; e) –1;5; f) –1.
3. a) және b); a) және d); a) және f); b) және d); b) және f); d) және f); c) және e); g) және h).
4. a)(81/11;–3/11); b)(4;4); c)(9;8). **6.** b)(1;1). **7.** a) 8;–33/4.

9. 48 қыз және 60 ұл. **11.** a) $19\frac{2}{3}$; b) ∅; c) 32; d) ∅; **13.** a) ∅; b) $-\frac{23}{16}$.

15. a) $\frac{-9-\sqrt{105}}{2}$. **17.** b) ∅; **19.** a) 5. **21.** a) (9;4). **23.** a) (–5;9). **25.** $\frac{21}{22}$.

26. a) −0,25; b) −4/9; c) –2,5. **28.** c) ∅. d) {0;–3,5}. **29.** c) 0; d) 1. **31.** a) 0; b) 0.

37. 3 жыл. **39.** 8 жыл. **41.** a) $\left(\frac{69}{62};\frac{35}{62}\right)$; b) $\left(\frac{18}{5};-\frac{1}{5}\right)$.

43. a) (1;1); b) (4/3; 2/3);

53. 1) $\left[-4;\frac{3}{7}\right]\cup[5;+\infty)$; 2) $\left(-\frac{11}{7};-1\right)\cup(6;+\infty)$; 3) $\left(-\infty;\frac{3}{5}\right)$;

4) $(-\infty;-0,5)\cup[5;+\infty)$; 5) $(-\infty;-1]\cup[7;+\infty)$; 6) $\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)\cup(2;+\infty)$

7) (0,25;1); 8) $\left(-\infty;\frac{3}{7}\right)\cup\left[\frac{16}{23};+\infty\right)$; 9) $\left(-\sqrt{7};\frac{15-\sqrt{21}}{2}\right)\cup\left(\sqrt{7};\frac{15+\sqrt{21}}{2}\right)$;

10) $(0;0,5)\cup(1;+\infty)$. **55.** 1) $\left(\frac{1}{7};+\infty\right)$; 2) ∅. **57.** (–∞;–3]; **59.** 1) ∅. 2) ∅.

61. 1) $[0;1)$. **63.** 1) $(-\infty;-2)\cup(0;3)$. **65.** 1) $[81;+\infty)$. **66.** 2) [0,25;+ ∞).

68. $y>5x+7$. **70.** $y<(x-2)/9$. **72.** $y>15x-3$.

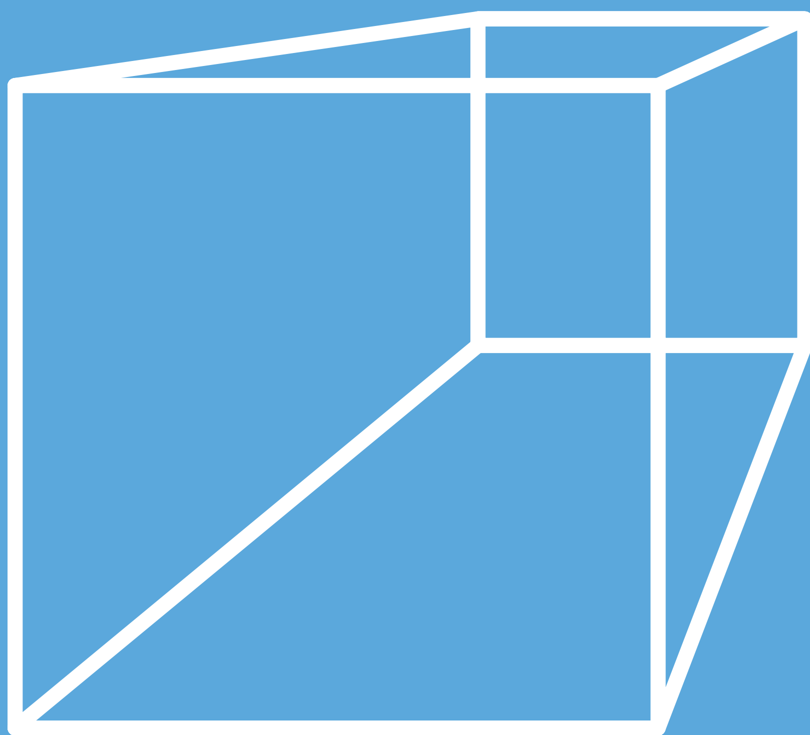
МАЗМҰНЫ

Пайдаланылған және ұсынылған әдебиеттер

1. Sh.A. Alimov, O.R. Xolmuhamedov, M.A. Mirzaahmedov Algebra va analiz asoslari. 10-sinf uchun darslik. Toshkent: "O'qituvchi", 2004.
2. Mal Coad and others. Mathematics for the international students. Mathematical Studies SL 2nd edition. Haese and Harris publications. 2010.
3. Э. Сайдаматов и др. Алгебра и основы математического анализа.
часть 1, Ташкент: "O'qituvchi", 2016.
4. A.U. Abduhamidov va boshqalar. Algebra va matematik analiz asoslari, 1-qism, Toshkent: "O'qituvchi", 2012.
5. Н.П. Филичева Уравнения и системы уравнений: Учебно-методическое пособие. "Рязань". 2009.
6. М.И. Исроилов Ҳисоблаш методлари. Тошкент: "Ўқитувчи" 1988.
7. Г.К. Муравин Алгебра и начала анализа. Учебник для 10 класса. Москва, "Дрофа", 2006.
8. Алгебра. Учебное пособие для 9-10 классов. Под ред. Н.Я. Виленкина. Москва, "Просвещение", 2004.
9. http://www.ams.org/mathweb/ – Интернетте математика (ағылшын тілінде).
10. Журнал "Математика в школе".
11. Fizika, matematika va informatika. Ilmiy-uslubiy jurnal (2001-yildan boshlab chiqa boshlagan).
12. M.A. Mirzaahmedov, Sh.N. Ismailov Matematikadan qiziqarli va olimpiada masalalari. I qism, Toshkent, "Turon-Iqbol", 2016.
13. Matematikadan qo‘llanma, I va II qismlar. O‘qituvchilar uchun qo‘llanma. Prof. T.A. Azlarov tahriri ostida. Toshkent, "O‘qituvchi", 1979.
14. M.A. Mirzaahmedov, D.A. Sotiboldiyev O‘quvchilarni matematik olimpiadalarga tayyorlash. Toshkent, "O‘qituvchi", 1993.
15. http://www.uzedu.uz – Халыққа білім беру министрлігі ақпарат білім беру порталы.
16. http://www.eduportal.uz – Мультимедиа орталығы ақпарат білім беру порталы.
17. http://www.problems.ru – Математикалық есептерді іздеу жүйесі (орыс тілінде).
18. http://matholymp.zn.uz – Өзбекстандағы және әлемдегі математикалық олимпиадалар.

Математика

Геометрия



10-сынып

10-сыныпта геометрияның стереометрия бөлімін – кеңістіктегі геометриялық фигуралардың қасиеттерін жүйелі үйренуге кірісеміз. Бұл бөлімде кеңістіктегі негізгі фигураларға, көпжақтар мен айналу денелеріне және олардың негізгі қасиеттеріне, кеңістіктегі параллель және перпендикуляр түзулер мен жазықтықтарға, сондай-ақ олардың қасиеттеріне қатысты мәселелер орын алған.

Оқулықта келтірілген теориялық материалдарды қарапайым және жеңіл тілмен баяндауға әрекет жасалған. Барлық тақырыптар мен ұғымдар түрлі өмірлік мысалдар арқылы ашылған. Әрбір тақырыптан соң келетін сұрақтар, дәлелдеуге, есептеуге және салуға қатысты көптеген есептер мен мысалдар оқушыны шығармашалық пікірлеуге үндейді, игерілген білімдерді тереңдетуге және пысықтауға жәрдем береді.

Бөлім материалдары жалпы білім беретін мектептердің 10-сынып оқушыларына арналған, оны геометрияны өз бетінше үйренуді және қайталауды қалайтын оқырмандардың да пайдалануына болады.

МАЗМҰНЫ

Бөлімде пайдаланылған белгілер және олардың білдіретін мағынасы:

– теореманың сипаттамасы
– аксиоманың сипаттамасы
– тақырыпқа қатысты сұрақтар
– белсенділендіретін жаттығу
– теорема дәлелінің соңы
– практикалық қолдану
– тарихи көріністер
– геометриялықбасқатырмалар

I БӨЛІМ

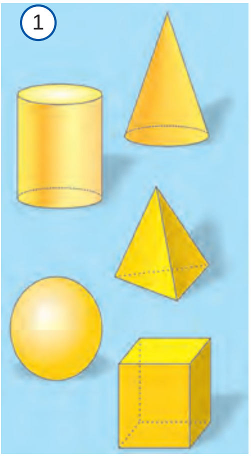
ПЛАНИМЕТРИЯНЫ ЖҮЙЕЛІ ҚАЙТАЛАУ

1 ПЛАНИМЕТРИЯНЫҢ ЛОГИКАЛЫҚ ҚҰРЫЛЫМЫ

Геометрия нақты өмірдегі предметтердің мөлшерлік көрсеткіштері мен кеңістіктегі фигураларды үйренетін пән. Заттардың басқа қасиеттерін басқа пәндер үйренеді. Егер бір нәрсе үйренілгенде, оның тек кеңістіктегі фигурасы мен өлшемдері ғана ескерілсе, онда *геометриялық фигура* деп аталатын абстракт объектіге ие боламыз.

Геометрия – грекше сөз болып, "жер өлшеу" деген мағынаны білдіреді. Мектепте үйренілетін геометрия ежелгі грек ғалымы Эвклидтің атымен *Эвклид геометриясы* деп аталады. Геометрия екі бөліктен: планиметрия және стереометриядан құралған. *Планиметрия* – жазықтықтағы, ал *стереометрия* кеңістіктегі геометриялық фигуралардың қасиеттерін үйренеді (1-сурет).

Геометриялық фигуралардың бір-бірінен айырмашылығын білу үшін олардың ерекшелігі сипатталады, яғни оларға *анықтама* беріледі. Бірақ барлық фигураларға анықтама беруге болмайды. Олардың бастапқы бірнешеуін анықтамасыз қабылдауға мәжбүрміз. Оларды анықтама берілмейтін, *бастауыш (негізгі) геометриялық фигуралар* деп аламыз.



Геометрияның логикалық құрылымы төмендегі тәртіппен жүзеге асырылады:

1. Алдымен негізгі (бастапқы) геометриялық фигуралар анықтамасыз қабылданады;
2. Негізгі геометриялық фигуралардың негізгі қасиеттері дәлелсіз қабылданады;
3. Басқа геометриялық фигураларға негізгі фигуралар

мен олардың қасиеттеріне сүйене анықтама беріледі және олардың қасиеттері оған дейін белгілі болған қасиеттерге сүйене дәлелденеді.

Пәннің мұндай құрылымы *аксиомалық құрылым* деп аталады. *Аксиома* деп дұрыстығы дәлелсіз қабылданған қасиетке айтылады.

Осы кезге дейін біз үйренген планиметрияның негізгі фигуралары – нүкте мен түзу еді. Оларды анықтамасыз қабылдадық. Ал кесінді, сәуле, үшбұрыш, басқа да геометриялық фигураларға анықтама бердік. Сондай-ақ, төмендегі қасиеттерді (растауларды) дәлелсіз аксиома ретінде қабылдадық.

I. Тиістілік аксиомалары тобы

1.1. *Жазықтықта қандай түзу алынса да, онда осы түзуге тиісті нүктелер де, тиісті емес нүктелер де болады.*

1.2. *Кез келген екі нүкте арқылы тек бір ғана түзу жүргізуге болады.*

II. Тәртіп аксиомалары тобы

2.1. *Бір түзудегі кез келген үш нүктенің тек біреуі ғана қалған екеуінің арасында жатады .*

2.2. *Кез келген түзу жазықтықты екі жарты жазықтыққа бөледі.*

III. Өлшеу аксиомалары тобы

3.1. *Кез келген кесінді нөлден ерекшеленген белгілі бір ұзындыққа ие болып, ол оң санмен өрнектеледі. Кесіндінің ұзындығы оның кез келген нүктесі бөлген бөліктері ұзындықтарының қосындысына тең болады.*

3.2. *Кез келген бұрыш белгілі бір градустық өлшемге ие болып, оның мәні оң санмен өрнектеледі. Жазыңқы бұрыштың градустық өлшемі* 180°*-қа тең. Бұрыштың градустық өлшемі бұрыш қабырғаларының арасынан өтетін кез келген сәулемен бөлінетін бұрыштардың градустық өлшемдерінің қосындысына тең.*

IV. Тең фигураны салу аксиомалары тобы

4.1. *Кез келген сәулеге оның ұшынан бастап, берілген кесіндіге тең бір ғана кесіндіні салуға болады.*

4.2. *Кез келген сәуледен белгілі бір жарты жазықтықта берілген, жазыңқы болмаған бұрышқа тең бір ғана бұрышты салуға болады.*

4.3. *Кез келген үшбұрыш үшін оған тең үшбұрыш бар және оны сәуледен белгілі бір жарты жазықтыққа бір ғана түрде салуға болады.*

V. Параллельдік аксиомасы

5.1. *Жазықтықта берілген түзуде жатпайтын нүкте арқылы осы түзуге тек бір ғана параллель жүргізуге болады.*

Қандай да бір растаудың дұрыстығын логикалық тұжырымдар арқылы келтіріп шығару *дәлел* деп аталады. Ал дұрыстығы дәлелдеу жолымен негізделінетін растау *теорема* деп аталады. Теорема, әдетте, шарт және қорытынды бөліктерден құралады. Теореманың бірінші – шарт бөлігінде ненің берілгені баяндалады. Екінші – қорытынды бөлігінде нені дәлелдеу қажеттілігі өрнектеледі.

Эвклид
(эрамыздан бұрынғы 356–300-жылдар)

Теореманы дәлелдеу – оның шартын пайдаланып, оған дейін дәлелденген және қабылданған қасиеттерге сүйеніп, тұжырым жасап, қорытынды бөлігінде өрнектелген сөздердің дұрыстығын туындату. Теореманың шарт және қорытынды бөліктерін анықтап алу – теореманы айқындайды, оны түсіну және дәлелдеу үдерісін жеңілдетеді.

Грек ғалымы Платон геометрияда ғажап бір заңдылықты байқаған: бұрын үйренілген, дұрыстығы дәлелденген қасиеттерден логикалық пікірлеу арқылы жаңа қасиеттерді туындатуға болады екен. Осы мүмкіндікті пайдаланып, қалған қасиеттер теоремалар көрінісінде өрнектеледі және аксиомалар мен осы кезге дейін дұрыстығы дәлелденген қасиеттерге негізделіп, логикалық тұжырым жасаумен дәлелденеді.

Тұжырым жасау үдерісінде дәлелденбеген қасиеттерді (олардың дұрыстығы айқын көрініп тұрған болса да) пайдалануға тыйым салынады.

Сөйтіп, геометрияға бір ғимарат деп қарайтын болсақ, бастапқы ұғымдар мен аксиомалар оның іргетасын құрайды. Осы іргетастың үстіне қаланған қыштар – анықтама берілген жаңа ұғымдар мен теоремалар көрінісіндегі дәлелденген қасиеттерден құралған болады.

Геометрияны жеке пән ретінде негізін қалауға ежелгі грек ғалымдары үлкен үлес қосқан. Мысалы, Гиппократ Хиосский геометрия негіздері туралы бастапқы көзқарастарды баяндаған. Бұл сала бойынша басты істерді ұлы грек ғалымы Эвклид (эрамыздан бұрынғы 356 – 300-жылдар) жүзеге асырған. Оның негізгі шығармасы "Бастама" планиметрия, стереометрия және сандар теориясының кейбір мәселелерін, сондай-ақ алгебра, қатынастар жалпы теориясы, аудан және көлемді есептеу тәсілі мен лимиттер теориясы элементтерін қамтыған. Эвклид "Бастамада" ежелгі грек математикасының барлық жетістіктерін жинақтап, оның дамуына негіз жаратты.

"Бастама" 13 кітаптан құралған болып, бұл шығармада эрамыздан бұрынғы V – IV ғасырлардағы грек математиктері шығармалары қайта өңделген. Шығармада 23 анықтама, 5 постулат және 9 аксиома берілген. Шығармада тік төртбұрышқа, квадратқа, шеңберге дұрыс анықтамалар

Омар Һайям
(1048–1131)

берілген. Нүкте мен түзуге төмендегідей анықтамалар берілген: "Нүкте деп бөліктерге ие емес нәрсеге айтылады", "Түзу деп ені жоқ ұзындыққа айтылады".

"Бастамаларда" 9 аксиома – дәлелсіз қабылданған тұжырымдар баяндалған. Геометриялық салуды жүзеге асыру мүмкіндігін баяндайтын төмендегі бес математикалық тұжырымдар (постулат) айтылған:

I. Кез келген екі нүктеден тек бір ғана түзу өткізуге болады.

II. Түзу кесіндіні шексіз жалғастыруға болады.

III. Әрқандай центрден кез келген радиусты шеңбер салуға болады.

IV. Барлық тікбұрыштар өзара тең.

V. Бір жазықтықта жатқан екі түзуді үшінші түзу қиып, бір қабырғалы ішкі бұрыштар пайда етсе және бұрыштардың қосындысы екі тікбұрыштан кіші болса, осы түзулер жалғастырылғанда олар қосындысы екі тікбұрыштан кіші болған бұрыштардың қабырғаларында қиылысады.

Бұл шығарма үлкен және алыс мерзімді атаққа ие болды. Әсіресе, V постулат үлкен ғылыми пікірсайыстарға себеп болды. Егер V постулаттағы ішкі айқыш бұрыштарын α және β дейтін болсақ (1-сурет), түзулер a және b болса, онда постулаттың мазмұнына орай $\alpha+\beta<180°$ болса, a және b түзулер қиылысады.

Постулатты дәлелдеу жолында оған тепе-тең бірқатар тұжырымдар пайда болды. Мысалы, ағылшын математигі Ян Плейфердің (1748–1819) *параллельдік аксиомасы* солардың бірі: жазықтықтағы түзуде жатпайтын нүкте арқылы осы түзуге бір ғана параллель түзу өткізуге болады.

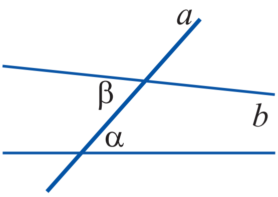
Математик, ақын, астраном және философ Омар Ғиясиддин Абул Фахт ибн Ибраһим Һайям да осы мәселемен шұғылданған. Һайям "Эвклид кітабының кіріспесіндегі қиындықтарға түсініктемелер" атты шығармасында V постулатқа тоқталған. Ол Эвклидтің постулаты теорема екенін дәлелдеу үшін төменгі табанындағы екі бұрышы тік болған тік төртбұрышты қарастырған (2-сурет) және егер оның төменгі екі бұрышы тік болса, жоғарыдағы екі бұрышы да тік болуы қажет деген қорытындыға келген. Омар Һайям "Бір түзуге перпендикуляр болған екі түзу түзудің екі жағында да қиылыспайды", – дейді. Омар Һайямның бұл еңбектерінен хабарсыз болған италиялық ғалым Дж. Саккери (1667–1733) де V постулатпен шұғылданып, тік төртбұрышқа жүгінген. Геометрия бастамаларына бұл тік төртбұрыш "Һайям – Саккери төртбұрышы" атауымен енген.

Н.И. Лобачевский
(1792–1856)

Бұл проблеманы ұлы орыс математигі Николай Иванович Лобачевский (1792–1856) шешті және эвклидтік болмаған геометриясын жаратты. Лобачевский бірінші рет Эвклидтің бесінші постулаты геометрияның басқа аксиомаларына байланысты емес екенін дәлелдеді. Бұл геометрия Эвклид геометриясынан түбегейлі ерекшеленетін еді. Бірақ ол логикалық қарама-қарсылыққа (қайшылыққа) кездесуі керек еді, өйткені – екі геометрияның бір уақытта бар болуы мүмкін емес. Соған қарамастан, Лобачевский жаңа нәтижелерді туындата бастады, олар логикалық қарама-қарсылыққа кездеспеді. Жаңа геометрия мен Эвклид геометриясындағы бірінші төрт топ аксиомалар дәлме-дәл түсті. Бұл аксиомалар топтары мен олардың нәтижелері абсолют геометрия деп атала бастады.

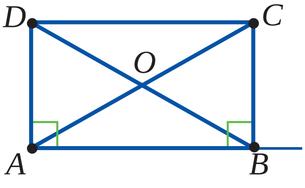
Бірақ эвклидтік емес (Лобачевский) геометрияның Эвклид геометриясынан айтарлықтай айырмашылығы бар. Мысалы, Лобачевский геометриясында үшбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы π-ден кіші, онда ұқсас немесе тең болмаған үшбұрыштар жоқ, берілген түзуден бірдей алыстаған нүктелердің жиыны түзу емес, қисық сызық саналады, тағы сол сияқтылар.

1



Эвклидтік емес геометрияны жаратуға венгер математигі Янош Бойяи (1802– 1860) мен неміс математигі Карл Фридрих Гаусс (1777–1855) үлкен үлес қосқан. Сондай-ақ итальян математигі Эудженио Белтрами (1835–1900) мен неміс математигі Бернхард Риман (1826–1866) жаңа геометрияны сипаттауда үлкен істерді атқарды.

2



Эвклид бастаған аксиоматика белгілі бір мағынада неміс математигі Давид Гильберт (1862–1943) пен орыс математигі Вениамин Федорович Каган (1859–1953) еңбектерінде соңына жеткізілді.

? *Тақырыпқа қатысты сұрақтар*

1. *Геометрия аксиомалары жүйесін баяндаған Эвклид туралы не білесің?*
2. *Эвклидтің "Бастамалар" шығармасы туралы әңгімелеп бер.*
3. *Анықтама не? Жазықтықтағы қайсы фигуралар негізгі (бастапқы) фигуралар ретінде анықтамасыз қабылданған?*

4. *Теорема мен аксиома бірінен-бірі несімен ерекшеленеді?*
5. *Планиметрия аксиомаларын санап өт және оларға түсініктеме бер.*
6. *Геометрия пәнінің құрылымы қандай?*
7. *Эвклидтің* V постулаты не туралы және оны не үшін дәлелдеуді қалаған?
8. V *постулатты дәлелдеуге әрекет жасаған ғалымдар мен олардың еңбектері туралы әңгімелеп бер.*
9. *Лобачевский жаңа геометрияның жаратылуына қандай үлес қосқан?*
10. *Эвклидтік емес геометрияны жаратқан ғалымдар мен олардың еңбектері туралы әңгімелеп бер.*

2 ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ ЕСЕПТЕР ЖӘНЕ ОЛАРДЫ ШЕШУ ТӘСІЛДЕРІ

Жоғарыда айтылғанындай, геометрияның ең ғажап ерекшелігі – бұрын үйренілген, дұрыстығы дәлелденген қасиеттерден логикалық пікірлеу арқылы жаңа қасиеттерді туындатуға болады. Осы ғажап мүмкіндікті пайдаланып, қалған қасиеттер теоремалар немесе есептер көрінісінде өрнектелген және акисомалар мен осы кезге дейін дұрыстығы дәлелденген қасиеттерге негізделіп, логикалық тұжырымдар арқылы дәлелденген. Осылайша математикалық немесе геометриялық есептер пайда болған.

Математикалық есепте қандай да бір нәрсе (шарттар) берілген болады. Оларды пайдаланып, сол нәрсені табу (есептеу) немесе дәлелдеу, я болмаса салу талап етіледі. Қойылған талапты орындау есепті шешуді білдіреді.

Геометриялық есептер қойылған талапқа орай есептеуге, дәлелдеуге, зерттеуге және салуға қатысты есептер болып бөлінеді.

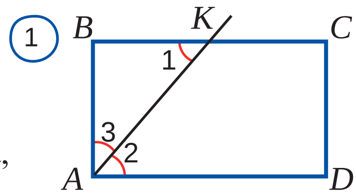
Математикалық есепті шешу үшін тек теорияны білу жеткілікті емес. Есепті шешу дағдысы мен тәжірибесіне ие болу қажет. Мұндай дағдыға өз кезегінде қарапайым есептерден бастап, барған сайын күрделірек есептерді шешу арқылы қол жеткізіледі. Сондай-ақ есептерді шешудің бірдей тәсілдері де бар болып, оларды тек көп есептерді шешу арқылы ғана игеруге болады. Әрбір тәсіл белгілі бір топқа тиісті есептерді шешу үшін қолданылады. Қанша көп тәсіл иегерілсе, соншама есеп шешу дағдысы қалыптасады.

Төменде геометриялық есептерді шешудің кейбір маңызды тәсілдеріне тоқталамыз

Есеп шешу тәсілдері құрылымына орай, синтетикалық, аналитикалық, кері жорамалдау, тағы басқа да түрлерге бөлінеді. Ал математикалық аппараттың қолданылуына орай, алгебралық, векторлар, координаталар, аудандар тәсілі, ұқсастық тәсілі, геометриялық алмастырулар сияқты түрлерге бөлінеді.

Синтетикалық тәсілде есеп шартында берілгендерді пайдаланып, тұжырым жасау арқылы логикалық пікірлер тізбегі жасалады. Тұжырымдар тізбегі ең соңғы бөлігі есеп талабымен дәлме-дәл түскенше жалғасады.

1-мысал. Тік төртбұрыш бұрышының биссектрисасы оның қабырғасын 7 және 9 ұзындықтағы кесінділерге бөледі (1-сурет). Тік төртбұрыштың периметрін тап.



Шешуі. $ABCD$ – тік төртбұрыш, AK биссектриса, $K \in BC$, $BK = 7$ см, $KC = 9$ см болсын.

1. $BC \parallel AD$ және AK қиюшы болғандықтан: $\angle 1 = \angle 2$. (1)
болады, өйткені бұл бұрыштар ішкі айқыш бұрыштар.
2. AK – биссектриса: $\angle 2 = \angle 3$. (2)
3. Онда (1) мен (2)-ге орай $\angle 1 = \angle 3$.
4. Бұл жағдайда ABK теңбүйірлі үшбұрыш және $AB = BK$. (3)
5. Осы нәтижені пайдаланып, есептеуді орындаймыз:
1-жағдайда: $AB = BK = 7$ см. $P = 2(AB + BC) = 2\,(7+16) = 46$ (*см*).
2-жағдайда: $AB = BC = 9$ см. $P = 2(AB + BC) = 2\,(9+16) = 50$ (*см*). ❑

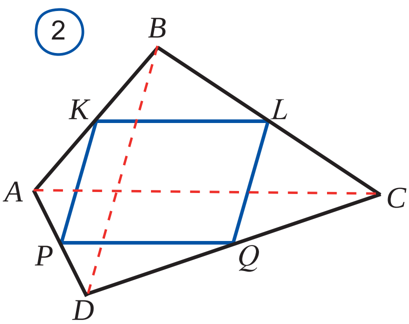
Бұл есеп тірек есептердің қатарына енеді, өйткені көптеген есептер дәл осы идеяның айналасына құрылады. Параллелограмм мен трапеция бұрышының биссектрисасы осы фигуралар жазықтығынан теңбүйірлі үшбұрышты қиып алады. Мұндай тірек фактілерді әрдайым есте сақтау қажет. Олар басқа есептерді шешетін кезде өте пайдалы болады.

Аналитикалық тәсілде теореманың (есептің) қорытынды бөлігінен туындап, бұрыннан белгілі растауларды пайдаланып, тұжырым жасау арқылы логикалық пікірлеу тізбегі жасалады. Тұжырымдар тізбегі ең соңғы бөлігі есеп шартының нәтижесі екені анықталғанға дейін жалғасады.

2-мысал. Кез келген төртбұрыштың қабырғаларының центрі параллеограмның төбелері болуын дәлелде.

Дәлелдеу. Мысалы, $ABCD$ – төрбұрыш (2-сурет), $AK = KB$, $BL = LC$, $CQ = QD$, $AP = PD$ болсын.

Төртбұрыштың AC және BD диагоналдарын жүргіземіз.



1. $\triangle ABC$-да KL центрлік түзу: $KL \parallel AC$ (1);
2. $\triangle ADC$-да PQ центрлік түзу: $AC \parallel PQ$ (2);
3. (1) пен (2)-ден: $KL \parallel PQ$ (3);
4. Жоғарыдағыға ұқсас: $KP \parallel LQ$ (4);
5. (3) пен (4)-тен: $KLQP$ – параллеограмм. ❑

Жоғарыда қарастырылған синтетикалық және аналитикалық тәсілдер ***дұрыс тәсілдер*** деп те аталады. Есепті дұрыс тәсілдермен шешкенде, алдымен есептің мазмұны талданады. Талдау нәтижесіне орай тәсіл таңдалады. Одан соң сурет көрінісіндегі есепті шешу моделі (сызбасы) құрастырылады және сызбаның үстінде тұжырым жасалады. Осылай тұжырым жасалып, есептің шартынан қорытынды бөліміне қарай барады.

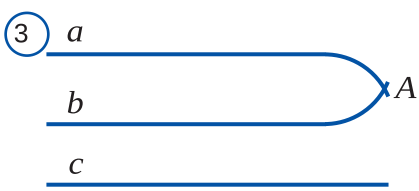
Есепті шешудің кері тәсілі де бар. Онымен көп рет кездескенбіз. Ол "***кері жорамал жасап дәлелдеу тәсілі***" деп аталады. Осы тәсілді қолдану алгоритмін қарастырайық.

Кері жорамал жасап дәлелдеу тәсілін қолдану алгоритмі

Теорема (дұрыс растау)	***Егер А орынды балса, В орынды болады. (А және В – қандай да бір пікірлер)***
Дәлел:	
Кері жорамалдау:	Теоремада келтірілген растауға кері жорамал жасаймыз, яғни теореманың шарты орындалып, бірақ қорытындысы орынды болмасын: ***Егер А орынды болса, В орынды болмайды.***
Тұжырым жасау:	Дұрыстығы бұрын дәлелденген теорема немесе қабылданған аксиомаларға сүйеніп логикалық тұжырым жасаймыз.
Қайшылыққа тірелу:	Дұрыстығы бұрын дәлелденген теорема немесе қабылданған аксиомалардың біріне қайшы болған растауға кездесеміз
Қорытынды шығару:	Демек, жорамалымыз қате, яғни берілген теорема дұрыс екен.
Теорема дәлелденді	

3-мысал. Егер екі түзудің әрбірі үшінші түзуге параллель болса, олар өзара параллель болады.

Мысалы, a және b түзулері берілген болып, олардың әрбірі үшінші c түзуге параллель болсын. Теореманы кері жорамалдау тәсілімен дәлелдейміз.



Дәлелдеу. Кері жорамал жасаймыз: a және b түзулерінің әрбірі үшінші c түзуге параллель болсын, бірақ олар өзара параллель болмасын, яғни қандай да бір A нүктеде қиылысатын болсын (3-сурет). Онда A нүкте арқылы c түзуге екі a және b параллель түзулер өтеді. Бұл параллельдік аксиомасына қайшы. Қайшылық жорамалымыздың қате екенін көрсетті. Яғни a және b түзулерінің әрбірі үшінші c түзуге параллель болса, олар өзара параллель болады. ❑

Бұл тәсіл төмендегі логика заңына негізделген: бір-біріне қайшы екі растаудың тек біреуі ғана ақиқат, екіншісі жалған болады, үшінші жағдайдың болуы мүмкін емес.

Енді геометриялық есептерді шешудің басқа да тәсілдеріне тоқталайық.

Алгебралық тәсіл

Геометриялық есепті алгебралық тәсілмен шешкен кезде төмендегі алгоритм негізінде жұмыс жасау мақсатқа сай болады:

1) есеп мазмұнын талдау және оның сызба моделін құрастыру;

2) белгісізді әріппен белгілеу;

3) есеп шартын өрнектейтін теңдеу немесе теңдеулер жүйесін құрастыру;

4) құрылған теңдеу немесе теңдеулер жүйесін шешу;

5) табылған шешімді талдау;

6) жауапты жазу.

4-мысал. Тікбұрышты үшбұрыштың периметрі 36 см-ге тең. Гипотенузаның катетке қатынасы 5:3. Үшбұрыштың қабырғаларын тап.

$\triangle ABC$ берілген болып, онда $\angle C = 90°$, $P = 36$, $AB:AC = 5:3$ болсын.

Шешуі. Пропорциональдық коэффициентін k-мен белгілейміз.

Онда $AB = 5k$, $AC = 3k$.

Пифагор теоремасына орай: $AB^2 = AC^2 + BC^2$ немесе $25k^2 = 9k^2 + BC^2$.

Бұдан, $BC = \sqrt{25k^2 - 9k^2} = 4k;$

$P = AB + AC + BC.$

Шартқа орай: $P = 36,$ $5k + 3k + 4k = 36,$ $k = 3;$

$AB = 5k = 15$ см, $AC = 3k = 9$ см, $BC = 4k = 12$ см.

Жауабы: 15 см, 9 см, 12 см. ❑

Аудандар тәсілі

Кейбір геометриялық есептерді шешуде аудандарды есептеу формулаларын пайдалану күтілген нәтижені жылдам береді. Бұл жағдайда табу талап етілген белгісіз есептегі жәрдемші фигуралардың ауданын теңестіру нәтижесінде туындаған теңдеу арқылы табылады. Мұны төмендегі мысалда көреміз.

5-мысал. Үшбұрыштың қабырғалары 13 см, 14 см және 15 см. Ұзындығы 14-ке тең қабырғаға түсірілген биіктікті тап.

Шешуі. Мысалы, $\triangle ABC$ берілген болып, онда $a < b$ және $b < c$, h_c, $a =$ 13 см, $b = 14$ см, $c = 15$ см яғни h_b – ізделінген биіктік болсын.

Герон формуласымен: $S_\triangle = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21\cdot 8\cdot 7\cdot 6} = 3\cdot 7\cdot 4 = 84$ (см^2).

Басқа формула бойынша: $S_{\triangle} = \frac{1}{2}\, b \cdot h_b$-ға иеміз. Онда $\frac{1}{2}\, b \cdot h_b = 84$, немесе $h_b = 12$ (см).

Жауабы: 12 см. ❑

Векторлар тәсілі

Геометриялық есепті векторлар тәсілімен шешкен кезде төмендегі алгоритм негізінде жұмыс жасау мақсатқа сай болады:

1) есепті векторлар тіліне аудару, яғни есептегі кейбір шамаларға вектор ретінде қарап, оларға қатысты векторлық теңдеулерді құру;

2) векторлардың белгілі қасиеттерін пайдаланып, векторлық теңдеулердің пішінін алмастыру және белгісізді табу;

3) векторлар тілінен геометрия тіліне қайту;

4) жауапты жазу.

Векторлар тәсілімен төмендегі геометриялық есептерді шешу мақсатқа сай болады:

a) түзулердің (кесінділердің) параллельдігін анықтау (дәлелдеу);

b) кесінділерді берілген қатынаста бөлу;

c) үш нүктенің бір түзудің бойында жатқанын көрсету;

d) төртбұрыштың параллелограмм (ромб, трапеция, квадрат, тік төртбұрыш) екенін көрсету.

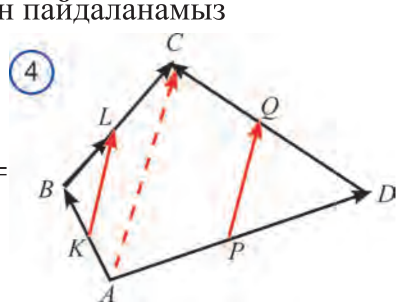
6-мысал. Дөңес төртбұрыштың қабырғаларының центрлері параллелограммның төбелері болуын дәлелде.

Мысалы, $ABCD$ төртбұрыш берілген, онда $AK = KB$, $BL = LC$, $CQ = QD$, $AP = PD$ болсын (4-сурет).

Дәлелдеу. 1. Берілген кесінділерді $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{DC}$, $\overline{AD}$, $\overline{KL}$, $\overline{PQ}$, $\overline{BL}$, $\overline{KB}$ векторлармен алмастырып, есепті вектор тіліне өткіземіз;

2. Векторларды қосудың үшбұрыш ережесін пайдаланамыз

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}, \quad \overline{KB} + \overline{BL} = \overline{KL};$$



$\overline{KB} = \frac{1}{2}\,\overline{AB}$ *мен* $\overline{BL} = \frac{1}{2}\,\overline{BC}$ екенін ескеріп, $\overline{KL} = \overline{KB} + \overline{BL} = \frac{1}{2}\,\overline{AB} + \frac{1}{2}\,\overline{BC} = \frac{1}{2}\,(\overline{AB} + \overline{BC}) = \frac{1}{2}\,\overline{AC}$ екенін табамыз.

Дәл осылайша, $\overline{PQ} = \frac{1}{2}\,\overline{AC}$ болады.

3. $\overline{KL} = \overline{PQ}$, яғни бұл векторлар бірдей бағытталған және ұзындығы тең. Бұл $KLQP$ төртбұрыштың паралеллограмм екенін білдіреді. ❑

Координаталар тәсілі

Геометриялық есепті координаталар тәсілімен шешкен кезде төмендегі алгоритм негізінде жұмыс жасау мақсатқа сай болады:

1) есеп мазмұнын талдау және оны координаталар тіліне аудару;

2) өрнектердің пішінін алмастыру және мәнін есептеу;

3) нәтижені геометрия тіліне аудару;

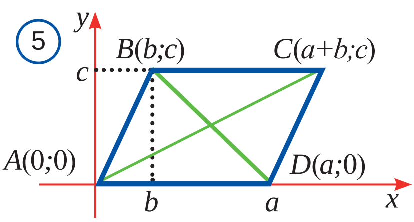
4) жауапты жазу.

Координаталар тәсілімен төмендегі геометриялық есептерді шешу мақсатқа сай: a) нүктелердің геометриялық орнын табу; b) геометриялық фигуралар сызықты элементтерінің арасындағы байланысты табу.

Есепті координаталар тәсілімен шешкенде, координаталардың бастауын дұрыс таңдау маңызды. Берілген фигураны координаталар жазықтығына орналастырғанда мүмкіндігінше нүктелердің координаталары нөлге немесе бірдей санға тең болсын.

7- мысал. Диагональдары тең параллелограммның тік төртбұрыш болатынын дәлелде.

Дәлелдеу. Координаталар жүйесін параллелограммның төбелері төмендегі координаталарға ие болатындай етіп таңдаймыз (5-сурет):



$A(0; 0)$, $B(b; c)$, $C(a+b; c)$, $D(a; 0)$,
мұнда $a > 0$, $b \geq 0$, $c > 0$.

A, B, C, D нүктелердің арасындағы арақашықтықты олардың координаталары арқылы өрнектейміз:

$AC = \sqrt{(a + b - 0)^2 + (c - 0)^2}$, $BD = \sqrt{(a - b)^2 + (0 - c)^2}$.

Онда $\sqrt{(a + b - 0)^2 + (c - 0)^2} = \sqrt{(a - b)^2 + (0 - c)^2}$

немесе $(a + b - 0)^2 + (c - 0)^2 = (a - b)^2 + (0 - c)^2$. Бұдан, $4ab = 0$.

Бірақ $a > 0$, онда $b = 0$. Ал бұл, өз кезегінде, B $(b; c)$ нүкте Oy осінде жататынын білдіреді. Сондықтан BAD тікбұрыш болады.

Бұдан $ABCD$ параллелограммның тік төртбұрыш екені белгілі болады. ❑

Геометриялық алмастырулар тәсілі

Геометриялық алмастырулар тәсіліне бұру, симметриялық бейнелеу, параллель көшіру, гомотетия сияқты алмастыруға сүйенетін тәсілдер енеді. Геометриялық алмастырулардың көмегімен есептерді шешу үдерісінде берілген геометриялық фигуралармен бірге жаңа, геометриялық алмастыру арқылы жасалған фигуралар да қарастырылады. Жаңа фигуралардың қасиеттері анықталып, берілген фигураға өткізіледі. Соң есепті шешу жолы табылады. Жоғарыда айтылған, геометриялық фигуралардың қасиеттеріне негізделген барлық тәсілдер бір ғана ортақ атаумен геометриялық тәсілдер деп айтылады.

Маңызды ескерту!

Бұл бөлімдегі материалдар планиметрияны қайталау үшін берілген. Қайталау үшін есептер керегінен де көп берілген. Олардың барлығын сыныпта қарастыруға уақыт жетпеуі мүмкін. Соған қарамастан, оларды өз бетіңше шешуіңе кеңес береміз. Бұл сендердің 10-сыныпта геометрияны үйренуді табысты жалғастыруларыңа негіз болады.

? Тақырыпқа қатысты сұрақтар

1. *Математикалық есеп дегенде нені түсінесің?*
2. *Геометриялық есептің қандай түрлерін білесің?*
3. *Есепті шешудің қандай түрлерін білесің?*
4. *Геометриялық есепті шешудің синтетикалық, аналитикалық тәсілдері туралы әңгімелеп бер.*
5. *Есепті шешудің дұрыс және кері тәсілдері туралы не білесің?*
6. *Кері жорамал жасап дәлелдеу тәсілінің маңызы неде?*
7. *Геометриялық есепті алгебралық тәсілмен шешу алгоритмін түсіндір.*
8. *Геометриялық есепті векторлар тәсілімен шешу алгоритмін түсіндіріп бер.*
9. *Векторлар тәсілімен әдетте қандай есептер шешіледі?*
10. *Геометриялық есепті координаталар тәсілімен шешу алгоритмін түсіндіріп бер.*
11. *Координаталар тәсілімен әдетте қандай есептер шешіледі?*
12. *Геометриялық алмастырулар тәсілін түсіндіріп бер.*

3 ПРАКТИКАЛЫҚ ЖАТТЫҒУЛАР МЕН ҚОЛДАНУЛАР

1.1. Екі түзудің қиылысуынан төрт бұрыш пайда болады (1-сурет). Төменде көрсетілген кестедегі әрбір шартқа (A – E) одан туындайтын қорытындыны (1 – 5) сәйкестендір:

A) $\angle 1 = \angle 3$;	1) $\angle 3 = \angle 4 = 90°$;
B) $\angle 2 + \angle 3 = 180°$;	2) $\angle 1 = \angle 2 = \angle 4 = 90°$;
C) $\angle 1 = \angle 2 + 90°$;	3) $\angle 1$ және $\angle 4$ – сыбайлас;
D) $\angle 2 + \angle 4 = 260°$;	4) $\angle 1$ және $\angle 3$ – сүйір;

A	
B	
C	
D	
E	

E) $\angle 3 = 90°$. 5) $\angle 2$ және $\angle 4$ – вертикаль.

1.2. Төменде кейбір бұрыштардың градустық өлшемдері (1–7) берілген. Олардың қайсы жұптары сыбайлас болуы мүмкін екенін анықта.

1) 18°; 2) 72°; 3) 128°; 4) 62°; 5) 28° ; 6) 108°; 7) 38°.

A) 1 және 2; *B*) 2 және 6; *C*) 3 және 4; *D*) 1 және 7; *E*) 2 және 5.

1.3. Егер 2-суретте $\angle 1 = \angle 7$ болса, дұрыс растауды тап.

A) $a \parallel b$; *B*) $a \perp b$; *C*) *a* және *b* қиылыспайды;

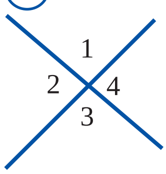
1.4. Егер 3-суретте $CD \parallel AB$, $\angle 1 = \angle 2$ және $\angle 2 = 72°$ болса, $\angle 3 = ?$

A) 72°; *B*) 144°; *C*) 108°; *D*) 36°; *E*) 124°.

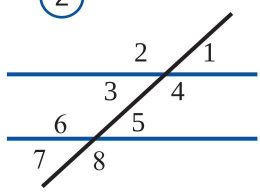
1.5. Егер теңбүйірлі үшбұрыш бұрыштары 3 : 4 : 3 қатынаста болса, оның төбесі биссектрисасы мен жанама қабырғасы арасындағы бұрышты тап.

A) 18°; *B*) 36°; *C*) 72°; *D*) 60°; *E*) 30°.

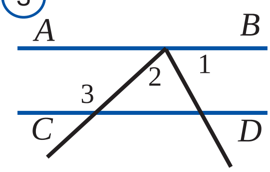
1



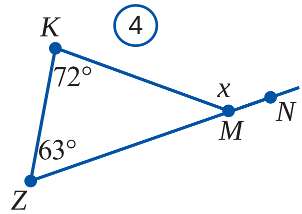
2



3



4



1.6. 4-суретте бейнеленген *KMZ* үшбұрыш бұрышының сыртындағы *KMN* бұрыштың градустық өлшемін тап.

A) 135°; *B*) 108°; *C*) 45°; *D*) 125°; *E*) 117°.

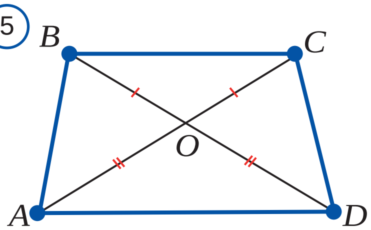
1.7. Дұрыс теңдікті тап (5-сурет).

A) $\triangle ABO = \triangle OCD$; *B*) $BA = CD$; *C*) $\triangle ABO = \triangle COD$;

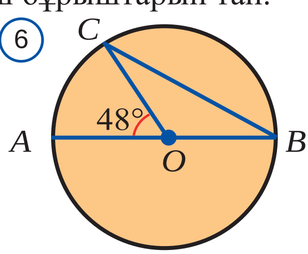
D) $\angle AOB = \angle DOC$; *E*) $\angle BAO = \angle DCO$; *F*) $\angle BAO = \angle CDO$.

1.8. 6-суреттегі *BOC* үшбұрыш бұрыштарын тап.

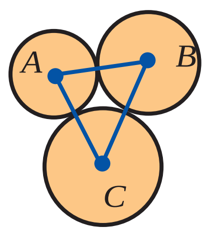
5



6



7



A) 48°, 48°; 84°; *B*) 24°, 132°, 24°; *C*)132°, 48°, 48°; *E*)42°,90°,48°; *D*)48°,32°, 20°.

1.9. Үшбұрыштың төбелері радиустары 6 см, 7 см және 8 см болған және жұбымен түйісетін үш шеңбердің центрлерінде жатыр (7-сурет).

Осы үшбұрыштың периметрін тап.

A) 28 см; *B*) 29 см; *C*) 27 см; *D*) 42 см; *E*) 21 см.

1.10. Квадраттың қабырғасы $20\sqrt{2}$ -ге тең. Осы квадратқа іштей сызылған шеңбердің радиусын тап

A) 20; *B*) $10\sqrt{2}$; *C*) 10; *D*) $5\sqrt{2}$; *E*) 5.

1.11. Трапецияның бір табаны екіншісіне 8 см-ге ұзын, ал центрлік сызығы 10 см-ге тең. Трапецияның кіші табанын тап.

A) 2 см; *B*) 4 см; *C*) 6 см; *D*) 8 см; *E*) 10 см.

1.12. Диагональдары 10 м және 36 м болған ромбтың ауданын тап.

A) 90 м^2; *B*) 92 м^2; *C*) 180 м^2; *D*) 184 м^2; *E*) 36 м^2.

1.13. 8-суреттегі *m* және *n* түзулер өзара параллель болса, *a* және *b* түзулердің арасындағы бұрышты тап.

A) 50°; *B*) 80°; *C*) 100°; *D*) 65°; *E*) 115°.

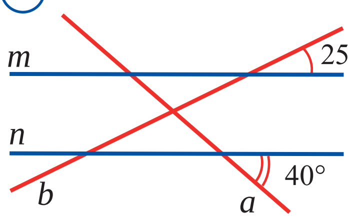
1.14. 9-суреттегі үшбұрыштың ауданын тап.

A) 6; *B*) 9 ; *C*) 12; *D*) 24; *E*) 30.

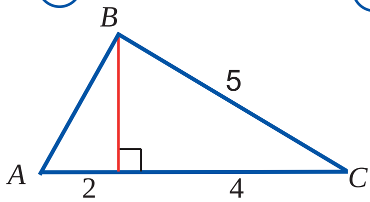
1.15. 10-суреттегі *R* радиусты шеңберге іштей сызылған *ABC* үшбұрыштың *BC* қабырғасын тап.

A) *R*; *B*) $R\sqrt{2}/2$; *C*) $R\sqrt{2}$; *D*) $R\sqrt{3}$; *E*) $R\sqrt{3}/2$.

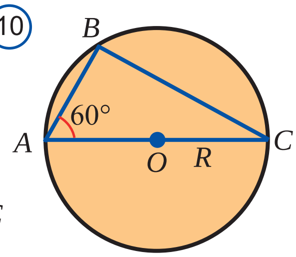
8



9



10



1.16. Ауданы 9π см^2 болған дөңгелекті орап тұрған шеңбердің ұзындығын тап.

A) 3π см; *B*) 9π см; *C*) 12π см; *D*) 18π см; *E*) 6π см.

1.17. Қабырғасы 6 см-ге тең квадратқа іштей сызылған дөңгелектің ауданын тап.

A) 9π см^2; *B*) 144π см^2; *C*) 36π см^2; *D*) 72π см^2; *E*) 18π см^2.

1.18. Квадратқа іштей сызылған шеңбер радиусы 5 см. Квадрат диагоналын тап.

A) $5\sqrt{2}/2$; *B*) $5\sqrt{2}$; *C*) $5\sqrt{2}/4$; *D*) $10\sqrt{2}$; *E*) $20\sqrt{3}$.

1.19. Ішкі бұрыштарының қосындысы1600° болған дұрыс көпбұрыштың қабырғаларының санын тап.

A) 12; *B*) 14; *C*) 16; *D*) 18; *E*) 20.

1.20. Диагоналдары 24 см және 18 см болған ромбтың периметрін тап.

A) 120 см; *B*) 60 см; *C*) 84 см; *D*) 108 см; *E*) 144 см.

1.21. Паралеллограмның периметрі 48 дм болып, бір қабырғасы екіншісінен

8 дм-ге ұзын. Параллелограмның кіші қабырғасын тап.

A) 8 дм; *B*) 16 дм; *C*) 6 дм; *D*) 12 дм; *E*) 10 дм.

1.22. 11-суреттегі *ABC* теңбүйірлі үшбұрыштың сыртына екі тең *ABM* және *CBK* бұрыштар салынды. Осы бұрыштар қабырғалары *AC* қабырғаны, сәйкесінше, *M* және *K* нүктелерде қиып өтеді. *MBC* және *KBA* үшбұрыштардың теңдігін дәлелде.

1.23. 12-суретте бейнеленген *AB* және *CD* түзулердің өзара орналасуын анықта. Жауабыңды негіздеп бер.

1.24. 13-суреттегі *ABC* үшбұрышқа іштей шеңбер сызылған. Шеңбердің *N* және *Z* түйісу нүктелері үшбұрыштың *AB* және *AC* қабырғаларын айырмасына сәйкес 3 см және 4 см болған кесінділерге бөледі ($AN > NB$, $AZ > ZC$). Егер ұшбұрыштың периметрі 28 см болса, оның қабырғаларын тап.

1.25. Теңбүйірлі үшбұрышқа радиусы $3\sqrt{3}$ болған шеңбер сырттай сызылған. Іштей сызылған шеңбердің радиусын тап

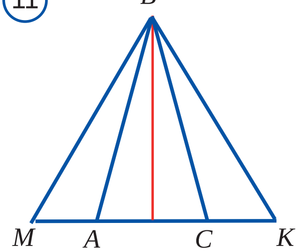
1.26. Табанындағы бұрышы 30° болған теңбүйірлі трапецияға шеңбер сырттай сызылған. Трапецияның биіктігі 7 см-ге тең болса, оның центрлік сызығын тап.

1.27. Табанындағы бұрышы 150° болған теңбүйірлі трапеция шеңберге сырттай сызылған. Трапецияның центрлік сызығы $16\sqrt{3}$ -ке тең болса, оның биіктігін тап.

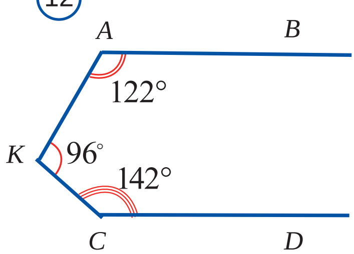
1.28. Табаны 16 см және осы табанға түсірілген биіктігі 15 см болған теңбүйірлі үшбұрыштың бүйір қабырғасын тап.

1.29. *ABC* үшбұрыштың *AO* биіктігі оның *BC* қабырғасын *BO* және *OC* кесінділерге бөледі. Егер $AB = 10\sqrt{2}$ см, $AC = 26$ см және $B = 45^{\circ}$ болса,

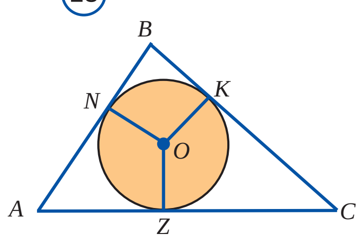
11



12



13



OC кесіндінің ұзындығын тап.

1.30. Ромбтың қабырғасы 10 см, диагональдарының бірі 12 см. Ромбқа іштей сызылған шеңбердің радиусын тап.

1.31. Радиусы 15 см болған шеңберде оның центрінен 12 см қашықтықта болған ватар өткізілген. Ватардың ұзындығын тап.

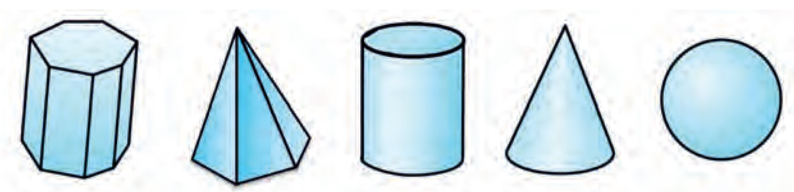
II БӨЛІМ

СТЕРЕОМЕТРИЯҒА КІРІСПЕ

4 КЕҢІСТІКТЕГІ ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ ФИГУРАЛАР. КӨПЖАҚТАР

Геометриялық фигуралар толығымен жазықтықта жататынына және жатпайтынына қарап, жазықтықтағы және кеңістіктегі фигураларға бөлінеді. Өткен сыныптардағы геометрия сабақтарында, негізінен, жазықтықтағы геометриялық фигуралардың қасиеттерін үйрендік. Ал 9-сыныптың соңында кейбір кеңістіктегі фигуралар: призма, пирамида, цилиндр, конус пен шардың (1-сурет) қасиеттерін қарастырған едік. Геометрияның планиметрия бөлімі жазықтықтағы, ал *стереометрия* бөлімі кеңістіктегі геометриялық фигуралардың (немесе денелердің) қасиеттерін үйренеді. Стереометрия сөзі грекше "stereos" – кеңістіктегі, "metreo" – өлшеймін деген мағынаны береді.

1

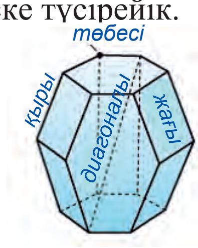


2

2-суреттегі предметтер кеңістіктегі денелердің рәмізі ретінде олар жайлы көзқарасты туындатады. Айналамыздағы барлық предметтер үш өлшемді болып, олардың фигурасы қайсы бір кеңістіктегі геометриялық денеге ұқсас. 9-сыныптың соңында мұндай кеңістіктегі денелермен таныстық. Ал стереометрия курсында жүйелі үйренуді бастаймыз. Алдымен кейбір кеңістіктегі денелердің элементтері туралы мәліметті қысқаша еске түсірейік.

Көпжақ деп жазық көпбұрыштармен шек
Жазық көпбұрыштар *көпбұрыштардың жақта*
– *көпжақтың төбесі,* ал қабырғалары – *көпжақ*
Бір жаққа тиісті болмаған биіктіктерді біріктіреті
гоналы деп аталады (3-сурет).

3



Көпжақтың шекарасын оның *беті* деп атайды.
екіге бөледі. Олардың шексіз бөлігі *көпжақты*
телген бөлігі *көпжақтың ішкі саласы* деп атала

4

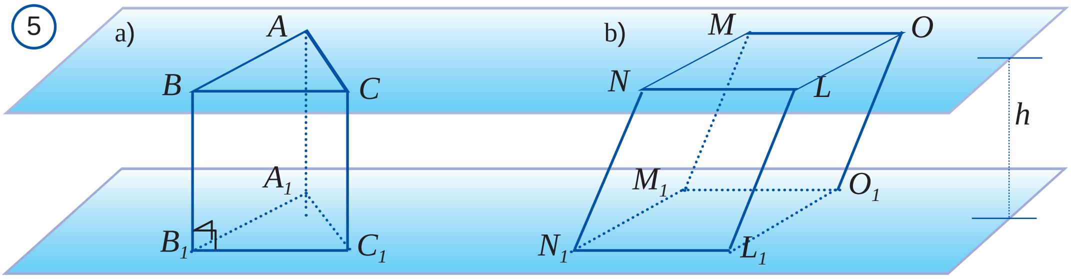
Көпжақтың кез келген жағы жатқан жазықт
мұндай көпжақ *дөңес көпжақ* деп аталады. Мыс
Ал 4-суретте дөңес болмаған көпжақ бейнелеі
көпжақтар: призма мен пирамидаларды үйренем

Призма деп екі жағы тең көпбұрыштан, ал қалған жағы параллелограмнан құралған көпжаққа айтылады (5-сурет). Призманың тең жақтары оның *табандары*, ал параллелограмдары *бүйір жақтары* деп аталады (6-сурет). Табанындағы жақтарының санына қарай призмалар *үшбұрышты, төртбұрышты, тағы басқа n-бұрышты призмалар* деп аталады. 5.а-суретте үшбұрышты $ABCA_1B_1C_1$ призма, ал 5.б-суретте төртбұрышты $MNLOM_1N_1L_1O_1$ призма бейнеленген.

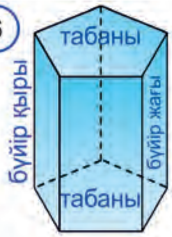
Призманың бүйір жақтарының табанына перпендикуляр немесе перпендикуляр еместігіне қарай *тік призма* (6-сурет) немесе *көлбеу призма* (7-сурет) деп аталады.

Табаны дұрыс көпбұрыштан құралған тік призма *дұрыс призма* (8-сурет) деп аталады.

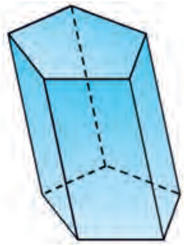
5



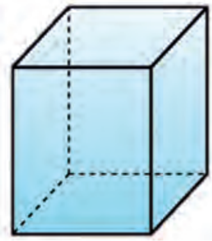
6



7



8

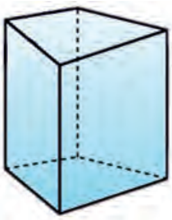


Табаны параллелограмнан құралған призма *параллелепипед* (9-сурет) деп аталады. Параллелепипедтер де призма сияқты тік және көлбеу болуы мүмкін. Табаны тік төртбұрыштан құралған тік параллелепипед *тікбұрышты параллелепипед* (10-сурет) деп аталады. Тікбұрышты параллелепипедтің барлық жақтары тік төртбұрыштан құралатыны белгілі.

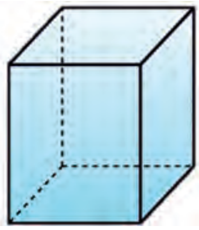
Тікбұрышты параллелепипедтің бір төбесінен шығатын үш қыры оның *өлшемдері* деп аталады.

Өлшемдері тең болған тікбұрышты параллелепипед *куб* деп аталады. Кубтың барлық жақтары тең квадраттардан құралатыны белгілі.

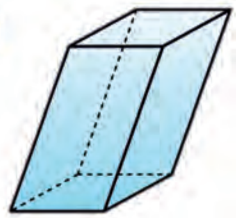
9



10



11

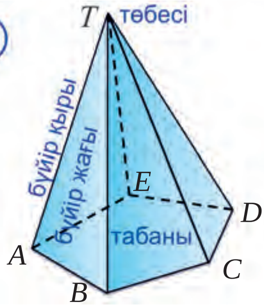


Пирамида деп бір жағы көпбұрыштан, қалған жағы бір төбеге ие үшбұрыштардан құралған көпжаққа айтылады. Көпбұрыш пирамиданың *табаны*, ал үшбұрыштар оның *бүйір жақтары* деп аталады. 12-суретте *TABCDE* бесбұрышты пирамида бейнеленген. *ABCDE* бесбұрышты пирамиданың табаны, *ATB, BTC, CTD, DTE* және *ETA* үшбұрыштар оның бүйір жақтары, ал T оның биіктігі.

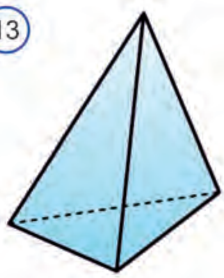
Табанының қабырғаларының санына қарай пирамидалар *үшбұрышты, төртбұрышты* және тағы басқа *n-бұрышты пирамидалар* деп аталады.

13-суретте үшбұрышты, 14-суретте төртбұрышты пирамида бейнеленген.

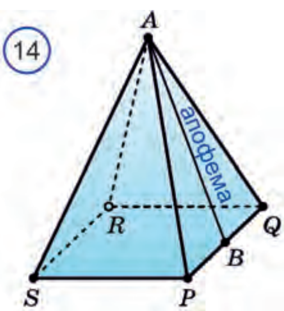
12



13



14



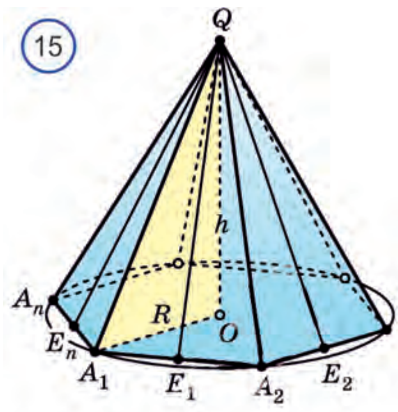
Дұрыс пирамида деп табаны дұрыс көпбұрыш пен төбесінен табанның центріне түсірілген кесінді осы центрден өтетін және табанның жазықтығында жататын түзуге перпендикуляр болған пирамидаға айтылады.

Дұрыс пирамиданың бүйір жағының пирамида төбесінен түсірілген биіктігі оның *апофемасы* деп аталады.

14-суретте *APQRS* төртбұрышты дұрыс пирамида бейнеленген. Ондағы AB кесінді пирамида апофемаларының бірі болып табылады.

1.1-теорема: Дұрыс пирамиданың: а) бүйір жақтары; б) бүйір қырлары; в) апофемалары өзара тең болады.

Дәледеу. $QA_1A_2... A_n$ дұрыс пирамида, ал O пирамида табанының центрі болсын (15-сурет).



а) OA_1, OA_2, ... OA_n кесінділер дұрыс көпбұрышқа сырттай сызылған шеңбер радиусынан құралғандықтан өзара тең болады. Тікбұрышты QOA_1, QOA_2, ..., QOA_n үшбұрыштарда екі катеттер өзара тең болғаны үшін олар тең болады. Онда олардың гипотенузалары да тең болады: $QA_1= QA_2= ...=QA_n$.

b) $QA_1A_2... A_n$ дұрыс пирамиданың бүйір қырлары өзара тең болғаны үшін оның бүйір жақтары теңбүйірлі үшбұрыштардан құралған болады. Осы үшбұрыштардың табандары дұрыс көпбұрыштың қабырғасы болғандықтан өзара тең болады. Демек, дұрыс пирамиданың бүйір жақтары үш қабырғасы бойынша өзара тең.

с) дұрыс пирамиданың бүйір жақтары тең болғаны үшін, олардың Q төбесінен түсірілген биіктіктері де өзара тең болады.

Демек, дұрыс пирамиданың апофемалары да өзара тең.❑

1.2-теорема: Дұрыс пирамиданың бүйір сырты оның табанының жарты периметрі мен апофемасының көбейтіндісіне тең.

Дәлелдеу. $QA_1A_2... A_n$ дұрыс пирамида болсын(15-сурет). Пирамиданың бүйір сырты оның бүйір жақтары аудандарының қосындысына тең. Оның бүйір жақтары өзара тең болған теңбүйірлі үшбұрыштардан құралған. Өз кезегінде осы үшбұрыштардың биіктіктері де өзара тең апофемалардан құралған:

$$QE_1= QE_2= ...=QE_n.$$

Бұдан $S = S_{A_1QA_2} + S_{A_2QA_3} + \ldots + S_{A_nQA_1} =$

$= \frac{1}{2} A_1A_2 \cdot QE_1 + \frac{1}{2} A_2A_3 \cdot QE_2 + \ldots + \frac{1}{2} A_nA_1 \cdot QE_n =$

$= \frac{1}{2} QE_1 \,(A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_nA_1) = p \cdot a,$

мұндағы p - пирамида табаны жарты периметрі, a - пирамида апофемасы.❑

Тақырыпқа қатысты сұрақтар

1. *а) жазықтықтағы; b) кеңістіктегі геометриялық фигураларды атап айт.*
2. *Қандай дене көпжақ деп аталады? Оның элементтеріне анықтама бер.*
3. *Қандай дене призма деп аталады? Оның элементтеріне анықтама бер.*
4. *Призманың қандай түрлерін білесің?*
5. *Тікбұрышты параллелепипедтің анықтамасын айт.*
6. *Қандай дене пирамида деп аталады? Оның элементтеріне анықтама бер.*
7. *Пирамиданың қандай түрлерін білесің?*
8. *Дұрыс пирамиданың қасиеттерін айт.*

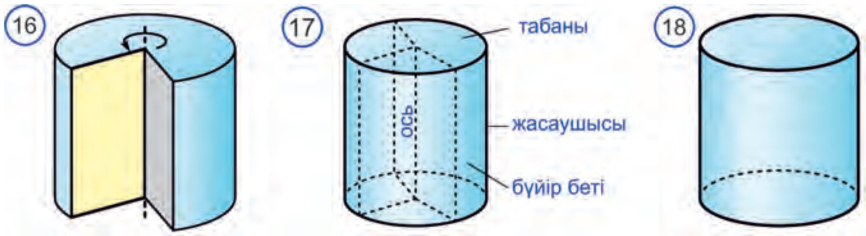
5 АЙНАЛУ ДЕНЕЛЕРІ: ЦИЛИНДР, КОНУС ЖӘНЕ ШАР

Кеңістіктегі фигуралардың тағы бір маңызды топтарының бірі – айналу денелері. Оларға цилиндр, конус және шар енеді.

Тік төртбұрыштың бір қабырғасының айналасында айналдырудан пайда болған дене *цилиндр* деп аталады (16–18-суреттер).

Мұндай айналдыруда тік төртбұрыштың бір қабырғасы қозғалыссыз қалады.

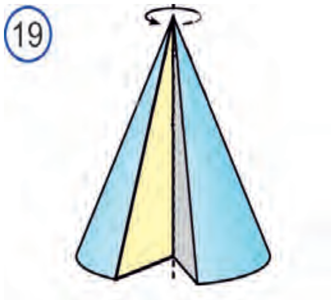
Оны *цилиндрдің осі* деп атаймыз (17-сурет).

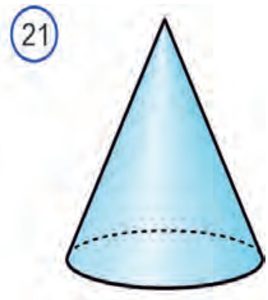


Оське қарам-қарсы жатқан қабырғаның айналуынан пайда болған бет *цилиндрдің беті*, ал қабырғаның өзі *цилиндрді жасаушы* деп айтылады.

Тік төртбұрыштың қалған қабырғаларының әрбірі осы айналуда дөңгелек көріністегі бетті пайда етеді. Осы дөңгелектер *цилиндрдің табандары* деп аталыды.

Тікбұрышты үшбұрышты бір катетінің айналасында айналдырудан пайда болған дене *конус* деп аталады (19–21-суреттер). Осы катетті *конустың осі* деп атаймыз.

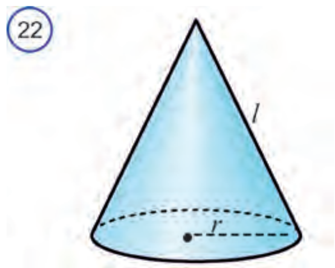


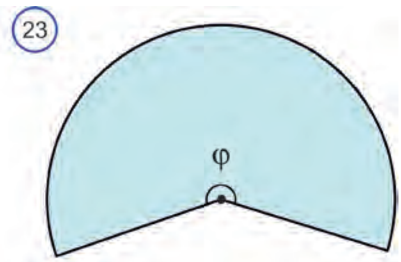


Осы айналдыруда басқа катет пайда еткен дөңгелек конустың *табаны,* гипотенуза пайда еткен бет *конустың бүйір беті*, ал гипотенузаның өзін *конустың жасаушысы* деп атайды. Айналуда қозғалмаған үшбұрыштың төбесі *конустың төбесі* деп аталады (20-сурет).

1.3-теорема: Конустың бүйір беті оның табаны ауданының жартысы және жасаушысының көбейтіндісіне тең.

Дәлелдеу. Табанының радиусы r және жасаушысы l болған конус берілген болсын (22-сурет). Конустың бүйір бетін жазықтыққа жайып қарастырамыз. Нәтижеде, радиусы l-ға тең болған дөңгелектің секторына ие боламыз (23-сурет).





Осы сектордың центрлік бұрышы φ-ті табамыз (21-сурет). Бұл центрлік бұрыш конустың табаны шеңбер ұзындығы – $2\pi r$-ға тең болған сектордың шеңбер доғасына түйіскен.

Радиусы l болған шеңбердің ұзындығы $2\pi l$-ға тең болып, ол 360°-тық центрлік бұрышпен түйіскен. Нәтижеде пропорцияға ие боламыз:

φ°-тық центрлік бұрыш – $2\pi r$-ға тең доға;

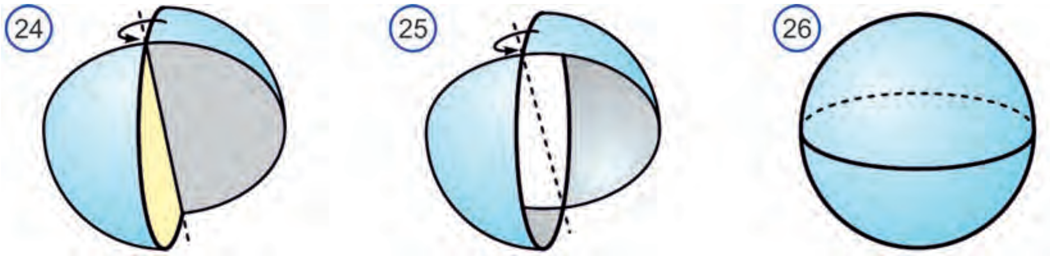
360°-тық центрлік бұрыш – $2\pi l$-ға тең доға.

Бұдан $\varphi = \dfrac{360^{0}}{2\pi l} \cdot 2\pi r = \dfrac{360^{0} \cdot r}{l}$.

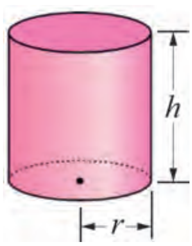
Енді радиусы l-ға тең болған, φ бұрышты S сектордың ауданын табамыз:

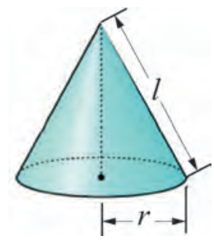
$$S = \frac{\pi l^2}{360^{0}} \cdot \varphi^{\circ} = \frac{\pi l^2}{360^{0}} \cdot \frac{360^{0} \cdot r}{l} = \pi r \cdot l. \quad \square$$

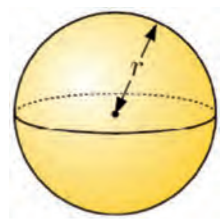
Дөңгелектің өз диаметрінің айналасында айналуынан пайда болған дене *шар* деп аталады (24-сурет). Осы айналудан пайда болған бет *сфер*а деп аталады. 25–26-суреттерде сфера бейнеленген.



Айналу денелері бүйір және толық беті ауданының формулалары:







Цилиндр

$S_{бүй.} = 2\pi rh$

$S_{тол.} = 2S_{таб.} + S_{бүй.}$

$= 2\pi r^2 + 2\pi rh$

Конус

$S_{бүй.} = \pi rl$

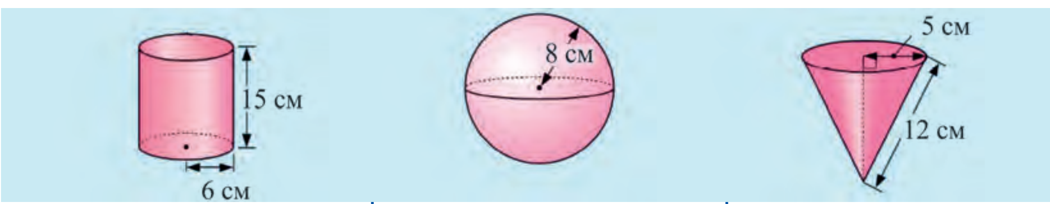
$S_{тол.} = S_{таб.} + S_{бүй.}$

$= \pi r^2 + \pi rl$

Шар

$S = 4\pi r^2$

Мысал. Төмендегі денелердің бүйір бетінің ауданын тап.



$S_{бүй.} = 2\pi rh = 2 \cdot 3,14 \cdot 6 \cdot 15 = 565,5$ (см²)

$S = 4\pi r^2 = 4 \cdot 3,14 \cdot 8^2 = 804,2$ (см²)

$S_{тол.} = \pi rl + \pi r^2 = 3,14 \cdot 5 \cdot 12 + 3,14 \cdot 5^2 = 267$ (см²).

Тақырыпқа қатысты сұрақтар

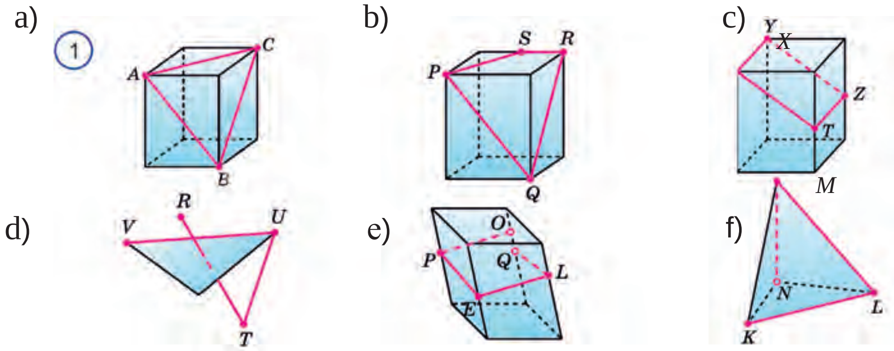
1. Айналу денелеріне мысалдар айт.
2. Қандай дене цилиндр деп аталады? Оның элементтеріне анықтама бер.
3. Қандай дене конус деп аталады? Оның элементтеріне анықтама бер.
4. Қандай дене шар деп аталады? Оның элементтеріне анықтама бер.

6 ПРАКТИКАЛЫҚ ЖАТТЫҒУЛАР МЕН ҚОЛДАНУЛАР

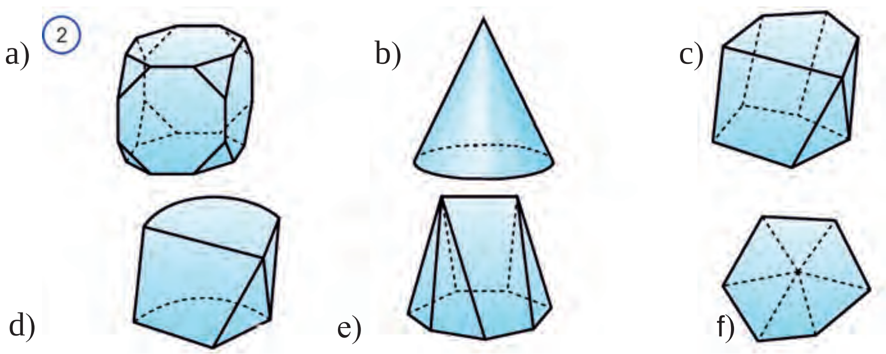
2.1. Тік призманың бүйір жақтары тік төртбұрыш екенін дәлелде.

2.2. Тік призманың бүйір беті табанының периметрі мен бүйір қырының көбейтіндісіне тең екенін дәлелде.

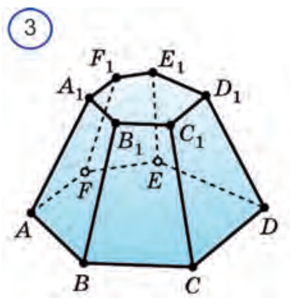
2.3. 1-суретте кеңістіктегі қандай сынық сызық бейнеленген?



2.4. 2-суреттегі денелердің қайбірі көпжақ?



2.5. 3-суретте $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ крөпжак бейнеленген. Ондағы: a) CD қыр ортақ болған жақтарды; b) DD_1 қыр ортақ болған жақтарды; c) E төбе ортақ болған жақтарды; d) C_1 төбе ортақ болған жақтарды; e) A төбе ортақ болған қырларды; f) F_1 төбе ортақ болған қырларды айт.



2.6. Тік параллелепипедтің табаны ромбтан құралған. Ромбтың қабырғасы 8 м-ге, диагональдары 10 м-ге және 24 м-ге тең. Параллелепипедтің толық бетін тап.

2.7. Тікбұрышты параллелепипедтің барлық жақтары тік төртбұрыш екенін дәлелде.

2.8. Дұрыс үшбұрышты призма табанының қабырғасы 6 см-ге, бүйір қырлары 11 см-ге тең. Призманың толық бетін тап.

2.9. Дұрыс n-бұрышты призма табанының қабырғасы a, ал бүйір қыры h-қа тең. Егер: a) n=3, a =5, h=10; b) n=4, a=10, h=30; c) n= 6, a= 18, h= 32; d) n= 5, a= 16, h= 25 болса, призманың бүйір беті мен толық бетін тап.

2.10. Дұрыс үшбұрышты пирамиданың апофемасы 15-ке, пирамиданың төбесін табанның центрімен қосатын кесіндінің ұзындығы 12-ге тең. Пирамиданың: a) бүйір қыры мен табанының қабырғаларын; b) бүйір бетін; c) толық бетін тап.

2.11. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың табаны 12 см-ге, пирамиданың төбесін табанның центрімен қосатын кесіндінің ұзындығы 16 см-ге тең. Пирамиданың: a) бүйір қыры мен апофемасын; b) бүйір бетін; c) толық бетін тап.

2.12*. *REFGH* пирамида табанының қабырғалары 10 см-ге және 18 см-ге және ауданы 90 см^2-ге тең болған *EFGH* параллелограмнан құралған. Пирамиданың төбесі *R*-ны табан диагональдарының қиылысу нүктесі *O*-мен қосатын кесіндінің ұзындығы 6 см-ге тең және ол осы диагональдарға перпендикуляр. Пирамиданың: a) бүйір қырларын; b) бүйір бетін; c) толық бетін тап.

2.13*. Пирамида табанының қабырғалары 8 және 10-ға, кіші диагоналы 6-ға тең болған параллелограмнан құралған. Пирамиданың төбесін табаны диагональдарының қиылысу нүктесімен қосатын кесіндінің ұзындығы 4-ке тең және ол осы диагональдарға перпендикуляр. Пирамиданың: a) бүйір қырыларын; b) бүйір бетін; c) толық бетін тап.

2.14*. Дұрыс алтыбұрышты пирамида табанының қабырғалары 10 см-ге тең. Пирамиданың төбесін табан центрімен қосатын кесіндінің ұзындығы $\sqrt{69}$ -ға тең. Пирамиданың: a) бүйір қыры мен апофемасын; b) бүйір бетін; c) толық бетін тап.

2.15. Дұрыс алтыбұрышты пирамиданың бүйір бетінің ауданы 150 м^2-ге, ал бүйір қыры 10 м-ге тең. Пирамида табанының ауданын тап.

2.16. Цилиндрдің бүйір беті табаны шеңбері ұзындығының цилиндрді жасаушыға көбейтіндісіне тең екенін дәлелде.

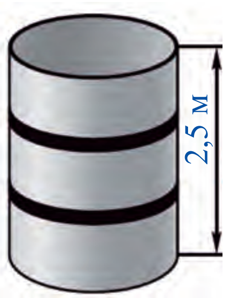
2.17. Цилиндрдің табанының радиусы мен жасаушысына қарап оның бүйір бетін тап. a) 7 см және 12 см; b) 12 см және 7 см; c) 1 м және 12 м; d) 0,7 м және 1,2 м.

2.18. Цилиндрдің бүйір бетінің ауданы 300π см^2, ал жасаушысы 6 см болса, цилиндр табынының ауданын тап.

2.19. Цилиндрдің бүйір бетінің ауданы 90π см^2, ал жасаушысы 5 см болса, цилиндрдің толық бетінің ауданын тап.

2.20. Цилиндр табанының диаметрі 1 м-ге, ал жасаушысы табан шеңбері ұзындығына тең. Цилиндр бүйір бетінің ауданын тап.

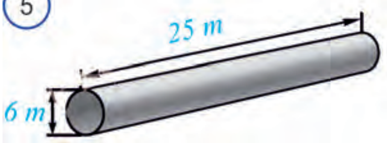
4



2.21. Цилиндр жасаушысы оның табанының радиусынан 12 см-ге ұзын. Ал цилиндрдің толық бетінің ауданы 128π см². Цилиндр табанының радиусы мен жасаушысын тап.

2.22. 4-суретте бейнеленген цилиндр пішініндегі бакты бояу қажет. Егер бактың биіктігі 2,5 м, табанының диаметрі 1,2 м және бояу қабатының қалыңдығы 0,1 мм болса, бакты бояу үшін қанша бояу қажет болады.

5



2.23. 5-суретте бейнеленген ұзындығы 25 см және диаметрі 6 м болған құбырды даярлауға қанша көлемдегі қаңылтыр қажет болады? Қаңылтыр бөліктерін біріне-бірін құрамалауға да құбырдың бүйір бетінің 2,5%-ына тең қаңылтыр жұмсалатынын ескер.

2.24. Конус табанының радиусы 12 мм-ге, конус төбесін табан центрімен қосатын кесіндінің ұзындығы 35 мм-ге тең. Конустың бүйір бетін тап.

2.25. Конус табанының диаметрі 32 см-ге, конус төбесін табан центрімен қосатын кесіндінің ұзындығы 63 см-ге тең. Конустың бүйір бетін тап.

2.26*. Конустың жасаушысы l-ға тең болып, ол табанның жазықтығымен α бұрышты құрайды. Егер: a) $l = 10$ см, $\alpha = 30^\circ$; b) $l = 24$ дм, $\alpha = 45^\circ$; c) $l = 5$ м, $\alpha = 60^\circ$ болса, конустың табанының ауданын тап.

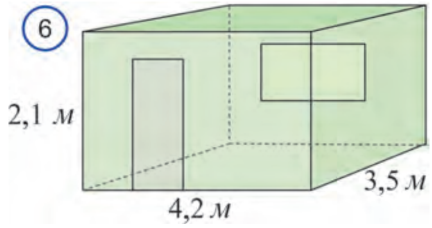
2.27*. Конустың жасаушысы l-ға тең болып, ол табанның радиусымен α бұрышты құрайды. Егер: a) $l = 18$ см, $\alpha = 30^\circ$; b) $l = 20$ дм, $\alpha = 45^\circ$; c) $l = 2,4$ м, $\alpha = 60^\circ$ болса, конустың толық бетін тап.

2.28*. Конус табанының радиусы мен жасаушысы сәйкесінше: a) 11 см және 8 см; b) 8 мм және 11 мм; c) 3 м және 18 м; d) 2,7 м және 1,2 м-ге тең болса, конустың бүйір бетін тап.

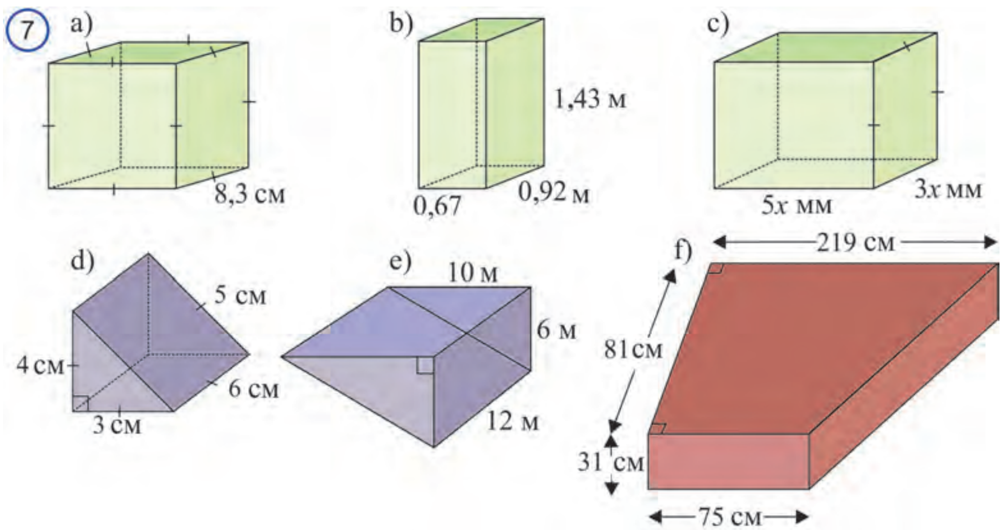
2.29. 6-суретте бейнеленген бөлмені жөндеу қажет. Бөлмеде өлшемдері 0,8 м және 2,2 м болған есік пен өлшемдері 183 см және 91 см болған терезе бар. Есіктің екі қабырғасы да боялуы қажет. Кестеде екі түрлі бояудың бағасы берілген. Осы мәліметтерді пайдаланып, жөндеу үшін қанша қаржы қажет екенін есепте.

Бояу түрі	Көлемі	Боялатын аудан	Бағасы
Қабырғалар үшін	*4 l*	*16 м²*	*32450 сум.*
	2 l	*8 м²*	*20800 сум.*
Есік үшін	*2 l*	*10 м²*	*23600 сум.*
	1 l	*5 м²*	*15400 сум.*

6

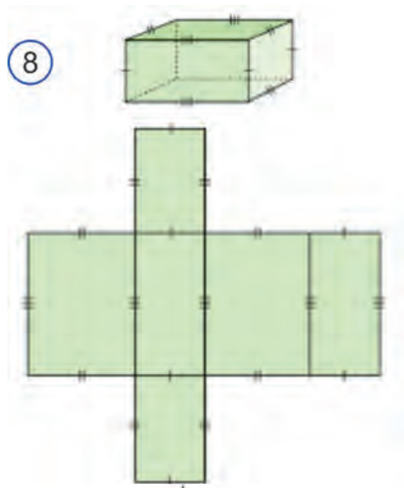


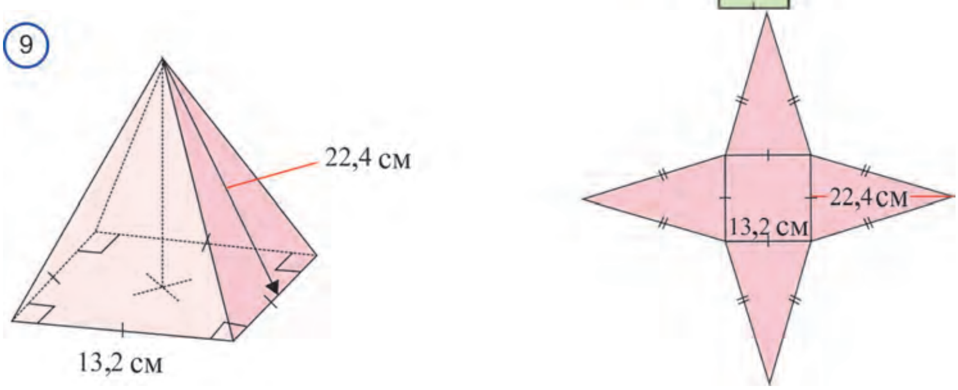
2.30. 7-суреттегі мәліметтерді пайдалана отырып, көпжақтардың толық бетін тап.



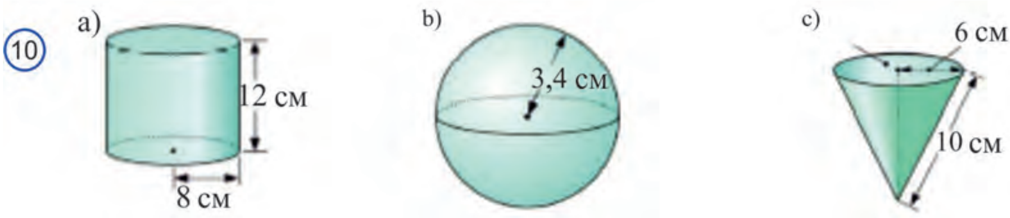
2.31. 8-суретте бейнеленген тікбұрышты параллелепипедтің жайылған түріне қарап оның толық бетінің формуласын тап.

2.32. 9-суретте бейнеленген төртбұрышты дұрыс пирамиданың жайылған түріне қарап оның толық бетінің формуласын тап.

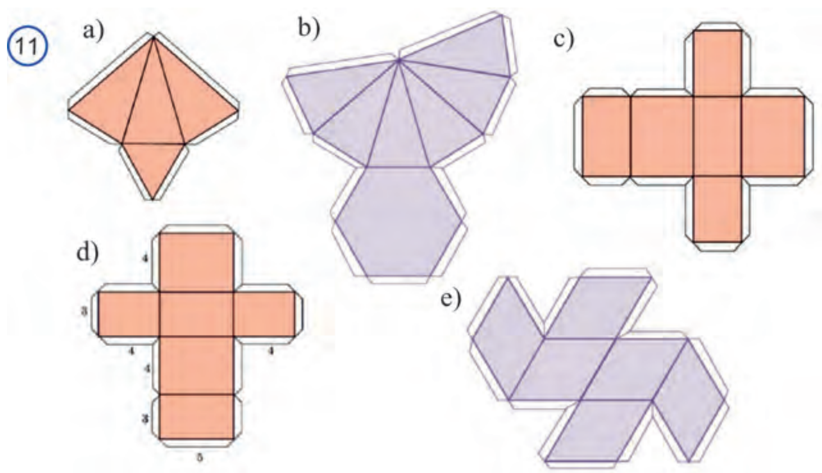




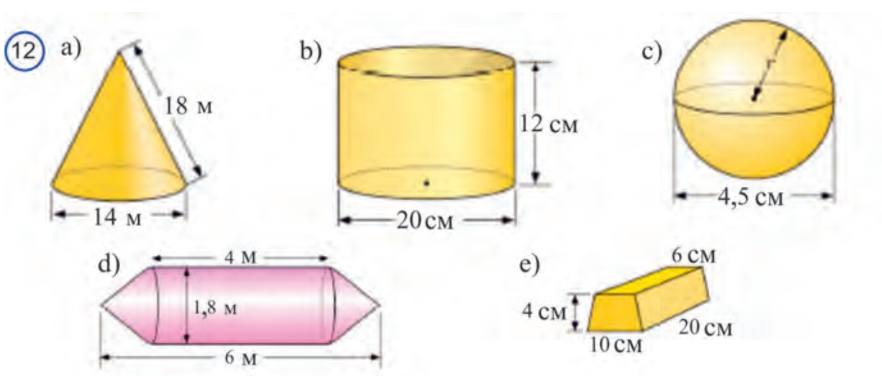
2.33. 10-суретте бейнеленген айналу денелерінің толық бетін тап.

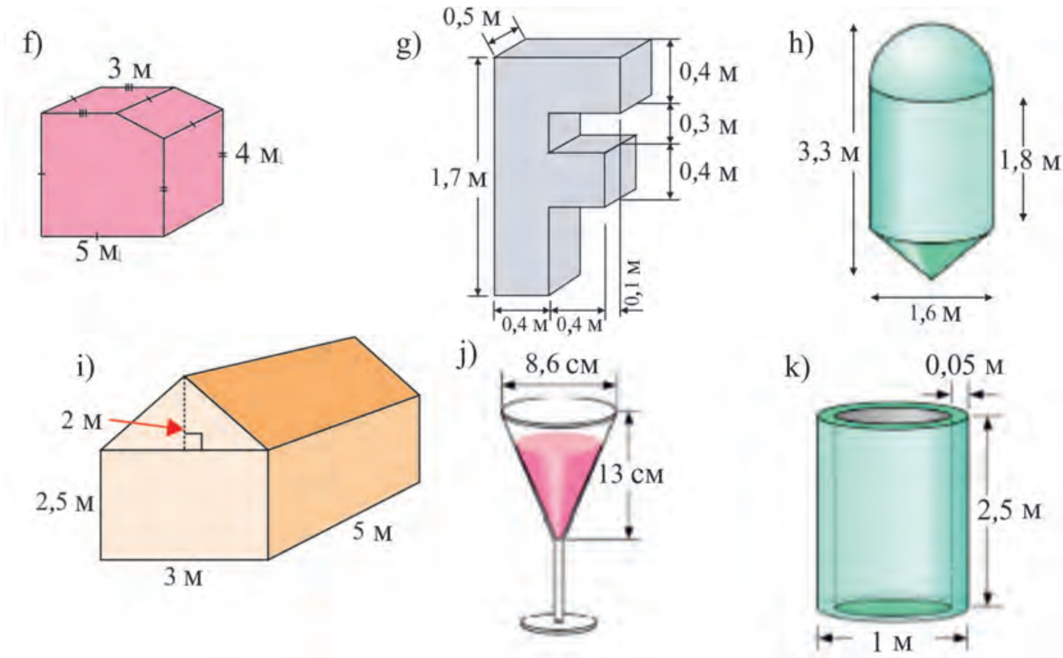


2.34. Кеңістіктегі денелерді ойша көз алдымызға жақсырақ келтіру үшін олардың моделінен пайдаланған жөн. Кеңістіктегі денелердің моделін олардың төмендегідей жайылған түрін пайдаланып (11-сурет) жасауға болады. Көрініп тұрғанындай, кеңістіктегі денелерді жайылған түрі жазықтықтағы геометриялық фигуралардан құралған. Төмендегілерді пайдаланып, тікбұрышты параллелепипед, куб және пирамидалардың моделін жаса.



2.35. 10-суретте бейнеленген денелерінің толық бетін тап.





Геометриялық сұлулық

Өткен кезеңде құрылған ежелгі архитектуралық жәдігерліктерді құрған ата-бабаларымыз үлкен геометриялық білім мен әлеуетке ие болған. Мұны бір ғана Самарқант қаласындағы Регистан алаңында құрылған тарихи жәдігерліктерден де білуге болады (1-сурет).

Хиуа қаласындағы Ичан-қаланың суретінде *(2-сурет) қандай геометриялық фигураларды көріп тұрсың?*

Тәж-Махал – әлемнің жеті кереметінің бірі (3-сурет). Үндістанның Агра қаласында Бабырдың ұрпағы Шах-Джахан құрдырған ежелгі жәдігерлік. Оны құрған шеберлердің геометриядан жетік білімге ие болғаны айқын көрініп тұр.


3


4

Сидней қаласының опера театры (4-сурет) – Австралияда құрылған заманалық сәулеткерліктің үлгісі. Ол ғажап геометриялық көрінісімен баршаның назарын өзіне тартады.

Сұлу геометриялық талғам иесі, ирактық танымал архитектор әйел Заха Хадидтің жобасының негізінде Қытайдың астанасы Пекин қаласында құрылған "Galaxy Soho" демалыс кешенінің (5-сурет) ерекше көрінісінен эстетикалық ләззат аласың.


5

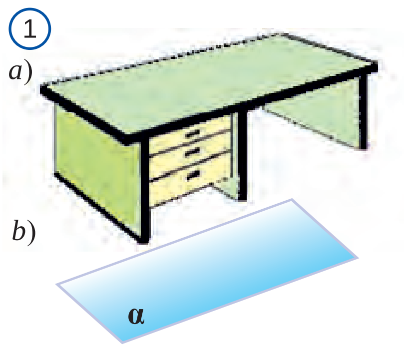
Еліміздің астанасында бой көтеріп жатқан "Ташкент сити" кешенінің жобасын көріп таңғалмауға болмайды. Мұндай ғажап сұлулықты жарату үшін инженер-құрылысшыларға қаншалықты геометриялық білім қажет болғанын көз алдымызға келтіру қиын (6-сурет).


6

III ТАРАУ

КЕҢІСТІКТЕГІ ТҮЗУЛЕР МЕН ЖАЗЫҚТЫҚТАР

7 КЕҢІСТІКТЕГІ ТҮЗУЛЕР МЕН ЖАЗЫҚТЫҚТАР

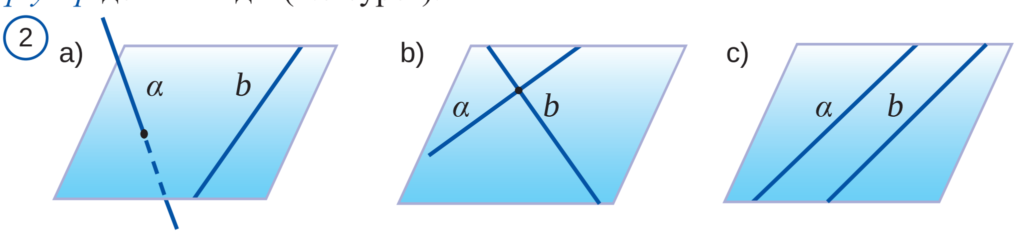


Кеңістіктегі негізгі геометриялық фигуралар: нүкте, түзу және жазықтық. Жазықтықты үстелдің тегіс беті сияқты етіп көз алдымызға келтіреміз (1.a- сурет). Жазықтық та түзу сияқты шексіз болады. Суретте жазықтықтың тек бір бөлігін ғана (әдетте параллелограмм пішінінде) бейнелейміз (1.b-сурет). Бірақ оны барлық жаққа шексіз созылған деп түсінеміз және сызбада параллелограмм түрінде бейнелейміз (1.b-сурет). Жазықтықтарды α, β, γ,... грек әріптерімен белгілейміз.

Кеңістіктегі екі түзу бір жазықтықта жатуы немесе жатпауы да мүмкін. (2-сурет). Кеңістіктегі бір жазықтықта жатпайтын екі түзу *айқас түзулер* делінеді (2.a-сурет).

Бір жазықтықта жатқан және бір ғана ортақ нүктеге ие болған түзулер *қиылысатын түзулер* деп аталады (2.b-сурет).

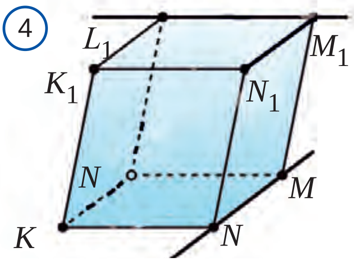
Бір жазықтықта жатқан және өзара қиылыспайтын түзулер *параллель түзулер* деп аталады (2.c-сурет).



Айқас түзулерге бірі көпірден, екіншісі көпірдің астынан өтетін жолдарды мысал ретінде көрсетуге болады (3-сурет). Сондай-ақ, 4-суреттегі параллелепипедтің MN және L_1M_1 қырлары жатқан түзулер де айқас болады.

3

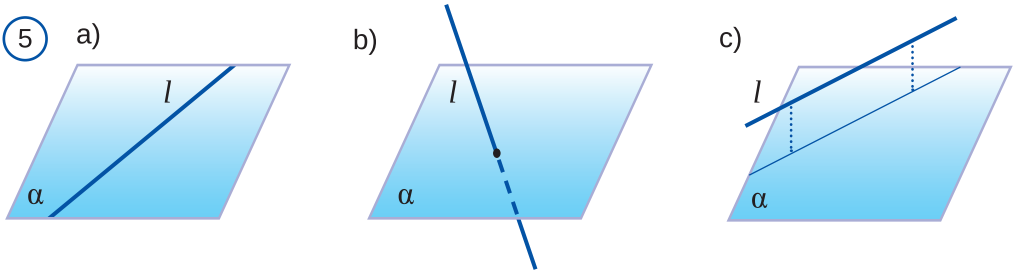
4



Кеңістікте түзу мен жазықтықтың өзара орналасуы қандай болады екен?

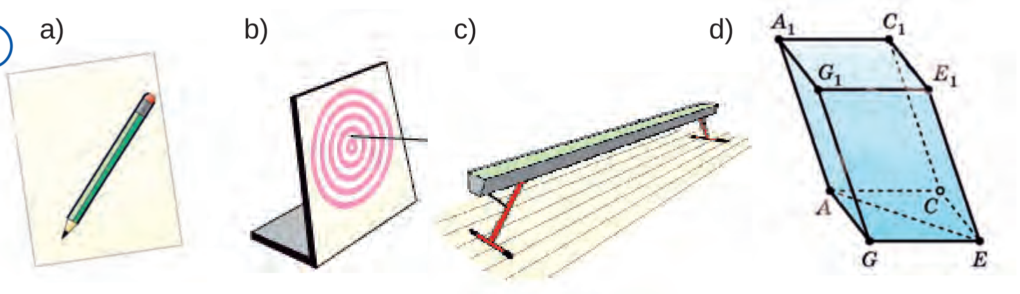
Түзу жазықтықта жатуы (5.a-сурет), онымен қиылысуы (5.b-сурет) немесе қиылыспауы, яғни ортақ нүктеге ие болмауы (5.c-сурет) мүмкін. Соңғы жағдайда *түзу жазықтыққа параллель* деп аталады.

5

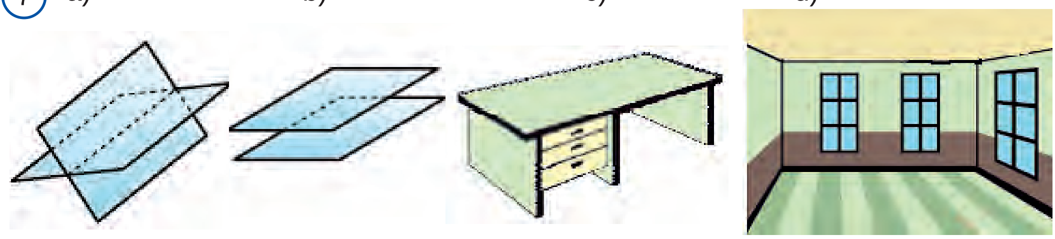


Үстелдің үстінде жатқан қалам – жазықтықта жатқан түзу туралы (6.a-сурет), нысанаға қадалған оқ (6.b-сурет) – жазықтықты қиып өткен түзу туралы және едендегі гимнастикалық ағаш – жазықтыққа параллель түзу туралы (6.c-сурет) көзқарасымыздың пайда болуына жәрдем береді.

6



7 a) b) c) d)



Сондай-ақ, 6.d-суретте бейнеленген параллелепипедтің $AGEC$ табанының AE диагоналы жатқан түзу табанның жазықтығында жатады, AGA_1G_1 жақ жатқан жазықтықты қиып өтеді және жоғарыдағы $A_1G_1E_1C_1$ табанның жазықтығына параллель болады.

Енді кеңістікте жазықтықтардың өзара орналасуын айқындайық.

Кеңістікте жазықтықтар қандай да бір түзудің бойымен қиылысуы (7.a-сурет) немесе ортақ нүктеге ие болмауы мүмкін (7.b-сурет). Осыдан келіп шығып, бұл жазықтықтар, сәйкесінше, *қиылысатын* немесе *параллель жазықтықтар* деп аталады.

7.c-суретте бейнеленген үстелдің жоғарғы беті мен бүйір жағы қиылысатын жазықтықтар туралы, ал бөлменің едені мен төбесі (7.d-сурет) параллель жазықтықтар туралы көзқарасымыз пайда болуына жәрдем береді.

Сондай-ақ, 4-суретте бейнеленген параллелепипедтің қарама-қарсы болмаған бүйір жақтары – қиылысатын жазықтықтар туралы, ал төменгі және жоғарғы табандары мен қарама-қарсы жақтары параллель жазықтықтар туралы көзқарасымыз пайда болуына жәрдем береді.

Параллельдік белгісі – "//" тек параллель түзулерге ғана емес, жазықтыққа параллель түзу мен параллель жазықтықтарды белгілеуге де пайдаланылады: $a \parallel b$, $a \parallel \alpha$ және $\alpha \parallel \beta$.

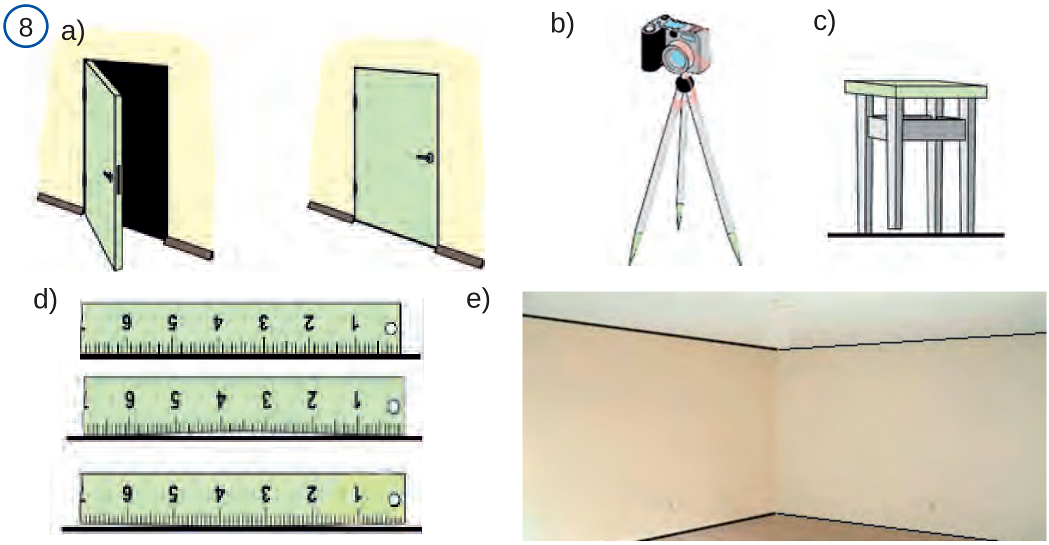
Планиметриядағы сияқты, стереометрияда да кейбір геометриялық фигуралардың қасиеттері дәлелсіз қабылданады. Кеңістіктегі жазықтықтардың төмендегі қасиеттерін дәлелсіз, S тобы аксиомалары ретінде қабылдаймыз:

S_1 *Егер үш нүкте бір түзуде жатпаса, онда олар арқылы бір ғана жазықтық өткізуге болады.*

S_2 *Егер түзудің екі нүктесі бір жазықтықта жатса, онда оның барлық нүктелері осы жазықтықта жатады.*

S_3 *Егер екі жазықтық ортақ нүктеге ие болса, онда бұл жазықтықтар осы нүктеден өтетін ортақ түзуге де ие болады.*

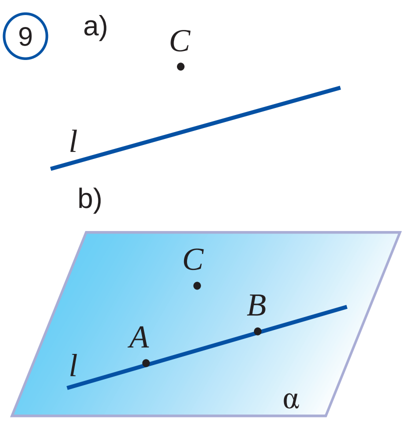
Белсенділендіретін жаттығу. Төмендегі 8-суреттегі жағдайларды түсіндіруде қайсы аксиомаларға сүйенуге болады?



Планиметрияға енгізілген аксиомалармен бірге осы үш аксиома стереометрияның негізін құрайды. Планиметрияда біз қарастыратын барлық фигуралар орналасқан бір ғана жазықтыққа ие болғанымызды еске түсіріуміз қажет. Ал стереометрияда мұндай жазықтықтар шексіз болып, олардың барлығында планиметрия аксиомалары мен планиметрияда дәлелденген барлық қасиеттер орынды болады, деп қарастырылады. Сондай-ақ стереометрия курсында планиметрия аксиомаларына стереометрия тұрғысынан қарауға тура келеді.

2.1-теорема. Түзу мен онда жатпайтын нүкте арқылы тек бір ғана жазықтық өткізуге болады.

Дәлелдеу. l – берілген түзу, ал C оның бойында жатпайтын нүкте болсын (9.a-сурет).

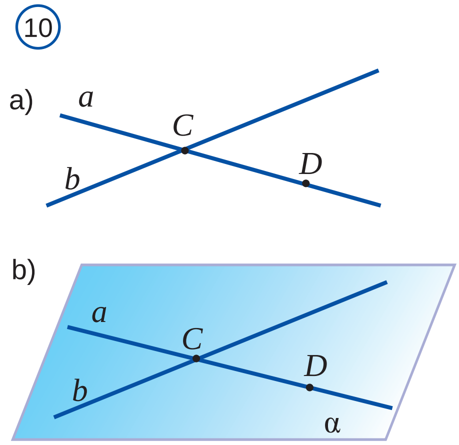


Алдымен теореманың қортындысында айтылған жазықтықтың бар екенін көрсетеміз. l түзуге A және B нүктелерін саламыз. Шартқа орай, A, B және C нүктелер бір түзудің бойында жатпайды. Онда S_1 аксиомасына орай, A, B және C нүктелер арқылы α жазықтықты өткізуге болады (9.b-сурет). Ал S_2 аксиомаға орай, α жазықтық l түзуден өтеді.

Демек, α – ізделінген жазықтық екен.

Енді осы жазықтықтың біреу ғана екенін көрсетеміз.

Кері жорамалдаймыз: l – берілген түзу мен онда жатпайтын C нүктеден тағы бір β жазықтық өткізу мүмкін болсын. Онда β жазықтық та A, B және C нүктелер арқылы өтеді. Бірақ, S_2 аксиомаға орай үш нүкте арқылы тек бір ғана жазықтық өткізуге болады. Қайшылық. Демек, жорамал қате. Түзу мен оның бойында жатпайтын нүкте арқылы бір ғана жазықтық өткізуге болады. ❑



2.2- теорема. Берілген қиылысатын екі түзу арқылы бір ғана жазықтық өткізуге болады.

Дәлелдеу. Берілген a және b түзулер C нүктеде қиылыссын (10.a-сурет).

a түзуде C нүктеден басқа тағы бір D нүктені саламыз. Онда дәлелденген 1-теоремаға орай, b түзуі мен оның бойында жатпайтын D нүкте арқылы бір ғана α жазықтық өтеді (10.b-сурет). Осы жазықтық a түзуінің C және D нүктелері арқылы өтеді. Онда S_2 аксиомасына орай, α жазықтық a түзуі арқылы да өтеді.

Демек, α жазықтық берілген қиылысатын екі түзу арқылы өтеді.

Осы жазықтықтың біреу ғана екенін өз бетіңше негізде. ❑

? *Тақырыпқа қатысты сұрақтар*

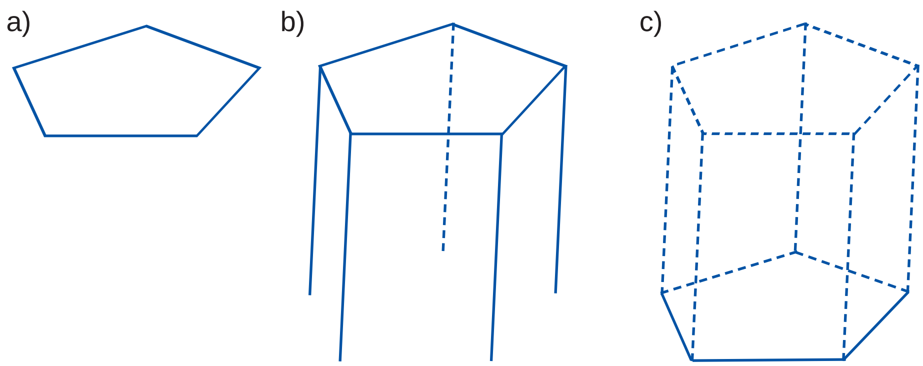
1. *Кеңістіктегі негізгі геометриялық фигураларды атап айт.*
2. *S тобының аксиомаларын атап айт.*
3. *Жазықтықта жататын қандай түзулер: a) қиылысатын; b) параллель деп аталады?*
4. *Қандай түзулер айқас деп аталады? Мысалдар келтір.*
5. *Кеңістікте екі түзу қалай орналасуы мүмкін?*
6. *Қандай түзулер: a) жазықтықта жататын; b) жазықтыққа параллель деп аталады?*
7. *Кеңістікте түзу мен жазықтық қалай орналасуы мүмкін?*
8. *Кеңістіктегі қандай жазықтықтар: a) қиылысатын; b) параллель деп аталады?*
9. *Кеңістікте екі жазықтық қалай орналасуы мүмкін?*
10. *Кеңістіктегі түзу мен жазықтықтардың қасиеттерін өрнектейтін аксиомаларды атап айт.*
11. *Үш нүкте арқылы өтетін жазықтықтың қасиеті туралы айт.*

8 КӨПЖАҚТАР ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ ҚАРАПАЙЫМ ҚИМАЛАРЫН САЛУ

Геометриялық есептерді шешуде есептің шартына сәйкес сызбаны сызу өте маңызды. Кейде дұрыс сызылған сызба – есептің "жартылай шешімімен" тең. Стереометрияда есептің сызбасын дұрыс сызу өте маңызды, өте жауапты және кейде өте күрделі жұмыс саналады. Өйткені стереометриялық фигуралар үш өлшемді болып, оларды жазықтықта, дәптердің парағында бейнелеу қажет болады. Қате сызылған сызба қате шешімге немесе басы бітеу көшеге бастайды.

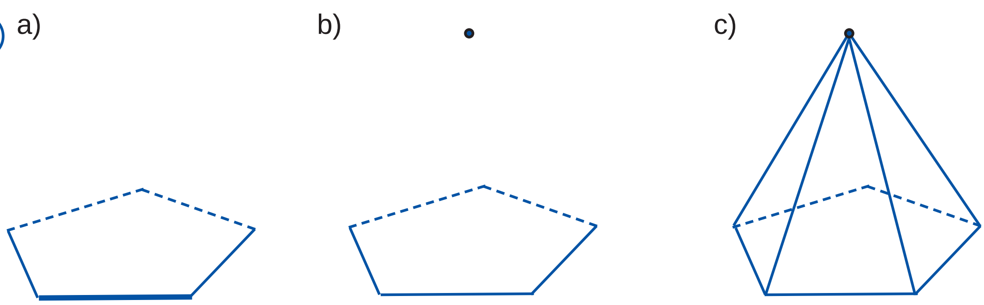
Призманы бейнелеу төмендегі тәртіппен жүргізіледі (11-сурет). Алдымен көпбұрыш пішінніндегі табандардың бірі сызылады. Сосын оның әрбір төбесінен өзара параллель және тең кесінділер, яғни призманың жасаушылары сызылады. Кесіндінің соңы сәйкес түрде қосылып сызылады. Мұнда екінші табан пайда болады. Сызбада призманың көрінбейтін қырлары штрих-пунктир сызықпен сызылады.

11



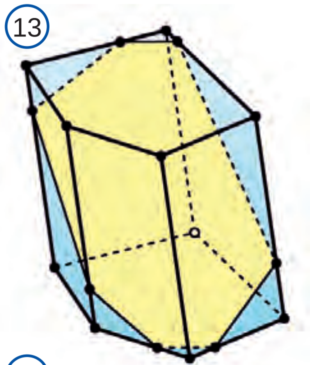
Пирамиданы бейнелеу де осыған ұқсас тәртіппен жүргізіледі (12-сурет). Алдымен көпбұрыш пішініндегі табаны сызылады. Сосын пирамиданың төбесі белгіленіп, осы нүкте табанның әрбір төбесімен қосылып сызылады. Сызбада пирамиданың көрінбейтін қырлары пунктир сызықпен сызылады.

12



Кеңістіктегі геометриялық фигуралардың өзара орналасуын дұрыс көз алдымызға келтіргенде ғана, оның сызбасын дұрыс сызуымызға болады. Кеңістіктегі фигуралардың бірі – көпжақ, ал екіншісі жазықтық болғанда, түрлі қималарды бейнелеуге тура келеді. Төменде көпжақтардың қималарын салумен шұғылданамыз.

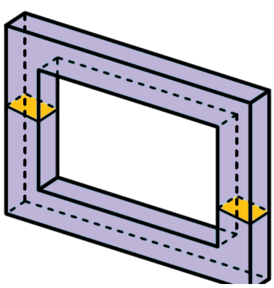
13



Мысалы, көпжақты қандай да бір жазықтық қиып өткен болсын. *Көпжақтың қимасы* деп көпжақтың қиылысатын жазықтыққа тиісті нүктелерінен құралған геометриялық фигураға айтылады.

Қиылысатын жазықтық көпжақтың бетін кесінділер бойынша қиып өтеді, ал көпжақтың қимасы бір немесе бірнеше көпбұрыштардан құралады. 13-суретте бесбұрышты призманың жетібұрыштан құралған қимасы бейнеленген. 14-суреттегі терезенің рамкасын жазықтықпен қиған кезде пайда болған қимасы – екі төртбұрыштан құралған

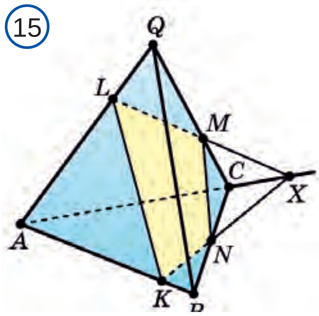
14



Көпбұрыштың қимасын бейнелеу үшін оның жақтарының қиылысатын жазықтықпен ортақ нүктелерін анықтау жеткілікті.

1-есеп. $QABC$ үшбұрышты пирамиданың AB, AQ және CQ қырларын, сәйкесінше, K, L және M нүктелерде қиып өтетін α жазықтықпен қиғанда пайда болған қиманы саламыз (15-сурет).

15



Салу. Қиылысатын α жазықтық пирамиданың AQB жағымен екі: K және L ортақ нүктелерге ие. Онда қиылысатын жазықтық осы жақты KL кесіндінің бойымен қиып өтеді.

Дәл осыған ұқсас, α жазықтық пирамиданың AQC жағымен екі: M және L ортақ нүктелерге ие болғаны үшін, осы жақты ML кесіндінің бойымен қиып өтеді.

Қиылысатын α жазықтық пирамиданың ABC жағымен бір K ортақ нүктелерге ие. Осы жазықтықтың BC қырды қиып өтетін нүктесін табамыз.

Осы жазықтыққа тиісті LM және AC түзулерді жалғастырып, олардың қиылысу нүктесі X-ті табамыз. X нүкте AQC және ABC жазықтықтарда жатады.

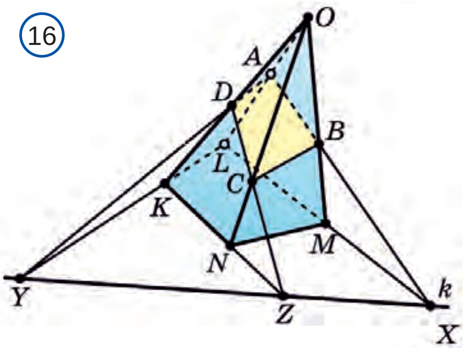
Қиылысатын α жазықтық пирамиданың ABC жағымен екі: K және X ортақ нүктелерге ие. Онда қиылысатын жазықтық осы жақты KX кесіндінің бойымен қиып өтеді.

KX түзу және BC жақтың қиылысу нүктесі N да α жазықтықта жатыр.

Демек, α жазықтық ABC жақты KN кесіндінің бойымен, ал BQC жақты MN кесіндінің бойымен қиып өтеді.

$KLMN$ төртбұрыш α жазықтықтың пирамидамен кесімінен құралған. KL және KN кесінділер α жазықтықтың ABQ және ABC жақтардағы *іздері* деп аталады.

16



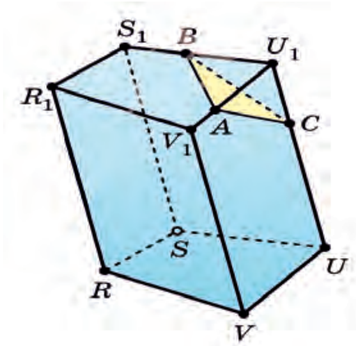
2-есеп. *OKLMN* пирамиданың OL қырының A нүктесі және пирамиданың $KLMN$ табаны жазықтығында жататын k түзуімен өтетін b жазықтықпен қиылысқанда пайда болатын қиманы саламыз (16-сурет).

Салу. LM және k түзулер қиылысатын нүктені табамыз, Осы нүкте k түзуінде жатқаны үшін b жазықтыққа тиісті. Сондай-ақ осы нүкте LM түзуінде жатқаны үшін LOM жаққа да тиісті. A нүкте осы екі жазықтықтың әр екеуіне де тиісті. Сондықтан, b жазықтық LOM жазықтықты AX түзуінің бойымен, ал LOM жақты AB кесіндісінің бойымен қиып өтеді. Мұнда B нүкте AX және OM түзулерінің қиылысу нүктесі.

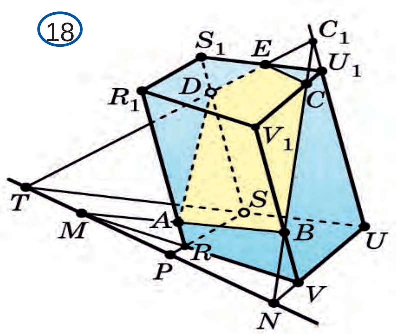
Дәл осылай, β жазықтықтың OLK жақты қиып өтетін Y және D нүктелерін және AD кесіндіні анықтаймыз. Сосын Z және C нүктелер мен DC және BC кесінділерді анықтаймыз. Нәтижеде, пайда болған $ABCD$ төртбұрыш ізделінген қимадан құралған болады.

3-есеп. *A, B* және *C* төртбұрышты призманың түрлі жақтарындағы нүктелері.

17



18

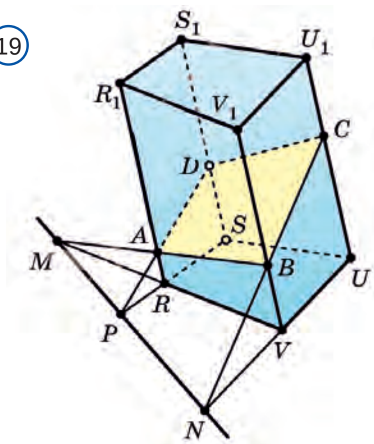


Призманың *ABC* жазықтықпен қимасын табымыз (17-сурет).

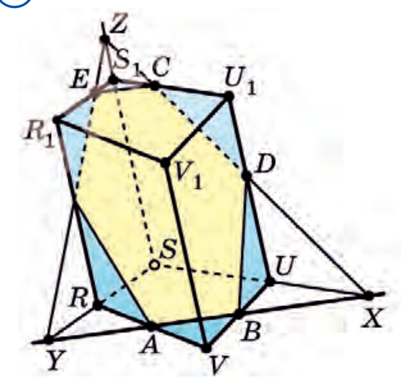
Ізделініп жатқан қима *A, B* және *C* нүктелердің төртбұрышты призманың қайсы жақтарында және қалай жатқанына байланысты болады. 17-суретте *A, B* және *C* нүктелердің бір төбеден шығатын жақтарда жатқан ең қарапайым жағдайы бейнеленген.

18-суретте бейнеленген жағдайда қиманы салу күрделірек жұмыс болып табылады. Қалған жағдайлардағы қималар төмендегі 19- және 20-суретте көрсетілген. Көріп тұрғанымыздай, қима үшбұрыш, төртбұрыш, бесбұрыш және алтыбұрыштан құралған. Бұл қималарды салуды өз бетіңше талда.

19



20

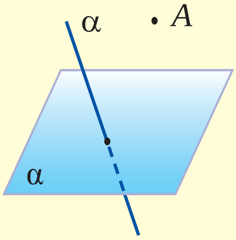
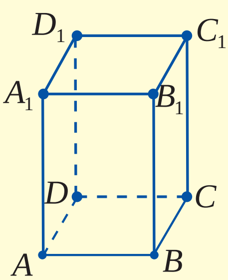
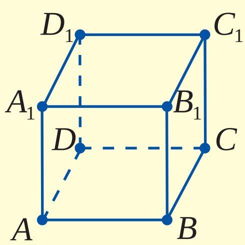
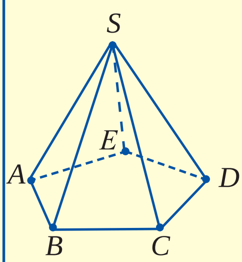


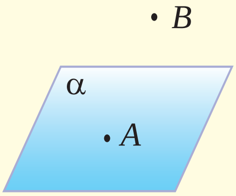
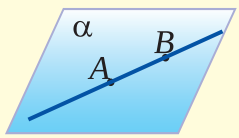
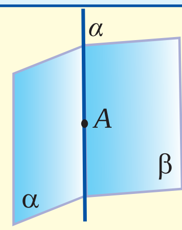
Тақырыпқа қатысты сұрақтар

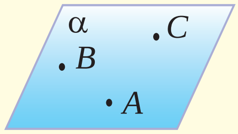
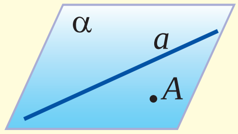
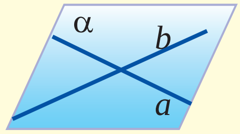
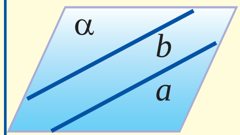
1. *Көпжақтың қимасы деп неге айтылады?*
2. *Көпжақтың қимасы қандай фигура болуы мүмкін?*
3. *Бір жазықтықтың екінші жазықтықтағы ізі деп неге айтылады?*
4. *Төртбұрышты көпжақтың қимасы қайсылар болуы мүмкін?*

9 ПРАКТИКАЛЫҚ ЖАТТЫҒУЛАР МЕН ҚОЛДАНУЛАР

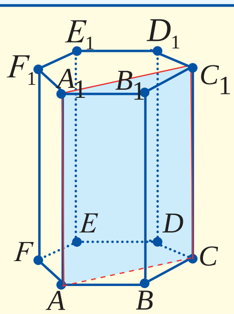
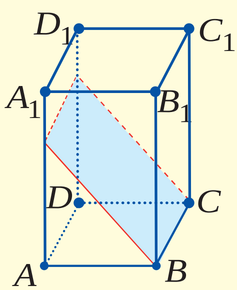
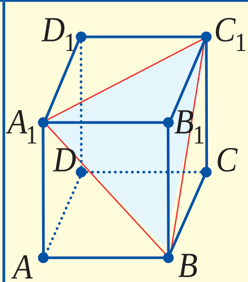
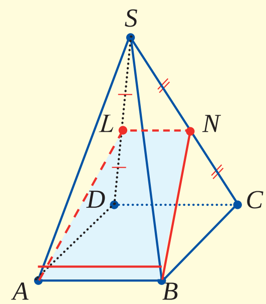
3.0. Төмендегі 3-бөлім бойынша теориялық тірек мәліметтерді қайтала. Олар сендерге өтілгендерді жалпылау және парактикалық жаттығуларды орындауда көмек береді.

Негізгі фигуралар	Көпжақтар		
	Тікбұрышты параллелепипед	Куб	Пирамида
			
A нүкте, α түзу, a жазықтық	Табандары – тік төртбұрыштар, жақтары – тік төртбұрыштар	Табандары – квадраттар, жақтары – квадраттар	Табаны – көпбұрыш, жақтары – үшбұрыш

Стереометрия аксиомалары мен олардан туындайтын нәтижелер		
		
Жазықтықта оған тиісті болған және тиісті болмаған нүктелер бар.	Егер түзудің екі нүктесі бір жазықтықта жатса, онда оның барлық нүктелері осы жазықтықта жатады.	Егер екі жазықтық ортақ нүктеге ие болса, онда олар осы нүктелер арқылы өтетін ортақ түзуге де ие болады.

			
Бір түзуде жатпаған үш нүкте арқылы	Түзу мен онда жатпаған нүкте арқылы	Қиылысатын екі түзу арқылы	Параллель екі түзу арқылы
... бір ғана жазықтық өткізуге болады			

a) кестеде кейбір көпжақтардың қарапайым қималары берілген. Оларға қарап, осы қималар қалай пайда етілгенін түсіндір.

Көпжақтардың қарапайым қималары			
Көпбұрышты призма	**Тікбұрышты параллелепипед**	**Куб**	**Пирамида**
			
ACC_1 – A, C, C_1 нүктелер арқылы өтетін, қиылысатын жазықтық, ACC_1CA_1 – қима.	CBK – K нүкте және CB түзу арқылы өтетін, қиылысатын жазықтық, $CBKM$ – қима.	A_1BC_1 – BC_1 және BA_1 түзулер арқылы өтетін, қиылысатын жазықтық, ACC_1CA_1 – қима.	ABN – AB және LN параллель түзулер арқылы өтетін, қиылысатын жазықтық, $ABNL$ – қима.

b) кестенің сол бағанында жазықтықтағы, ал оң бағанында кеңістіктегі геометриялық фигуралардың ұқсас кейбір қасиеттері көрсетілген. Оларды көз алдыңа келтір және қандай ұқсастыққа ие екенін анықта. Тағы да жазықтық пен кеңістіктегі қандай ұқсастықтарды айтуға болады?

Жазықтықта	**Кеңістікте**
Егер түзулер ортақ нүктеге ие болса, олар осы нүктеде қиылысады.	Егер жазықтықтар ортақ түзуге ие болса, олар осы түзудің бойымен қиылысады.
Жазықтықтың бір нүктесінен шексіз көп түзу өткізуге болады.	Кеңістіктің бір нүктесінен шексіз көп жазықтық өткізуге болады.
Түзуде жатпайтын нүкте арқылы берілген түзуге параллель бір ғана түзу өткізуге болады.	Жазықтықта жатпаған түзу арқылы берілген жазықтыққа параллель бір ғана жазықтық өткізуге болады.
Бір түзуге параллель түзулер өзара параллель.	Бір жазықтыққа параллель жазықтықтар өзара параллель.

3.1. Кеңістіктегі a) екі түзу; b) түзу мен жазықтық; c) екі жазықтық неше ортақ нүктеге ие болуы мүмкін?

3.2. Кеңістіктегі a) екі түзу; b) түзу мен жазықтық; c) екі жазықтық; d) үш жазықтық бір ғана ортақ нүктеге ие болуы мүмкін бе?

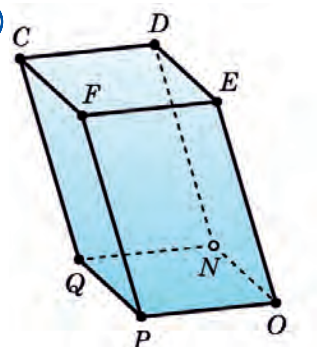
3.3. 1-суретте *NOPQDEFC* параллелепипед бейнеленген. a) *CD* түзумен қиылысатын түзулерді; b) *FP* түзумен қиылысатын түзулерді; c) *CD* түзуге параллель түзулерді; d) *FP* түзуге параллель түзулерді; e) *CD* түзумен айқас түзулерді; f) *FP* түзумен айқас түзулерді атап айт.

3.4. 2-суретте табаны алтыбұрыш болған *ABCDEFPQRSTU* призма бейнеленген. a) *ABC* жазықтықпен қиылысатын түзулерді; b) *UTF* жазықтықпен қиылысатын түзулерді; c) *PTR* жазықтықта жататын түзулерді; d) *CDR* жазықтыққа тиісті түзулерді; e) *FEC* жазықтыққа параллель түзулерді; f) *AQB* жазықтыққа параллель түзулерді атап айт.

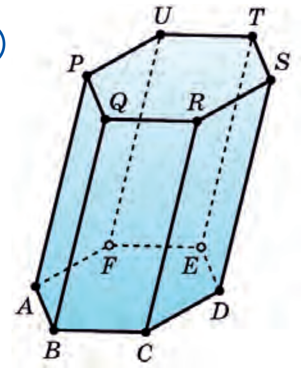
3.5. 1-суреттегі *NOPQDEFC* параллелепипедте: a) *CQ* түзумен қиылысатын жазықтықтарды; b) *OP* түзумен қиылысатын жазықтықтарды; c) *NO* түзу жатқан жазықтықтарды; d) *DN* түзу тиісті болған жазықтықтарды; e) *CF* түзуге параллель жазықтықтарды; f) *EO* түзуге параллель жазықтықтарды атап айт.

3.6. 2-суретте табаны алтыбұрыш болған *ABCDEFPQRSTU* призма бейнеленген. a) *UQR* жазықтықпен қиылысатын жазықтықтарды; b) *FT* түзумен қиылысатын жазықтықтарды; c) *ACE* жазықтыққа параллель

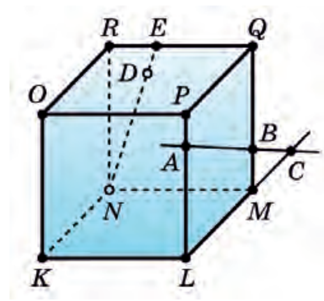
1



2



3



жазықтықтарды; d) ETS жазықтыққа параллель жазықтықтарды атап айт.

3.7. 3-суретті пайдаланып, a) LMQ және NME жазықтықтарда жатқан нүктелерді; b) NR түзу жатқан жазықтықтарды; c) BC түзудің KLN жазықтықпен қиылысу нүктелерін; d) PL және ND түзулердің OPR жазықтықпен қиылысу нүктелерін; e) KON және KLM жазықтықтар қиылысатын түзуді; f) PDQ және MNK жазықтықтар қиылысатын түзуді; g) AB және LM түзулердің қиылысу нүктесін; h) BQ және MC түзулердің қиылысу нүктесін атап айт.

3.8. Бір түзуде жататын үш нүкте арқылы жазықтық өткізуге болатынын дәлелде. Мұндай жазықтықтардың саны нешеу?

3.9. A, B, C және D нүктелер бір жазықтықта жатпайды. AB және CD түзулердің қиылыспайтынын дәлелде.

3.10. Берілген екі түзудің қиылысу нүктесі арқылы осы түзулермен бір жазықтықта жатпайтын түзуді өткізуге бола ма? Жауабыңды негізде.

3.11. A, B, C нүктелер екі түрлі жазықтықта жатыр. Осы нүктелердің бірі түзуде жатқанын дәлелде.

3.12. Түзу арқылы екі түрлі жазықтық өтуін дәлелде.

3.13. a және b түзулер бір жазықтықта жатпайды. a және b түзулеріне параллель c түзу өткізуге бола ма?

3.14. Егер жазықтық екі параллель түзудің бірін қиып өтсе, ол екіншісін де қиып өтетінін дәлелде.

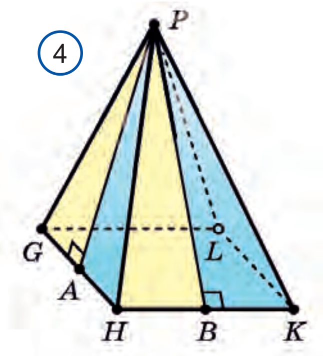
3.15. Екі айқас түзулердің кез келген біреуі арқылы екіншісіне параллель жазықтық өткізуге болатынын дәлелде.

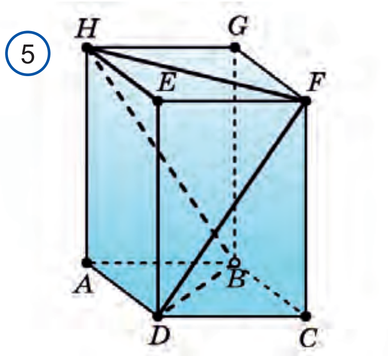
3.16. ABC үшбұрыш берілген. AB түзуге параллель жазықтық осы үшбұрыштың AC қабырғасын A_1 нүктеде, BC қабырғасын B_1 нүктеде қиып өтеді. A_1B_1 кесіндінің ұзындығын тап: a) $AB = 15$ см , $AA_1 : AC = = 2 : 3$; b) $AB = 8$ см, $AA_1 : AC = 5:3$; c) $B_1C = 10$ см, $AB : BC = 4:5$; d) AA_1

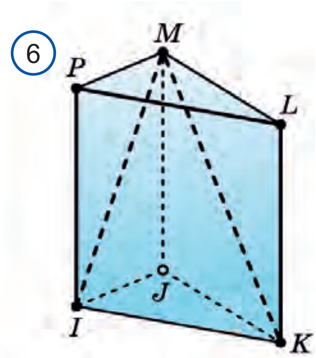
$= a$, $AB = b$, $A_1C_1 = c$.

3.17. 4-суретте төртбұрышты дұрыс пирамида берілген. PA және PB – пирамида PGH және PHK жақтардың биіктіктері болса, $\Delta PGA = \Delta PHB$ екенін дәлелде.

3.18. *ABCDHGFE* тікбұрышты параллелепипедтің (5-сурет) бүйір қыры 8 см-ге, табынының қабырғасы 6 см-ге тең квадраттан құралған. Кеңістіктегі *HFDBH* сынық сызықтың ұзындығын тап.







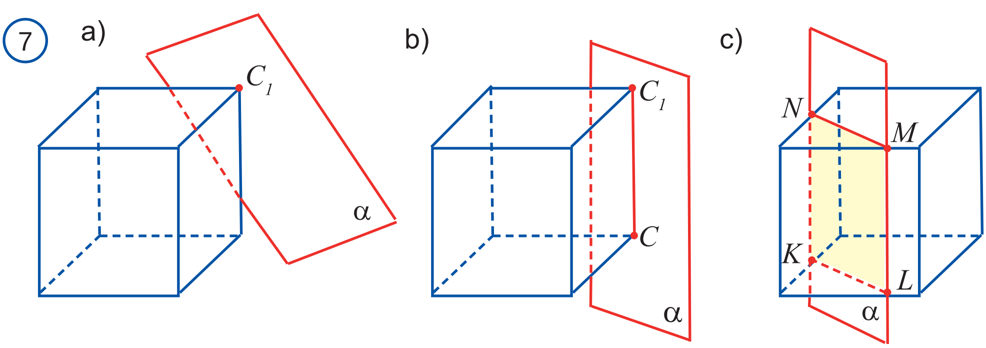
3.19. *IJKPML* үшбұрышты тік призманың (6-сурет) табаны қыры мен бүйір қырының ұзындықтары 2:3 қатынаста. Егер кеңістіктегі *IPLKMI* сынық сызықтың ұзындығы $16+4\sqrt{13}$-ке тең болса, призманың бүйір бетінің ауданын тап.

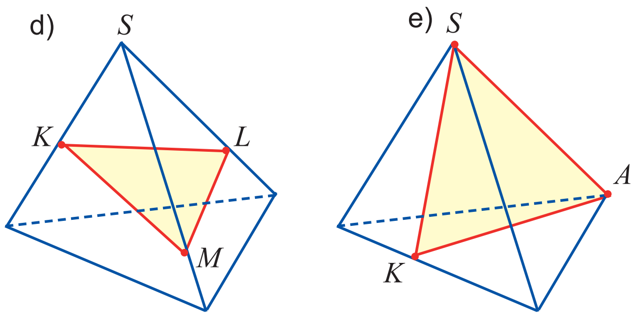
3.20. Табаны квадрат болған тікбұрышты параллелепипедтің бүйір беті 12 см^2-ге тең. Табанының диагоналы $\sqrt{2}$ болса, бүйір жағының диагоналын тап.

3.21. 7-суретте көрсетілген жағдайларда кеңістіктегі фигуралардың қандай кесімі бейнеленгенін түсіндір.

3.22. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубтың AD және CD қырларында M және N нүктелер берілген. Кубты MNB_1 жазықтықпен қиғанда пайда болатын қимасын сал.

3.23. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубты сызып, AB, BC және BB_1 қырлардың центрлері





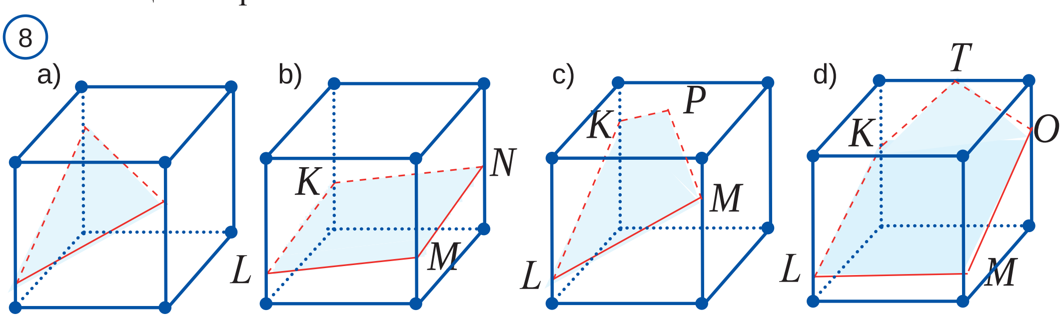
болған M, N және L нүктелерді белгіле. а) кубты MNL жазықтықпен қиғанда пайда болатын қиманы сал; b) MNL үшбұрыштың дұрыс екенін дәлелде; с) кубтың қыры 1 см болса, MNL үшбұрыштың ауданын тап.

3.24. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тікбұрышты параллелепипедтің қырлары $AB = 6$ см, $AD = 6$ см және $AA_1 = 8$ см. Параллелепипедтің BC_1D жазықтықпен қимасын теңбүйірлі үшбұрыш екенін дәлелде және осы үшбұрыштың биіктігін тап.

3.25. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ призманы сыз. Призманың AD, AA_1 және DD_1 қырларының центрлері болған M, N және L нүктелері арқылы өтетін жазықтықпен қимасын сал.

3.26. Кубты жазықтықпен қиғанда қимада 8-суретте бейнеленген қайсы жағдайлар болуы мүмкін? Қайсылары болмайды?

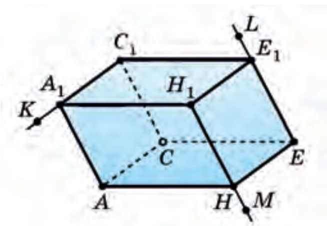
3.27. 9-суретте берілген мәліметтердің негізінде а) K, L және M; b) A, B және C; с) A, B және C нүктелер арқылы өтетін кеңістіктегі фигуралардың тиісті қималарын сал.



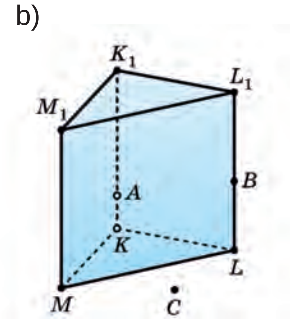
3.28. $MPQTM_1P_1Q_1T_1$ призманың MM_1, M_1P_1 және M_1T_1 қырларында жатқан A, B және C нүктелер алынған (10- сурет). Призманың ABC жазықтықпен қимасын сал.

3.29. Берілген мәліметтердің негізінде 11-суретте U, V және W, 12-суретте A және B нүктелер арқылы өтетін кеңістіктегі фигуралардың қималарын сал.

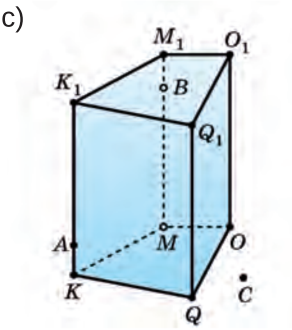
9 a)



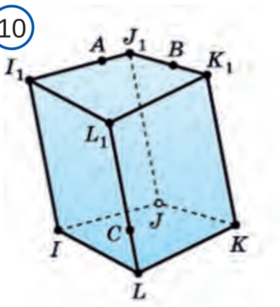
b)



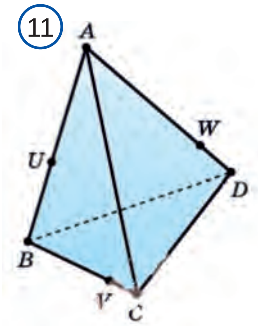
c)



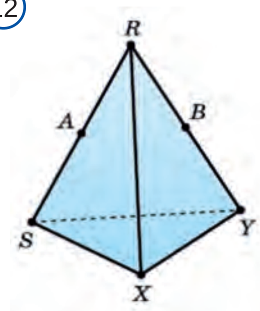
10



11



12



Қолданулар мен практикалық компетенцияларды қалыптастыру

1. Неліктен қандай да бір ғимарат үшін ор (шұңқыр) қазудан алдын тартылған жіптердің көмегімен белгілеу істері орындалады?

Жауабы: екі жазықтықтың қиылысуы түзуден құралған болады.

2. Қыш құю үдерісінде қалыпқа саз-балшық салынып, тегіс ағаш бөлігі қалыптың үстімен жүргізіліп, саз-балшықтың артық бөлігі сырып түсіріледі. Мұнда неліктен қыштың беті тегіс болып шығады?

3. Жасалған орындықтың аяқтары бір жазықтықта жатқанын тексеру үшін ағаш шебері қарама-қарсы аяқтарға жіп тартып тексереді. Осы тәсілді қолданып көр және оның неге негізделгенін айт.

Жауабы: Екі қиылысатын сызық бір ғана жазықтықты анықтайды.

4. Бір бөлік ағаш тақтаны аралап, ағаш шебері аралау бетінің тегіс болуына қалай қол жеткізді?

Жауабы: ағаш тақтаның екі сыбайлас жақтарына AB және AC кесінділерін сызып, араны мүмкіндігінше осы кесінділер арқылы өтетін етіп аралайды. Нәтижеде, екі қиылысатын түзулер арқылы өтетін жазықтық біреу ғана болғаны үшін аралау беті тегіс болады.

5. Фотоаппаратты орнату үшін арналған құрылғы не себептен үш аяқты етіп жасалған?

Жауабы: бір түзуде жатпаған үш нүкте арқылы тек бір ғана жазықтық өтеді.

6. Ағаш шебері өңдеген тақтасының беті тегіс екенін қалай тексереді. Осы тәсіл неге негізделген?

Жауабы: егер түзудің екі нүктесі жазықтықта жатса, оның өзі де толығымен осы жазықтықта жатады.

7. Не себептен үш дөңгелекті мотоцикл екі дөңгелекті мотоциклмен салыстырғанда айтарлықтай тұрақты болады?

Жауабы: бір түзуде жатпаған үш нүкте арқылы тек бір ғана жазықтық өтеді.

8. Неліктен ашық есіктер жел болған кезде өздігінен қозғалады? Не себептен осы жағдай жабық есіктермен болмайды?

Жауабы: түзу және онда жатпаған нүктелер арқылы тек бір ғана жазықтықты өткізуге болады.

9. Қимасы – қабырғасы 7 дм болған квадраттан құралған, биіктігі 4 м болған 18 бағанды құру үшін қанша қыш қажет болады? (Қыштың өлшемдері: 1 х 1,5 х 3 дм, құрылыс үдерісінде 5 % қыш жарамсыз жағдайға келеді).

Жауабы: 8200 *дана.*

Жауаптар және нұсқаулар

1.23. *AB//CD*. **1.24.** $7\frac{2}{3}$ см, $8\frac{2}{3}$ см. **1.25.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ см. **1.26.** 14 см. **1.27.** $8\sqrt{3}$ см. **1.28.** 17 см. **1.29.** 24 см. **1.30.** 4,8 см. **1.31.** 18 см.

2.6. 256 м^2. **2.8.** $(11+\sqrt{3})$ см ^{2}. **2.9.** a) 150; 12,5 $(12+\sqrt{3})$; b) 1200; 1400; c) 3456; 108 $(32+9\sqrt{3})$; d) 2000; 2000+640 tg 54°. **2.10.** a) $6\sqrt{13}$ см; $18\sqrt{3}$ см; b) $405\sqrt{3}$ см^2; c) $648\sqrt{3}$ см^2. **2.11.** a) $2\sqrt{82}$ см; 2 $\sqrt{73}$ см; b) 48 $\sqrt{73}$ см^2; c) $144+48\sqrt{73}$ см^2. **2.12.** a) $\sqrt{142-45\sqrt{3}}$ м; $\sqrt{142+45\sqrt{3}}$ м; b) 192 м^2; c) 282 м^2; **2.13.** a) 5 м; $\sqrt{89}$ м; b) $8(5+\sqrt{34})$ м^2; c) $8(11+\sqrt{34})$ м^2. **2.14.** a) 13 см; 12 см; b) 360 см^2; c) $30(12+5\sqrt{3})$ см^2. **2.15.** $150(2\sqrt{3}-3)$ см^2. **2.17.** a) 168π см^2; b) 168π см^2; c) 2,4π м^2; d) 1,68π м^2. **2.18.** 625π см^2. **2.19.** 252π м^2. **2.20.** π^2 м^2. **2.21.** 4 см; 16 см. **2.22.** 2,11 l. **2.23.** 4,83 м^2. **2.24.** 37 мм. **2.25.** 1040π см^2. **2.26.** a) 75π см^2; b) 288π дм^2; c) 6,25π м^2. **2.28.** a) 88π см^2; b) 88π см^2; c) 540π дм^2; d) 3,24π м^2;

3.18. $\sqrt{10}$ см. **3.19.** $4(5+3\sqrt{2})$ см. **3.20.** 72 см^2. **3.23.** $\frac{\sqrt{3}}{8}$ м^2.

Оқулықты құрастыруда пайдаланылған және қосымша үйренуге ұсынылған оқу-әдістемелік әдебиеттер мен электронды ресурстар

1. A. A’zamov, B. Haydarov "Matematika sayyorasi". Toshkent. "O‘qituvchi", 1993.
2. Y. Saitov "Matematika va matematiklar haqida". Toshkent. "O‘qituvchi", 1992.
3. Yosh matematik qomusiy lug‘ati. Toshkent. "O‘zbekiston ensiklopediyasi", 1991.
4. S.I. Afonina Matematika va go‘zallik, Toshkent, O‘qituvchi, 1986.
5. R.K. Otajonov Geometrik yasash metodlari, Toshkent, "O‘qituvchi", 1982.
6. X. Norjigitov, Ch. Mirzayev Stereometrik masalalarni yechish. Akademik litseylar uchun o‘quv qo‘llanma.-Toshkent, 2004 y.
7. I. Israilov, Z. Pashayev Geometriya. Akademik litseylar uchun o‘quv qo‘llanma. II qism. Toshkent, "O‘qituvchi", 2005 y.
8. А.В. Погорелов "Геометрия 10–11", учебник, Москва. "Просвешение", 2009.
9. С. Атанасян "Геометрия 10–11 классы", учебник, Москва. Просвешение", 2002.
10. Я.И. Перельман Қизиқарли геометрия, Тошкент. "Ўқитувчи", 1981.
11. Б. А. Кордемский Математическая смекалка. Москва. "Наука", 1991.
12. Л. А. Латотин, Б. Д. Чеботаревский "Математика 10", учебник, Минск, 2013.
13. И.М. Смирнова, В.А. Смирнов Геометрия. 10–11 класс. учебник, Москва, 2008
14. О.Я. Билянина и др. "Геометрия 10" учебник, Киев, "Генеза", 2010.
15. А.Д. Александров "Геометрия – 10–11", учебник, Москва. "Просвещение", 2013.
16. C. Daniel Alexander, Elementary geometry for college students, Canada, Brooks/Cole, Cengage Learning, 2011.
17. Mal Coad and others, Mathematics for the international students, Haese and Harris publications, Australia, 2010.
18. Jennie M. Bennett, "Pre-Algebra" Holt, Rinehart and Winston, New York, 2004
19. http://www.uzedu.uz – Халыққа білім беру министрлігі ақпарат білім беру порталы.
20. http://www.eduportal.uz – Мультимедиа орталығы ақпарат білім беру порталы.
21. http://www.school.edu.ru – Жалпы білім беру порталы (орыс тілінде).
22. http://mathc.chat.ru – Математикалық калейдоскоп (орыс тілінде).
23. http://www.problems.ru – Математикалық есептерді іздеу жүйесі (орыс тілінде).
25. http://www.pdmi.ras.ru/~olymp – Математикадан олимпиада есептері (орыс тілінде).
26. http://www.ixl.com – Қашықтықтан оқыту сайты (ағылшын тілінде).
27. http://www.mathkang.ru – "Кенгуру" халықаралық математикалық конкурс-байқау сайты (орыс тілінде).

М.А. Мирзаахмедов, Б.Қ. Хайдаров, Ш.Н. Исмаилов, А.Қ. Аманов

МАТЕМАТИКА 10
АЛГЕБРА ЖӘНЕ АНАЛИЗ БАСТАМАЛАРЫ
ГЕОМЕТРИЯ
I БӨЛІМ

Орта білім беретін мекемелердің 10-сынып
оқушыларына арналған оқулық
1-басылымы

Редакторы:	Т. Ахмедов
Техникалық редактор:	К. Мадияров
Қазақшаға аударған:	Т. Сапарәліұлы
Компьютерде терген:	А. Абдусаломов

Баспа лицензиясы AI № 296. 22.05.2017
Басуға рұқсат етілді 10.11.2017. Пішімі $70\times100^{1}/_{16}$
«TimesNewRoman» гарнитурасы.
Көлемі: шартты баспа таб. 9,0. Есептік баспа таб. 9,0.
Таралымы _______ дана
Оригинал-макет «Extremum-press» ЖШҚ-да
дайындалды. 100053, Ташкент қ.
Боғишамол көшесі, 3. Тел: 234-44-05
Өзбекстан Баспасөз және ақпарат агенттігінің «Уқитувчи»
баспа-полиграфия шығармашылық үйінің баспаханасында басылды.
100206, Ташкент қ. Юнусабад ауданы,
Янгишахар көшесі, 1-үй.
Тапсырыс № 232-17.