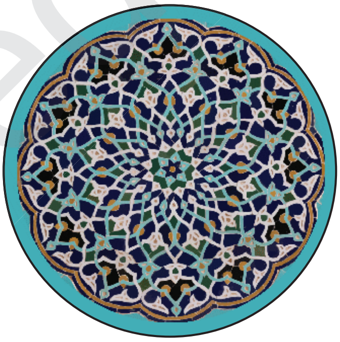
B. Haýdarow, E. Sarikow, A. Koçkarow

GEOMETRIÝA 9

Umumy orta bilim berýän mekdepleriň
9-njy synpy üçin derslik

Özbegistan Respublikasynyň Halk bilimi ministrligi
tarapyndan neşire hödürlenen

Doldurylan we gaýtadan işlenen dördünji neşir



Daşkent — 2019

UDK 514.1(075)
BBK 22.151эа7
X-18

Syn ýazanlar:

Özbegistan Respublikasynyň Ylymlar akademiýasynyň hakyky agzasy, fizika-matematika ylymlarynyň doktory, professor A. Azamowyň redaksiýasy bilen.

9- njy synpda geometriýanyň planimetriýa bölümini – tekiz geometrik figuralaryň häsiýetlerini öwrenmek dowam etdirilýär. Onda siz geometrik öz-özüne öwrülmeler, figuralaryň meňzeşligi, üçburçlugyň taraplarynyň we burçlarynyň arasyndaky gatnaşyklar, töweregiň uzynlygy we tegelegiň meýdany, üçburçlukdaky we töwerekdäki metrik gatnaşyklar bilen tanyşarsyňyz.

Şu dersligiň mazmuny berk aksiomatik ulgam esasynda gurlandyr. Ondaky nazary materiallar mümkingadar sada we düşnükli dilde beýan edilendir. Ähli temalar we düşünjeler durmuşdan alnan dürlüçe mysallar arkaly açyp görkezilen. Her bir temadan soň berlen soraglar, subut etmäge, hasaplamaga we gurmaga degişli mesele we mysallar okuwçyny döredijilikli pikirlenmäge ündeýär, oňa özleşdirilen bilimleri çuňlaşdyrmaga we berkitmäge kömek edýär. Derslik özüniň özboluşly dizaýny we sapak materialynyň gökezmeliligi bilen hem tapawutlanýar. Onda getirilýän surat we çyzgylar sapagyň materialyny has gowy özleşdirmäge hyzmat edýär.

Respublikanyň ýörite kitap gaznasynyň serişdeleriniň hasabyndan kärende üçin çap edildi.

ISBN 978-9943-5875-9-5

MAZMUNY

Gaýtalamak

I bap. Geometrik öz-özüne öwrülmeler we meňzeşlik

II bap. Üçburçlugyň taraplarynyň we burçlarynyň arasyndaky gatnaşyklar

III bap. Töweregiň uzynlygy we tegelegiň meýdany

IV bap. Üçburçlukdaky we töwerekdäki metrik gatnaşyklar

5-8-NJI SYNPLARDA GEÇILENLERI GAÝTALAMAK

Şu bölümdäki meseleler 5-8-nji synplarda öwrenilen geometrik figuralar we olaryň häsiýetlerini ýada salmak üçin berilýär.

Bölümde PISA we TIMSS - okuwçylaryň bilimini bahalamagyň halkara maksatnamalarynyň meselelerinden hem getirilýär.

Bu bölümdäki materiallary öwrenmek netijesinde aşakdaky bilimleri we endikleri täzelemek mümkinçiligine eýe bolarsyňyz:

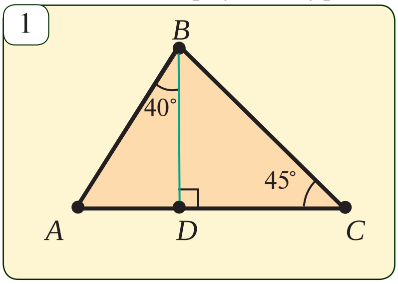
√ 5-8-*nji synplarda geometriýadan geçilen temalary gaýtalap, alan bilimleriňizi ýada salarsyňyz we alan endikleriňizi berkidersiňiz.*

√ *PISA we TIMSS - okuwçylaryň bilimini bahalamagyň halkara maksatnamalary meseleleri bilen tanyşarsyňyz;*

√ *Bu size 9-njy synpda geometriýany öwrenmegi üstünlikli dowam etdirmegiňize esas döreder.*

1 ÜÇBURÇLUKLAR WE DÖRTBURÇLUKLAR

Şu bölümdäki meseleleri çözmek üçin dersligiň ahyrynda getirilen esasy geometrik figuralara degişli maglumatlar hem-de olaryň häsiýetlerini aňladýan formulalardan peýdalanyp bilersiňiz.



1.1. *ABC* üçburçlugyň *BD* beýikligi geçirilen *(1-nji surat)*. Eger $\angle ABD = 40°$, $\angle BCD = 45°$ bolsa, üçburçlugyň *A* we *B* depesindäki burçlaryny tapyň.

Çözülişi. 1) Gönüburçly *ABD* üçburçlukda $\angle ABD = 40°$ we üçburçlugyň içki burçlarynyň jemi 180°-a deň bolany üçin

$$\angle A = 180° - (90° + 40°) = 50°.$$

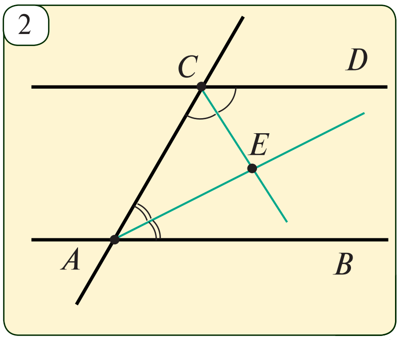
2) Gönüburçly *BCD* üçburçlukda $\angle BCD = 45°$ bolany üçin

$$\angle DBC = 180° - (90° + 45°) = 45°.$$

$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$ bolany üçin

$$\angle B = 40° + 45° = 85°.$$

Jogaby: 50°, 85°.



1.2. Iki parallel göni çyzygy kesiji bilen kesende emele gelen içki bir taraply burçlaryň bissektrisalarynyň arasyndaky burçy tapyň.

Çözülişi. *AC* göni çyzyk *AB* we *CD* – parallel göni çyzyklary 2-nji suratda görkezilişi ýaly kesip geçen bolsun. Içki bir taraply *BAC* we *ACD* burçlaryň bissektrisalary *E* nokatda kesişen bolup, $\angle EAC = x$, $\angle ECA = y$ bolsun. Onda, burçuň bissektrisasynyň kesgitlemesine görä

$\angle BAC = x + x = 2x$, $\angle ACD = y + y = 2y$.

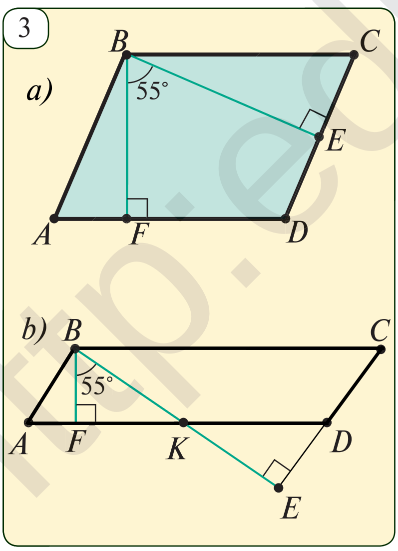
$AB \parallel CD$ bolany üçin içki bir taraply burçlaryň häsiýetine görä,

$$2x + 2y = 180°, \qquad x + y = 90°.$$

ACE üçburçlugyň içki burçlarynyň jemi 180°-a deň bolany üçin

$\angle AEC = 180° - (x + y) = 180° - 90° = 90°.$

Jogaby: 90°.



1.3. Eger parallelogramyň kütek burçunyň depesinden onuň iki tarapyna geçirilen beýiklikleriniň arasyndaky burç 55°-a deň bolsa, parallelogramyň burçlaryny tapyň.

Çözülişi. Parallelogramyň BF we BE beýiklikleriniň arasyndaky burç $55°$ bolsun *(3-nji surat)*.

Suratda görkezilen iki ýagdaý: a) BE beýiklik CD tarapa; b) BE beýiklik CD tarapyň dowamyna düşen bolmagy mümkin.

a) ýagdaýda $BEDF$ dörtburçlugyň burçlarynyň jemi $360°$ bolany üçin,

$55° + 90° + \angle D + 90° = 360°.$ Mundan, $\angle D = 125°.$

b) ýagdaýda BE beýiklik AD tarap bilen kesişen nokat K bolsun. Onda,

$$\angle DKE = \angle BKF = 90° - 55° = 35°.$$

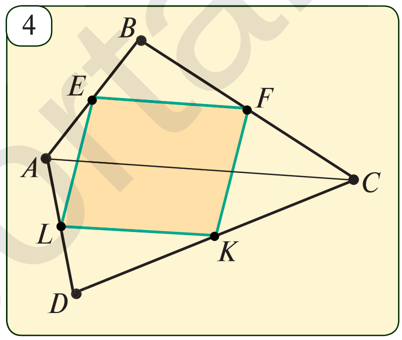
Üçburçlugyň daşky burçunyň häsiýetine görä,

$$\angle ADC = \angle DKE + \angle KED = 35° + 90° = 125°.$$

Diýmek, iki ýagdaýda-da $\angle D = 125°$.

Onda, $\angle A = \angle C = 180° - \angle D = 55°$, $\angle B = \angle D = 125°$. *Jogaby:* $55°, 125°, 55°, 125°$.

1.4. Dörtburçlugyň taraplarynyň ortalarynyň parallelogramyň depeleri bolýandygyny subut ediň.



Çözülişi. $ABCD$ dörtburçlugyň AB, BC, CD we DA taraplarynyň ortalary degişlilikde E, F, K we L nokatlar bolsun. AC diagonaly geçirýäris *(4-nji surat)*. $EFKL$ – parallelogramdygyny görkezýäris.

EF kesim ABC üçburçlugyň, KL kesim bolsa ACD üçburçlugyň orta çyzygy bolýar. Onda, üçburçlugyň orta çyzygynyň häsiýetlerine görä,

$$EF \,||\, AC,\; KL \,||\, AC,\quad EF = \frac{1}{2}AC,\quad KL = \frac{1}{2}AC.$$

Mundan $EF \,||\, KL$ we $EF = LK$. Şonuň üçin, parallelogram nyşanyna görä, $EFKL$ — parallelogram.

1.5. ABC üçburçlukda $\angle A = 47°$, $\angle C = 83°$ bolsa, üçburçlugyň üçünji içki burçuny we daşky burçlaryny tapyň.

1.6. ABC üçburçlugyň AC tarapyna parallel göni çyzyk AB we BC taraplary degişlilikde E we F nokatlarda kesip geçýär. Eger $\angle BEF = 65°$ we $\angle EFC = 135°$ bolsa, ABC üçburçluk burçlaryny tapyň.

1.7. ABC üçburçlugyň bissektrisalary I nokatda kesişýär. Eger $\angle A = 80°$ we $\angle B = 70°$ bolsa, AIB, BIC we CIA burçlary tapyň.

1.8. Deňýanly üçburçlugyň bir daşky burçy $70°$-a deň. Üçburçlugyň burçlaryny tapyň.

1.9. ABC üçburçlugyň AK bissektrisasy geçirilen. Eger $\angle BAK = 47°$ we $\angle AKC = 103°$ bolsa, üçburçlugyň burçlaryny tapyň.

1.10*. ABC üçburçlugyň beýiklikleri H nokatda kesişýär. Eger $\angle A = 50°$, $\angle B = 60°$ bolsa, AHB, BHC we CHA burçlary tapyň.

1.11. Üçburçlugyň orta çyzyklary ony dört deň üçburçluklara bölýändigini subut ediň.

1.12*. ABC üçburçlukda CD medians dowamyna bu mediana deň DE kesim goýlan. AF medianyň dowamyga AF mediana deň FH kesim goýlan. B, H, E nokatlaryň bir göni çyzykda ýatýandygyny subut ediň.

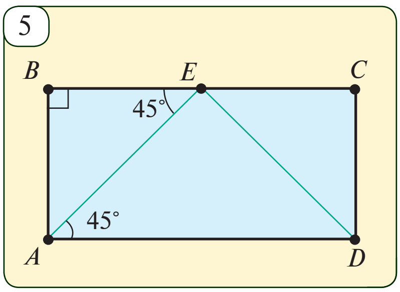
1.13. *ABC* deňýanly üçburçlukda (*AB*=*BC*) *AN* we *CK* bissektrisalar geçirilen.
a) *KN* kesim *AC* tarapa paralleldigini görkeziň.
b) *AK*=*KN*=*NC* deňligiň dogry bolýandygyny subut ediň.

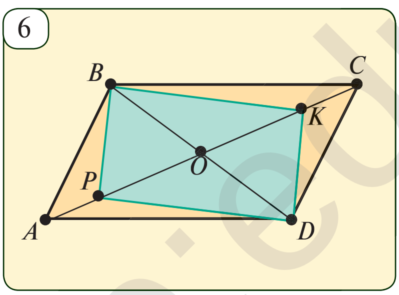
1.14. *ABCD* gönüburçlugyň *A* we *D* burçlarynyň bissektrisalary *BC* tarapda kesişýär. Eger $AB = 4$ *cm* bolsa, bu gönüburçlugyň meýdanyny tapyň.

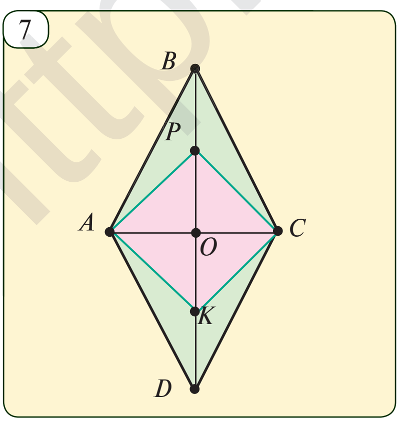
Çözülişi. Gönüburçlugyň *A* we *D* burçlarynyň bissektrisalary kesişen nokat *E* bolsun *(5-nji surat)*. $\angle B = 90°$, $\angle BAE = 45°$ bolany üçin $\angle AEB = 180° - 90° - 45° = 45°$. Ýagny, *ABE* — deňýanly üçburçluk. Onda, $AB = BE = 4$ (*cm*). Edil şuňa meňzeş $EC = CD = 4$ (*cm*) bolýandygyny görkezmek mümkin. Mundan $BC = BE + EC = 8$ (*cm*) we

$S_{ABCD} = AB \cdot BC = 4 \cdot 8 = 32$ (cm^2). *Jogaby:* 32 cm^2.

1.15. Dörtburçlugyň üç burçy 47°, 83° we 120°-a deňligi mälim. Onuň dördünji burçuny tapyň.







1.16. Parallelogramyň iki burçunyň jemi 156°-a deň. Onuň burçlaryny tapyň.

1.17. Gönüburçlugyň diagonallarynyň arasyndaky burç 74°. Onuň bir diagonaly bilen taraplarynyň arasyndaky burçlary tapyň.

1.18. Deňýanly trapesiýanyň iki burçunyň tapawudy 40°-a deň. Onuň burçlaryny tapyň.

1.19. Rombuň burçlaryndan biri ikinjisinden üç esse uly. Rombuň burçlaryny tapyň.

1.20. *ABCD* gönüburçlugyň *A* burçunyň bissektrisasy *BC* tarapyny 2 *cm* we 6 *cm*-e deň kesimlere bölýär. Gönüburçlugyň perimetrini tapyň.

1.21. Taraplary 3 *cm* we 6 *cm*, uly taraplarynyň arasyndaky aralyk bolsa 2 *cm* bolan parallelogram guruň.

1.22. *ABCD* parallelogramyň *AC* diagonalynda *P* we *K* nokatlar saýlanan *(6-njy surat)*. Eger $OP = OB = OK$ bolsa, *BKDP* gönüburçluk bolýandygyny subut ediň.

1.23*. *ABCD* rombuň *BD* uly diagonalynda *P* we *K* nokatlar saýlanan *(7-nji surat)*. Eger $OA = OP = OK$ bolsa, *APCK* dörtburçlugyň kwadratdygyny subut ediň.

1.24*. *ABCD* parallelogramyň *BD* diagonalynda *P* we *K* nokatlar saýlanan. Eger $BP = KD$ bolsa, *APCK* dörtburçlugyň parallelogramdygyny subut ediň.

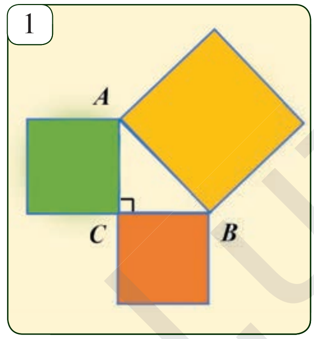
2 PIFAGORYŇ TEOREMASY WE ONUŇ ULANYLYŞY

Bu meşhur teoremanyň 3 hili aňlatmasyny getirip, ony ýada salýarys.

a) tekstli aňlatmasy: Gönüburçly üçburçlugyň gipotenuzasynyň kwadraty katetleriniň kwadratlarynyň jemine deň.

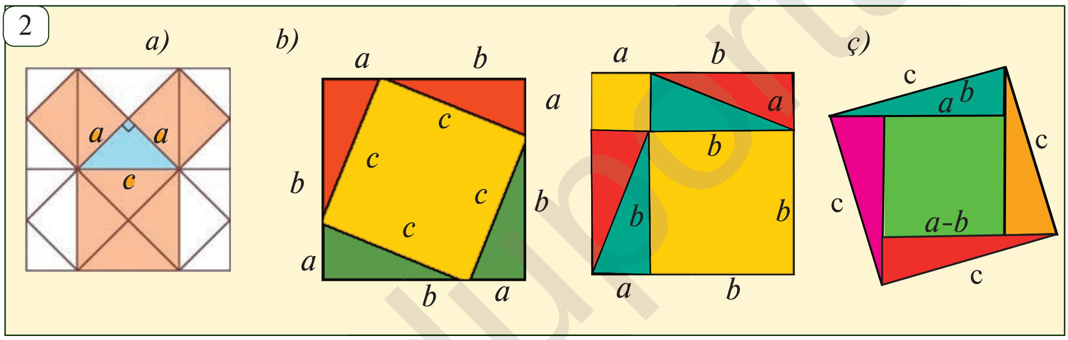
b) matematiki aňlatmasy: ABC üçburçlukda: $\angle C = 90°$, $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ bolsa, $c^2 = a^2 + b^2$ bolýar.

ç) şekilli aňlatmasy: (1-nji surat).

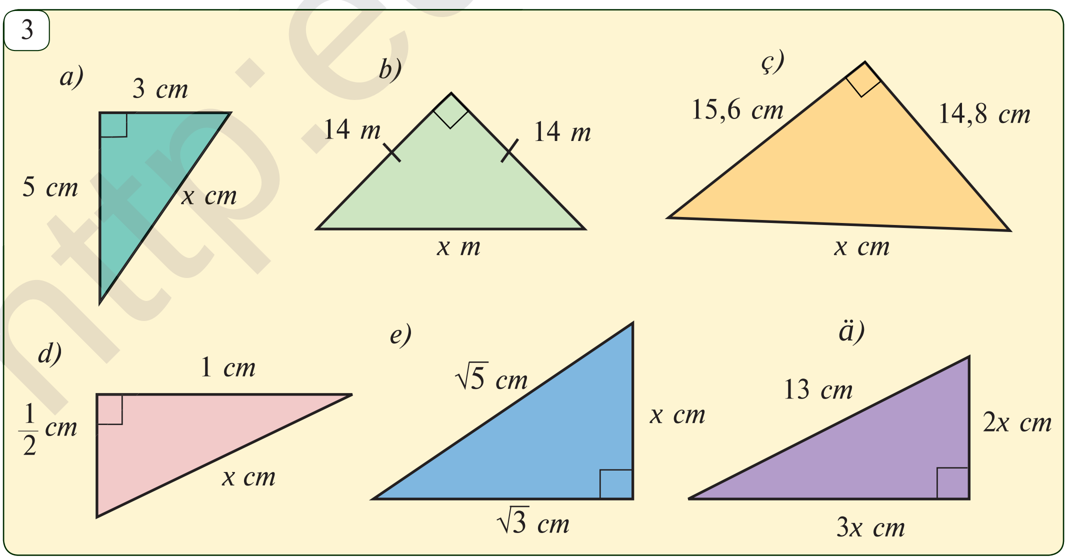


Meseleler we ýumuşlar

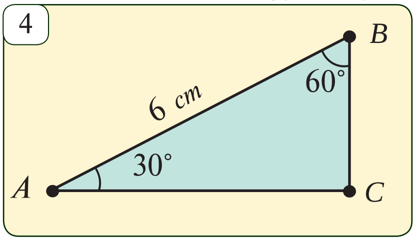
2.1. 2-nji suratda getirilen suratlar esasynda Pifagoryň teoremasynyň birnäçe subudyny dikeldiň.



2.2. 3-nji suratda berlenlere görä näbellini tapyň.



2.3. *ABC* üçburçlugyň *AB* tarapy 6 *cm*, *A* we *B* burçlary, degişlilikde, 30° we 60° bolsa, *ABC* üçburçlugyň meýdanyny tapyň.



Çözülişi. Üçburçlugyň *C* burçuny tapýarys: $\angle C = 180° - (\angle A + \angle B) = 180° - (60° + 30°) = 90°$.

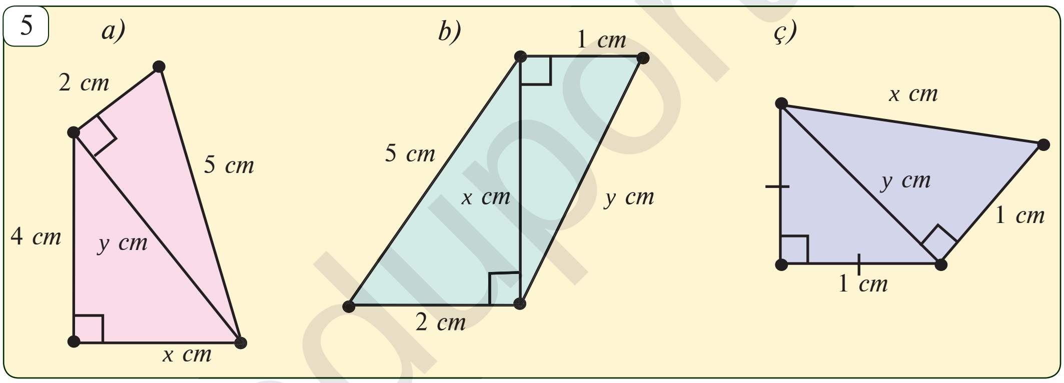
Diýmek, gönüburçly *ABC* üçburçlugyň *AB* gipotenuzasy 6 *cm* we *A* burçy 30° eken. Gönüburçly üçburçlukda 30°-ly burçuň garşysyndaky katet gipotenuzanyň ýarysyna deň bolany üçin, *BC*=3 *cm* (*4-nji surat*).

Pifagoryň teoremasyndan peýdalanyp *AC* kateti tapýarys:

$$AC^2 = AB^2 - BC^2 = 6^2 - 3^2 = 27 = 3\sqrt{3}, \qquad AC = 3\sqrt{3}\ cm.$$

Endi üçburçlugyň meýdanyny tapýarys:

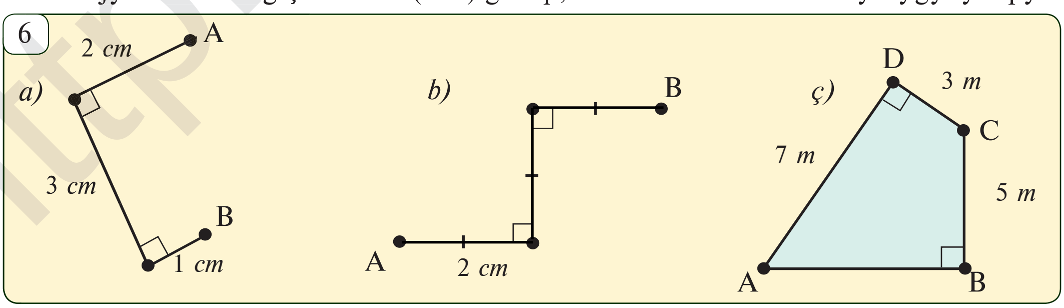
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{3} \cdot 3 = \frac{9\sqrt{3}}{2}\ (cm^2). \qquad \textit{Jogaby: } \frac{9\sqrt{3}}{2}\ cm^2.$$



2.4. 5-nji suratda berlenlere görä näbellileri tapyň.

2.5. Katetleri 15 *cm* we 20 *cm* bolan gönüburçly üçburçlugyň gipotenuzasyna geçirilen beýikligini tapyň.

2.6 6-njy suratda degişli kesimi(leri) gurup, näbelli AB kesimiň uzynlygyny tapyň.

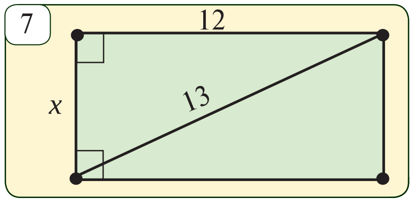


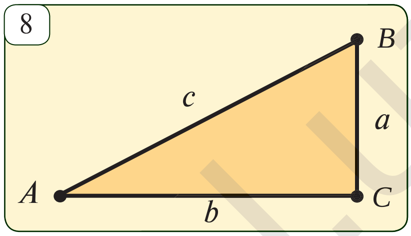
2.7. 7-nji suratda berlenlerden peýdalanyp gönüburçlugyň meýdanyny tapyň.

Çözülişi. Gönüburçlugyň kiçi tarapyny *x* bilen belgilesek, onda Pifagoryň teoremasyna görä: $x^2 + 12^2 = 13^2$;

$x^2 + 144 = 169$; $x^2 = 169 - 144 = 25$; $x = \pm 5$. Uzynlyk položitel ululyk bolany üçin $x = 5$ *cm*. Onda gönüburçlugyň meýdany

$S = a \cdot b = 5 \cdot 12 = 60$ (cm²). *Jogaby:* 60 cm^2.

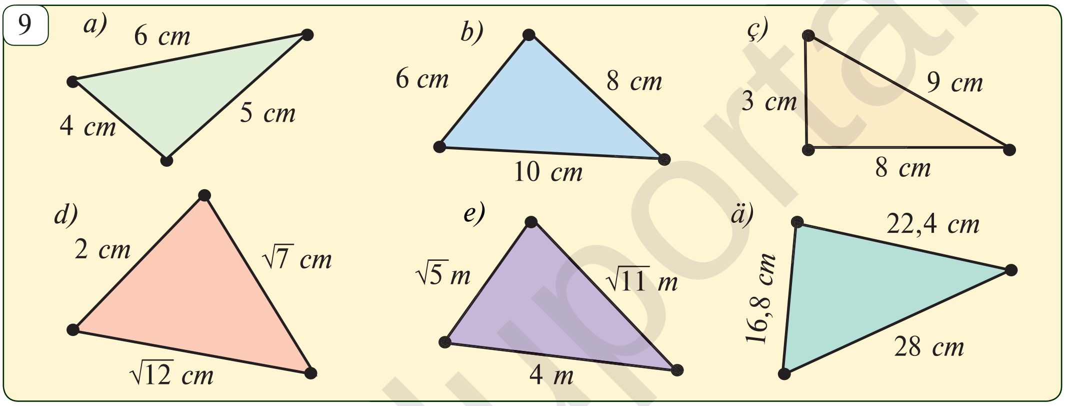


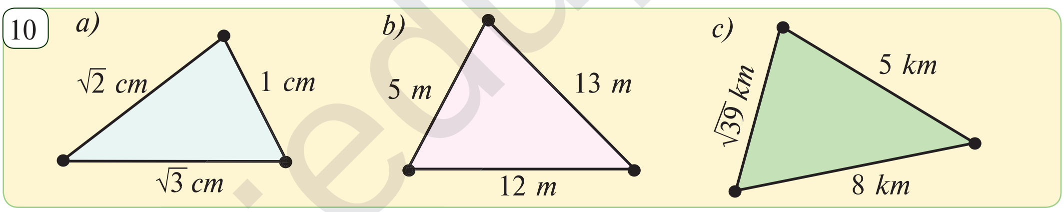


Teorema. ***Eger taraplary a, b we c bolan üçburçlukda $c^2 = a^2 + b^2$ bolsa, bu üçburçluk gönüburçly bolýar (8-nji surat).***

2.8. 9-njy suratdaky üçburçluklar näanygrak görkezilen. Olaryň haýsysy gönüburçly?

2.9. 10-njy suratdaky üçburçluklar näanygrak görkezilen. Olaryň haýsysy gönüburçly?



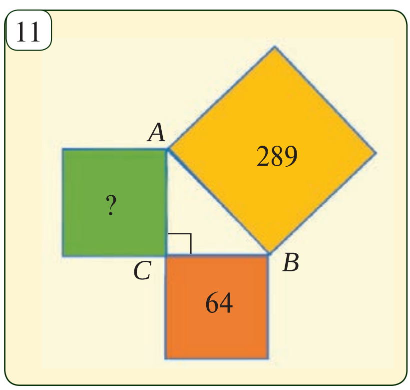


2.10. 11-nji suratda görkezilen näbelli meýdany tapyň.

2.11. 12-nji suratdaky rombuň diagonallary 6 *cm* we 8 *cm* bolsa, onuň tarapyny tapyň.

2.12. 13-nji suratdaky deň taraply üçburçlugyň tarapy 6 *m* bolsa, onuň beýikligini tapyň.

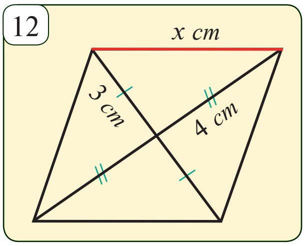
2.13. 14-nji suratda görkezilen şekiliň perimetrini tapyň.

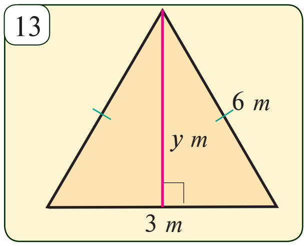


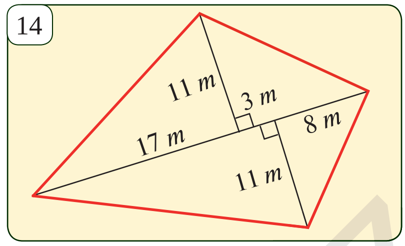
2.14. 15-nji suratda berlenlerden peýdalanyp, nämälim uzynlygy tapyň.

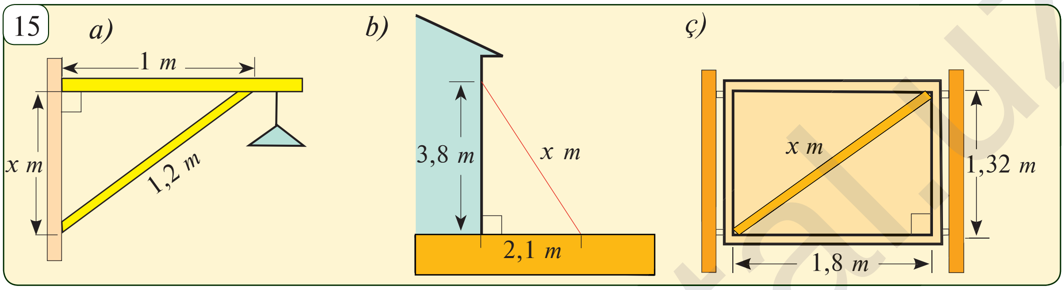
2.15. 16-njy suratda berlenlerden peýdalanyp, *AB* kesim uzynlygyny tapyň.

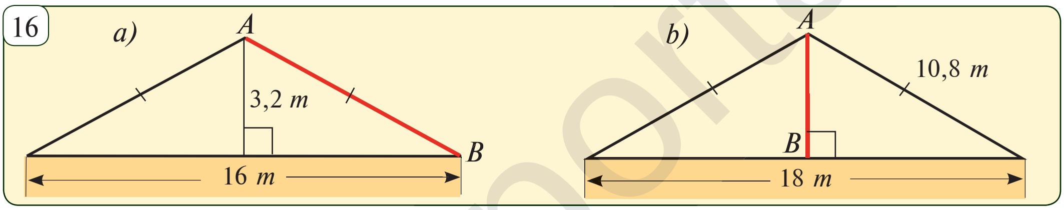
2.16. 17-nji suratda görkezilen çadyryň öň tarapy deň taraply üçburçluk şeklinde. Berlenlerden peýdalanyp çadyryň esasynyň meýdanyny tapyň.

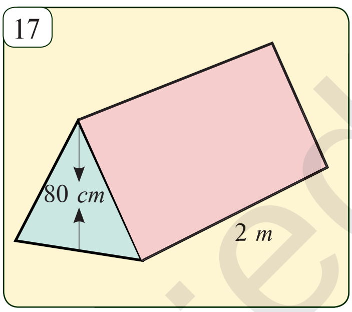


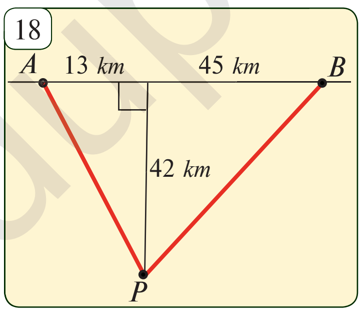


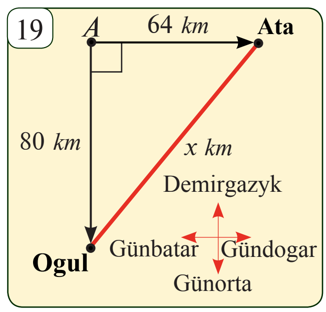












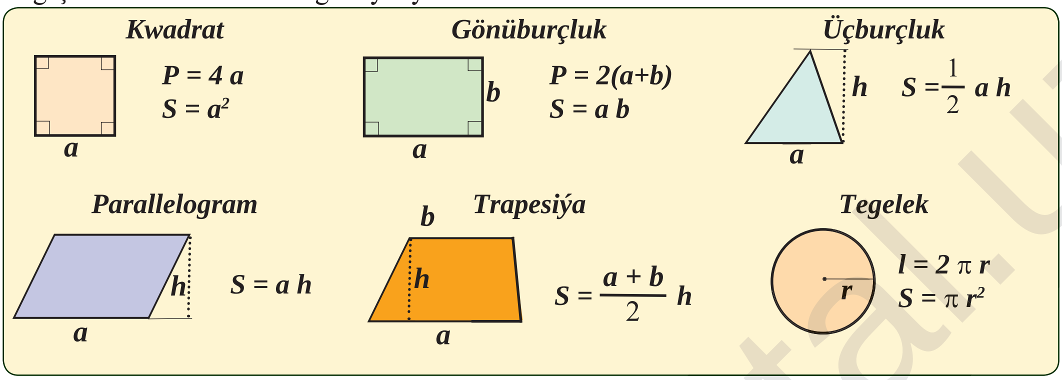
2.17. 18-nji suratda P elektrostansiýadan A we B şäherlere sim çekilmekçi. Munuň üçin näçe sim gerek bolar?

2.18. A nokatdan ata 16 *km/h* tizlik bilen gündogara, ogly bolsa 20 *km/h* tizlik bilen welosipedde günorta tarap hereketlenýär (19-njy surat). 4 sagatdan soň olaryň arasyndaky aralyk näçe bolýar?

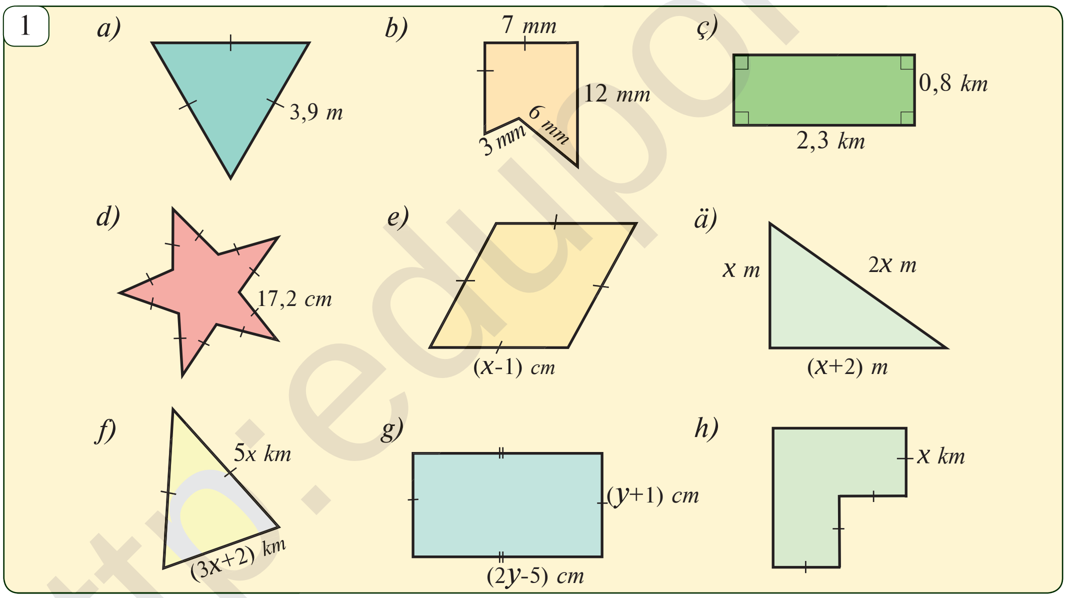
2.19. Iki kapitan Jek we Huk Jumabaý adasyndan öz gämilerinde sapara çykdylar (20-nji surat). Birinjisi 15 *km/h* tizlik bilen demirgazyga, ikinjisi bolsa 19 *km/h* tizlik bilen günbatara tarap ýüzüp gitdiler. 2 sagatdan soň olaryň arasyndaky aralyk näçe bolar?

3 GEOMETRIK FIGURALARYŇ PERIMETRINI WE MEÝDANYNY HASAPLAMAGA DEGIŞLI MESELELER

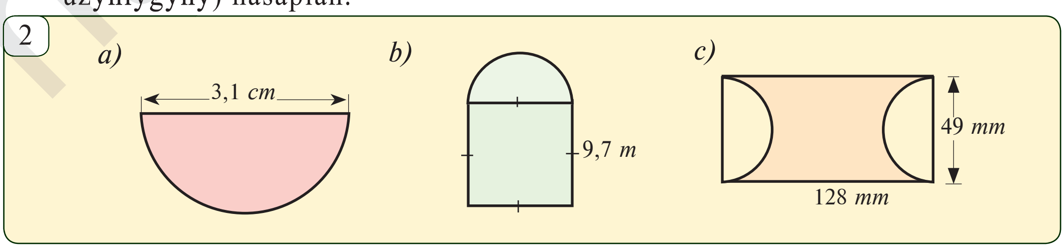
Aşakda tekiz geometrik figuralaryň perimetrini we meýdanyny hasaplamaga degişli dürli meselelere garaýarys.



3.1. 1-nji suratda görkezilen köpburçluklaryň perimetrini hasaplaň.



3.2. 2-nji suratda görkezilen geometrik figuralaryň perimetrini (araçäginiň uzynlygyny) hasaplaň.

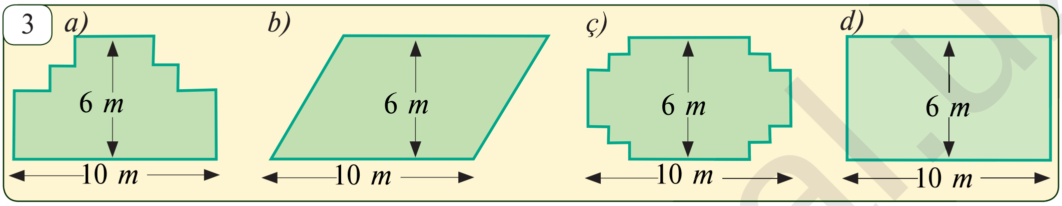


3.3. 3-nji suratda görkezilen gülzarlary 32 *m* sim bilen gurşamak bolarmy?

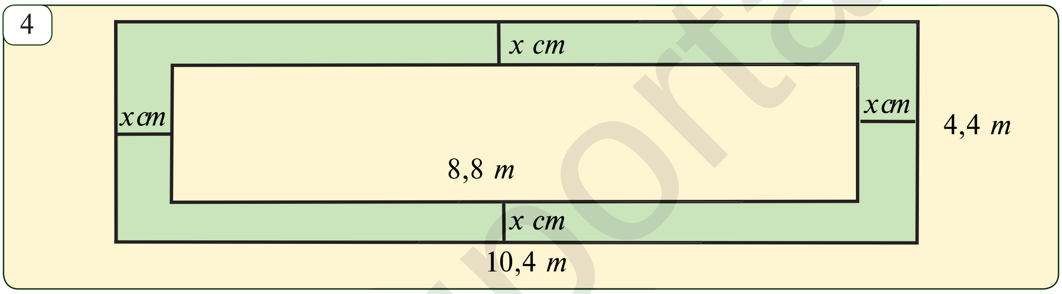
3.4. 4-nji suratda otagyň petigi görkezilen. Petigiň içki bölegini ak, daşky bölegini bolsa ýaşyl reňk bilen boýamaly. 1. Suratda belgilenen näbelli kesimiň uzynlygyny tapyň. 2. Ýaşyl reňke boýalan petigiň böleginiň meýdanyny tapyň. 3. Ak reňke boýalan petigiň böleginiň meýdanyny tapyň.

3.5. Welosipediň tigiriniň diametri 64 *cm*.(5-nji surat) Aşyr welosipedde 100 *m* aralygy geçdi. Munda welosipediň her bir tigiri näçe gezek doly aýlandy? (Ýatlatma: töweregiň uzynlygy C=2πr formula bilen hasaplanýar).

3



4



3.7. Awtomobiliň şinasynyň üstündäki ýazuw mälim ölçegleri aňladýar (6-njy *a* surat). Meselem, 195/55 R16 ýazuwda 195 sany şinanyň giňligini mm-lerde aňladýar (6-njy *b* surat). Ikinji san 55 - şinanyň profiliniň beýikliginiň şinanyň giňligine görä göterimini görkezýär. Biziň ýagdaýda şinanyň profiliniň beýikligi 195 · 55% = 107 mm = 10,7 *cm*. R16 ýazuw bolsa şinanyň içki diametriniň dýuýmlardaky aňlatmasy. 1 dýuým takmynan 2,54 *cm* bolýandygyny hasaba alsak, biziň şinanyň içki diametri 16 · 2,54 = 40,64 *cm*-e deň bolýar.

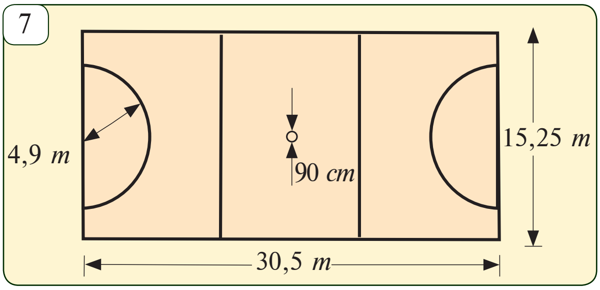
Ravon kysymly Neksiýa awtomobiliniň şinasynda 175/60 R15 ýazuw bar. Bu awtomobiliň şinasynyň giňligini, profiliniň beýikligini, içki diametrini we tigiriň beýikligini ýagny daşky diametrini santimetrlerde anyklaň.

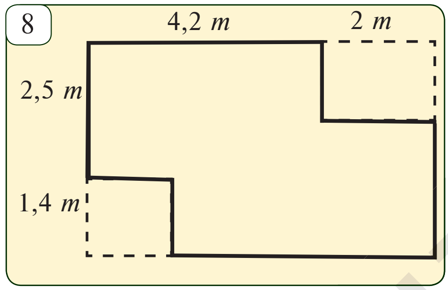
5

6

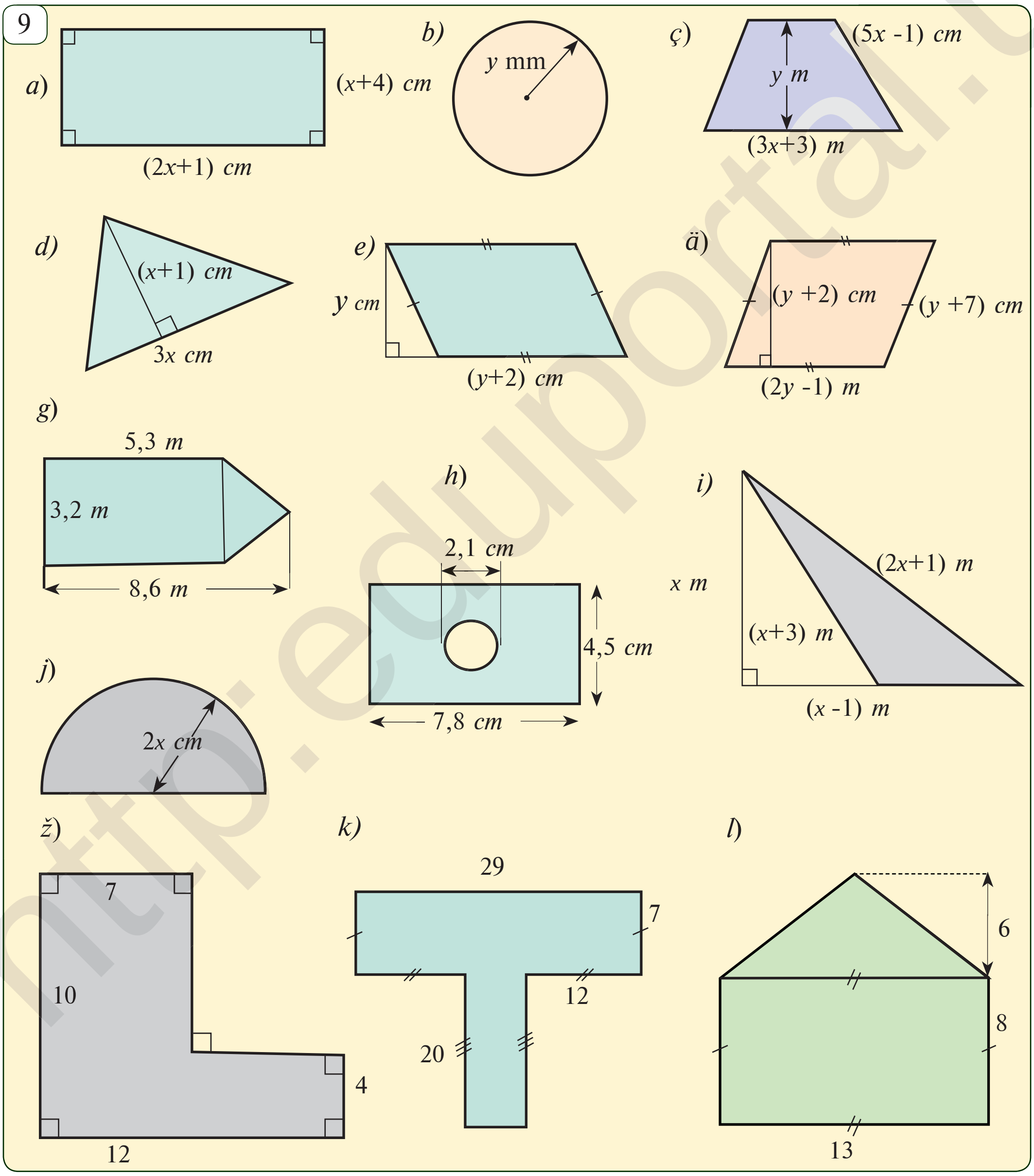
3.8. 7-nji suratda berlen amerikança futbol stadionynyň perimetrini hasaplaň. Bu stadionyň meýdanyny belgilemek üçin çyzylýan çyzyklaryň jemi uzynlygyny tapyň.

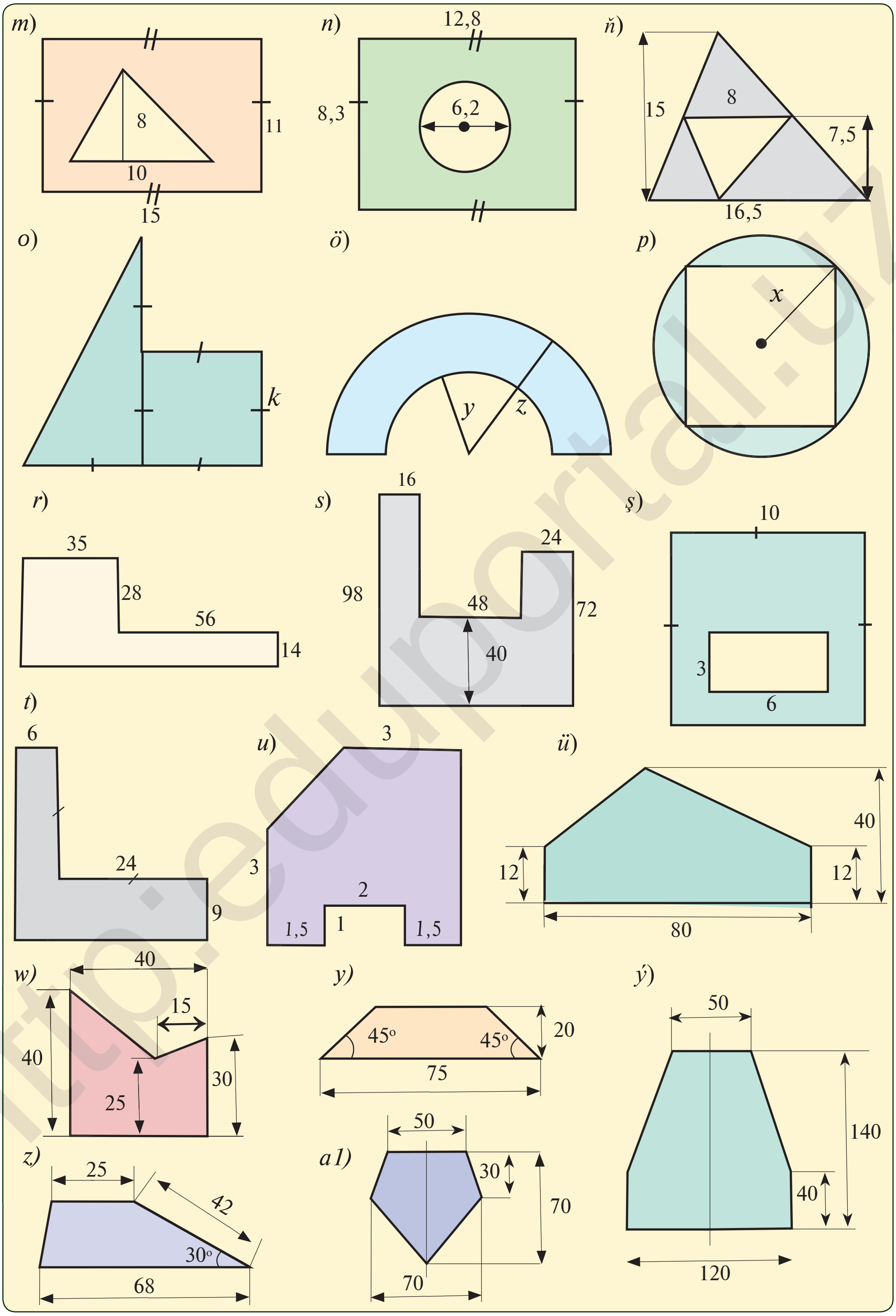
3.9. 8-nji suratda görkezilen ýer uçastogunyň perimetrini tapyň.





3.10. 9-njy suratda görkezilen dürli şekildäki uçastoklaryň meýdanyny tapyň.




m)
8
10
11
15
n)
12,8
8,3
6,2
ň)
8
15
7,5
16,5
o)
k
ö)
y
z
p)
x
r)
35
28
56
14
s)
16
24
98
48
72
40
ş)
10
3
6
t)
6
24
9
u)
3
3
2
1,5
1
1,5
ü)
40
12
12
80
w)
40
15
40
25
30
y)
45°
45°
20
75
ý)
50
140
40
120
z)
25
42
30°
68
a1)
50
30
70
70

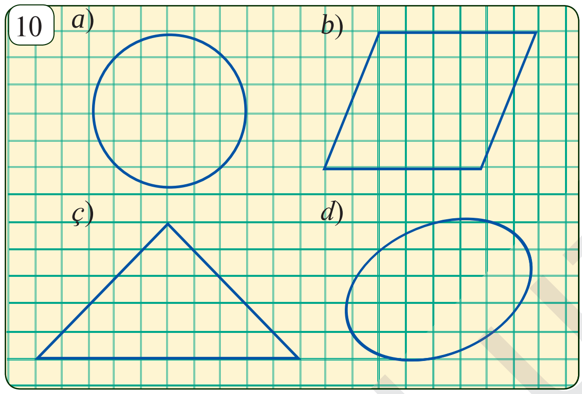
3.11. Amaly ýumuş. 10-njy suratda getirilen şekilleri gözenekli depderiňize çyzyň. Olaryň meýdanyny tapmak üçin nähili usullaryny teklip edýärsiňiz? Depderiňiziň gözeneklerinden peýdalanyp olaryň meýdanyny takmynan nädip anyklamak bolar?

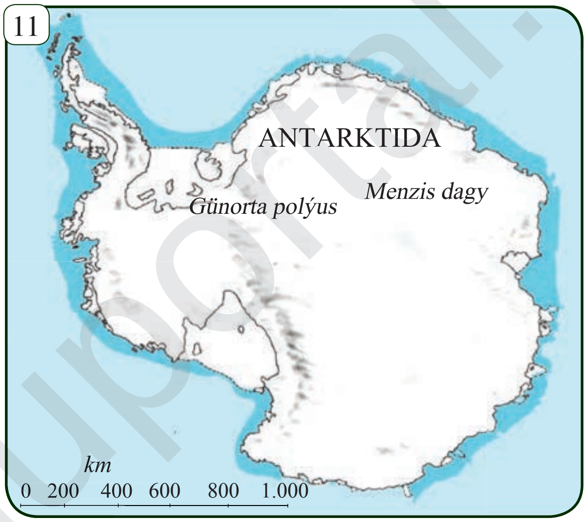
3.12. 11-nji suratda Antraktida kontinentiniň kartasy getirilen. Berlen masştabdan peýdalanyp we degişli kömekçi gurmalary ýerine ýetirip, kontinentiň meýdanyny takmynan anyklaň.

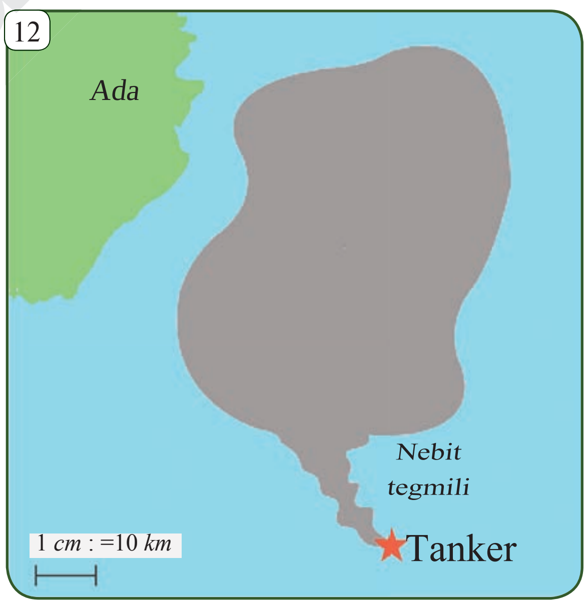
3.13. 12-nji suratda nebit daşaýan tanker heläkçilige duçar bolup, deňziň üstünde uly nebit tegmili peýda bolupdyr. Berlen masştabdan we degişli ölçeg işlerini ýerine ýetirip, nebit tegmiliniň meýdanyny tapyň.

3.14. Mellek perimetri 48 *m* bolan kwadrat şeklinde. Ol 8 deň gönüburçluk şeklindäki uçastoklara bölünen. Emele gelen gönüburçly uçastoklaryň a) taraplaryny; b) meýdanyny anyklaň. Uçastoklaryň meýdany mellegiň meýdanyndan näçe göterim kiçi?

3.15. Perimetri 20 *m*, uzynlygy ininden 1,5 esse uzyn bolan gönüburçluk şeklindäki mellek kiçi uçastoklara bölünen. Eger uçastoklar a) kwadrat; b) gönüburçluk şeklinde bolsa, olaryň arasynda meýdany iň uly bolanynyň ölçeglerini anyklaň.







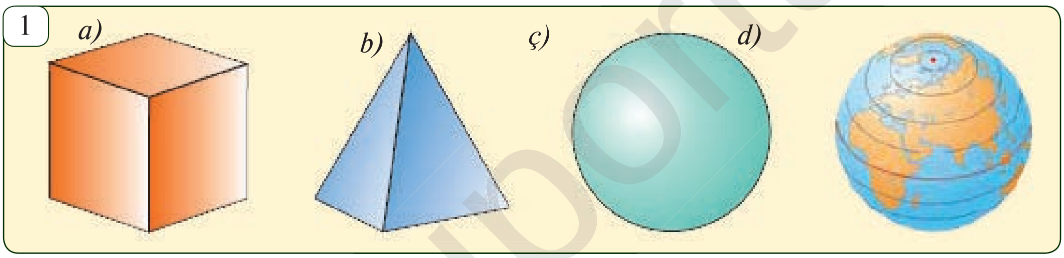
4 3D-GEOMETRIÝA – GIŇIŞLIKDÄKI JISIMLERDE PLANIMETRIÝA MESELELERI

Mälim bolşy ýaly, tekiz şekilleri geometriýanyň planimetriýa bölümi, giňişlikdäki jisimleri stereometriýa bölümi öwrenýär. Meselem, gönüburçluk - tekiz şekil bolup, onuň uzynlygy we ini, ýagny ikiölçegi bar. Parallelepiped bolsa giňişlikdäki şekil bolup, onuň uzynlygy, ini we beýikligi, ýagny üçölçegi bar.

Giňişlikdäki jisimler barada öňki synplarda düşünjä eýe bolansyňyz. Olary 10-11-nji synplarda stereometriýa kursunda giňişleýin, ulgamly ýagdaýda öwrenersiňiz. Şeýle bolsa-da, stereometriýanyň ençeme meseleleri bar bolup, olary diňe planimetriýanyň kömeginde-de çözmek mümkin. Aşakda planimetriýa degişli şeýle 3D (3 demention - 3 ölçegli) geometrik meseleleri getirýäris. Giňişlikdäki jisimler baradaky esasy düşünjeleri gysgaça ýatladyp geçmegi makul bildik.

Giňişligiň çäklenen bölegi *giňişlikdäki jisim* diýlip atlandyrylýar. Giňişlikdäki jisimiň araçägine (gabygyna) onuň *üsti* diýilýär. Meselem, giňişlikdäki şekil - kubuň üsti 6 ta kwadratdan, şaryň üsti sferadan ybarat bolýar.

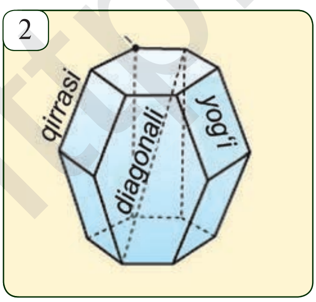
Iki üstüň kesişmeginden çyzyk emele gelýär. Meselem, 1-nji suratdaky kubuň we

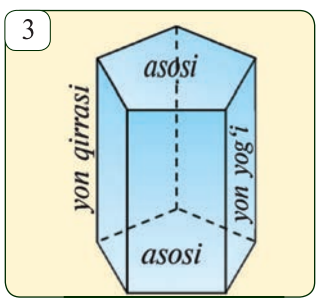


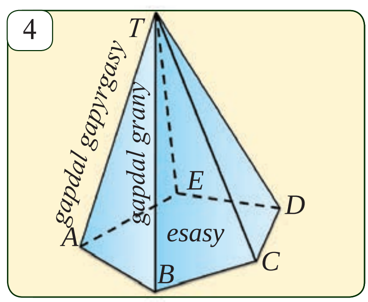
piramidanyň gapyrgalary şeýle tekizlikleriň kesişmeginden emele gelen. Sferanyň we tekizligiň kesişmeginden bolsa töwerek emele gelýär.

Iki çyzygyň kesişmeginden nokat emele gelýär. Meselem, 1-nji suratdaky kubuň we piramidanyň gapyrgalarynyň kesişmeginden nokatlar, ýagny olaryň depeleri emele gelýär.

Köpgranlyk diýip tekiz köpburçluklar bilen çäklenen jisime aýdylýar. Tekiz köpburçluklara bu *köpgranlygyň granlary*, köpburçluklaryň depelerine *köpgranlygyň depeleri*, taraplarya bolsa *köpgranlygyň gapyrgalary* diýilýär. Bir grana degişli bolmadyk depeleri birleşdirýän kesime *köpgranlygyň diagonaly* diýilýär (2-nji surat).





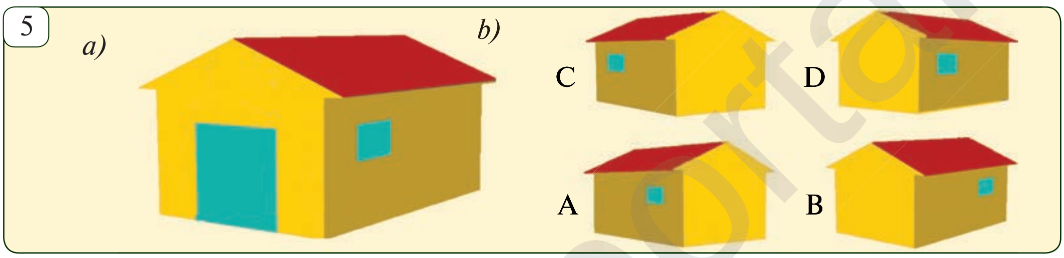


Prizma diýip iki grany deň köpburçlukdan, galan granlary bolsa parallelogramlardan ybarat köpgranlyga aýdylýar (3-nji surat). Deň granlar prizmanyň *esaslary*, parallelogramlara bolsa onuň *gapdal granlary* diýilýär. Esasynyň taraplarynyň sanyna garap prizmalar *üçburçly, dörtburçly we başga n-burçly prizmalar* diýilýär.

Piramida diýip bir grany köpburçlukdan, galan granlary bolsa bir depä eýe üçburçluklardan ybarat köpgranlyga aýdylýar. Köpburçluk piramidanyň *esasy*, üçburçluklar bolsa onuň *gapdal granlary* diýlip atlandyrylýar. 4-nji suratda *TABCDE* bäşburçly piramida görkezilen. *ABCDE* bäşburçly piramidanyň esasy, *ATB, BTC, CTD, DTE* we *ETA* üçburçluklar - onuň gapdal granlary, T - bolsa onuň depesi.

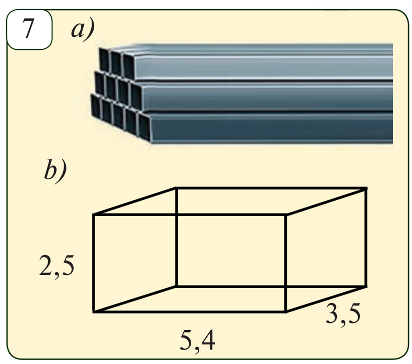
4.1 5-nji *a* suratda garaž görkezilen. 5-nji *b* suratda bolsa onuň dürli ýerden görnüşleri berlen. Olardan diňe biri ýokardaky garaža degişli. Bu görnüş haýsy?

4.2. 6-njy *a* we 6-njy *b* suratda binanyň gapdal tarapyndan garanda görnen şekilleri getirilen. 6-njy *ç* suratda bolsa binanyň depesinden görnüşi we oňa garalan dört nokatlaryň orny belgilenen. Haýsy nokatdan bina garanda 1) 6-njy *a* suratdaky; 2) 6-njy *b* suratdaky şekilleri görmek mümkin?

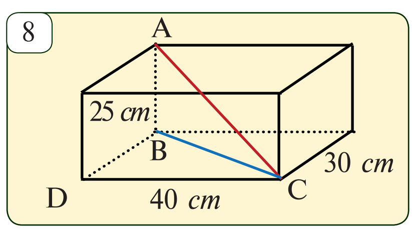


4.3. 12 sany 6 metrlik turbalar bar (7-nji *a* surat). Olardan ini 3,5 *m*, uzynlygy 5,4 *m* we beýikligi 2,5 *m* bolan gönüburçly parallelepiped şeklindäki garažyň karkasyny taýýarlamaly (7-nji *b* surat). Turbalar gerekli uzynlykdaky böleklere kesilip, soň kebşirlenýär.

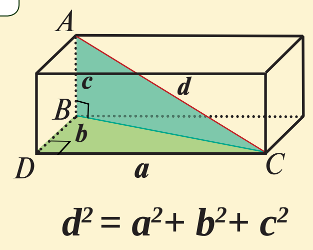
Iň tygşytly wariantda kesende bu karkas üçin näçe turba harçlanar? Şeýle kesende näçe turba çykynda çykar?



4.4. Käbir howa ýollary kompaniýalarynyň samolýotlaryna alyp münülýän ýolagçylaryň çemodanynyň diagonalynyň uzynlygy 56 *cm*-dan uly bolmaly däl. 8-nji suratda görkezilen gönüburçly parallelepiped şeklindäki,ölçegleri 40 *cm* × 30 *cm* × 25 *cm* bolan çemodany samolýota alyp münmek mümkinmi?



9

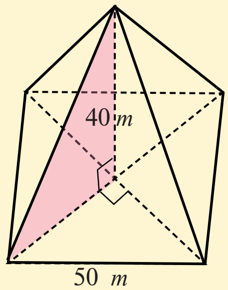


Çözülişi: Ilki çemodanyň esasyndaky BC kesimiň uzynlygyny tapýarys. Pifagoryň teoremasyna görä: $BC^2 = 40^2 + 30^2$.
ABC üçburçluk gönüburçly üçburçluk. Ýene Pifagoryň teoremasyndan peýdalanyp, çemodanyň diagonalyny tapýarys:
$AC^2 = AB^2 + BC^2$,
$AC^2 = 25^2 + 40^2 + 30^2 = 3125$. $AC = 55{,}9$ cm.
Jogaby: Mümkin, çünki $AC < 56$ cm.

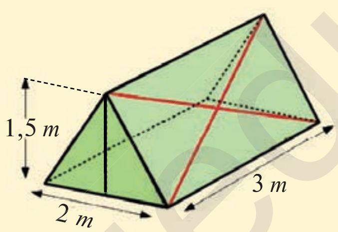
Ýokardaky meseläniň çözüwinden umumy ýagdaýda aşakdaky ajaýyp häsiýet gelip çykýar. Ony Pifagoryň teoremasynyň giňişlikdäki analogy (meňzeşi) hem diýýärler. Bu häsiýeti özbaşdak subut etjek boluň (9-njy surat).

Teorema. ***Gönüburçly parallelepipediň diagonalynyň kwadraty onuň üçölçegleriniň (uzynlygy, ini we beýikligi) kwadratlarynyň jemine deň.***

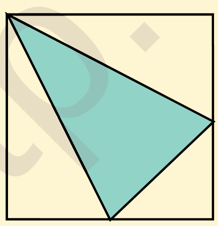
10



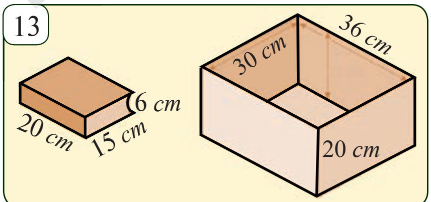
11



12



13



4.5. 10-njy suratda görkezilen dogry piramidanyň beýikligi 40 *m*-e deň, esasy bolsa tarapy 50 *m* bolan kwadratdan ybarat. Piramidanyň gapdal gapyrgasyny tapyň.

4.6. 11-nji suratda görkezilen prizma şeklindäki çadyry dikmek üçin näçe material gerek bolar?

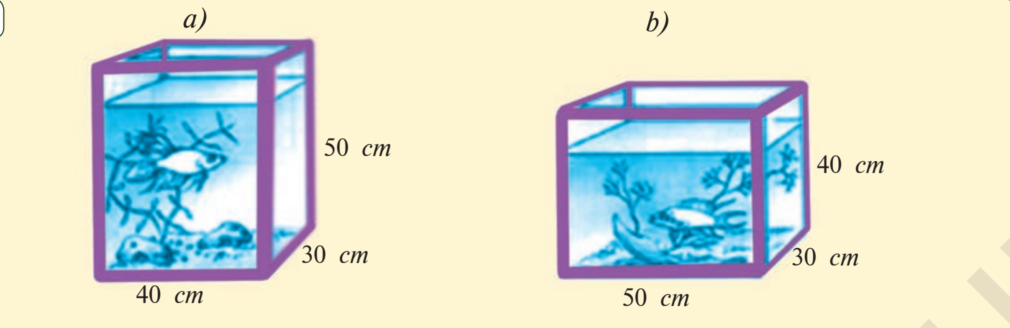
4.7. Tarapy 8 *cm*-e deň bolan kwadrat şeklindäki listi 12-nji suratda görkezilişi ýaly edip epläp piramida alyndy.
Piramidanyň göwrümini tapyň.

4.8. Gönüburçly parallelepiped şeklindäki gaby hiç hili ölçeg esbaplaryndan peýdalanmazdan, hiç hili hasaplamalary ýerine ýetirmezden nähili edip ýarysyna çenli suw bilen doldurmak mümkin? Egerebyň uzynlygy 4 *cm*, ini bolsa beýikliginden 0,5 *cm* uzyn, beýikligi bolsa uzynlygynyň 37,7 %-ni tutsa, gapdaky suwuň göwrümini hasaplaň.

4.9. Birmeňzeş ölçegdäki kitaplary sandyjak salmaly (13-nji surat). Bu sandyjak näçe kitap sygar?

4.10. Iki akwariuma ýokarky gyrasyndan 10 *cm* pes edip suw guýuldy (*14-nji surat*). Haýsy akwariumda suw köp?

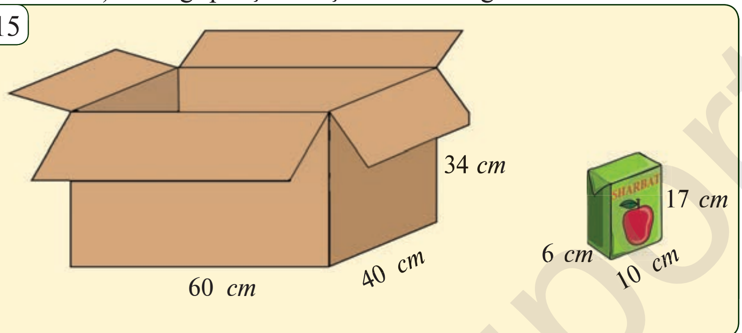
14



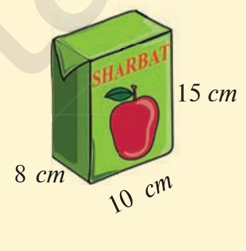
4.11. Guta näçe paket miwe şerbeti sygar (*15-nji surat*)?

4.12. 1 litrlik miwe şerbetiniň paketi gönüburçly parallelepiped şeklinde (*16-njy surat*). Bir gap üçin näçe material gerek bolar?

15



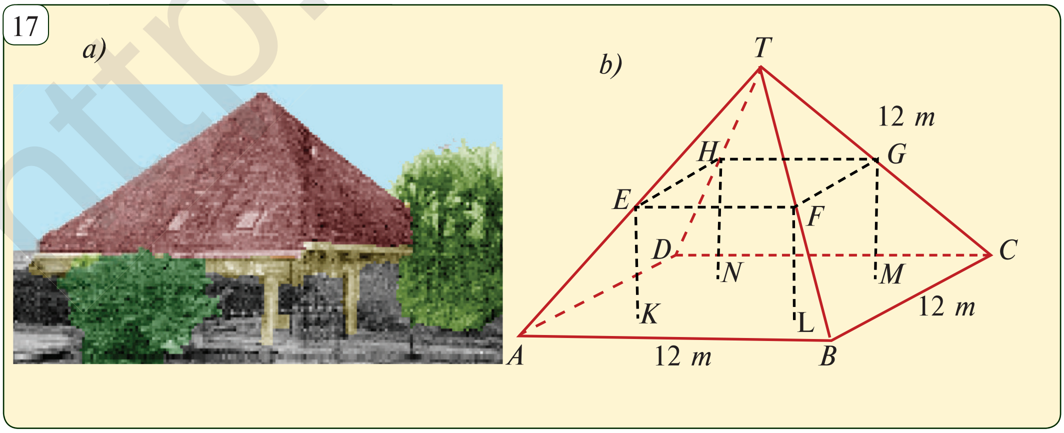
16



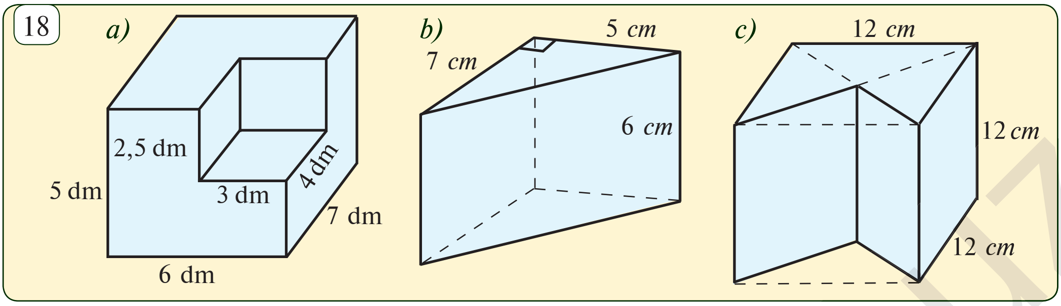
4.13. 17-nji *a* suratda görkezilen öýüň üçegi piramida şeklinde. Aşakda okuwçylar tarapyndan bu öýüň çyzgysy (matematiki modeli) çyzylan (17-nji *b* surat) we käbir kesimleriň uzynlygy görkezilen. Çyzga görä üçegiň esasy *ABCD* kwadrat şeklinde. Üçegiň gapyrgalary *EFGHKLMN* gönüburçly parallelepiped şeklindäki beton bloga direlen: *E* - *AT* gapyrganyň, *F* - *BT* gapyrganyň, *G* - *CT* gapyrganyň we *H* - *DT* gapyrganyň ortasy. Piramidanyň ähli gapyrgalarynyň uzynlygy 12 *m*.

1. Üçegiň esasy *ABCD* kwadratyň meýdanyny tapyň.
2. Beton bloguň tarapy - *EF* kesimiň uzynlygyny tapyň.

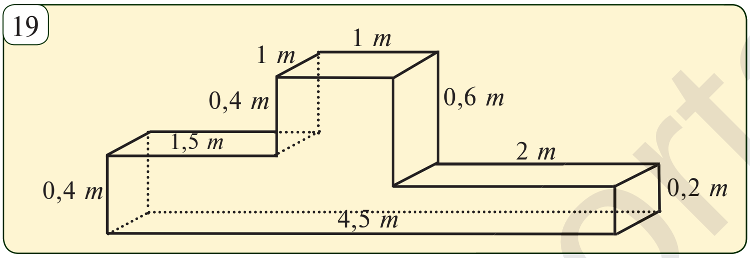
17

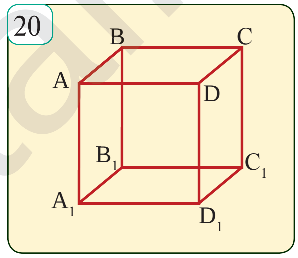


4.14*. 18-nji suratda görkezilen agaç bölekleriniň göwrümini hasaplaň.

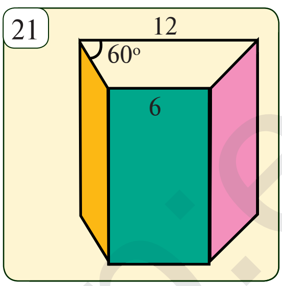


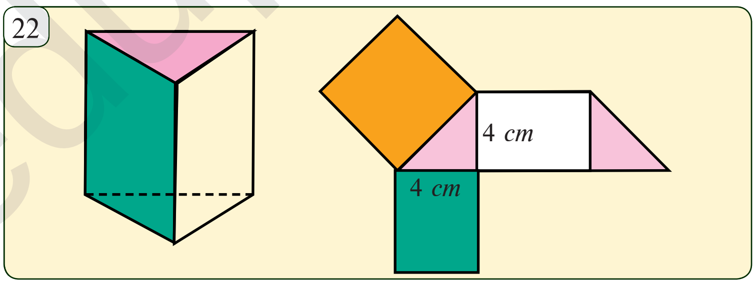
4.15. 19-njy suratda sport arenasyndaky ýeňijilik sypasy görkezilen. Berlenlerden peýdalanyp, onuň göwrümini tapyň (ähli iki granly burçlar göni.)

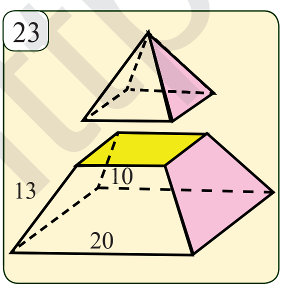




4.16. 20-nji suratda gönüburçly parallelepipediň AA_1D_1D granynyň perimetri 20 *cm*, $ABCD$ grany - perimetri 16 *cm* bolan kwadratdan ybarat. a) $ABCC_1D_1A_1$ döwük çyzygyň uzynlygyny; b) DD_1C_1C granyň perimetrini we meýdanyny; ç) parallelepipediň göwrümini tapyň.





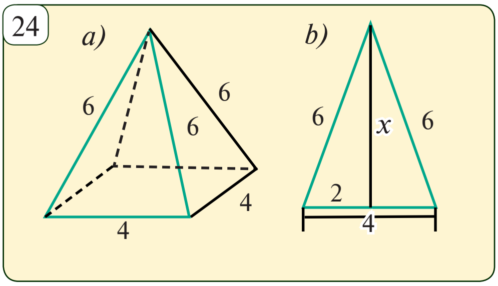


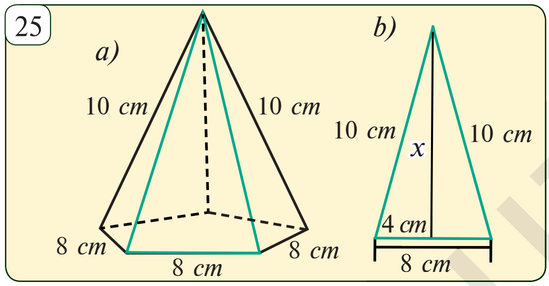
4.17. 21-nji suratda görkezilen dogry prizmanyň esasy deňýanly trapesiýadan ybarat. Trapesiýanyň esaslary 12 *cm* we 6 *cm*, esasyndaky ýiti burçlaryndan biri 60°-a deň. Eger prizmanyň uly grany kwadratdan ybarat bolsa, onuň doly üstüniň meýdanyny tapyň.

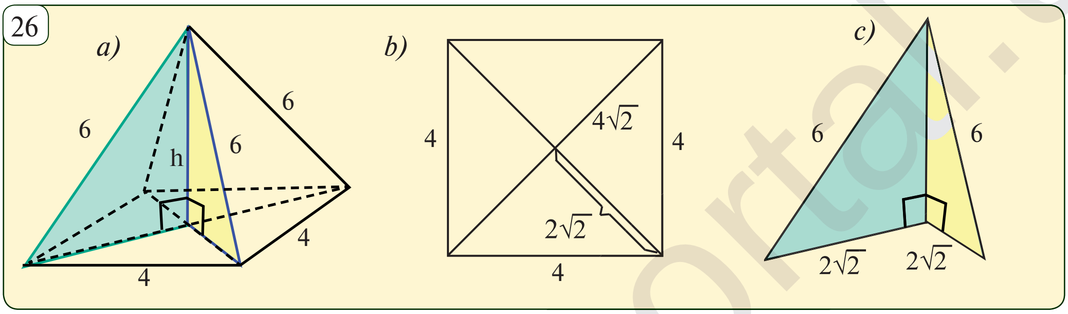
4.18. 22-nji suratda prizma we onuň ýaýylmasy görkezilen. Eger prizmanyň uly grany kwadratdan ybarat bolsa, onuň doly üstüniň meýdanyny tapyň.

4.19. 23-nji suratdaky gönüburçly piramidanyň esasyna parallel bolan tekizlik bilen kesilende, kesilen piramida emele geldi. Kesilen piramidanyň esaslarynyň tarapy 20 *cm* we 10 *cm*, gapdal gapyrgasy 13 *cm* bolsa, onuň doly üstüni tapyň.

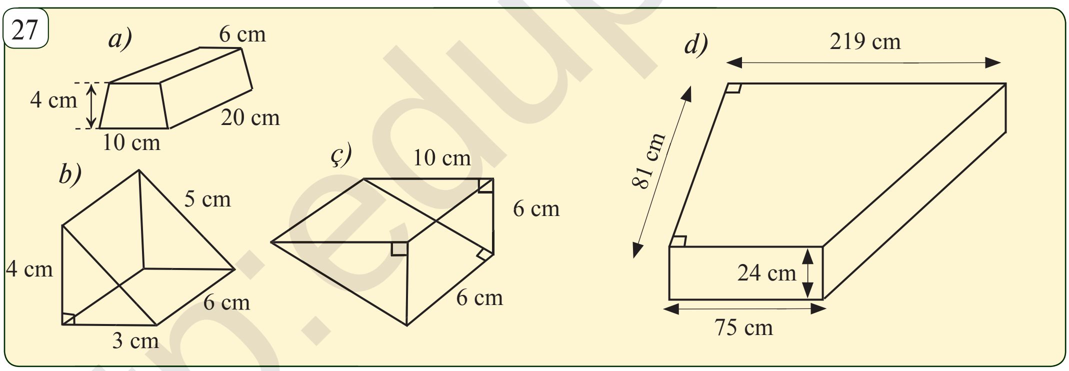
4.20. 24-26-njy suratlarda berlen maglumatlar we kömekçi çyzgylar esasynda näbelli ululyklary tapyň.

24


25


26


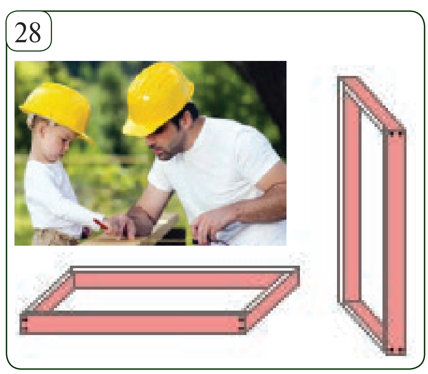
4.21. 27-nji suratda berlen maglumatlar esasynda köpgranlyklaryň doly üstüni we göwrümini tapyň.

27


Geometriýa we neçjarlyk

Uzynlygy 2 *m* 20 *cm*, ini 12 *cm* we galyňlygy 2 *cm* bolan reýkalardan atasy we ogly ini 1 *m* uzynlygy 1 *m* 80 *cm* bolan çarçuwa ýasamakçy.

1. Bu çarçuwany ýasamagyň planyny düzüň.
2. Ýasalan çarçuwanyň gönüburçluk şeklinde bolýandygyny a) burçly çyzgyjyň; b) ruletkanyň kömeginde nähili barlamak mümkin?
3. 4 sany çarçuwa ýasamak üçin näçe sany reýka talap edilýär? (28-nji surat).

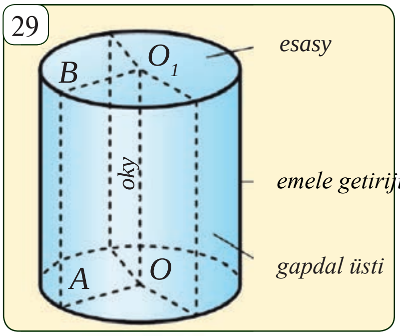
28


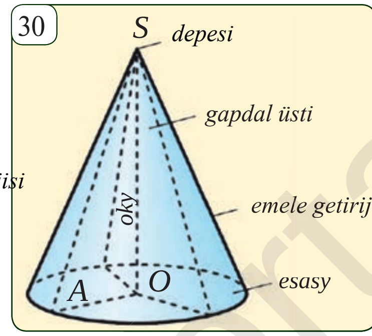
Giňişlikdäki figuralaryň ýene möhüm synplaryndan biri - bu aýlanma jisimleridir. Olara silindr, konus we şar girýär.

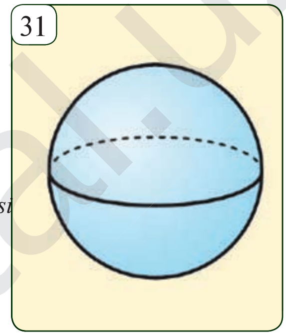
Gönüburçlugy bir tarapynyň daşyndan aýlamakdan emele gelen jisime *silindr* diýilýär. 29-njy suratda silindriň elementleri: esaslary, emele getirijisi, oky, we gapdal üsti görkezilen.

Gönüburçly üçburçlugy bir katetiniň daşyndan aýlamakdan emele gelen jisime *konus* diýilýär. 30-njy suratda konusyň depesi, gapdal üsti, emele getirijisi we esasy görkezilen.

Tegelegiň öz diametriniň daşyndan aýlanmagyndan emele gelen jisime *şar*

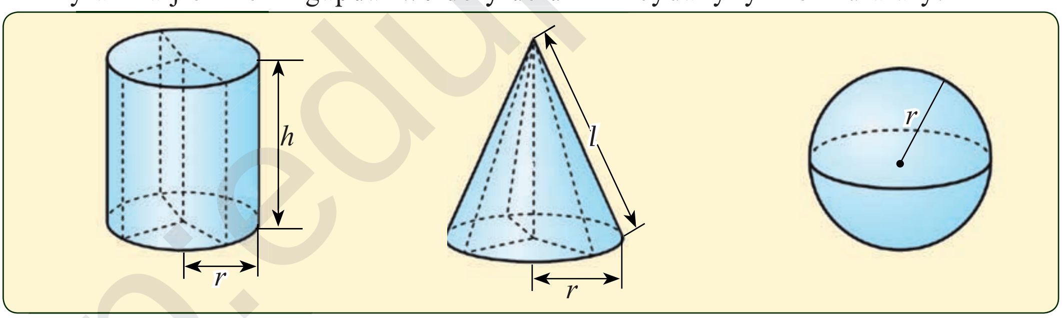






diýilýär (31-nji surat). Munda töwerek emele getiren üst *sfera* diýlip atlandyrylýar. Görnüşi ýaly, şaryň üsti sferadan ybarat bolýar. Sferanyň merkezinden onuň islendik nokadyna çenli bolan aralyk onuň radiusyny kesgitleýär.

Aýlanma jisimleriň gapdal we doly üstüniň meýdanynyň formulalary:



Silindr

$S_{gapd} = 2\,\pi r h$

$S_{doly} = 2\,S_{esas} + S_{gapd} =$

$= 2\,\pi r^2 + 2\,\pi r h$

Konus

$S_{gapd} = \pi r l$

$S_{doly} = S_{esas} + S_{gapd} =$

$= \pi r^2 + \pi r l$

Şar

$S = 4\,\pi r^2$

1-nji mesele

$h = 5$ *cm*, $r = 6$ *cm* bolsa,

$S_{gapd} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h \approx$

$\approx 2 \cdot 3,14 \cdot 5 \cdot 6 = 565\,(cm^2).$

2-nji mesele

$r = 5$ *cm*, $l = 12$ *cm* bolsa,

$S_{doly} = \pi r^2 + \pi r l \approx$

$\approx 3,14 \cdot 5^2 + 3,14 \cdot 5 \cdot 12 =$

$= 267\,(cm^2).$

3-nji mesele

$r = 8$ *cm* bolsa,

$S = 4 \cdot \pi r^2 \approx$

$\approx 4 \cdot 3,14 \cdot 8^2 =$

$= 803,84\,(cm^2).$

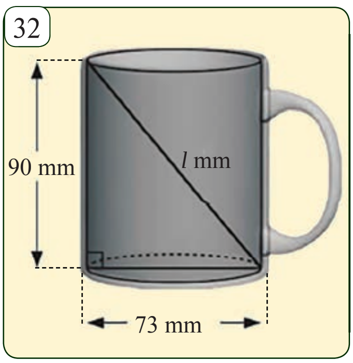
Aşakda planimetriýanyň kömeginde çözülýän aýlanma jisimlere degişli meselelere garap geçýäris.

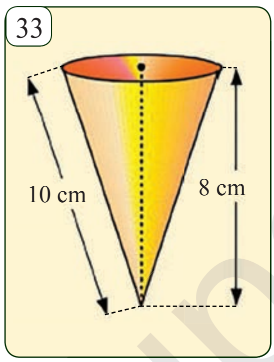
4.22. Şaryň merkezinden onuň üstünde ýatýan 4 sany nokada çenli bolan aralyklaryň jemi 24 *cm*-e deň. Şaryň diametrini tapyň.

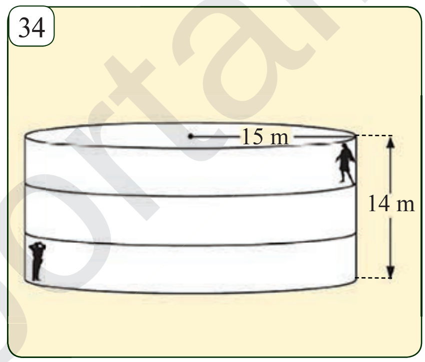
4.23. Aşrafyň finjonynyň (kofe içýän gaby) beýikligi 90 *mm*, esasynyň diametri 73 *mm*-e deň (32-nji surat). Kofe salnan şeker ýa-da süýdi garyşdyran wagtynda Aşrafyň eli bişmez ýaly çemçäniň uzynlygy azyndan näçe bolmaly?

Çözülişi: Çemçäniň uzynlygyny 32-nji suratdaky ýaly l diýip alsak, onda Pifagoryň teoremasyna görä: $l^2 = 73^2 + 90^2 = 13429$ -a eýe bolarys. Mundan $l = 115{,}9$ *mm*.

Jogaby: Çemçäniň uzynlygy 116 *mm*-den kem bolmaly däl.



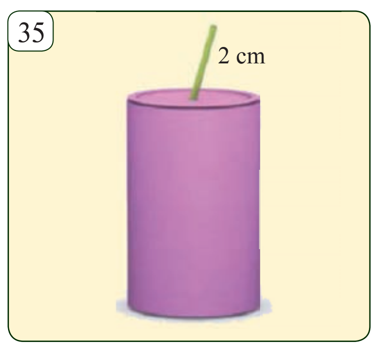




4.24. 33-nji suratda berlenlerden peýdalanyp, konus şeklindäki doňdurmanyň esasynyň radiusyny tapyň. Onuň sygymyny tapyň.

4.25. 34-nji suratda görkezilen London şäherindäki Şekspir Globus teatry silindr şeklinde. Suratda berlenlerden peýdalanyp, teatryň aşaky burçundaky aktýoryň sesi ýokarda duran tomaşaça ýetip barmagy üçin näçe aralygy geçýändigini anyklaň?

4.26. 35-nji suratda görkezilen silindr şeklindäki gabyň beýikligi 12 *cm*, giňligi bolsa 8 *cm*. Depe esasynyň edil ortasynda deşik bar. Bu gapdan içgi içmek üçin niýetlenen turbajygyň uzynlygy näçe bolmaly? Turbajygyň görnüp duran böleginiň uzynlygy 2 *cm*.



4.27. Misden ýasalan beýikligi 30 *cm* bolan konus eredilip, ondan silindr ýasaldy. Eger konusyň we silindriň esaslary deň töwereklerden ybarat bolsa, emele gelen silindriň beýikligini tapyň.

5 TASLAMA IŞINI ÝERINE ÝETIRMEK BOÝUNÇA GÖRKEZMELER

Taslama işi temasynyň üstünde okuwçylar aýry-aýry ýa-da 3-4 adamlyk topar bolup işläp bilerler. Taslama işi okuw ýylynyň ahyrynda geçirilýän gorag (kiçi konferensiýa) bilen tamamlanýar. Taslama işiniň üstünde işlemek aşakdaky okuw işlerini öz içine almagy mümkin: gözleg işlerini planlaşdyrmak, wezipeleri özara paýlaşmak, okuw maksatlaryny goýmak, gerekli maglumatlary gözläp tapmak, tema degişli meseleli ýagdaýyň çözüwlerini gözlemek, olardan iň makulyny saýlamak we ony esaslandyrmak, zerur ýagdaýlarda soraglar ýa-da tejribeler geçirmek, taslama işi netijeleri boýunça hasabat taýýarlamak, öz işlerini derňemek we bahalamak, taslama işiniň goragy üçin tanyşdyrylyş taýýarlamak we ony goramak. Okuwçylar taslama işi boýunça gözleglerini ýylyň dowamynda adatda dersden daşary özbaşdak işlerde alyp barýarlar.

Taslama işiniň temalary amaly, nazary we barlag häsiýetli bolmagy mümkin. Amaly işde geometriýadan özleşdirilen bilimler we endikler gündelik ýagdaýlardaky meseleleri (keýsleri) çözende ulanylýar. Nazary taslama işlerinde bolsa geometriýanyň

36

käbir temasy çuňrak öwrenilýär. Barlag işlerinde bolsa käbir standart däl geometrik mesele ýa-da durmuşdan mesele çözmegiň üstünde kiçi ylmy gözleg alnyp barylýar.

Amaly taslama işiniň nusgasy

Taslama ýumşy. 36-njy suratda görkezilen daçadaky öýüň diwarlaryny boýamaly. Jaý gurmagyň plany (ýumşa goşmaça edilýär) esasynda bu işi ýerine ýetirmek üçin iň tygşytly (arzan) taslamany işläp taýýarlaň.

Taslama işini ýerine ýetirende okuwçylar öýüň planyny özbaşdak öwrenip çykýarlar. Wezipeleri anyklap, plan düzmekde we işleri özara paýlaşýarlar. Ilki, boýalýan meýdany anyklap alýarlar. Boýamak üçin näçe boýag gerekdigini sorap anyklaýarlar. Birnäçe boýag görnüşleri boýunça hasap-hesip işlerini geçirýärler. Haýsy boýag ulanylsa, maksada laýyk bolýandygyny anyklap esaslandyrýarlar. Saýlanan boýag boýunça ähli hasap-hesip işlerini ýerine ýetirýärler we taslama işini hem-de ol boýunça tanyşdyrylyş taýýarlaýarlar. *Düşündiriş: Suratda öýüň planynyň hemmesi getirilmedik.*

I BAP

V GEOMETRIK ÖZ-ÖZÜNE ÖWRÜLMELER WE MEŇZEŞLIK

Şu baby öwrenmek netijesinde siz aşakdaky bilimlere we amaly endiklere eýe bolarsyňyz:

Bilimler:

√ *meňzeş figuralaryň kesgitlemesini we belgilenişini bilmek;*
√ *üçburçluklaryň meňzeşlik nyşanlaryny bilmek;*
√ *gomotetiýa düşünjesini bilmek.*

Amaly endikler:

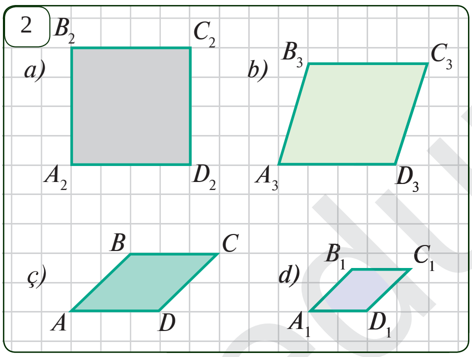
√ *iki meňzeş üçburçluklardan laýyk elementleri tapyp bilmek;*
√ *üçburçluklaryň meňzeşlik nyşanlaryny subut etmäge we hasaplamaga degişli meseleleri çözende ulanyp bilmek;*
√ *gomotetiýadan peýdalanyp, meňzeş köpburçluklary gurup bilmek.*

6 KÖPBURÇLUKLARYŇ MEŇZEŞLIGI

1

Gündelik durmuşda deň şekillerden daşary şekili (görnüşi) birmeňzeş, ýöne ölçegleri dürlüçe bolan şekillere köp duşýarys. Taryh we geografiýa ylymlarynda dürli masştabda işlenen kartalardan peýdalanansyňyz. Synp doskasyna asylýan we dersliklerde görkezilen respublikamyzyň kartalary dürli ölçegde, ýöne olar birmeňzeş şekilde (görnüşde). Şonuň ýaly-da, bir fotolentadan dürli ölçegdäki fotosuratlar taýýarlanýar. Bu suratlaryň ölçegleri dürlüçe bolsa-da, birmeňzeş görnüşde, ýagny olar bir-birine meňzeýär *(1-nji surat)*.

2



Gönükme. 2-nji suratda dört romb şekillilendirilen. Olardan diňe *ç*) we *d*) romblar birmeňzeş görnüşe eýe. Bu romblar nämesi bilen başga romblardan tapawutlanyp dur?

Geliň, muny bilelikde anyklalyň.

1. Suratdan görnüşi ýaly, $AD=3$, $A_1D_1=2$. Rombuň taraplary deň bolany üçin,

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CD}{C_1D_1}=\frac{AD}{A_1D_1}=\frac{3}{2}=1,5$$

deňligi alarys. Bonda romblaryň degişli taraplary proporsional diýilýär.

2. $ABCD$ we $A_1B_1C_1D_1$ romblarda $\angle A=\angle A_1=45°$, $\angle B=\angle B_1=135°$, $\angle C=\angle C_1=45°$, $\angle D=\angle D_1=135°$. Bonda romblaryň degişli burçlary özara deň diýilýär.

Şeýlelikde, bu romblaryň bir-birine meňzeşliginiň sebäbi — degişli taraplarynyň proporsionallygy we degişli burçlarynyň deňligi, diýip bileris. Islendik köpburçluklaryň meňzeşligi düşünjesi hem şuňa meňzeş girizilýär.

Iki köpburçluk (bäşburçluk) $ABCDE$ we $A_1B_1C_1D_1E_1$ ýaly belgilenen bolup, degişlilikde $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$, $\angle C=\angle C_1$, $\angle D=\angle D_1$, $\angle E=\angle E_1$ ýagny degişli burçlary özara deň bolsun. Onda AB we A_1B_1, BC we B_1C_1, CD we C_1D_1, DE we D_1E_1, EA we E_1A_1 taraplara köpburçlugyň *degişli taraplary* diýilýär.

Kesgitleme. Iki köpburçlugyň burçlary degişlilikde özara deň, ähli degişli taraplary bolsa özara proporsional bolsa, şeýle köpburçluklar *meňzeş köpburçluklar* diýlip atlandyrylýar *(3-nji surat)*.

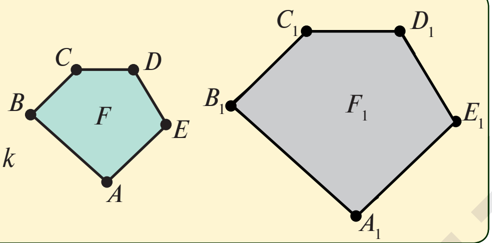
Köpburçluklar meňzeşligi $\backsim$ belgisi bilen görkezilýär.

3

Degişli burçlar deň

$$F \backsim F_1 \begin{cases} \angle A = \angle A_1,\ \angle B = \angle B_1,\ \angle C = \angle C_1, \\ \angle D = \angle D_1,\ \angle E = \angle E_1 \\ \dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{B_1C_1}{BC} = \dfrac{C_1D_1}{CD} = \dfrac{D_1E_1}{DE} = \dfrac{E_1A_1}{EA} = k \end{cases}$$

Degişli taraplar proporsional



Meňzeş köpburçluklaryň degişli taraplarynyň gatnaşygyna deň bolan k sana bu köpburçluklaryň *meňzeşlik koeffisiýenti* diýilýär.

1-nji mesele. 4-nji suratdaky köpburçluklaryň meňzeşligi mälim bolsa, näbelli uzynlygy tapyň.

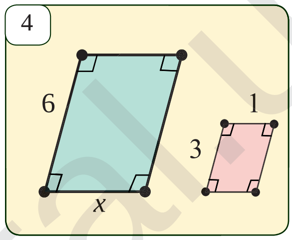
Çözülişi: Bu köpburçluklaryň meňzeşliginden olaryň degişli taraplarynyň proporsionaldygy gelip çykýar.

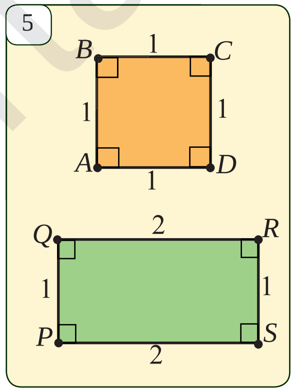
Diýmek, $\dfrac{x}{6} = \dfrac{1}{3}$. Mundan $x = 6 : 3 = 2$ bolýandygyny tapýarys. *Jogaby.* $x = 2$.

2-nji mesele. 5-nji suratda görkezilen dörtburçluklar meňzeşmi? Näme üçin?

Çözülişi: Ýok. Çünki, olaryň degişli burçlary deň (90°) bolsa-da, degişli taraplary proporsional däl:

$$\frac{AB}{PQ} = 1 \neq \frac{BC}{QR} = \frac{1}{2}$$





Meseleler we ýumuşlar

6.1. Meňzeşlik koeffisiýenti näme we ol nähili anyklanýar?

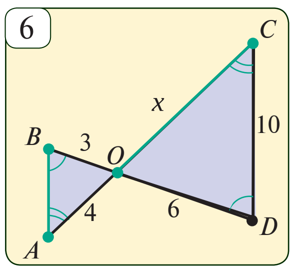
6.2. Eger ABC we DEF üçburçluklarda $\angle A = 105°$, $\angle B = 35°$, $\angle E = 105°$, $\angle F = 40°$, $AC = 4{,}4\ cm$, $AB = 5{,}2\ cm$, $BC = 7{,}6\ cm$, $DE = 15{,}6\ cm$, $DF = 22{,}8\ cm$, $EF = 13{,}2\ cm$ bolsa, olar meňzeş bolarmy?

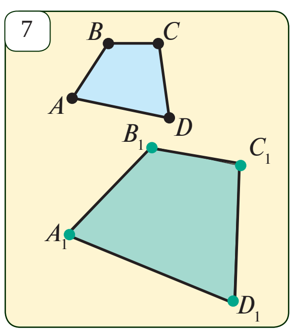
6.3. 2-nji suratda görkezilen a) we b) romblar näme sebäpden meňzeş däl? b) we ç) romblar näme?

6.4. 6-njy suratdaky ABO we CDO üçburçluklar meňzeş bolsa, AB, OC kesimleriň uzynlygyny we meňzeşlik koeffisiýentini tapyň.

6.5. 7-nji suratda $ABCD \backsim A_1B_1C_1D_1$. $AB = 24$, $BC = 18$, $CD = 30$, $AD = 54$, $B_1C_1 = 54$. A_1B_1, D_1A_1 we C_1D_1 kesimleri tapyň.

6.6*. ABC üçburçlugyň AB we AC taraplarynyň ortalary degişlilikde P we Q bolsun. $\Delta ABC \backsim \Delta APQ$ bolýandygyny subut ediň.





7 MEŇZEŞ ÜÇBURÇLUKLAR WE OLARYŇ HÄSIÝETLERI

Iň ýönekeý köpburçluk bolan üçburçluklaryň meňzeşligini öwrenýäris.

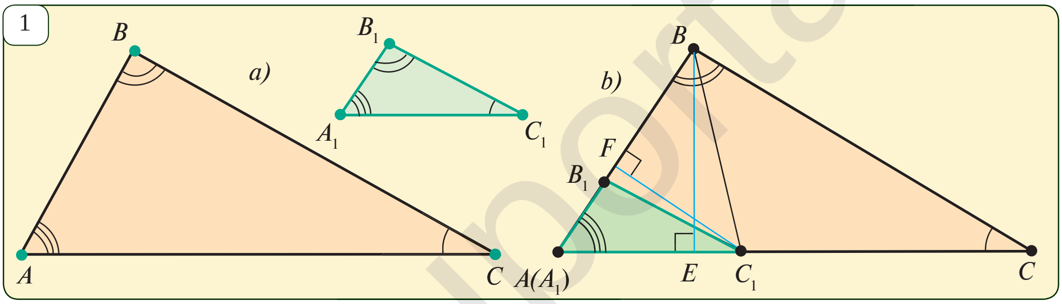
Teorema. ***Iki meňzeş üçburçlugyň perimetrleriniň gatnaşygy meňzeşlik koeffisiýentine deň.***

Bu teoremany özbaşdak subut ediň.

Teorema. ***Iki meňzeş üçburçlugyň meýdanlarynyň gatnaşygy meňzeşlik koeffisiýentiniň kwadratyna deň.***

$\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$ *(1-nji a surat)*, k — *meňzeşlik koeffisiýenti* $\Rightarrow$ $S_{ABC} : S_{A_1B_1C_1} = k^2$

Subudy. Teoremanyň şertine görä, $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$. Diýmek, köpburçluklaryň meňzeşligi kesgitlemesine görä, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C$ $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k$

1


$\angle A = \angle A_1$ bolýanlygyndan peýdalanyp, olary 1-nji *b* suratdaky ýaly üstme-üst goýýarys we degişli gurmak hem-de belgilemeleri amala aşyrýarys.

Aşakdaky üçburçluklar meýdanlaryny tapýarys we olaryň gatnaşyklaryna garaýarys:

$$\left.\begin{aligned} S_{ABC} &= \frac{AC \cdot BE}{2}; \\ S_{ABC_1} &= \frac{A_1C_1 \cdot BE}{2}; \end{aligned}\right] \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{ABC_1}} = \frac{AC}{A_1C_1} \qquad (1),$$

$$\left.\begin{aligned} S_{A_1B_1C_1} &= \frac{A_1B_1 \cdot C_1F}{2}; \\ S_{ABC_1} &= \frac{AB \cdot C_1F}{2}; \end{aligned}\right] \Rightarrow \frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC_1}} = \frac{A_1B_1}{AB} \qquad (2).$$

(1) deňligi agzama-agza (2) deňlige bölsek, deň burça eýe bolan üçburçluklaryň meýdanlarynyň gatnaşygy üçin (3) deňli $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}$ (3)

Bu ýerde şerte görä, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k$ bolýandygyny hasaba alsak,

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1} \cdot \frac{AC}{A_1C_1} = k \cdot k = k^2$$

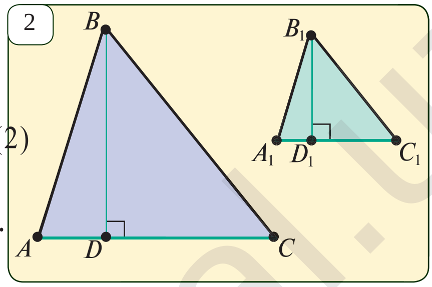
deňlik gelip çykýar. *Teorema subut edildi.*

1-nji mesele. Meňzeş üçburçluklaryň degişli taraplarynyň gatnaşygy şu taraplara geçirilen beýikliklerin gatnaşygyna deňligini subut ediň *(2-nji surat)*.

$\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1,\ BD, B_1D_1 -$ *beýiklikler* $\Rightarrow$ $\dfrac{AC}{A_1C_1} = \dfrac{BD}{B_1D_1}$

Çözülişi. Berlen üçburçluklaryň meňzeşlik koeffisiýenti k bolsun. Onda, $AC : A_1C_1 = k$; $S_{ABC} : S_{A_1B_1C_1} = k^2$ (1) bolýar. Ikinji tarapdan,

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{\frac{1}{2}AC \cdot BD}{\frac{1}{2}A_1C_1 \cdot B_1D_1} = \frac{AC}{A_1C_1} \cdot \frac{BD}{B_1D_1} = k \cdot \frac{BD}{B_1D_1} \quad (2)$$



(1) we (2) deňliklerden $k \cdot \dfrac{BD}{B_1D_1} = k^2$ ýa-da $\dfrac{BD}{B_1D_1} = k$.

Şeýlelikde, $\dfrac{BD}{B_1D_1}$ hem, $\dfrac{AC}{A_1C_1}$ gatnaşyk hem k deň, ýagny $\dfrac{AC}{A_1C_1} = \dfrac{BD}{B_1D_1}$.

Meseleler we ýumuşlar

7.1. Meňzeş üçburçluklar meýdanlary gatnaşygy baradaky teoremany aýdyň we subut ediň.

7.2. Iki meňzeş ABC we $A_1B_1C_1$ üçburçluklar berlen. Eger $S_{ABC} = 25\ cm^2$ we $S_{A_1B_1C_1} = 81\ cm^2$ bolsa, meňzeşlik koeffisiýentini tapyň.

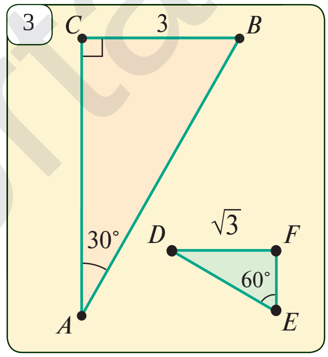
7.3. Iki meňzeş üçburçlugyň meýdanlary $65\ m^2$ we $260\ m^2$. Birinji üçburçlugyň bir tarapy $6\ m$ bolsa, ikinji üçburçlugyň oňa degişli tarapyny tapyň.

7.4. Berlen üçburçlugyň taraplary $15\ cm$, $25\ cm$ we $30\ cm$. Eger perimetri $35\ cm$ bolan üçburçluk berlen üçburçluga meňzeş bolsa, onuň taraplaryny tapyň.

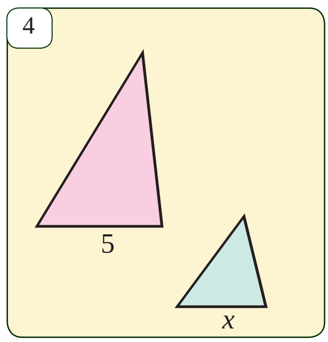
7.5. Taraplary $12\ cm$, $20\ cm$ we $13\ cm$ bolan üçburçluk berlen. Eger kiçi tarapy $9\ cm$ bolan üçburçluk berlen üçburçluga meňzeş bolsa, onuň galan taraplaryny tapyň.

7.6. $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$ we bu üçburçluklaryň degişli taraplarynyň gatnaşygy $7 : 5$-e deň. Eger ABC üçburçlugyň meýdany $A_1B_1C_1$ üçburçlugyň meýdanyndan $36\ m^2$ -a artyk bolsa, şu üçburçluklaryň meýdanlaryny tapyň.

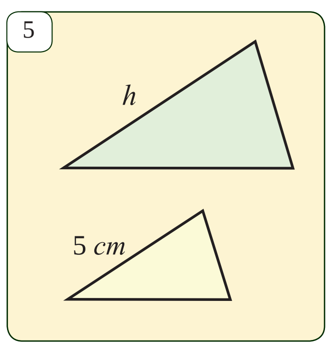
7.7. 3-nji suratda berlenlerden peýdalanyp, üçburçluklaryň meňzeş ýa-da meňzeş dälligini anyklaň.



7.8. 4-nji suratdaky üçburçluklar meňzeş we meýdanlarynyň gatnaşygy $25 : 9$ ýaly bolsa, näbelli kesimiň uzynlygyny tapyň.



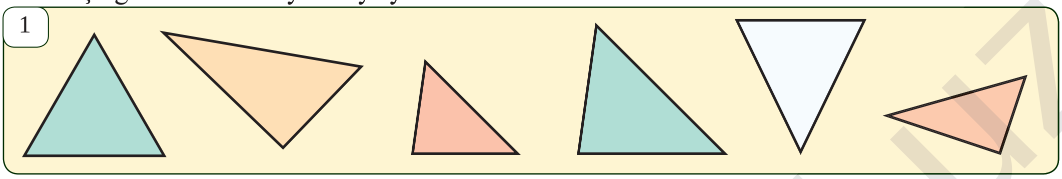
7.9. 5-nji suratdaky üçburçluklar meňzeş we $S_1 : S_2 = 49 : 25$ bolsa, näbelli tarapy tapyň.



8 ÜÇBURÇLUKLARYŇ MEŇZEŞLIGINIŇ BIRINJI NYŞANY

Ugrukdyryjy gönükme

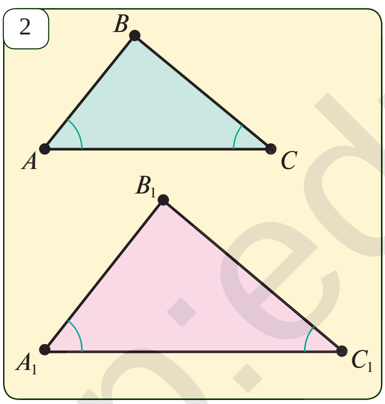
1-nji suratda görkezilen üçburçluklardan meňzeşlerini anyklaň. Olaryň meňzeşligini nähili anykladyňyz?



Kesgitlemä görä, iki üçburçlugyň meňzeşligini anyklamak üçin olar burçlarynyň deňligini we degişli taraplarynyň proporsionaldygyny barlamaly bolýar. Üçburçluklar üçin bu iş ep-esli aňsatlaşýan eken. Aşakda getirilýän teoremalar şu babatda bolup, olar "üçburçluklaryň meňzeşliginiň nyşanlary" diýlip atlandyrylýar.

Teorema. (Üçburçluklaryň meňzeşliginiň BB nyşany). ***Eger bir üçburçlugyň iki burçy ikinji üçburçlugyň iki burçuna degişlilikde deň bolsa, şeýle üçburçluklar meňzeş bolýar (2-nji surat).***

$\Delta ABC,\ \Delta A_1B_1C_1,\ \angle A=\angle A_1,\ \angle C=\angle C_1 \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$



Subudy. 1. Üçburçlugyň içki burçlarynyň jemi baradaky teorema görä,

$$\left.\begin{aligned}\angle B &= 180° - (\angle A + \angle C),\\ \angle B_1 &= 180° - (\angle A_1 + \angle C_1)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \angle B = \angle B$$

Diýmek, ABC we $A_1B_1C_1$ üçburçluklaryň burçlary degişlilikde deň.

2. Şerte görä, $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$. Deň burça eýe bolan üçburçluklaryň meýdanlarynyň gatnaşygy baradaky teorema görä

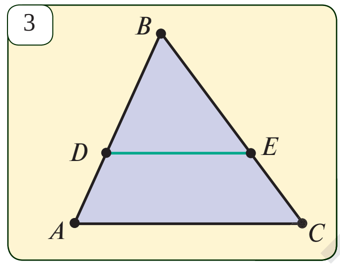
$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1} \qquad \frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{CA \cdot CB}{C_1A_1 \cdot C_1B_1}$$

Bu deňlikleriň sag böleklerini deňläp, birmeňzeş agzalar gysgaldylsa, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$ deňlik emele gelýär. Edil şunuň ýaly, $\angle A = \angle A_1$ we $\angle B = \angle B_1$ deňliklerden peýdalanyp, $\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}$ deňligi alarys. Şeýdip, ABC we $A_1B_1C_1$ üçburçluklaryň burçlary deň we degişli taraplary proporsional, ýagny bu üçburçluklar meňzeş. *Teorema subut edildi.*

Mesele. ABC üçburçlugyň iki tarapyny kesip geçýän we üçünji tarapyna parallel bolan DE göni çyzyk üçburçlukdan oňa meňzeş üçburçluk bolýandygyny subut ediň *(3-nji surat)*.

Subudy. ABC we DBE üçburçluklarda $\angle B$ — umumy, $\angle CAB = \angle EDB$ (AC we DE parallel göni çyzyklary AB kesiji bilen kesende emele gelen degişli burçlar deň bolany üçin) *(3-nji surat)*.

Diýmek, üçburçluklaryň meňzeşliginiň BB nyşanyna görä, $ABC \backsim \Delta DBE$.

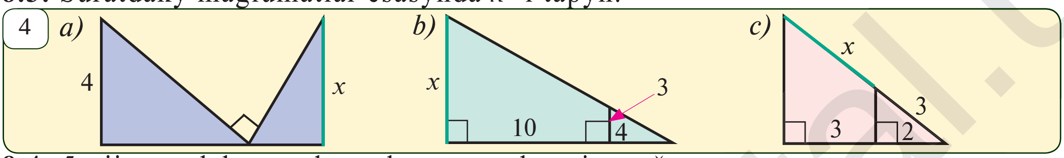


Meseleler we ýumuşlar

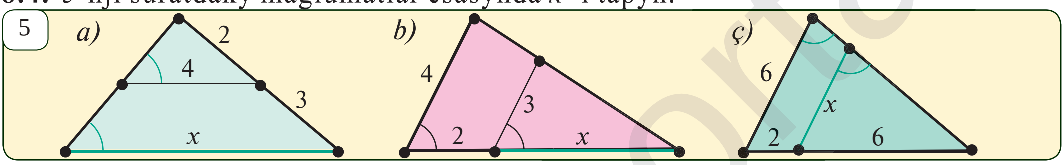
8.1. Üçburçluklaryň meňzeşliginiň kesgitlemesini we BB nyşanyny özara deňeşdiriň.

8.2. Üçburçluklaryň meňzeşliginiň BB nyşanyny subut ediň.

8.3. Suratdaky maglumatlar esasynda x -i tapyň.



8.4. 5-nji suratdaky maglumatlar esasynda x -i tapyň.

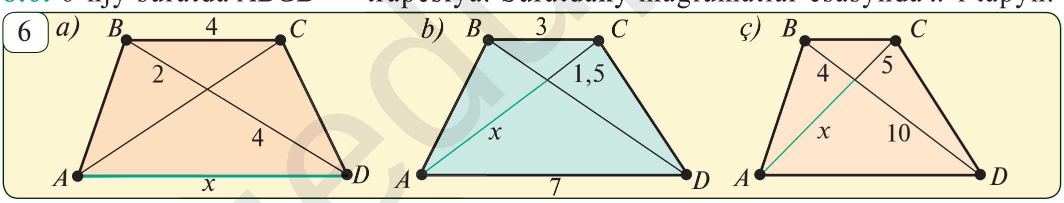


8.5. $ABCD$ parallelogramyň CD tarapynda E nokat alnan. AE we BC şöhleler F nokatda kesişýär.

a) Eger $DE = 8\ cm$, $EC = 4\ cm$, $BC = 7\ cm$, $AE = 10\ cm$ bolsa, EF we FC-ni;

b) Eger $AB = 8\ cm$, $AD = 5\ cm$, $CF = 2\ cm$ bolsa, DE we EC-ni tapyň.

8.6. 6-njy suratda $ABCD$ — trapesiýa. Suratdaky maglumatlar esasynda x-i tapyň.

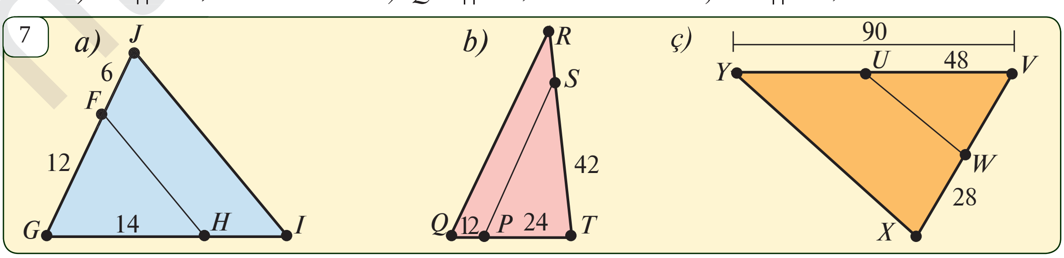


8.7*. Birden ýiti burçlary deň bolan iki gönüburçly üçburçluklar meňzeş bolýandygyny subut ediň.

8.8*. ABC üçburçlugyň AC tarapynda D nokat alnan. Eger $\angle ABC = \angle BDC$ bolsa, ABC we BDC üçburçluklar meňzeş bolýandygyny subut ediň. Şonuň ýaly-da, $3AB = 4BD$ we $BC = 9\ cm$ bolsa, AC kesimi tapyň.

8.9. 7-nji suratda berlenlere esasan näbelli kesimi tapyň.

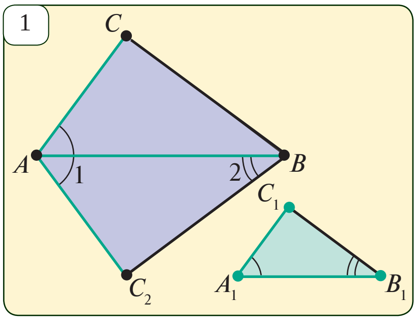
a) $IJ \parallel FH$, HI -? b) $QR \parallel PS$, RS -? d) $XY \parallel UW$, VX -?



9 ÜÇBURÇLUKLARYŇ MEŇZEŞLIGINIŇ IKINJI NYŞANY

Teorema. (Üçburçluklaryň meňzeşliginiň TBT nyşany). ***Eger bir üçburçlugyň iki tarapy ikinji üçburçlugyň iki tarapyna proporsional we bu taraplar emele getiren burçlar deň bolsa, şeýle üçburçluklar meňzeş bolýar (1-nji surat).***

$\Delta ABC,\ \Delta A_1B_1C_1,\ \angle A=\angle A_1,\ \dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{AC}{A_1C_1}$ $\Rightarrow$ $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$



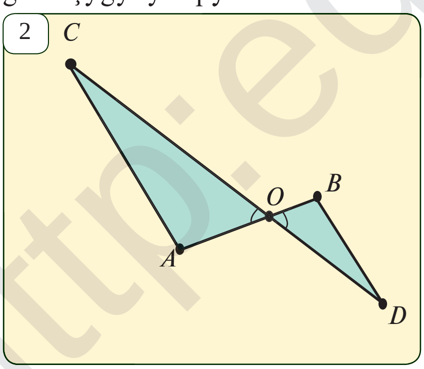
Subudy. $\angle 1=\angle A_1$, $\angle 2=\angle B_1$ bolýan edip ABC_2 üçburçluk gurýarys *(1-nji surat)*. Ol BB nyşan boýunça $A_1B_1C_1$ üçburçluga meňzeş bolýar.

$$\Delta A_1B_1C_1 \backsim \Delta ABC_2: \quad \frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC_2}{A_1C_1}$$

$$\text{Şerte görä:} \quad \frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1}$$

Bu iki deňlikden, $AC_2=AC$ bolýandygyny anyklaýarys. Onda, üçburçluklar deňliginiň TBT nyşanyna görä, $\Delta ABC=\Delta ABC_2$. Hususan-da, $\angle 2=\angle B$. Ýöne gurmaga görä, $\angle 2=\angle B_1$ -di. Diýmek, $\angle B=\angle B_1$. Onda, $\angle A=\angle A_1$ we $\angle B=\angle B_1$ bolany üçin, üçburçluklaryň meňzeşliginiň BB nyşanyna görä, $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$. *Teorema subut edildi.*

Mesele. AB we CD kesimler O nokatda kesişýär, $AO=12\ cm$, $BO=4\ cm$, $CO=30\ cm$, $DO=10\ cm$ bolsa, AOC we BOD üçburçluklaryň meýdanlarynyň gatnaşygyny tapyň.



Çözülişi: Şerte görä,

$$\left.\begin{aligned}\frac{OA}{OB}&=\frac{12}{4}=3\\ \frac{OC}{OD}&=\frac{30}{10}=3\end{aligned}\right\}\Rightarrow \frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=3.$$

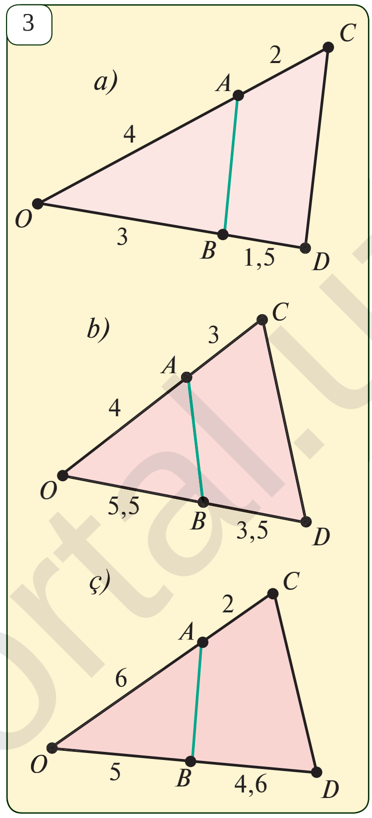
Diýmek, AOC üçburçlugyň iki tarapy BOD üçburçlugyň iki tarapyna proporsional we bu taraplaryň arasyndaky degişli burçlar wertikal burçlar bolany üçin: $\angle AOC=\angle BOD$. Şonuň üçin, üçburçluklaryň meňzeşliginiň TBT nyşanyna görä, $\Delta AOC \backsim \Delta BOD$ we meňzeşlik koeffisiýenti $k=\dfrac{OA}{OB}=3$. Indi meňzeş üçburçluklar meýdanlarynyň gatnaşygy baradaky teoremany ulanýrys: $\dfrac{S_{AOC}}{S_{BOD}}=k^2=9$. *Jogaby:* 9.

Meseleler we ýumuşlar

9.1. Üçburçluklaryň meňzeşliginiň kesgitlemesini we TBT nyşanyny özara deňeşdiriň.

9.2. Depesindäki burçlary deň bolan deňýanly üçburçluklaryň meňzeşligini a) BB; b) TBT nyşandan peýdalanyp subut ediň.

9.3. 3-nji suratda görkezilen *OAB* we *OCD* üçburçluklar meňzeş bolarmy? Eger meňzeş bolsa, bu üçburçluklaryň perimetriniň gatnaşygyny tapyň.



9.4. *AC* we *BD* şöhleler *O* nokatda kesişýär. Eger $AO : CO = BO : DO = 3$, $AB = 7$ *cm* bolsa, *CD* kesimi hem-de *AOB* we *COD* üçburçluklaryň meýdanlarynyň gatnaşygyny tapyň.

9.5. ABC we $A_1B_1C_1$ üçburçluklarda $\angle A = \angle A_1$, $AB : A_1B_1 = AC : A_1C_1 = 4 : 3$.

a) Eger *AB* kesim A_1B_1-den 5 *cm* artyk bolsa, *AB* we A_1B_1 taraplary tapyň.

b) Eger A_1B_1 kesim *AB*-den 6 *cm* kem bolsa, *AB* we A_1B_1 taraplaryny tapyň.

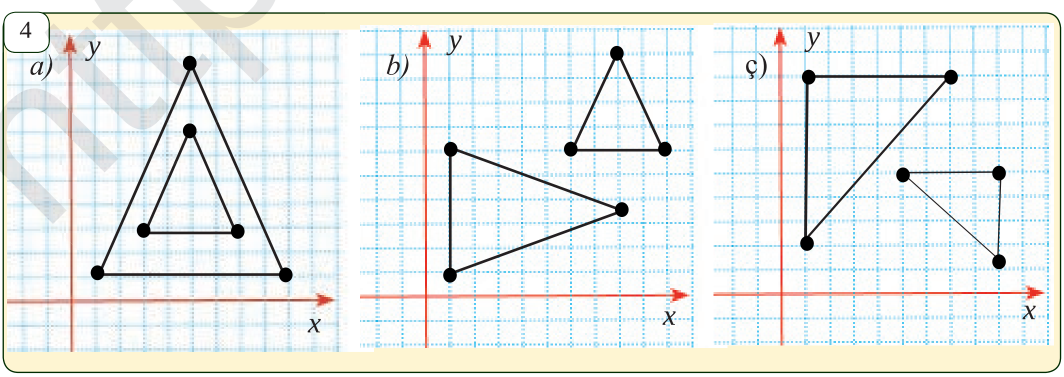
ç) Eger berlen üçburçluklaryň meýdanlarynyň jemi 400 cm^2 bolsa, üçburçluklaryň hersiniň meýdanyny tapyň.

9.6. Eger bir gönüburçly üçburçlugyň katetleri ikinji gönüburçly üçburçlugyň degişli katetlerine proporsional bolsa, bu üçburçluklaryň meňzeş bolýandygyny subut ediň.

9.7. Katetleri 3 *dm* we 4 *dm* bolan gönüburçly üçburçluk bilen bir kateti 8 *dm* we gipotenuzasy 10 *dm* bolan gönüburçly üçburçlugyň meňzeş bolýandygyny subut ediň.

9.8*. *AB* kesim we *l* göni çyzyk *O* nokatda kesişýär. *l* göni çyzyga AA_1 we BB_1 perpendikulýarlar geçirilen. Eger $AA_1 = 2$ *cm*, $OA_1 = 4$ *cm* we $OB_1 = 3$ *cm* bolsa, BB_1, *OA* we *AB* kesimleri tapyň.

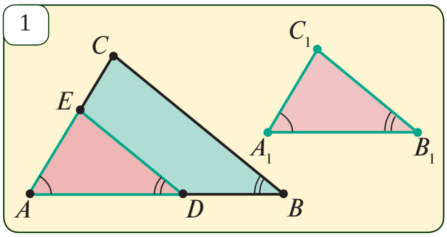
9.9*. 4-nji suratda berlen maglumatlar esasynda üçburçluklaryň meňzeşligini esaslandyryň.



10 ÜÇBURÇLUKLARYŇ MEŇZEŞLIGINIŇ ÜÇÜNJI NYŞANY

Teorema. (Üçburçluklaryň meňzeşliginiň TTT nyşany). ***Eger bir üçburçlugyň üç tarapy ikinji üçburçlugyň üç tarapyna degişlilikde proporsional bolsa, şeýle üçburçluklar meňzeş bolýar.***

$\Delta ABC,\ \Delta A_1B_1C_1,\quad \dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{BC}{B_1C_1}=\dfrac{CA}{C_1A_1}$ *(1-nji surat)* ⇒ $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$



Subudy. ABC üçburçlugyň AB tarapynda $AD = A_1B_1$ bolýan edip D nokady belgileýäris. D nokatdan BC tarapa parallel edip geçirilen göni çyzyk AC tarapy E nokatda kessin. Onda üçburçluklaryň meňzeşliginiň BB nyşanyna görä, ΔADE we ΔABC meňzeş bolýar. Onda bu meňzeşlik teoremanyň şertine görä aşakdaky deňlikler jübütine eýe bolarys:

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1} \text{ we } \frac{AB}{AD}=\frac{BC}{DE} \quad (1) \qquad \frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1} \text{ we } \frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}. \quad (2)$$

Onda $AD = A_1B_1$ bolýandygyny hasaba alsak,olaryň birinjisinden $B_1C_1 = DE$, ikinjisinden bolsa $A_1C_1 = AE$ bolýandygy gelip çykýar. Şeýdip, üçburçluklaryň deňliginiň TTT nyşanyna görä, $\Delta ADE = \Delta A_1B_1C_1$. Onda $\Delta ADE \backsim \Delta ABC$.

Diýmek, $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$. *Teorema subut edildi.*

Mesele. Eger iki deňýanly üçburçlukdan biriniň esasy we gapdal tarapy ikinjisiniň esasy we gapdal tarapyna proporsional bolsa, bu üçburçluklaryň meňzeş bolýandygyny subut ediň.

$\Delta ABC,\ AB=BC,\ \Delta A_1B_1C_1,\ A_1B_1=B_1C_1,\ \Big|\ \dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{AC}{A_1C_1}$ ⇒ $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$

Subudy. Berlen $AB=BC,\ A_1B_1=B_1C_1$ deňliklerden we $\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{AC}{A_1C_1}$ gatnaşykdan $\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{AC}{A_1C_1}=\dfrac{BC}{B_1C_1}$ deňlikleri alarys. Diýmek, üçburçluklaryň meňzeşliginiň TTT nyşanyna görä, $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$.

Meseleler we ýumuşlar

10.1. Üçburçluklaryň meňzeşliginiň TTT nyşanyny aýdyň we subudyny beýan ediň.

10.2. $AC = 14$ *cm*, $AB = 11$ *cm*, $BC = 13$ *cm*, $A_1C_1 = 28$ *cm*, $A_1B_1 = 22$ *cm*, $B_1C_1 = 26$ *cm* bolýandygy mälim. ABC we $A_1B_1C_1$ üçburçluklar meňzeş bolarmy?

10.3. 2-nji suratdaky meňzeş üçburçluklaryň jübütliklerini görkeziň.

10.4. $ABCD$ trapesiýanyň AB we CD gapdal taraplary dowam etdirilse, E nokatda kesişýär. Eger $AB = 5$ *cm*, $BC = 10$ *cm*, $CD = 6$ *cm*, $AD = 15$ *cm* bolsa, AED üçburçlugyň meýdanyny tapyň.

10.5. Trapesiýanyň esaslary 6 *cm* we 9 *cm*, beýikligi 10 *cm*. Trapesiýanyň diagonallary kesişen nokatdan esaslaryna çenli bolan aralyklary tapyň.

10.6. Islendik iki deň taraply üçburçlugyň meňzeş bolýandygyny subut ediň.

10.7. Esasy 12 *cm*, beýikligi 8 *cm* bolan deňýanly üçburçlugyň içinden kwadrat şeýle çyzylan bolup, kwadratyň iki depesi üçburçlugyň esasynda, galan iki depesi bolsa gapdal taraplarda ýatýar. Kwadratyň tarapyny tapyň.

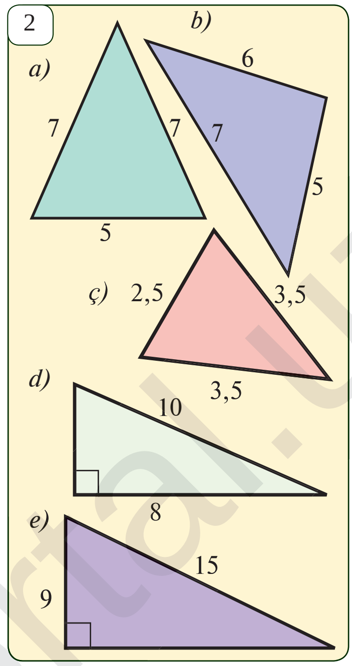
10.8*. Ýiti burçly ABC üçburçlugyň AA_1 we BB_1 beýiklikleri geçirilen. $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C$-ni subut ediň.

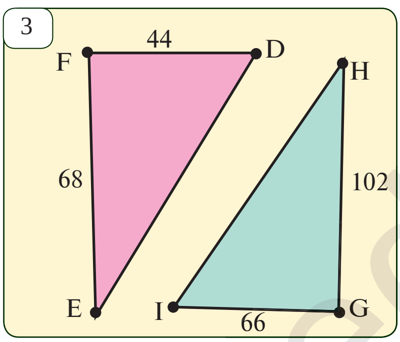
10.9. Iki meňzeş üçburçlugyň meýdanlary 6 we 24-e deň. Olardan biriniň perimetri ikinjisiniňkiden 6-a artyk. Uly üçburçlugyň perimetrini tapyň.

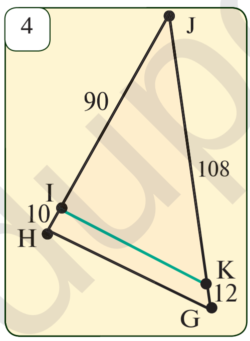
10.10. 3-nji suratdaky üçburçluklar haýsy nyşana görä meňzeş?

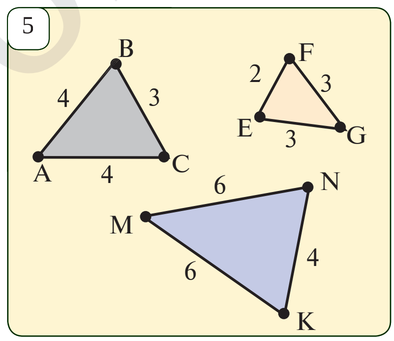
10.11. 4-nji suratdaky JKI we JGH üçburçluklar haýsy nyşana görä meňzeş?

10.12. 5-nji suratdaky üçburçluklaryň haýsylary bir-birine meňzeş?

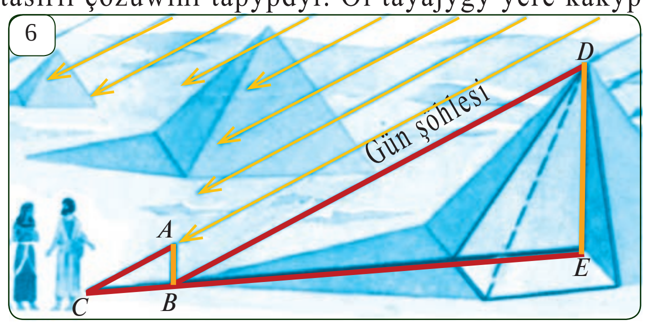








Taryhy maglumatlar. Bu waka miladydan öňki VI asyrda bolupdyr. Bu wagtda grekler geometriýa bilen meşgullanmaýardylar diýen ýalydy. Grek filosofy Fales Müsüre onuň ylmy bilen tanyşmak üçin barypdyr. Müsürliler oňa kyn mesele berýärler: äpet piramidalardan biriniň beýikligini nähili hasaplamak mümkin? Fales bu meseläniň ýönekeý we täsirli çözüwini tapypdyr. Ol taýajygy ýere kakyp şeýle diýipdir: “Haçan-da şu taýajygyň kölegesiniň uzynlygy taýajygyň uzynlygy bilen deň bolsa, piramidanyň kölegesiniň uzynlygy piramidanyň beýikligi bilen deň bolýar”(6-njy surat). Falesiň pikirini esaslandyrjak boluň!



11 GÖNÜBURÇLY ÜÇBURÇLUKLARYŇ MEŇZEŞLIK NYŞANLARY

Mälim bolşy ýaly, gönüburçly üçburçluklaryň bir sanydan burçlary göni burçdan ybarat bolýar. Şonuň üçin şeýle üçburçluklaryň meňzeşlik nyşanlary ep-esli ýönekeýleşýär.

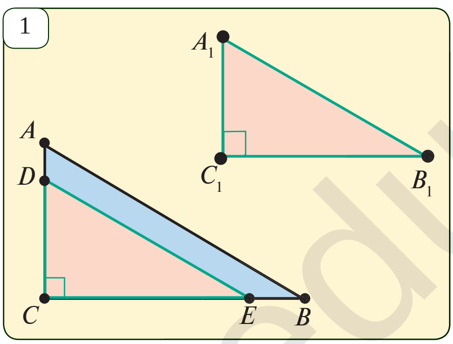
1-nji teorema. ***Gönüburçly üçburçluklaryň bir sanydan ýiti burçy degişlilikde deň bolsa, olar meňzeş bolýar.***

2-nji teorema. ***Gönüburçly üçburçluklaryň katetleri degişlilikde proporsional bolsa, olar meňzeş bolýar.***

3-nji teorema. ***Gönüburçly üçburçluklardan biriniň gipotenuzasy we kateti ikinjisiniň gipotenuzasyna we katetine degişlilikde proporsional bolsa, olar meňzeş bolýar.***

Bu nyşanlardan ilkinji ikisiniň dogrudygy öz-özünden aýdyň. Geliň, üçünji nyşany subut edeliň.

$\Delta ABC, \Delta A_1B_1C_1$, $\angle C=90°, \angle C_1=90°$, $\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{BC}{B_1C_1}$ $\Rightarrow$ $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$



Subudy. ABC üçburçlugyň BC tarapyna $CE = C_1B_1$ bolýan edip CE kesimi goýýarys we $DE \parallel AB$-ni geçirýäris *(1-nji surat)*. Onda üçburçluklaryň meňzeşliginiň BB nyşanyna görä, ΔDEC we ΔABC meňzeş bolýar. Meňzeş üçburçluklaryň degişli taraplarynyň proporsionallygyndan: $\dfrac{AB}{DE}=\dfrac{CB}{CE}$.

Gurmaga görä, $CE = C_1B_1$. Diýmek,

$$\frac{AB}{DE}=\frac{CB}{C_1B_1} \qquad (1)$$

deňlik dogry. Başga tarapdan, teorema şertine görä, $\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{CB}{C_1B_1}$ (2)

(1) we (2) deňliklerden $DE = A_1B_1$ bolýandygyny anyklaýarys.

$A_1B_1C_1$ we DEC üçburçluklara garaýarys: 1. $CE = C_1B_1$ (gurmaga görä); 2. $DE = A_1B_1$ (subut edilen deňlik).

Gönüburçly üçburçluklaryň birden kateti hem-de gipotenuzasy boýunça deňlik nyşanyna görä, $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta DEC$.

Ikinji tarapdan bolsa $\Delta ABC \backsim \Delta DEC$. Onda, $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$ bolýar.

Teorema subut edildi.

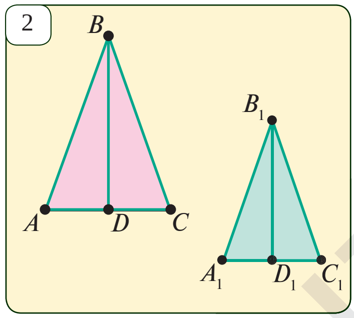
Mesele. Eger iki deňýanly üçburçlukdan biriniň gapdal tarapy we beýikligi ikinjisiniň gapdal tarapyna we beýikligine proporsional bolsa, şu üçburçluklaryň meňzeş bolýandygyny subut ediň *(2-nji surat)*.

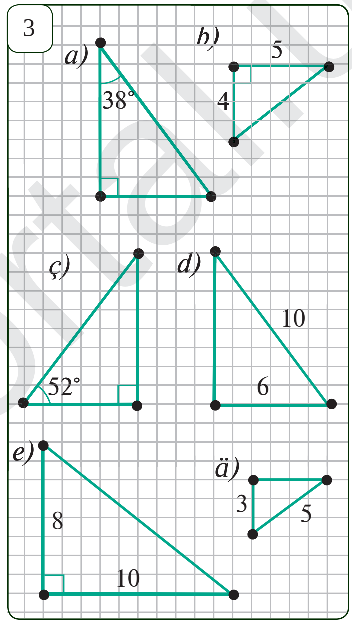
Subudy. Gönüburçly ABD we $A_1B_1D_1$ üçburçluklara garaýarys. Şerte görä, olaryň bir sanydan kateti we gipotenuzasy özara proporsional. Diýmek, 3-nji teorema esasan $\Delta ABD \backsim \Delta A_1B_1D_1$. Onda $\angle DBA = \angle D_1B_1A_1$. Deňýanly üçburçlugyň esasyna geçirilen beýikligiň bissektrisa hem bolýandygyny hasaba alsak, $\angle B = 2\angle DBA = 2\angle D_1B_1A_1 = \angle B_1$ bolýar.

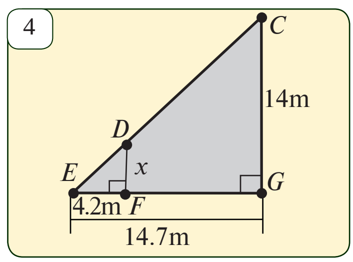
Netijede, ABC we $A_1B_1C_1$ üçburçluklarda

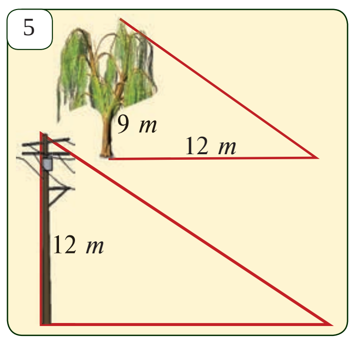
$\angle B = \angle B_1$ we $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1}$ deňliklere eýe bolarys.

Diýmek, üçburçluklaryň meňzeşliginiň TBT nyşanyna görä, $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$. Soralan tassyklama subut edildi.









Meseleler we ýumuşlar

11.1. 3-nji suratdan meňzeş üçburçluklary tapyň.

11.2. Katetleri 3 *m* we 4 *m* bolan gönüburçly üçburçluga meňzeş üçburçlugyň bir kateti 27 *m* bolsa, ikinji kateti näçe *m* bolar?

11.3. Meýdanlary 21 m^2 we 84 m^2 bolan iki gönüburçly üçburçluklar meňzeş. Eger birinji üçburçlugyň bir kateti 6 *m* bolsa, ikinji üçburçluk katetlerini tapyň.

11.4. Bir töweregiň içinden iki meňzeş gönüburçly üçburçluk çyzylan. Şu üçburçluklaryň deňligini subut ediň.

11.5*. Katetleri 10 *cm* we 12 *cm* bolan gönüburçly üçburçlugyň içinden bir burçy umumy bolan kwadrat çyzylan. Eger kwadratyň bir depesi gipotenuzada bolýandygy mälim bolsa, kwadratyň tarapyny tapyň.

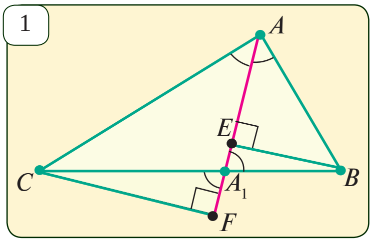
11.6*. ABC üçburçluk berlen. Onuň iinden $ADEF$ romb çyzylan bolup, D, E we F nokatlar degişlilikde üçburçlugyň AB, BC we CA taraplarynda ýatýar. Eger $AB = c$, $AC = b$ bolsa, romb tarapyny tapyň.

11.7. 4-nji suratda berlen maglumatlar esasynda nämälim kesimiň uzynlygyny tapyň.

11.8. Tal agajynyň beýikligi 9 *m*, elektrik sütüniň beýikligi bolsa 12 *m* (5-nji surat). Eger talyň kölegesi 12 *m* bolsa, elektrik sütüniň kölegesiniň uzynlygyny tapyň.

11.9. Nar agajynyň beýikligi 3 *m* bolup onuň kölegesi agşama baryp 6 *m*-e ýetdi. Beýikligi 4,2 *m* bolan alma agajynyň kölegesi bu wagtda näçe bolar?

12 MEŇZEŞLIK NYŞANLARYNYŇ SUBUT ETMÄGE DEGIŞLI MESELELERDE ULANYLYŞY



1-nji mesele. Üçburçlugyň bissektrisasy özi düşen tarapy galan iki tarapa proporsional kesimlere bölýändigini subut ediň.

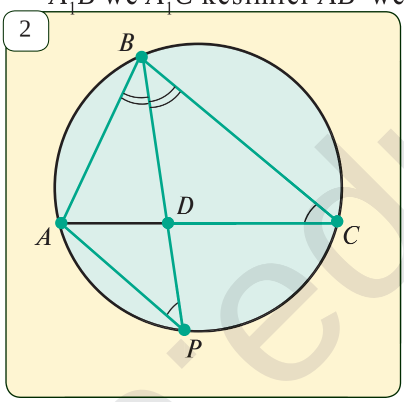
ΔABC, AA_1 — bissektrisa *(1-nji surat)* ⇒ $\dfrac{AB}{A_1B} = \dfrac{AC}{A_1C}$

Subudy. AA_1 göni çyzyga BE we CF perpendikulýarlar geçirýäris. Onda $\angle CAF = \angle BAE$ bolany üçin, gönüburçly CAF we BAE üçburçluklar meňzeş bolýar. Meňzeş üçburçluklaryň degişli taraplarynyň proporsionallygyndan

$$\Delta CAF \backsim \Delta BAE \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{CF}{BE}. \quad (1)$$

Şuňa meňzeş
$$\Delta CA_1F \backsim \Delta BA_1E \Rightarrow \frac{CA_1}{BA_1} = \frac{CF}{BE} \quad (2)$$

(1) we (2) deňlikleri deňeşdirsek, $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{CA_1}{BA_1}$ ýa-da $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{CA_1}{BA_1}$ bolýar. Bu A_1B we A_1C kesimler AB we AC kesimlere proporsional bolýandygyny aňladýar.



2-nji mesele. ABC üçburçlugyň BD bissektrisasy üçburçlugyň daşyndan çyzylan töweregi B we P nokatlarda kesýär. $\Delta ABP \backsim \Delta DBC$ bolýandygyny subut ediň *(2-nji surat)*.

Subudy. ΔABP we $\angle DBC$-da:

1. $\angle DBC = \angle ABP \Leftarrow$ çünki BD bissektrisa;
2. $\angle DCB = \angle APB$, çünki olar bir duga direlen.

Diýmek, üçburçluklaryň meňzeşliginiň BB nyşanyna görä, $\Delta ABP \backsim \Delta DBC$.

Meseleler we ýumuşlar

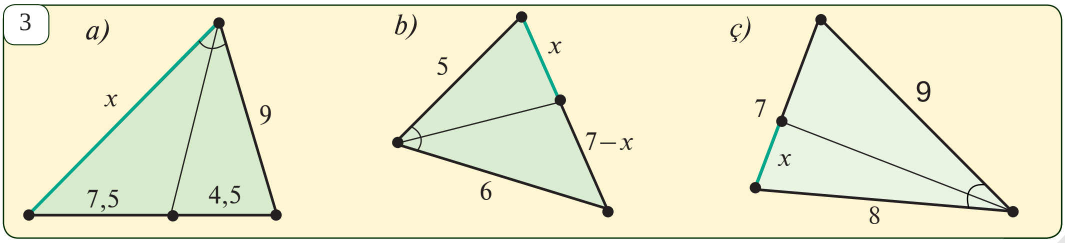
12.1. Üçburçlugyň bissektrisasynyň özi düşen tarapda bölen kesimlerini we üçburçlugyň galan taraplarynyň arasyndaky proporsionallygy ýazyp görkeziň.

12.2. Gönüburçly ABC üçburçlugyň C göni burçundan CD beýiklik geçirilen. $\angle ACD = \angle CBD$ bolýandygyny subut ediň. Emele gelen şekilde näçe özara meňzeş üçburçluklary görkezip bilersiňiz?

12.3. 3-nji suratdaky maglumatlar esasynda x-i tapyň.

12.4. ABC üçburçluklaryň AD bissektrisasy geçirilen. Eger $CD = 4{,}5\ m$; $BD = 13{,}5\ m$ we ABC üçburçlugyň perimetri 42 m bolsa, onuň AB we AC taraplaryny tapyň.

12.5. ABC üçburçlugyň medianalary N nokatda kesişýär. Eger ABC üçburçlugyň meýdany 87 dm^2 bolsa, ANB üçburçlugyň meýdany nämä deň?



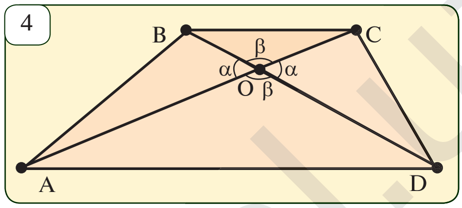
12.6. *ABC* üçburçlugyň medianalary kesişen *N* nokatdan *AB* we *BC* taraplara çenli bolan aralyklar degişlilikde 3 *dm* we 4 *dm*. Eger *AB* = 8 *dm* bolsa, *BC* tarapy hasaplaň.

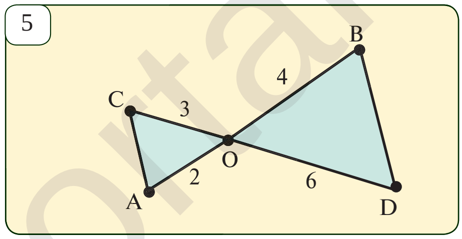
12.7*. Trapesiýanyň esasyna parallel göni çyzyk gapdal taraplaryndan birini *m*:*n* gatnaşykda bölýändigi mälim. Bu göni çyzyk onuň ikinji gapdal tarapyny nähili gatnaşykda bölýär?

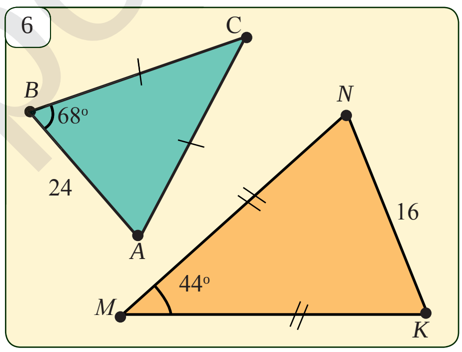
12.8. 4-nji suratda trapesiýa görkezilen. *AOD* we *COB* üçburçluklaryň meňzeşligini subut ediň.

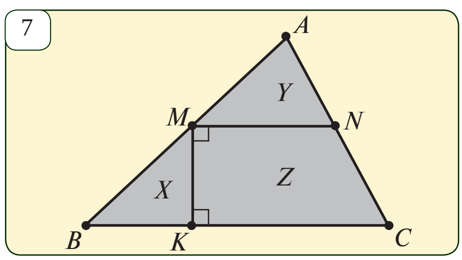
12.9. 5-nji suratda AOC we DOB üçburçluklar meňzeşligini görkeziň.

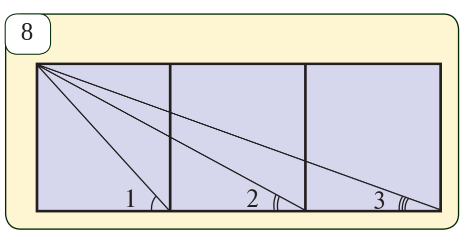
12.10. 6-njy suratda görkezilen üçburçluklar meňzeşmi?











Gyzykly meseleler

Geometriýa we iňlis dili. Aşakda iňlis dilinde berlen geometrik meseläni çözjek boluň! Munuň bilen hem iňlis dilinden, hem geometriýadan öz bilimiňizi synarsyňyz.

1) Dissection Puzzle: Let *M* be the mid-point of the side *AB* of a given triangle *ABC*. The triangle has been dissected into parts *X*, *Y*, *Z* along the lines *MN* and *MK* passing through *M* such that *MN* is parallel while *MK* is perpendikulýar to the base *BC* (*picture* 7). Show how the three pieces can be fitted together to make a rectangle, respectively two different parallelograms.

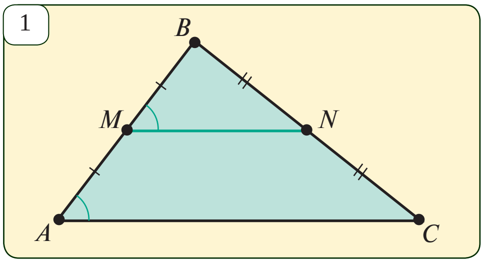
2) Look at the picture 8 and proof

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 90°.$$

13 AMALY GÖNÜKME WE ONUŇ ULANYLYŞY

1-nji mesele. Üçburçluklaryň meňzeşliginden peýdalanyp, üçburçlugyň orta çyzygy üçburçlugyň bir tarapyna parallel we şu tarapyň ýarysyna deň bolýandygyny subut ediň.

ΔABC, MN — orta çyzyk (1-nji surat): $MA=MB$, $NC=NB$ ⇒ $MN \parallel AC$, $MN=\frac{1}{2}AC$



Subudy. ΔABC we ΔMBN üçin:

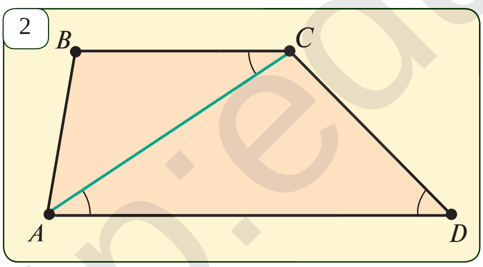
$\angle B$ — umumy, $\frac{BM}{AB}=\frac{BN}{BC}=\frac{1}{2}$

Şonuň üçin, üçburçluklaryň meňzeşliginiň TBT nyşanyna görä, bu iki üçburçluk meňzeş. Indi pikir ýöretmäni ynha şeýle dowam etdirýäris:

$$\Delta MBN \backsim \Delta ABC \Rightarrow \begin{cases} \angle BMN = \angle A, \\ \frac{MN}{AC}=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MN \parallel AC, \\ MN=\frac{1}{2}AC. \end{cases}$$

2-nji mesele. Eger esaslary BC we AD bolan $ABCD$ trapesiýanyň AC diagonaly ony iki meňzeş üçburçluga bölse, $AC^2=BC\cdot AD$ bolýandygyny subut ediň.

$ABCD$ — trapesiýa, $BC \parallel AD$, $\Delta ABC \backsim \Delta DCA$ (2-nji surat) ⇒ $AC^2=BC\cdot AD$



Subudy. **1-nji ädim.** ABC we ACD üçburçluklaryň burçlaryny deňeşdirýäris. $\angle ACB=\angle CAD$, çünki bu burçlar — içki atanak burçlar. $\angle B \neq \angle D$, çünki $ABCD$ — trapesiýa (tersine bolňda,

$$\angle D+\angle A=\angle B+\angle A=180°,$$

ýagny $AB \parallel CD$ bolup, $ABCD$ trapesiýa bolman galardy). Onda, $\angle D=\angle BAC$ we $\angle ACD=\angle B$.

2-nji ädim. Indi ABC we DCA meňzeş üçburçluklaryň degişli taraplarynyň gatnaşygyny ýazýarys: , $\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{AC}$ mundan $AC^2=BC\cdot AD$.

Meseleler we ýumuşlar

13.1. a) Boýy 170 *cm* bolan adamyň kölegesiniň uzynlygy 1 *m* bolsa, beýikligi 5,4 *m* bolan elektik sütüniň kölegesiniň uzynlygyny tapyň.

b) Iki deňýanly üçburçlugyň depesindäki burçlary deň. Birinji üçburçlugyň gapdal tarapy 17 *cm*, esasy 10 *cm*-e, ikinji üçburçlugyň esasy 8 *cm*-e deň. Ikinji üçburçlugyň gapdal tarapyny tapyň.

13.2. 3-nji suratdaky her bir çyzgydan meňzeş üçburçluklary görkeziň.

13.3. *ABC* üçburçlugyň *AP* medianasy *BC* tarapa parallel we depeleri *AB* we *AC* taraplarda ýatýan islendik kesimi deň ýarpa bölýändigini subut ediň.

13.4. Üçburçlugyň depeleri onuň orta çyzygyny öz içine alan göni çyzykdan deň aralykda ýatýandygyny subut ediň.

13.5. Töweregiň içinden çyzylan *ABCD* dörtburçlugyň diagonallary *O* nokatda kesişýär.
$\Delta AOB \backsim \Delta COD$ bolýandygyny subut ediň.

13.6. *ABC* üçburçlugyň içki zolagynda *O* nokat we *OA, OB, OC* şöhlelerde degişlilikde *E, F, K* nokatlar alnan *(4-nji surat)*. Eger $AB||EF$ we $BC||FK$ bolsa, *ABC* we *EFK* üçburçluklaryň meňzeş bolýandygyny subut ediň.

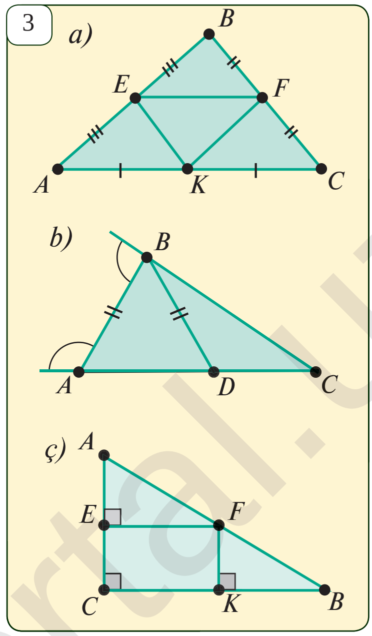
13.7*. Trapesiýanyň diagonallary kesişme nokadyndan geçýän göni çyzyk trapesiýanyň esaslaryndan birini $m:n$ gatnaşykda bölýär. Bu göni çyzyk ikinji esasy nähili gatnaşykda bölýär?

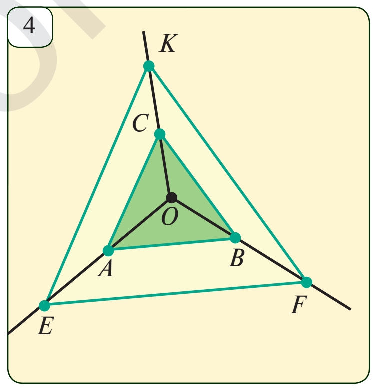
13.8. Eger *ABC* üçburçlugyň meýdany *S*-e deň bolsa, 5-nji suratda *x* bilen belgilenen zolagyň meýdanyny tapyň.

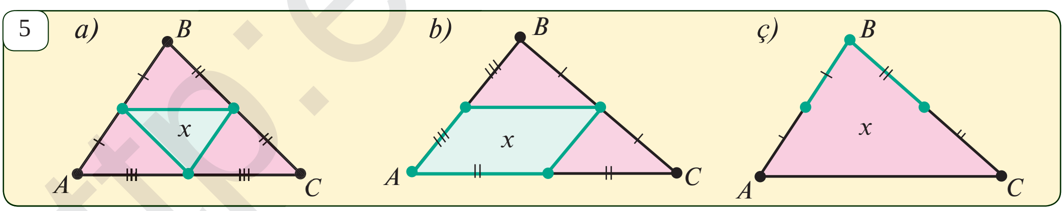
13.9. 6-njy suratda $EQ \parallel BC$. *AQ*-ny tapyň.

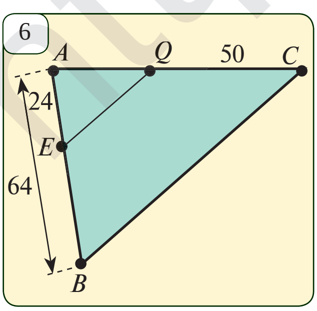
13.10. 7-nji suratda $AB \parallel EC$. *QC*-ny tapyň.

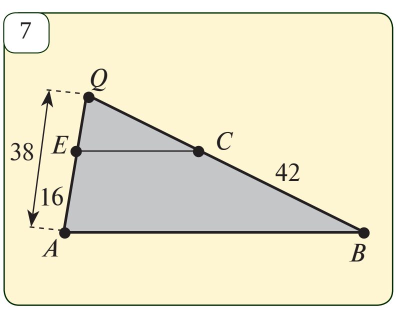
13.11. 8-nji suratda *ABC* üçburçlugyň beýiklikleri geçirilen. Netijede näçe meňzeş üçburçluklar emele geldi?

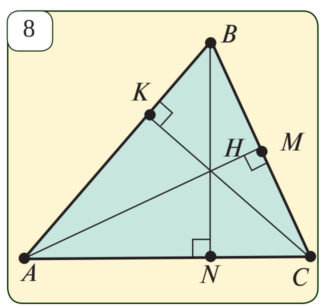












14 BILIMIŇIZI SYNAŇ

I. Testler

1. Aşakdaky kesgitlemelerden haýsysy dogry?
A) Iki üçburçlugyň burçlary degişlilikde deň bolsa, olara meňzeş diýilýär;
B) Iki üçburçlugyň taraplary degişlilikde deň bolsa, olara meňzeş diýilýär;
D) Iki üçburçlugyň degişli taraplary proporsional we degişli burçlary deň bolsa, olara meňzeş diýilýär;
E) Iki üçburçlugyň degişli taraplary we degişli burçlary deň bolsa, olara meňzeş diýilýär.

2. Iki meňzeş üçburçluk meýdanlarynyň gatnaşygy nämä deň?
A) Meňzeşlik koeffisiýentine;
B) Olaryň degişli taraplarynyň gatnaşygyna;
D) Olaryň perimetrleriniň gatnaşygyna;
E) Meňzeşlik koeffisiýentiniň kwadratyna.

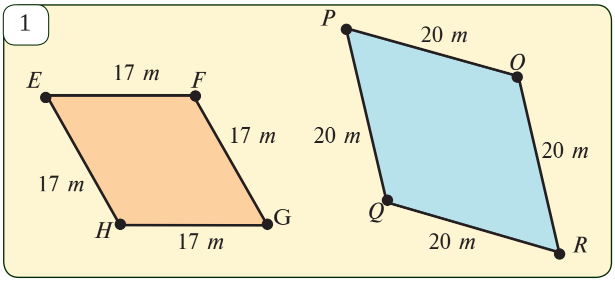
3. Aşakdaky tassyklamalardan haýsysy dogry?
A) Üçburçluklardan biriniň iki burçy ikinjisiniň iki burçuna deň bolsa, olar meňzeş bolýar;
B) Üçburçluklardan biriniň iki tarapy ikinjisiniň iki tarapyna deň bolsa, olar meňzeş bolýar;
D) Iki üçburçlugyň bir sanydan burçlary deň we ikiden taraplary proporsional bolsa, olar meňzeş bolýar;
E) Iki üçburçlugyň bir sanydan burçlary deň we bir sanydan taraplary proporsional bolsa, olar meňzeş bolýar.

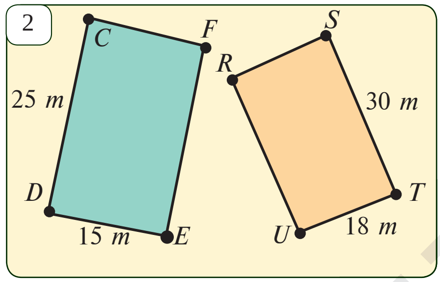
4. Dogry jogaby tapyň. Eger iki üçburçluk meňzeş bolsa, olaryň ...
A) Beýiklikleri deň bolýar; B) Taraplary proporsional bolýar;
D) Taraplary deň bolýar; E) Meýdanlary deň bolýar.

5. Meňzeş üçburçluklaryň perimetrleriniň gatnaşygy nämä deň?
A) Degişli taraplaryň gatnaşygynyň kwadratyna; B) Meňzeşlik koeffisiýentine;
D) Meňzeşlik koeffisiýentiniň kwadratyna; E) Meýdanlarynyň gatnaşygyna.

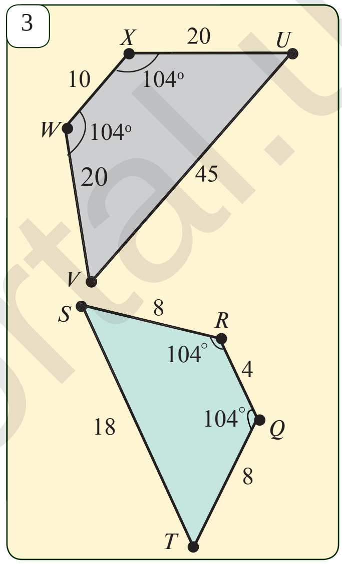
6. Haýsy bentde 1-nji suratda görkezilen romblaryň meňzeşligi dogry ýazylan?
A) $EHGF \backsim PQRO$; B) $HGFE \backsim PQRO$;
D) $GFEH \backsim QROP$; E) $EHGF \backsim QROP$.

7. 2-nji suratdaky köpburçluklar meňzeşmi? Näme üçin?
A) Hawa, çünki bu köpburçluklaryň degişli burçlary deň we degişli taraplary proporsional;
B) Hawa, çünki bu köpburçluklaryň degişli burçlary proporsional we degişli taraplary deň;
D) Hawa, çünki bu köpburçluklaryň degişli burçlary deň;
E) Hawa, çünki bu köpburçluklaryň degişli taraplary proporsional;





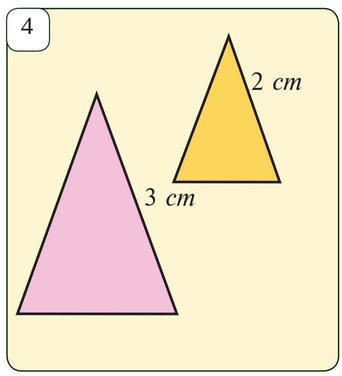
8. 3-nji suratdaky SRQT we VWXU trapesiýalar meňzeşmi? Eger meňzeş bolsa, olaryň meňzeşlik koeffisiýenti nämä deň?
A. Hawa, k= 0,4; B. Hawa, k= 0,5;
D. Hawa, k= 0,8; E. Ýok.



9. Meňzeş üçburçluklaryň degişli taraplary 4 cm we 13 cm. Eger birinji üçburçlugyň meýdany 16 cm^2 -a deň bolsa, ikinji üçburçlugyň meýdanyny tapyň.
A. 169 cm^2; B. 16 cm^2;
D. 52 cm^2; E. 189 cm^2;

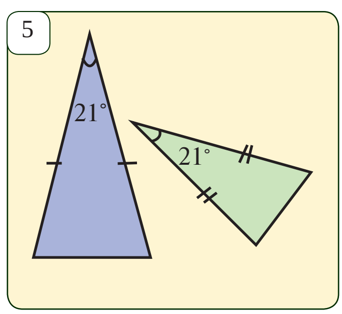
10. Iki meňzeş üçburçluk meýdanlarynyň gatnaşygy 144-e deň. Olaryň degişli taraplarynyň gatnaşygy nämä deň?
A. 13-e; B. 12-ä;
D. 14-e; E. 16-a;

11.4-nji suratdaky üçburçluklar meňzeş. Suratda berlen ululyklara görä uly üçburçlugyň meýdanynyň kiçi üçburçlugyň meýdanyna gatnaşygyny tapyň.
A. 9:4; B. 3:2;
D. 4:9; E. 2:3;



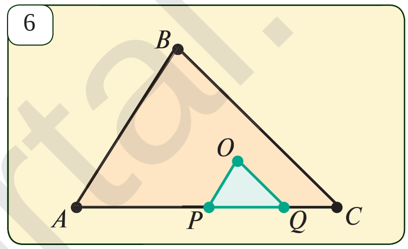
12. Iki meňzeş üçburçluk meýdanlarynyň gatnaşygy a -ga deň bolsa, bu üçburçluklaryň meňzeşlik koeffisiýenti nämä deň bolýar?
A. $1:a^2$; B. a^2 ; D. a;√E. $1:a$;

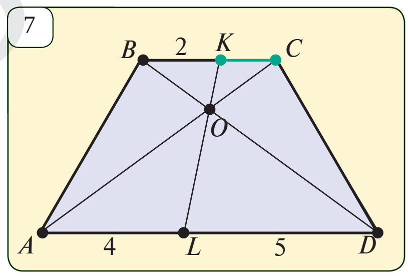
13. 5-nji suratda getirilen deňýanly üçburçluklar meňzeşmi? Näme üçin?
A. Hawa, çünki olaryň ikiden taraplary proporsional we olaryň arasyndaky burçy deň;
B. Ýok, çünki olaryň iki burçy özara deň däl;
D. Ýok, çünki olaryň degişli burçlary deň däl;
E. Ýok, çünki olaryň taraplary proporsional däl;



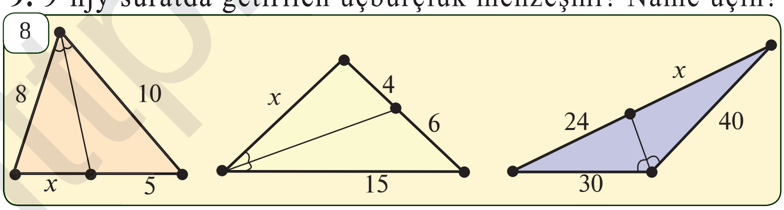
II. Meseleler

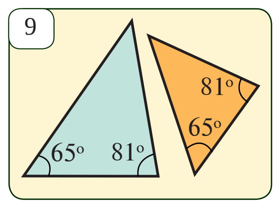
1. *ABC* üçburçlugyň *AB* we *AC* taraplarynyň ortalary degişlilikde *E* we *F* nokatlar bolsun. Eger *AEF* üçburçlugyň meýdany 3 cm^2 bolsa, *ABC* üçburçlugyň meýdanyny tapyň.
2. *ABC* üçburçlugyň *AC* tarapyna parallel göni çyzyk *AB* we *BC* taraplary degişlilikde *N* we *P* nokatlarda kesýär. Eger $AN = 4$, $NB = 3$, $BP = 3{,}6$ bolsa, *BC* tarapy tapyň.
3. Ýiti burçly *ABC* üçburçlugyň *AB* tarapynda *K* nokat alnan. Eger $AK = 3$, $BK = 2$ we üçburçlugyň *BD* beýikligi 4-e deň bolsa, *K* nokatdan *AC* kesime çenli bolan aralygy tapyň.
4. *ABCD* parallelogramyň *BC* tarapynyň ortasyndaky *K* nokatdan geçirilen *DK* şöhle bilen *AB* şöhle *F* nokatda kesişýär. Eger $AD = 4$, $DK = 5$ we $DC = 5$ bolsa, *AFD* üçburçlugyň perimetrini hasaplaň.
5. *ABC* üçburçlugyň içki zolagynda alnan *O* nokatdan *AB* we *BC* taraplara parallel göni çyzyklar geçirilen. Bu göni çyzyklar *AC* tarapy degişlilikde *P* we *Q* nokatlarda kesýär. Eger $PQ = 2$, $AC = 7$ we *ABC* üçburçlugyň meýdany 98-e deň bolsa, *PAk* üçburçlugyň meýdanyny anyklaň (*6-njy surat*).
6. *ABCD* trapesiýanyň *BC* we *AD* esaslarynda degişlilikde *K* we *L* nokatlar alnan. *KL* kesim trapesiýanyň diagonallary kesişen nokatdan geçýär. Eger $AL = 4$, $LD = 5$ we $BK = 2$ bolsa, *KC* kesimi tapyň (*7-nji surat*).



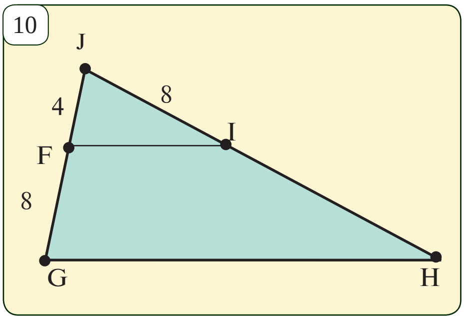


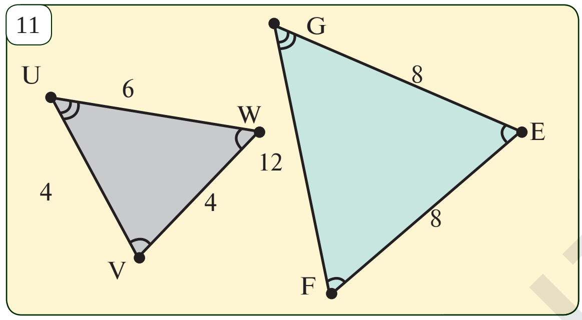
7. Iki meňzeş üçburçluklardan birinjisiniň meýdany 15 mm², ikinjisiniň meýdany bolsa 135 mm². Birinji üçburçlugyň bir tarapy 6 mm bolsa, ikinji üçburçlugyň oňa degişli tarapyny tapyň?
8. 8-nji suratda berlenlere görä näbelli kesimi tapyň.
9. 9-njy suratda getirilen üçburçluk meňzeşmi? Näme üçin?



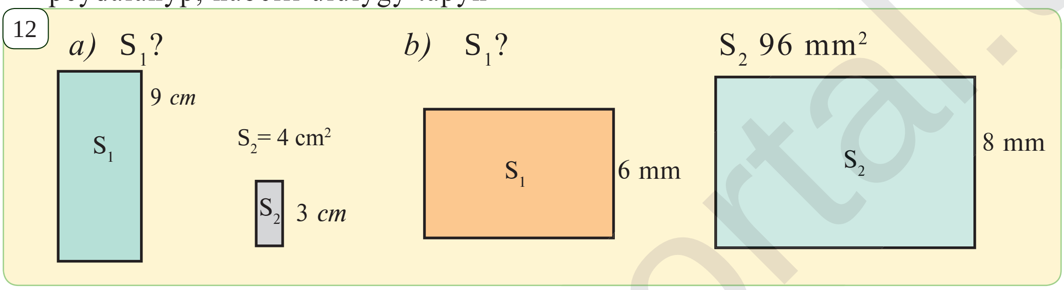


10. 10-njy suratda $\Delta\, JIF \backsim \Delta\, JHG$. *IH* kesimiň uzynlygyny tapyň
11. 11-nji suratda görkezilen üçburçluklar meňzeşmi? Eger meňzeş bolsa, olaryň meňzeşlik koeffisiýentini tapyň.
12. Iki meňzeş üçburçluklardan birinjisiniň meýdany 24 mm², ikinjisiniň meýdany bolsa 216 mm². Birinji üçburçlugyň beýikliklerinden biri 8 mm bolsa, ikinji üçburçlugyň degişli beýikligini tapyň.

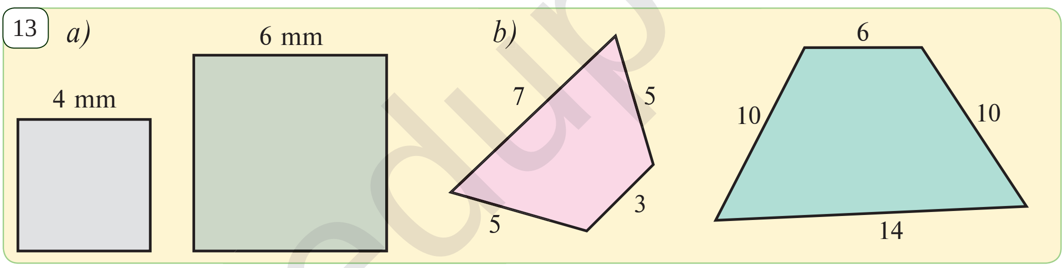




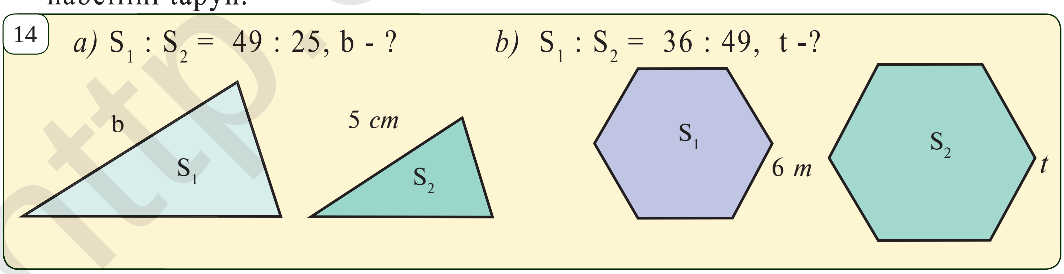
13. 12-nji suratda görkezilen köpburçluklar meňzeş. Berlen maglumatlardan peýdalanyp, näbelli ululygy tapyň



14. 13-nji suratda görkezilen köpburçluklar meňzeş. Berlen maglumatlardan peýdalanyp, olaryň meňzeşlik koeffisiýentini tapyň



15. 14-nji suratda görkezilen köpburçluklar meňzeş. Berlen maglumatlar esasynda näbellini tapyň.

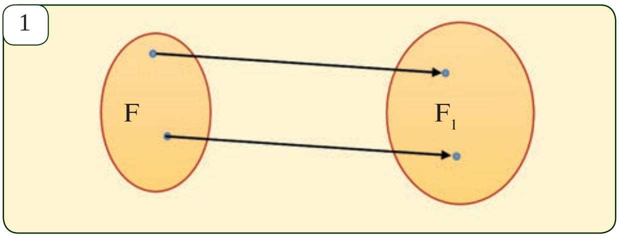


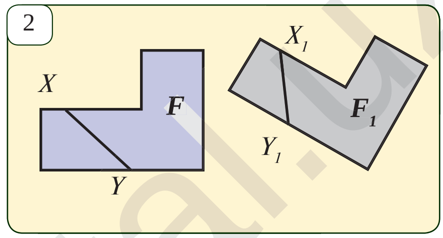
16. Çynar agajynyň kölegesi 12 *m*. Onuň ýanyndky köp etažly öýüň kölegesi bolsa 6 *m*. Eger çynar agajy öýden 16 *m* beýik bolsa, öýüň beýikligi näçäni düzýär?

17. Heýkeliň beýikligi 9 *m* bolup, onuň kölegesi 12 *m*. Heýkeliň ýanynda ösýän derek agajynyň kölegesi bolsa 16 *m*. Deregiň beýikligi näçe?

15 TEKIZLIKDE GEOMETRIK ÖZ-ÖZÜNE ÖWRÜLMELER. HEREKET WE PARALLEL GÖÇÜRME

Tekizlikde berlen F şekiliň her bir nokady käbir usulda göçürilse, täze F_1 şekil emele gelýär (1-nji surat). Eger bu göçürmede (öwrümde) birinji şekiliň dürli nokatlary ikinji şekiliň dürli nokatlaryna göçürilse (öwrüm özara bir bahaly bolsa), bu göçürme *geometrik öz-özüne öwrülme* diýlip atlandyrylýar.

1


2


Eger öz-özüne öwrülmede tekizligiň ähli nokatlary göçürilse, onda tekizligi öz-özüne öwrülme barada hem aýtmak mümkin. Aşakda tekizlikdäki käbir geometrik öz-özüne öwrülmeleriň üstünde durup geçýäris.

Nokatlaryň arasyndaky aralygy saklaýan öz-özüne öwrülme *hereket* diýlip atlandyrylýar.

Kesgitlemä görä, öz-özüne öwrülmede F şekiliň erkin X we Y nokatlary F_1 şekiliň nähilidir X_1 we Y_1 nokatlaryna geçen bolup, $XY = X_1Y_1$ deňlik ýerine ýetirilse (ýagny aralyk saklansa), şeýle öz-özüne öwrülme hereket bolýar (2-nji surat).

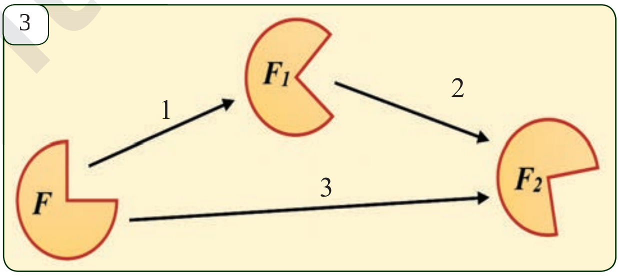
Hereketiň aşakdaky häsiýetlerini getirmek mümkin.

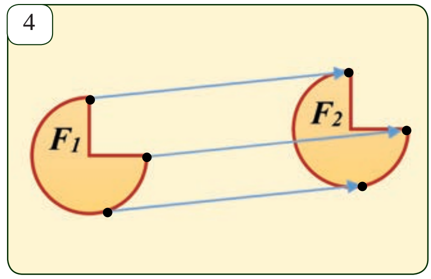
Hereketda göni çyzyk – göni çyzyga, şöhle – şöhlä, kesim - oňa deň kesime, burç - oňa deň burça, üçburçluk - oňa deň üçburçluga öwrülýär (göçýär).

Aýdaly, F şekil birinji hereket netijesinde F_1 şekile, F_1 şekil bolsa ikinji hereketiň kömeginde F_2 şekile geçen bolsun. Netijede, F şekil bu iki hereketiň kömeginde F_2 şekile öwrülýär we bu öwrülme öz nobatynda ýene hereket bolýar (3-nji surat).

Tekizlikde käbir hereketiň kömeginde birini ikinjisine öwrülmegi mümkin bolan şekiller deň diýilýär.

Tekizlikde käbir $\underline{AB}$ wektor we erkin X nokat berlen bolsun. Eger X_1 nokat üçin $XX_1 = AB$ şert ýerine ýetirilse, X nokat X_1 nokada AB wektor boýunça *parallel göçürilen* diýlip atlandyrylýar.

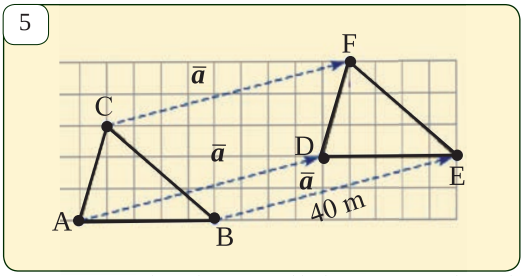
3


4


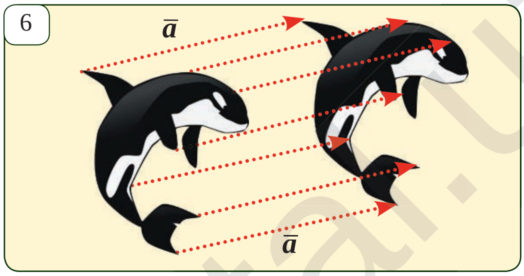
Eger tekizlikde berlen F_1 şekiliň her bir nokady $\overline{AB}$ wektor boýunça göçürilse (4-nji surat), täze F_2 şekil emele gelýär. Munda F_1 şekil F_2 şekile parallel göçürilen diýilýär. Parallel göçürmede F_1 şekiliň her bir nokady birmeňzeş ugurda birmeňzeş uzaklyga göçürilen bolýar.

5-nji suratda görkezilen üçburçlugyň her bir nokady başlangyç ýagdaýyna görä 40 m-e parallel göçen. 6-njy suratdaky delfin hem *a* wektor boýunça parallel göçürilen.

5



6



Görnüşi ýaly, parallel göçürme hereketdir. Şonuň üçin, parallel göçürmede göni çyzyk - göni çyzyga, şöhle – şöhlä, kesim - oňa deň kesime öwrülýär we başgalar.

Aýdaly, $\overline{AB} = (\overline{a; b})$ wektor boýunça parallel göçürmede F şekiliň nokady X $(x; y)$ we F_1 şekiliň nokady X_1 $(x_1; y_1)$ -e geçsin. Onda kesgitlemä görä aşakdakylara eýediris:

$x_1 - x = a$, $y_1 - y = b$ ýa-da $x_1 = x + a$, $y_1 = y + b$.

Bu deňlikler paralel göçürme formulalary diýlip atlandyrylýar.

1-nji mesele. $\bar{p} = (\overline{3;\ 2})$ wektor boýunça parallel göçürmede P (-2; 4) nokat haýsy nokada göçýär?

Çözülişi. Ýokardaky parallel göçürme formulalardan peýdalanýarys:

$x_1 = -2 + 3 = 1$, $y_1 = 4 + 2 = 6$. ***Jogaby:*** $P_1(1; 6)$.

? *Meseleler we ýumuşlar*

15.1. $\bar{p} = (-2; 1)$ wektor boýunça parallel göçürmede a) (3; -2); b) (0; 2); c) (2; -5) nokat haýsy nokada göçýär?

15.2. Parallel göçürmede $A(4; 2)$ nokat $B(3; 7)$ nokada göçdi. Parallel göçürme haýsy wektor boýunça amala aşyrylan?

15.3. Parallel göçürmede a) göni çyzyk – göni çyzyga; b) şöhle – şöhlä; c) kesim – oňa deň kesime örülýändigini subut ediň.

15.4. Parallel göçürmede (1; 2) nokat (1; -1) nokada geçýär. Koordinata başlangyjy bu öz-özüne öwrülmede haýsy nokada geçýär?

15.5. Parallel göçürmede (3; 4) nokat (2; -4) nokada geçýär. Bu öz-özüne öwrülmede koordinata başlangyjy haýsy nokada geçýär?

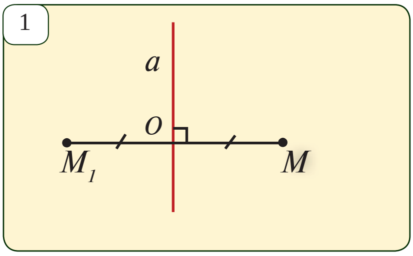
15.6. $A(2; 1)$ nokat $B(1; 0)$ nokada, $C(3; -2)$ nokat bolsa $D(2; -3)$ nokada geçýän parallel göçürme barmy?

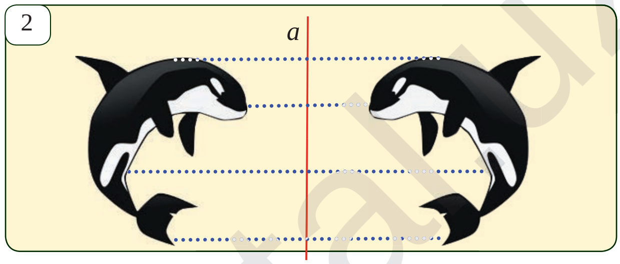
15.7. $A(-2; 3)$ nokat $B(1; 2)$ nokada, $C(4; -3)$ nokat bolsa $D(7; -2)$ nokada geçýärgan parallel göçürme barmy?

15.8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kub berlen. Parallel göçürmede A_1D kesim B_1C kesime geçýär. Bu göçürmede AA_1 kesim haýsy kesime geçýär?

16 OKA GÖRÄ SIMMETRIÝA

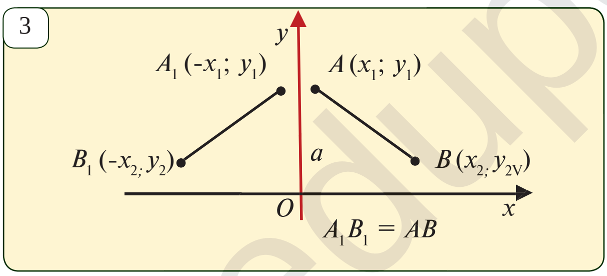
Tekizlikde käbir a göni çyzyk we onda ýatmaýan erkin M nokat berlen bolsun. M nokatdan a göni çyzyga perpendikulýar geçirýäris we onuň esasyny O bilen belgileýäris (1 -nji surat). Perpendikulýarda ýatýan M_1 nokat üçin $MO = M_1O$ bolsa, M we M_1 nokatlara a göni çyzyk ýa-da *oka görä simmetrik* nokatlar diýilýär,

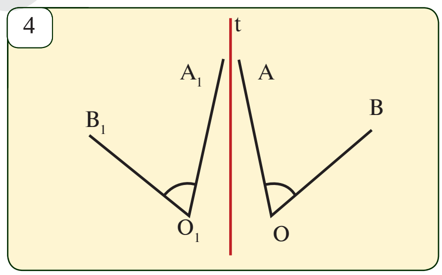




Tekizligiň erkin M nokadyna a göni çyzyk (oka) görä oňa simmetrik bolan M_1 nokady laýyk goýýarys. Tekizligi şeýle öz-özüne öwrülmegine *oka görä simmetriýa* diýýäris. Göni çyzygy bolsa *simmetriýa oky* diýýäris.

2-nji suratda görkezilen delfinler özara a oka görä simmetrik bolýar.





Oka görä simmetriýa hereketdir ýagny ol nokatlaryň arasyndaky aralygy saklaýar.

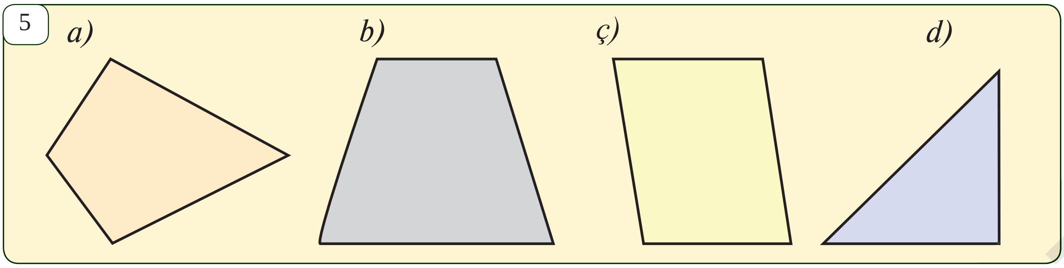
Geliň bu tasyklamany subut edeliň. 3-nji suratda erkin $A(x_1; y_1)$ we $B(x_2; y_2)$ nokatlar bolup, $A_1(-x_1; y_1)$ we $B_1(-x_2; y_2)$ nokatlar bolsa olaryň a göni çyzyga (Oy oka) görä degişlilikde simmetrik şöhlelenmeleri bolsun. $AB = A_1B_1$ bolýandygyny görkezýäris.

Hakykatdan hem, iki nokadyň arasyndaky aralygy hasaplamagyň formulasyna görä

$$AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2},$$
$$A_1B_1 = \sqrt{(-x_2-(-x_1))^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

ýagny bu aralyklar özara deň. Mundan oka görä simmetriýada her bir kesim özüne deň kesime geçýändigi-de gelip çykýar.

Edil şuňa meňzeş, oka görä simmetriýada burç – özüne deň burça geçýändigini hem görkezmek mümkin. Munda diňe burçuň ugry üýtgeýär (4-nji surat).



Koordinatalar tekizliginde berlen A $(x;\ y)$ nokat Ox okuna görä simmetriýada A_1 $(x;\ -y)$ nokada, Oy okuna görä simmetriýada bolsa A_2 $(-x;\ y)$ nokada geçýär.

Meseleler we ýumuşlar

16.1. (1; 2), (0; 2), (2; 2) nokatlar koordinata oklaryna görä simmetriýalarda haýsy nokatlara geçýär? a) OX okuna görä; b) OY okuna görä.

16.2. (2; 4) nokat koordinata okuna görä simmetrik öwrülende (2; -4) nokada geçdi. Öwrülme haýsy koordinata okuna görä amala aşyrylan?

16.3. 5-nji suratda görkezilen figuralaryň haýsylary simmetriýa okuna eýe? Bu şekilleri depderiňize göçürip çyzyň we olaryň simmetriýa oklaryny guruň.

16.4. Gönüburçluk, kwadrat, romb, deňýanly trapesiýa we deňýanly üçburçlugyň näçe simmetriýa oky bar?

16.5. Erkin ABC üçburçluk çyzyň. Onuň C depesinde geçýän göni çyzyga görä oňa simmetrik bolan üçburçlugy şekillendiriň.

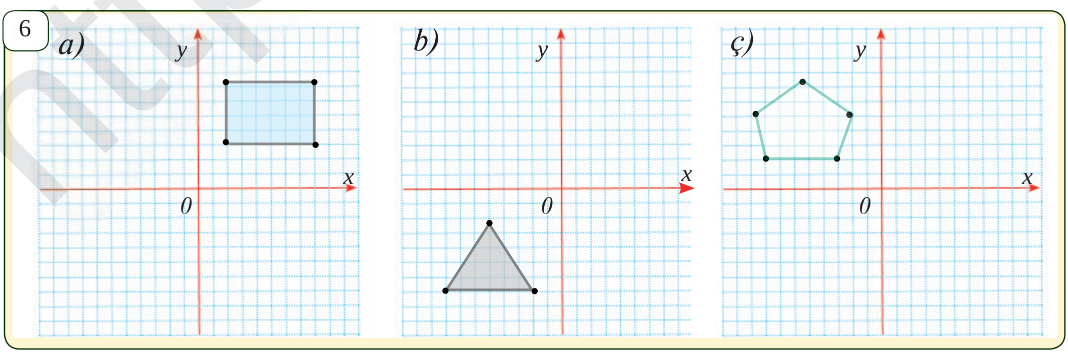
16.6. Koordinata tekizliginde depeleri A (3; 2), B (2; 7), C (6; 7) we D (7; 2) nokatlarda bolan $ABCD$ parallelograma Oy okuna görä simmetrik bolan $A_1B_1C_1D_1$ parallelogramy şekillendiriň.

16.7. Koordinata tekizliginde $y = x + 4$ funksiýa grafigini çyzyň. Bu grafige Ox okuna görä simmetrik bolan göni çyzygy şekillendiriň we ol haýsy funksiýanyň grafigi bolýandygyny anyklaň.

16.8. Çepden saga hem, sagdan çepe hem okap bolýan sözlere polindromlar diýilýär. Aşakdaky polindrom sözleriň haýsylarynyň simmetriýa oky bar?

KETEK NAN SOS KÖK ATA MUM RADAR

16.9. 6-njy suratdaky koordinatalar tekizliginde görkezilen şekilleri depderiňize göçürip çyzyň. Şu koordinatalar tekizliginde bu şekillere Ox hem-de Oy oklaryna görä simmetrik bolan şekilleri guruň.



17 MERKEZI SIMMETRIÝA WE ÖWRÜLME

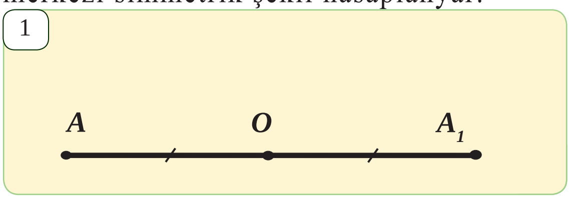
Tekizlikde berlen A we A_1 nokatlar O nokada görä simmetrik diýilýär, eger $AO = OA_1$ ýagny O nokat AA_1 kesimiň ortasy bolsa (1-nji surat).

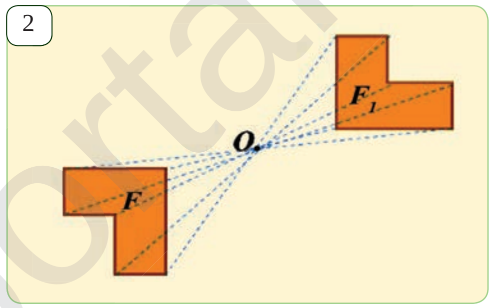
Eger tekizlikde berlen F şekiliň her bir nokady O nokada görä simmetrik nokada göçürilse (2-nji surat), täze F_1 şekil emele gelýär. Şeýle orun çalyşmada F we F_1 şekiller *O nokada görä simmetrik* diýilýär. 3-nji suratlardaky delfinleriň suraty O nokada görä simmetrik şekiller bolýar.

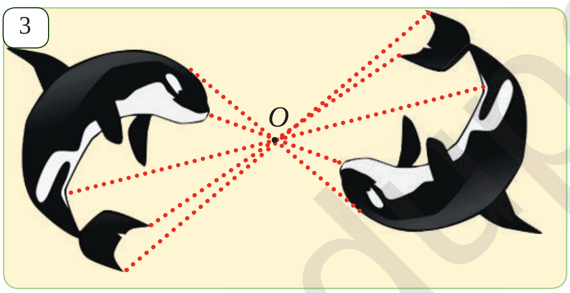
Nokada görä simmetriýa – hereketdir.

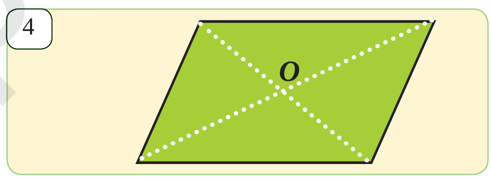
Eger F şekil O nokada görä simmetrik orun çalyşmada özüne öwrülse, ol *merkezi simmetrik şekil* diýlip atlandyrylýar.

Meselem, parallelogram (4-nji surat) diagonallary kesişme O nokadyna görä merkezi simmetrik şekil hasaplanýar.

1


2


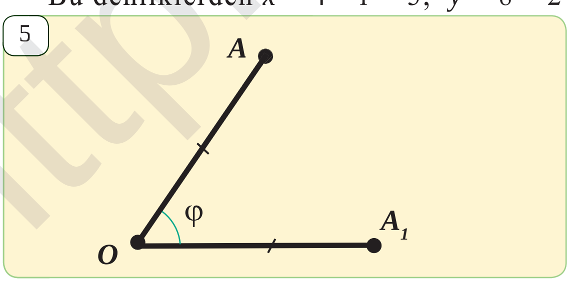
3


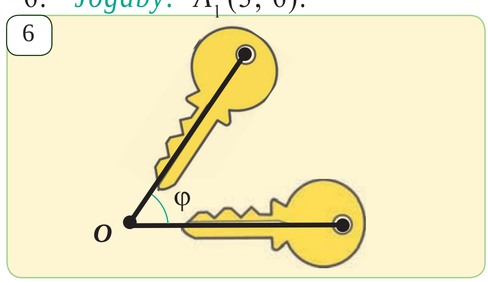
4


1-nji mesele. O (2; 4) nokada görä simmetriýada A (1; 2) nokat haýsy nokada geçýär?

Çözülişi. A_1 $(x; y)$ gözlenýän nokat bolsun. Kesgitlemä görä, O nokat AA_1 kesimiň ortasy. Diýmek, $2 = (x+1)/2$, $4 = (y+2)/2$.

Bu deňliklerden $x = 4 - 1 = 3$, $y = 8 - 2 = 6$. *Jogaby:* A_1 (3; 6).

5


6


Aýdaly, tekizlikde O nokat we φ burç berlen bolup, öz-özüne öwrülmede tekizligiň erkin A nokady şeýle A_1 nokada göçsün, $OA = OA_1$ we $\angle AOA_1 = \varphi$ bolsun. Şeýle öz-özüne öwrülme tekizligi O nokadyň daşynda φ burça *öwrülme* diýlip atlandyrylýar (5-nji surat).

Eger tekizlikde berlen F şekiliň her bir nokadyny O nokada görä φ burça öwürsek, täze F_1 şekil emele gelýär. Munda F şekil O nokada görä φ burça öwrülende F_1 şekile geçdi diýilýär. 6-njy suratda açaryň suraty we ony käbir burça öwürmekde emele gelen şekil getirilen.

Nokada görä öwrülme hem hereket bolýar.

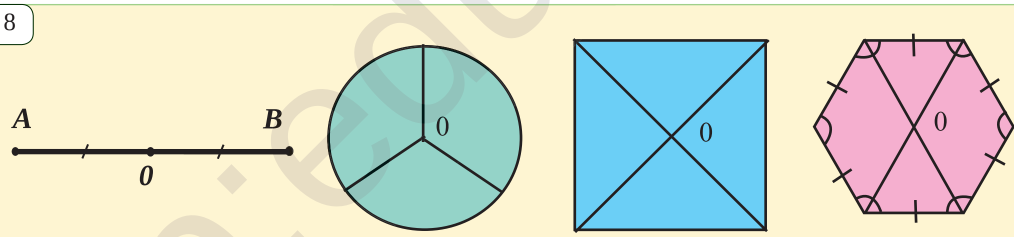
O nokada görä 180° burça öwrülme O nokada görä merkezi simmetriýadan ybarat bolýar.

Koordinatalary bilen berlen A $(x; y)$ nokat koordinata başlangyjyna görä simmetriýada A_1 $(-x; -y)$ nokada geçýär: $A\ (x; y) \longrightarrow A_1\ (-x; -y)$.

Tebigatda simmetriýa her ädimde duşýar. Meselem, janly jandarlaryň köpüsi, hususan-da, adamyň we haýwanlaryň göwresi, ösümlikleriň ýapraklary we gülleri simmetrik düzülen (7-nji surat). Şonuň ýaly-da, jansyz tebigatyň elementleri: garyň bölejikleri, duzuň kristallary, maddalaryň molekulýar gurluşy hem ajaýyp simmetrik şekillerden ybarat. Tebigatdaky bu gözellikden we kämillikden ülňi alan gurluşykçy, inžener we arhitektor ýaly döredijilikli adamlar döreden köp desgalar we binalar, gurluşlar we mehanizmler, tehnika we transport serişdeleri hem simmetrik döredilen.

7

8



Meseleler we ýumuşlar

17.1. O (-2; 3) nokada görä merkezi simmetriýada A (4; 2) nokat haýsy nokada geçýär?

17.2. 8-nji suratda görkezilen şekillerde O nokat simmetriýa merkezi bolýandygyny esaslandyryň.

17.3. (-2; 5), (2; 2), (-6; 12) nokatlar koordinata başlangyjyna görä merkezi simmetriýada haýsy nokatlara geçýär?

17.4. Merkezi simmetriýanyň hereket bolýandygyny subut ediň.

17.5. Parallelogramyň (4-nji surat) diagonallary kesişme nokady O-a görä merkezi simmetrik şekil bolýandygyny subut ediň.

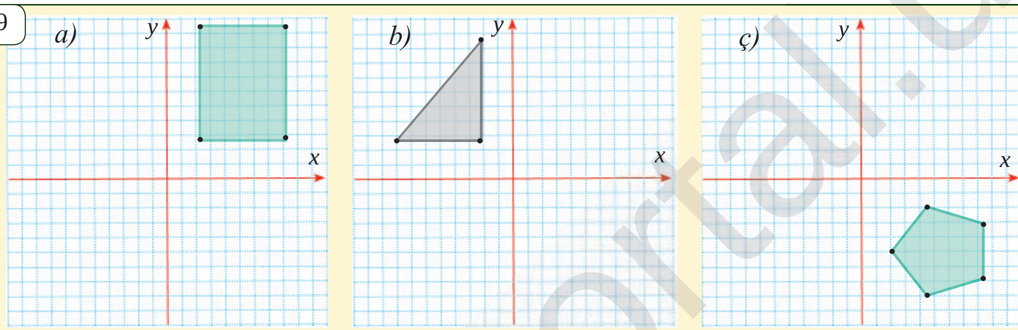
17.6. Gönüburçluk, kwadrat, parallelogram, burç, göni çyzyk we deňýanly üçburçluklaryň haýsylary merkezi simmetrik şekilden ybarat bolýar? Olaryň simmetriýa merkezi nirede ýerleşen?

17.7. Erkin *AB* kesim we onda ýatmaýan *M* nokat çyzyň. *AB* kesime *M* nokada görä simmetrik bolan A_1B_1 kesimi şekillendiriň.

17.8. Erkin *ABC* üçburçluk çyzyň. a) *C* depesine görä; b) medianalarynyň kesişme nokadyna görä simmetrik bolan üçburçlugy şekillendiriň.

17.9. Koordinata tekizliginde depeleri *A* (3; 2), *B* (2; 7), *C* (6; 7) we *D* (6; 2) nokatlarda bolan *ABCD* parallelograma koordinata başlangyjy *O*(0, 0) nokada görä simmetrik bolan $A_1B_1C_1D_1$ parallelogramy şekillendiriň.

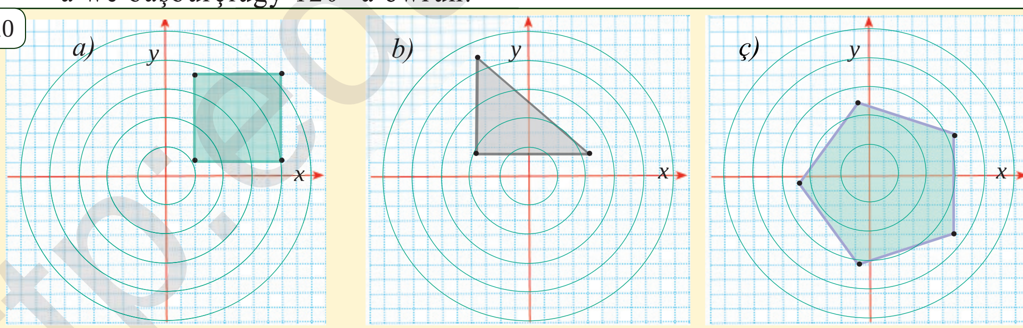
9



17.10. 9-njy suratdaky koordinatalar tekizliginde görkezilen şekilleri depderiňize göçürip çyzyň. Şu koordinatalar tekizliginde bu şekillere koordinata başlangyjyna görä simmetrik bolan şekilleri guruň.

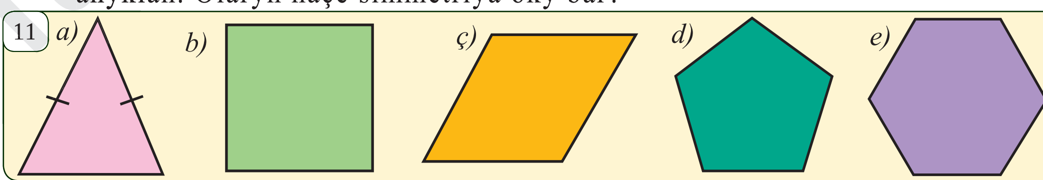
17.11. 10-njy suratdaky koordinatalar tekizliginde görkezilen şekilleri depderiňize göçürip çyzyň. Şu koordinatalar tekizliginde kwadraty 90°-a, üçburçlugy 180°-a we bäşburçlugy 120°-a öwrüň.

10



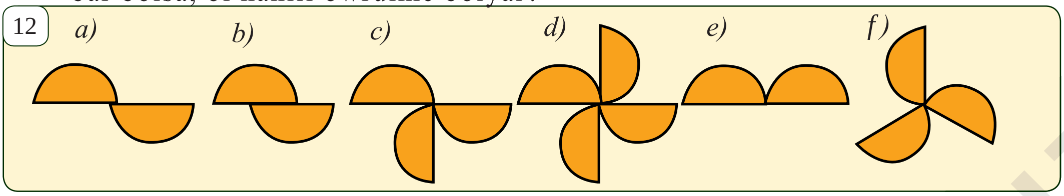
17.12. 11-nji suratdaky köpburçluklar nähili simmetriýa eýe bolýandygyny anyklaň. Olaryň näçe simmetriýa oky bar?

11

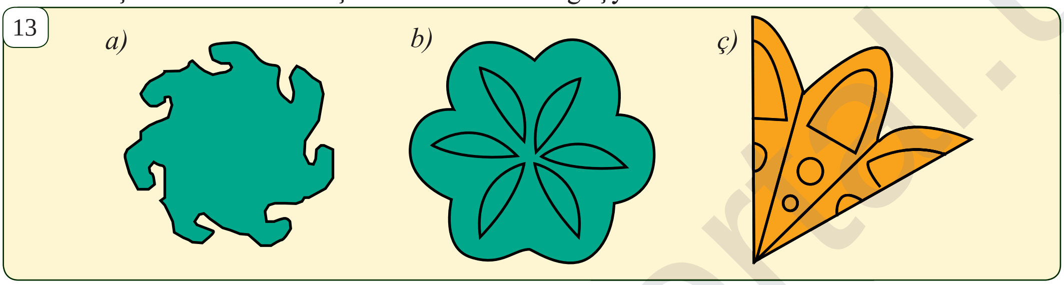


17.13. M, N, S, X, Z, V, T, Y, U, W, D, B, H, K, C, I, E, A harplary nähili simmetriýa eýe bolýandygyny anyklaň.

17.14. 12-nji suratdaky şekiller birnäçe birmeňzeş ýarym tegelejiklerden düzülen. Bu şekilleri öz-özüne geçirýän öwrülme bar ýa-da ýoklugyny anyklaň. Eger bar bolsa, ol nähili öwrülme bolýar?



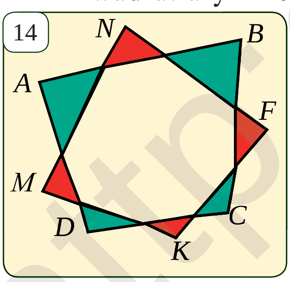
17.15. 13-nji suratdaky figuralaryň haýsylary simmetriýa merkezine eýe. Nähili burça öwrülende bu şekiller öz-özüne geçýär?

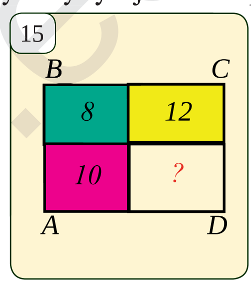


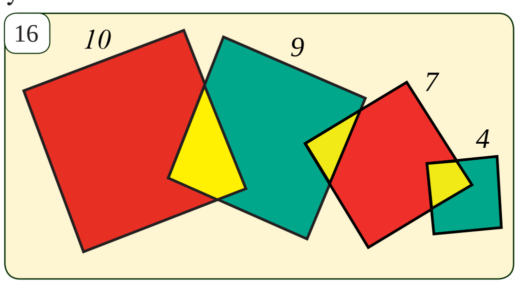
17.16. Iki *ABCD* we *MNPK* deňdeş ýagny deň meýdana eýe bolan dörtburçluklar bir-biriniň üstüne 14-nji suratda görkezilişi ýaly edip goýlan. Gyzyl reňkdäki üçburçlugyň meýdanlary jemi ýaşyl reňke boýalan üçburçluklaryň meýdanynyň jemine deňligini görkeziň.

17.17. *ABCD* gönüburçluk taraplaryna parallel göni çyzyklar bilen dört gönüburçluga bölünen. 15-nji suratda berlenlerden peýdalanyp, boýalmadyk gönüburçlugyň meýdanyny tapyň.

17.18. 16-njy suratdaky kwadratlaryň taraplary 10 *cm*, 9 *cm*, 7 *cm* we 4 *cm*. Gyzyl reňkdäki kwadratlaryň meýdanynyň jemi 112 cm^2-a deň. Gök reňkdäki kwadratlaryň meýdanynyň jemini tapyň.



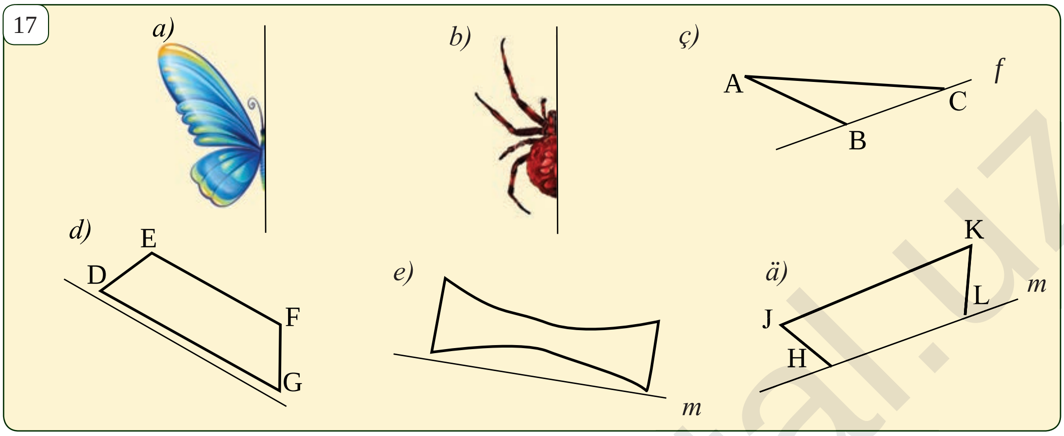




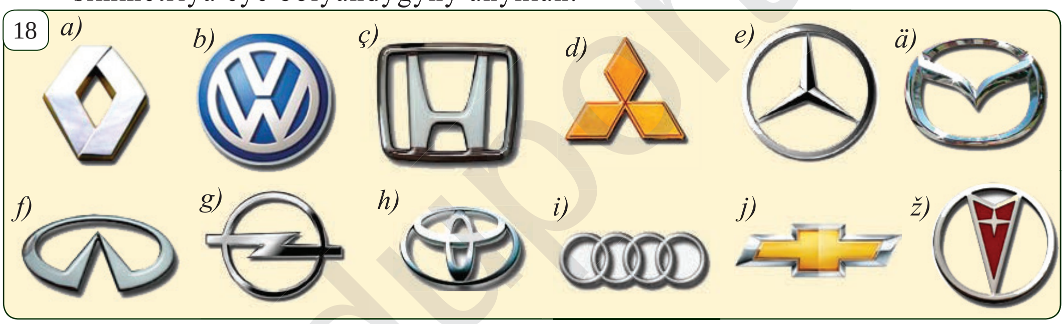
"Gar bölejikleri" taslama işi

Tebigatda ähli gar bölejikleri simmetrik şekile eýe bolýar we bir-birine meňzemeýär. Her bir gar bölejigi merkezine görä 60°-a öwrülende öz-özüne geçýär. 60°-a öwrülende öz-özüne geçýän şekilleri kagyzdan nädip gyrkyp almak mümkin? Birnäçe dürli şekildäki gar bölejiklerini kagyzdan gyrkyp alyň.

17.19. 17-nji suratda görkezilen şekilleri depderiňize çyzyp alyň we berlen oka görä simmetrik öwrülmesini guruň.

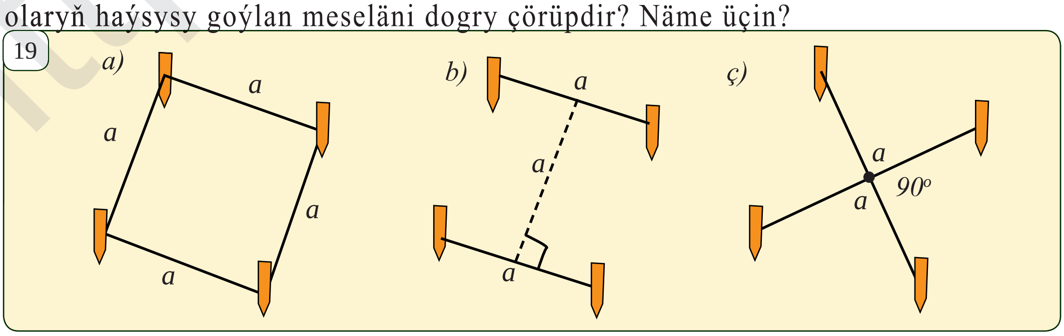


17.20. 18-nji suratda görkezilen awtomobil kompaniýalarynyň logotipleri nähili simmetriýa eýe bolýandygyny anyklaň.



"Gülzara geometriýa" taslama işi.

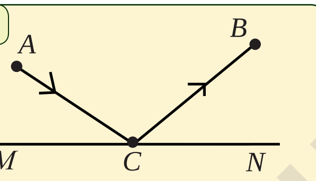
Üç ýoldaş Aly, Weli we Saly kwadrat şeklindäki gülzar döretmekçi. Aly kwadrat şeklindäki gülzary 4 gazyga 4 sany birmeňzeş uzynlykdaky ýüpleri çekip bölmekçi (19-njy *a* surat). Weli kwadrat şeklindäki gülzary 2 birmeňzeş uzynlykdaky ýüpleri gazyklara çekip, olary parallel ýagdaýda aralaryndaky aralygy ýüpüň uzynlygyna deň edip ornaşdyryp bölmekçi (19-njy *b* surat). Saly bolsa 2 birmeňzeş uzynlykdaky ýüpleriň ortalaryny düwüp, olaryň ortalary üstme-üst düşýän we bir-birine perpendikulýar edip çekip gazyklara daňyp bölmekçi (19-njy *ç* surat). Hany aýdyň, olaryň haýsysy goýlan meseläni dogry çörüpdir? Näme üçin?



"Geometriýa we optika" taslama işi.

XVII asyrda beýik fransuz matematik alymy Pýer Ferma aşakdaky kanunalaýyklygy açyş etdi: ýagtylyk şöhlesi bir nokatdan ikinji nokada iň gysga wagtyň dowamynda ýetip barýar.

1. Aýnanyň bir tarapyndaky A we B nokatlar berlen. Ýagtylyk şöhlesi A nokatdan çykyp, aýna urlup B nokatdan geçdi (20-nji surat). Fermanyň prinsipinden peýdalanyp, ACM (düşme burçy) we BCN (serpilme burçy) arasyndaky gatnaşygy tapyň.

20


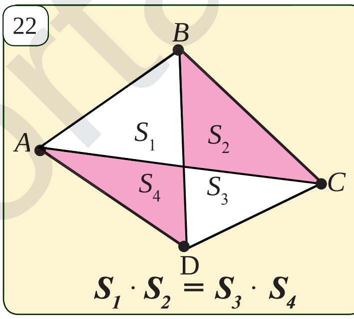
2. Derýanyň kenaryndaky A nokatda fermeriň öýi we B nokatda onuň fermasy ýerleşýär (21-nji surat). Fermer her gün derýa baryp, gaplara suw dolduryp fermasyna eltýärdi. Ol bu işi iň gysga ýol bilen amala aşyrmak üçin nähili ýoldan ýöräni makul?

21

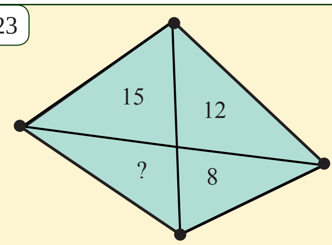

Gyzykly geometriýa

a) 22-nji suratda erkin güberçek dörtburçluk görkezilen. Dörtburçlugyň diagonallary ony dört üçburçluga bölýär. Bu üçburçluklaryň meýdany üçin $S_1 \cdot S_2 = S_3 \cdot S_4$ bolýandygyny subut ediň.

Görkezme: meňzeş şekilleriň häsiýetlerinden peýdalanyň.

22


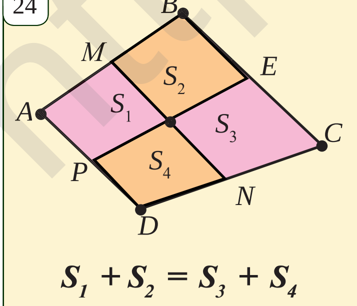
b) 23-nji suratda berlenlerden peýdalanyp, nämälim meýdany tapyň.

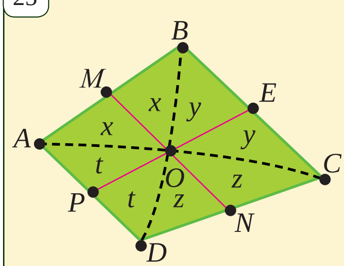
23


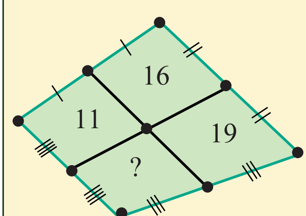
ç) 24-nji suratda erkin güberçek dörtburçluk görkezilen. Dörtburçlugyň garşylykly taraplarynyň ortalary utgaşdyrylan. Netijede dörtburçluk dört dörtburçluga bölünen. Bu dörtburçluklaryň meýdany üçin $S_1 + S_2 = S_3 + S_4$ bolýandygyny subut ediň.

Görkezme: subut etmek üçin 25-nji suratdaky kömekçi şekilden peýdalanyň.

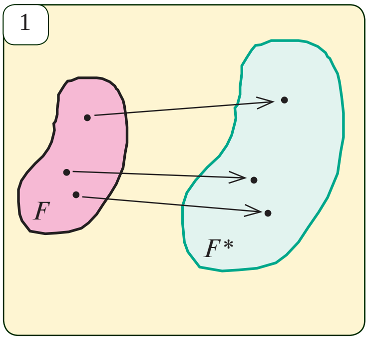
d) 26-njy suratda berlenlerden peýdalanyp, näbelli meýdany tapyň.

24


25


26


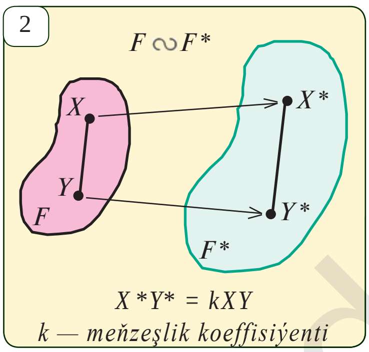
18 GEOMETRIK FIGURALARYŇ MEŇZEŞLIGI



Öňki derslerde köpburçluklaryň meňzeşligi düşünjesi bilen tanyşdyk. Bu düşünjäni diňe köpburçluklar üçin däl, eýsem islendik geometrik figuralar üçin hem girizmek mümkin.

Eger F we F^* şekiller berlen bolup, F şekiliň her bir nokadyna F^* şekiliň käbir nokady laýyk goýlan bolsa we munda F^* şekiliň her bir nokadyna F şekiliň diňe bir nokady gabat gelse, *(1-nji surat)* *F şekil F* şekile öwürlen* diýilýär.

Kesgitleme. Eger F şekili F^* şekile öwürende nokatlaryň arasyndaky aralyklar birmeňzeş san esse özgerse, şeýle öwürmä *meňzeşlik öwrülmesi* diýilýär *(2-nji surat)*.

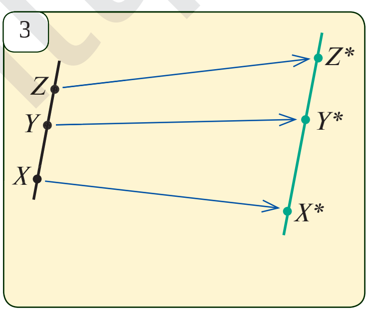


Bu kesgitlemäni aşakdaky ýaly düşündirmek mümkin: Aýdaly, käbir öwrülme netijesinde F şekiliň erkin X, Y nokatlaryna F^* şekiliň X^*, Y^* nokatlary gabat goýlan bolsun. Eger $\boldsymbol{X^*Y^* = k \cdot XY}$, $k>0$ bolsa, şeýle öwrülmä *meňzeşlik öwrülmesi* diýilýär. Munda k — ähli X we Y nokatlar üçin birmeňzeş san bolup, oňa meňzeşlik koeffisiýenti diýilýär.

Eger F we F^* şekiller berlen bolup, bu şekil-lerden biriniň ikinjisine geçirýän meňzeşlik öwrülmesi bar bolsa, F we F^* şekiller özara **meňzeş** diýilýär. Figuralaryň meňzeşligi $\boldsymbol{F \backsim F^*}$ ýaly ýazylýar. Eger meňzeşlik koeffisiýenti k-ny hem görkezmeli bolsa, $\boldsymbol{F \backsim F^*}$ ýaly hem belgilenýär.

Eger meňzeşlik öwrülmesinde X nokada X^* nokat gabat goýlan bolsa, *X nokat X* nokada meňzeş* ýa-da *öwrüldi* diýilýär.

Teorema. ***Meňzeşlik öwrülmesi a) göni çyzygy göni çyzyga; b) şöhläni şöhlä; ç) burçy (onuň ululygyny saklamak bilen) burça; d) kesimi (uzynlygy bu kesimden k esse uzyn bolan) kesime öwürýär.***



Subudy. a) Meňzeşlik koeffisiýenti k bolan öwrülmede bir göni çyzykda ýatýan dürli X, Y we Z nokatlar degişlilikde X^*, Y^* we Z^* nokatlara öwrülsin *(3-nji surat)*.

X, Y, Z nokatlardan biri, aýdaly, Y galan ikisiniň arasynda ýatsyn. Onda $XZ = XY + YZ$. Meňzeşlik öwrülmesiniň kesgitlemesine görä:

$$X^*Z^* = k \cdot XZ = k \cdot (XY + YZ) = k \cdot XY + k \cdot YZ = X^*Y^* + Y^*Z^*.$$

Bu deňlikden X^*, Y^* we Z^* nokatlaryň bir göni çyzykda ýatýandygy gelip çykýar.

Teoremanyň subudyny diňe a) tassyklama üçin getirdik. Galan tassyklamalarda subut etmegi size maşk hökmünde galdyrýarys.

Meseleler we ýumuşlar

18.1. Meňzeşlik öwrülmesi näme?

18.2. Nähili şekillere meňzeş diýilýär?

18.3. Ini 3 *cm*, uzynlygy 4 *cm* bolan gönüburçluga meňzeş, meňzeşlik koeffisiýenti 2-ä deň bolan dörtburçluk guruň.

18.4. 4-nji suratda mekdep howlusynyň shemasy 1:1000 masştabda görkezilen. Ölçeg işlerini ýerine ýetirip,
a) howlynyň; b) mekdep binasynyň;
ç) gülzarlaryň; d) sport meýdanynyň;
e) bagy hakyky ölçeglerini tapyň.

18.5. Eger karta 1:50000 masştabda şekillendirilen bolsa *(5-nji surat)*, Abat we Azat oba merkezleriniň arasyndaky aralygy tapyň.

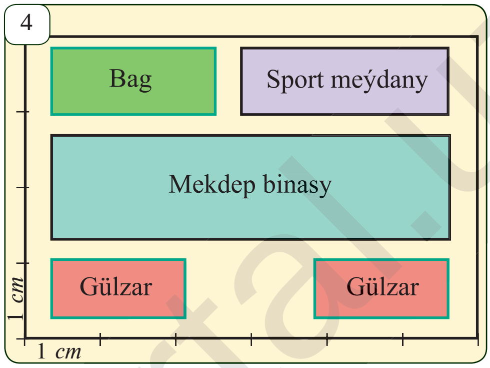
18.6. Meňzeşlik öwrülmesinde şöhleleriň arasyndaky burç saklanndygyny subut ediň.

18.7*. Meňzeşlik öwrülmesinde a) parallelogram parallelograma; b) kwadrat kwadrata; ç) gönüburçluk gönüburçluga; d) trapesiýa trapesiýa öwrülýändigini subut ediň.

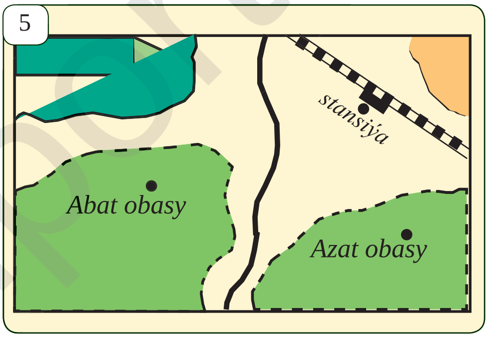
18.8*. ABC üçburçlugyň meňzeşlik öwrülmesinde $A^*B^*C^*$ üçburçluga öwrülýär. Eger meňzeşlik koeffisiýenti 0,6-a we ABC üçburçlugyň perimetri 12 *cm*-e deň bolsa, $A^*B^*C^*$ üçburçlugyň perimetrini tapyň.

18.9. 6-njy suratdan meňzeş gönüburçluklaryň jübütliklerini tapyň we meňzeşlik koeffisiýentlerini anyklaň.

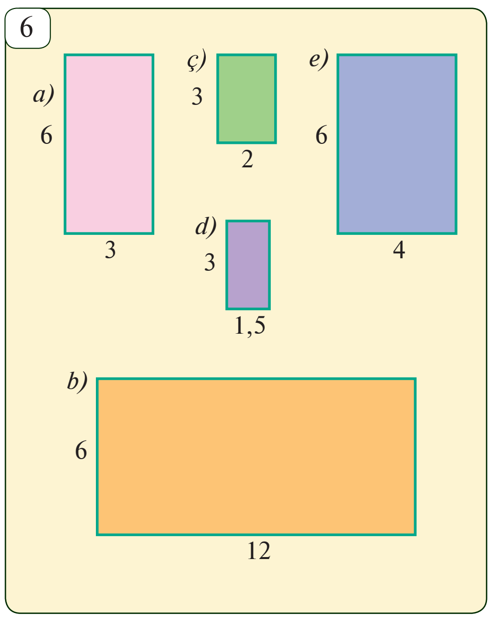
4



5



6



19 MEŇZEŞ KÖPBURÇLUKLARYŇ HÄSIÝETLERI

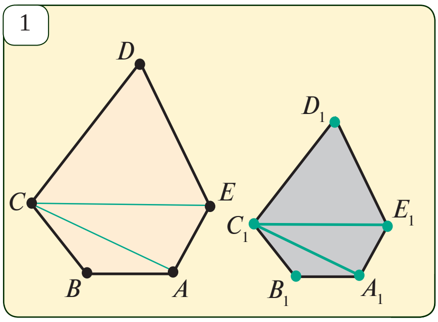
1-nji teorema.* *Meňzeş köpburçluklaryň perimetrleriniň gatnaşygy meňzeşlik koeffisiýentine deň.

Subudy. Hakykatdan hem, $A_1A_2...A_n$ we $B_1B_2...B_n$ köpburçluklar meňzeş we meňzeşlik koeffisiýenti k bolsa, $B_1B_2=k\cdot A_1A_2$, $B_2B_3=k\cdot A_2A_3$, ... , $B_nB_1=k\cdot A_nA_1$ bolýar. Mundan

$$P=B_1B_2+B_2B_3+...+B_nB_1=k\cdot A_1A_2+k\cdot A_2A_3+...+k\cdot A_nA_1=k\cdot(A_1A_2+A_2A_3+...+A_nA_1)=k\cdot P_1$$

deňligi alarys. *Teorema subut edildi.*

2-nji teorema.* *Meňzeş köpburçluklary birmeňzeş sandaky meňzeş üçburçluklara bölmek mümkin.



Subudy. Aýdaly, $ABCDE$ we $A_1B_1C_1D_1E_1$ köpburçluklar meňzeş bolup, meňzeşlik koeffisiýenti k bolsun.

Özara laýyk C we C_1 depelerden CA, CE we C_1A_1, C_1E_1 diagonallary geçirýäris (1-nji surat). Netijede, köpburçluklar birmeňzeş sandaky üçburçluklara bölündi. Emele gelen üç jübüt degişli üçburçluklaryň meňzeşligini görkezýäris.

1.$\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$. Çünki, bu üçburçluklarda, şerte görä, $\angle B=\angle B_1$, $\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{BC}{B_1C_1}=$ k. Üçburçluklaryň meňzeşliginiň TBT nyşanyna görä,

$\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$.

2. $\Delta CDE \backsim \Delta C_1D_1E_1$. Bu meňzeşlik 1-nji bentdäki ýaly subut edilýär.

3. $\Delta ACE \backsim \Delta A_1C_1E_1$. Hakykatdan hem, $\angle CAE$ we $\angle C_1A_1E_1$ burçlara garaýarys:

$$\angle CAE=\angle BAE-\angle CAB,\ \angle C_1A_1E_1=\angle B_1A_1E_1-\angle C_1A_1B_1.$$

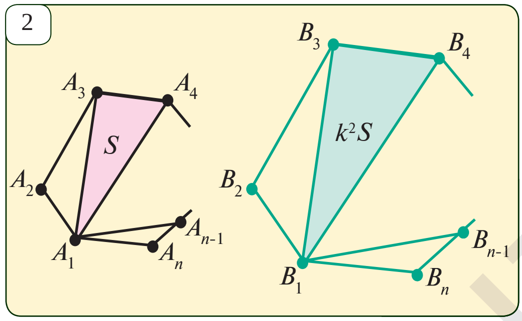
Bu ýerde, $\angle BAE=\angle B_1A_1E_1$ (berlen meňzeş bäşburçluklaryň degişli burçlary). $\angle CAB=\angle C_1A_1B_1$ (meňzeş ABC we $A_1B_1C_1$ üçburçluklaryň degişli burçlary).

Diýmek, $\angle CAE=\angle C_1A_1E_1$.

AC we AE hem-de A_1C_1 we A_1E_1 taraplara garaýarys: $AC=kA_1C_1$, çünki olar özara meňzeş ABC we $A_1B_1C_1$ üçburçluklaryň degişli taraplary, $AE=kA_1E_1$, çünki olar hem berlen meňzeş bäşburçluklaryň degişli taraplary. Diýmek, üçburçluklaryň meňzeşliginiň TBT nyşanyna görä, $\Delta ACE \backsim \Delta A_1C_1E_1$. Erkin meňzeş köpburçluklar üçin hem şunuňýa ly pikir ýöretmeler dogry bolýandygy aýdyň.

Teorema subut edildi.

3-nji teorema.* *Meňzeş köpburçluklaryň meýdanlarynyň gatnaşygy meňzeşlik koeffisiýentiniň kwadratyna deň.



Subudy. Aýdaly, $A_1A_2...A_n$ we $B_1B_2...B_n$ köpburçluklar meňzeş we k — meňzeşlik koeffisiýenti bolsun. Onda $A_1A_2A_3$, $A_1A_3A_4$, ..., $A_1A_{n-1}A_n$ üçburçluklar degişlilikde, $B_1B_2B_3$, $B_1B_3B_4$, ..., $B_1B_{n-1}B_n$ üçburçluklara meňzeş bolup, meňzeş üçburçluklaryň meýdanlarynyň gatnaşygy k^2 -a deň bolýar (*2-nji surat*):

$$S_{A_1A_2A_3} = k^2S_{B_1B_2B_3},\ S_{A_1A_3A_4} = k^2S_{B_1B_3B_4},\ \dots,\ S_{A_1A_{n-1}A_n} = k^2S_{B_1B_{n-1}B_n}.$$

Bu deňlikleriň degişli böleklerini goşsak,

$S_{A_1A_2...A_n} = k^2 S_{B_1B_2...B_n}$ bolýar. *Teorema subut edildi.*

Mesele. Perimetrleri 18 *cm* we 24 *cm* bolan iki meňzeş köpburçlugyň meýdanlarynyň gatnaşygyny tapyň.

Çözülişi. 1) Meňzeş köpburçluklaryň perimetrleriniň gatnaşygy meňzeşlik koeffisiýentine deňliginden peýdalanyp, $k = 24 : 18 = 4 : 3$ bolýandygyny tapýarys.

2) Meňzeş köpburçluklaryň meýdanlarynyň gatnaşygy meňzeşlik koeffisiýentiniň kwadratyna deň bolany üçin gözlenýän gatnaşyk $k^2 = \frac{16}{9}$ -a deň. *Jogaby:* $\frac{16}{9}$.

Meseleler we ýumuşlar

19.1. Meňzeş köpburçluklaryň perimetrleriniň gatnaşygy nämä deň?

19.2. Meňzeş köpburçluklaryň meýdanlarynyň gatnaşygy baradaky teoremany düşündiriň.

19.3. Üçburçluk bilen dörtburçluk meňzeş bolmagy mümkinmi?

19.4. Meýdanlary 6 m^2 we 24 m^2 bolan iki dörtburçluk meňzeş. Meňzeşlik koeffisiýentini tapyň.

19.5. Iki köpburçlugyň perimetrleri 18 *cm* we 36 *cm*-e, meýdanlarynyň jemi bolsa 30 cm^2-a deň. Köpburçluklaryň meýdanlaryny tapyň.

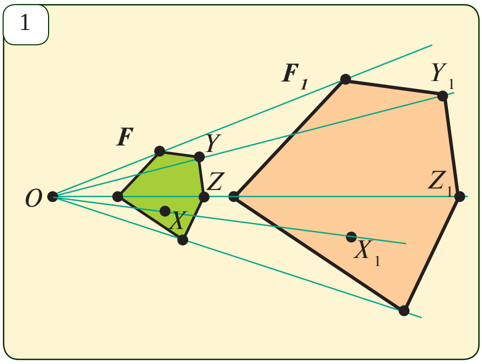
19.6. Perimetri 84 *cm* bolan üçburçlugyň bir tarapyna parallel edip geçirilen göni çyzyk ondan perimetri 42 *cm-e* we meýdany 26 cm^2-a deň üçburçluk böldi. Berlen üçburçlugyň meýdanyny tapyň.

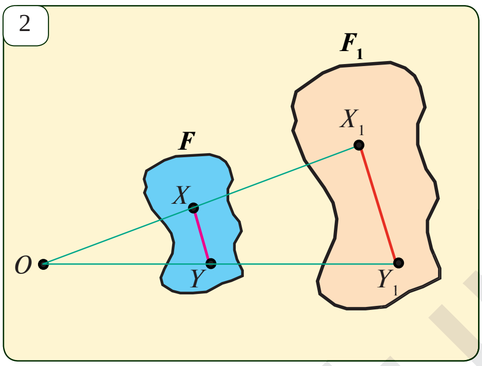
19.7. *O* nokada görä simmetrik şekiller meňzeş bolarmy? Oka görä simmetrik şekiller näme? Olaryň meňzeşlik koeffisiýenti nämä deň?

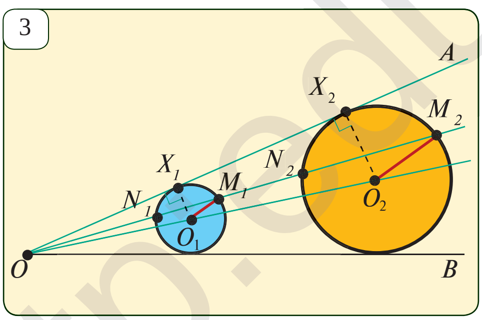
19.8. Dörtburçluk şeklindäki pagta meýdany kartada meýdany 12 cm^2 bolan dörtburçluk bilen şekillenýärt. Eger kartanyň masştaby 1:1000 bolsa, meýdanyň hakyky meýdanyny hasaplaň.

19.9*. Meýdanlary 8 cm^2 we 32 cm^2 bolan iki meňzeş üçburçluk perimetrleriniň jemi 48 *cm*-e deň. Üçburçluklaryň perimetrlerini tapyň.

20 GOMOTETIÝA WE MEŇZEŞLIK







Iň ýönekeý meňzeş öz-özüne öwrülmelerden biri gomotetiýadyr. Aýdaly, F — şekil, O — nokat we k — položitel san berlen bolsun. F şekiliň islendik X nokady arkaly OX şöhle geçirýäris we bu şöhlede uzynlygy $k \cdot OX$ bolan OX_1 kesimi goýýarys *(1-nji surat)*. Şu usul bilen F şekiliň her bir X nokadyna X_1 nokady laýyk goýýan öwrülmä *gomotetiýa* diýilýär. Munda, O nokat gomotetiýa merkezi, k sani gomotetiýa koeffisiýenti, F we gomotetiýa netijesinde F öwrülýän F_1 şekillere bolsa *gomotetik şekiller* diýilýär.

Teorema. ***Gomotetiýa meňzeşlik öwrülmesi bolýar.***

Subudy. Erkin O merkezli, k koeffisiýentli gomotetiýada F şekiliň X we Y nokatlary X_1 we Y_1 nokatlara geçsin *(2-nji surat)*. Onda, gomotetiýanyň kesgitlemesine görä, XOY we X_1OY_1 üçburçluklarda $\angle O$ — umumy we $\dfrac{OX_1}{OX} = \dfrac{OY_1}{OY} = k$ bolýar.

Diýmek, XOY we X_1OY_1 üçburçluklar iki tarapy we olaryň arasyndaky burçy boýunça meňzeş.

Şonuň üçin $\dfrac{X_1Y_1}{XY} = \dfrac{OX_1}{OX}$, hususan-da, $X_1Y_1 = k \cdot XY$

Teorema subut edildi.

Mesele. AOB burçuň taraplaryna galtaşýan erkin iki töwerek gomotetik bolýandygyny we O nokat şu gomotetiýa üçin merkez bolýandygyny subut ediň.

Subudy. Merkezleri O_1 we O_2 bolan töwerekler AOB burçuň taraplaryna galtaşsyn *(3-nji surat)*. Bu töwerekleriň gomotetik bolýandygyny subut edýäris.

Töwerekler OA şöhlä degişlilikde X_1 we X_2 nokatlarda galtaşan bolsun *(3-nji surat)*.

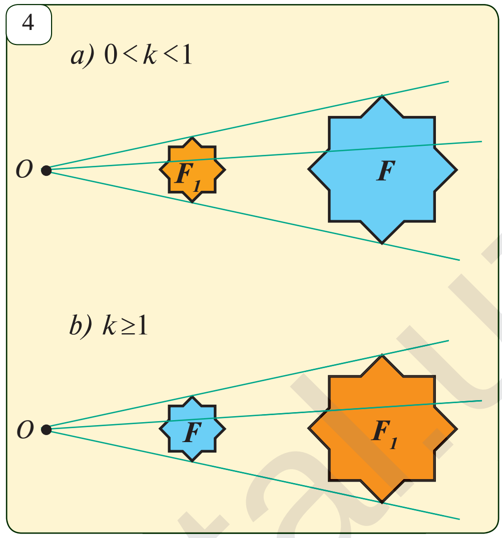
Onda, $\Delta OX_1O_1 \backsim \Delta OX_2O_2$, çünki

$$\angle X_1OO_1 = \angle X_2OO_2 \quad \text{we} \quad \angle OX_1O_1 = \angle OX_2O_2 = 90^\circ.$$

Mundan, $\dfrac{O_2X_2}{O_1X_1} = \dfrac{OO_2}{OO_1}$.

Sag tarapdaky gatnaşygy k bilen belgileýäris we koeffisiýenti $k = \frac{O_2X_2}{O_1X_1}$, merkezi O bolan gomotetiýa garaýarys. Aýdaly, bu gomotetiýada O_1 merkezli töweregiň islendik M_1 nokady M_2 nokada geçen bolsun. Onda, $O_2M_2 = k\ O_1M_1$ ýa-da $O_2M_2 = \frac{O_2X_2}{O_1X_1} \cdot O_1M_1$.

Mundan, $O_1X_1 = O_1M_1$ bolany üçin $O_2M_2 = O_2X_2$ deňligi alarys. Bu M_2 nokat merkezi O_2 nokatda, radiusy O_2X_2 -ä deň bolan töwerekde ýatýandygyny aňladýar. Diýmek, garalýan töwerekler özara gomotetik eken.



Ugrukdyryjy gönükme

4-nji suratda gomotetiýanyň koeffisiýenti a) $0<k<1$; b) $k \geq 1$ bolan gomotetik şekiller görkezilen. Gomotetiýanyň koeffisiýentiniň bahasyna garap gomotetik figuralaryň “gysylmagy” ýa-da “süýnmegi” barada nähili netije çykarmak mümkin?

Meseleler we ýumuşlar

20.1. Gomotetiýa näme? Gomotetiýanyň merkezi, koeffisiýenti näme?

20.2. Gomotetiýanyň meňzeşlik öwrülmesi bolýandygyny düşündiriň.

20.3. Üçburçluk çyzyň. Üçburçlugyň a) içki zolagynda; b) daşky zolagynda O nokat belgiläň we koeffisiýenti 2-ä deň bolan O merkezli gomotetiýa garap, berlen üçburçluga gomotetik üçburçluk guruň.

20.4. Perimetrleri 18 *cm* we 27 *cm* bolan iki romb özara gomotetik. Bu romblaryň taraplarynyň we meýdanlarynyň gatnaşyklaryny tapyň.

20.5. Gomotetiýada X nokat X_1 nokada, Y nokat Y_1 nokada geçýär. Eger X, X_1, Y, Y_1 nokatlar bir göni çyzykda ýatmasa, şu gomotetiýanyň merkezini tapyň.

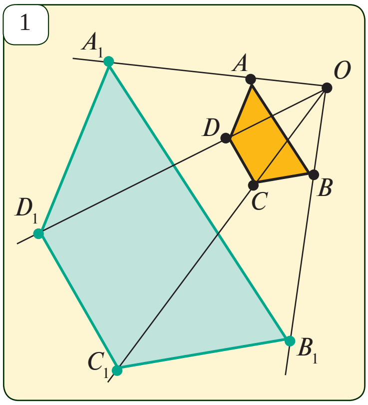
20.6. Koeffisiýenti 2-ä deň bolan gomotetiýada X nokat X_1 nokada geçýändigi mälim. Şu gomotetiýanyň merkezini guruň.

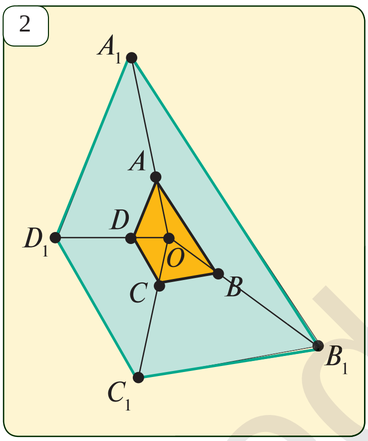
20.7. Töwerege gomotetik şekil töwerek bolýandygyny subut ediň.

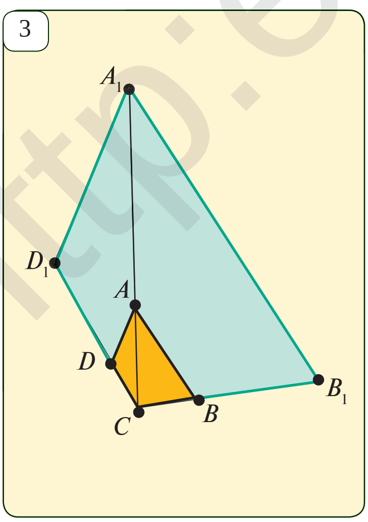
20.8. Töwerek çyzyň. Merkezi töweregiň merkezinde we koeffisiýenti a) $\frac{1}{2}$; b) 2; ç) 3; d) $\frac{1}{3}$-e deň bolan gomotetiýada çyzylan töwerege gomotetik bolan şekilleri guruň.

20.9. Burç we onuň içki zolagynda A nokat berlen. Burçuň taraplaryna galtaşyp, A nokatdan geçýän töwerek guruň.

21 MEŇZEŞ KÖPBURÇLUKLARY GURMAK







Şu wagta çenli teoremalary subut edende we meseleleri çözende dürli meňzeş üçburçluklary gurup geldik. Meňzeş köpburçluklar nähili gurulýar? Aşakda şu bilen tanyşarsyňyz.

Mesele. Berlen $ABCD$ dörtburçluga meňzeş, meňzeşlik koeffisiýenti 3-e deň bolan $A_1B_1C_1D_1$ dörtburçluk guruň *(1-nji surat)*.

Gurmak. Tekizlikde erkin O nokady alýarys. Ondan we dörtburçlugyň depelerinden geçýän OA, OB, OC we OD şöhleleri geçirýäris. Bu şöhlelerde O nokatdan $OA_1=3OA$, $OB_1=3OB$, $OC_1=3OC$ we $OD_1=3OD$ kesimleri goýýarys. Emele gelen $A_1B_1C_1D_1$ dörtburçluk gözlenýän dörtburçlukdyr.

Esaslandyrma. $ABCD \backsim A_1B_1C_1D_1$ bolýandygyny subut edýäris.

1. *Degişli taraplaryň proporsionallygy.*

a) $\Delta AOD \backsim \Delta A_1OD_1 \Rightarrow \dfrac{A_1D_1}{AD}=\dfrac{O_1D_1}{OD}=\dfrac{OA_1}{OA}=3$; (1)

b) $\Delta DOC \backsim \Delta D_1OC_1 \Rightarrow \dfrac{OD_1}{OD}=\dfrac{D_1C_1}{DC}=\dfrac{OC_1}{OC}=3$. (2)

(1) we (2) deňlikden $\dfrac{A_1D_1}{AD}=\dfrac{D_1C_1}{DC}$ bolýandygyny alarys.

Dörtburçluklaryň başga degişli taraplarynyň proporsionallygyny edil şuňa meňzeş subut etmek mümkin.

2. *Degişli burçlaryň deňligi.*

Meňzeş üçburçluklaryň degişli burçlary deň bolany üçin, $\angle A_1D_1O=\angle ADO$, $\angle C_1D_1O=\angle CDO$.

Onda, $\angle A_1D_1C_1=\angle A_1D_1O+\angle C_1D_1O=$
$=\angle ADO+\angle CDO=\angle ADC$,

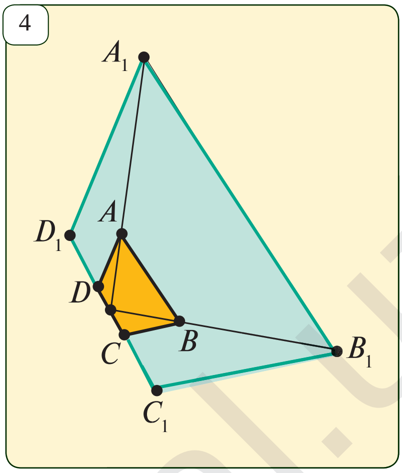
ýagny dörtburçluklaryň degişli $A_1D_1C_1$ we ADC burçlary deň.

Edil şuňa meňzeş dörtburçluklaryň başga degişli burçlarynyň deňligi subut edilýär.

Diýmek, $ABCD$ we $A_1B_1C_1D_1$ dörtburçluklar meňzeş. Taraplary erkin sanda bolan köpburçluga meňzeş köpburçluk hem edil şunuň ýaly gurulýar.

Gomotetiýanyň merkezini bu meselede dörtburçlugyň daşky zolagyndan saýladyk. Umuman alanda, gomotetiýanyň merkezini dörtburçlugyň içki zolagynda *(2-nji surat)*, käbir depesinde *(3-nji surat)* ýa-da käbir tarapynda *(4-nji surat)* ýatýan edip saýlap hem bilerdik. Gomotetiýanyň merkezini nirede alsak-da, berlen *ABCD* dörtburçluga meňzeş we meňzeşlik koeffisiýenti 3-e deň bolan dörtburçluklar özara deň bolýar.

4



Meseleler we ýumuşlar

21.1. Berlen köpburçluga meňzeş köpburçlugy gurmagyň yzygiderligini aýdyň.

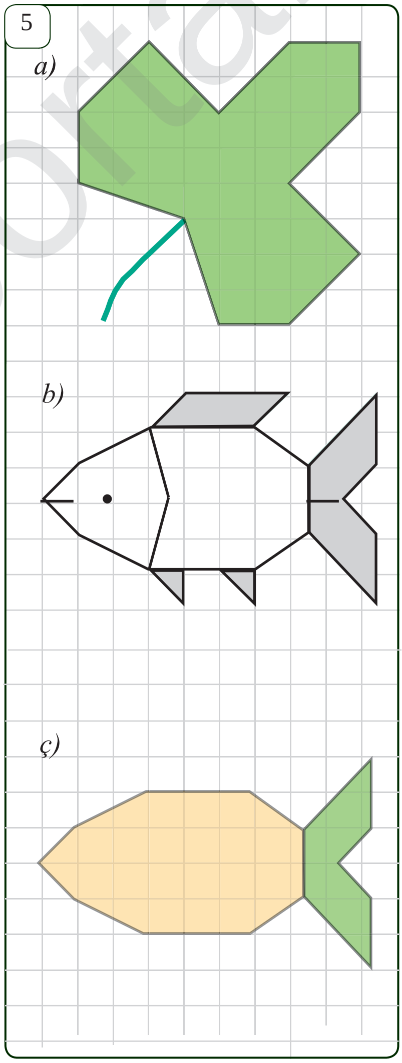
21.2. Depderiňize käbir *ABCDE* bäşburçluk çyzyň. Gomotetiýanyň kömeginde bu bäşburçluga meňzeş, meňzeşlik koeffisiýenti 0,5-e deň bolan bäşburçluk guruň. Gomotetiýanyň merkezi a) *C* nokatda; b) bäşburçlugyň içinde; ç) *AB* tarapda bolan ýagdaýlara aýry garaň.

21.3. Gözenekleri hasaba almak bilen, 5-nji suratda berlen şekilleri depderiňize çyzyň: a) ýapraga meňzeşlik koeffisiýenti 3-e deň bolan ýapragy; b) balyjaga meňzeşlik koeffisiýenti 0,8-e deň bolan balyjagy ç)käşire meňzeşlik koeffisiýenti 1,8-e deň bolan käşiri gomotetiýanyň kömeginde çyzyň.

21.4. F_1 köpburçluk F_2 köpburçluga meňzeş, k — meňzeşlik koeffisiýenti. P_1, P_2, S_1, S_2 harplar bilen degişlilikde bu köpburçluklaryň perimetrleri we meýdanlary belgilenen. Aşakdaky jedweli depderiňize göçüriň we ony dolduryň.

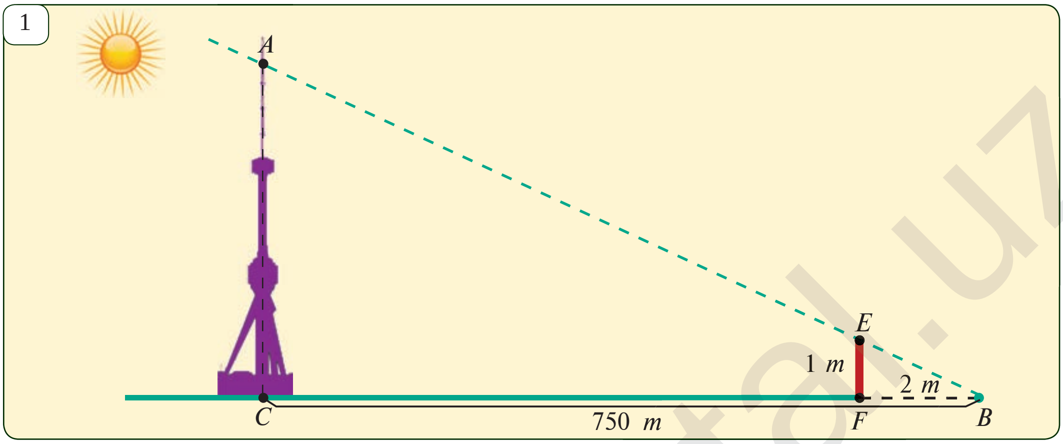
	P_1	P_2	S_1	S_2	k
a)	84		100	25	
b)	14	28		48	
ç)		150	200	100	
d)		30	24		3

5



22 AMALY GÖNÜKME WE ONUŇ ULANYLYŞY

1



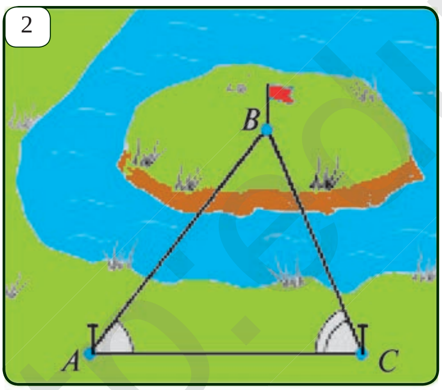
1. *Beýikligi anyklamak.*

Ýerde durup, Daşkent teleminarasynyň beýikligini tapalyň. Minaranyň depesi — A nokadyň kölegesi B nokat bolsun. EF taýagy wertikal ýagdaý şeýle kakýarys (*1-nji surat*), ýagny taýagyň E ujunyň kölegesi hem B nokatda bolsun. Minaranyň esasyny C bilen belgileýris. Emele gelen, gönüburçly ABC we EBF üçburçluklar meňzeş bolýar. Şonuň üçin,

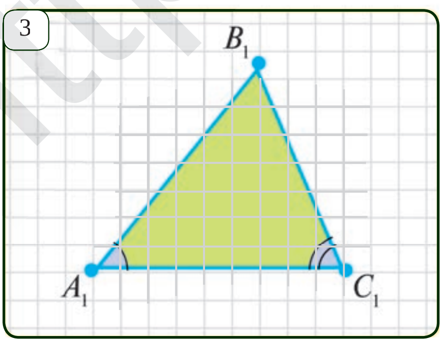
$$\frac{AC}{EF}=\frac{BC}{BF} \quad \text{ýa-da} \quad AC=\frac{AC\cdot EF}{BF}$$

BC, BF aralyklary we EF taýagyň uzynlygyny ölçäp, emele gelen formuladan teleminoranyň beýikligi — AC kesimiň uzynlygyny tapýarys. Meselem, eger $EF=1$ m, $BC=750$ m, $FB=2$ m bolýandygy mälim bolsa, onda $AC=375$ m bolýar.

2



3



2. *Baryp bolmaýan ýere çenli bolan aralygy ölçemek.*

Aýdaly, A nokatdan barmak mümkin bolmadyk B nokada çenli bolan aralygy anyklamaly bolsun (*2-nji surat*). A nokatdan baryp bolýan şeýle C nokady belgileýäris, ýagny ondan garanda A we B nokatlar görnüp dursun hem-de AC aralygy ölçäp bolsun.

Esbaplaryň kömeginde BAC we ACB burçlary ölçeýäris. Aýdaly, $\angle BAC=a$ we $\angle ACB=b$ bolsun. Kagyza $\angle A_1=a$, $\angle C_1=b$ bolan $A_1B_1C_1$ üçburçluk guryarys. Onda ABC we $A_1B_1C_1$

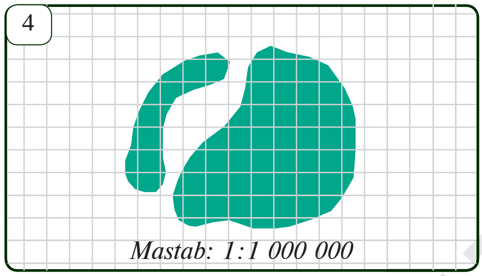
üçburçluklar iki burçy boýunça meňzeş bolýar (*2-nji we 3-nji suratlar*). Mundan,

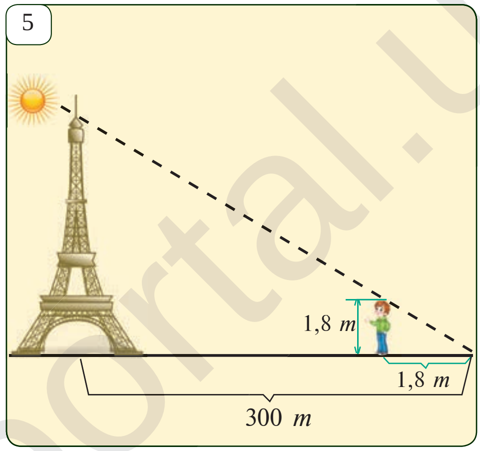
$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1} \text{ ýa-da } AB=\frac{AC\cdot A_1B_1}{A_1C_1}.$$

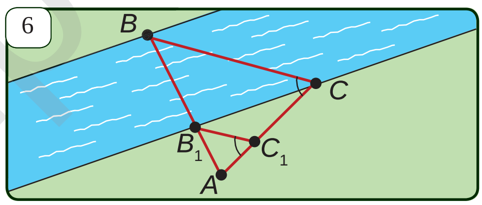
AC aralyk we A_1B_1, A_1C_1 kesimleri ölçäp, netijeda emele gelen formulanyň kömeginde AB kesim hasaplanýar. Hasaplama işlerini aňsatlaşdyrmak maksadynda $AC:A_1C_1$ gatnaşygy 100:1, 1000:1 ýaly gatnaşykda almak mümkin. Meselem, $AC=130$ *m*, $\angle A=73°$, $\angle C=58°$ bolsa, kagyzda $A_1B_1C_1$ üçburçlugy $\angle A_1=73°$, $\angle C_1=58°$, $A_1C_1=130$ *mm* edip çyzýarys. A_1B_1 kesimi ölçäp, onuň 153 *mm* bolýandygyny tapýarys. Onda, gözlenen aralyk 153 *m* bolýar.

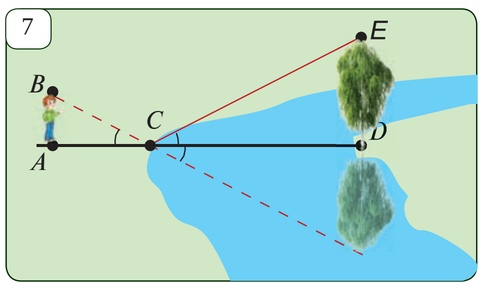
3. *Köl barada amaly iş.*

4-nji suratda suw basseýniniň kosmos gämisinden alnan suraty görkezilen. Onuň esasynda degişli ölçeg we hasaplama işlerini ýerine ýetirip, suw basseýniniň meýdanynyň ýakynlaşan bahasyny tapyň.









Meseleler we ýumuşlar

22.1. Eger boýy 1,7 *m* bolan adamyň kölegesiniň uzynlygy 2,5 *m* bolsa, kölegesiniň uzynlygy 10,2 *m* bolan agajyň beýikligi näçe bolar?

22.2. 5-nji suratda görkezilen minaranyň beýikligini anyklaň.

22.3. 6-njy suratdaky iki meňzeş AB_1C_1 we ABC üçburçluklaryň kömeginde derýanyň giňligini (inini) anyklamaly. Eger $AC=100$ *m*, $AC_1=32$ *m* we $AB_1=34$ *m* bolsa, derýanyň ini (BB_1)-i tapyň.

22.4. Ýabyň kenaryndaky DE agajyň suwdaky suraty A nokatdaky adama görnüp dur. Eger $AB=165$ *cm*, $AC=120$ *cm*, $CD=4{,}8$ *m* bolsa, agajyň beýikligini tapyň *(7-nji surat)*.

22.5. Howluda käbir agajy saýlaň we onuň beýikligini anyklaň. Bu işi nähili ýerine ýetirendigiňiz barada hasabat taýýarlaň.

23 MESELELER ÇÖZMEK

1-nji mesele. *ABCD* trapesiýanyň *AB* we *CD* gapdal taraplarynda *M* we *N* nokatlar alnan. Munda *MN* kesim trapesiýanyň esaslaryna parallel we trapesiýanyň diagonallary kesişen *O* nokatdan geçýär. Eger $BC = a$, $AD = b$ bolsa, a) *MO;* b) *ON;* ç) *MN* kesimleri tapyň (*1-nji surat*).

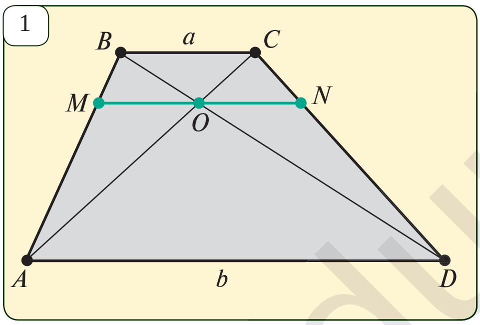
Çözülişi. 1) *AOD* we *BOC* üçburçluklar BB nyşana görä meňzeş, çünki $\angle BOC = \angle AOD$, $\angle OBC = \angle ADO$. Mundan,

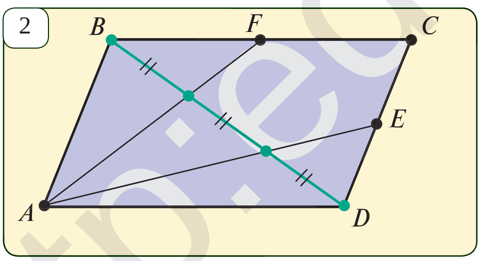
$$\frac{OC}{OA} = \frac{BC}{AD} \quad \text{ýa-da} \quad \frac{OC}{OA} = \frac{a}{b} \qquad (1)$$

2) *ABC* we *AOM* üçburçluklar hem BB nyşana görä meňzeş, çünki $\angle AMO = \angle ABC$, $\angle ACB = \angle AOM$. Mundan,

$$\frac{AC}{OA} = \frac{BC}{MO} \quad \text{ýa-da} \quad \frac{OA+OC}{OA} = \frac{a}{MO} \Rightarrow 1+\frac{OC}{OA} = \frac{a}{MO},\ \frac{OC}{OA} = \frac{a}{MO} - 1. \qquad (2)$$

3) (1) we (2) deňlikleriň sag böleklerini deňleşdirip,





$$\frac{a}{MO} - 1 = \frac{a}{b}$$

deňligi we ondan

$$MO = \frac{ab}{a+b} \qquad (3)$$

bolýandygyny tapýarys. Ýokardaky ýaly çemeleşip

$$ON = \frac{ab}{a+b} \qquad (4)$$

deňligi, soň bolsa (3) we (4) deňlikleriň degişli taraplaryny goşup

$$MN = \frac{2ab}{a+b}$$

deňligi alarys.

Jogaby: a) $\frac{ab}{a+b}$; b) $\frac{ab}{a+b}$; ç) $\frac{2ab}{a+b}$.

Ýatlatma. *Bu meseläniň çözüwinden MO = ON bolýandygy gelip çykýar.*

Meseleler we ýumuşlar

23.1. *ABC* üçburçlugyň *AB* we *BC* gapdal taraplarynda *D* we *E* nokatlar alnan. Eger $AC \| DE$, $AC = 6$, $DB = 3$ we $DE = 2$ bolsa, *AB* tarapy tapyň.

23.2. Iki meňzeş köpburçlugyň meýdanlary 8 dm^2 we 72 dm^2 -a deň, olardan biriniň perimetri ikinjisiniňkiden 26 *dm* kem. Uly köpburçlugyň perimetrini tapyň.

23.3. Perimetri 1 *m* bolan $A_1B_1C_1$ üçburçluk $A_2B_2C_2$ üçburçlugyň taraplarynyň ortalaryny, $A_2B_2C_2$ üçburçluk $A_3B_3C_3$ üçburçluk taraplarynyň ortalaryny,

$A_3B_3C_3$ üçburçluk bolsa $A_4B_4C_4$ üçburçluk taraplarynyň ortalaryny utgaşdyrmakdan alnan bolsa, $A_4B_4C_4$ üçburçlugyň perimetri näçe bolar?

23.4. Iki meňzeş üçburçlugyň perimetrleri 18 *dm* we 36 *dm* -e, meýdanlarynyň jemi 30 dm^2 -a deň. Uly üçburçlugyň meýdanyny tapyň.

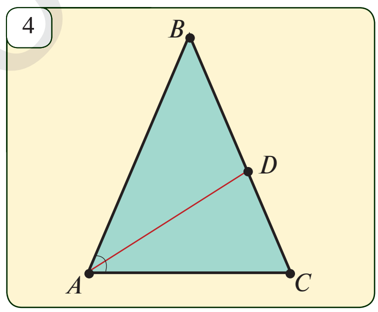
23.5. Romb taraplarynyň ortalary gönüburçlugyň depeleri bolýandygyny subut ediň.

23.6. ABC üçburçluk guruň. Bu üçburçluga meňzeş we meýdany ABC üçburçlugyň meýdanyndan 9 esse kiçi bolan $A_1B_1C_1$ üçburçlugy guruň.

23.7*. E we F nokatlar degişlilikde $ABCD$ parallelogramyň CD we BC taraplarynyň ortalary. AF we AE göni çyzyklar BD diagonaly deň üç bölege bölýändigini subut ediň (*2-nji surat*).

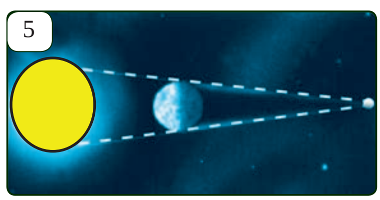
23.8. 3-nji suratda Daşkent şäherindäki Halklar dostlugy köşgüniň öňünde dikilen iň uly Özbegistany baýdagy görkezilen. Baýdagyň ölçegleri 20 *m* × 30 *m* bolýandygy mälim bolsa, çyzgydan degişli kesimleriň uzynlygyny ölçäp anyklap, baýdagyň sütüniniň hakyky beýikligini tapyň.

23.9. Deňýanly üçburçlugyň esasyndaky burç bissektrisasy bu üçburçlukdan özüne meňzeş üçburçluk bölýär. Üçburçluk burçlaryny anyklaň (*4-nji surat*, $AB = BC$, $\Delta ABC \backsim \Delta CAD$).



23.10. Töwerek guruň we onda O nokat belgiläň. Merkezi O nokatda we koeffisiýenti 2-ä deň bolan gomotetiýada berlen töwerege gomotetik bolan töwerek guruň.

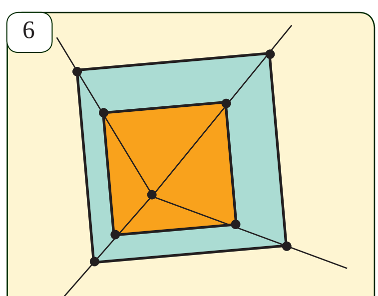
23.11. Iki meňzeş köpburçlugyň perimetrleriniň gatnaşygy 2:3 ýaly. Uly köpburçlugyň meýdany 27 bolsa, kiçi köpburçlugyň meýdanyny tapyň.



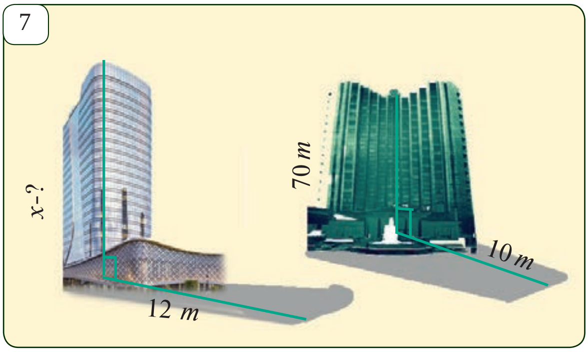
23.12. 5-nji suratda Günüň doly tutulan ýagdaýy görkezilen. Eger Günüň radiusy 686784 *km*, Aýyň radiusy 1760 *km* we Ýerden Aýa çenli bolan aralyk 384400 *km* bolsa, Ýerden Güne çenli bolan aralygy tapyň.

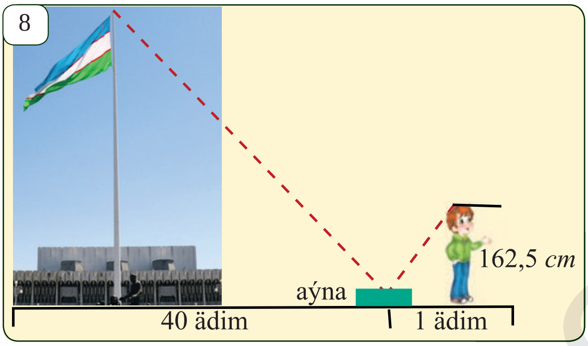
23.13. a) Bir töweregiň içinden iki meňzeş köpburçluk çyzylan. Bu köpburçluklar deň bolarmy?

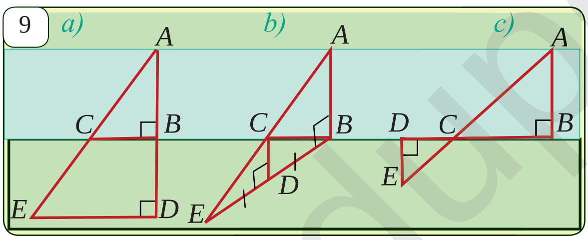
b) Bir töweregiň daşyndan iki meňzeş köpburçluk çyzylan. Bu köpburçluklar deň bolarmy?



23.14*. Bir kwadratyň taraplary ikinji kwadratyň taraplaryna parallel. Eger kwadratlar bir-birine deň bolmasa, olar gomotetik bolýandygyny subut ediň (*6-njy surat*).

7


8


9


23.15. *ABC* üçburçlugyň *AB* we *BC* taraplary dört deň kesimlere bölündi we bölünme nokatlary *AC* tarapa parallel kesimler bilen utgaşdyryldy. Eger $AC = 24$ *cm* bolsa, emele gelen kesimleriň uzynlyklaryny tapyň.

23.16. Eger suratlar şol bir wagtda surata alnan bolsa, berlen maglumatlar esasynda ikinji binanyň beýikligini tapyň (*7-nji surat*).

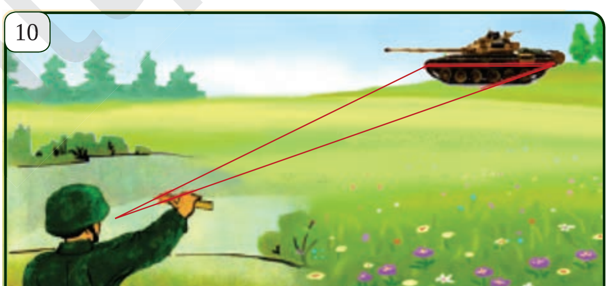
23.17. 8-nji suratda berlenlerden peýdalanyp käbir obýektiň beýikligini tapmagyň ýoluny düşündiriň. "Halklar dostlugy" köşgüniň öňünde dikilen watanymyzyň baýdagynyň sütüniniň beýikligini tapyň.

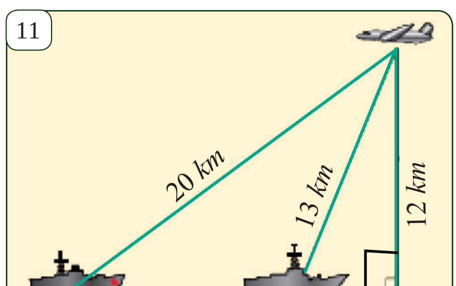
23.18. 9-njy suratda berlenlerden peýdalanyp derýanyň giňligini anyklamagyň 3 usulyny düşündiriň. Olarda geometriýanyň haýsy teoremalaryndan peýdalanylýandygyny anyklaň. Öwrenen usullaryňyzy amalda başga ýagdaýlarda ulanjak boluň.

Geometriýa we harby iş

1. Harbylar çyzgyjyň we uzadylan eliň kömeginde nyşana çenli aralygy kesgitläp bilýärler. Eger 10-njy suratdaky çyzgyjyň tanky örtýän uzynlygy 5 *cm*, eginden çyzgyja çenli bolan aralyk 50 *cm* we tankyň uzynlygy 6,86 *m* bolsa, tanka çenli bolan aralygy tapyň.

2. 12 *km* beýiklikde uçup barýan samolýotyň uçujysy ondan 13 *km* uzaklykda ýüzüp barýan gämini we ýene ondan 20 *km* uzaklykda birinji gämini yzarlap barýan başga gämini gördi (11-nji surat). Bu gämileriň arasyndaky aralygy anyklaň.

10


11


24 BILIMIŇIZI SYNAŇ

I. Testler

1. **Iki meňzeş üçburçluk üçin nädogry tassyklamany tapyň:**
   A. Meýdanlarynyň gatnaşygy meňzeşlik koeffisiýentine deň;
   B. Degişli medianalarynyň gatnaşygy meňzeşlik koeffisiýentine deň;
   D. Degişli bissektrisalarynyň gatnaşygy meňzeşlik koeffisiýentine deň;
   E. Degişli beýikikleriniň gatnaşygy meňzeşlik koeffisiýentine deň.
2. **Iki gomotetik köpburçluk üçin dogry tassyklamany tapyň:**
   A. Olar deň; B. Olar meňzeş;
   D. Olar deňdeş; E. Dogry jogap ýok.
3. **Üçburçlugyň medianalary üçin nädogry tassyklamany görkeziň:**
   A. Bir nokatda kesişýär; B. Kesişme nokadynda 2:1 gatnaşykda bölünýär;
   D. Bir-birine deň; E. Her biri üçburçlugy iki deňdeş bölege bölýär.
4. **Üçburçlugyň bissektrisalary üçin nädogry tassyklamany görkeziň:**
   A. Bir nokatda kesişýär; B. Kesişme nokadynda 2:1 gatnaşykda bölünýär;
   D. Özi düşen tarapy galan iki tarapa proporsional kesimlere bölýär;
   E. Özi çykan depedäki burçy deň ikä bölýär.
5. **Iki meňzeş köpburçluk üçin nädogry tassyklamany tapyň:**
   A. Olaryň taraplary sany deň; B. Olaryň burçlary sany deň;
   D. Degişli taraplary proporsional; E. Meýdanlarynyň gatnaşygy meňzeşlik koeffisiýentine deň.

II. Meseleler

24.1. Esaslary 6 *m* we 12 *m* bolan trapesiýanyň diagonallary kesişen nokatdan esaslara parallel göni çyzyk geçirilen. Göni çyzygyň trapesiýanyň içindäki böleginiň uzynlygyny tapyň.

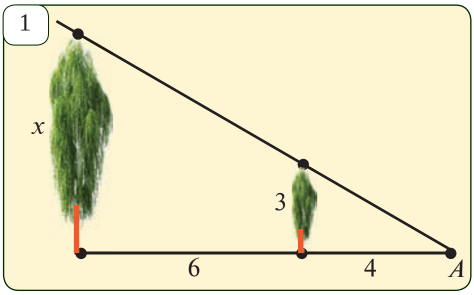
24.2. ABC üçburçlukda $BC = BA = 10$, $AC = 8$. Eger AA_1 we CC_1 üçburçlugyň bissektrisalary bolsa, A_1C_1 kesimi tapyň.

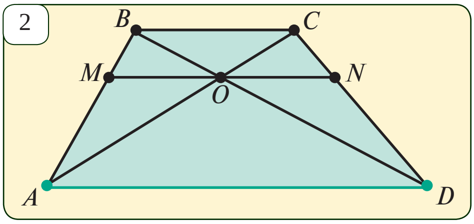
24.3. A nokatdan baryp bolmaýan B nokada çenli bolan aralygy anyklamak üçin tekiz ýerde C nokat saýlandy. Soň AC aralyk, BAC we ACB burçlar ölçendi we ABC üçburçluga meňzeş $A_1B_1C_1$ üçburçluk guruldy. Eger $AC = 42$ *m*, $A_1C_1 = 6{,}3$ *cm*, $A_1B_1 = 7{,}2$ *cm* bolsa, AB aralygy tapyň.

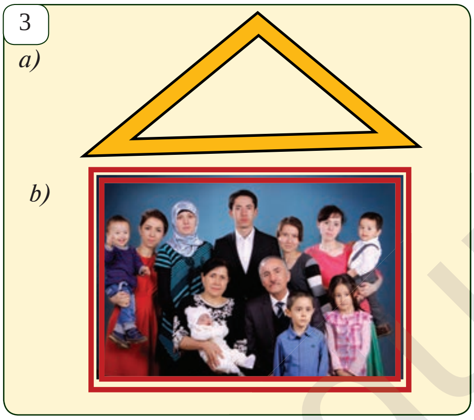
24.4. Koeffisiýenti $k = 3$ bolan gomotetiýada F köpburçluk F_1 köpburçluga öwrülýär. Eger F_1 köpburçlugyň perimetri 12 *cm* we meýdany 4,5 *cm*^{2} bolsa, F köpburçlugyň perimetrini we meýdanyny tapyň.

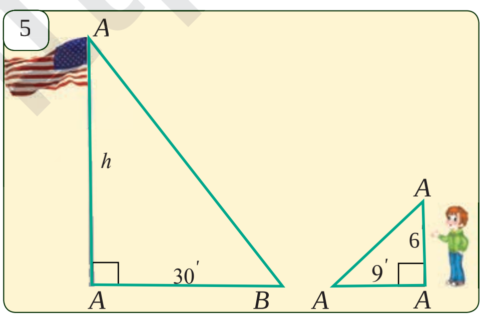
24.5. Boýy 180 *cm* bolan adamyň kölegesiniň uzynlygy 2,4 *m* bolan wagtda beýikligi 4 *m* bolan elektik sütüniň kölegesiniň uzynlygy näçe metr bolar?

24.6. Kartada Daşkent we Ürgenç şäherleriniň arasyndaky aralyk 8,67 *cm*. Eger kartanyň masştaby 1:10 000 000 bolsa, Daşkent we Ürgenç şäherleriniň arasyndaky aralygy tapyň.









III. Özüňizi synaň (nusga barlag işi)

24.7. 1-nji suratda berlen maglumatlar esasynda agajyň beýikligini tapyň.

24.8. ABC üçburçlugyň taraplary $AB = 5$ *cm*, $AC = 6$ *cm*, $BC = 7$ *cm*. Bu üçburçlugyň AC tarapyna parallel göni çyzyk AB tarapyny P nokatda, BC tarapyny bolsa K nokatda kesýär. Eger $PK = 2$ *cm* bolsa, PBK üçburçluk perimetrini tapyň.

24.9. 2-nji suratda $AD||BC||MN$. Eger $BC = 6$ *cm*, $AD = 10$ *cm* bolsa, MN kesimi tapyň.

24.10. *(Goşmaça).* Rombuň taraplarynyň ortalary gönüburçlugyň depeleri bolýandygyny subut ediň.

Gyzykly meseleler

1. 4 esse ulaldylyp görkezilen aýnalupa bilen garalanda 2°-ly burçuň ululygy näçä üýtgär?

2. a) Üçburçly çyzgyjyň suratynda şekillendirilen içki we daşky üçburçluklar meňzeşmi *(3-nji a surat)*?

b) 3-nji *b* suratdaky romning içki we daşky gapyrgalaryni şekillilovchi dörtburçluklar meňzeşmi?

3. Aşakdaky daşary ýurt dilinde berlen meseläni çözjek boluň. Şeýdip hem rus we iňlis dilinden, hem geometriýadan başarnygyňyzy bilersiňiz.

a) На 4-рисунке изображена русская игрушка “матрёшка”. Выполнив соответствующие измерения, найти коэффициент подобия игрушек:

a) A и B; b) A и D; d) C и F; e) B и E.

b) Darnell is curious about the height of a flagpole that stands in front of his school. (pic.5) Darnell, who is 6 ft tall, casts a shadow that he paces off at 9 ft. He walks the length of the shadow of the flagpole, a distance of 30 ft. How tall is the flagpole?

c) The distance across a pond is to be measured indirectly by using similar triangles. (pic.6) If XY =160 ft, YW=40 ft, TY= 120 ft, and WZ= 50 ft, find XT.

Geometrik modelirleme

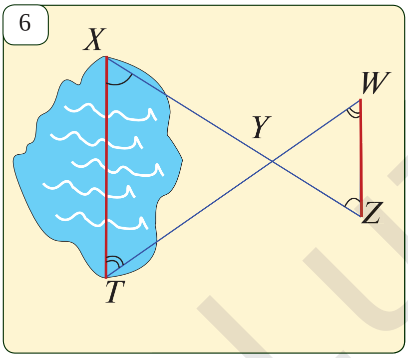
1. Erkin dörtburçluk çyzyň we gaýçy bilen gyrkyp alyň.

2. Onuň garşylykly taraplarynyň ortalaryny belgiläň we kesimler bilen utgaşdyryň (7-nji *a* surat) hem-de şu kesimler boýunça dörtburçlugy kesiň (7-nji *b* surat).

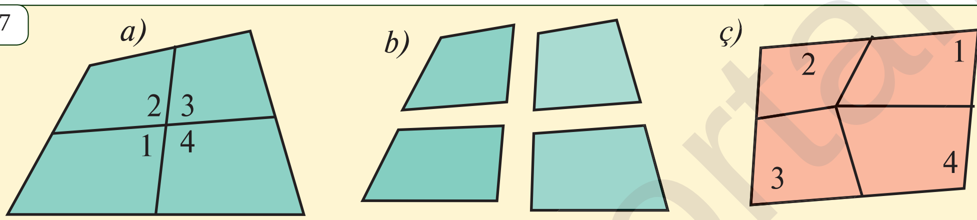
3. Emele gelen böleklerden 7-nji ç suratda görkezilişi ýaly edip parallelogram düzüň.

4. Bu işi ýerine ýetirende hakykatdan hem parallelogram emele gelýändigini esaslandyryň.

6



7



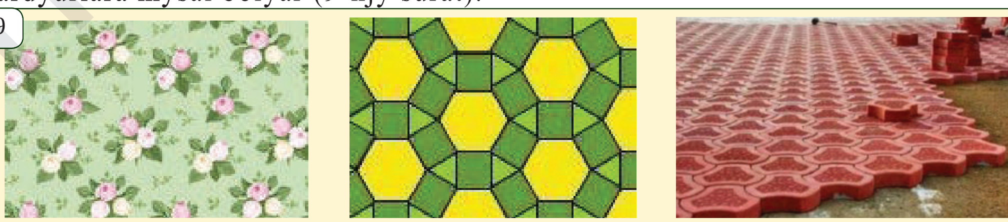
Nagyşlar, germewler (bardýurlar) we parketler

Öýümiziň diwarlaryndaky gülkagyzlara üns berip garasaňyz, olarda birmeňzeş şekil ýygy-ýygydan gaýtalanyp tutuş diwary örtendigini görmek mümkin. Bir şekil gaýtalanyp tutuş tekizligi doldursa, şeýle ýygma şekillere nagyş diýýäris. Meşhur golland suratkeşi Moris Eşeriň galamyna degişli ynha şu täsin suratlar nagyşlara mysal bolýar (8-nji surat). Bu nagyşlarda şol bir şekil nähili gaýtalanypdyr?

8

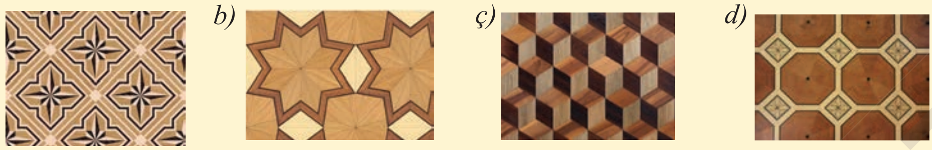
Eger bir şekil ýygy-ýygydan gaýtalanyp iki parallel göni çyzyklaryň arasyndaky lentany doldursa, şeýle ýygma lenta şekillere germew ýa-da bardýur diýýäris. Gülkagyz rulony, surat salnan matalar we parklardaky germewler çäkli uzynlykdaky bardýurlara mysal bolýar (9-njy surat).

9

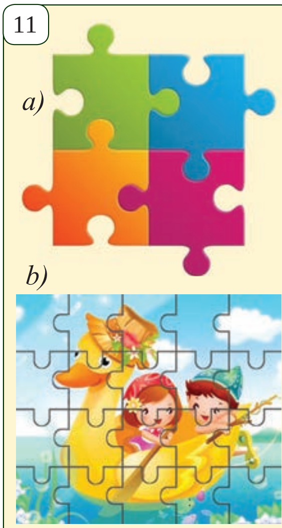


Dogry köpburçluklar bilen örtülen nagyşlara parket diýýäris. Parketler bilen öýümiziň pollary bezelýär. Iň ýönekeý parketler 10-njy suratda getirilen. Görnüşi ýaly, olar parallel göçürmede öz-özüne geçýär.

10 *a)* *b)* *ç)* *d)*



11 *a)* *b)*



Geometrik modelirleme.

Pazl şekilleri nähili düzülen?

Pazl oýnawaçlaryny gowy bilýärsiňiz? (11-nji surat) Geliň, olary nähili gurmak mümkinligine garalyň.

1.Ölçegleri 5 *cm* × 5 *cm* bolan kwadrat çyzyň.

2. Onuň aşaky esasynyň ortasyndan tegelek şekilli bölegi kesip alyň (12-nji *a* surat).

3. Kesip alnan bölegi kwadratyň ýokary esasynyň ortasyna birleşdiriň (12-nji *b* surat).

4. Indi kwadratyň gapdal tarapynyň ortasyndan ýene şeýle ululykdaky tegelek şekilli bölegi kesip alyň (12-nji *ç* surat).

3. Kesip alnan bölegi kwadratyň ikinji gapdal tarapynyň ortasyna birleşdiriň (12-nji *d* surat).

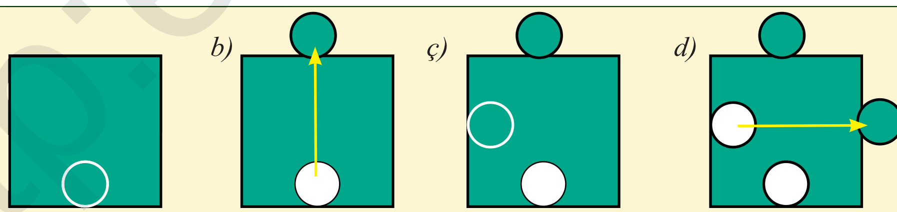
4. Netijede pazl oýnawajynyň bir sanysy taýýar boldy.

5. Bu pazl bölegi bilen bütin tekizligi örtmek mümkinligini esaslandyryň.

6. Kwadratyň taraplaryndan tegelek däl başgaça şekildäki bölekleri gyrkyp, birleşdirmek arkaly başga görnüşdäki pazl böleklerini hem almak mümkin.

7. Hany, käbir täze pazl böleginiň çyzgysyny serediň. Birnäçe reňkli pazl böleklerini gyrkyp alyp, olardan dürli nagyşlary düzüň.

12 *a)* *b)* *ç)* *d)*



Geometrik barlag.

73-nji sahypadaky "Geometrik modelirleme" bölüminde getirilen maglumatlar esasynda erkin güberçek dörtburçluk bilen tutuş tekizligi örtmek mümkinligini subut ediň.

II BAP

ÜÇBURÇLUGYŇ TARAPLARYNYŇ WE BURÇLARYNYŇ ARASYNDAKY GATNAŞYKLAR

Şu baby öwrenmek netijesinde siz aşakdaky bilimlere, endiklere we başarnyklara eýe bolarsyňyz:

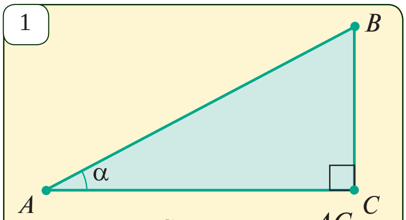
Bilimler:

√ *erkin burçuň sinusy, kosinusy, tangensi we kotangensi kesgitlemelerini;*
√ *burçuň radian ölçegini;*
√ *esasy trigonometrik toždestwolary;*
√ *üçburçlugyň meýdanyny burçuň sinusynyň kömeginde hasaplamagyň formulasyny;*
√ *sinuslar we kosinuslar teoremasyny bilmek.*

Amaly endikler:

√ *käbir burçlaryň sinusy, kosinusy, tangensi we kotangensini hasaplamak;*
√ *esasy trigonometrik toždestwolary mysallar çözmende ulanyp bilmek;*
√ *üçburçlugyň meýdanyny onuň iki tarapy we olaryň arasyndaky burçy boýunça hasaplap bilmek;*
√ *sinuslar, kosinuslar teoremasyndan peýdalanyp hasaplamaga we subut etmäge degişli meseleleri çözmek.*

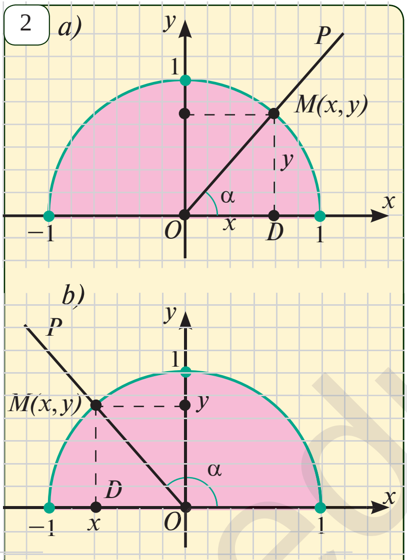
25 0°-DAN 180°-A ÇENLI BOLAN BURÇUŇ SINUSY, KOSINUSY, TANGENSI WE KOTANGENSI



$$\sin\alpha = \frac{BC}{AB};\quad \cos\alpha = \frac{AC}{AB};$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AC};\quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{AC}{BC};$$

Gönüburçly ABC üçburçlukda $\angle C = 90°$ bolsun. Mälim bolşy ýaly, onda A ýiti burçuň sinusy, kosinusy, tangensi we kotangensi 1-nji suratdaky ly anyklanýardy. Indi 0°dan 180°-a çenli bolan burçuň sinusyny, kosinusyny, tangensini we kotangensini anyklaýarys

Radiusy birlik kesime deň, merkezi koordinatalar başlangyjynda bolan ýarym töwerege garaýarys (*2-nji surat*). Töweregi $M(x;y)$ nokatda kesýän OP şöhläni geçirýäris. Bu şöhläniň Ox şöhle bilen emele getiren burçuny α bilen belgileýäris. OP şöhläniň Ox şöhle bilen üstme-üst düşen ýagdaýdaky burçy 0°-ly burç hökmünde kabul edýäris.



Mälim bolşy ýaly, α ýiti burç bolanda (*2-nji a surat*), bu burçuň sinusy, kosinusy, tangensi we kotangensi gönüburçly ODM üçburçlukdan

$$\sin\alpha = \frac{BC}{AB};\ \cos\alpha = \frac{OD}{MO};\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{DM}{OD};\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{OD}{DM}.$$

deňlikleriň kömeginde anyklanýar. Eger $MO = 1$, $DM = y$, $OD = x$ bolýandygyny hasaba alsak,

$$\boxed{\sin\alpha = y,\quad \cos\alpha = x,\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x},\quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}} \quad (1)$$

deňliklere eýe bolarys.

Umumy ýagdaýda, 0°-dan 180°-a çenli bolan burçuň sinusyny, kosinusyny, tangensini we kotangensini hem (1) formula arkaly anyklaýarys (2-nji *b* surat):

OMD üçburçlukda $OD^2 + DM^2 = MO^2$ ýa-da $x^2 + y^2 = 1$. $\sin\alpha = y$ we $\cos\alpha = x$ bolýandygyny hasaba alsak, islendik α $(0° \le \alpha \le 180°)$ burç üçin

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1} \quad (2)$$

*esasy trigonometrik toždestwo*ny alarys.

Kesgitlemä görä, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$, $x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$ bolany üçin,

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\ (\alpha \ne 90°)} \quad \boxed{\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\ (\alpha \ne 0,\ \alpha \ne 180°),} \quad \boxed{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1\ (\alpha \ne 0,\ \alpha \ne 90°,\ \alpha \ne 180°)}$$

toždestwolar ýerliklidir.

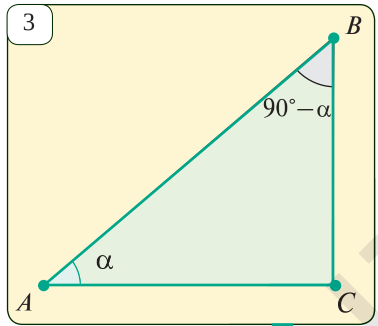
(2) deňligiň iki bölegini hem ilki $\cos^2\alpha$, soň bolsa $\sin^2\alpha$ bölüp,

$$\boxed{1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}\ (\alpha \ne 90°),} \quad \boxed{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha},\ (\alpha \ne 0,\ \alpha \ne 180°)} \quad (3)$$

toždestwolary alarys.

Ýokardaky (1) deňlikler esasynda her bir α (0°≤α≤180°) burça bu burçuň sinusynyň (kosinusynyň, tangensiniň we kotangensiniň) bir bahasy laýyk goýulýar. Bu laýyklyklar burçuň "sinus", "kosinus", "tangens" we "kotangens" diýlip atlandyrylýan funksiýalaryny kesgitleýär. Olar trigonometrik funksiýalar diýlip atlandyrylýar.

"Trigonometriýa" sözi — grekçe "üçburçluklary çözmek" diýen manyny aňladýar.



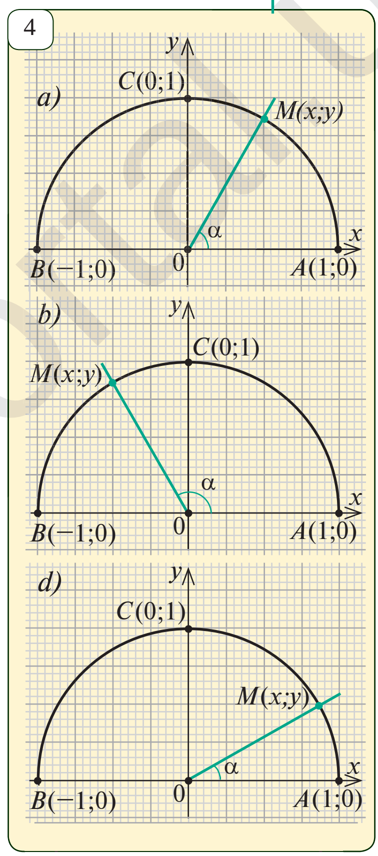
Islendik ýiti α burç üçin:

$\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha,\ \cos(90°-\alpha)=\sin\alpha.$ (2)

Islendik α (0≤α ≤180°) burç üçin:

$\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha,\ \cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha$ 3)

(2) we (3) formulalara *getirme formulalary* diýilýär. Olar algebra kursunda subut edilýär.



Meseleler we ýumuşlar

25.1. Eger 90°<α<180° bolsa, sinα, cosα, tgα we ctgα bahalarynyň alamatyny anyklaň.

25.2. 4-nji suratdaky α burçy ölçäň we onuň sinusyny, kosinusyny, tangensini we kotangensini degişli ölçemeleriň kömeginde anyklaň.

25.3. $\mathrm{tg}(90°-\alpha)=\mathrm{ctg}\alpha$ (α≠0°) we $\mathrm{ctg}(90°-\alpha)=\mathrm{tg}\alpha$ (α≠0°) toždestwolary subut ediň.

25.4. $\mathrm{tg}(180°-\alpha)=-\mathrm{tg}\alpha$ (α≠90°) we $\mathrm{ctg}(180°-\alpha)=$ $=-\mathrm{ctg}\alpha$ (α≠0° we α≠180°) toždestwolary subut ediň.

25.5. Ýönekeýleşdiriň:

a) $\cos^2(180°-\alpha)+\cos^2(90°-\alpha)$;

b) $\sin^2(180°-\alpha)+\sin^2(90°-\alpha)$;

ç) $\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}(90°-\alpha)$; e) $\mathrm{ctg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}(90°-\alpha)$.

25.6. *ABC* üçburçlukda ∠*A*=150° we *AC*=7 *cm* bolsa, üçburçlugyň *C* depesinden geçirilen beýikligini tapyň.

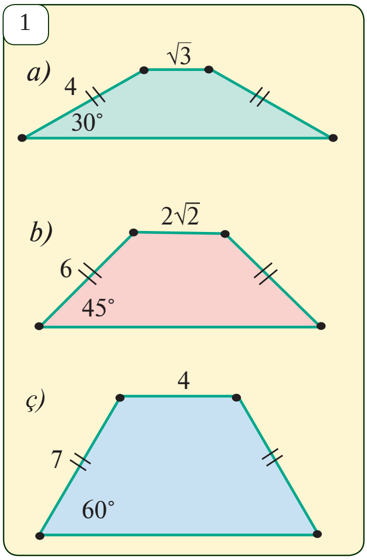
25.7. Eger a) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\sin\alpha=\frac{1}{4}$; ç) sinα=1 bolsa, cosα-ny tapyň.

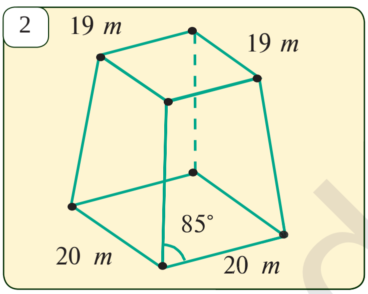
25.8*. Eger a) $\sin\alpha=\frac{1}{2}$; b) tgα=–1; ç) $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ bolsa, α-ny tapyň.

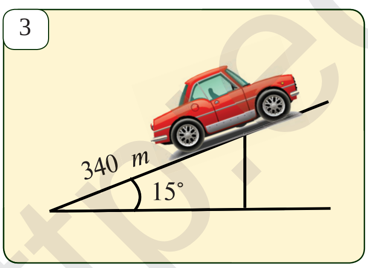
25.9. Jedweli dolduryň.

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
sinα									
cosα									
tgα									
ctgα									

26 MESELELER ÇÖZMEK







26.1. Beýikligi 3 *cm* we ýiti burçy 30° bolan rombuň perimetrini we meýdanyny hasaplaň.

26.2. Deňýanly gönüburçly üçburçlugyň gipotenuzasy 12 *cm*. Onuň meýdanyny hasaplaň.

26.3. Beýikligi $4\sqrt{3}$ *cm* bolan deň taraply üçburçlugyň perimetrini tapyň.

26.4. 1-nji suratda berlenlere görä deňýanly trapesiýalaryň meýdanyny tapyň.

26.5. Gönüburçly trapesiýanyň ýiti burçy 30°-a, beýikligi 4 *cm*-e we kiçi esasy 6 *cm*-e deň. Trapesiýanyň perimetrini we meýdanyny tapyň.

26.6. Töweregiň hordasy 120 gradusly dugany çekip durýar. Eger töweregiň radiusy 10 *cm* bolsa, hordanyň uzynlygyny tapyň.

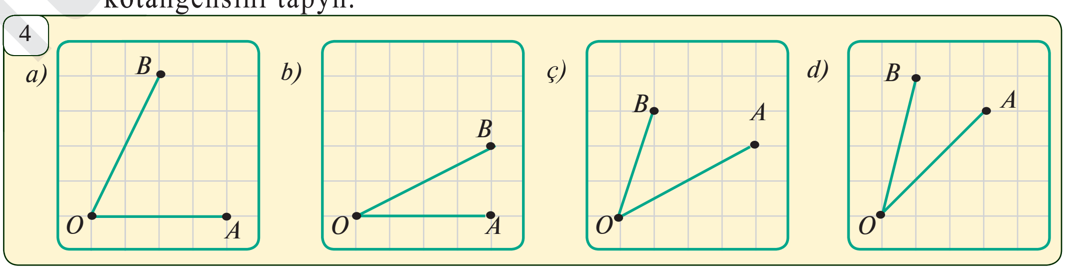
26.7*. Deňýanly üçburçlugyň depesindäki burçy a) 120°; b) 90°; ç) 60°. Üçburçlugyň beýikliginiň esasyna gatnaşygyny hasaplaň.

26.8*. 2-nji suratda görkezilen pagta harmanynyň gapdal granlary deňýanly trapesiýa, üsti bolsa kwadrat şeklinde. Suratda berlenlerden peýdalanyp, harmany doly ýapmak üçin näçe mata zerurdygyny anyklaň.

26.9. Ýeňil maşyn geçelgäniň ýokary galma böleginde 340 *m* ýol geçdi. Eger ýoluň gorizonta görä galma burçy 15° bolsa, ýeňil maşyn näçe metr beýiklige galypdyr (3-nji surat)?

26.10. Aman öýünden gündogar tarapa 800 *m*, soň demirgazyk tarapa 600 *m* ýol ýöredi. Ol öýünden näçe metr uzaklyga geldi? Indi ol öýüne göni çyzyk boýunça ýetip gelmek üçin günbatara görä nähili burç astynda ýöremeli?

26.11. 4-nji suratda görkezilen burçlaryň sinusyny, kosinusyny, tangensini we kotangensini tapyň.



26.12. Otly her 30 m ýol ýörände 1 m ýokary galýar. Demir ýoluň gorizonta görä ýokary galma burçuny tapyň.

26.13. Eger beýikligi 30 m bolan binanyň kölegesiniň uzynlygy 45 m bolsa, Gün şöhlesiniň şu bina ýerleşýän meýdana düşüş burçuny tapyň.

26.14. Gönüburçly üçburçlugyň bir burçy 60°-a, uly kateti bolsa 6-a deň. Onuň kiçi katetini we gipotenuzasyny tapyň.

26.15. O merkezli töweregiň A nokadyndan geçirilen galtaşmada B nokat alnan. Eger $AB=9$ cm, $\angle ABO=30°$ bolsa, töweregiň radiusyny we BO kesim uzynlygyny tapyň.

26.16. m göni çyzyk we uni kesip geçmeýän AB kesim berlen. Munda $AB=10$, AB we m göni çyzyklaryň arasyndaky burç 60°. AB kesimiň uçlaryndan m göni çyzyga AC we BD perpendikulýarlar geçirilen. CD kesimi tapyň.

26.17. Rombuň ýiti burçy 60°-a, beýikligi bolsa 6-a deň. Rombuň uly diagonalynyň uzynlygyny we meýdanyny tapyň.

26.18. Radiusy 5 cm bolan töwerege deňýanly trapesiýa daşyndan çyzylan. Eger trapesiýanyň ýiti burçy 30° bolsa, onuň gapdal tarapyny we meýdanyny tapyň.

26.19. Eger $ABCD$ gönüburçlukda $AB = 4$, $\angle CAD = 30°$ bolsa, onuň daşyndan çyzylan töweregiň radiusyny we gönüburçlugyň meýdanyny hasaplaň.

26.20. Gönüburçlugyň taraplary 3 cm we $\sqrt{3}$ cm. Onuň bir diagonaly bilen taraplary emele getiren burçlaryny tapyň.

26,21. Eger a) $\sin A = \frac{4}{7}$; b) $\cos A = \frac{4}{7}$; ç) $\cos A = -\frac{4}{7}$ bolsa, A burçy guruň.

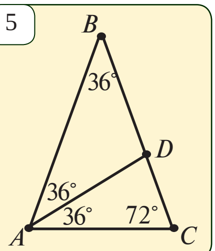
26.22. Gönüburçly üçburçlugyň bir burçy 30°, gipotenuzasyna geçirilen beýikligi 6 cm. Üçburçlugyň taraplaryny tapyň.

26.23. Ýiti burçy 30°-a, beýikligi bolsa 4 cm-e deň bolan rombuň meýdanyny hasaplaň.

Taryhy maglumatlar. "Altyn" üçburçluk

Grekler burçlary 36°, 72° we 72° bolan deňýanly üçburçlugy — *"altyn üçburçluk"* diýip atlandyrypdyrlar. Sebäbi - ol ynha şeýle ajaýyp häsiýete eýe eken: *esasyndaky burç bissektrisasy AD ony iki deňýanly üçburçluga bölýär* (5-*nji surat*).

5



Hakykatdan hem, AD bissektrisa bolany üçin, BAD we DAC burçlar hem 36°-dan. Diýmek, ABD üçburçluk deňýanly. ADC üçburçlukda ADC burç $180°-36°-72°=72°$ bolup, ACD burça deň. Diýmek, ADC üçburçluk hem deňýanly.

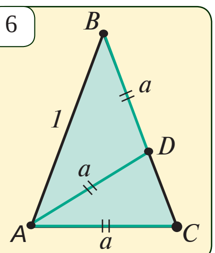
Netije. ABC üçburçluk ACD üçburçluga meňzeş we

$$\frac{AC}{AB}=\frac{CD}{AC}. \qquad (1)$$

Eger ABC üçburçlugyň gapdal taraplary $AB=BC=1$ diýip alsak, onuň esasy aşakdaky ýaly tapylýar (6-*njy surat*): $AC=a$ bolsun.

Onda, 1. $AD=a$ bolýar, çünki ΔACD deňýanly.

6



2. $BD = a$ bolýar, çünki ΔABD deňýanly.
3. $CD = BC - BD = 1 - a$.

(1) deňlige görä: $\frac{a}{1} = \frac{1-a}{a}$

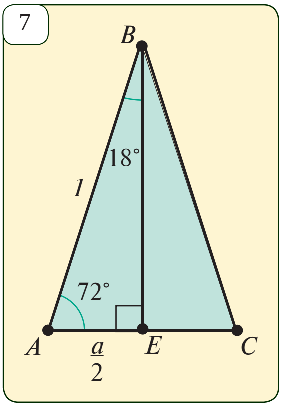
Mundan $a^2 + a - 1 = 0$. Bu kwadrat deňlemäni çözüp, $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ bolýandygyny tapýarys.

Mesele. $\sin 18°$, $\cos 18°$, $\sin 72°$, $\cos 72°$ bahalary hasaplaň.

Çözülişi: Gapdal tarapy $AB = BC = 1$ we esasy $AC = a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ -e deň bolan ABC "altyn üçburçluga" garaýarys (*7-nji surat*). Onuň BE beýikligini geçirýäris.

Gönüburçly ABE üçburçlukda: $\sin 18° = \frac{AE}{AB} = \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

7



Mundan peýdalanyp, tapylmagy talap edilen başga bahalaryny hasaplaýarys:

$$\cos 18° = \sqrt{1 - \sin^2 18°} = \frac{\sqrt{5}+1}{4};$$

$$\sin 72° = \sin(90° - 18°) = \cos 18° = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4};$$

$$\cos 72° = \sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Jogaby: $\sin 18° = \cos 72° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$; $\cos 18° = \sin 72° = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$.

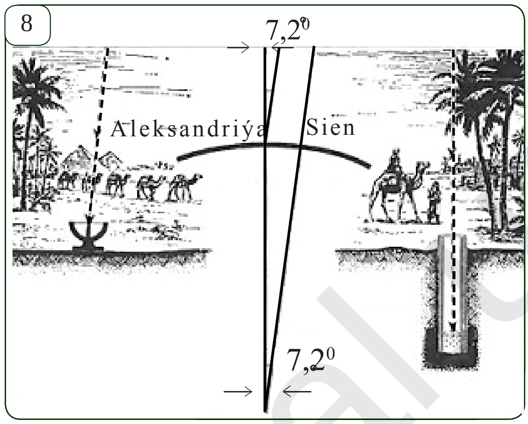
Taryhy maglumatlar

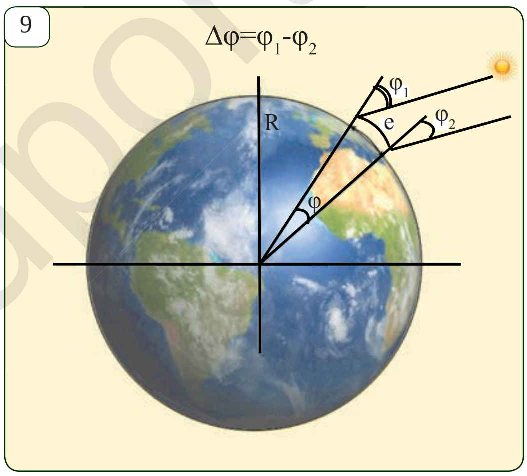
Mürze Ulugbek (1394–1449) — beýik özbek alymy we döwlet işgäri. Asyl ady Muhammet Taragaý. Ol sahypgyran Emir Temuryň agtygy. Ulugbegiň atasy Şahruh hem döwlet işgäri bolupdyr. Ulugbek takmynan 1425–1428-nji ýyllarda Samarkandyň golaýyndaky Obi Rahmat depeliginde özüniň meşhur obserwatoriýasyny gurýar. Obserwatoriýanyň binasy üç etažly bolup, onuň esasy esbaby — kwadrantyň beýikligi 50 metrdi. Ulugbegiň iň meşhur eseri "Ziji kuragany" diýlip atlandyrylýan astronomik jedweldir. Ol 1018 sany ýyldyzy öz içine alypdyr.

Şunuň bilen bir hatarda Ulugbegiň trigonometrik jedwelleri hem üns bererlikdir. Ulugbegiň trigonometrik jedwelleri 10 sany onluk öýjük takyklykda hasaplapdyr. Hasaplaýyş serişdeleri bolmadyk diýen ýaly bir döwürde bu işleri ýerine ýetirmek üçin çuňňur pikirlenmä esaslanan nazary ukyp we anyk formulalar hem-de ep-esli hasapçylar talap edilen bolsa gerek. Zijde Ulugbek 1 gradusyň sinusyny hasaplamak üçin aýratyn risala ýazanlygy agzalýar.

Geometriýa we astronomiýa degişli taslama işi

Gadymky grek alymy Eratosfen (miladydan öňki 276-194-nji ýyllar) Ýeriň töweregini birinji bolup ölçäpdir. Ol Sien (häzirki Assuan) şäherinde miladydan öňki 240-njy ýylyň 19-njy iýun güni, tomusky deň günlügiň günortan wagtynda Gün dik ýokarda (zenitde) bolýandygyny we çuň guýynyň düýbüni hem ýagtylandyrandygyny anyklapdyr. Ýöne, şunuň bilen birlikde, ol ýylyň bu gününde we wagtynda Aleksandriýada Gün dik ýokardan (zenitden) töweregiň dugasynyň 1/50 bölegine çenli gyşarýandygyny hem anyklapdyr.





Mundan Eratosfen nähili netijä gelipdir? Onuň pikirini dowam etdiriň we aşakdaky 8-nji suratda berlenlar esasynda Yer radiusy uzynlygyny tapyň.

Zerur bolmagy mümkin bolan käbir maglumatlar we hasap-hesipler:

Sien we Aleksandriýa şäherleriniň arasyndaky aralyk 787,5 *km*.

Töweregiň dugasynyň 1/50 bölegi – $\alpha = 7{,}2^{\circ}$.

C - Ýeriň töwereginiň uzynlygy.

$$\frac{\alpha^{\circ}}{360^{\circ}} = \frac{787{,}5}{C}$$

Mundan $C = 360 \cdot 787{,}5 : 7{,}2 = 39\,375$ *km*.

Bu günki hasap-hesiplere görä, Ýeriň ekwator boýunça töwereginiň uzynlygy 40 075,017 *km*, nolunjy metrinden boýunça töwereginiň uzynlygy bolsa - 40 007,86 *km*. Görşüňiz ýaly, gadymky alym diňe azajyk azaşypdyr.

Ýumuş. 9 -njy suratdan peýdalanyp, Ýeriň töwereginiň uzynlygyny tapmagyň islendik wagtda ulanmak mümkin bolan amaly usulyny işläp taýýarlaň we esaslandyryň.

27 ÜÇBURÇLUGYŇ MEÝDANYNY BURÇUŇ SINUSYNYŇ KÖMEGINDE HASAPLAMAK

1-nji teorema. ***Üçburçlugyň meýdany onuň iki tarapy bilen şu iki tarapyň arasyndaky burçuň sinusynyň köpeltmek hasylynyň ýarysyna deň.***

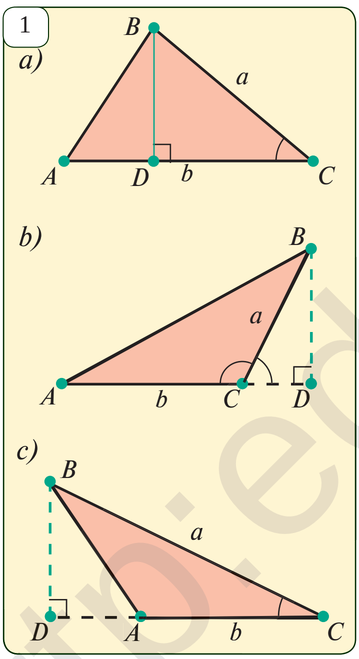
$\Delta ABC,\ BC = a,\ AC = b,\ \angle C$ (1-nji surat) ⇒ $S_{ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C$

Subudy. ABC üçburçlugyň BD beýikligini geçirýäris. Onda 1-nji suratda görkezilen üç ýagdaýyň bolmagy mümkin.

Birinji ýagdaýa garaýarys (1-nji *a* surat). BCD üçburçlukda $\sin C = \frac{BD}{BC}$. Mundan $BD = BC \cdot \sin C = a \cdot \sin C$. Şeýdip,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot b \cdot a \cdot \sin C = \frac{1}{2} ab \sin C.$$

Ikinji we üçünji ýagdaýlaryň subudyny özbaşdak ýerine ýetiriň. *Teorema subut edildi.*



1-nji teorema görä, üçburçlugyň meýdany üçin

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A \quad \text{we} \quad S_{ABC} = \frac{1}{2} ac \sin B$$

formulalar hem ýerlikli bolýar.

1-nji mesele. ABC üçburçlugyň meýdany 24 cm^2. Eger $AC = 8$ cm we $\angle A = 30°$ bolsa, AB tarapy tapyň.

Çözülişi. Üçburçlugyň meýdanyny burçuň sinusy arkaly tapmak formulasyna görä,

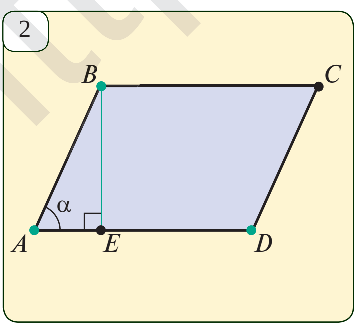
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A$$

Mundan,

$$AB = \frac{2S_{ABC}}{AC \cdot \sin A} = \frac{2 \cdot 24}{8 \cdot \sin 30^\circ} = \frac{2 \cdot 24}{8 \cdot 0{,}5} = 12\ (cm).$$

Jogaby: 12 *cm*.

2-nji mesele Parallelogramyň meýdany onuň iki goňşy tarapynyň we şu taraplaryň arasyndaky burçuň sinusynyň köpeltmek hasylyna deňdigini subut ediň.



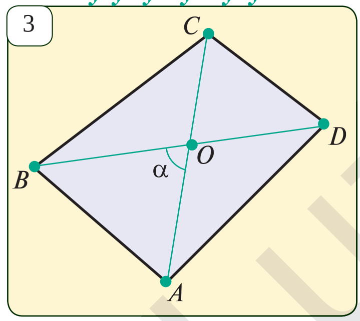
$ABCD$ parallelogram, $AB = a$, $AD = b$, $\angle A = \alpha$ (2-nji surat) ⇒ $S_{ABCD} = ab \sin\alpha$

Çözülişi. BE beýiklik geçirýäris. ABE üçburçlukda $\sin A = \frac{BE}{AB}$ ýa-da $BE = AB \sin A = a \sin\alpha$.

Onda, $S_{ABCD} = AD \cdot BE = ab \sin\alpha$.

2-nji teorema*. *Dörtburçlugyň meýdany onuň diagonallary bilen diagonallarynyň arasyndaky burçuň sinusynyň köpeltmek hasylynyň ýarysyna deň.

Subudy. Diagonallaryň kesişmeginden emele gelen burçlara garaýarys (*3-nji surat*):



şerte görä $\angle AOB = \alpha$

$\angle AOB$-ge wertikal bolany üçin $\angle COD = \alpha$,

$\angle AOB$-ge goňşy bolany üçin $\angle BOC = 180° - \alpha$,

$\angle BOC$-ge wertikal bolany üçin $\angle DOA = 180° - \alpha$

Üçburçlugyň meýdanyny burçuň sinusynyň kömeginde hasaplamak formulasyna görä:

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} AO \cdot OB \sin\alpha;$$

$$S_{BOC} = \frac{1}{2} BO \cdot OC \sin(180° - \alpha) = \frac{1}{2} BO \cdot OC \sin\alpha;$$

$$S_{COD} = \frac{1}{2} CO \cdot OD \sin\alpha; \qquad S_{DOA} = \frac{1}{2} DO \cdot OA \sin(180° - \alpha) = \frac{1}{2} DO \cdot OA \sin\alpha.$$

Meýdanyň häsiýetine görä:

$$S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{DOA} =$$

$$= \frac{1}{2} AO \cdot OB \sin\alpha + \frac{1}{2} BO \cdot OC \sin\alpha + \frac{1}{2} CO \cdot OD \sin\alpha + \frac{1}{2} DO \cdot OA \sin\alpha =$$

$$= \frac{1}{2} (AO \cdot OB + BO \cdot OC + CO \cdot OD + DO \cdot OA)\sin\alpha = \frac{1}{2} \{(OB \cdot (AO + OC) +$$

$$+ OD \cdot (CO + OA)\}\sin\alpha = \frac{1}{2} (OB \cdot AC + OD \cdot AC)\sin\alpha = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin\alpha.$$

Teorema subut edildi.

Meseleler we ýumuşlar

27.1. 1-nji teoremany 1-nji *b* we 1-nji ç suratda görkezilen ýagdaýlar üçin subut ediň.

27.2. Eger a) $AB = 6$ *cm*, $AC = 4$ *cm*, $\angle A = 30°$; b) $AC = 14$ *cm*, $BC = 7\sqrt{3}$ *cm*, $\angle C = 60°$;
ç) $BC = 3$ *cm*, $AB = 4\sqrt{2}$ *cm*, $\angle B = 45°$ bolsa, *ABC* üçburçlugyň meýdanyny tapyň.

27.3. Diagonaly 12 *cm* we diagonallary arasyndaky burçy 30° bolan gönüburçlugyň meýdanyny tapyň.

27.4. Tarapy $7\sqrt{2}$ *cm* we kütek burçy 135° bolan rombuň meýdanyny tapyň.

27.5. Rombuň uly diagonaly 18 *cm* we bir burçy 120°. Rombuň meýdanyny tapyň.

27.6. Meýdany $6\sqrt{2}$ cm^2-a deň bolan *ABC* üçburçlukda $AB = 9$ *cm*, $\angle A = 45°$. Üçburçlugyň *AC* tarapyny we şu tarapa geçirilen beýikligini tapyň.

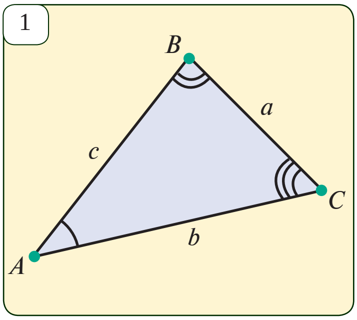
27.7*. *ABC* üçburçlukda $\angle A = \alpha$, onuň *B* we *C* depelerinden geçirilen beýiklikleri bolsa degişlilikde h_b we h_c bolsa, üçburçlugyň meýdanyny tapyň.

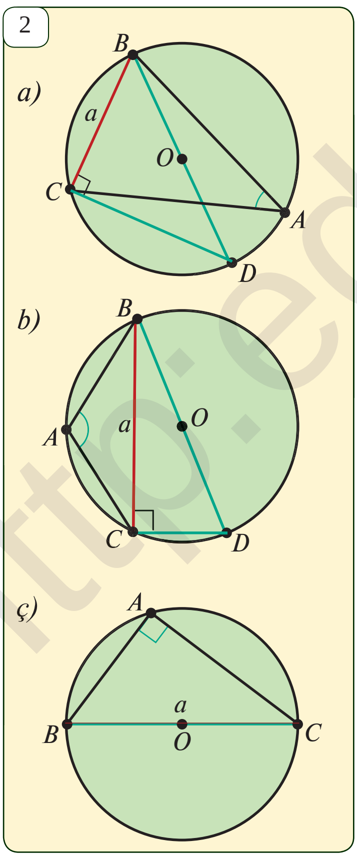
27.8*. *ABC* üçburçlukda $AB = 8$ *cm*, $AC = 12$ *cm* we $\angle A = 60°$ bolsa, onuň *AD* bissektrisasyny tapyň (*görkezme:* $S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ADC}$).

28 SINUSLAR TEOREMASY

Teorema. (Sinuslar teoremasy). ***Üçburçlugyň taraplary garşysyndaky burçlaryň sinuslaryna proporsional.***

$\Delta ABC,\ AB = c,\ BC = a,\ CA = b$ (*1-nji surat*) $\Rightarrow$ $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$





Subudy. Üçburçlugyň meýdanyny burçuň sinusy arkaly tapmak formulasyna görä,

$$S=\frac{1}{2}\,ab\sin C,\quad S=\frac{1}{2}bc\sin A,\quad S=\frac{1}{2}ac\sin B.\quad (❖)$$

Bu deňlikleriň ilkinji ikisine görä,

$$\frac{1}{2}\,ab\sin C=\frac{1}{2}\,bc\sin A,\ \text{diýmek}\ \frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$$

Şonuň ýaly-da, (❖) deňlikleriň birinjisinden we üçünjiden $\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{b}{\sin B}$ deňligi alarys.

Şeýle edip, $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$

Teorema subut edildi.

1-nji mesele. ABC üçburçlukda $AB=14$ *dm*, $\angle A=30°$, $\angle C=65°$ (*1-nji surat*). BC tarapy tapyň.

Çözülişi: Sinuslar teoremasyna görä,

$$\frac{AB}{\sin C}=\frac{BC}{\sin A}\qquad \text{Ondan,}$$

$$BC=\frac{AB\cdot\sin A}{\sin C}=\frac{14\cdot\sin 30°}{\sin 65°}\approx\frac{14\cdot 0{,}5}{0{,}9}\approx 7{,}78\ (dm).$$

Ýatlatma: Trigonometrik funksiýalaryň bahalary ýörite kalkulýatoryň ýa-da jedwelleriň kömeginde tapylýar. Bu ýerde $\sin 65°\approx 0{,}9$ bolýandygyny dersligiň 153-nji sahypasyndaky jedwelden anykladyk.

Jogaby: 7,78 dm.

2-nji mesele. Üçburçlugyň tarapynyň şu tarapyň garşysyndaky burçunyň sinusyna gatnaşygy üçburçlugyň daşyndan çyzylan töweregiň diametrine deň, ýagny $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$

bolýandygyny subut ediň *(2-nji surat).*

Subudy. Görnüşi ýaly, sinuslar teoremasyna görä, $\frac{a}{\sin A} = 2R$ deňligi subut etmek ýeterli. Üç ýagdaýyň bolmagy mümkin:

1-nji ýagdaý: $\angle A$ — ýiti burç (*2-nji a surat*); 2-nji ýagdaý: $\angle A$ — kütek burç (*2-nji b surat*); 3-nji ýagdaý: $\angle A$ — göni burç (*2-nji ç surat*).

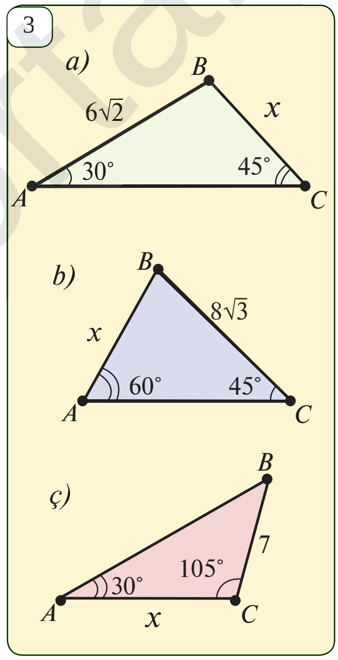
1-nji ýagdaýa garaýarys: C we D nokatlary utgaşdyrýarys. BCD — gönüburçly üçburçluk, çünki $\angle BCD$ burç BD diametre direlen.

ΔBCD-da: $BC = BD \cdot \sin D = 2R\sin D$. Ýöne, $\angle D = \angle A$, çünki olar bir BC duga direlen içinden çyzylan burçlar. Onda,

$$BC = 2R\sin A \quad \text{ýa-da} \quad \frac{a}{\sin A} = 2R.$$

Galan ýagdaýlary özbaşdak subut ediň (*görkezme:* 2-nji ýagdaýda $\angle D = 180° - \angle A$ bolýanlygyndan, 3-ýagdaýda $a = 2R$ bolýanlygyndan peýdalanyň)

Meseleler we ýumuşlar



28.1. Üçburçlugyň islendik tarapynyň şu tarapyň garşysyndaky burçuň sinusyna gatnaşygy üçburçlugyň daşyndan çyzylan töweregiň diametrine deň bolýandygyny 2-nji meselede getirilen 2-nji we 3-nji ýagdaýlar üçin subut ediň.

28.2. 3-nji suratda berlenlere görä, soralan kesimleri tapyň.

28.3. Eger ABC üçburçlukda:

a) $\sin A = 0{,}4$; $BC = 6$ *cm* we $AB = 5$ *cm* bolsa, $\sin C$-ni;

b) $\sin B = \frac{1}{2}$; $AC = 8$ *dm* we $BC = 7$ *dm* bolsa, $\sin A$-ny;

ç) $\sin C = \frac{1}{2}$; $AB = 6$ *m* we $AC = 8$ *m* bolsa, $\sin B$-ni tapyň.

28.4. Üçburçlugyň bir burçy 30°-a deň. Onuň garşysyndaky tarap 4,8 *dm*. Üçburçlugyň daşyndan çyzylan töweregiň radiusyny hasaplaň.

28.5. Üçburçlugyň bir tarapy üçburçlugyň daşyndan çyzylan töweregiň radiusyna deň. Üçburçlugyň şu tarapynyň garşysyndaky burçuny tapyň. Munda, iki ýagdaýa garamaly bolýandygyna üns beriň.

28.6. ABC üçburçluk üçin $AB : BC : CA = \sin C : \sin A : \sin B$ deňligiň dogrudygyny esaslandyryň. $\sin A : \sin B : \sin C = 3:5:7$ deňlik dogry bolmagy mümkinmi?

28.7. Eger ABC üçburçlukda $BC = 20$ *m*, $AC = 13$ *m* we $\angle A = 67°$ bolsa, üçburçlugyň AB tarapyny, B we C burçlaryny tapyň.

28.8*. Eger ABC üçburçlukda $BC = 18$ *dm*, $\angle A = 42°$, $\angle B = 62°$ bolsa, üçburçlugyň C burçuny, AB we AC taraplaryny tapyň.

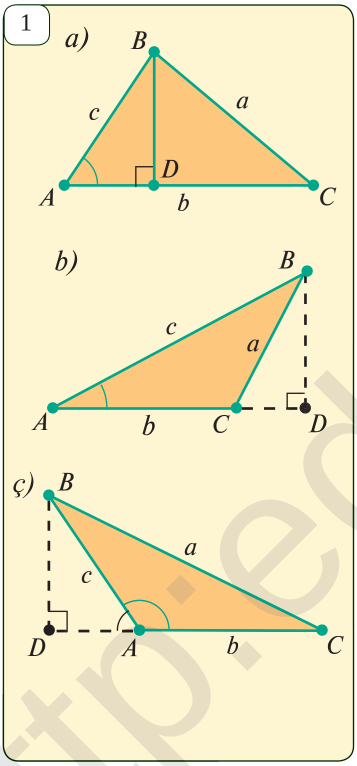
29 KOSINUSLAR TEOREMASY

Gönüburçly üçburçlukda göni burçuň garşysyndaky tarapyň (gipotenuza) kwadraty galan taraplaryň (katetler) kwadratlarynyň jemine deň.

Onda, göni bolmadyk burç üçin nähili? Aşakdaky teorema şu babatda.

Teorema. ***(Kosinuslar teoremasy). Üçburçlugyň islendik tarapynyň kwadraty galan iki tarapynyň kwadratlarynyň jemi şu iki tarap bilen olaryň arasyndaky burçuň kosinusynyň köpeltmek hasylynyň ikeldileniniň tapawudyna deň.***

$\Delta ABC,\ AB=c,\ BC=a,\ CA=b$ *(1-nji surat)* ⇒ $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$



Subudy. ABC üçburçlugyň BD beýikligini geçirýäris. D nokat AC tarapda *(1-nji a surat)* ýa-da onuň dowamynda *(1-nji b we 1-nji ç suratlar)* bolmagy mümkin. Birinji ýagdaýa garaýarys. Gönüburçly BCD üçburçlukda Pifagoryň teoremasyna görä,

$$BC^2=BD^2+DC^2.$$

$DC=AC-AD$ bolany üçin:

$$BC^2=BD^2+(AC-AD)^2=BD^2+AC^2-2\cdot AC\cdot AD+AD^2.$$

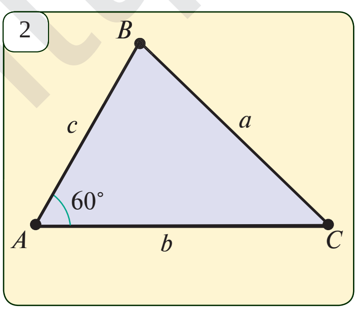
Gönüburçly ABD üçburçlukda $BD^2+AD^2=AB^2$ we $AD=AB\cos A$ bolýandygyny hasaba alyp, ahyrky deňlikden

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos A,$$

ýagny $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ deňlige eýe bolarys.

Teorema subut edildi.

1-nji *b* suratda görkezilen ýagdaýda $DC=AD-AC$, 1-nji ç suratda görkezilen ýagdaýda $DC=AD+AC$ we $\cos(180°-A)=-\cos A$ deňliklerden peýdalanyp, kosinuslar teoremasyny özbaşdak subut ediň.



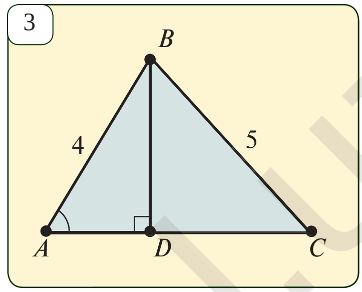
Ýatlatma. Kosinuslar teoremasy Pifagoryň teoremasynyň umumylaşanydyr. $\angle A=90°$ bolanda ($\cos 90°=0$ bolany üçin) kosinuslar teoremasyndan Pifagoryň teoremasy gelip çykýar.

1-nji mesele. ABC üçburçlukda $AB=6$ *cm*, $AC=7$ *cm*, $\angle A=60°$ (*2-nji surat*). BC tarapy tapyň.

Çözülişi. Kosinuslar teoremasyna görä, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ ýa-da $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A$ bolany üçin

$$BC^2 = 7^2 + 6^2 - 2 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cos 60° = 49 + 36 - 84 \cdot \frac{1}{2} = 43,$$

ýagny $BC = \sqrt{43}$ *cm*. *Jogaby:* $\sqrt{43}$ *cm*.



Kosinuslar teoremasyndan peýdalanyp, taraplary mälim bolan üçburçlugyň burçlaryny tapmak mümkin:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}. \qquad (1)$$

2-mesele. ABC üçburçlugyň taraplary $a = 5$ *m*, $b = 6$ *m* we $c = 4$ *m*. Kiçi tarapyň uly tarapdaky proýeksiýasyny tapyň (*3-nji surat*).

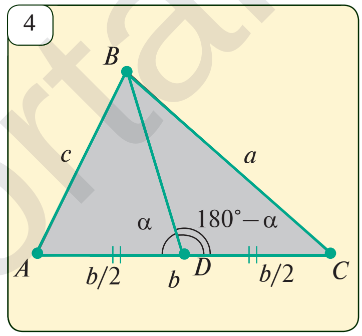
Çözülişi. (1) formula esasynda $\cos A$ ni tapýarys:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{6^2 + 4^2 - 5^2}{2 \cdot 6 \cdot 4} = \frac{9}{16}.$$

Gönüburçly ABD üçburçlukda $AD = AB \cdot \cos A$ bolany üçin

$$AD = 4 \cdot \frac{9}{16} = 2{,}25\ (m).$$

Jogaby: 2,25 *m*.



Meseleler we ýumuşlar

29.1. Kosinuslar teoremasyny 1-nji *b* we 1-nji *ç* suratda görkezilen ýagdaýlarda subut ediň.

29.2. ABC üçburçlukda

a) $AC = 3$ *cm*, $BC = 4$ *cm* we $\angle C = 60°$ bolsa, AB-ni;

b) $AB = 4$ *m*, $BC = 4\sqrt{2}$ *m* we $\angle B = 45°$ bolsa, AC-ni;

ç) $AB = 7$ *dm*, $AC = 6\sqrt{3}$ *dm* we $\angle A = 150°$ bolsa, BC-ni tapyň.

29.3. Taraplary 5 *cm*, 6 *cm*, 7 *cm* bolan üçburçlugyň burçlarynyň kosinuslaryny tapyň.

29.4. ABC üçburçlukda $AB = 10$ *cm*, $BC = 12$ *m* we $\sin B = 0{,}6$ bolsa, AC tarapy tapyň.

29.5. Parallelogramyň diagonallary 10 *cm* we 12 *cm*, olaryň arasyndaky burçy 60°-a deň. Parallelogramyň taraplaryny tapyň.

29.6. Taraplary 5 *cm* we 7 *cm* bolan parallelogramyň bir burçy 120°-a deň. Onuň diagonallaryny tapyň.

29.7*. Taraplary a, b, c bolan ABC üçburçlugyň BD medianasy $BD = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$ formula bilen hasaplanýandygyny subut ediň *(4-nji surat)*.

29.8*. Taraplary 6 *m*, 7 *m* we 8 *m* bolan üçburçlugyň medianalaryny tapyň.

29.9. Taraplary 5 *cm*, 6 *cm*, 7 *cm* bolan üçburçlugyň bissektrisalaryny tapyň.

29.10. Taraplary 5 *cm*, 6 *cm*, 7 *cm* bolan üçburçlugyň beýikliklerini tapyň.

30 SINUSLAR WE KOSINUSLAR TEOREMALARYNYŇ KÄBIR ULANYLYŞY

Öňki derslerde subut edilen sinuslar we kosinuslar teoremalaryndan üçburçluklara degişli dürli-dürli meseleleri çözende netijeli peýdalanmak mümkin. Bu dersde bu teoremalaryň käbir ulanylyşyna durup geçýäris.

1. Kosinuslar teoremasy üçburçlugyň burçlaryny tapmazdan, onuň burçlar boýunça görnüşini (ýiti, kütek ýa-da göni burçly bolýandygyny) anyklamaga mümkinçilik berýär. Hakykatdan hem,

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

formulada

1) eger $b^2+c^2>a^2$ bolsa, $\cos A>0$. Diýmek, A — ýiti burç;

2) eger $b^2+c^2=a^2$ bolsa, $\cos A=0$. Diýmek, A — göni burç;

3) eger $b^2+c^2<a^2$ bolsa, $\cos A<0$. Diýmek, A — kütek burç.

$b^2+c^2=a^2$ deňlik ýa-da $b^2+c^2<a^2$ deňsizlik a — üçburçlugyň diňe iň uly tarapy bolan ýagdaýda ýerine ýetirilýär. Diýmek, üçburçlugyň göni ýa-da kütek burçy onuň iň uly tarapynyň garşysynda ýatýar.

Üçburçlugyň iň uly tarapynyň garşysyndaky burçuň ululygyna garap, bu üçburçlugyň nähili (ýiti, kütek, göni burçly) üçburçludygy barada netijä gelmek mümkin.

1-nji mesele. Taraplary 5 *m*, 6 *m* we 7 *m* bolan üçburçlugyň burçlaryny tapmazdan onuň görnüşini anyklaň.

Çözülişi. Iň uly burçuň garşysynda iň uly tarap ýatýar. Şonuň üçin, eger $a=7$, $b=6$, $c=5$ bolsa, $\angle A$ iň uly burç bolýar.

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{36+25-49}{2\cdot 6\cdot 5} = \frac{12}{60} = \frac{1}{5} > 0.$$

Diýmek, A — ýiti burç, berlen üçburçluk bolsa ýiti burçly.

2. Üçburçlugyň meýdanyny onuň iki tarapy we olaryň arasyndaky burçy arkaly hasaplamagyň formulasy

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A$$

we $\sin A = \frac{a}{2R}$ formulalardan üçburçlugyň meýdanyny hasaplamak üçin

$$S = \frac{abc}{4R}$$

formulany we üçburçlugyň daşyndan çyzylan töweregiň radiusyny hasaplamak üçin

$$R = \frac{abc}{4S}$$

formulany alarys.

2-nji mesele. Taraplary $a=5$, $b=6$, $c=10$ bolan üçburçlugyň daşyndan çyzylan töweregiň radiusyny tapyň.

Çözülişi. Geronyň formulasyndan peýdalanyp, üçburçlugyň meýdanyny tapýarys:

$$p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{5+7+10}{2}=11,$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{11(11-5)(11-7)(11-10)}=\sqrt{11\cdot 6\cdot 4}=\sqrt{264}\approx 16{,}3.$$

Unda, $R=\frac{abc}{4S}\approx\frac{5\cdot 7\cdot 10}{4\cdot 16{,}3}\approx 5{,}4.$ *Jogaby:* $\approx 5{,}4$.

Meseleler we ýumuşlar

30.1. Eger $AB=7$ *cm*, $BC=8$ *cm*, $CA=9$ *cm* bolsa, ABC üçburçlugyň iň uly we eng kiçi burçuny tapyň.

30.2. Eger ABC üçburçlukda $\angle A=47°$, $\angle B=58°$ bolsa, üçburçlugyň iň uly we iň kiçi taraplaryny anyklaň.

30.3. Üçburçlugyň üç tarapy berlen:
a) $a=5$, $b=4$, $c=4$; b) $a=17$, $b=8$, $c=15$; d) $a=9$, $b=5$, $c=6$.
Üçburçluk ýiti burçly, gönüburçly ýa-da kütek burçly bolýandygyny anyklaň.

30.4. Taraplary a) 13, 14, 15; b) 15, 13, 4; ç) 35, 29, 8; d) 4, 5, 7 bolan üçburçlugyň daşyndan çyzylan töweregiň radiusyny tapyň.

30.5. ABC üçburçlugyň AB tarapynda D nokat belgilenen. CD kesim AC we BC kesimleriň azyndan birinden kiçi bolýandygyny subut ediň.

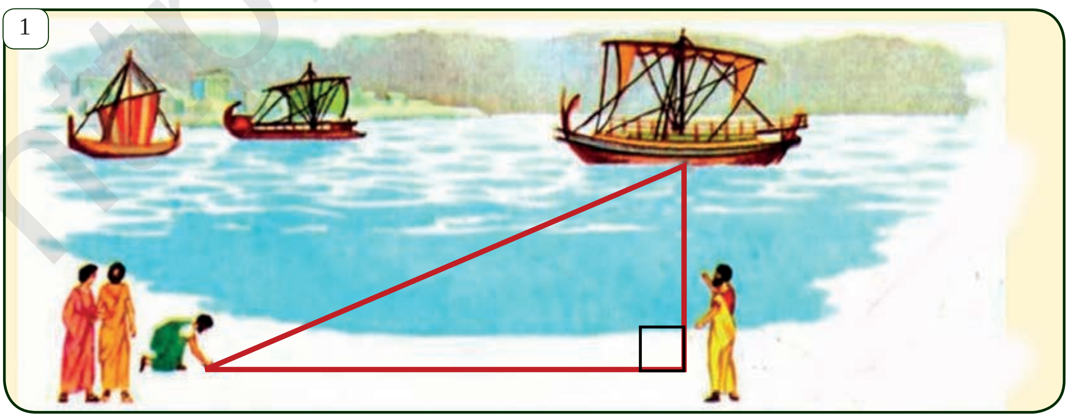
30.6. Üçburçlugyň uly burçunyň garşysynda uly tarapy ýatýandygyny subut ediň.

30.7. Üçburçlugyň uly tarapynyň garşysynda uly burçunyň ýatýandygyny subut ediň.

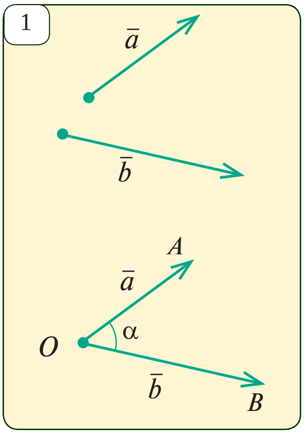
30.8*. ABC üçburçlugyň CD medianasy geçirilen. Eger $AC>BC$ bolsa, ACD burçuň BCD burçdan kiçi bolýandygyny subut ediň.

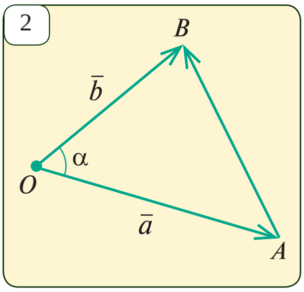
30.9*. 1-nji suratda berlenlere esaslanyp, gadymda grekler kenardan gämä çenli bolan aralygy nähili ölçändiklerini anyklaň.

1



31 IKI WEKTORYŇ ARASYNDAKY BURÇLAR WE OLARYŇ SKALÝAR KÖPELTMEK HASYLY





Nol wektordan tapawutly $\bar{a}$ wea $\bar{b}$ *wektorlaryň arasyndaky burç* diýip O nokatdan çykýan $\overline{OA}=\bar{a}$ we $\overline{OB}=\bar{b}$ wektorlaryň ugrukdyryjy kesimleriniň arasyndaky AOB burça aýdylýar (1-nji surat).

Birmeňzeş ugrukdyrylan wektorlaryň arasyndaky burç 0°-a deň diýlip hasaplanýar. Eger iki wektoryň arasyndaky burç 90°-a deň bolsa, olara *perpendikulýar* diýilýär.

$\bar{a}$ wea $\bar{b}$ wektorlaryň *skalýar köpeltmek hasyly* diýip, bu wektorlaryň uzynlyklarynyň olaryň arasyndaky burçuň kosinusynyň köpeltmek hasylyna aýdylýar.

Eger wektorlaryň biri nol wektor bolsa, olaryň skalýar köpeltmek hasyly nola deň bolýar.

Skalýar köpeltmek hasyly $\bar{a}\cdot\bar{b}$ ýaly belgilenýär. Kesgitlemä görä

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cos\varphi. \qquad (1)$$

Kesgitlemeden görnüşi ýaly, $\bar{a}$ we $\bar{b}$ wektorlaryň skalýar köpeltmek hasyly nola deň bolsa, olar *perpendikulýar* bolýar we tersine.

Fizikada jisimi $\bar{F}$ güýjüň täsiri astynda $\bar{s}$ aralyga süýşürmekde edilen A iş $\bar{F}$ we $\bar{s}$ wektorlaryň skalýar köpeltmek hasylyna deň bolýar:

$$A = \bar{F}\cdot\bar{s} = |\bar{F}|\cdot|\bar{s}|\cos\varphi.$$

Häsiýet. $\bar{a}\,(a_1;\,a_2)$ we $\bar{b}(b_1;\,b_2)$ wektorlar üçin $\bar{a}\cdot\bar{b} = a_1b_1+a_2b_2$.

Subudy. $\bar{a}$ we $\bar{b}$ wektorlary koordinata başlangyjy O nokada goýýarys (2-nji surat). Onda $\overline{OA} = (\overline{a_1;\,a_2})$ we $\overline{OB} = (\overline{b_1;\,b_2})$ bolýar. Eger berlen wektorlar kollinear bolmasa, ABO üçburçlukdan ybarat bolýar we onuň üçin kosinuslar teoremasi dogry bolýar: $AB^2=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cdot\cos\varphi$.

Onda $OA\cdot OB\cdot\cos\varphi = \frac{1}{2}(OA^2+OB^2-AB^2)$ bolýar.

Ýöne, $OA^2=a_1^2+a_2^2$, $OB^2=b_1^2+b_2^2$ we $AB^2=(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2$.

Diýmek, $\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cos\varphi = OA\cdot OB\cdot\cos\varphi = \frac{1}{2}(OA^2+OB^2-AB^2) =$

$$= \frac{1}{2}\left(a_1^2+a_2^2+b_1^2+b_2^2-(b_1-a_1)^2-(b_2-a_2)^2\right) = a_1b_1+a_2b_2.$$

Berlen wektorlar kollinear bolan ($\varphi=0°$, $\varphi=180°$) ýagdaýda hem bu deňligiň dogry bolýandygyny özbaşdak görkeziň. □

Wektorlaryň skalýar köpeltmek hasylynyň häsiýetleri

1. $\overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{b}\cdot\overline{a}$ orun çalyşma häsiýeti.

2. $(\overline{a}+\overline{b})\cdot\overline{c}=\overline{a}\cdot\overline{c}+\overline{b}\cdot\overline{c}$ paýlama häsiýeti.

3. $\lambda\cdot(\overline{a}\cdot\overline{b})=(\lambda\cdot\overline{a})\cdot\overline{b}=\overline{a}\cdot(\lambda\cdot\overline{b})$ toparlama häsiýeti.

4. Eger a we b wektorlar birmeňzeş ugurdaky kollinear wektorlar bolsa, $\overline{a}\cdot\overline{b}=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|$ bolýar, çünki $\cos 0°=1$.

5. Eger garşylykly ugrukdyrylan bolsa, $\overline{a}\cdot\overline{b}=-|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|$, çünki $\cos 180°=-1$.

6. $\overline{a}\cdot\overline{a}=|\overline{a}||\overline{a}|\cos 0°=|\overline{a}|^2\Rightarrow\overline{a}^{\,2}=|\overline{a}|^2$.

7. $\overline{a}$ we $\overline{b}$ wektorlar özara perpendikulýar bolsa, $\overline{a}\cdot\overline{b}=0$ bolýar.

Netijeler:

a) $\overline{a}=(\overline{a_1;a_2})$ wektoryň uzynlygy: $|\overline{a}|=\sqrt{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}}$; (1)

b) $\overline{a}=(\overline{a_1;a_2})$ we $\overline{b}=(b_1;b_2)$ wektorlar arasyndaky burç kosinusy:

$$\cos\varphi=\frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|}\quad \text{ýa-da}\quad \cos\varphi=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}}\cdot\sqrt{b_1^{\,2}+b_2^{\,2}}}$$

Mesele. $\bar{a}(1;2)$ we $\bar{b}(4;-2)$ wektorlar arasyndaky burçy tapyň.

Çözülişi. Berlen wektorlaryň arasyndaky burçy α diýip belgilesek, formula görä,

$$\cos\alpha=\frac{1\cdot4+2\cdot(-2)}{\sqrt{1^2+2^2}\cdot\sqrt{4^2+(-2)^2}}=\frac{4-4}{\sqrt5\cdot\sqrt{20}}=0.$$ Diýmek, $\alpha=90°$. *Jogaby:* 90°.

Meseleler we ýumuşlar

31.1. Eger $\bar{a}$ we $\bar{b}$ wektorlar üçin a) $|\bar{a}|=4$, $|\bar{b}|=5$, $\alpha=30°$; b) $|\bar{a}|=8$, $|\bar{b}|=7$, $\alpha=45°$; d) $|\bar{a}|=2.4$, $|\bar{b}|=10$, $\alpha=60°$; e) $|\bar{a}|=0{,}8$, $|\bar{b}|=\frac{1}{2}$ $\alpha=40°$ bolsa, bu wektorlaryň skalýar köpeltmek hasylyny tapyň (bu ýerde $\bar{\alpha}$ — $\bar{a}$ we b wektorlaryň arasyndaky burç).

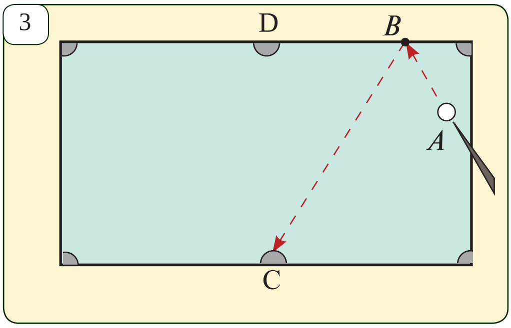
31.2. a) $\bar{a}(\frac{1}{2};-1)$ we $\bar{b}(2;3)$; b) $\bar{a}(-5;6)$ we $\bar{b}(6;5)$; ç) $\bar{a}(1{,}5;2)$ we $\bar{b}(4;-2)$ wektorlaryň skalýar köpeltmek hasylyny hasaplaň we olaryň arasyndaky burçy tapyň.

31.3. ABCD rombuň diagonallary O nokatda kesişýär we munda $\overline{BD}=\overline{AB}=4$ cm. a) $\overline{AB}$ we $\overline{AD}$; b) $\overline{AB}$ we $\overline{AC}$; d) $\overline{AD}$ we $\overline{DC}$; e) $\overline{OC}$ we $\overline{OD}$ wektorlaryň skalýar köpeltmek hasylyny we bu wektorlaryň arasyndaky burçy tapyň.

31.4. Nol wektordan tapawutly $\bar{a}$ we $\bar{b}$ wektorlar berlen bolsun. $\bar{a}\cdot\bar{b}=0$ bolanda bu wektorlar perpendikulýar bolýandygyny we tersine, $\bar{a}$ we $\bar{b}$ wektorlar perpendikulýar bolsa, $\bar{a}\cdot\bar{b}=0$ bolýandygyny subut ediň.

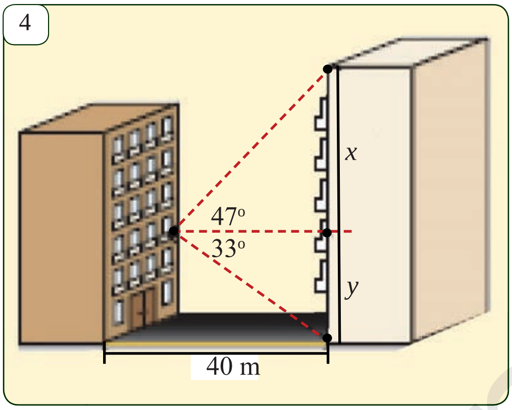
31.5*. x-iň nähili bahasynda a) $\bar{a}(4;5)$ we $b(x;6)$; b) $\bar{a}(x;1)$ we $\bar{b}(3;2)$; ç) $\bar{a}(0;-3)$ we $\bar{b}(5;x)$ wektorlar özara perpendikulýar bolýar?

31.6. $\bar{a}(3;3)$, $\bar{b}(2;-2)$, $\bar{c}(-1;-4)$ we $\bar{d}(-4;1)$ wektorlaryň arasyndan özara perpendikulýar jübütlerini tapyň.



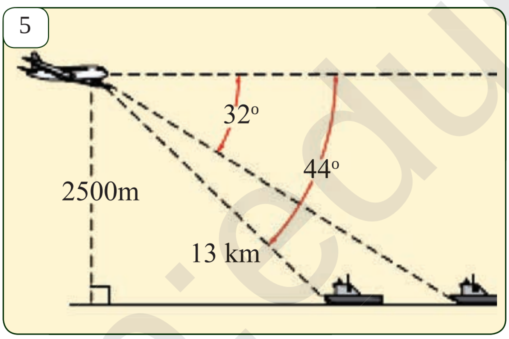
31.7*. Bilýard oýnunda A nokatda duran şar zarbadan soň bilýard stoluna tarapyna B nokatda uruldy we ugruny üýtgedip C nokatdaky sebetjige duşdi (3-nji surat).

Eger AB=40 cm, BC=150 cm we $\angle ABD = 120°$ bolsa, $\overline{AB} \cdot \overline{BC}$ skalýar köpeltmek hasylyny tapyň.



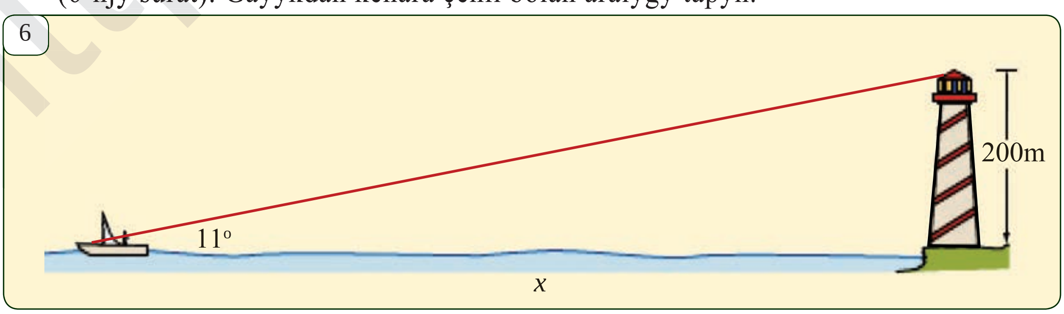
31.8. F(-3, 4) güýjüň täsiri astynda nokat A(5,-1)ýagdaýdan B(2, 1) ýagdaýa geçdi. Bu prosesde nähili iş edildi?

31.9. Leýla köp etažly öýüň 3-nji etažynda ýaşaýar. Onuň aýnasyndan öýünden 40 m aralykda duran başga bir öý görnüp durýar (4-nji surat). Eger-garşydaky öýüň üçegi Leýla 47° burç astynda, aşaky esasy bolsa 33° burç astynda görünse, garşydaky öýüň beýikligini tapyň.



31.10. 2500 m beýiklikde uçup barýan samolýotdan birinji gämi gorizonta görä 44° burç astynda, ikinji gämi bolsa 32° burç astynda görünýär (5-nji surat). Gämileriň arasyndaky aralygy tapyň.

31.11. Balykçylaryň gaýygyndan beýikligi 200 m bolan maýak 11° burç astynda görünýär (6-njy surat). Gaýykdan kenara çenli bolan aralygy tapyň.



Geometriýadan we geografiýadan taslama işi

Geografiýa predmetinden mälim bolşy ýaly, Ýer şarynyň üstündäki ýerler geografik koordinatalaryň kömeginde anyklanýar. 7-nji suratda bu koordinatalar getirilen. Onda

1 - nolunjy (Grinwiç) meridiany;

2- nolunjy meridiandan sagda (gündogarda) ýerleşýän meridianlar;

3- ekwatordan pesde (günortada) ýerleşýän paralleller;

4 - ekwator.

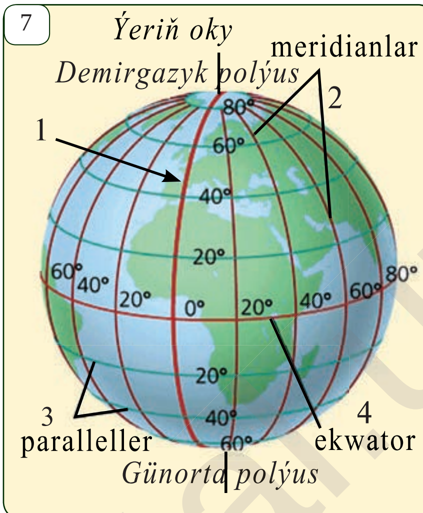
Nolunjy (Grinwiç) meridianynyň (1) ekwator (4) bilen kesişme nokady geografik koordinatalaryň sanaw başy hasaplanýar.

Ekwatordan demirgazyga tarap meridian boýunça çärýek töweregiň dugasy 90° demirgazyk giňligi, ekwatordan günorta tarap hem 90° günorta giňligi öz içine alýar.

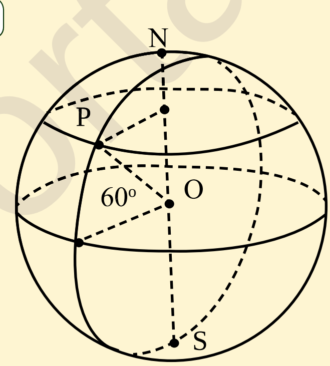
Nolunjy meridiandan gündogara tarap ekwator boýunça ýarym töweregiň dugasy 180° gündogar uzaklygy, nolunjy meridiandan günbatara tarap hem 180° günbatar uzaklygy öz içine alýar.

1. Daşkent şäheriniň geografik koordinatalaryny tapyň.
2. Watanymyzyň paýtagty bilen ýene haýsy uly şäherler takmynan birmeňzeş meridianda ýerleşýär.

7



8



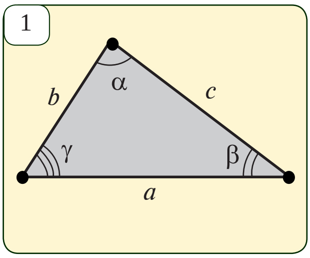
3. Daşkent şäherinden Tokio, Pekin, Seul, Waşington we Nýu-Ýork şäherlerine çenli (meridian boýunça) bolan aralyklary anyklaň (ýetişmeýän maglumatlary özüňiz gözläp tapyň).
4. Şäher 60° demirgazyk giňlikde ýerleşýär. Eger Ýeriň radiusy 6400 *km* bolsa, bu şäher ýerleşýän paralleliň radiusyny tapyň.

Gyzykly geometriýa

Awçy awa çykdy. Ilki ol günorta tarap 1 *km* ýöredi. Soň gündogara tarap 1 *km*, soň bolsa demirgazyga tarap 1 *km* ýol ýöredi we başlangyç ýagdaýyna geldi. Seretse, aýy dur. Ony atdy.

1. Awlanan aýynyň reňki nähili?
2. Ýer şarynyň ýene haýsy ýerlerinden ýola çykyp, ýokarda görkezilişi ýaly 3 tarapa ýöräp ýene başlangyç nokada gelmek mümkin? Ol ýerlerde aýy ýaşaýarmy?

32 ÜÇBURÇLUKLARY ÇÖZMEK



Üçburçlugyň taraplaryny *a, b, c* bilen, bu taraplaryň garşysyndaky burçlary degişlilikde α, β, γ bilen belgileýäris *(1-nji surat)*. Üçburçlugyň taraplaryny we burçlaryny bir at bilen — onuň *elementleri* diýýärler.

Üçburçlugy kesgitleýji berlen elementlerine görä, onuň galan elementlerini tapmaga *üçburçlugy çözmek* diýilýär.

1-nji mesele. *(Üçburçlugy berlen bir tarapy we oňa sepleşýän burçlary boýunça çözmek).* Eger üçburçlukda $\alpha=6$, $\beta=60°$ we $\gamma=45°$ bolsa, onuň üçünji burçuny we galan iki tarapyny tapyň.

Çözülişi. 1. Üçburçlugyň burçlarynyň jemi 180° bolany üçin

$$\alpha=180°-\beta-\gamma=180°-60°-45°=75°.$$

Sinuslar teoremasyndan peýdalanyp, galan iki tarapy tapýarys:

2. $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}$ deňlikden $b=a\cdot\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}=6\cdot\dfrac{\sin 60°}{\sin 75°}\approx 6\cdot\dfrac{0,8660}{0,9659}\approx 5,3794\approx 5,4.$

(sin60° we sin75° bahalary mikrokalkulýatorda tapyp goýulýar, olary dersligiň 153-nji sahypasyndaky jedwelden hem tapyp bilersiňiz).

3. $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{c}{\sin\gamma}$ deňlikden $c=a\cdot\dfrac{\sin\gamma}{\sin\alpha}=6\cdot\dfrac{\sin 45°}{\sin 75°}\approx 6\cdot\dfrac{0,7071}{0,9659}\approx 4,3924\approx 4,4.$

Jogaby: $\alpha=75°$; $\beta\approx 5,4$; $c\approx 4,4$.

2-nji mesele. *(Üçburçlugy berlen iki tarapy we olaryň arasyndaky burçy boýunça çözmek).* Eger üçburçlukda $a=6$, $b=4$ we $\gamma=120°$ bolsa, onuň üçünji tarapyny we galan burçlaryny tapyň.

Çözülişi. 1. Kosinuslar teoremasyndan peýdalanyp, üçburçlugyň üçünji *c* tarapyny tapýarys.

$$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}=\sqrt{36+16-2\cdot 6\cdot 4\cdot(-0,5)}=\sqrt{76}\approx 8,7.$$

2. Indi, üçburçlugyň üç tarapyny bilmek bilen, kosinuslar teoremasyndan peýdalanyp, üçburçlugyň galan burçlaryny tapýarys:

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{4^2+76-6^2}{2\cdot 4\cdot\sqrt{76}}\approx 0,8046.$$

$\cos\alpha\approx 0,8046$ deňlik esasynda α burçuň bahasyny 153-nji sahypadaky jedwelden anyklaýarys (α — ýiti burç): $\alpha\approx 36°$.

3. $\beta=180°-\alpha-\gamma\approx 180°-(36°+120°)=24°$. *Jogaby:* $c\approx 8,7$; $\alpha\approx 36°$, $\beta\approx 24°$.

3-nji mesele. *(Üçburçlugy berlen üç tarapy boýunça çözmek).* Eger üçburçlukda $a=10$, $b=6$ we $c=13$ bolsa, onuň burçlaryny tapyň.

Çözülişi: **1.** Üçburçlugyň kütek burçly bolmagy ýa-da bolmazlygyny uly tarapyň garşysyndaky burçuň kosinusynyň alamatyna garap anyklaýarys:

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{100+36-169}{2\cdot 10\cdot 6} = -\frac{33}{120} \approx -0{,}275 < 0.$$

Diýmek, C — kütek burç eken. Muny 153-nji sahypadaky jedwelden C burçuň ululygyny anyklamakda hasaba alýarys. Jedwelden kosinusy 0,275-e deň burç $\angle C_1=74°$ bolýandygyny tapýarys. Onda $\cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha$ formula görä,

$$\angle C = 180° - \angle C_1 = 180° - 74° = 106°.$$

2. Sinuslar teoremasyna görä,

$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$. Mundan, $\sin A = \frac{a\cdot \sin C}{c} = \frac{10\cdot \sin 106°}{13} = \frac{10\cdot \sin 74°}{13} \approx \frac{10\cdot 0{,}9615}{13} \approx 0{,}7396.$

A — ýiti burç bolany üçin 153-nji sahypadaky jedwelden $\angle A \approx 47°$ bolýandygyny anyklaýarys.

3. $\angle B \approx 180° - (106° + 47°) = 26°$. *Jogaby:* $\angle A \approx 47°$, $\angle B \approx 26°$, $\angle C \approx 106°$.

? *Meseleler we ýumuşlar*

32.1. Üçburçlugyň bir tarapy we oňa sepleşýän iki burçy berlen:

a) $a=5$ *cm*, $\beta=45°$, $\gamma=45°$; ç) $c=20$ *cm*, $\alpha=75°$, $\beta=60°$;
d) $a=35$ *cm*, $\beta=40°$, $\gamma=120°$; e) $c=12$ *cm*, $\alpha=36°$, $\beta=25°$.

Üçburçlugyň üçünji burçuny we galan iki tarapyny tapyň.

32.2. Üçburçlugyň iki tarapy we olaryň arasyndaky burçy berlen:

a) $a=6$, $b=4$, $\gamma=60°$; ç) $a=14$, $b=43$, $\gamma=130°$;
d) $b=17$, $c=9$, $\alpha=85°$; e) $b=14$, $c=10$, $\alpha=145°$.

Üçburçlugyň galan burçlaryny we üçünji tarapyny tapyň.

32.3. Üçburçlugyň üç tarapy berlen:

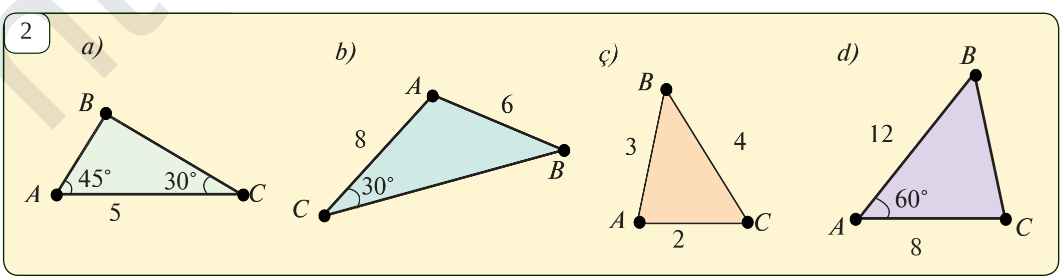
a) $a=2$, $b=3$, $c=4$; ç) $a=7$, $b=2$, $c=8$;
d) $a=4$, $b=5$, $c=7$; e) $a=15$, $b=24$, $c=18$.

Üçburçlugyň burçlaryny tapyň.

32.4. Üçburçlugyň iki tarapy we bu taraplardan biriniň garşysyndaky burçy berlen. Üçburçlugyň galan tarapyny we burçlaryny tapyň:

a) $a=12$, $b=5$, $\alpha=120°$; ç) $a=27$, $b=9$, $\alpha=138°$;
d) $b=2$, $c=2$, $\alpha=60°$; e) $b=6$, $c=8$, $\alpha=30°$.

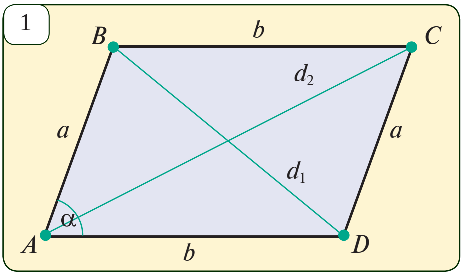
32.5. 2-nji suratda berlen maglumatlar esasynda üçburçlugy çözüň.



MESELELER ÇÖZMEK

1-nji mesele. Parallelogramyň diagonallarynyň kwadratlarynyň jemi taraplarynyň kwadratlarynyň jeminiň ikeldilenine deňdigini subut ediň.

ABCD — parallelogram, $AB = a$, $AD = b$, $BD = d_1$, $AC = d_2$ *(1-nji surat).* ⇒ $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$



Subudy. $ABCD$ parallelogramyň A burçy α deň bolsun. Onda $\angle B = 180° - \alpha$. ABD we ABC üçburçluklara kosinuslar teoremasyny ulanýarys *(1-nji surat)*:

$$d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha, \quad (1)$$

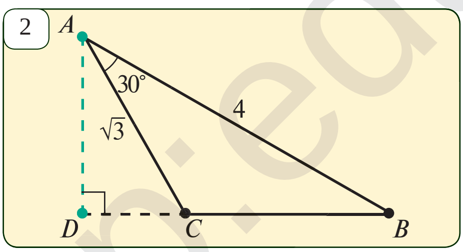
$$d_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(180° - \alpha).$$

$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$ deňligi hasaba alsak,

$$d_2^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha. \quad (2)$$

(1) we (2) deňlikleriň degişli bölеklerini goşup, $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$ deňligi alarys.

2-nji mesele. ABC üçburçlukda $\angle A = 30°$, $AB = 4$, $AC = \sqrt{3}$ bolsa, üçburçlugyň A depesinden geçirilen AD beýikligini tapyň (*2-nji surat*).



Çözülişi. 1) Kosinuslar teoremasyndan peýdalanyp, üçburçlugyň BC tarapyny tapýarys:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A =$$
$$= 4^2 + (\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos 30° = 7, \quad BC = \sqrt{7}.$$

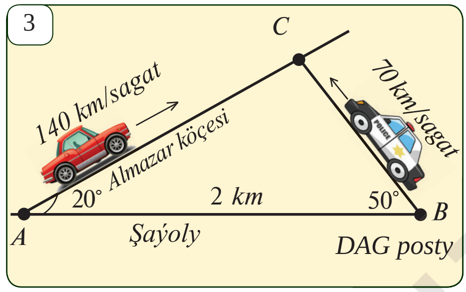
2) Indi üçburçlugyň meýdanyny tapýarys:

$$S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A = \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot 4 \cdot \sin 30° = \sqrt{3}.$$

3) Tapylanlardan peýdalanyp, üçburçlugyň AD beýikligini tapýarys:

$S = \frac{1}{2} BC \cdot AD$ formuladan $AD = \dfrac{2S}{BC} = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \dfrac{2\sqrt{21}}{7}$. *Jogaby:* $\dfrac{2\sqrt{21}}{7}$.

3-nji mesele. Sürüji köçe hereketiniň düzgünlerini bozup, sagat 12^{00}-da şaýolunyň A nokadyndan Almazar köçesine tarap öwrüldi we 140 *km/sagat* tizlikde hereketini dowam etdirdi (*3-nji surat*). Sagat 12^{00}-da DAG işgäri B nokatdan daş düşelen ýol boýunça 70 *km/sagat* tizlikde düzgünbozujy sürüjiniň ýolyny kesip çykmak üçin ýola çykdy. DAG işgäri çatrykda, ýagny C nokatda düzgün bozujy sürüjini saklap bilmedi?



Çözülişi: ABC üçburçlukda
$\angle C=180°-(\angle A+\angle B)=180°-(20°+50°)==180°-70°=110°$.

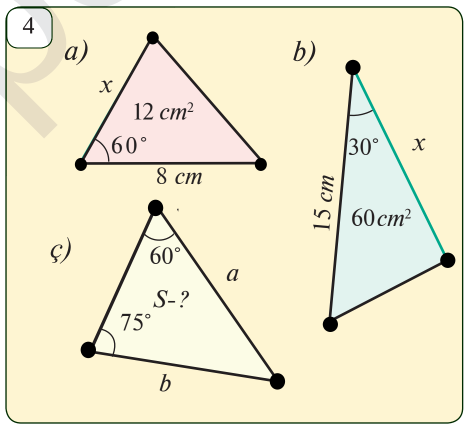
1. Almazar köçesindäki ýoluň AC böleginiň uzynlygyny tapýarys: sinuslar teoremasyna ko'ra,

$$\frac{AC}{\sin B}=\frac{AB}{\sin C}.\ \text{Bu deňlikden}\ AC=\frac{AB\cdot\sin B}{\sin C}=\frac{2\cdot\sin 50^\circ}{\sin 110^\circ}=\frac{2\cdot\sin 50^\circ}{\sin(90^\circ+20^\circ)}=\frac{2\cdot\sin 50^\circ}{\cos 20^\circ}\approx$$

$\approx\frac{2\cdot 0{,}766}{0{,}940}=\frac{1{,}532}{0{,}94}\approx 1{,}630$ (km). Bu ýoly düzgün bozujy sürüji $\frac{1{,}630\ km}{140\ km/h}\approx$ $\approx 0{,}0116$ *sagat*$=0{,}012\cdot 3600$ *sekunt*≈ 42 *sekunt*da geçýär.

2. Indi daş düşelen ýoluň BC böleginiň uzynlygyny tapýarys: sinuslar teoremasyna görä, $\frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin B}$. Bu deňlikden $BC=\frac{AC\cdot\sin A}{\sin B}=\frac{2\cdot\sin 20^\circ}{\sin 50^\circ}=\frac{2\cdot 0{,}342}{0{,}766}\approx 0{,}893$ (km).

Bu ýoly DAG işgäri $\frac{0{,}893\ km}{70\ km/h}\approx 0{,}0128$ *sagat*$=0{,}0128\cdot 3600$ *sekunt*$\approx$ ≈ 46 *sekunt*da geçýär. Diýmek, C çatryga DAG işgäri sürüjiden gijräk ýetip geler eken. *Jogaby:* Ýok.



Meseleler we ýumuşlar

33.1. 4-nji suratdaky maglumatlar boýunça x-iň bahasyny tapyň.

33.2. ABC üçburçlugyň CD beýikligi 4 m. Eger $\angle A=45°$, $\angle B=30°$ bolsa, üçburçlugyň taraplaryny tapyň.

33.3. Bir nokada ululygy birmeňzeş bolan iki güýç goýlan. Eger bu güýçleriň ugurlarynyň arasyndaky burç 60° we güýçleriň deň täsir edijisi 150 kg bolsa, şu güýçleriň ululygyny tapyň.

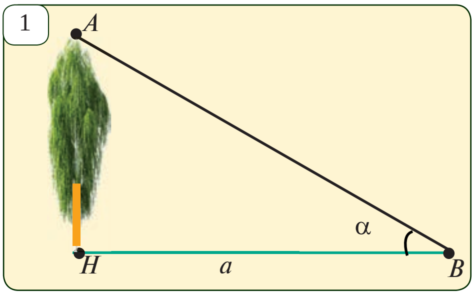
33.4. Üçburçlugyň iki tarapy 7 dm we 11 dm, üçünji tarapyna geçirilen medianasy bolsa 6 dm. Üçburçlugyň üçünji tarapyny tapyň.

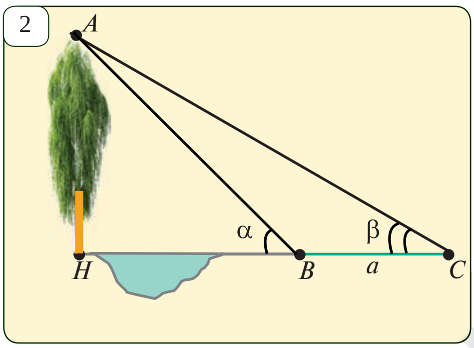
33.5. Taraplary 6 cm we 8 cm bolan parallelogramyň bir diagonaly 12 cm bolsa, onuň ikinji diagonalyny tapyň.

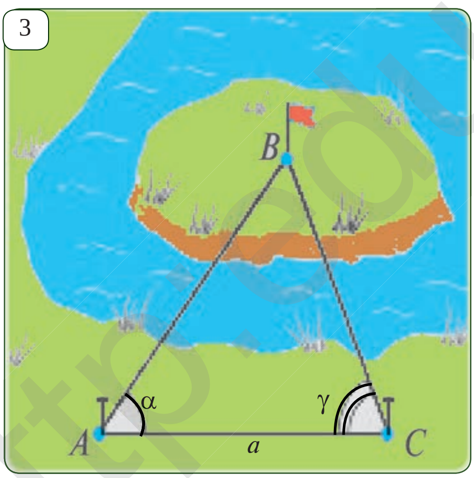
33.6. Üçburçlugyň 18 cm-e deň tarapynyň garşysyndaky burçy 60°-a deň. Üçburçlugyň daşyndan çyzylan töweregiň radiusyny tapyň.

33.7. Deňýanly trapesiýanyň kiçi esasynyň gapdal tarapyna deň, uly esasy bolsa 20 cm. Eger trapesiýanyň bir burçy 120° bolsa, onuň perimetrini tapyň.

34 AMALY IŞ WE ONUŇ ULANYLYŞY







1. *Beýikligi ölçemek.* Aýdaly, agajyň AH beýikligini ölçemeli bolsun (*1-nji surat*).

a) Munuň üçin B nokady belgileýäris we BH aralyk a-ny we HBA burç α-ny ölçeýäris. Onda, gönüburçly ABH üçburçlukda

$$AH = BH\,\mathrm{tg}\alpha = a\,\mathrm{tg}\alpha.$$

b) Eger beýikligiň esasy H nokat baryp bolmaýan nokat bolsa *(2-nji surat)*, ýokardaky usul bilen AH beýikligi anyklap bilmersiňiz. Onda aşakdaky ýaly çemeleşýäris:

1) H nokat bilen bir göni çyzykda ýatýan B we C nokatlary belgileýäris;

2) BC aralygy ölçäp a-ny tapýarys;

3) ABH we ACH burçlary ölçäp $\angle ABH = \alpha$ we $\angle ACH = \beta$ -lary tapýarys;

4) ABC üçburçluga sinuslar teoremasyny ulansak ($\angle BAC = \alpha - \beta$)

$$\frac{AB}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin(\alpha-\beta)}, \text{ýagny } AB = \frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

5) gönüburçly ABH üçburçlukda AH beýikligi tapýarys:

$$AH = AB\sin\alpha = \frac{a\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

2. *Baryp bolmaýan nokada çenli bolan aralygy hasaplamak.* Aýdaly, A nokatdan baryp bolmaýan B nokada çenli bolan aralygy hasaplamaly *(3-nji surat)*. Bu meseläni üçburçluklaryň meňzeşlik nyşanlaryndan peýdalanyp jogabyny tapandygymyzy ýatladyp geçýäris.

Indi bu meseläni sinuslar teoremasyndan peýdalanyp çözýäris.

1) A we B nokatlardan görnüp duran tekiz ýerde C nokady belgileýäris.

2) AC aralygy ölçeýäris: $AC = a$.

3) Esbaplaryň kömeginde ACB we BCA burçlary ölçeýäris: $\angle BAC = \alpha$, $\angle BCA = \gamma$.

4) ABC üçburçlukda $\angle B = 180° - \alpha - \gamma$ bolany üçin,

$$\sin B = \sin(180° - \alpha - \gamma) = \sin(\alpha + \gamma).$$

Sinuslar teoremasyna görä, $\dfrac{AB}{\sin C} = \dfrac{AC}{\sin B}$ ýa-da $AB = \dfrac{a\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)}$

Meseleler we ýumuşlar

34.1. 1-nji suratda $a = 12$ *m*, $\alpha = 42°$ bolsa, agajyň beýikligini hasaplaň.

34.2. 2-nji suratda $a = 8$ *m*, $\alpha = 43°$, $\beta = 32°$ bolsa, agajyň beýikligini hasaplaň.

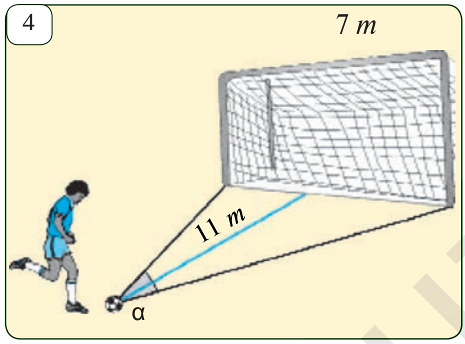
34.3. 3-nji suratda $a = 60$ *m*, $\alpha = 62°$, $\gamma = 44°$ bolsa, *AB* aralygy tapyň.

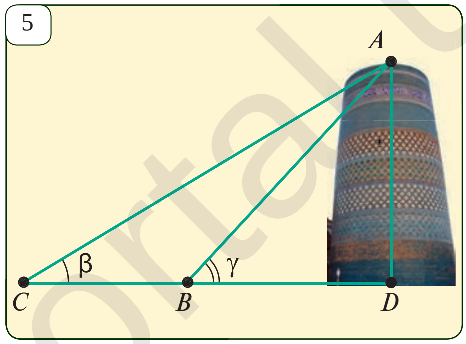
34.4. Futbol oýnunda 11 metrlik jerima topuny derwezä ugrukdyryjy burçy α=ni tapyň (*4-nji surat*). Derwezäniň giňligi 7 *m*.

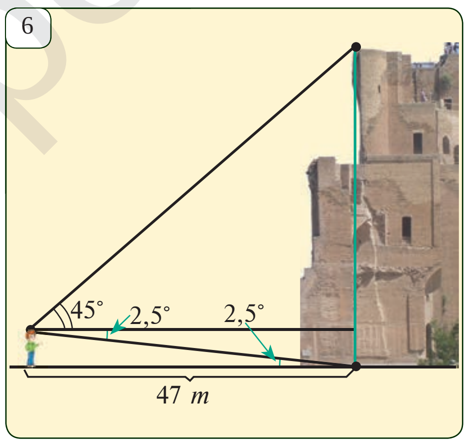
34.5. 5-nji suratda Hywa şäherindäki Kelteminar görkezilen. Eger $\beta = 30{,}7°$, $\gamma = 45°$, $BC = 50$ *m* bolsa, Kelteminaryň beýikligini tapyň.

34.6. Syýahatçy Şährisebz şäherindäki Aksaraýy ondan 47 *m* aralykda tomaşa edýär (*6-njy surat*). Eger ol Aksaraýyň esasyny gorizonta görä 2,5°-a deň burç astynda, depe bölegini bolsa 45°-a deň burç astynda görýän bolsa, Aksaraýyň beýikligini tapyň.

34.7. Üç ýol *ABC* üçburçlugy emele getirýär. Bu üçburçlukda $\angle A = 20°$, $\angle B = 150°$. *A* nokatdan ýola çykan sürüji *C* nokada mümkingadar tizräk ýetip barmakçy. *AC* we *CB* ýollar daşly, *AB* asfalt ýol bolup, asfalt ýolda daşly ýola garanda 2 esse tizräk hereketlenmek mümkin. Sürüjä haýsy ýoldan ýöremegi maslahat berýärsiňiz?







Gyzykly mesele

Pifagoryň teoremasynyň ýene bir "subudy"

Gönüburçly *ABC* üçburçlukda $a = c\sin\alpha$, $b = c\cos\alpha$. Bu iki deňligi kwadrata göterip, agzama-agza goşsak we $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ bolýandygyny hasaba alsak,

$$a^2 + b^2 = c^2\sin^2\alpha + c^2\cos^2\alpha = c^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = c^2.$$

Diýmek, $a^2 + b^2 = c^2$. Bu "subut" logiki taýdan nädogry bolýandygyny esaslandyryň.

35 BILIMIŇIZI SYNAŇ

I. Testler

1. Taraplary a, b, c, degişli burçlary α, β, γ, meýdany S bolan üçburçluk üçin haýsy deňlik nädogry?

A. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$; B. $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$;

D. $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$; E. $S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$.

2. Nädogry deňligi tapyň:

A. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; B. $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$;

D. $\cos(180° - \alpha) = \cos\alpha$; E. $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$.

3. Üçburçlugyň üç tarapy mälim bolsa, haýsy teoremadan peýdalanyp onuň burçlaryny tapmak mümkin?

A. Sinuslar teoremasy; B. Kosinuslar teoremasy;

D. Falesiň teoremasy; E. Geronyň formulasy.

4. Üçburçlugyň bir burçy 137°-a, ikinji burçy 15°-a deň. Eger bu üçburçlugyň uly tarapy 22-ä deň bolsa, onuň kiçi tarapyny tapyň.

A. 8,3; B. 9,3; D. 3,8; E. 6,5.

5. Üçburçlugyň 14 we 19-a deň bolan taraplary arasyndaky burçy 26°. Şu üçburçlugyň üçünji tarapyny tapyň.

A. 1,2; B. 5,4; D. 6,9; E. 19,7.

6. Eger iki wektoryň uzynlyklari $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=5$ we olaryň arasyndaky burç 45° bolsa, $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlaryň skalýar köpeltmek hasylyny tapyň.

A. 52; B. 32 D. 102; E. 2.

7. $\vec{a}(4; -1)$ we $\vec{b}(2; 3)$ wektorlaryň skalýar köpeltmek hasylyny tapyň.

A. 5; B. 3; D. 4; E. 9.

8. $\vec{a}(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$ we $\vec{b}(\sqrt{3}; 1)$ wektorlar arasyndaky burçy tapyň.

A. 30°; B. 60°; D. 90°; E. 45°.

9. Üçburçluk burçlarynyň gatnaşygy 3:2:1 ýaly bolsa, onuň taraplary gatnaşygyny tapyň.

A. 3:2:1; B. 1:2:3; D. $2:\sqrt{3}:1$; E. $\sqrt{3}:\sqrt{2}:1$.

10. Tarapy 3 cm bolan dogry üçburçlugyň daşyndan çyzylan töweregiň radiusyny tapyň.

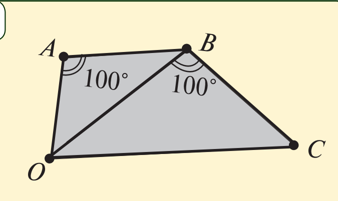
A. $\sqrt{3}$; B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $2\sqrt{3}$; E. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

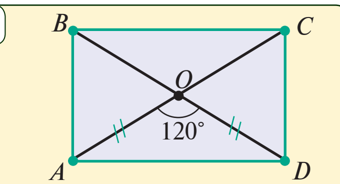
II. Meseleler

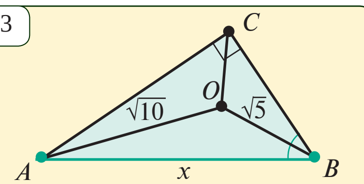
1. *ABC* üçburçluga $AB = 6$ *cm*, $\angle A = 60°$, $\angle B = 75°$. *BC* tarapy hem-de *ABC* üçburçlugyň daşyndan çyzylan töweregiň radiusyny tapyň.

2. Taraplary 5 *cm*, 6 *cm* we 10 *cm* bolan üçburçlugyň burçlarynyň kosinuslaryny tapyň.

3. ABC üçburçlukda $\angle B = 60°$, $AB = 6$ *cm*, $BC = 4$ *cm*. AC tarapy hem-de ABC üçburçlugyň daşyndan çyzylan töweregiň radiusyny tapyň.
4. Taraplary 51 *cm*, 52 *cm* we 53 *cm* bolan üçburçlugyň daşyndan çyzylan töweregiň radiusyny tapyň.
5. Üçburçlugyň iki tarapy 14 *cm* we 22 *cm*, üçünji tarapyna geçirilen medianasy bolsa 12 *cm*. Üçburçlugyň üçünji tarapyny tapyň.
6. Parallelogramyň diagonallary 4 *cm*, $4\sqrt{2}$ *cm* we olaryň arasyndaky burç 45°. Parallelogramyň a) meýdanyny; b) perimetrini; ç) beýikliklerini tapyň.
7. Taraplary 3 we 5 bolan parallelogramyň bir diagonaly 4-e deň. Onuň ikinji diagonalyny tapyň.
8. Taraplary a) 2, 2 we 2,5; b) 24, 7 we 25; ç) 9, 5 we 6 bolan üçburçlugyň görnüşini anyklaň.
9. Parallelogramyň taraplary $7\sqrt{3}$ we 6 *cm*. Eger onuň kütek burçy 120° bolsa, onuň meýdanyny tapyň.
10. ABC üçburçlugyň AB, BC taraplarynda N, K nokatlar alnan. Onda $BN = 2AN$, $3BK = 2KC$. Eger $AB = 3$, $BC = 5$, $CA = 6$ bolsa, NK kesimi tapyň.
11. ABC üçburçlukda $\angle A = 30°$, $BC = 7$ *cm*. Üçburçlugyň daşyndan çyzylan töweregiň radiusyny tapyň.
12. ABC üçburçlugyň BE bissektrisasy geçirilen. E nokatdan BC tarapa EF perpendikulýar geçirilen. Eger $EF = 3$, $\angle A = 30°$ bolsa, AE-ni tapyň.
13. $ABCD$ gönüburçluk AD tarapynyň ortasy N nokatda. Eger $AB = 3$, $BC = 6$ bolsa, $\overline{NB}\cdot\overline{NC}$ skalýar köpeltmek hasylyny tapyň.
14. $\bar{a}(2;x)$, $\bar{b}(-4;1)$ bolup, $\bar{a}+\bar{b}$ we $\bar{b}$ wektorlar perpendikulýar. x-i tapyň.
15. $\overline{m}(7;3)$ we $\overline{n}(-2;-5)$ wektorlaryň arasyndaky burçy tapyň.
16. 1-nji suratda berlenlerden peýdalanyp, suratdaky iň uly kesimi anyklaň.
17. $ABCD$ gönüburçlugyň diagonallary O nokatda kesişýär(2-nji surat). Eger $AO = 12$ *cm*, $\angle AOD = 120°$ bolsa, dörtburçlugyň perimetrini tapyň.
18. Gönüburçly ABC üçburçluk bissektrisalary O nokatda kesişýär ($\angle C = 90°$). Eger $OA = \sqrt{10}$, $OB = \sqrt{5}$ bolsa, AB gipotenuzany tapyň (3-nji surat).

1


2


3


III. Özüňizi synaň (nusga barlag işi)

1. Taraplary $a= 45$, $b= 70$, $c= 95$ bolan üçburçlugyň iň uly burçuny tapyň.
2. Üçburçlukda $b=5$, $\alpha=30°$, $\beta=50°$ bolsa, üçburçlugy çözüň.
3. *PKH* üçburçlukda $PK= 6$, $KH=5$, $\angle PKH=100°$. *HF* mediananyň uzynlygyny we *PFH* üçburçlugyň meýdanyny tapyň.
4. *(Goşmaça)*. Üçburçlukda $a=\sqrt{3}$, $b=1$, $\alpha=135°$ bolsa, β burçy tapyň.

Taryhy maglumatlar. Sinus barada

Sinus baradaky maglumat ilki IV–V asyrlardaky hindi astronomlarynyň eserlerinde duşýar.

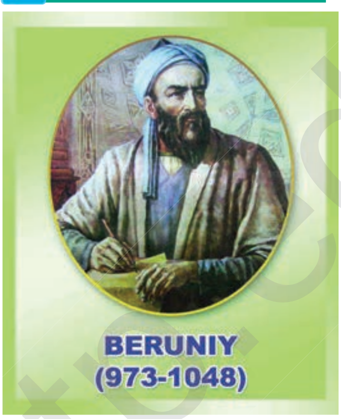
Orta aziýaly alymlar al-Horezmi, Biruny, Ibn Sina, Abdurahman al-Hazyny (XII asr) sinus üçin *«al-jaýb»* adalgasyny ulanypdyrlar.

Häzirki sinus belgisini Simpson, Eýler, Dalamber, Lagranj (XVII asyr) we başgalar ulanypdyr.

«Kosinus» adalgasy latynça «komplimenti sinus» adalgasynyň gysgaldylany, ol «goşmaça sinus», has takygy «goşmaça duganyň sinusy» diýmekdir.

Kosinuslar teoremasyny grekler hem bilipdir, onuň subudy Ýewklidiň "Esaslar" eserinde getirilen. Sinuslar teoremasynyň özboluşly subudyny Abu Reýhan Biruny beýan edipdir.

Taryhy maglumatlar.



Biruny (doly ady – Abu Reýhan Muhammet ibn Ahmet) (973 — 1048) – orta asyryň beýik ensiklopedist alymy. Ol Horezm ülkesiniň Kyýat şäherinde doglupdyr. Kyýat Amyderýanyň sag kenary – häzirki Biruny şäheriniň ýerinde bolan, ol ýakyn wagtlara çenli Şabbaz diýlip atlandyrylypdyr. Birunynyň matematika we ylmyň başga ugurlaryna goşan goşandyny ýazyp galdyran 150-den artyk eserinden hem görmek mümkin. Olardan iň irileri – "Hindistan", "Ýadygärlikler", "Mas'ud kanunlary", "Geodeziýa", "Mineralogiýa" we "Astronomiýa".

Birunynyň şa eseri "Mas'ud kanunlary", esasan, astronomiýa degişli bolsa-da, onuň matematika degişli ençeme açyşlary şu eserde beýan edilen.

Bu eserde Biruny iki burçuň jeminiň we tapawudynyň sinuslary, ikeldilen we ýarym burçuň sinuslary baradaky teoremalar bilen deň güýçli bolan hordalar baradaky teoremalary subut edipdir, iki gradusly duganyň hordalaryny hasaplap tapypdyr, sinuslar we tangensler jedwellerini düzüpdir, sinuslar teoremasyny özboluşly usulda subut edipdir.

III BAP

TÖWEREGIŇ UZYNLYGY WE TEGELEGIŇ MEÝDANY

Şu baby öwrenmek netijesinde siz aşakdaky bilimlere we amaly endiklere eýe bolarsyňyz:

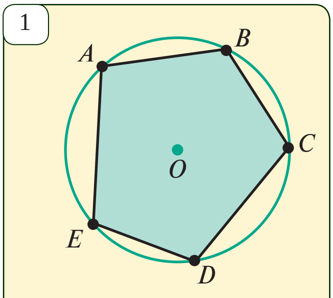
Bilimler:

√ köpburçlugyň daşyndan we içinden çyzylan töwerekleriň häsiýetlerini bilmek;
√ dogry köpburçluklaryň häsiýetlerini bilmek;
√ dogry köpburçlugyň meýdanyny hasaplamagyň formulalaryny bilmek;
√ töweregiň we onuň dugasynyň uzynlygyny hasaplamagyň formulalaryny;
√ tegelegiň we onuň bölekleriniň meýdanyny tapmagyň formulalaryny bilmek;
√ burçuň radian ölçegini bilmek.

Amaly endikler:

√ dogry köpburçluklary şekillendirip bilmek;
√ dogry köpburçlugyň daşyndan we içinden çyzylan töwerekleriň radiuslaryny tapyp bilmek;
√ töweregiň we duganyň uzynlygyny hasaplap bilmek;
√ tegelek we onuň bölekleriniň meýdanyny hasaplap bilmek.

36 TÖWEREGIŇ IÇINDEN ÇYZYLAN KÖPBURÇLUK

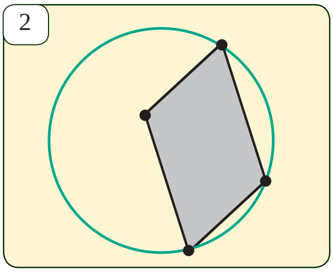


Töweregiň içinden çyzylan bäşburçluk ýa-da bäşburçlugyň daşyndan çyzylan töwerek.

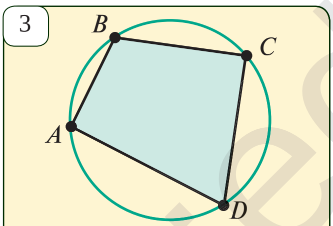
Kesgitleme. Eger köpburçlugyň ähli depeleri töwerekde ýatsa, bu köpburçluk töweregiň *içinden çyzylan*, töwerek bolsa köpburçlugyň *daşyndan çyzylan* diýilýär *(1-nji surat)*.

Islendik üçburçlugyň daşyndan töwerek çyzmak mümkinligini we bu töweregiň merkezi üçburçlugyň taraplarynyň orta perpendikulýarlary kesişen nokatda ýatýandygyny 8-nji synpda öwrenipdiňiz.

Eger köpburçlugyň burçlarynyň sany üçden artyk bolsa, köpburçlugyň daşyndan ylmydama töwerek çyzyp bolubermeýär. Meselem, gönüburçlukdan tapawutly parallelogram üçin daşyndan çyzylan töwerek ýok *(2-nji surat)*.



8-nji synp geometriýa kursundan mälim bolşy ýaly, dörtburçlugyň daşyndan garşylykly burçlarynyň jemi 180°-a deň bolanda we diňe şonda töwerek çyzmak mümkin *(3-nji surat)*.



$\angle A+\angle C=180°$
$\angle B+\angle D=180°$

1-nji mesele. Ýiti burçly ABC üçburçlugyň AA_1 we BB_1 beýiklikleri H nokatda kesişýär. A_1HB_1C dörtburçlugyň daşyndan töwerek çyzmak mümkinligini subut ediň.

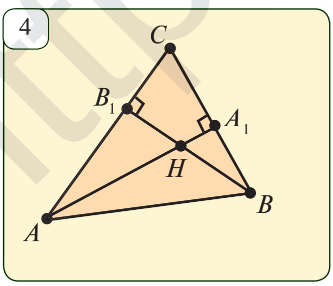
Çözülişi. $AA_1 \perp BC$ we $BB_1 \perp AC$ bolany üçin (*4-nji surat*)

$$\angle HB_1C=\angle HA_1C=90°.$$

Onda $\angle HB_1C+\angle HA_1C=180°$. Dörtburçlugyň içki burçlarynyň jemi 360° bolany üçin:

$$\angle B_1CA_1+\angle B_1HA_1=180°.$$

Diýmek, A_1HB_1C dörtburçlugyň daşyndan töwerek çyzmak mümkin.



Töweregiň içinden çyzylan köpburçlugyň depeleri töweregiň merkezinden deň uzaklykda ýatýandygy üçin töweregiň merkezi köpburçlugyň taraplarynyň orta perpendikulýarlarynda ýatýar *(5-nji surat)*. Diýmek, töweregiň içinden çyzylan köpburçlugyň taraplarynyň orta perpendikulýarlary hökman bir nokatda kesişmeli.

2-nji mesele. Esasyna geçirilen beýikligi 16 *cm* bolan deňýanly üçburçlugyň radiusy 10 *cm* bolan töweregiň içinden çyzylan. Üçburçlugyň taraplaryny tapyň.

Çözülişi. ABC üçburçlugyň daşyndan çyzylan töweregiň merkezi O nokat AC tarapyň orta perpendikulýary bolan BD beýiklikde ýatýar (*6-njy surat*). Onda,

$$OD = BD - OB = 16 - 10 = 6\ (cm)$$

bolýar we Pifagoryň teoremasyna görä,

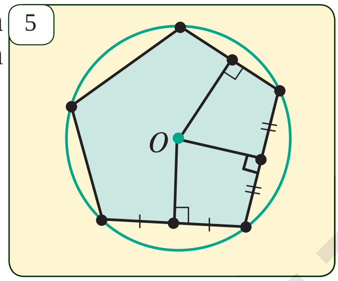
$$AD = \sqrt{OA^2 - OD^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8\ (cm),\ AC = 2AD = 16(cm).$$

Şonuň ýaly-da, gönüburçly ABD üçburçlukda

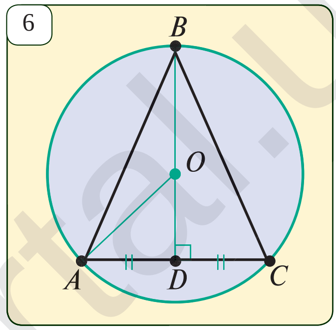
$$AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = \sqrt{8^2 + 16^2} = 8\sqrt{5}\ (cm).$$

Jogaby: $8\sqrt{5}\ cm$, $8\sqrt{5}\ cm$, $16\ cm$.

5



6



Meseleler we ýumuşlar

36.1. Eger köpburçluk töweregiň içinden çyzylan bolsa, onuň taraplary orta perpendikulýarlary bir nokatda kesişýändigini subut ediň.

36.2. Nähili üçburçluk töweregiň içinden çyzylan bolmagy mümkin? Dörtburçluk nähili?

36.3. $ABCDE$ bäşburçluk töweregiň içinden çyzylan bolsa, $\angle ACB = \angle AEB$ bolýandygyny subut ediň.

36.4. Katetleri 16 *cm* we 12 *cm* bolan gönüburçly üçburçlugyň daşyndan çyzylan töweregiň radiusyny tapyň.

36.5. Radiusy 25 *cm* bolan töweregiň içinden bir tarapy 14 *cm* bolan gönüburçluk çyzylan. Gönüburçlugyň meýdanyny tapyň.

36.6. Radiusy 10 *cm* bolan töweregiň içinden çyzylan a) deň taraply üçburçlugyň; b) kwadratyň; ç) deňýanly gönüburçly üçburçlugyň taraplaryny tapyň.

36.7. Taraplary 16 *cm*, 10 *cm* we 10 *cm* bolan üçburçlugyň daşyndan çyzylan töweregiň radiusyny tapyň.

36.8. Töweregiň içinden çyzylan $ABCDEF$ altyburçlukda $\angle BAF + \angle AFB = 90°$ bolsa, töweregiň merkeziniň AF tarapda ýatýandygyny subut ediň.

36.9. Islendik deňýanly trapesiýa töweregiň içinden çyzylmagy mümkinligini subut ediň.

36.10. Deňýanly trapesiýa çyzyň. Onuň daşyndan çyzylan töwerek guruň.

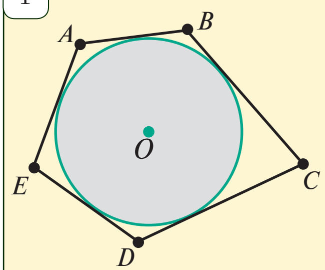
Gyzykly mesele

On alty ýaşly Galua (E.Galua — fransuz matematigi, 1811—1832) kolležde okap ýören wagtlarynda, oňa mugallymy bir sagadyň içinde üç meseläni çözüp bermegi sorapdyr. Galua çözüwi onçakly aňsat bolmadyk bu meseleleri 15 minutda çözüp, hemmäni haýran galdyrypdyr. Ynha, şu meselelerden biri. Ony siz hem çözjek boluň!

Mesele. Töweregiň içinden çyzylan dörtburçlugyň dört tarapy a, b, c we d-ge deň. Onuň diagonallaryny tapyň.

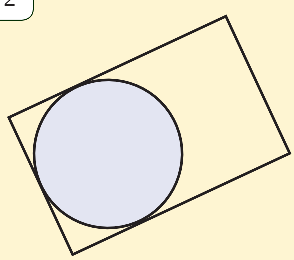
37 TÖWEREGIŇ DAŞYNDAN ÇYZYLAN KÖPBURÇLUK

1

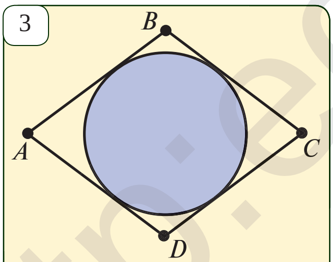


Töweregiň daşyndan çyzylan ABCDE bäşburçluk ýa-da ABCDE bäşburçlugyň içinden çyzylan tölwerek.

2

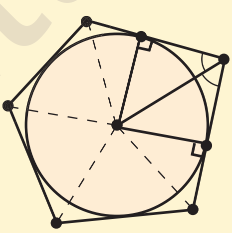


3



$AB + CD = AD + BC$

4



Kesgitleme. Eger köpburçlugyň ähli taraplary töwerege galtaşsa, onda köpburçluk töweregiň *daşyndan çyzylan,* töwerek bolsa köpburçlugyň *içinden çyzylan* diýilýär *(1-nji surat)*.

Islendik üçburçlugyň içinden töwerek çyzmak mümkinligi we bu töweregiň merkezi üçburçlugyň bissektrisalary kesişen nokatdadygy bilen 8-nji synpda tanşypdyňyz.

Eger köpburçlugyň burçlarynyň sany üçden artyk bolsa, bu köpburçlugyň içinden hemişe töwerek çyzyp bolubermeýär. Meselem, kwadratdan tapawutly gönüburçlugyň içinden töwerek çyzyp bolmaýar *(2-nji surat)*.

Ýene 8-nji synp geometriýa kursundan mälim bolşy ýaly, dörtburçlugyň içinden diňe we diňe garşylykly taraplarynyň jemi deň bolanda töwerek çyzmak mümkin *(3-nji surat)*.

Töweregiň daşyndan çyzylan köpburçlugyň taraplary töwerege galtaşany üçin töweregiň merkezi şu köpburçlugyň burçlarynyň bissektrisasynda ýatýar *(4-nji surat)*. Diýmek, töweregiň daşyndan çyzylan köpburçluk burçlarynyň bissektrisalary bir nokatda kesişýär.

Teorema. ***Eger r radiusly töweregiň daşyndan çyzylan köpburçlugyň meýdany S, ýarym perimetri p bolsa, S = pr bolýar.***

Subudy. Teorema subudyny töweregiň daşyndan çyzylan ABCDEF altyburçluk üçin getirýäris. Töweregiň merkezi *O* nokady köpburçlugyň depeleri bilen utgaşdyryp, köpburçlugy üçburçluklara bölýäris. Bu üçburçluklaryň beýiklikleri *r*-e deň *(5-nji surat)*. Onda,

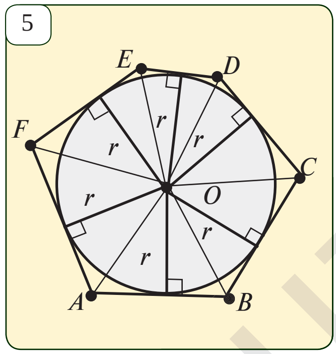
$$S = S_{AOB} + S_{BOC} + \ldots + S_{FOA} =$$
$$= \frac{1}{2} AB \cdot r + \frac{1}{2} BC \cdot r + \ldots + \frac{1}{2} FA \cdot r =$$
$$= \frac{AB + BC + \ldots + FA}{2} \cdot r = pr.$$

Teorema subut edildi.

Mesele. Töweregiň daşyndan çyzylan dörtburçlugyň meýdany 21 cm^2 -a, perimetri bolsa 7 *cm*-e deň. Töweregiň radiusyny tapyň.

Çözülişi. $S = pr$ formula görä,

$$r = \frac{S}{p} = \frac{21}{3,5} = 6\ (cm).$$ *Jogaby:* 6 *cm*.



Meseleler we ýumuşlar

37.1. Tarapy 6 *cm* bolan a) deň taraply üçburçlugyň; b) kwadratyň içinden çyzylan töweregiň radiusyny tapyň.

37.2. Radiusy 5 *cm* bolan töweregiň daşyndan çyzylan köpburçlugyň meýdany 18 cm^2. Köpburçluk perimetrini tapyň.

37.3. 6-njy suratdaky dörtburçluklaryň perimetrini tapyň.

37.4. 7-nji suratdaky maglumatlar esasynda soralan kesimi tapyň.

37.5. Töweregiň daşyndan çyzylan parallelogram romb bolýandygyny subut ediň.

37.6. Gönüburçly üçburçlugyň içinden çyzylan töweregiň radiusy katetleriň jemi bilen gipotenuzanyň tapawudynyň ýarysyna deňligini subut ediň.

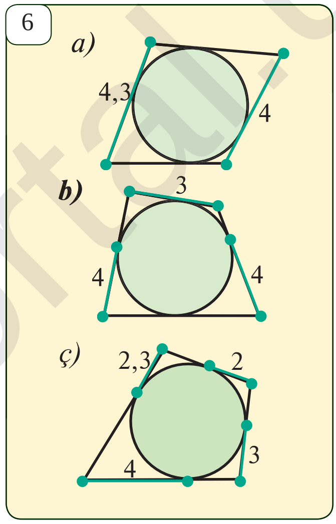
37.7. Töweregiň daşyndan çyzylan deňýanly trapesiýanyň orta çyzygy onuň gapdal tarapyna deň bolýandygyny subut ediň.

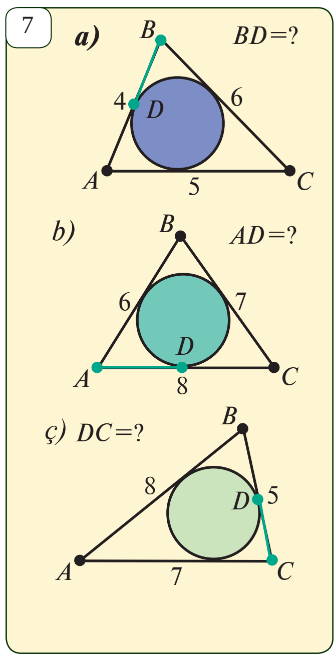
37.8. Esaslary 9 *cm* we 16 *cm* bolan deňýanly trapesiýa töweregiň daşyndan çyzylan. Töweregiň radiusyny tapyň.

37.9*. *ABCD* dörtburçluk *O* merkezli töweregiň daşyndan çyzylan. *AOB* we *COD* üçburçluklaryň meýdanlarynyň jemi dörtburçlugyň meýdanynyň ýarysyna deňligini subut ediň.

37.10*. Töweregiň daşyndan çyzylan deňýanly trapesiýanyň esaslary *a* we *b* bolsa, onuň beýikligi $\frac{\sqrt{ab}}{2}$ -ge deň bolýandygyny subut ediň.

37.11*. Depeleri *ABCD* dörtburçlugyň bissektrisalary kesişen nokatlarda bolan *EFPQ* dörtburçlugyň daşyndan töwerek çyzmak mümkinligini subut ediň.





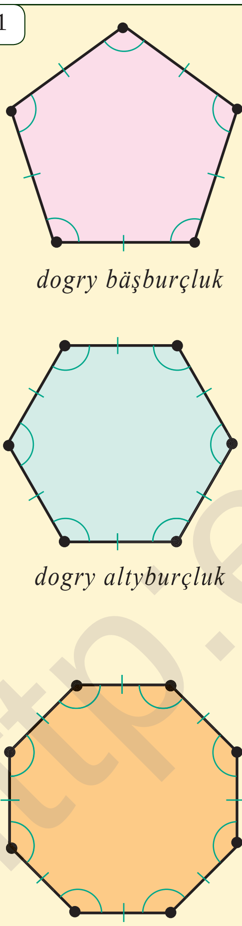
38 DOGRY KÖPBURÇLUKLAR

Ugrukdyryjy soraglar

1. Nähili şekillere köpburçluk diýilýär?
2. Köpburçlugyň burçlary, goňşy taraplary, diagonallary diýip nämä aýdylýar?
3. Güberçek köpburçluk diýip nähili köpburçluga aýdylýar?
4. Güberçek köpburçlugyň içki burçlary jemi baradaky teoremany aýdyň.

Kesgitleme. Hemme taraplary deň we hemme burçlary deň bolan güberçek köpburçluga *dogry köpburçluk* diýilýär.

Deň taraply üçburçluk, kwadrat dogry köpburçluga mysal bolýar. 1-nji suratda dogry bäşburçluk, altyburçluk we sekizburçluklar görkezilen.



1

dogry bäşburçluk

dogry altyburçluk

dogry sekizburçluk

Teorema. ***Dogry n burçlugyň her bir burçy*** $\frac{n-2}{n}\cdot 180°$***-a deň.***

Subudy. Dogry n burçlugyň burçlarynyň jemi $(n-2)\cdot 180°$-a deň (8-nji synp). Diýmek, onuň her bir burçy $\frac{n-2}{n}\cdot 180°$-a deň. *Teorema subut edildi.*

Mesele. Dogry $A_1A_2A_3A_4A_5$ bäşburçlukda A_1A_3 we A_1A_4 diagonallar deň bolýandygyny görkeziň (*2-nji surat*).

$A_1A_2A_3A_4A_5$ — *dogry bäşburçluk* ⇨ $A_1A_3 = A_1A_4$

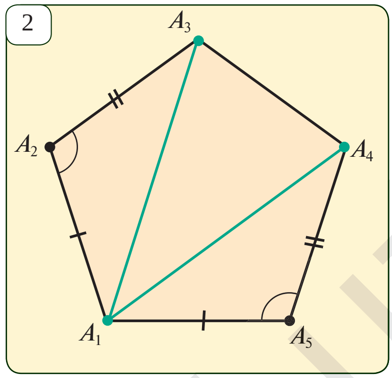
Çözülişi. Üçburçluklaryň deňliginiň *TBT* nyşanyna görä, $A_1A_2A_3$ we $A_1A_5A_4$ üçburçluklar özara deň. Hakykatdan hem, dogry köpburçlugyň taraplary deň we burçlary deň bolany üçin,

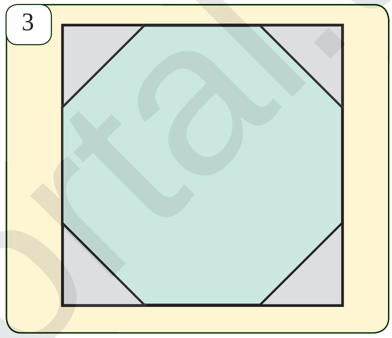
$$A_1A_2 = A_1A_5,\ A_2A_3 = A_5A_4 \text{ we } \angle A_1A_2A_3 = \angle A_1A_5A_4.$$

Diýmek, $\Delta A_1A_2A_3 = \Delta A_1A_5A_4$. Mundan

$$A_1A_3 = A_1A_4 \text{ bolýandygy gelip çykýar.}$$

Netije. ***Dogry bäşburçlugyň ähli diagonallary özara deň.***





Meseleler we ýumuşlar

38.1. Dogry bolmadyk köpburçluklara mysallar aýdyň we näme üçin dogry dälligini düşündiriň.

38.2. Aşakdaky tassyklamalardan dogrularyny tapyň:

a) ähli taraplary deň bolan üçburçluk dogry bolýar;

b) ähli taraplary deň dörtburçluk dogry bolýar;

ç) ähli burçlary deň dörtburçluk dogry bolýar;

d) ähli burçlary deň romb dogry bolýar;

e) ähli taraplary deň gönüburçluk dogry bolýar.

38.3. Eger a) $n = 3$; b) $n = 5$; ç) $n = 6$; d) $n = 10$; e) $n = 18$ bolsa, dogry n burçlugyň burçlaryny tapyň.

38.4. Dogry n burçlugyň daşky burçy nämä deň bolýar? Eger a) $n = 3$; b) $n = 5$; ç) $n = 6$; d) $n = 10$; e) $n = 12$ bolsa, dogry n burçlugyň daşky burçuny tapyň.

38.5. Dogry n burçlugyň her depesinden birden alnan daşky burçlarynyň jemi 360°-a deň bolýandygyny subut ediň.

38.6. Eger dogry köpburçlugyň her bir burçy a) 60°; b) 90°; ç) 135°; d) 150° bolsa, bu köpburçlugyň taraplarynyň sanyny tapyň.

38.7. Dogry $ABCDEF$ altyburçluk berlen.

a) AC we BD diagonallaryň deňligini subut ediň.

b) ACE — dogry üçburçluk bolýandygyny subut ediň.

d) AD, BE we CF diagonallaryň özara deňligini subut ediň.

38.8. Tarapy 10 *cm* bolan dogry a) bäşburçlugyň; b) altyburçlugyň; ç) sekizburçlugyň; d) on ikiburçlugyň; ä) on sekizburçlugyň kiçi diagonalyny hasaplaň.

38.9. Dogry dörtburçlugyň kwadratdygyny subut ediň.

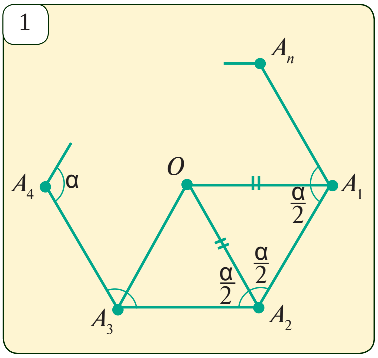
38.10*. Kwadratyň tarapy a-ga deň. Onuň taraplaryna her bir depesinden başlap diagonalynyň ýarysyna deň kesimler goýuldy. Netijede, 3-nji suratda görkezilen sekizburçluk emele geldi. Onuň görnüşini anyklaň we meýdanyny tapyň.

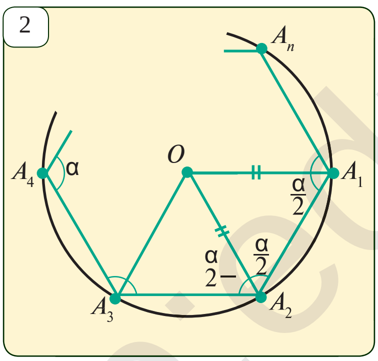
39 DOGRY KÖPBURÇLUGYŇ IÇINDEN WE DAŞYNDAN ÇYZYLAN TÖWEREKLER

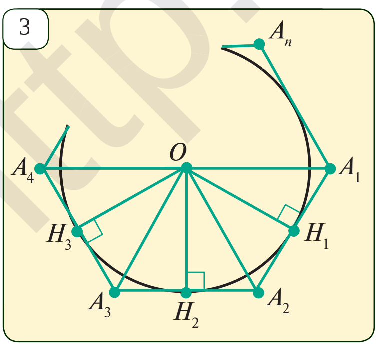
Ugrukdyryjy soraglar

1. Nähili köpburçluga töweregiň içinden çyzylan köpburçluk diýilýär?
2. Nähili köpburçluga töweregiň daşyndan çyzylan köpburçluk diýilýär?
3. Islendik köpburçluk töweregiň içinden (daşyndan) çyzylan bolmagy mümkinmi?

Teorema. ***Islendik dogry köpburçlugyň hem içinden, hem daşyndan töwerek çyzmak mümkin.***







Subudy. Aýdaly, $A_1A_2 \dots A_n$ — dogry köpburçluk, O — A_1 we A_2 burçlarynyň bissektrisalarynyň kesişme nokady bolsun. Bu dogry köpburçlugyň burçuny α bilen belgiläliň.

1. $OA_1=OA_2=\dots=OA_n$ bolýandygyny subut edýäris (*1-nji surat*). Burçuň bissektrisasynyň kesgitlemesine görä,

$$\angle OA_1A_2=\angle OA_2A_1=\frac{\alpha}{2}.$$

Diýmek, A_1OA_2 — deňýanly üçburçluk. Mundan, $OA_1=OA_2$ gelip çykýar. ΔA_1A_2O we ΔA_3A_2O üçburçluklaryň deňliginiň TBT nyşanyna görä deň, çünki $A_1A_2=A_3A_2$, A_2O — tarap umumy hem-de

$$\angle OA_1A_2=\angle OA_2A_1=\frac{\alpha}{2}.$$

Şonuň üçin $OA_3=OA_1$. Edil şeýle çemeleşip, $OA_4=OA_2$, $OA_5=OA_3$ we başga deňlikleriň dogry bolýanlygy görkezilýär.

Şeýdip, $OA_1=OA_2=\dots=OA_n$, ýagny merkezi O we radiusy OA_1 bolan töwerek köpburçlugyň daşyndan çyzylan töwerekden ybarat bolýar (*2-nji surat*).

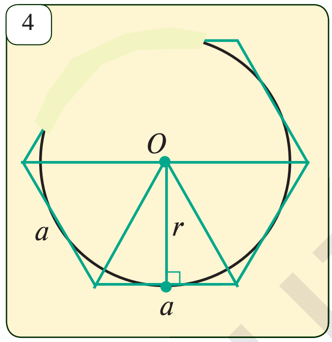
2. Ýokarda aýdylanlara görä, deňýanly A_1OA_2, A_2OA_3, ... A_nOA_1 üçburçluklar deň. Şonuň üçin bu üçburçluklaryň O depesinden geçirilen beýiklikleri hem deň bolýar (*3-nji surat*):

$$OH_1=OH_2=\dots=OH_n.$$

Diýmek, O merkezli we radiusy OH_1 kesime deň bolan töwerek köpburçlugyň ähli taraplaryna galtaşýar. Ýagny, bu töwerek köpburçlugyň içinden çyzylan töwerek bolýar. *Teorema subut edildi.*

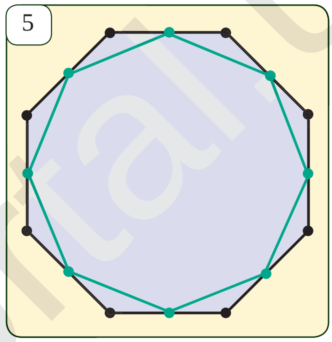
Netije. ***Dogry köpburçlugyň içinden çyzylan we daşyndan çyzylan töwerekleriň merkezleri bir nokatda bolýar.***

Bu nokada dogry köpburçlugyň *merkezi* diýilýär. Dogry köpburçlugyň merkezini onuň iki goňşy depeleri bilen utgaşdyrýan şöhlelerden ybarat burça (1-nji suratdaky A_1OA_2, A_2OA_3 ... burçlar) onuň *merkezi burçy* diýilýär. Dogry köpburçlugyň merkezinden taraplaryna geçirilen perpendikulýarlara (3-nji suratdaky OH_1, OH_2, ... kesimler) onuň *apofemasy* diýilýär.



Mesele. Eger dogry n burçlugyň tarapy a, onuň içinden çyzylan töweregiň radiusy r bolsa, onuň meýdany $S = \frac{1}{2}\,nar$ formula bilen hasaplanýandygyny subut ediň. (4-nji surat).

Subudy. Köpburçlugyň ýarim perimetri $p = \frac{1}{2}\,na$ bolany üçin, töweregiň daşyndan çyzylan köpburçlugyň meýdanyny tapmagyň formulasy $S = pr$-e görä, $S = \frac{1}{2}\,nar$ bolýar.



Meseleler we ýumuşlar

39.1. Meýdany 36 cm^2 bolan kwadratyň içinden we daşyndan çyzylan töwerekleriň radiuslaryny tapyň.

39.2. Perimetri 18 *cm* bolan dogry üçburçlugyň içinden we daşyndan çyzylan töwerekleriň radiuslaryny hasaplaň.

39.3. Dogry altyburçlugyň daşyndan çyzylan töweregiň radiusy onuň tarapyna deň bolýandygyny subut ediň.

39.4. Dogry köpburçlugyň taraplarynyň ortalary başga bir dogry köpburçlugyň depeleri bolýandygyny subut ediň (*5-nji surat*).

39.5. Dogry üçburçlugyň içinden çyzylan töweregiň radiusy daşyndan çyzylan töweregiň radiusyndan iki esse kiçidigini subut ediň.

39.6*. Dogry köpburçlugyň islendik iki tarapynyň orta perpendikulýarlary bir nokatda kesişýändigini ýa-da bir göni çyzykda ýatýandygyny subut ediň.

39.7. Töweregiň içinden çyzylan dogry köpburçlugyň bir tarapy töwerekden a) 60°; b) 30°; ç) 36°; d) 18°; e) 72°-a deň duga bölýär. Köpburçlugyň näçe tarapy bar?

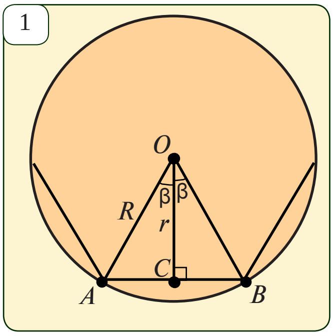
39.8. Kagyzdan alty sany deň dogry üçburçluk gyrkyp alyň. Olardan peýdalanyp, dogry altyburçluk guruň. Taraplary deň bolan dogry altyburçlugyň we üçburçlugyň meýdanlarynyň gatnaşygyny tapyň.

40 DOGRY KÖPBURÇLUGYŇ TARAPY BILEN DAŞYNDAN WE IÇINDEN ÇYZYLAN TÖWEREKLERIŇ RADIUSLARYNYŇ ARASYNDAKY BAGLANYŞYK

Ugrukdyryjy soraglar

Gönüburçly üçburçlugyň ýiti burçunyň a) sinusy; b) kosinusy; ç) tangensi diýip nämä aýdylýar?

Tarapy a_n-e deň bolan dogry n burçlugyň daşyndan çyzylan töweregiň R radiusyny we içinden çyzylan töweregiň r radiusyny hasaplamak üçin formulalar tapýarys. Munuň üçin gönüburçly ACO üçburçlukdan peýdalanýarys. Bu ýerde O — köpburçlugyň merkezi, C — köpburçlugyň AB tarapynyň ortasy (*1-nji surat*).



Onda,

$$\beta = \angle AOC = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{1}{2}\cdot\frac{360^\circ}{n} = \frac{180^\circ}{n};$$

$$R = OA = \frac{AC}{\sin\beta} = \frac{a_n}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}; \qquad r = OC = \frac{AC}{tg\beta} = \frac{a_n}{2tg\frac{180^\circ}{n}};$$

$$r = OC = OA\cdot\cos\beta = R\cos\frac{180^\circ}{n}.$$

Bu formulalardan peýdalanyp, käbir dogry köpburçluklaryň tarapy, içinden we daşyndan çyzylan töwerekleriň radiuslarynyň arasyndaky baglanyşyklary tapýarys.

1. Dogry üçburçluk üçin ($n=3$):

$$\beta = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ; \quad R = \frac{a_3}{2\sin 60^\circ} = \frac{a_3}{\sqrt{3}}; \quad r = \frac{a_3}{2tg\,60^\circ} = \frac{a_3}{2\sqrt{3}}; \quad R = 2r.$$

2. Kwadrat üçin ($n=4$):

$$\beta = \frac{180^\circ}{4} = 45^\circ; \quad R = \frac{a_4}{2\sin 45^\circ} = \frac{a_4}{\sqrt{2}}; \quad r = \frac{a_4}{2tg\,45^\circ} = \frac{a_4}{2}; \quad R = r\sqrt{2}.$$

3. Dogry altyburçluk üçin ($n=6$):

$$\beta = \frac{180^\circ}{6} = 30^\circ; \quad R = \frac{a_6}{2\sin 30^\circ} = a_6; \quad r = \frac{a_6}{2tg\,30^\circ} = \frac{a_6\,3}{\sqrt{2}}; \ R = \frac{2r}{\sqrt{3}}.$$

Mesele. Dogry n burçlugyň a_n tarapyny şu köpburçlugyň daşyndan çyzylan töweregiň R radiusy we içinden çyzylan töweregiň r radiusy arkaly aňladyň.

Çözülişi. $R = \dfrac{a_n}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}$ we $r = \dfrac{a_n}{2tg\frac{180^\circ}{n}}$ formulalardan $a_n = 2R\sin\dfrac{180^\circ}{n}$ we $a_n = 2r\,tg\dfrac{180^\circ}{n}$ formulalary alarys. Hususan-da, $n=3$ bolsa, $a_3 = R\sqrt{3} = 2r\sqrt{3}$.

Meseleler we ýumuşlar

40.1. Tarapy 15 *cm* bolan: a) dogry üçburçlugyň; b) dogry dörtburçlugyň; ç) dogry altyburçlugyň içinden we daşyndan çyzylan töwerekleriň radiuslaryny hasaplaň.

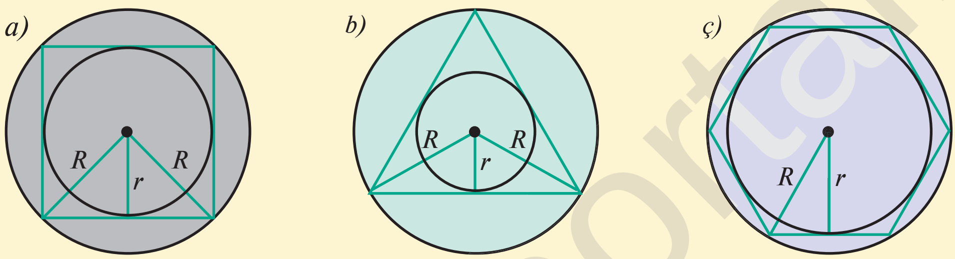
40.2. 2-nji suratda R radiusly töweregiň içinden çyzylan kwadrat, dogry üçburçluk we dogry altyburçluk görkezilen. Depderiňize berlen jedwelleri göçürip, onuň boş gözeneklerini dolduryň (a_n — köpburçlugyň tarapy, P — köpburçlugyň perimetri, S — onuň meýdany, r — onuň içinden çyzylan töweregiň radiusy).

40.3. Radiusy 8 *cm* bolan töweregiň içinden çyzylan dogry on ikiburçlugyň bir depesinden çykan diagonallaryny tapyň.

40.4. Töweregiň içinden çyzylan dogry üçburçlugyň perimetri 24 *cm*. Şu töweregiň içinden çyzylan kwadratyň tarapyny tapyň.

40.5. Silindr şeklindäki agaçdan esasynyň tarapy 20 *cm* bolan: a) kwadrat; b) dogry altyburçluk bolan prizma şeklindäki sütün taýýarlamaly. Agajyň kese kesiginiň diametri azyndan näçe bolmaly?

2



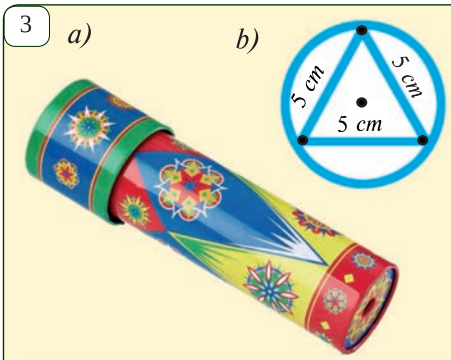
	R	r	a_4	P	S
1.			6		
2.		2			
3.	4				
4.				28	
5.					16

	R	r	a_3	P	S
1.	3				
2.					10
3.		2			
4.			5		
5.				6	

	R	r	a_6	P	S
1.	4				
2.		5			
3.			6		
4.				42	
5.					$24\sqrt{3}$

40.6. 3-nji *a* suratda görkezilen, reňbe-reň nagyşlary tomaşa etmek bolýan “Kaleýdoskop” diýlip atlandyrylýan oýnawaç size tanyş bolsa gerek. Oýnawaç turbadan we 3 sany aýna böleklerinden ybarat. 3-nji *b* suratda onuň kese kesigi görkezilen we ölçegleri berlen. Kaleýdoskopyň kese kesiginiň radiusyny tapyň.

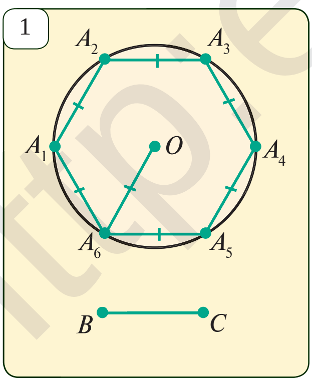
3



41 BILIMIŇIZI SYNAŇ

I. Testler

1. **Aşakdaky köpburçluklaryň haýsysynyň içinden çyzylan töwerek ýok?**
   A) Üçburçlugyň; D) Kwadratdan tapawutly rombuň;
   B) Kwadratyň; E) Rombdan tapawutly gönüburçlugyň.
2. **Aşakdaky köpburçluklaryň haýsysynyň daşyndan çyzylan töwerek ýok?**
   A) Üçburçlukda; D) Kwadratdan tapawutly rombda;
   B) Kwadratda; E) Rombdan tapawutly gönüburçlukda.
3. **Töweregiň içinden çyzylan ähli ABCD dörtburçluklar üçin nädogry deňligi** tapyň.
   A) $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360°$; D) $AB+CD=BC+AD$;
   B) $\angle A+\angle C=180°$; E) $\angle B+\angle D=180°$.
4. **Töweregiň daşyndan çyzylan ähli ABCD dörtburçluklar üçin nädogry deňligi tapyň.**
   A) $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360°$; D) $AB+CD=BC+AD$;
   B) $\angle A+\angle C=180°$; E) $AB\text{-}BC=AD\text{-}CD$.
5. **Taraplary 5 cm we 12 cm bolan gönüburçlugyň daşyndan çyzylan töweregiň radiusyny tapyň.**
   A) 6 *cm*; B) 6,5 *cm*; D) 7 *cm*; E) 7,5 *cm*.
6. **Dogry 24 burçlugyň içki burçuny tapyň.**
   A) 120°; B) 135°; D) 150°; E) 165°.
7. **Her bir daşky burçy 60° bolan dogry köpburçlugyň içki burçlarynyň jemini tapyň.**
   A) 540°; B) 360°; D) 90°; E) 720°.



II. Gurmaga degişli meseleler.

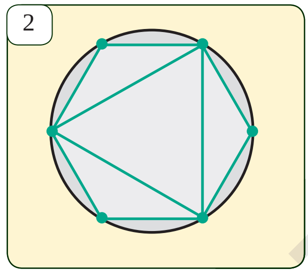
1. Tarapy berlen kesime deň dogry altyburçluk guruň. Munda dogry altyburçlugyň daşyndan çyzylan töweregiň radiusy altyburçlugyň tarapyna deňliginden we 1-nji suratdan peýdalanyň.

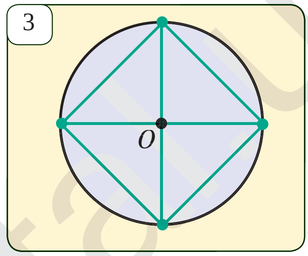
2. 2-4-nji suratlardaky maglumatlardan peýdalanyp, berlen töweregiň içinden çyzylan a) dogry üçburçluk; b) kwadrat; ç) dogry sekizburçluk guruň.

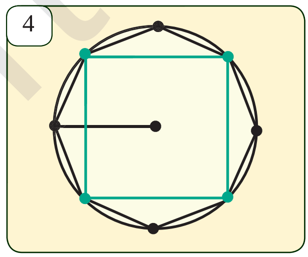
3. 5-nji suratdan peýdalanyp, berlen töweregiň daşyndan çyzylan dogry altyburçluk guruň (5-nji suratda görkezilen töweregiň daşyndan çyzylan altyburçlugyň taraplary şu töweregiň içinden çyzylan dogry altyburçlugyň depelerinden töwerege geçirilen galtaşmalarda ýatýar).

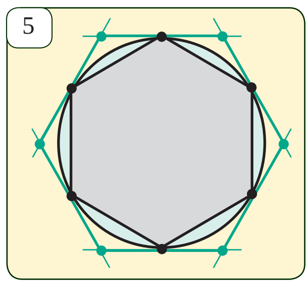
III. Hasaplamaga degişli meseleler.

1. Dogry üçburçlugyň, kwadratyň we dogry altyburçluklaryň taraplary bir-birine deň. Olaryň meýdanlarynyň gatnaşygyny tapyň.
2. Bir töweregiň içinden çyzylan dogry altyburçlugyň we daşyndan çyzylan altyburçlugyň meýdanlarynyň gatnaşygyny tapyň.
3. Dogry a) altyburçlugyň; b) sekizburçlugyň; ç) on ikiburçlugyň parallel taraplarynyň arasyndaky aralyk 10 *cm*-e deň. Köpburçlugyň tarapyny tapyň.
4. Radiusy R bolan töwerege $A_1A_2 \ldots A_8$ dogry sekizburçlugyň içinden çyzylan. $A_3A_4A_7A_8$ dörtburçlugyň gönüburçlukdygyny subut ediň we onuň meýdanyny tapyň.
5. Töweregiň daşyndan çyzylan gönüburçly üçburçlugyň gipotenuzasy şu töwerege galtaşma nokadynda 4 *cm* we 6 *cm* uzynlykdaky kesimlere bölünýär. Üçburçlugyň meýdanyny tapyň.
6. Dogry onburçlugyň bir depesinden çykan iň uly we iň kiçi diagonallarynyň arasyndaky burçy tapyň.









IV. Özüňizi synaň (nusga barlag işi).

1. Katetleri 10 *cm* we 24 *cm* bolan gönüburçly üçburçlugyň içinden çyzylan we daşyndan çyzylan töwerekleriň radiuslaryny tapyň.
2. Radiusy 5 *cm* bolan töweregiň daşyndan çyzylan rombuň bir burçy 150°-a deň. Rombuň a) perimetrini; b) diagonallaryny; ç) meýdanyny tapyň.
3. Tarapy 4 *cm* bolan dogry altyburçlugyň bir depesinden çykan diagonallaryny tapyň.
4. *(Goşmaça).* Radiusy 3 *cm* bolan töweregiň içinden çyzylan dogry altyburçlugyň we dogry üçburçluklaryň meýdanlarynyň tapawudyny tapyň.

Taryhy maglumatlar. Islendik dogry köpburçlugy hem sirkulyň we çyzgyjyň kömeginde gurup bolubermeýär. Muny 1801-nji ýylda nemes matematigi Karl Gauss (1777-1855) algebraik usulda subut edipdir. Ol eger n sanyň $2^m p_1 p_2 \ldots p_n$ ýaýylmasyndaky p_1, p_2, … p_n dürli düýp sanlar diňe $2^{2^k}+1$ görnüşinde bolsa dogry n burçlugy sirkulyň we çyzgyjyň kömeginde gurmak mümkindigini subut edipdir. Bu ýerde m we k otrisatel bolmadyk bitin sanlar.

42 TÖWEREGIŇ UZYNLYGY

1

Ugrukdyryjy maşk

1. Adatda turba böleginiň kese kesigi töwerekden ybarat bolýar. Inçe ýüpi bir ujundan başlap, turba bir gezek oraň. Bir gezek oramaga giden ýüpüň bölegi turbanyň kese kesigi, ýagny töweregiň uzynlygy bolýar. Ony 1-nji suratda görkezilişi ýaly edip çyzgyjyň kömeginde ölçäň.
2. Ýokardaky usul bilen turbanyň kese kesigininň diametrini anyklaň.
3. Anyklanan töweregiň uzynlygyny onuň diametrine gatnaşygyny hasaplaň.
4. Ýokarda getirilen ölçeg we hasaplama işlerini ýene birnäçe dürli ölçegdäki turba bölekleri üçin hem ýerine ýetirip, töweregiň uzynlygyny onuň diametrine gatnaşygyny tapyň.
5. Maşk netijesine görä, töweregiň uzynlygynyň onuň diametrine gatnaşygy barada nähili netije çykarmak mümkin?

Teorema. ***Töweregiň uzynlygynyň töweregiň diametrine gatnaşygy töweregiň radiusyna bagly däl, ýagny islendik töwerek üçin bu gatnaşyk hemişelik sandyr.***

Subudy. Iki erkin töwerek alýarys. Olaryň radiuslary R_1 we R_2, uzynlyklary bolsa degişlilikde C_1 we C_2 bolsun. $\frac{C_1}{2R_1} = \frac{C_2}{2R_2}$ deňligi subut etmelidiris. Iki töweregiň hem içinden dogry n-burçlugy çyzýarys. Olaryň perimetrlerini degişlilikde P_1 we P_2 diýip belgiläliň. Onda,

$P_1 = n\cdot 2R_1\sin\frac{180^\circ}{n}$, $P_2 = n\cdot 2R_2\sin\frac{180^\circ}{n}$ bolany üçin $\frac{P_1}{P_2} = \frac{2R_1}{2R_2}$ (*) bolýar.

Bu deňlik islendik n üçin dogry. n sany barha ulaldylsa, berlen töweregiň içinden çyzylan n-burçlugyň perimetri P_1 şu töweregiň uzynlygy C_1-e barha ýakynlaşýar. Şular ly P_2 hem C_2-ä barha ýakynlaşýar.

Şonuň üçin $\frac{P_1}{P_2}$ gatnaşyk $\frac{C_1}{C_2}$ gatnaşyga deň bolýar (onuň doly subudy matematikanyň ýokary basgançaklarynda öwrenilýär). Şeýdip, (*) deňlikden $\frac{C_1}{C_2} = \frac{2R_1}{2R_2}$, mundan bolsa $\frac{C_1}{2R_1} = \frac{C_2}{2R_2}$ deňlik gelip çykýar. *Teorema subut edildi.*

Töweregiň uzynlygyny onuň diametrine gatnaşygyny grek elipbiýiniň π harpy bilen belgilemek kabul edilen *("pi" diýlip okalýar)*. Töweregiň uzynlygynyň onuň diametrine gatnaşygyny "π" harpy bilen belgilemegi beýik matematik Leonard Eýler (1707—1783) ylma girizipdir. Grekçede "töwerek" sözi şu harp bilen başlanýar. π irrasional san bolup, amalyýetde onuň 3,1416-a deň bolan ýakynlaşan bahasyndan peýdalanylýar.

Şeýlelikde, $\frac{C}{2R}=\pi$. Bu deňlikden radiusy R-e deň töweregiň uzynlygy üçin $C=2\pi R$ formulany alarys.

Mesele. Tarapy 6 *cm* bolan dogry üçburçlugyň daşyndan çyzylan töweregiň uzynlygyny tapyň.

Çözülişi. Dogry üçburçlugyň daşyndan çyzylan töweregiň radiusyny tapmagyň formulasy $R=\frac{a_3}{\sqrt{3}}$ -e görä, $R=\frac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$ (*cm*). Indi, töweregiň uzynlygyny tapmagyň formulasyndan

$$C=2\pi R=2\pi\cdot 2\sqrt{3}=4\pi\sqrt{3}\ (cm).$$

Jogaby: $4\pi\sqrt{3}$ *cm*.

Meseleler we ýumuşlar

42.1. Nähili san π bilen belgilenýär? Radiusy R-e deň töweregiň uzynlygyny tapmagyň formulasyndan peýdalanyp, jedweli dolduryň ($\pi\approx3,14$ diýip hasaplaň).

C			82	18π		6,28	
R	4	3			0,7		101,5

42.2. Eger töweregiň radiusy a) 3 esse artsa; b) 3 *cm*-e ossa; d) 3 esse kemelse; e) 3 *cm*-e kemelse, töweregiň uzynlygy näçä üýtgär?

42.3. Eger Ýer şarynyň ekwatorynyň 40 milliondan bir bölegi 1 *m*-e deň bolsa, Ýer şarynyň radiusyny tapyň.

42.4. a) Tarapy *a*-ga deň bolan dogry üçburçlugyň; b) katetleri *a* we *b* bolan gönüburçly üçburçlugyň; ç) esasy *a* we gapdal tarapy *b* bolan deňýanly üçburçlugyň daşyndan çyzylan töweregiň uzynlygyny tapyň.

42.5. a) Tarapy *a*-ga deň kwadratyň; b) gipotenuzasy *c*-ge deň bolan deňýanly gönüburçly üçburçlugyň; ç) gipotenuzasy *c*, ýiti burçy α bolan gönüburçly üçburçlugyň içinden çyzylan töweregiň uzynlygyny tapyň.

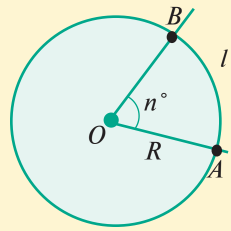
2

42.6. Teplowoz 1413 *m* ýol ýöredi. Munda onuň tigiri 300 gezek aýlandy. Teplowozyň tigiriniň diametrini tapyň.

42.7. Ýeňil awtomobiliň tigiriniň töwereginiň radiusy 24 *cm*-e deň. Awtomobil 100 *km* ýol ýörese, onuň tigiri näçe gezek aýlanar (*2-nji surat*)?

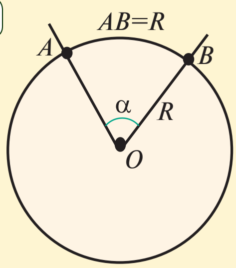
43 TÖWEREGIŇ DUGASYNYŇ UZYNLYGY. BURCUŇ RADIAN ÖLCEGI

1



$l = \frac{\pi R}{180^\circ} \cdot n^\circ$

2



α=1 radian ≈ 57°17′45″

1. *n°-ly merkezi burç direlýän duganyň uzynlygy.*

Aýdaly, radiusy R-e deň bolan töwerekde $n°$-ly AOB merkezi burç berlen bolsun (*1-nji surat*). Munda töweregiň AOB merkezi burça direlýän AB dugasynyň gradus ölçegine $n°$ ýa-da $n°$-ly duga diýilýändigini ýatladyp geçýäris.

Radiusy R-e deň bitin töwerek, ýagny ölçegi 360° bolan duganyň uzynlygy $2\pi R$-e deň bolany üçin,

1°-ly duganyň uzynlygy $\frac{2\pi R}{360^\circ} = \frac{\pi R}{180^\circ}$ -e deň.

Onda, $n°$-ly duganyň uzynlygy $l = \frac{\pi R}{180^\circ} \cdot n^\circ$

formula bilen anyklanýar *(1-nji surat)*.

2. *Burçuň radian ölçegi.*

Burçuň gradus ölçegi bilen bir hatarda onuň radian ölçegi hem ulanylýar (*2-nji surat*).

Töweregiň dugasynyň uzynlygynyň radiusa gatnaşygyny ýokardaky formula esasan: $\frac{l}{R} = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot n^\circ$-a deň.

Diýmek, töweregiň dugasynyň uzynlygynyň radiusyna gatnaşygy diňe şu duga direlýän merkezi burçuň ululygyna bagly eken. Bu häsiýetden peýdalanyp, burçuň radian ölçegi hökmünde edil şu gatnaşygy alýarys:

$$\alpha = \frac{l}{R} = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot n^\circ.$$

Adatda, radian sözi ýazylmaýar. Meselem: 5 radianyň ýerine 5 diýip ýazylýar. Bir radian $\frac{180^\circ}{\pi}$ gradusa deň: 1 radian $= \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 17' 45''$.

Burçuň gradus ölçeginden radian ölçegine geçmek üçin

$$\alpha = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot n^\circ$$

formuladan peýdalanylýar.

Şeýlelikde, $n°$-ly burçuň radian ölçegini tapmak üçin onuň gradus ölçegini $\frac{\pi}{180^\circ}$ -a köpeltmek ýeterli eken. Hususy ýagdaýda, 180°-ly burçuň radian ölçegi π-ge deň, 90°-ly, ýagny göni burçuň radian ölçegi $\frac{\pi}{2}$ -e deň bolýar.

α radiana deň merkezi burça degişli dugasynyň uzynlygy $l = \alpha R$ formula bilen hasaplanýar.

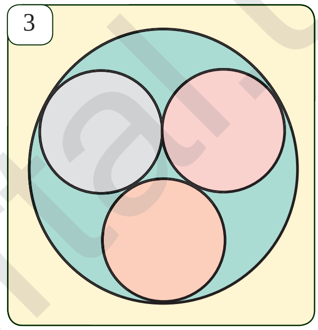
Mesele. Iki burçy degişlilikde 30° we 45° bolan üçburçlugyň burçlarynyň radian ölçeglerini tapyň.

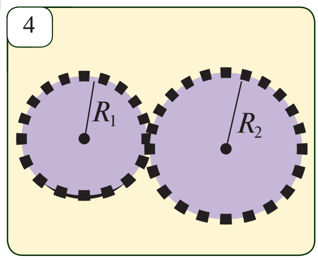
Çözülişi. Üçburçlugyň 30°-ly burçunyň radian ölçegi $30°\cdot\frac{\pi}{180°}=\frac{\pi}{6}$, 45°-ly burçunyň radian ölçegi $45°\cdot\frac{\pi}{180°}=\frac{\pi}{4}$. Üçburçlugyň içki burçlarynyň jemi 180°-a, ýagny π-ge deňligi baradaky teorema esasan üçburçlugyň üçünji burçunyň radian ölçegini tapýarys

$$\pi-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{12}.$$

Jogaby: $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{4}$ we $\frac{7\pi}{12}$.

Meseleler we ýumuşlar





43.1. Radiusy 6 *cm* bolan töweregiň gradus ölçegi a) 30°; b) 45°; ç) 90°; d) 120° bolan dugasynyň uzynlygyny tapyň.

43.2. a) 40°; b) 60°; ç) 75°-a deň burçuň radian ölçegini tapyň.

43.3. a) 1,2; b) $\frac{2\pi}{3}$; ç) $\frac{5\pi}{6}$ radiana deň burçuň gradus ölçegin tapyň.

43.4. Eger töweregiň radiusy 5 *cm* bolsa, onuň a) $\frac{\pi}{8}$; b) $\frac{2\pi}{5}$; ç) $\frac{3\pi}{4}$ radiana deň merkezi burçy direlýän duganyň uzynlygyny tapyň.

43.5. Radiusy 12 *cm* bolan töweregiň içinden *ABC* üçburçluk çyzylan. Eger a) ∠*A*=30°; b) ∠*A*=120° bolsa, *A* nokady öz içine almaýan *BC* duganyň uzynlygyny tapyň.

43.6. Töweregiň deň hordalary tölewerekden deň dugalary bölýändigini subut ediň.

43.7*. Iki töwerek bir-biriniň merkezinden geçýär. Bu töwerekleriň umumy hordasy iki töwerekden hem bölünen dugalaryň uzynlyklarynyň gatnaşygyny tapyň.

43.8*. Radiuslary deň bolan üç töwerek bir-birine daşardan we radiusy *R*-e deň bolan töwerege içersinden galtaşýar (*3-nji surat*): a) töwerekleriň radiusyny tapyň; b) boýalan şekili çäkleýän dugalaryň uzynlyklarynyň jemini tapyň.

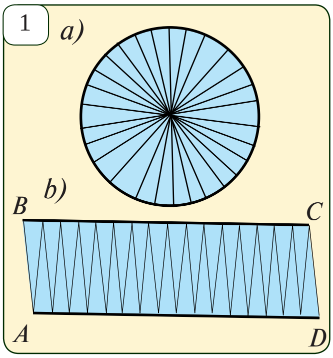
Gyzykly mesele

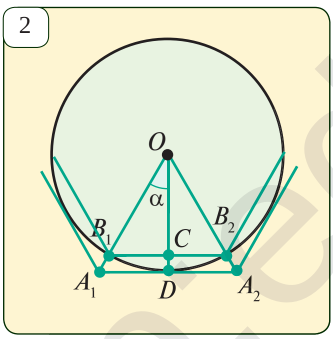
4-nji suratda görkezilen iki dişli tigirler bir-birine “dişledilen”. Tigirleriň radiusy R_1 we R_2. Birinji tigir *n* gezek aýlananda ikinji tigir näçe gezek aýlanar?

44 TEGELEGIŇ MEÝDANY

Kesgitleme. Tekizligiň berlen O nokadyndan berlen R aralykdan uly bolmadyk aralykda ýatýan ähli nokatlaryndan düzülen şekil *tegelek* diýlip atlandyrylýar.

Munda O nokat tegelegiň merkezi, R bolsa tegelegiň radiusy diýlip atlandyrylýar. Şu tegelegiň araçägi merkezi O nokatda, radiusy bolsa R-e deň bolan töwerekden ybarat bolýar.





Ugrukdyryjy maşk

Bir list kagyza ýogyn çyzyk bilen töwerek çyzyň we 1-nji *a* suratdaky ýaly, onuň birnäçe diametrlerini geçirip, tegelegi deň böleklere bölüň. Soň bu bölekleri gyýyp alyň we 1-nji *b* suratda görkezilişi ýaly ýygyp, F şekili alyň. Eger tegelek islendikçe köp deň böleklere bölünip, bu bölekler suratda görkezilen tertipde ýygylsa, netijede gönüburçluga örän ýakyn F şekil peýda bolýar.

a) F şekiliň gönüburçluk şekiline örän ýakynlygyny hasaba alyp, onuň AB tarapy takmynan nämä deň bolýandygyny tapyň (görkezme: AB tarapy tegelegiň radiusy bilen deňeşdiriň).

b) F şekiliň BC “tarapy” takmynan nämä deň bolýar? (Görkezme: BC we AD taraplar ýogyn çyzyk bilen çyzylanyna, ýagny töweregiň dugajyklaryndan ybaratdygyna üns beriň)

ç) F şekiliň $ABCD$ gönüburçluk şekiline örän ýakyn bolýandygyny hasaba alyp, onuň meýdanyny takmynan hasaplaň. F şekiliň meýdany tegelegiň meýdanyna örän ýakyndygyny üçin, tegelegiň meýdany barada netije çykaryň.

Teorema. ***Radiusy R-e deň bolan tegelegiň meýdany πR^2 -a deň.***

Subudy. Radiusy R we merkezi O nokatda bolan töwerege garaýarys.

Töweregiň daşyndan çyzylan $A_1A_2 \ldots A_n$ we içinden çyzylan $B_1B_2 \ldots B_n$ dogry n burçluklaryň meýdanlary degişlilikde S_n' we S_n'' bolsun *(2-nji surat)*.

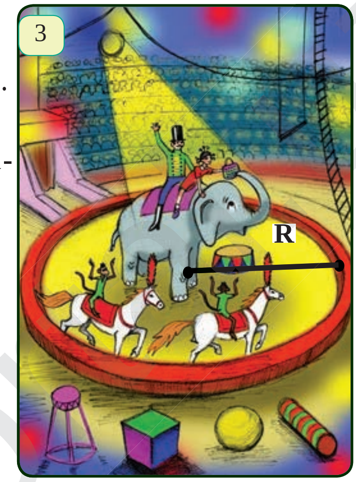
A_1OA_2 we B_1OB_2 üçburçluklar meýdanlaryny tapýarys:

$$S'_{A_1OA_2}=\tfrac{1}{2}A_1A_2\cdot OD=\tfrac{1}{2}A_1A_2\cdot R;\quad S''_{B_1OB_2}=\tfrac{1}{2}B_1B_2\cdot OC=\tfrac{1}{2}B_1B_2\cdot OB_1\cos\alpha=\tfrac{1}{2}B_1B_2\cdot R\cos\alpha.$$

Onda, $S_n''=n\cdot\tfrac{1}{2}AA_1\cdot R=\tfrac{1}{2}P_nR,\quad S_n'=n\cdot\tfrac{1}{2}B_1B_2\cdot R\cos\alpha=\tfrac{1}{2}P_nR\cos\alpha$ (1)

Bu ýerde P'_n we P''_n degişlilikde $A_1A_2...A_n$ we $B_1B_2...B_n$ köpburçluklaryň perimetrleri. $\alpha = \frac{180^\circ}{n}$ bolany üçin n-iň ýeterliçe uly bahalarynda cosα-nyň bahasy birden, P_n we P_n-leriň bahalary töweregiň uzynlygyndan, ýagny $2\pi R$-den islendikçe az tapawutlanýar. Onda, (1) deňliklere görä, n-iň ýeterliçe uly bahalarynda köpburçluklaryň meýdany πR^2-e barha ýakynlaşýar. Mundan, tegelegiň meýdany üçin $S = \pi R^2$ formula gelip çykýar.

Teorema subut edildi.



Mesele. Sirk arenasynyň töwereginiň uzynlygy 41 *m*. Arenanyň radiusyny we meýdanyny tapyň.

Çözülişi. 1) Töweregiň uzynlygyny tapmagyň formulasyndan radiusy tapýarys *(3-nji surat)*:

$$R = \frac{C}{2\pi} \approx \frac{41}{2 \cdot 3{,}14} \approx 6{,}53 \ (m).$$

2) Tegelegiň meýdanyny hasaplamagyň formulasyndan arenanyň meýdanyny tapýarys: $S = \pi R^2 \approx 3{,}14 \cdot 6{,}53^2 \approx 133{,}84$ (m^2).

Jogaby: $R \approx 6{,}53$ *m*; $S \approx 133{,}84$ m^2.

Meseleler we ýumuşlar

44.1. Tegelegiň meýdanyny hasaplamagyň formulasyny esaslandyryň.

44.2. Radiusy R-e deň bolan tegelegiň S meýdanyny tapmagyň formulasyndan peýdalanyp jedweli dolduryň ($\pi = 3{,}14$ diýip alyň).

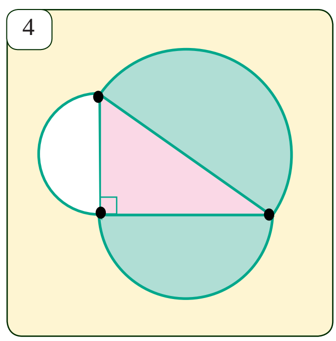
R	2	5		$\frac{2}{7}$		54,3		6,25
S			9		49π		$\sqrt{3}$	

44.3. Eger tegelegiň radiusy a) k esse artsa; b) k esse kemelse, tegelegiň meýdany nähili üýtgär?

44.4. Tarapy 5 *cm* bolan kwadratyň içinden we daşyndan çyzylan tegelekleriň meýdanyny tapyň.

44.5. Tarapy $3\sqrt{3}$ *cm* bolan dogry üçburçlugyň içinden we daşyndan çyzylan tegelekleriň meýdanyny tapyň.

44.6. Radiusy R bolan tegelekden iň uly kwadrat gyrkyp alyndy. Tegelegiň galan böleginiň meýdanyny tapyň.

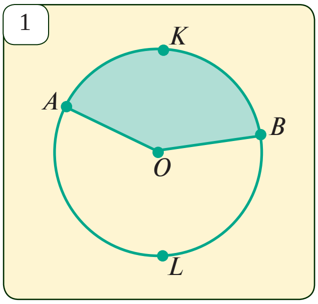


44.7. Taraplary 6 *cm* we 7 *cm* bolan gönüburçlugyň daşyndan çyzylan tegelegiň meýdanyny tapyň.

44.8. Tarapy 10 *cm* we ýiti burçy 60° bolan rombuň içinden çyzylan tegelegiň meýdanyny tapyň.

44.9*. Gönüburçly üçburçlugyň taraplaryny diametr edip ýarym tegelekler çyzylan. Gipotenuza çyzylan ýarym tegelegiň meýdany katetlere çyzylan ýarym tegelekleriň meýdanlarynyň jemine deň bolýandygyny görkeziň *(4-nji surat)*.

45 TEGELEGIŇ BÖLEKLERINIŇ MEÝDANY



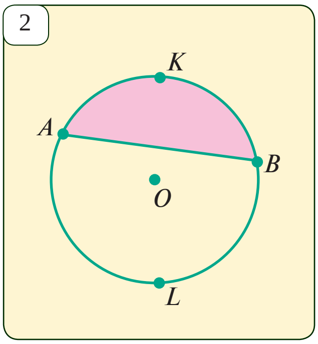
Kesgitleme. Tegelegiň dugasyny we bu duganyň ahyrlaryny tegelegiň merkezi bilen utgaşdyrýan iki radiusy bilen çäklenen bölegine *sektor* diýilýär. Sektoryň araçägi bolan duga *sektoryň dugasy* diýilýär.

1-nji suratda *AKB* we *BLA* dugaly iki sektor görkezilen (olardan birinjisi boýalan).

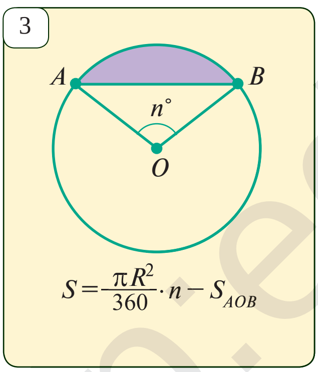
Radiusy R-e we dugasynyň gradus ölçegi $n°$-a deň bolan sektoryň S meýdanyny tapmak üçin formula getirip çykarýarys. Dugasy 1°-a deň sektoryň meýdany tegelegiň (ýagny dugasy 360°-a deň sektor) meýdanynyň $\frac{1}{360}$ bölegine deň bolany üçin, dugasy n gradus bolan sektoryň meýdany

$$S = \frac{\pi R^2}{360} \cdot n \qquad \text{ýa-da} \qquad S = \frac{1}{2} R \cdot l$$

formula arkaly tapylýar. Bu ýerde l – $n°$-ly sektoryň dugasynyň uzynlygy.



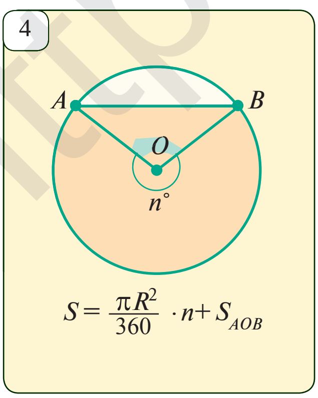
Kesgitleme. Tegelegiň dugasy we bu duganyň ahyrlaryny utgaşdyrýan hordasy bilen çäklenen bölegine **segment** diýilýär.



2-nji suratda *AKB* we *BLA* dugaly iki segment şekillendirilen (olardan birinjisi boýalan). Ýarym tegelekden tapawutly segmentiň S meýdany

$$S = S_{sektor} \pm S_{\Delta} = \frac{\pi R^2}{360} \cdot n \pm S_{AOB}$$

formula boýunça hasaplanýar *(3– 4-nji suratlara garaň)*.



Mesele. Duganyň gradus ölçegi 72° bolan sektoryň meýdany 45π-ge deň. Sektoryň radiusyny tapyň.

Çözülişi. Sektoryň meýdanyny tapmagyň formulasyna görä,

$$\frac{\pi R^2}{360} \cdot 72 = 45\pi.$$

Mundan, $R^2 = \frac{45\pi \cdot 360}{72\pi} = 225$, diýmek, $R = 15$.

Jogaby: 15.

Meseleler we ýumuşlar

45.1. Sektoryň meýdanyny tapmagyň formulasyny getirip çykaryň.

45.2. Segmentiň meýdanyny tapmagyň formulasyny getirip çykaryň.

45.3. Dugasynyň gradus ölçegi a) 30°; b) 45°; d) 120°; e) 90° we radiusy 7 *cm* bolan sektoryň we segmentiň meýdanlaryny tapyň.

45.4. 5-nji suratda tarapy *a*-ga deň bolan dogry üçburçluk, kwadrat we dogry altyburçluk görkezilen. Boýalan şekilleriň meýdanyny tapyň. Munda sektorlaryň radiuslary köpburçlugyň tarapynyň ýarysyna deň.

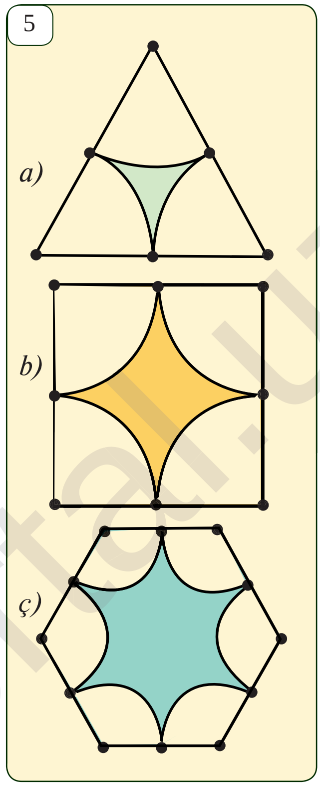
45.5. Nyşanda radiuslary 1, 2, 3, 4-e deň bolan dört töwerek bar. Iň kiçi tegelegiň meýdanyny we her bir halkanyň meýdanyny tapyň *(6-njy surat)*.

45.6. Radiusy 10 *cm*-e deň bolan tegelekde radiusa deň horda geçirilen. Emele gelen segmentleriň meýdanyny hasaplaň.

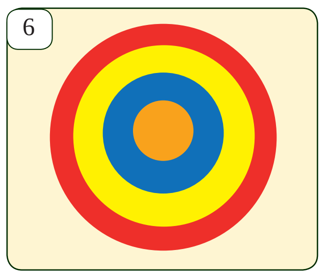
45.7. Radiuslary 15 *cm* dan bolan iki tegelegiň merkezleriniň arasyndaky aralyk 15 *cm*. Tegelekleriň umumy böleginiň meýdanyny tapyň.

45.8. Radiusy 10 *cm* bolan tegelegiň içinden we daşyndan çyzylan dogry onikiburçluklaryň meýdanyny hasaplaň. Netijeleri tegelegiň meýdany bilen deňeşdiriň.

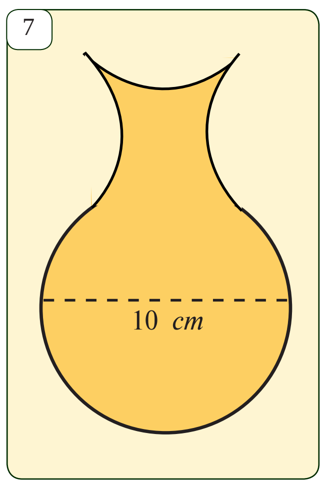
5



6



7



Gyzykly mesele

7-nji suratda görkezilen güldanyň suratyny:

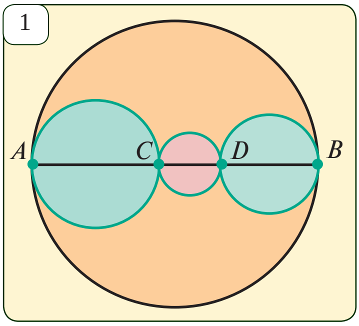
a) üç göni çyzyk bilen şeýle dört bölege bölüň, ýagny olardan gönüburçluk ýygmak mümkin bolsun;

b) iki göni çyzyk bilen şeýle üç bölege bölüň, ýagny olardan kwadrat ýygmak mümkin bolsun.

Taryhy maglumatlar. Uzak wagtlaryň dowamynda dünýäniň köp matematikleri "tegelegiň kwadraturasy" diýip at alan aşakdaky meseläni çözmäge çalşypdyrlar: sirkulyň we çyzgyjyň kömeginde meýdany berlen tegelegiň meýdanyna deň bolan kwadrat gurmak. Diňe XIX asyryň ahyrynda bu mesele çözüwe eýe dälligi subut edilipdir.

46 AMALY GÖNÜKME WE ONUŇ ULANYLYŞY

1-nji mesele. C we D nokatlar töweregiň AB diametrini üç AC, CD we DB kesimlere bölýär. AC, CD we DB diametrli töwerekleriň uzynlyklarynyň jemi AB diametrli töweregiň uzynlygyna deň bolýandygyny subut ediň *(1-nji surat)*.



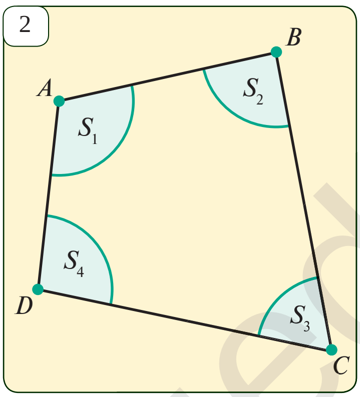
Çözülişi. Töweregiň uzynlygyny tapmagyň formulasyndan peýdalanyp, AC, CD we DB diametrli töwerekleriň C_1, C_2, C_3 uzynlyklarynyň jemini tapýarys: $C_1+C_2+C_3=AC\cdot\pi+CD\cdot\pi+DB\cdot\pi=\pi(AC+CD+DB)$.

$AC+CD+DB = AB$ we AB diametrli töweregiň C uzynlygy $AB\cdot\pi$-ge deň bolany üçin

$$C_1+C_2+C_3=C.$$

Şu deňligi subut etmek talap edilipdi.

2-nji mesele. $ABCD$ dörtburçlugyň depelerini merkez edip birmeňzeş radiusly sektorlar gurlan *(2-nji surat)*. Bu sektorlardan islendik ikisi umumy nokada eýe däl hem-de ählisiniň radiusy 1 *cm*. Sektorlaryň meýdanlarynyň jemini tapyň.



Çözülişi. 1) Dörtburçlugyň A, B, C, D burçlary degişlilikde α_1, α_2, α_3, α_4 bolsun. Onda, köpburçlugyň içki burçlarynyň jemi baradaky teorema görä,

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=360°.$$

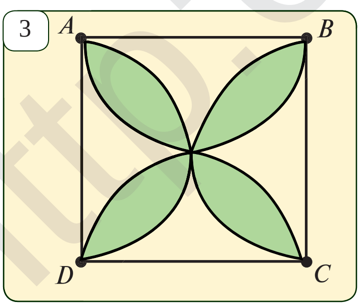
2) Sektoryň meýdanyny tapmagyň formulasyna görä ($R = 1$ *cm*),

$$S_1=\frac{\pi}{360°}\cdot\alpha_1,\quad S_2=\frac{\pi}{360°}\cdot\alpha_2,\quad S_3=\frac{\pi}{360°}\cdot\alpha_3,\quad S_4=\frac{\pi}{360°}\alpha_4. \quad (1)$$

3) (1) deňlikleriň degişli taraplaryny goşýarys. Onda,

$$S_1+S_2+S_3+S_4=\frac{\pi}{360°}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)=\frac{\pi}{360°}\cdot360°=\pi\ (cm^2).$$

Jogaby: $\pi\ cm^2$.



Meseleler we ýumuşlar

46.1. Perimetri 1 *m* bolan kwadrat we uzynlygy 1 *m* bolan töwerek berlen. Şu töwerek bilen çäklenen tegelegiň meýdany bilen kwadratyň meýdanyny deňeşdiriň.

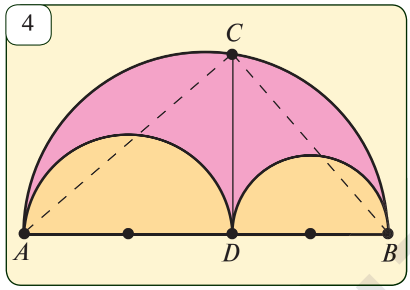
46.2. Radiusy 8 *cm* bolan tegelekden 60°-ly sektor gyrkyp alnan. Tegelegiň galan böleginiň meýdanyny tapyň.

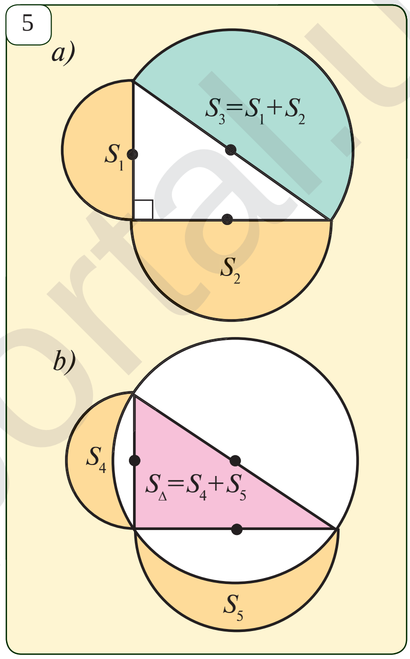
46.3. Diagonallary 6 *cm* we 8 *cm* bolan rombuň içinden çyzylan tegelegiň meýdanyny hasaplaň.

46.4. 3-nji suratda boýalan şekiliň meýdanyny tapyň. Onda $ABCD$ — kwadrat, $AB = 4$ cm.

46.5*. 4-nji suratda “Arhimediň pyçagy” diýilýän şekil boýalan. Onuň meýdany $\frac{\pi \cdot CD^2}{4}$ formula bilen hasaplanýandygyny subut ediň (munda, $\angle ACB = 90°$ we $CD^2 = AD \cdot DB$ -dan peýdalanyň).

46.6. Eger $AD = 6$ cm, $BD = 4$ cm bolsa, 4-nji suratda boýalan şekiliň meýdanyny we perimetrini (ony gurşap duran dugalaryň uzynlygynyň jemini) tapyň.





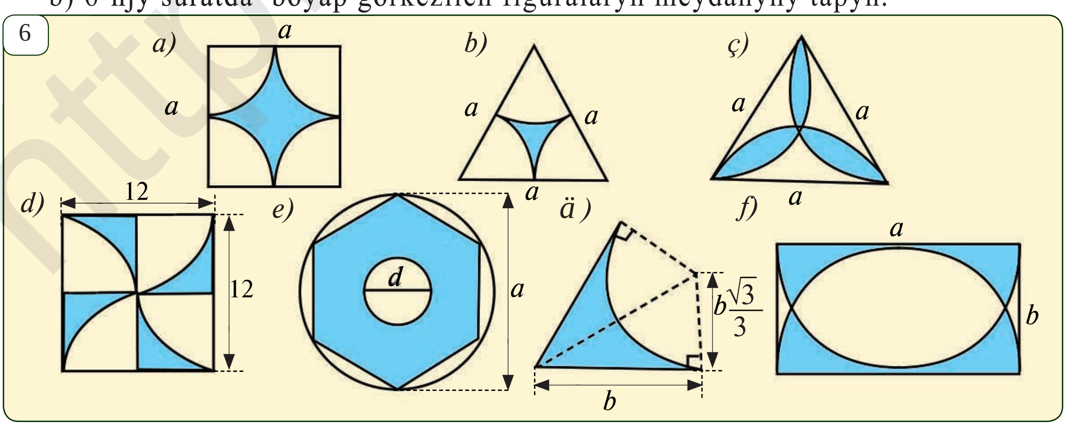
Taryhy maglumat. Gippokratyň aýjagazlary.

a) Gippokratyň aýjagazy – iki töweregiň dugalary bilen çäklenen we aşakdaky häsiýete eýe bolan şekildir: eger töwerekleriň radiuslary we aýjagazyň dugalary direlýän horda berlen bolsa, aýjagaza deňdeş kwadrat gurmak mümkin.

Pifagoryň teoremasy ulanylsa, 5-nji *a* suratda görkezilen gipotenuza gurlan ýarym tegelegiň meýdany katetlere gurlan ýarym tegelekleriň meýdanlarynyň jemine deň bolýar (121-nji sahypadaky 44.9-njy meselä garaň). Şonuň üçin 5-nji *b* suratdaky aýjagazlaryň meýdanlarynyň jemi üçburçlugyň meýdanyna deň (pikirleniň!). Eger suratdaky üçburçlugyň ýerine deňýanly gönüburçly üçburçlugy alsak, emele gelen iki aýjagazdan her biriniň meýdany üçburçlugyň meýdanynyň ýarysyna deň bolýar. Tegelegiň kwadraturasy baradaky meseläni çözmäge synanyşyp, grek matematigi Gippokrat (miladydan öňki V asyr) köpburçluk bilen deňdeş birnäçe hili aýjagazlary oýlap tapypdyr.

Gippokratyň aýjagazlarynyň doly jedweli diňe XIX–XX asyrlarda düzülipdir.

b) 6-njy suratda boýap görkezilen figuralaryň meýdanyny tapyň.



47 BILIMIŇIZI SYNAŇ.

I. Testler

1. 45 gradusly burçuň radian ölçegi nämä deň?
   A. 1-e deň; B. $\frac{\pi}{2}$-ä deň; D. $\frac{\pi}{4}$-ä deň; E. $\sqrt{2}$-ä deň.
2. Radiusy 3 *cm* bolan töweregiň gradus ölçegi 150° bolan merkezi burçy direlýän duganyň uzynlygyny tapyň.
   A. $\frac{5\pi}{2}$ *cm*; B. $\frac{5\pi}{3}$ *cm*; D. $\frac{10\pi}{3}$ *cm*; E. $\frac{5\pi}{4}$ *cm*.
3. Radiusy 6 *cm* bolan töwerekde $\frac{5\pi}{4}$ radiana deň merkezi burç direlýän duganyň uzynlygyny tapyň.
   A. $\frac{15\pi}{2}$ *cm*; B. $\frac{5\pi}{6}$ *cm*; D. $\frac{4\pi}{3}$ *cm*; E. $\frac{5\pi}{2}$ *cm*.
4. Tarapy 5 *cm*-e deň bolan kwadratyň daşyndan çyzylan töweregiň uzynlygyny tapyň.
   A. $5\sqrt{2}\pi$; B. $\sqrt{2}\pi$; D. $3\sqrt{2}\pi$; E. 5π.
5. Diametri 6-a deň tegelegiň meýdanyny tapyň.
   A. 9π; B. 6π; D. $3\sqrt{2}\pi$; E. 12π.
6. Dugasynyň gradus ölçegi 150°, radiusy 6 cm bolan tegelek sektoryň meýdanyny tapyň.
   A. 15π cm^2; B. 6π cm^2; D. $30\sqrt{2}\pi$ cm^2; E. 24π cm^2.
7. Dugasynyň uzynlygy 12 cm we radiusy 6 cm bolan tegelek sektoryň meýdanyny tapyň.
   A. 15π cm^2; B. 6π cm^2; D. $30\sqrt{2}\pi$ cm^2; E. 24π cm^2.
8. Dugasynyň gradus ölçegi 120°, radiusy 3-e deň bolan tegelekviy segmentning meýdanyny tapyň.
   A. $6\pi - 4\sqrt{3}$; B. $6\pi + 4\sqrt{3}$; D. $3\pi - 4\sqrt{3}$; E. $3\pi + 4\sqrt{3}$.

II. Meseleler

1. *ABCDEFKL* dogry sekizburçlugyň tarapy 6 *cm*. Onuň *AC* diagonalyny tapyň.

2. Kwadrat radiusy 4 *dm* bolan töweregiň içinden çyzylan. Kwadratyň goňşy taraplarynyň ortalaryndan geçýän hordany töwerekden bölýän dugalaryň uzynlygyny tapyň.

3. Töweregiň 90°-ly dugasynyň uzynlygy 15π *cm*. Töweregiň radiusyny tapyň.

4. Radiusy 20-ä deň töwerekden uzynlygy 10π-ge deň duga bölündi. Bu duga laýyk merkezi burçy tapyň.

5. Iki tegelegiň umumy hordasy bu tegelekleri çäkleýän töwereklerden 60°-ly we 120°-ly dugalary bölýär. Tegelekleriň meýdanlarynyň gatnaşygyny tapyň.

6. Taraplary 3, 4, 5 bolan üçburçlugyň içinden we daşyndan çyzylan tegelekleriň meýdanlaryny tapyň.

7. Tegelegiň hordasy 60°-ly dugany çekip dur. Bu horda bölen segmentleriň meýdanlarynyň gatnaşygyny tapyň.

8. Dogry altyburçlugyň meýdanynyň onuň içinden çyzylan tegelegiň meýdanyna gatnaşygyny tapyň.

9. Tarapy a-ga deň bolan $ABCDEF$ dogry altyburçluk berlen. Merkezi A nokatda we radiusy a bolan töwerek bu altyburçlugy iki bölege bölýär. Her bir bölegiň meýdanyny tapyň.

10. Gönüburçly ABC üçburçlukda $\angle A = 72°$, $\angle C = 90°$, $BC = 15$ *cm*. BC diametrli töweregiň ABC üçburçlugyň içinde ýatýan dugasynyň uzynlygyny tapyň.

11. Tegelegiň içinden çyzylan dogry sekizburçluk berlen. Onuň iki goňşy depelerine geçirilen radiuslar tegelegi iki sektora bölýär. Şu sektorlaryň meýdanlarynyň gatnaşygyny tapyň.

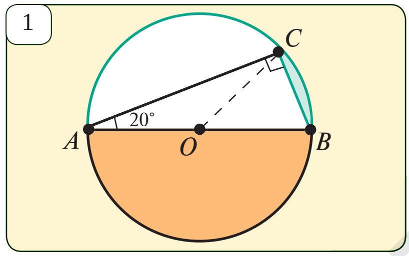
12. Gönüburçly ABC üçburçlukda $\angle A = 20°$, $\angle C = 90°$, $AB = 18$ *cm*. BC kesim üçburçlugyň daşyndan çyzylan tegelegi iki segmente bölýär. Boýap görkezilen segmentiň meýdanyny tapyň (*1-nji surat*).

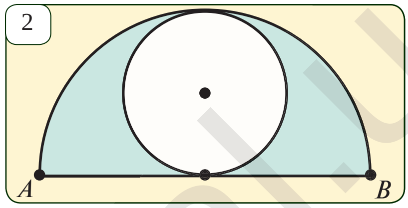
13. Kiçi töwerek uly töwerege hem-de onuň AB diametrine galtaşýar. Eger diametre galtaşma nokady töweregiň merkezi we $AB = 4$ bolsa, suratda boýalan şekiliň meýdanyny tapyň (*2-nji surat*).

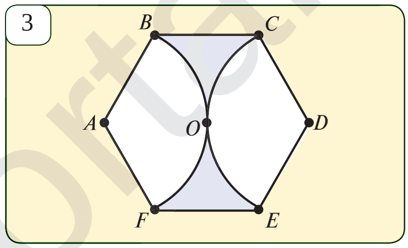
14. Dogry $ABCDEF$ altyburçlugyň tarapy 6-a deň we merkezi O nokatda. Merkezleri A we D nokatda we radiuslary deň bolan töwerekler O nokatda galtaşýar. Boýalan zolagyň meýdanyny tapyň (*3-nji surat*).

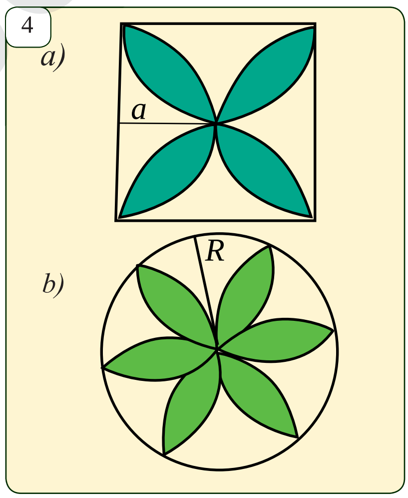
15. Gönüburçly ABC üçburçlukda $\angle C = 90°$, $AC = 4$, $CB = 2$. Merkezi gipotenuzada bolan töwerek üçburçlugyň katetlerine galtaşýar. Şu töweregiň uzynlygyny tapyň.

16. 4-nji suratda boýalan figuralaryň meýdanyny tapyň. Olar nähili çyzylandygyny anyklaň.









III. Özüňizi synaň (nusga barlag işi)

1. Tarapy 6 *cm* bolan kwadratyň daşyndan çyzylan töweregiň uzynlygyny we içinden çyzylan tegelegiň meýdanyny tapyň.
2. Tarapy 24 *cm* bolan dogry köpburçlugyň içinden çyzylan töweregiň radiusy $4\sqrt{3}$ *cm*-e deň bolsa, onuň daşyndan çyzylan töweregiň radiusyny tapyň.
3. 240°-ly töweregiň dugasynyň uzynlygy 24 *cm* bolsa,
   a) töweregiň radiusyny; b) dugasy 240° bolan sektoryň meýdanyny;
   ç) dugasy 240° bolan segmentiň meýdanyny tapyň.

Gyzykly mesele

In we Ýan

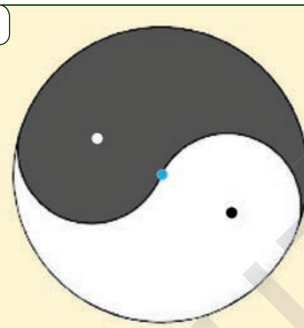
5-nji suratda tebigatdaky gapma-garşylyklary aňladýan “In we Ýan” diýen hytaý simwoly görkezilen.

a) In we Ýan simwollarynyň meýdanlarynyň deňligini görkeziň;

b) bir göni çyzyk bilen bu simwollaryň her birini meýdanlary deň bolan iki bölege bölüň.

ç) In we Ýan simwollarynyň perimetrlerini (olary gurşaý dugalaryň uzynlyklarynyň jemini) tapyň.

1



Taryhy maglumatlar. Töweregiň uzynlygyny hasaplamak örän gadymdan derwaýys mesele bolupdyr. Töweregiň uzynlygyny onuň içinden çyzylan köpburçlugyň perimetrine öwürmek usuly giň ýaýrapdyr.

Orta aziýaly matematikler hem tegelegiň içinden çyzylan dogry köpburçluklary gurmak, olaryň taraplaryny tegelegiň radiusy arkaly aňlatmak meseleleri bilen meşgullanypdyrlar. Abu Reýhan Biruny “Kanuni Mas’udiý” eserinde tegelegiň içinden çyzylan köpburçluklaryň tarapyny anyklamak bilen meşgullanyp, içinden çyzylan bäşburçlugyň, altyburçlugyň, ýediburçlugyň,..., onburçlugyň taraplaryny anyklamagyň usulyny görkezýär. Bu hasaplama netijesinde ol $\pi \approx 3{,}14$ baha eýe bolýandygyny kesgitleýär.

Gadimky Wawilon we Müsür golýazmalarynda we şinehatlarynda π üçe deň diýip alnan. Bu şol döwrüň takyklyk talaby üçin ýeterli bolupdyr. Soňluk bilen rimliler π üçin 3,12-ni ulanypdyrlar. π sany üçin Arhimed beren baha 3,14 bolup, bu amaly meseleleri çözende örän makuldy.

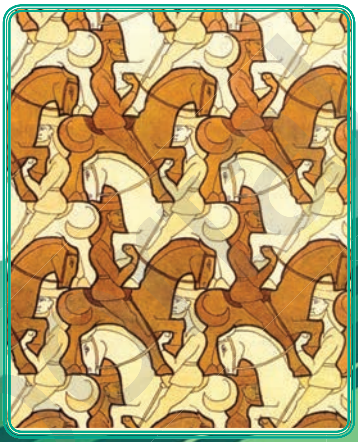
Hytaý matematiklerinde $\pi \approx 3{,}155$ ... we 22/7. Hindileriň “Sulwa Sutra” (“Arkan düzgüni”) eserinde π üçin 3,008 we 3,1416 ... we $\sqrt{10} \approx 3{,}162$ ... bahalar duşýar.

Mürze Ulugbegiň “Astronomiýa mekdebi” wekillerinden biri Jemşit Giýasiddin al-Koşy 1424-nji ýylda ýazan “Töweregiň uzynlygy barada kitap” atly risalasynda töweregiň içinden we daşyndan çyzylan dogry köpburçlugyň taraplarynyň sanyny ikeltme ýoly bilen $3 \cdot 2^{28} = 800\,335\,168$ taraply dogry köpburçluklaryň perimetrini hasaplap, π üçin $\pi = 3{,}1\,415\,826\,535\,897\,932$ bahany alypdyr. Bu 16 sany onluk sifrine çenli anykdyr.

Emma al-Koşynyň eseri uzak wagta çenli Ýewropada näbelli bolupdyr. Ýewropalylardan belgiýaly Wan Romen 1597-nji ýylda 2^{30} taraply dogry köpburçluga Arhimediň usulyny ulanyp, π üçin 17 sany onluk sifrleri anyk bolan baha tapypdyr. Gollandiýaly Rudolf wan Seýlon (1540–1610) bu takyklygy 35 sany onluk sifrlere çenli alyp barypdyr. Häzirki döwürde elektron hasaplaýyş maşynlarynyň kömeginde π üçin milliondan artyk onluk sifrleri anyk bolan bahalar tapylan. Gündelik hasaplamalar üçin 3,14 baha, matematiki hasaplamalar üçin 3,1416 baha, hatda astronomiýa we kocmonawtika üçin 3,1415826 baha ýeterlidir.

IV BAP

ÜÇBURÇLUKDAKY WE TÖWEREKDÄKI METRIK GATNAŞYKLAR



Şu baby öwrenmek netijesinde siz aşakdaky bilimlere we amaly endiklere eýe bolarsyňyz:

Bilimler:

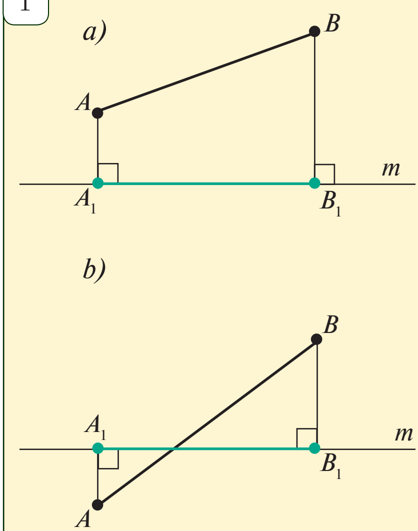
√ *proporsional kesimleriň häsiýetlerini bilmek;*
√ *gönüburçly üçburçlukda gipotenuza geçirilen beýikligiň häsiýetlerini bilmek;*
√ *özara kesişýän hordalaryň kesimleri baradaky hem-de töweregi kesiji göni çyzygyň kesimleri baradaky häsiýetleri bilmek.*

Endikler:

√ *kesimleriň gatnaşygyny we proporsional kesimlere degişli meseleleri çözüp bilmek;*
√ *gönüburçly üçburçlukda gipotenuza geçirilen beýikligiň häsiýetlerinden peýdalanyp, meseleler çözüp bilmek;*
√ *kesiji hordalaryň kesimleriniň we kesiji göni çyzygyň kesimleriniň häsiýetlerinden peýdalanyp, meseleler çözmek.*

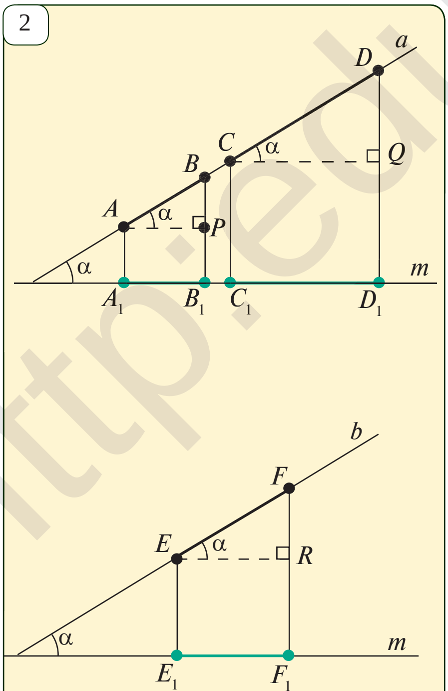
48 KESIMLERIŇ PROÝEKSIÝASY WE PROPORSIONALLYK

1



A_1 — *A* nokadyň,
B_1 — *B* nokadyň,
A_1B_1 —*AB* kesimiň ***m* göni çyzykdaky proýeksiýasy**

2



Ugrukdyryjy soraglar

1. Kesimleriň gatnaşygy nämäni aňladýar?
2. Nähili kesimlere proporsional diýilýär?
3. Falesiň teoremasyny aýdyň.

Tekizlikde *m* göni çyzyk we *AB* kesim berlen bolsun. *A* we *B* nokatlardan *m* göni çyzyga AA_1 we BB_1 perpendikulýarlar geçirýäris (*1-nji surat*). A_1B_1 kesim *AB* kesimiň *m* göni çyzykdaky *proýeksiýasy (kölegesi)* diýilýär.

AB kesimiň *m* göni çyzykdaky A_1B_1 proýeksiýasyny gurmak amaly *AB* kesimi *m* göni çyzyga *proýesirleme* diýilýär.

***Teorema.* Bir göni çyzykda ýa-da parallel göni çyzyklarda ýatýan kesimler berlen bolsun. Olaryň şol bir göni çyzyga proýeksiýalary berlen kesimlere proporsional bolýar.**

$a||b$,
A_1B_1 — AB-niň,
C_1D_1 — CD-niň,
E_1F_1 — EF-niň
m göni çyzykdaky proýeksiýalary (2-nji surat)

$$\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{C_1D_1}{CD}=\frac{E_1F_1}{EF} \quad (1)$$

Subudy. a) Eger *a* we *b* göni çyzyklar *m* göni çyzyga parallel bolsa, $AB=A_1B_1$, $CD=C_1D_1$, $EF=E_1F$ bolýandygy hem-de (1) deňlikleriň dogrudygy aýdyň.

b) Eger-de *a* we *b* göni çyzyklar *m* göni çyzyga perpendikulýar bolsa, A_1 we B_1, C_1 we D_1, E_1 we F_1 nokatlar gabat gelýär. Şonuň üçin A_1B_1, C_1D_1, E_1F_1 kesimleriň uzynlygy nola deň bolýar we (1) deňlikler ýerine ýetirilýär.

ç) Indi başga ýagdaýa garaýarys. 2-nji suratda görkezilişi ýaly, gönüburçly *ABP, CDQ, EFR* üçburçluklary guryarys. Onda $a||b$ bolany üçin, $\angle BAP=\angle DCQ=\angle FER$. Diýmek, *ABP,* *CDQ* we *EFR* gönüburçly üçburçluklar meňzeş.

Mundan $\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{C_1D_1}{CD}=\frac{E_1F_1}{EF}$ deňlikleri alarys.

Teorema subut edildi.

Mesele. *AB* we *CD* kesimler parallel göni çyzyklarda ýatýar. Eger $AB=12$ *cm*, $CD=15$ *cm* we *AB* kesimiň käbir *m* göni çyzykdaky proýeksiýasy 8 *cm* bolsa, *CD* kesimiň şu *m* göni çyzykdaky proýeksiýasyny tapyň.

Çözülişi. *CD* kesimiň *m* göni çyzykdaky proýeksiýasy *x* bolsun. Onda, subut edilen teoremanyň we meseläniň şertinden peýdalanyp, proporsiýa düzýäris:

$$\frac{x}{15}=\frac{8}{12}.$$

Bu deňlikden $x=10$ bolýandygyny tapýarys.

Jogaby: 10 *cm*.

Meseleler we ýumuşlar

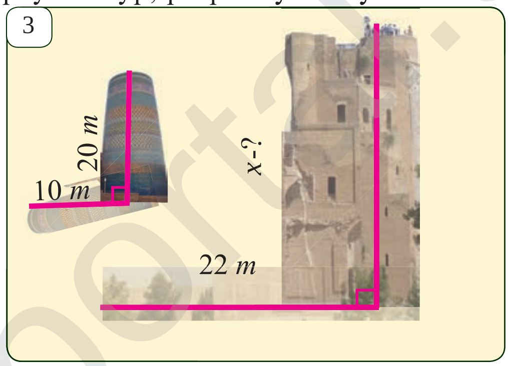
48.1. Kesimiň berlen göni çyzykdaky proýeksiýasy näme?

48.2. Bir göni çyzykda ýa-da parallel göni çyzyklarda ýatýan kesimleriň şol başga bir göni çyzyga proýeksiýalary berlen kesimlere proporsional bolýandygyny subut ediň.

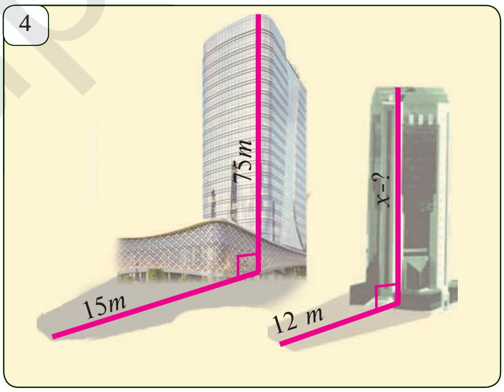
48.3. *a* we *b* göni çyzyklaryň arasyndaky burç 45°-a deň. *a* göni çyzykda uzynlygy 10 *cm* bolan *AB* kesim alnan. *AB* kesimiň *b* göni çyzykdaky proýeksiýasyny tapyň.

48.4. *AB* kesimiň depeleri *l* göni çyzykdan 9 *cm* we 14 *cm* uzaklykda ýatýar. Eger *AB* kesim *l* göni çyzygy kesip geçmese we $AB=13$ *cm* bolsa, *AB* kesimiň *l* göni çyzykdaky proýeksiýasyny tapyň.

3



4



48.5. 3- we 4-nji suratlardaky maglumatlar esasynda binalaryň beýikliklerini tapyň.

48.6. Göni çyzyk we oňa parallel bolmadyk kesim çyzyň. Kesimiň göni çyzykdaky proýeksiýasyny guruň.

48.7. Koordinatalar tekizliginde *A*(2;3) we *B*(3;-4) nokatlar belgilenen. *AB* kesimiň koordinata oklaryndaky proýeksiýalarynyň uzynlyklaryny tapyň.

48.8. *a* we *b* göni çyzyklaryň arasyndaky burç α bolýandygy mälim. *a* göni çyzykda *AB* kesim alnan. *AB* kesimiň *b* göni çyzykdaky proýeksiýasyny tapyň.

48.9*. *AB* we *CD* kesimleriň *l* göni çyzykdaky proýeksiýalary özara deň. *AB* we *CD* kesimleriň uzynlyklary barada näme diýmek mümkin? Mysallar getiriň.

49 PROPORSIONAL KESIMLERIŇ HÄSIÝETLERI

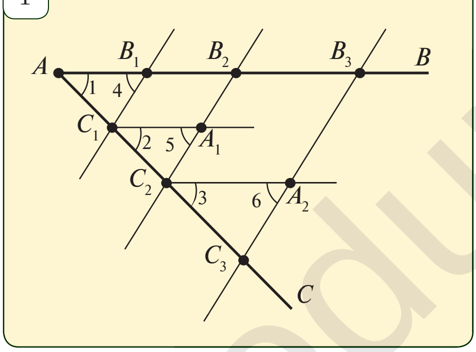
Falesiň teoremasynyň umumylaşmasy bolan möhüm häsiýeti subut edýäris.

Teorema. ***Burçuň iki tarapyny hem kesip geçen parallel göni çyzyklar onuň taraplaryndan proporsional kesimleri bölýär.***

$\angle BAC,\ B_1C_1 || B_2C_2 || B_3C_3$ (*1-nji surat*) $\Rightarrow$ $\dfrac{AB_1}{AC_1} = \dfrac{B_1B_2}{C_1C_2} = \dfrac{B_2B_3}{C_2C_3}$

Subudy. C_1 we C_2 nokatlardan AB-ge parallel C_1A_1 we C_2A_2 göni çyzyklary geçirýäris. Onda, birinjiden, $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$ bolýar, çünki olar özara parallel bolan AB, C_1A_1 we C_2A_2 göni çyzyklary AC göni çyzyk kesende emele gelen degişli burçlardyr. Ikinjiden, $\angle 4 = \angle 5 = \angle 6$, çünki olar taraplary parallel bolan burçlardyr.

1



Diýmek, üçburçluklaryň meňzeşliginiň BB nyşanyna görä, $\Delta AB_1C_1 \backsim \Delta C_1A_1C_2 \backsim \Delta C_2A_2C_3$ bolýar.

Onda, $$\frac{AB_1}{AC_1} = \frac{C_1A_1}{C_1C_2} = \frac{C_2A_2}{C_2C_3} \qquad (1)$$ deňlikleri alarys.

Mundan daşary, $B_1C_1A_1B_2$ we $B_2C_2A_2B_3$ dörtburçluklar parallelogram, çünki

$B_1C_1 || B_2C_2 || B_3C_3$ — şerte görä;

$AB || C_1A_1 || C_2A_2$ — gurmaga görä.

Şonuň üçin, bu parallelogramlaryň garşylykly taraplary özara deň bolýar:

$$C_1A_1 = B_1B_2 \quad \text{we} \quad C_2A_2 = B_2B_3. \qquad (2)$$

(1) we (2) deňliklerden $\dfrac{AB_1}{AC_1} = \dfrac{B_1B_2}{C_1C_2} = \dfrac{B_2B_3}{C_2C_3}$ bolýandygy gelip çykýar.

Teorema subut edildi.

Amaly gönükme. Kesimi berlen gatnaşykda bölmek.

Berlen a kesimi, bölekleriň özara gatnaşygy $m{:}n{:}l{:}k$ ýaly bolýan edip dört bölege bölüň.

Munuň üçin aşakdakylary ädimme-ädim ýerine ýetirýäris:

1-nji ädim. Erkin ýiti burç çyzyp, onuň bir tarapyna uzynlyklary $OA = m$, $AB = n$, $BC = l$ we $CD = k$ deň bolan kesimleri 2-nji suratda görkezilişi ýaly edip, yzygider goýup çykýarys.

2-nji ädim. Burçuň ikinji tarapyna berlen a kesime deň OD_1 kesimi goýýarys.

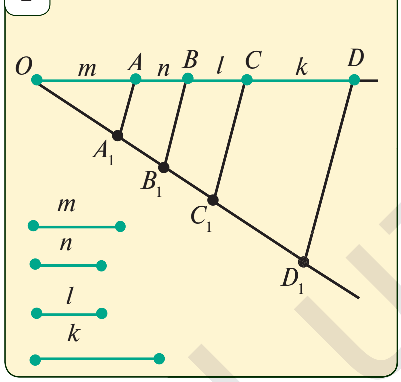
3-nji ädim. D we D_1 nokatlary utgaşdyrýarys.

4-nji ädim. A, B, C nokatlar arkaly DD_1-e parallel AA_1, BB_1 we CC_1 kesimleri geçirýäris.

Ýokardaky teorema görä, berlen $a=OD_1$ kesim A_1, B_1, C_1 we D_1 nokatlar bilen $m:n:l:k$ gatnaşykda bölünen bolýar.

Ýumuş: Şu tassyklamany özbaşdak esaslandyryň.

2



Amaly ýumuş. Dördünji proporsional kesimi gurmak.

a, b we c kesimler berlen. a we b kesimler c we d kesimlere proporsional, ýagny $a:b=c:d$ bolýandygy mälim. d kesimi guruň *(3-nji surat)*.

1-nji ädim. Erkin ýiti burç çyzyp, onuň bir tarapyna $OA=a$ we $AB=b$ kesimleri 3-nji suratda görkezilişi ýaly goýýarys.

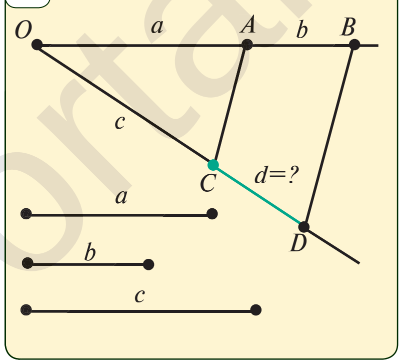
2-nji ädim. Ikinji tarapyna bolsa $OC=c$ kesimi goýýarys.

3-nji ädim. A we C nokatlary utgaşdyrýarys.

4-nji ädim. B nokatdan AC-ge parallel BD göni çyzyk geçirýäris.

Ýumuş: CD gözlenýän d kesim bolýandygyny esaslandyryň.

3



Meseleler we ýumuşlar

49.1. Uzynlygy 42 *cm* bolan kesim berlen. Ony a) 5:2; b) 3:4:7; ç) 1:5:1:7 gatnaşykdaky bölekjiklere bölüň.

49.2. Suratda her bir bölek birlik kesimden ybarat bolsa, AB we CD, EF we MN, AC we DF, AN we CE, EN we BM kesimleriň gatnaşyklaryny tapyň.

49.3. m, n kesimler l we k kesimlere proporsional. Eger a) $m=4$ *cm*, $n=3$ *cm* we $l=8$ *cm*; b) $m=2$ *cm*, $n=3$ *cm* we $l=7$ *cm* bolsa, k — dördünji kesimi guruň we uzynlygyny tapyň.

49.4. Dörtburçlugyň perimetri 54 *cm* we taraplary 3:4:5:6 ýaly gatnaşykda bolsa, onuň her bir tarapyny anyklaň.

49.5. Dörtburçlugyň burçlary özara 3:4:5:6 ýaly gatnaşykda bolsa, onuň kiçi burçy nämä deňligini tapyň.

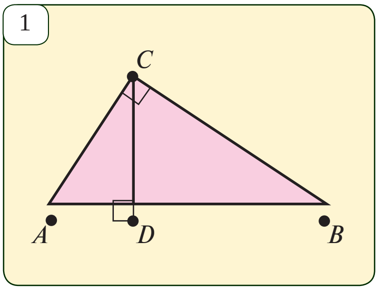
49.6. Uzynlygy 4, 5 we 6 bolan kesimler berlen. Uzynlygy 4,8-e deň kesim guruň.

49.7*. Perimetri 60 *cm* bolan dörtburçlugyň bir tarapy 15 *cm*, galan taraplary bolsa 2:3:4 gatnaşykda bolýandygy mälim. Onuň uly tarapyny tapyň.

50 GÖNÜBURÇLY ÜÇBURÇLUKDAKY PROPORSIONAL KESIMLER

Häsiýet. Gönüburçly üçburçlugyň göni burçunyň depesinden geçirilen beýikligi ony özüne meňzeş iki üçburçluga bölýär.

ΔABC, $\angle C = 90°$, CD — *beýiklik (1-nji surat)* ⇒ $\Delta ABC \backsim \Delta ACD$, $\Delta ABC \backsim \Delta CBD$



Subudy. ABC we ACD üçburçluklar gönüburçly bolup, A burç bolsa olar üçin umumy. Diýmek, $\Delta ABC \backsim \Delta ACD$. Şunuň ýaly, ΔABC we ΔCBD gönüburçly bolup, olar üçin $\angle B$ umumy. Diýmek, $\Delta ABC \backsim \Delta CBD$.

1-nji suratda görkezilen AD we DC kesimler degişlilikde AC we BC katetleriň gipotenuzadaky proýeksiýalary diýilýär.

Kesgitleme. Eger a, b we c kesimler üçin $a:b = b:c$ bolsa, b kesim a we c kesimleriň arasyndaky *orta proporsional kesim* diýlip atlandyrylýar.

Orta proporsionallyk şertini $b^2 = ac$ ýa-da $b = \sqrt{ac}$ görnüşde ýazmak mümkin.

Ýokarda subut edilen häsiýete esaslanýan bolsak, orta proporsional kesimler baradaky aşakdaky teoremalar aňsat subut edilýär:

1-nji teorema. Gönüburçly üçburçlugyň göni burçunyň depesinden geçirilen beýiklik katetleriň gipotenuzadaky proýeksiýalarynyň arasynda orta proporsional bolýar.

Hakykatdan hem, subut edilen häsiýete görä, $\Delta ACD \backsim \Delta CBD$. Mundan,

$$\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD} \Rightarrow CD^2 = AD \cdot BD \Rightarrow CD = \sqrt{AD \cdot BD}.$$

2-nji teorema. Gönüburçly üçburçlugyň kateti gipotenuza bilen şu katetiň gipotenuzadaky proýeksiýasynyň arasynda orta proporsionaldyr (*1-nji surat*).

Hakykatdan hem, subut edilen häsiýete görä, $\Delta ABC \backsim \Delta ACD$. Mundan,

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD} \Rightarrow AC^2 = AB \cdot AD \Rightarrow AC = \sqrt{AB \cdot AD}.$$

Edil şuňa meňzeş $BC = \sqrt{BD \cdot AB}$ bolýandygyny subut etmek mümkin.

Mesele. Katetleri 15 *cm* we 20 *cm* bolan gönüburçly üçburçlugyň kiçi katetiniň gipotenuzadaky proýeksiýasyny tapyň.

ΔABC, $\angle C = 90°$, CD — *beýiklik*, $AC = 15$ *cm*, $BC = 20$ *cm* (*1-nji surat*) ⇒ $AD = ?$

Çözülişi. 1) Pifagoryň teoremasyndan peýdalanyp, üçburçlugyň gipotenuzasyny tapýarys: $AB^2 = AC^2 + BC^2 = 15^2 + 20^2 = 625$, ýagny $AB = 25$ *cm*.

2) Ikinji teoremadan peýdalanyp, AD-ni tapýarys:

$$AC^2 = AB \cdot AD \Rightarrow AD = \frac{AC^2}{AB} = \frac{15^2}{25} = 9\ (cm).$$

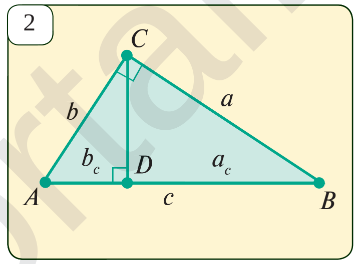
Jogaby: 9 *cm*.

Ikinji teoremadan netije hökmünde Pifagoryň teoremasynyň **Pifagoryň özi ýazyp galdyran subudy** gelip çykýar *(1-nji surat)*. 2- nji teorema görä,

$$\left.\begin{array}{l} AC^2 = AD \cdot AB \\ BC^2 = BD \cdot AB \end{array}\right\} \Rightarrow AC^2 + BC^2 = AD \cdot AB + BD \cdot AB = AB \cdot (\underbrace{AD + BD}_{AB}) = AB \cdot AB = AB^2.$$

Şeýdip, $AC^2 + BC^2 = AB^2$.

Meseleler we ýumuşlar



50.1. Subut ediň *(2-nji surat)*:

a) $\Delta ACD \backsim \Delta CBD \backsim \Delta ABC$;

b) $b^2 = b_c \cdot c$, $a^2 = a_c \cdot c$; ç) $h_c^2 = a_c \cdot b_c$.

50.2. Gönüburçly üçburçlugyň gipotenuzasyna geçirilen beýikligi gipotenuzany 9 *cm* we 16 *cm*-e deň kesimlere bolýar. Üçburçlugyň taraplaryny tapyň.

50.3. Gönüburçly üçburçlugyň gipotenuzasy 15 *cm*-e, bir kateti bolsa 9 *cm*-e deň. Ikinji katetiň gipotenuzadaky proýeksiýasyny tapyň.

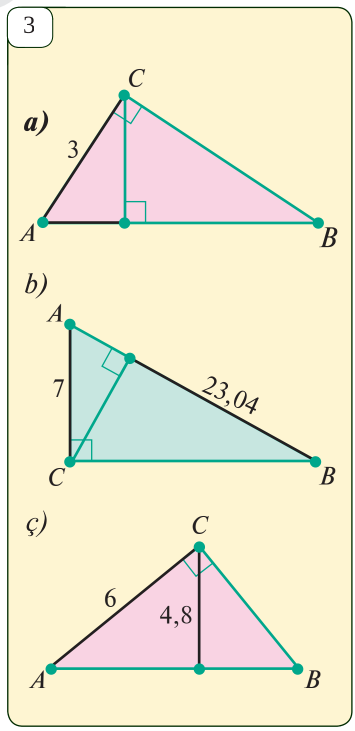
50.4. 3-nji suratdaky maglumatlar esasynda ABC üçburçlugyň taraplaryny tapyň.

50.5*. Katetleriniň gatnaşygy 4:5 ýaly bolan gönüburçly üçburçlugyň katetleriniň gipotenuzadaky proýeksiýalarynyň gatnaşygyny tapyň.

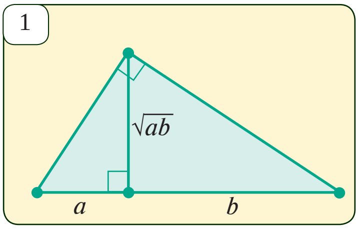
50.6*. Katetleriniň gatnaşygy 3:2 ýaly bolan gönüburçly üçburçluk berlen. Katetleriň gipotenuzasyndaky proýeksiýalaryndan biri ikinjisinden 6 *cm*-e uzyn. Üçburçlugyň meýdanyny tapyň.

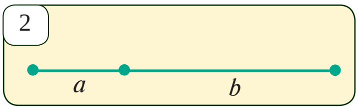
50.7. Katetleriniň gipotenuzasyndaky proýeksiýalary 2 *cm* we 18 *cm* bolan gönüburçly üçburçlugyň meýdanyny tapyň.

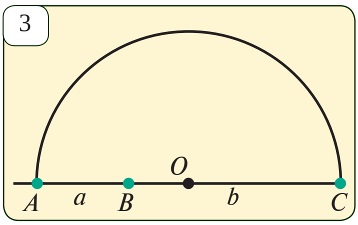
50.8*. ABC üçburçlukda $\angle C = 90°$, CD — beýiklik, CE — bissektrisa we $AE : EB = 2 : 3$. a) $AC : BC$; b) $S_{ACE} : S_{BCE}$; ç) $AD : BD$ gatnaşyklary tapyň.

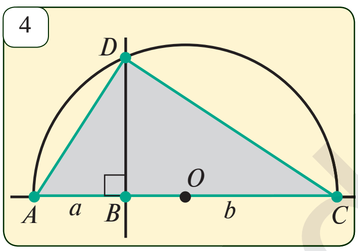


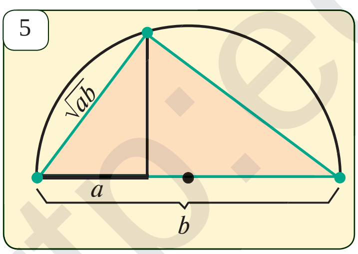
51 BERLEN IKI KESIME ORTA PROPORSIONAL KESIMI GURMAK











Gönüburçly üçburçlugyň göni burçundan geçirilen beýikligi gipotenuzany a we b kesimlere bölse, beýiklik $\sqrt{ab}$-ge deň bolýandygyny görüpdik (*1-nji surat*).

Diýmek, berlen iki kesime orta proporsional kesimi gurmak üçin:

1) gipotenuzasynyň uzynlygy $a+b$-ge deň (*2-nji surat*);

2) göni burçundan geçirilen beýikligi şu gipotenuzany a we b böleklere bölýän gönüburçly üçburçlugy gurmak ýeterli.

Munuň üçin gönüburçly üçburçlugyň daşyndan çyzylan töweregiň merkezi gipotenuzanyň ortasynda ýerleşýänliginden peýdalanýarys (*3-nji surat*).

Gurmak:

1) Göni çyzyk çyzýarys we onda $AB=a$ we $BC=b$ bolýan edip A, B we C nokatlary belgileýäris (*3-nji surat*).

2) AC kesimiň ortasy — O nokady tapýarys. Merkezi O nokatda bolan AC diametrli ýarym töwerek gurýarys *(3-nji surat)*.

3) B nokatdan AC göni çyzyga perpendikulýar göni çyzyk geçirýäris *(4-nji surat)*. Bu göni çyzyk ýarym töweregi D nokatda kesip geçen bolsun. Onda ΔADC — gönüburçly üçburçluk, $BD=\sqrt{ab}$ — biz gurmaly bolan kesim bolýar.

Gurmak ýerine ýetirildi.

Orta proporsional kesimi gurmakda gönüburçly üçburçlugyň kateti gipotenuza bilen şu katetiň gipotenuzadaky proýeksiýasynyň arasynda orta proporsionallygyndan peýdalanmak hem mümkin *(5-nji surat)*.

Meseleler we ýumuşlar

51.1. Uzynlyklary a we b bolan kesimler berlen. Uzynlygy $\sqrt{ab}$ bolan kesimi guruň.

51.2. Uzynlygy a we b-ge deň kesimler berlen. Pifagoryň teoremasyndan peýdalanyp, uzynlygy a) $\sqrt{a^2+b^2}$; b) $\sqrt{a^2-b^2}$ bolan kesimleri guruň.

51.3. Uzynlygy 1-e deň kesim berlen. Uzynlygy a) $\sqrt{2}$; b) $\sqrt{3}$; ç) $\sqrt{5}$; d) $\sqrt{6}$; e) $\sqrt{18}$; ä) $\sqrt{30}$ bolan kesimleri guruň.

51.4. 6-njy suratdaky maglumatlar esasynda ABC üçburçlugyň meýdanyny tapyň.

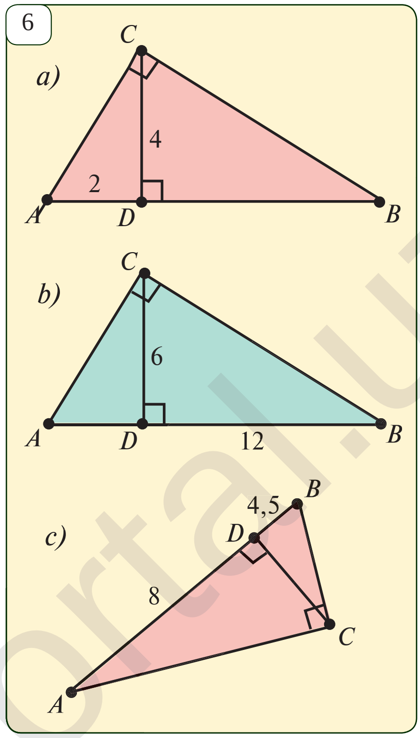
51.5. Töwerekdäki C nokatdan AB diametre CD perpendikulýar geçirilen. Eger $CD = 12$ cm, $AD = 24$ cm bolsa, tegelegiň meýdanyny tapyň.

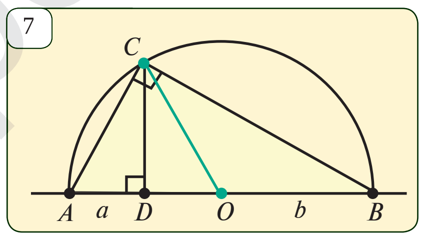
51.6. Öňki meseledäki ABC üçburçlugyň meýdanyny tapyň.

51.7. Gönüburçly üçburçlugyň göni burçunyň bissektrisasy gipotenuzany 5:3 ýaly gatnaşykda bölýär. Göni burçuň depesinden geçirilen beýikligiň gipotenuzadan bölünen kesimleriniň gatnaşygyny tapyň.

51.8. Radiusy 8 cm-e deň tegelegiň içinden bir burçy 30° bolan gönüburçly üçburçluk çyzylan. Tegelegiň üçburçlukdan daşardaky bölegi 3 sany segmentden ybarat. Ine şu segmentleriň meýdanlaryny tapyň.

51.9*. 7-nji suratda $AD = a$, $DB = b$, diýmek, $OC = \frac{a+b}{2}$ = (O — töweregiň merkezi). Suratdan peýdalanyp, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ deňsizligi subut ediň.

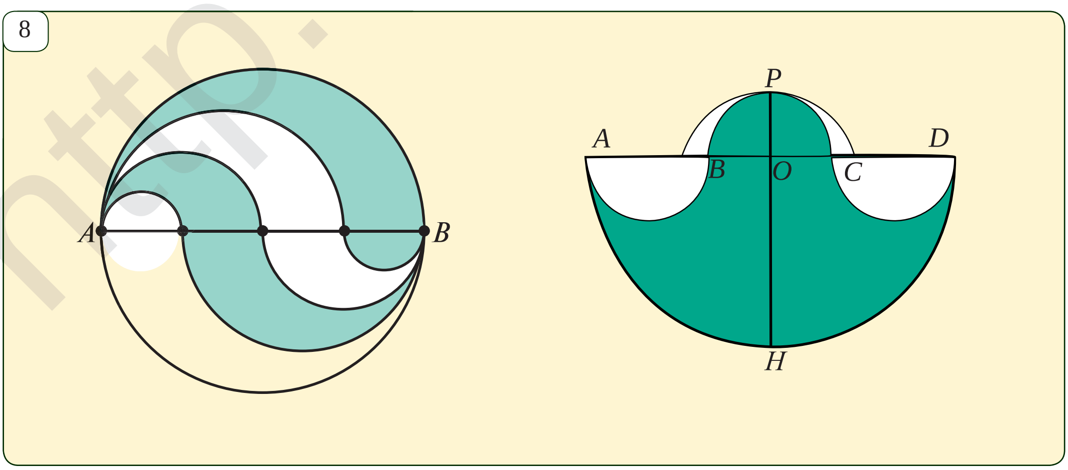




Gyzykly meseleler

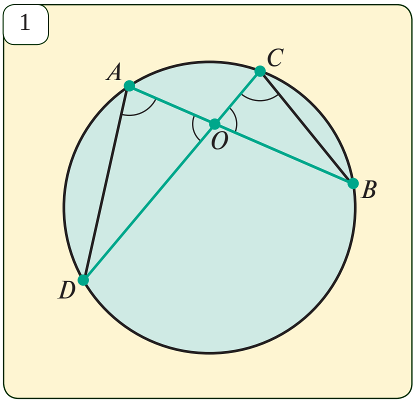
1. Töweregiň AB diametri dört deň bölege bölündi we 8-nji suratda görkezilişi ýaly ýarym töwerekler guruldy. Eger $AB = d$ bolsa, suratda boýap görkezilen her bir şekiliň meýdanyny hasaplaň.

2. 9-njy suratda AB we CD kesimler deň. O nokat AD kesimiň ortasy. AB, CD, AD we BC kesimler ýarymtegelekleriň diametri. Bu ýarymtegelekler bilen çäklenen şekiliň meýdany diametri PH-a deň tegelegiň meýdanyna deňligini subut ediň. Bu ýerde PH kesim AD kesimiň ortasy O nokada geçirilen perpendikulýar.



52 TÖWEREKDÄKI PROPORSIONAL KESIMLER

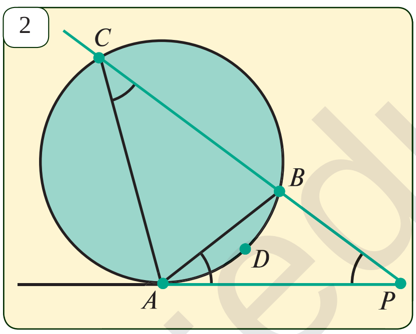
1-nji teorema. ***Töweregiň AB we CD hordalary O nokatda kesişse, $AO \cdot OB = CO \cdot OD$ deňlik dogry bolýar.***



Subudy. AB we CD hordalar (*1-nji surat*) görkezilen tertipde ýerleşýän bolsun. Depelerini AD we BC hordalar bilen utgaşdyrýarys. Şunda BAD we BCD burçlar bir duga direlýär, diýmek, $\angle BAD = \angle BCD$. Ýene görnüşi ýaly, $\angle AOD = \angle BOC$. Bu iki deňlikden, BB nyşana görä, AOD we COB üçburçluklaryň meňzeşligi gelip çykýar. Meňzeş üçburçluklaryň degişli taraplary bolsa proporsional: $\frac{OD}{OB} = \frac{AO}{CO}$ ýa-da $AO \cdot OB = CO \cdot OD$.

Teorema subut edildi.

2-nji teorema. ***Töweregiň daşky zolagyndaky P nokatdan töwerege PA galtaşma (A – galtaşma nokady) we töweregi B we C nokatlarda kesip geçýän göni çyzyk geçirilen bolsa, $PA^2 = PB \cdot PC$ bolýar.***



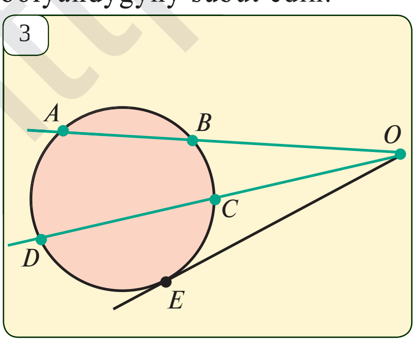
Subudy. ABP we CPA üçburçluklara garaýarys (*2-nji surat*). Onda,

$\angle C = \frac{ADB}{2} = \angle BAP$ hem-de $\angle P$ — bu üçburçluklar üçin umumy burç. Diýmek, ABP we CPA üçburçluklar iki burçy boýunça meňzeş. Mundan,

$$\frac{PA}{PC} = \frac{PB}{PA} \quad \text{ýa-da} \quad PA^2 = PB \cdot PC.$$

Teorema subut edildi.

Mesele. A, B, C we D nokatlar töweregi AB, BC, CD we AD dugalara bölýär. Eger AB we DC şöhleler O nokatda kesişse, onda $OA \cdot OB = OC \cdot OD$ deňlik dogry bolýandygyny subut ediň.



Çözülişi. Meseläniň şertine laýyk çyzgy çyzýarys (*3-nji surat*) we O nokatdan OE galtaşma geçirýäris. Onda, 2-nji teorema görä,

$$\left.\begin{array}{l} OB \cdot OA = OE^2 \\ OC \cdot OD = OE^2 \end{array}\right\} \Rightarrow OA \cdot OB = OC \cdot OD.$$

Meseleler we ýumuşlar

52.1. 4-nji suratda x bilen belgilenen näbelli kesimi tapyň.

52.2. A nokatdan töwerege AB galtaşma (B — galtaşma nokady) we töweregi C we D nokatlarynda kesýän kesiji geçirilen. Eger
a) $AB = 4\ cm$, $AC = 2\ cm$ bolsa, AD kesimi;
b) $AB = 5\ cm$, $AD = 10\ cm$ bolsa, AC kesimi;
ç) $AC = 3\ cm$, $AD = 2{,}7\ cm$ bolsa, AB kesimi tapyň.

52.3. Töweregiň içinden $ABCD$ dörtburçluk çyzylan. AB we DC şöhleler O nokatda kesişýär. Eger
a) $AO = 10\ dm$, $BO = 6\ dm$, $DO = 15\ dm$ bolsa, OC kesimi;
b) $CD = 10\ dm$, $OD = 8\ dm$, $AB = 4\ dm$ bolsa, OB kesimi tapyň.

52.4. Töweregiň AB diametri we bu diametre perpendikulýar CD hordasy E nokatda kesişýär. Eger $AE = 2\ cm$, $EB = 8\ cm$ bolsa, CD hordany tapyň.

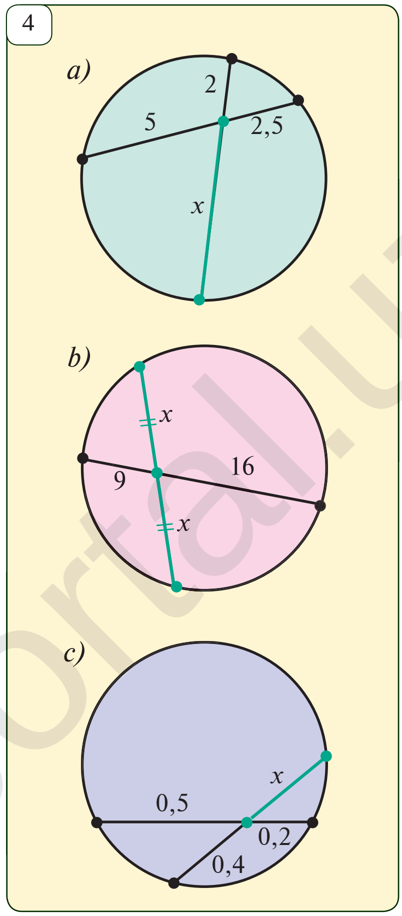
52.5. AB we CD kesimler O nokatda kesişýär. Eger $AO \cdot OB = BO \cdot OD$ bolsa, A, B, C we D nokatlaryň bir töwerekde ýatýandygyny subut ediň.

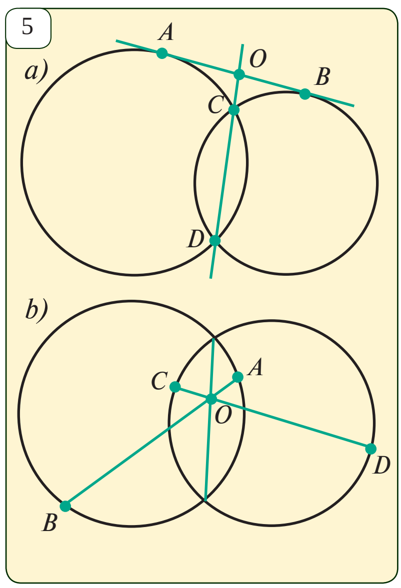
52.6. Radiusy 13 dm bolan töweregiň merkezinden 5 dm uzaklykda P nokat alnan. P nokatdan uzynlygy 25 dm bolan AB horda geçirilen. AP we PB kesimleri tapyň.

52.7. 3-nji suratda $AO \cdot OB = CO \cdot OD$ deňligi AOD we BOC üçburçluklaryň meňzeşliginden peýdalanyp subut ediň.

52.8*. 5-nji suratlardaky maglumatlar esasynda $AO \cdot OB = = CO \cdot OD$ deňligi subut ediň.

52.9*. Iki töwerek C nokatda galtaşýar. AB göni çyzyk birinji töwerege A nokatda, ikinji töwerege bolsa B nokatda galtaşýar. $\angle ACB = 90°$ bolýandygyny subut ediň.

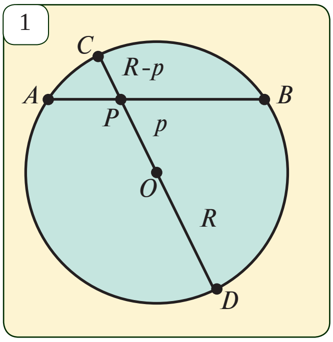




53 AMALY GÖNÜKME WE ONUŇ ULANYLYŞY

Öňki dersde töweregiň kesijileriniň we hordalarynyň häsiýetlerini subut edipdik. Indi şu häsiýetleriň käbir hususy ýagdaýlary bilen tanyşýarys.

1



1-nji mesele. R radiusly töweregiň içki zolagyndaky P nokat töweregiň merkezinden p aralykda ýerleşýän bolsun. Onda P nokatdan geçýän erkin AB horda üçin

$$AP \cdot PB = R^2 - p^2 \qquad (1)$$

deňlik dogry bolýandygyny subut ediň.

Çözülişi. P nokat arkaly töweregiň CD diametrini geçirýäris. Onda, $PC = R - p$, $PD = R + p$ (*1-nji surat*). Kesiji hordalar baradaky teorema görä,

$$AP \cdot PB = CP \cdot PD = (R - p)(R + p) = R^2 - p^2.$$

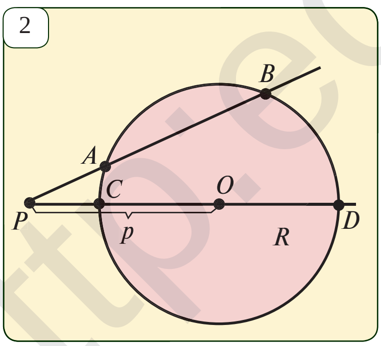
(1) deňlik subut edildi.

2-nji mesele. Radiusy 6 *cm* bolan töweregiň O merkezinden 4 *cm* uzaklykda P nokat alyndy. P nokat arkaly AB horda geçirildi. Eger $AP = 2$ *cm* bolsa, PB kesimi tapyň.

Çözülişi. Meseläniň şertine görä, $R = 6$ *cm*, $d = 4$ *cm*, $AP = 2$ *cm*. Onda (1) deňlige görä, $2 \cdot PB = 6^2 - 4^2 = 36 - 16 = 20$. Mundan, $PB = 10$ *cm*.

Jogaby: $PB = 10$ *cm*.

2



3-nji mesele. R radiusly töweregiň daşky zolagyndaky P nokat töweregiň merkezinden p aralykda ýerleşýän bolsun. Onda P nokat arkaly geçýän we töweregi A we B nokatlarda kesiji erkin göni çyzyk üçin

$$PA \cdot PB = p^2 - R^2 \qquad (2)$$

deňlik dogry bolýandygyny subut ediň.

Çözmeki. Töweregiň O merkezi arkaly geçýän PO göni çyzyk töwerek bilen C we D nokatlarda kesişsin (*2-nji surat*). Onda, şerte görä, $PC = p - R$, $PD = p + R$. Töweregiň daşky zolagyndaky nokatdan geçirilen kesijiler baradaky teorema görä,

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD = (p - R)(p + R) = p^2 - R^2.$$

Şeýdip (2) deňlik subut edildi.

4-nji mesele. Radiusy 7 *cm* bolan töweregiň merkezinden 13 *cm* uzaklykdaky P nokatdan geçýän göni çyzyk töweregi A we B nokatlarda kesýär. Eger $PA=10$ *cm* bolsa, AB hordany tapyň.

Çözülişi. Şerte görä, $R=7$ *cm*, $p=13$ *cm*. Onda (2) formula görä,

$$PA\cdot PB=p^2-R^2=13^2-7^2=169-49=120.$$

Mundan, $PB=\dfrac{120}{PA}=\dfrac{120}{10}=12$ (*cm*). Diýmek,

$AB=PB-PA=12-10=2$ (*cm*). *Jogaby:* 2 *cm*.

Meseleler we ýumuşlar

53.1. Radiusy 5 *cm* bolan töweregiň merkezinden 3 *cm* uzaklykda P nokat alnan. AB horda P nokat arkaly geçýär. Eger $PA=2$ *cm* bolsa, AB hordanyň uzynlygyny tapyň.

53.2. Radiusy 5 *m* bolan töweregiň merkezinden 7 *m* uzaklykda P nokat alnan. P nokat arkaly geçýän göni çyzyk töweregi A we B nokatda kesýär. Eger $PA=4$ *m* bolsa, AB hordanyň uzynlygyny tapyň.

53.3. 3-nji suratdaky maglumatlar esasynda x bilen belgilenen kesimi tapyň (O — töwerek merkezi).

53.4. 4-nji suratdan peýdalanyp, meseläni çözüň. Onda,

a) $PC=5$ *dm*, $OD=7$ *dm*, $AB=2$ *dm*, $PA=?$

b) $PA=5$ *dm*, $AB=4$ *dm*, $PC=3$ *dm*, $OD=?$

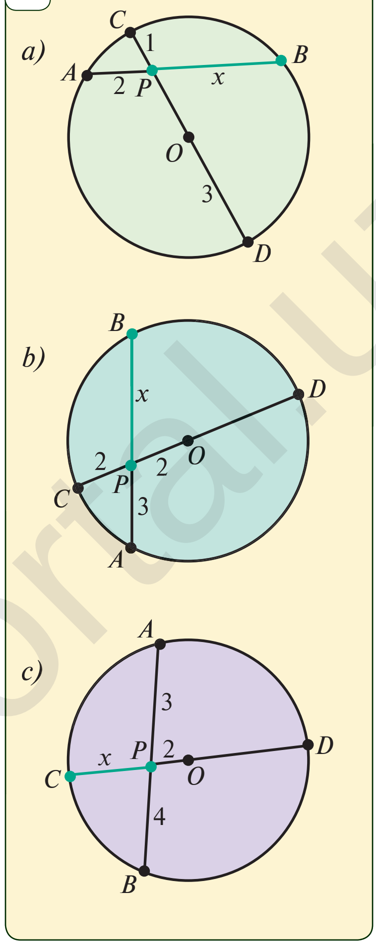
53.5. Töweregiň $AB=7$ *cm* we $CD=5$ *cm* hordalary P nokatda kesişýär. Eger $CP:PD=2:3$ bolsa, P nokat AB hordany nähili gatnaşykda bölýär?

53.6. Töweregiň C nokadyndan AB diametre CD perpendikulýar geçirilen. Eger $AD=2$ *cm*, $DB=18$ *cm* bolsa, CD kesimi tapyň.

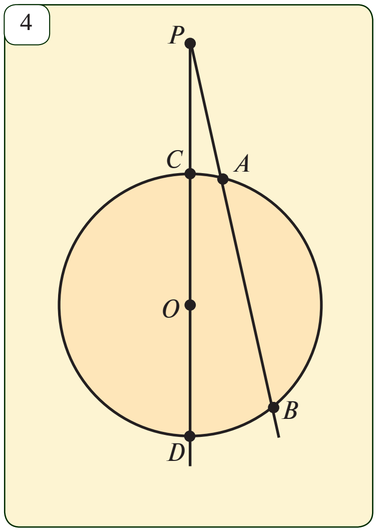
53.7*. Töweregiň içinden çyzylan $ABCD$ dörtburçlugyň diagonallary K nokatda kesişýär. Eger $AB=2$, $BC=1$, $CD=3$ we $CK:KA=1:2$ bolsa, AD kesimi tapyň.

53.8*. Töweregiň içinden çyzylan $ABCD$ dörtburçlukda $AB:DC=1:2$ we $BD:AC=2:3$ bolsa, $DA:BC$ gatnaşygy tapyň.

3



4



54 BILIMIŇIZI SYNAŇ

I. Testler

1. **Gönüburçly üçburçlugyň gipotenuzasyna geçirilen beýikligi barada nädogry tassyklamany görkeziň:**
   A. Katetleriden kiçi;
   B. Üçburçlugy iki meňzeş üçburçluklara bölýär;
   D. Katetleriniň gipotenuzadaky proýeksiýalary arasynda orta proporsional;
   E. Gipotenuzanyň ýarysyna deň.
2. **AB we CD hordalar O nokatda kesişýär. Nädogry tassyklamany tapyň:**
   A. $\angle DAB = \angle DCB$; B. AOD we COB üçburçluklar meňzeş;
   D. $AO \cdot OB = CO \cdot OD$; E. $AO = CO$.
3. **Dogry tassyklamany tapyň:**
   A. Deň kesimleriň proýeksiýalary hem deň bolýar;
   B. Uly kesimiň proýeksiýasy uly bolýar;
   D. Bir göni çyzykdaky deň kesimleriň proýeksiýalary deň bolýar;
   E. Proýeksiýanyň uzynlygy proýesirlenýän kesimiň uzynlygyna deň bolýar.
4. **Gönüburçly üçburçlugyň gipotenuzasyna geçirilen beýiklik ony iki üçburçluga bölýär. Bu üçburçluklar:**
   A. Deň; B. Deňdeş; D. Meňzeş; E. Deňýanly.
5. **Uzynlygy a we b bolan kesimleriň orta proporsionali nämä deň?**
   A. $a+b$; B. $\sqrt{ab}$; D. $\frac{a+b}{2}$; E. $a:b$.
6. **ABCD dörtburçluk O merkezli töweregiň içinden çyzylan. Nädogry tassyklamany görkeziň:**
   A. $\Delta AOB \backsim \Delta COD$; B. $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$;
   D. $AO \cdot OB = CO \cdot OD$; E. $AB \cdot CD = BC \cdot AD$.

II. Meseleler.

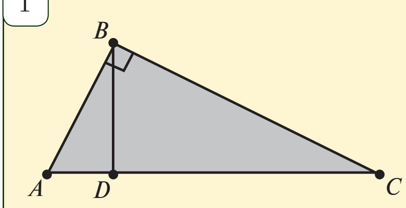
1. Gönüburçly üçburçlugyň katetleriniň gatnaşygy 3:4-e deň. Bu üçburçlugyň gipotenuzasy 50 *cm*. Üçburçlugyň göni burçunyň depesinden geçirilen beýikligi gipotenuzadan nähili uzynlykdaky kesimleri bölýär?
2. Töweregiň *AB* we *CD* hordalary *E* nokatda kesişýär. Eger *AE* = 5 *cm*, *BE* = 2 *cm* we *EC* = 2,5 *cm* bolsa, *ED*-ni tapyň.
3. Radiusy 6 *m* bolan töweregiň merkezinden 10 *m* uzaklykda *K* nokat alyndy we *K* nokatdan töwerege galtaşma geçirildi. Galtaşmanyň galtaşma nokady *P* bilen *K* nokadyň arasyndaky aralygy tapyň.
4. *ABC* üçburçlukda $\angle C = 90°$ we *CD* beýiklik 4,8 *dm*. Eger $AD = 3,6$ *dm* bolsa, *AB* tarapy tapyň.
5. Töweregiň *AB* we *CD* hordalary *O* nokatda kesişýär. Eger $AO = 6$, $OB = 4$ we $CO = 3$ bolsa, *OD* kesimi tapyň.

6. Töwerekde A, B, C, D nokatlar belgilenen, BA we CD şöhleler O nokatda kesişýär. Eger $OA=5$, $AB=4$, $OD=6$ bolsa, DC hordany tapyň.
7. Töwerege B nokatda galtaşýan göni çyzygyň üstünde A nokat alyndy. Eger $AB = 12$ we A nokatdan töwerege çenli bolan iň gysga aralyk 8 bolsa, töweregiň radiusyny tapyň.
8. Ýarym töwerekdäki C nokatdan AB diametre geçirilen CD perpendikulýar AB kesimde 4 we 9-a deň kesimleri bölýär. CD kesimi tapyň.
9. Gönüburçly üçburçlugyň beýikligi gipotenuzany 3 dm we 12 dm-e deň kesimlere bölýär. Üçburçlugyň meýdanyny tapyň.
10. Radiusy 5 cm bolan O merkezli töweregiň AB hordasynda D nokat alnan. Eger $AD=2$ cm, $DB=4{,}5$ cm bolsa, OD kesimi tapyň.
11. Radiusy 5 m bolan O merkezli töweregi A we B nokatlarda kesiji göni çyzykda P nokat alyndy. Eger $PA=5$ m, $AB=2{,}8$ m bolsa, OP aralygy tapyň.
12. Dört parallel göni çyzyk berlen. Olar burç taraplaryny A we A_1, B we B_1, C we C_1 hem-de D we D_1 nokatlarda kesýär. Munda A, B, C, D nokatlar burçuň bir tarapynda ýatýar. Eger $AB=8$, $CD=12$ we $C_1D_1=9$ bolsa, A_1B_1 kesimi tapyň.
13. Töwerek burçuň içinden çyzylan. Eger burçuň depesinden töwerege çenli bolan aralyk radiusa deň bolsa, burçuň ululygyny tapyň.
14. Töwerege AB diametriň B ujundan BC galtaşma we AC kesiji geçirilen. AC töwerek bilen D nokatda kesişýär. Eger $AD=DC$ bolsa, CBD burçy tapyň.
15. Gönüburçly üçburçlugyň katetleriniň gatnaşygy 2:3 ýaly. Üçburçlugyň gipotenuzasyna geçirilen beýiklik ony iki üçburçluga bölýär. Olar meýdanlarynyň gatnaşygyny tapyň.

III. Özüňizi synaň (nusga barlag işi)

1. Töweregiň daşarsyndaky nokatdan töwerege galtaşma geçirilen. Bu nokatdan töwerege çenli bolan iň gysga aralyk 2 cm-e, galtaşma nokadyna çenli bolan aralyk bolsa 6 cm-e deň. Töweregiň radiusyny tapyň.
2. ΔABC gönüburçly, $AD=9$ dm, $DC=16$ dm bolsa, şu üçburçlugyň içinden çyzylan töweregiň radiusyny hasaplaň.(1-nji surat)

1



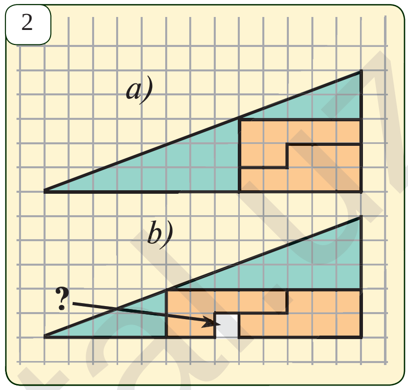
3. Nokatdan göni çyzyga iki gyşarma geçirilen. Eger gyşarmalar 1:2 gatnaşykda bolup, olaryň proýeksiýalary 1 m we 7 m bolsa, gyşarmalaryň uzynlyklaryny tapyň.
4.* (Goşmaça mesele) PQ we ondan uzyn ET kesimler berlen. $AB=BC=PQ$; $BD=ET$ bolup,

diagonallary kesişýän O nokat üçin $AO \cdot OC = BO \cdot OD$ deňlik dogry bolar ýaly $ABCD$ dörtburçluk guruň.

Gyzykly mesele

Üçburçluk 2-nji *a* suratda görkezilişi ýaly edip dört bölege bölünen we 2-nji *b* suratda görkezilişi ýaly edip gaýtadan gurnalan. Hany, aýdyň, artykmaç kwadrat nireden peýda bolupdyr?

2

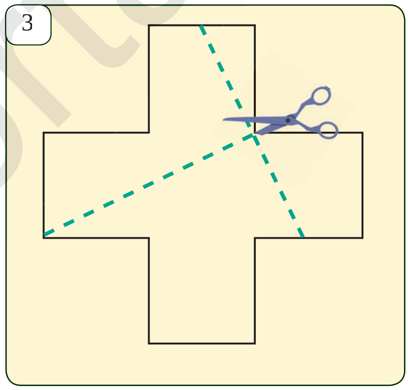


Grek haçy

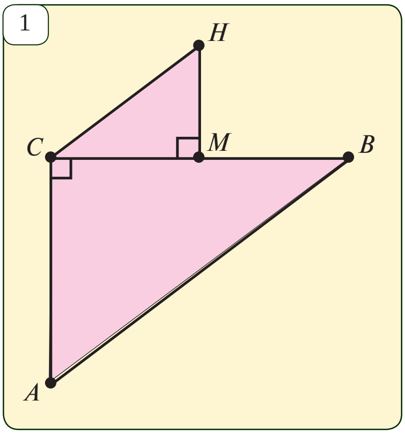
Miladydan öňki 500-nji ýyllarda peýda bolan bu şekili (3-nji surat) ýaşaýşyň simwoly hökmünde çöregiň üstüne çyzypdyrlar.

Bu şekili galyň kagyza çyzyp alyp, ony suratda görkezilen çyzyklar boýunça gyrkyň. Emele gelen böleklerden kwadrat gurmak mümkinligine göz ýetiriň.

3



55 JEMLEÝJI BARLAG IŞI



I. Nusga barlag işi

1. $ABCD$ parallelogramda $\angle A = 45°$, $AD = 4$. Parallelogramyň AB tarapynyň dowamyna $\angle PDA = 90°$-a deň bolýan BP kesim goýuldy. BC we PD kesimler T nokatda kesişýär, munda $PT : TD = 3 : 1$.

a) $\Delta BPT \backsim \Delta CDT$ -ni subut ediň, bu üçburçluklaryň meýdanlarynyň gatnaşygyny tapyň.

b) $ABCD$ parallelogramyň meýdanyny tapyň.

ç) AB we TD kesimleriň ortalaryny utgaşdyrýan kesimiň uzynlygyny tapyň.

d) $\overline{AB}$ wektory $\overline{CA}$ we $\overline{TB}$ wektorlar arkaly aňladyň.

e) CAD burçuň sinusyny tapyň.

2. *(Goşmaça)* 1-nji suratda $BC \perp AC$, $MH \perp BC$, $2MC = BC$, $MH = 0{,}5AC$ bolsa, $AB \| CH$ bolýandygyny subut ediň.

II. Barlag işi üçin nusga testler

1. Eger gönüburçly üçburçlugyň beýikligi gipotenuzasyny 6 *cm* we 54 *cm* kesimlere bölse, şu üçburçlugyň meýdanyny tapyň:
A) 648 cm^2; B) 324 cm^2; D) 1080 cm^2; E) 540 cm^2.

2. C nokatdan geçirilen bir kesiji töweregi A we B, ikinjisi bolsa D we E nokatlarda kesýär. Eger $CA = 18$ *cm*, $CB = 8$ *cm*, $CD = 8$ *cm* bolsa, DE kesimiň uzynlygyny tapyň:
A) 17 *cm*; B) 1 *cm*; D) 9 *cm*; E) dogry jogap görkezilmedik.

3. Eger $A(-5;2\sqrt{3})$, $B(-4;2)$, $C(-2;\sqrt{3})$, $D(0;2)$ bolsa, $ABCD$ dörtburçlugyň diagonallary arasyndaky burçy tapyň:
A) 30°; B) 60°; D) 90°; E) dogry jogap görkezilmedik.

4. Eger parallelogramyň diagonallary 10 *cm* we $8\sqrt{2}$ *cm*-e deň we olaryň arasyndaky burç 45° bolsa, parallelogramyň taraplaryny tapyň:
A) $\sqrt{17}$ *cm* we $\sqrt{97}$ *cm*; B) 5 *cm* we 6 *cm*;
D) $\sqrt{34}$ *cm* we $\sqrt{63}$ *cm*; E) dogry jogap görkezilmedik.

5. Radiusy 8 *cm* bolan töweregiň içinden çyzylan dogry altyburçlugyň meýdanyny tapyň:
A) $48\sqrt{3}$ cm^2; B) $192\sqrt{3}$ cm^2; D) $96\sqrt{2}$; E) dogry jogap ýok.

6. Merkezi burçy 140°, meýdany $31{,}5\pi$ cm^2 bolan tegelek sektoryň radiusyny anyklaň:

A) 9 *cm*; B) 18 *cm*; D) 9π *cm*; E) dogry jogap görkezilmedik.

7. Esasynyň uzynlygy 15 *cm* bolan üçburçluk esasyna parallel kesim geçirilen. Eger emele gelen trapesiýanyň meýdany üçburçlugyň meýdanynyň $\frac{3}{4}$ bölegini düzýändigi mälim bolsa, kesimiň uzynlygyny tapyň:
A) 6,5; B) 7; D) 7,5; E) 5.

8. Gapdal tarapy $2\sqrt{39}$ *cm* bolan deňýanly üçburçlugyň beýikliginiň esasyna gatnaşygy 3:4-e deň bolsa, üçburçlugyň meýdanyny tapyň:
A) 260; B) 245; D) 310; E) 72.

9. $\bar{a}(4;4\sqrt{3})$ we $\bar{b}(8\sqrt{3};8)$ wektorlaryň arasyndaky burçy tapyň:
A) 45°; B) 90°; D) 30°; E) 60°.

10. Deňýanly trapesiýanyň esaslary 10 *cm* we 16 *cm*, gapdal tarapy bolsa 5 *cm*. Trapesiýanyň meýdanyny tapyň:
A) 45; B) 50; D) 48; E) 52.

11. Gönüburçly üçburçlugyň gipotenuzasy 13 *cm* bolup, katetlerinden biri ikinjisinden 7 *cm* uly. Üçburçlugyň meýdanyny tapyň:
A) 30 cm^2; B) 25 cm^2; D) 45 cm^2; E) 40 cm^2.

12. Tarapy 5 *cm* bolan rombuň bir diagonaly 6 *cm*-e deň. Rombuň meýdanyny tapyň:
A) 24 cm^2; B) 30 cm^2; D) 29 cm^2; E) 40 cm^2.

13. Diagonaly $6\sqrt{2}$ bolan kwadratyň içinden çyzylan töweregiň uzynlygyny tapyň:
A) 10π; B) 8π; D) 9π; E) 6π.

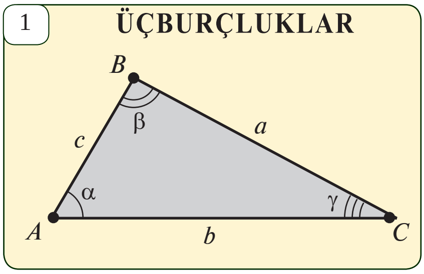
14. Tarapy $6\sqrt{2}$ *cm* bolan kwadratyň daşyndan çyzylan tegelegiň meýdanyny tapyň:
A) 9π; B) 12π; D) 15π; E) 18π.

15. Beýiklikleri 4 *cm* we 6 *cm* bolan parallelogramyň meýdany 36 cm^2-a deň. Onuň perimetrini tapyň:
A) 26 *cm*; B) 30 *cm*; D) 29 *cm*; E) 36 *cm*.

16. Perimetri 30 *cm* bolan parallelogramyň taraplary 2:3 gatnaşykda. Eger parallelogramyň ýiti burçy 30° bolsa, onuň meýdanyny tapyň:
A) 26 cm^2; B) 27 cm^2; D) 29 cm^2; E) 30 cm^2.

17. Eger *ABC* üçburçlukda $AB=6\sqrt{3}$ *cm*, $BC=12$ *cm* we $\angle C=60°$ bolsa, üçburçlugyň *A* burçuny tapyň:
A) 45°; B) 90°; D) 30°; E) 60°.

PLANIMETRIÝA DEGIŞLI ESASY DÜŞÜNJELER WE MAGLUMATLAR



1°. Esasy düşünjeler

Tekizlikde bir göni çyzykda ýatmaýan üç nokat berlen bolsun. Şu nokatlaryň ikisini-de kesimler bilen utgaşdyrýarys. Emele gelen şekile *üçburçluk* diýilýär. Nokatlara üçburçlugyň *depeleri*, kesimlere bolsa *taraplary* diýilýär. Belgilenişi: A, B, C – depeler, a, b, c – taraplar (*1-nji surat*).

Üçburçluk üç içki burça eýe: $\angle BAC$, $\angle CBA$, $\angle ACB$. Belgilenişi: α , β, γ.

Mediana — üçburçlugyň depesini onuň garşysyndaky tarapyň ortasy bilen utgaşdyrýan kesim. Üçburçlukda 3 mediana bolup, olar m_a, m_b, m_c ýaly belgilenýär.

Bissektrisa — üçburçlugyň depesini onuň garşysyndaky tarap bilen utgaşdyrýan we şu depedäki burçuň bissektrisasynda ýatýan kesim. Üçburçlukda üç bissektrisa bolup, olar l_a, l_b, l_c ýaly belgilenýär.

Beýiklik — üçburçlugyň depesinden onuň garşysyndaky tarap ýatýan göni çyzyga geçirilen perpendikulýar.

Üçburçlukda üç beýiklik bolup, olar h_a, h_b, h_c ýaly belgilenýär.

Orta çyzyk — iki tarapyň ortalaryny utgaşdyrýan kesim.

Orta çyzyklar sany hem 3.

Perimetr — üç tarapyň uzynlyklarynyň jemi. Belgilenişi: P.

Üçburçluklar taraplaryna garap görnüşe bölünýär:

a) deň taraply ($a=b=c$); b) deňýanly (a, b, c-leriň haýsydyr ikisi deň);

ç) dürli taraply (a, b, c-leriň hiç haýsy ikisi deň däl).

Üçburçlugyň üç tarapyna-da galtaşyp geçýän töwerege onuň içinden çyzylan *töwerek* diýilýär (şeýle töwerek bar we ýeke-täk). Içinden çyzylan töweregiň radiusy r arkaly belgilenýär.

Üçburçlugyň üç depesinden geçýän töwerege onuň *daşyndan çyzylan töwerek* diýilýär we onuň radiusy R arkaly belgilenýär (şeýle töwerek bar we ýeke-täk).

2°. Esasy gatnaşyklar

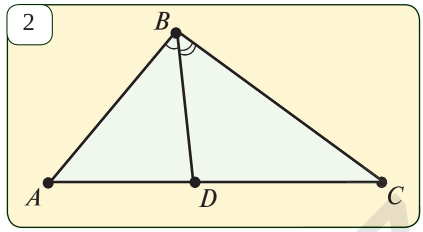
1) $\alpha+\beta+\gamma=180°$. Üçburçlugyň içki burçlarynyň jemi 180°-a deň.

2) Üç mediana bir nokatda kesişýär. Bu nokat medianany 2:1 gatnaşykda bölýär. Mediana üçburçlugy iki meýdanlary deň üçburçluklara bölýär. Medianalar uzynlyklary $m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$; $m_b=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}$; $m_c=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}$ formulalardan tapylýar.

3) Üç bissektrisa bir nokatda kesişýär. Bu nokat içinden çyzylan töweregiň merkezi bolýar. Bissektrisa özi geçirilen tarapy galan taraplara proporsional böleklere bölýär (*2-nji surat*).

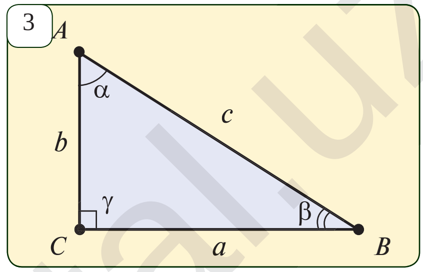
BD bissektrisa bolsa, $\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{BC}{DC}$.

$$l_a = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{p(p-a)};\quad l_b = \frac{2\sqrt{ac}}{a+c}\sqrt{p(p-b)};$$
$$l_c = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\sqrt{p(p-c)},\qquad p=(a+b+c)$$



Bissektrisanyň uzynlyklaryny şu formulalardan tapmak mümkin.

4) Üçburçlugyň beýiklikleri ýa-da olaryň dowamlary bir nokatda kesişýär.



Beýikligiň uzynlyklaryny
$$h_a=\frac{2S}{a};\qquad h_b=\frac{2S}{b};\qquad h_c=\frac{2S}{c}$$
formulalardan tapmak mümkin. Bu ýerde S — üçburçlugyň meýdany.

5) Üçburçluk taraplarynyň orta perpendikulýary bir nokatda kesişýär. Bu nokat üçburçlugyň *daşyndan çyzylan töweregiň merkezi* bolýar.

6) Üçburçlugyň *orta çyzygy* üçünji tarapa parallel we onuň ýarysyna deň.

7) Sinuslar teoremasy: $$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R.$$

8) Kosinuslar teoremasy:
$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha,\quad b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta,\quad c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$$

9. Üçburçlugyň meýdanyny hasaplamak formulalary:
$$S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c;\qquad S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma=\frac{1}{2}bc\sin\alpha=\frac{1}{2}ac\sin\beta;$$

10. Geron formulasy:
$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},\qquad p=\frac{a+b+c}{2};\qquad S=\frac{abc}{4R},\qquad S=pr.$$

3°. Möhüm hususy ýagdaýlar

a) *Gönüburçly üçburçluk* (*3-nji surat*).

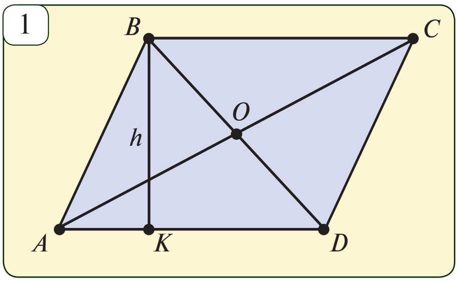
$\angle\gamma=90°$, $\alpha+\beta=90°$, AC we BC — katetler, AB — gipotenuza. Pifagoryň teoremasy: $a^2+b^2=c^2$.

$$S=\frac{1}{2}ab;\qquad R=\frac{c}{2};\qquad r=\frac{a+b+c}{2};$$
$$\frac{a}{c}=\sin\alpha;\qquad \frac{a}{c}=\cos\beta;\qquad \frac{b}{c}=\sin\beta;\qquad \frac{b}{c}=\cos\alpha.$$
$$\frac{a}{b}=\mathrm{tg}\,\alpha;\qquad \frac{a}{b}=\mathrm{ctg}\,\beta;\qquad \frac{b}{a}=\mathrm{ctg}\,\alpha;\qquad \frac{b}{a}=\mathrm{tg}\,\beta.$$

b) *Deň taraply üçburçluk*

$$\alpha=\beta=\gamma=60°,\qquad S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4},\qquad r=\frac{a\sqrt{3}}{6},\qquad R=\frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

DÖRTBURÇLUKLAR



1°. Parallelogram

Garşylykly taraplary parallel bolan dörtburçluga *parallelogram* diýilýär (*1-nji surat*).

Goňşy bolmadyk depeleri utgaşdyrýan kesime *diagonal* diýilýär.

AB we CD; AD we BC parallel taraplar;

BD we AC diagonallar.

Esasy häsiýetler we gatnaşyklar

1) Diagonallaryň kesişme nokady parallelogramyň simmetriýa merkezi bolýar.

2) Garşylykly taraplaryň uzynlyklary özara deň:

$$AB = CD \quad \text{we} \quad AD = BC.$$

3) Parallelogramyň garşylykly burçlary özara deň:

$$\angle BAD = \angle BCD \quad \text{we} \quad \angle ABC = \angle ADC.$$

4) Goňşy burçlar jemi 180°-a deň.

5) Diagonallar kesişme nokadynda deň ikä bölünýär: $BO = OD$ we $AO = OC$

6) Taraplaryň kwadratlarynyň jemi diagonallaryň kwadratlarynyň jemine deň:
$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2$ ýa-da $2(AB^2 + BC^2) = AC^2 + BD^2$.

7) Parallelogramyň meýdany: a) $S = ah_a$, bu ýerde: $a = AD$ tarap, $h_a = BK$ — beýiklik; b) $S = ab\sin\alpha$, bu ýerde: $b = AB$ — tarap, $\alpha = \angle BAD$ — AB we AD taraplaryň arasyndaky burç.

2°. Romb

Ähli taraplary özara deň bolan parallelograma *romb* diýilýär.

Parallelogram üçin ýerlikli bolan ähli häsiýetler romb üçin hem ýerlikli.

Rombuň goşmaça häsiýetleri.

1) Rombuň diagonallary özara perpendikulýar.

2) Rombuň diagonallary içki burçlaryň bissektrisalary bolýar.

3) Rombuň meýdany $S = \frac{1}{2}d_1 d_2$, bu ýerde: d_1, d_2 — rombuň diagonallary.

3°. Gönüburçluk

Ähli burçlary 90°-a deň bolan parallelograma *gönüburçluk* diýilýär.

1) Gönüburçlugyň diagonallary özara deň.

2) Gönüburçlugyň meýdany $S = ab$, bu ýerde : a we b — gönüburçlugyň goňşy taraplary.

4°. Kwadrat

Ähli taraplary özara deň bolan gönüburçluga *kwadrat* diýilýär.

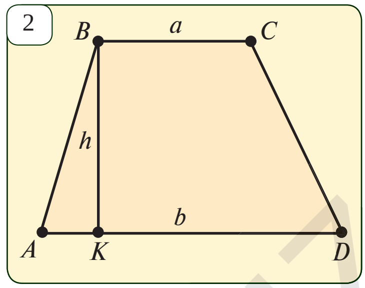
Romb we gönüburçluklar üçin dogry bolan ähli häsiýetler kwadrat üçin hem dogry.

Eger a — kwadrat tarapy, d bolsa diagonaly bolsa: $S = a^2$; $S = \frac{d^2}{2}$; $d = a\sqrt{2}$.

5°. Trapesiýa

Esaslar diýilýän iki tarapy özara parallel we gapdal taraplar diýilýän, galan iki tarapy bolsa parallel bolmadyk dörtburçluga *trapesiýa* diýilýär.

Gapdal taraplaryň ortalaryny utgaşdyrýan kesime trapesiýanyň *orta çyzygy* diýilýär.

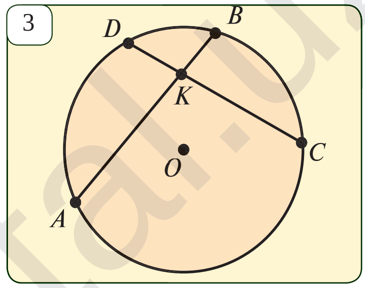


Esasy häsiýetler

1) Trapesiýanyň orta çyzygy esaslara parallel we esaslaryň jeminiň ýarysyna deň bolýar.

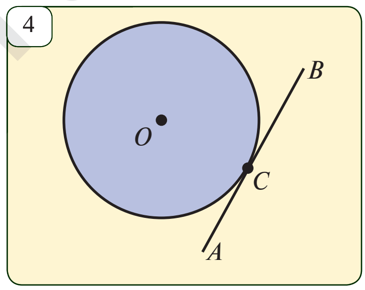
2) Trapesiýanyň meýdany $S = \frac{a+b}{2}h$, bu ýerde a we b — esaslar, h bolsa beýiklik (*2-nji surat*).

TÖWEREK, TEGELEK



1°. Položitel san R we tekizlikde O nokat berlen bolsun. O nokatdan R aralykda ýerleşýän nokatlardan ybarat şekile *töwerek* diýilýär. O nokat *töweregiň merkezi*, merkez bilen töwerekdäki nokady utgaşdyrýan kesime *radius*, R sana bolsa *radius uzynlygy* diýilýär. Töwerekdäki iki nokady utgaşdyrýan kesime *horda*, merkezden geçýän horda bolsa *diametr* diýilýär.

Tekizligiň töwerek bilen çäklenen çäkli bölegi *tegelek* diýlip atlandyrylýar.



Esasy gatnaşyklar

1) $D=2R$, bu ýerde: D — diametriň uzynlygy.

2) $l=2\pi R$ — töweregiň uzynlygy.

3) $S=\pi R^2$ — tegelegiň meýdany.

4) AB we CD hordalar K nokatda kesişse (*3-nji surat*), $AK \cdot KB = CK \cdot KD$ gatnaşyk ýerine ýetirilýär.

5) Hordany deň ikä bölýän diametr şu horda perpendikulýardir.

6) Deň hordalar merkezden deň aralyklarda ýerleşýär we, tersine, merkezden deň aralykda ýerleşýän hordalar özara deň.

2°. Galtaşma

Töwerek (ýa-da tegelek) bilen ýeke-täk umumy nokada eýe bolan göni çyzyga *galtaşma* diýilýär. Nokada bolsa *galtaşma nokady* diýilýär (*4-nji surat*).

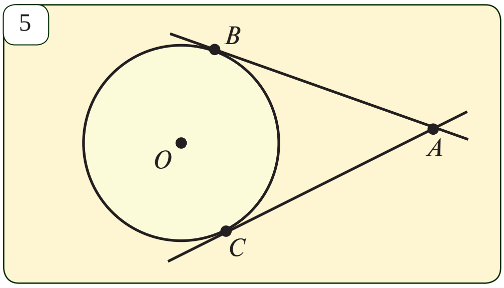
Töwerek bilen 2 umumy nokada eýe bolan göni çyzyga *kesiji* diýilýär.

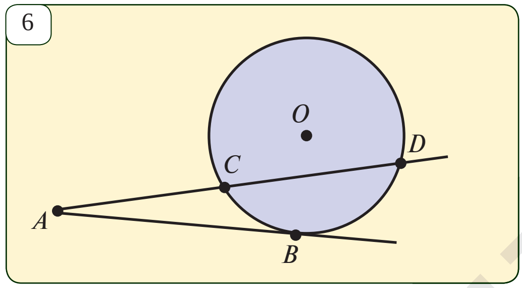
Galtaşmanyň häsiýetleri

1) Galtaşma nokadyna geçirilen radius galtaşma perpendikulýardyr.

2) Tegelegiň daşarsyndaky nokatdan şu tegelege iki galtaşma geçirmek mümkin. Bu galtaşmalaryň kesimleri özara deň (*5-nji surat*): $AB=AC$.

3) Eger AC kesiji bolup, töweregi C we D nokatlarda kesip geçse, AB bolsa galtaşma bolsa, $AB^2=AD \cdot AC$ deňlik dogry (*6-njy surat*).





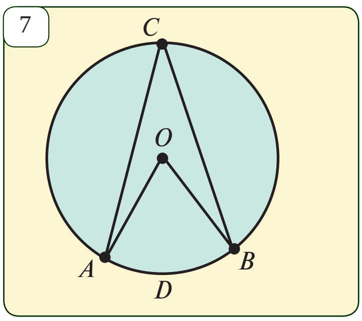
3°. Merkezi we içinden çyzylan burçlar

Töwerekdäki iki nokadyň kömeginde töwerek iki bölege bölünýär. Bu bölekler *dugalar* diýlip atlandyrylýar. Belgilenişi: *ADB*; *ACB*.

AOB burç *ADB* duga direlýän *merkezi burç* (*7-nji surat*), *ACB* burç bolsa *ADB* duga direlýän we töweregiň *içinden çyzylan burç* diýilýär. Bu burçlaryň arasida

$$\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB$$

gatnaşyk ýerlikli.



Hususan-da, ýarym töwerege direlýän içki burç göni burç bolýar (*8-nji surat*). Bir duga direlýän töwereginiň içinden çyzylan burçlar özara deň bolýar.

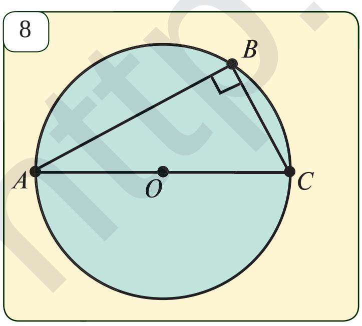
4°. Sektor we segment

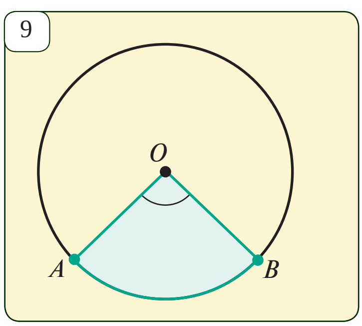
Tegelegiň iki radius bilen çäklenen bölegine *sektor* diýilýär (*9-njy surat*). Sektoryň dugasynyň uzynlygy:

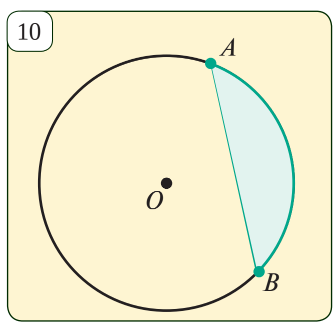
$l = \frac{\pi R\alpha}{180^\circ}$, bu ýerde α — merkezi burçuň gradus ölçegi.

Sektor meýdany: $S = \frac{\pi R^2\alpha}{360^\circ}$; $S = \frac{1}{2}Rl$.

Segment — tegelegiň horda we şu horda direlýän duga bilen çäklenen bölegi (*10-njy surat*).







Segmentiň meýdany: $S = S_{sektor} \pm S_{\Delta} = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot \alpha \pm \frac{1}{2} R^2 \sin\alpha$

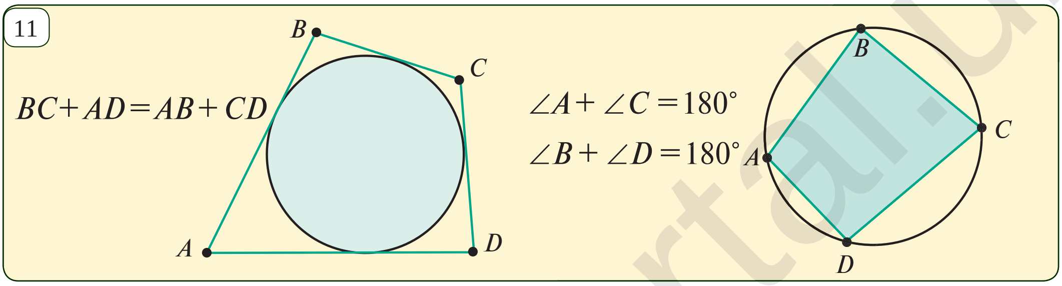
DOGRY KÖPBURÇLUKLAR

Dogry n burçlugyň tarapy a_n, perimetri P_n, meýdany S_n, içinden çyzylan töweregiň radiusy r_n, daşyndan çyzylan töweregiň radiusy R_n, içki burçy α_n bolsa,

$$P_n = na_n, \quad S_n = \frac{1}{2}P_n r_n = \frac{1}{2}na_n r_n, \quad \alpha_n = \frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$$

$$R_n = \frac{a_n}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}, \qquad r_n = \frac{a_n}{2\,\mathrm{tg}\frac{180^\circ}{n}}$$

Töweregiň daşyndan we içinden çyzylan dörtburçluklar (11-nji surat).



10-dan 99-a çenli bolan natural sanlar kwadratlarynyň jedweli

onluk / birlik	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	100	400	900	1600	2500	3600	4900	6400	8100
1	121	441	961	1681	2601	3721	5041	6561	8281
2	144	484	1024	1764	2704	3844	5184	6724	8464
3	169	529	1089	1849	2809	3969	5329	6889	8649
4	196	576	1156	1936	2916	4036	5476	7056	8836
5	225	625	1225	2025	3025	4225	5625	7225	9025
6	256	676	1296	2116	3136	4356	5776	7396	9216
7	289	729	1369	2209	3249	4489	5929	7569	9409
8	324	784	1444	2304	3364	4624	6084	7744	9604
9	361	841	1521	2401	3481	4761	6241	7921	9801

Käbir ululyklaryň jedweli

$\pi \cong 3{,}1416$	$\sqrt{8} \cong 2{,}8284$
$\sqrt{2} \cong 1{,}4142$	$\sqrt{10} \cong 3{,}1623$
$\sqrt{3} \cong 1{,}7320$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0{,}7071$
$\sqrt{5} \cong 2{,}2360$	$\frac{1}{\sqrt{3}} \cong 0{,}5774$
$\sqrt{6} \cong 2{,}4495$	$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cong 0{,}3183$
$\sqrt{7} \cong 2{,}6457$	

Trigonometrik funksiýalaryň bahalarynyň jedweli									
α°	sinα	cosα	tgα	ctgα	α°	sinα	cosα	tgα	ctgα
1	0,0175	1,000	0,0175	57,3	**46**	0,719	0,695	1,036	0,966
2	0,0349	0,999	0,0349	28,6	**47**	0,731	0,682	1,072	0,933
3	0,0523	0,999	0,0524	19,1	**48**	0,743	0,669	1,111	0,900
4	0,0698	0,998	0,0699	14,3	**49**	0,755	0,656	1,150	0,869
5	0,0872	0,996	0,0875	11,4	**50**	0,766	0,643	1,192	0,839
6	0,1045	0,995	0,1051	9,51	**51**	0,777	0,629	1,235	0,810
7	0,1219	0,993	0,1228	8,14	**52**	0,788	0,616	1,280	0,781
8	0,139	0,990	0,141	7,11	**53**	0,799	0,602	1,327	0,754
9	0,156	0,988	0,158	6,31	**54**	0,809	0,588	1,376	0,727
10	0,174	0,985	0,176	5,67	**55**	0,819	0,574	1,428	0,700
11	0,191	0,982	0,194	5,145	**56**	0,829	0,559	1,483	0,675
12	0,208	0,978	0,213	4,507	**57**	0,839	0,545	1,540	0,649
13	0,225	0,974	0,231	4,331	**58**	0,848	0,530	1,600	0,625
14	0,242	0,970	0,249	4,011	**59**	0,857	0,515	1,664	0,601
15	0,259	0,966	0,268	3,732	**60**	0,866	0,500	1,732	0,577
16	0,276	0,961	0,287	3,487	**61**	0,875	0,485	1,804	0,554
17	0,292	0,956	0,306	3,271	**62**	0,883	0,469	1,881	0,532
18	0,309	0,951	0,325	3,078	**63**	0,891	0,454	1,963	0,510
19	0326	0,946	0,344	2,904	**64**	0,899	0,438	2,050	0,488
20	0,342	0,940	0,364	2,747	**65**	0,906	0,423	2,145	0,466
21	0,358	0,934	0,384	2,605	**66**	0,914	0,405	2,246	0,445
22	0,375	0,927	0,404	2,475	**67**	0,921	0,391	2,356	0,424
23	0,391	0,921	0,424	2,356	**68**	0,927	0,375	2,475	0,404
24	0,405	0,914	0,445	2,246	**69**	0,934	0,358	2,605	0,384
25	0,423	0,906	0,466	2,145	**70**	0,940	0,342	2,747	0,364
26	0,438	0,899	0,488	2,050	**71**	0,946	0,326	2,904	0,344
27	0,454	0,891	0,510	1,963	**72**	0,951	0,309	3,078	0,325
28	0,469	0,883	0,532	1,881	**73**	0,956	0,292	3,271	0,306
29	0,485	0,875	0,554	1,804	**74**	0,961	0,276	3,487	0,287
30	0,500	0,866	0,577	1,732	**75**	0,966	0,259	3,732	0,268
31	0,515	0,857	0,601	1,664	**76**	0,970	0,242	4,011	0,249
32	0,530	0,848	0,625	1,600	**77**	0,974	0,225	4,331	0,231
33	0,545	0,839	0,649	1,540	**78**	0,978	0,208	4,507	0,213
34	0,559	0,829	0,675	1,483	**79**	0,982	0,191	5,145	0,194
35	0,574	0,819	0,700	1,428	**80**	0,985	0,174	5,67	0,176
36	0,588	0,809	0,727	1,376	**81**	0,988	0,156	6,31	0,158
37	0,602	0,799	0,754	1,327	**82**	0,990	0,139	7,11	0,141
38	0,616	0,788	0,781	1,280	**83**	0,993	0,1219	8,14	0,1228
39	0,629	0,777	0,810	1,235	**84**	0,995	0,1045	9,51	0,1051
40	0,643	0,766	0,839	1,192	**85**	0,996	0,0872	11,4	0,0875
41	0,656	0,755	0,869	1,150	**86**	0,998	0,0698	14,3	0,0699
42	0,669	0,743	0,900	1,111	**87**	0,999	0,0523	19,1	0,0524
43	0,682	0,731	0,933	1,072	**88**	0,999	0,0349	28,6	0,0349
44	0,695	0,719	0,966	1,036	**89**	1,000	0,0175	57,3	0,0175
45	0,707	0,707	1,000	1,000	**90**	1,000	0,0000	-	0,0000

JOGAPLAR WE GÖRKEZMELER

1-nji tema. 5. 50°; 130°; 133°; 97°. **6.** 65°; 70°; 45°. **7.** 105°; 130°; 125°. **8.** 35°; 35°; 110°. **9.** 94°; 56°; 30°. **10.** 110°; 130°; 120°. **11.** *Görkezme:* dört üçburçlugyň her biriniň taraplary ilkinji üçburçlugyň degişli taraplarynyň ýarysyna deň. **12.** *Görkezme: DF* kesim *ABH* üçburçlugyň hem, *CEB* üçburçlugyň hem orta çyzygy bolýar. **13.** *Görkezme: ANC* we *CKA* üçburçluklaryň hem-de içki atanak burçlaryň deňligiden peýdalanyň.

2-nji tema. 2. a) $\sqrt{34}$ ýa-da ≈ 5,8 *cm*; b) $14\sqrt{2}$ *m*; ç) ≈ 21,5 *cm*; d) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ *cm*; e) $\sqrt{2}$ *cm*; ä) $\sqrt{13}$ *cm*. **4.** a) $\sqrt{21}$ *cm*, $\sqrt{5}$ *cm*; b) $\sqrt{21}$ *cm*, $\sqrt{22}$ *cm*; ç) $\sqrt{2}$ *cm*, $\sqrt{3}$ *cm*. **5.** 12 *cm*. **6.** a) $\sqrt{10}$ *cm*; b) $2\sqrt{5}$ *cm*; ç) $\sqrt{33}$ *m*. **8.** b), *d) we.* ä) **9.** hemmesi. **10.** 225. **11.** 5 *cm*. **12.** $\sqrt{27}$ *m*. **14.** b) ≈ 4,3 *m*; ç). ≈ 2,23. **15.** a) 8,62 *m*; b) ≈ 5,97 *m*. **16.** ≈ 1,84 m^2. **17.** ≈ 105,6 *m*. **18.** ≈ 102,5 km. **19.** ≈ 48,4 km.

3-nji tema. 1. a) 11,7 *m*; b) 35 *mm*; ç) 6,2 *km*; d) 172 *cm*; e) 4(*x*-1) *cm*; ä) (4*x*+2) *m*; g) (13*x*+2) *km*; f) (6*y*-8) *cm*; *g)* 8*x km* . **2.** a). ≈ 7,967 *cm*; b) ≈ 44,329 *m*; ç) ≈ 409,86 *mm*. **3.** a) Hawa; b) Ýok; ç) Hawa; d) Hawa. **4.** 0,8 *m*; 24,64 m^2; 21,12 m^2. **5.** ≈ 50 gezek. **7.** 17,5 *cm*; 10,5 *cm*; 38,1 *cm*; 59,1 *cm*. **8.** 91,5 *m*.

4-nji tema. 1. *c*. **2.** a)*C*; b) *A* ; **3.** 8 sany , 2,4m. **5.** ≈ 53,4 *m*. **6.** ≈ 19,25 m^2. **9.** 12 sany **10.** Birinjisinde. **11.** 80 sany. **12.** 7 dm^2. **14.** a)180 dm^3; b)105 cm^3 ç)1364 cm^3. **15.** 1,8 m^3. **16.** a) 22 *cm*; b) 20 *cm we* 24 cm^2; c) 96 cm^3. **20.** a) $4\sqrt{2}$; b) $2\sqrt{21}$; ç) h= $2\sqrt{7}$. **21.** a) $(384+80\sqrt{5})$ cm^2, 640 cm^3; b) 84 cm^2, 36 cm^3. ç) $(12\sqrt{34}+156)$ m^2, 180 m^3. d) $36564+306\sqrt{97}$ cm^2, 404838 cm^3.

6-njy tema. 2. Üçburçluklar meňzeş. **4.** 5; 8; $\frac{1}{2}$. **5.** 72; 162; 90.

7-nji tema. 3. 12 *m*. **4.** 7,5 *cm*; 12,5 *cm*; 15 *cm*. **6.** 73,5 m^2; 37,5 m^2. **7.** Üçburçluklar meňzeş.

8-nji tema. 3. a) 4,5; b) 10,5; ç) 4,5. **4.** a) 10; b) 6; c) 4,5. **5.** a) 5 *cm*, 3,5 *cm*; b) $5\frac{5}{7}$ *cm*, $2\frac{2}{7}$ *cm*. **6.** a) 8; b) 3,5; ç) 12,5. **8.** 12 *cm*.

9-njy tema. 3. a) hawa; b) ýok; ç) ýok. **4.** $2\frac{1}{3}$ *cm*, 9. **5.** a) 15 *cm*; 20 *cm*; b) 24 *cm*; 18 *cm*; ç) 144 cm^2; 256 cm^2.

10-njy tema. 2. hawa. **3.** a) we ç); d) we e). **4.** 108 cm^2. **5.** 4 *cm*; 6 *cm*. **7.** 4,8 *cm*. **9.** 12.

11-nji tema. 1. a) we d); b) we e); g) we ä). **2.** 36 *m* ýa-da 20,25 *m*. **3.** 12 *cm*; 14 *cm*. **5.** $\frac{5}{11}$5 *cm*. **7.** 4 *m* . **8.** 16 *m* **9.** 8,4 *m*.

12-nji tema. 3. a) 15; b) $3\frac{2}{11}$ ç) $3\frac{5}{17}$ **4.** 18 *cm*; 6 *cm*. **5.** 29 dm^2. **6.** 6 *dm*. **7.** *m*:*n*. **10.** Hawa.

13-nji tema. 1. $3\frac{3}{17}$ *m*; 13,6 *cm*. **7.** *n*:*m*. **8.** a) *S* :4; b) *S* :2; ç) *S* :4. **9.** 30. **10.** 57,75.

14-nji tema. II. 1. 12 cm^2. **2.** 8,4. **3.** 2,4. **4.** 24. **5.** 8. **6.** 1,6. **7.** 18 *mm*. **8.** a)4; b)10; ç)32. **9.** Hawa. Üçburçluklaryň meňzeşliginiň 2-nji nyşanyna görä. **10.** 16. **11.** Hawa, *k*=2. **12.** 24 *mm*. **13.** a) 36cm^2; b)54 mm^2. **14.** a) ; b) . **15.** a) 7; b) 7. **16.** 6*m*. **17.** 12 *m*.

15-nji tema. 1. a)(1;-1); b)(-2;3); ç)(0;-4). **2.** (-1;5). **4.**(0;-3). **5.** (-1;-8). **6.** Hawa. **7.** Ýok. **8.** BB_1 ga.

16-njy tema. 1. a) *Ox* okuna görä simmetriýada: (1;-2), (0;-2), (2;-2). b) *Oy* okuna görä simmetriýada: (-1;2), (0;2), (-2;2). **2.** *Ox* okuna görä. **4.** Degişlilikde: 2 sany, 4 sany, 2 sany, 1sany, 1sany. **8.** BAP, MUM

17-nji tema. 1. (8;3). **3.** (2;-5), (-2;-2), (6;-12). **6.** Gönüburçluk, kwadrat, parallelogramyň simmetriýa merkezi - diagnallarynyň kesişme nokadynda, göni çyzygyň simmetriýa merkezi - onuň erkin nokadynda.

12. a) oka görä simmetriýa (bir).
b) merkezi simmetriýa, oka görä simmetriýa (4 sany).
ç) merkezi simmetriýa.
d) oka görä simmetriýa (5 sany).
e) merkezi simmetriýa, oka görä simmetriýa (6 sany)
13. a) oka görä simmetriýa:
M, X, V, T, Y, V, W, D, B, H, K, C, I, E, A. b) merkezi simmetriýa: N, S, Z, X, H, I.
14. a) 180°-a; b) Ýok; ç) Ýok; d) 90°-a; e) Ýok; ä) 120°-a.
15. a) $\frac{360^\circ}{7}$; b) 60°; c) 360°. **17.** 15

18-nji tema. 5. 1 *km* 750 *m*. **8.** 7,2 *cm*. **9.** $k=\frac{1}{2}$ ýa-da $k=2$.

19-njy tema. 4. $k=2$. **5.** 6 cm^2; 24 cm^2. **6.** 104 cm^2. **7.** Iki ýagdaýda-da $k=1$. **8.** 1,2 m^2. **9.** 16 *cm*, 32 *cm*.

20-nji tema. 4. $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{9}$. **5.** X_1X we Y_1Y şöhleleriň kesişme nokady gomotetiýa merkezidir. **6.** $OX_1=2\cdot OX$. **7.** *Görkezme:* Temada çözülen meseleden peýdalanyň.

21-nji tema. 4. a) $P_2=42$; $k=\frac{1}{2}$; b) $S_1=12$, $k=2$; d) $P_1=150\sqrt{2}$, $k=\sqrt{2}$; e) $P_1=10$, $S_2=216$.

22-nji tema. 1. ≈6,94 *m*. **2.** 300 *m*. **3.** ≈72 *m*. **4.** 6,6 *m*.

23-nji tema. 1. 9. **2.** $P_2=39$ *dm*. **3.** 8 *m*. **4.** 24 dm^2. **6.** *Görkezme: ABC* üçburçluk çyzyň, köpburçluklar gurmak temasyndaky 1-nji meseleden peýdalanyp, çyzylan üçburçlugyň taraplaryndan üç esse kiçi üçburçluk guruň.
9. 72°; 72°; 36°. **11.** 12 cm^2. **12.** 150 000 000 *km*. **13.** a) Hawa; b) Hawa. **15.** 6 *cm*, 12 *cm*, 18 *cm*. **16.** 84 *m*.

24-nji tema. II. 1. 8 *cm*. **2.** $4\frac{4}{9}$*cm*. **3.** 48 *m*. **4.** 4 *cm*; 0,5 cm^2. **5.** $5\frac{1}{3}$*m*. **6.** 867 *km*. **III. 7.** 7,5 *m*. **8.** 6 *cm*. **9.** a) 7,5 *cm*; b) 6 *cm*; d) 16,2 *cm*. *Gyzykly meseleler:* **1.** Üýtgemeýär. **2.** a) Hawa; b) Ýok. **3.** *Görkezme:* Çyzgyç bilen her bir gurjagyň boýuny ölçäň we olaryň gatnaşygyny tapyň.

25-nji tema. 1. sinα>0, cosα<0, tgα<0, ctgα<0. **5.** a) 1; b) 1; d) 1. **6.** 3,5 *cm*. . **7.** a) $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$; b) $\pm\frac{\sqrt{15}}{4}$; d) 0. **8*.** a) 30°; b) 135°; d) 150°.

26-njy tema. 2. 36 cm^2. **3.** 24 *cm*. **4.** a) $6\sqrt{3}$; b) 30; d) $\frac{105\sqrt{3}}{4}$. **5.** $(24+4\sqrt{3})$ *cm*; $(24+8\sqrt{3})$ cm^2. **6.** $10\sqrt{3}$ *cm*. **7.** a) $\frac{\sqrt{3}}{6}$; b) $\frac{1}{2}$; d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **8.** ≈807 m^2. **9.** ≈88 *m*.

10. 1000, 37°. **12.** 2°. **13.** 34°. **14.** $2\sqrt{3}$; $4\sqrt{3}$. **15.** R = $3\sqrt{3}$ *cm; BO* = $6\sqrt{3}$. **16.** 5 *cm*. **17.** 12, $24\sqrt{3}$. **18.** 20 *cm*, 200 cm^2. **19.** 4, $16\sqrt{3}$. **20.** 30°; 60°. **22.** 12 *cm*; $4\sqrt{3}$ *cm*; $8\sqrt{3}$ *cm*. **23.** 32 *cm*^{2}.

27-nji tema. **2.** a) 6 *cm*^{2}; b) 73,5 *cm*^{2}; d) 6 *cm*^{2}. **3.** 36 *cm*^{2}. **4.** $49\sqrt{2}$ *cm*^{2}. **5.** $54\sqrt{3}$ *cm*^{2}. **6.** $2\frac{2}{3}$*cm*; $4{,}5\sqrt{2}$ *cm*. **7.** $S = \dfrac{h_b \cdot h_c}{2\sin\alpha}$ **8.** $4{,}8\sqrt{3}$ *cm*.

28-nji tema. **2.** a) $BC = 6$; b) $AB = 8\sqrt{2}$; d) $AC = 7\sqrt{2}$. **3.** a) $\sin C = \frac{1}{3}$; b) $\sin A = \frac{7}{16}$; d) $\sin B = \frac{2}{3}$. **4.** 4,8 *dm*. **5.** 30° ýa-da 150°. **6.** Mümkin. **7.** $AB \approx 21{,}1$ *m*; $\angle B \approx 37°$, $\angle C \approx 76°$. **8.** 76°; 26,1 *cm*; 23,8 *cm*.

29-njy tema. **2.** a) $\sqrt{13}$ *cm*; b) 4 *m*; d) $\sqrt{283}$ *dm*. **3.** $\frac{1}{5}$; $\frac{19}{35}$; $\frac{5}{7}$. **4.** $2\sqrt{13}$ *cm* ýa-da $2\sqrt{109}$ *cm*. **5.** $\sqrt{31}$ *cm*, $\sqrt{91}$ *cm*. **6.** $\sqrt{109}$ *cm*, $\sqrt{39}$ *cm*. **7.** *Görkezme: ADB* we *BDC* üçburçluklara kosinuslar teoremasyny ulanyp, a^2 we c^2-y tapyň, soňra bu deňlikleri agzama-agza goşuň. **8.** $\frac{\sqrt{106}}{2}$ *cm*; $\frac{\sqrt{151}}{2}$ *cm*; $\frac{\sqrt{190}}{2}$ *cm*.

30-njy tema. **1.** $\angle B$ we $\angle C$. **2.** *AB* we *BC*. **3.** a) ýiti burçly; b) gönüburçly; d) kütek burçly. **4.** a) $8\frac{1}{8}$; b) $8\frac{1}{8}$; d) $24\frac{1}{6}$; e) $\frac{35\sqrt{6}}{24}$. **6.** *Görkezme:* Sinuslar teoremasyndan peýdalanyň. **7.** *Görkezme:* 6-njy meselä meňzeş çözülýär. **8.** *Görkezme:* Sinuslar teoremasyndan peýdalanyň.

31-nji tema. **1.** a) $10\sqrt{3}$; b) $28\sqrt{2}$; d) 12; e) ≈0,3064. **2.** a) —2; b) 0; d) 2. **3.** a) 8; b) 24; d) 8; e) 0. **5.** a) —7,5; d) 0. **6.** $a \perp b$, $c \perp d$.

32-nji tema. **1.** a) $\alpha=90°$, $c=\frac{5\sqrt{2}}{2}$. b) $\gamma\approx45°$; $a\approx27{,}3$, $b\approx24{,}5$; d) $\alpha=20°$; $b\approx65.8$; $c\approx88{,}6$; e) $\gamma=119°$; $a\approx8{,}1$; $b\approx5{,}8$. **2.** a) $c\approx5{,}29$; $\alpha\approx79°6'$; $\beta\approx138°21'$; b) $c\approx53{,}09$; $\alpha\approx11°39'$; $\beta\approx38°21'$; d) $a\approx19{,}9$; $\beta\approx58°19'$; $\gamma\approx936°41'$; e) $a\approx22{,}9$; $\beta\approx21°$; $\gamma\approx15°$. **3.** a) $\alpha\approx29°$; $\beta\approx47°$; $\gamma\approx104°$; b) $\alpha\approx54°$; $\beta\approx13°$; $\gamma\approx113°$; d) $\alpha\approx34°$; $\beta\approx44°$; $\gamma\approx102°$; e) $\alpha\approx39°$; $\beta\approx93°$; $\gamma\approx48°$.

33-nji tema. **1.** a) $2\sqrt{3}$ *cm*; b) 16 *cm*; d) $\frac{ab\sqrt{2}}{4}$. **2.** $4\sqrt{2}$ *m*; 8 *m* we $4+4\sqrt{3}$ *m*. **3.** $50\sqrt{3}$ *kg*. **4.** 14 *cm*. **5.** $2\sqrt{14}$ *cm*. **6.** $6\sqrt{3}$ *cm*. **7.** 50 *cm*.

34-nji tema. **1.** ≈10,8 *m*. **2.** ≈15 *m*. **3.** ≈ 43,4 *m*. **4.** ≈35°. **5.** ≈ 73,2 *m*. **6.** ≈ 49 *m*. **7.** Asfalt ýoldan.

35-nji tema. **II. 1.** $3\sqrt{6}$, $3\sqrt{2}$. **2.** $\frac{111}{120}$; 0,89; —0,65. **3.** $2\sqrt{7}$ *cm*; $\frac{2\sqrt{21}}{3}$ *cm*. **4.** $30\frac{1}{30}$*cm*. **5.** 28 *cm*. **6.** 8 *cm*^{2}; $(4+4\sqrt{5})$ *cm*; $h_a = 4$ *cm*, $h_b = 0{,}8\sqrt{5}$ *cm*. **7.** $2\sqrt{13}$. **8.** a) ýiti burçly; b) gönüburçly, d) kütek burçly. **9.** 63 *cm*^{2}. **10.** ≈3,7 *cm*. **11.** 7 *cm*. **12.** 6. **13.** 0. **14.** —9. **15.** 135°. **16.** $OC\approx9{,}6$. **17.** $(24+24\sqrt{3})$ *cm*. **18.** 5. **III. 1.** ≈109°. **2.** $\gamma=100°$, $a\approx3{,}25$; $c\approx6{,}43$. **3.** 6,25; 14,76.

36-njy tema. **2.** a) Islendik üçburçluk töweregiň içinden çyzylmagy mümkin; b) Garşylykly burçlary jemi 180° bolan dörtburçluklar. **3.** Bir duga direlýän burçlar deň. **4.** 10 *cm*. **5.** 672 *cm*^{2}. **6.** a) $10\sqrt{3}$ *cm*; b) $10\sqrt{2}$ *cm*; d) $10\sqrt{2}$ *cm*; $10\sqrt{2}$ *cm*; 20 *cm*. **7.** $8\frac{1}{3}$*cm*. **8.** ΔABF-da, $\angle BAF+\angle AFB=90°$, $\angle ABF = 90°$. Diýmek, *AF* – diametr. **9.** Garşylykly burçlary jemi 180°, ýagny töwerege içki çyzmak mümkin. **10.** *Görkezme:* Bir esas we bir gapdal tarapyň orta perpendikulýary kesişen nokat töweregiň merkezi bolýar.

37-nji tema. **2.** 7,2 *cm*. **3.** a) 16,6; b) 22; d) 22,6. **4.** a) 2,5; b) 3,5; d) 2. **8.** 6 *cm*.

38-nji tema. **3.** a) 60°; b) 108°; d) 120°; e) 144°; ä) 160°. **4.** a) 120°; b) 72°; d) 120°; e) 36°; f) 30°. **5.** a) 3; b) 4; d) 8; e) 12.

39-njy tema. **1.** 3 *cm* we $3\sqrt{2}$ *cm*. **2.** $\sqrt{3}$ we $2\sqrt{3}$. **7.** a) 6; b) 12; d) 10; e) 20; ä) 5.

40-njy tema. **3.** 8 *cm*; $8\sqrt{2}$ *cm*; $8\sqrt{3}$ *cm*; $8\sqrt{2+\sqrt{3}}$ *cm*; 16 *cm*.

4. $\frac{8\sqrt{6}}{3}$ *cm*; **5.** a) $20\sqrt{2}$ *cm*; b) 40 *cm*. **6.** $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ *cm*.

41-nji tema. **I.** **1.** E; **2.** D; **3.** D; **4.** B; **5.** B; **6.** E; **7.** E. **III.** **1.** $\sqrt{3}:4:6\sqrt{3}$. **2.** 3:4. **3.** a) ≈5,780 *cm*; b) ≈4,142 *cm*; d) ≈2,679 *cm*. **4.** $S=\sqrt{2}R^2$. **5.** 24 cm^2. **IV.** **1.** 4 *cm*; 13 *cm*. **2.** a) 80 *cm*; b) $20\sqrt{2}-\sqrt{3}$ *cm*; $40\sqrt{2}-\sqrt{3}$ *cm*; d) 200 cm^2. **3.** $4\sqrt{3}$ *cm*; 8 *cm*. 4. $\frac{27\sqrt{3}}{4}$ cm^2.

42-nji tema. **2.** a) 3 esse artýar; b) 6π *cm*-e artýar; d) 3 esse kemelýär; e) 6π *cm*-e kemelýär. **3.** 6369 *km*. **4.** a) $\frac{2\pi\sqrt{3}a}{3}$; b) $\pi\sqrt{a^2+b^2}$; d) $\frac{2\pi b^2}{\sqrt{4b^2-a^2}}$. **5.** a) πa; b) $\pi c(\sqrt{2}-1)$; d) $\pi c(\sin\alpha+\cos\alpha-1)$. **6.** 1,5 *m*. **7.** 66348 esse.

43-nji tema. **1.** a) π *cm*; b) 1,5π *cm*; d) 3π *cm*; e) 4π *cm*. **2.** a) $\frac{2\pi}{9}$; b) $\frac{\pi}{3}$; d) $\frac{5\pi}{12}$. **3.** a) ≈69°; b) 120°; d) 150°. **4.** a) $\frac{5\pi}{8}$ *cm*; b) 2π *cm*; d) $\frac{15\pi}{4}$ *cm*; **5.** a) 4π; b) 16π. **7.** 2.

44-nji tema. **3.** k^2 esse artdy; b) k^2 esse kemeldi. **4.** 6,25π cm^2; 12,5π cm^2. **5.** 2,25π cm^2; 9π cm^2. **6.** $(\pi-2)R^2$. **7.** 21,25 π cm^2. **8.** 18,75 cm^2.

45-nji tema. **3.** a) $\frac{49}{12}\pi$ cm^2; $\frac{49(\pi-3)}{12}$ cm^2; b) 6,125π cm^2; $\frac{49(\pi-2\sqrt{2})}{8}$ cm^2; d) $\frac{49\pi}{3}$ cm^2; $\frac{49(4\pi-3\sqrt{3})}{2}$ cm^2; e) $\frac{49\pi}{4}$ cm^2; $\frac{49(\pi-2)}{4}$ cm^2. **4.** a) $a^2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{8}\right)$; b) $a^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$ d) $\frac{3\sqrt{3}-\pi}{2}$ a^2; **5.** π cm^2; 3π cm^2; 5π cm^2; 7π cm^2. **6.** $\frac{25(2\pi-3\sqrt{3})}{3}$ cm^2; $\frac{25(10\pi-3\sqrt{3})}{3}$ cm^2; **7.** $\frac{75(4\pi-3\sqrt{3})}{2}$. cm^2. **8.** $S_1<S<S_2$; 300 cm^2 < 314 cm^2 < 321,48 cm^2.

46-njy tema. **1.** Tegelegiňki uly. **2.** $\frac{160}{3}\pi$ cm^2. **3.** 5,76π cm^2. **4.** 8.(π—2) cm^2. **6.** 6π cm^2; 10π *cm*.

47-nji tema. **II.** **1.** $6\sqrt{2+\sqrt{2}}$. **2.** $\frac{8\pi}{3}$ *dm*. **3.** 30 *cm*. **4.** 90°. **5.** 3. **6.** π we 6,25π. **7.** $\frac{10\pi+3\sqrt{3}}{2\pi-3\sqrt{3}}$. **8.** $\frac{2\sqrt{3}}{\pi 0}$ **9.** $\frac{9\sqrt{3}-2\pi}{6}a^2$. **10.** 1,5π. **11.** 7. **12.** ≈9π—26,04. **13.** π. **14.** $54\sqrt{3}-24\pi$. **15.** $\frac{3\pi}{8}$. **III.** **2.** $8\sqrt{3}$ *cm*. **3.** a) $\frac{18}{\pi}$ *cm*; b) $\frac{216}{\pi}$ cm^2; d) $\frac{216\pi+81\sqrt{3})}{\pi^2}$ cm^2.

48-nji tema. **3.** $5\sqrt{2}$ *cm*. **4.** 12 *cm*. **5.** 44 *m*, 60 *m*. **7.** 1:7. **8.** $AB\cos\alpha$.

49-njy tema. **1.** a) 30 *cm*, 12 *cm*; b) 9 *cm*, 12 *cm*, 21 *cm*; d) 3 *cm*, 15 *cm*, 3 *cm*, 21 *cm*. **3.** 6 *cm*; 10,5 *cm*. **4.** 9 *cm*, 12 *cm*, 15 *cm*, 18 *cm*. **5.** 60°. **6.** 21 *cm*. **7.** 20 *cm*.

50-nji tema. **1.** *Görkezme:* $\Delta ACD \backsim \Delta CBD \backsim \Delta ABC$. **2.** 25 *cm*, 15 *cm*, 20 *cm*. **3.** $9\frac{3}{5}$ *cm*. **4.** a) 5, 4; b) 24, 25; d) 8,10. **5.** 16:25. **6.** 56,16 cm^2. **7.** 60 cm^2. **8.** $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{9}$; $\frac{4}{9}$.

51-nji tema. **2.** *Görkezme:* a) katetleri *a* we *b* bolan gönüburçly üçburçluk guruň; b) gipotenuzasy *a*, bir kateti *b* bolan gönüburçly üçburçluk guruň. **3.** *Görkezme:* Katetleri $AB = BC = 1$ bolan ΔABC guruň. Soň kateti

$CC_1=1$ we $\angle C_1=90°$ bolan ΔBCC_1 guruň we başgalar. **4.** a) 20; b) 45; d) 37,5. **5.** 225π *cm*^{2}. **6.** 180 *cm*^{2}. **7.** 25:9. **9.** $OC \geq OD$ bolany üçin deňsizlik hemişe dogry.

52-nji tema. **1.** a) 6,25; b) 12; d) 0,25. **2.** a) 8 *cm*; b) 2,5 *cm;* d) 0,9 *cm*. **3.** a) 4 *dm*; b) 4 *dm*. **4.** 8 *cm*. **6.** 9 *dm*; 16 *dm*.

53-nji tema. **1.** 10 *cm*. **2.** 2 *cm*. **3.** a) 2,5; b) 4; d) 2. **4.** a) $4\sqrt{6}-1$ *cm*; b) 6 *cm*. **5.** 1:6. **6.** 6 *cm*. **7.** 3. **8.** 1:4.

54-nji tema. **II.** **1.** 18 *cm*; 32 *cm*. **2.** 4 *cm*; **3.** 8 *cm*; **4.** 6,4 *dm*. **5.** 8 *cm*. **6.** 1,5. **7.** 5. **8.** 6. **9.** 45 *dm*^{2}. **10.** 4 *cm*. **11.** 8 *cm*. **12.** 6. **13.** 60°. **14.** 45°. **15.** 4:9.

III. **1.** 8 *cm*. **2.** 5 *dm*. **3.** 4 *cm*; 8 *cm*.

55-nji tema.1. a) 9; b) 4 *cm*^{2}; d) 3,5 *cm*; e) $\frac{1}{2}$ $TB-CA$; ä) 0,2. **2.** $\Delta CMH \backsim \Delta BCA$.

Dersligi düzmekde peýdalanylan we goşmaça öwrenmek maslahat berilýän okuw edebiýatlary we elektron resurslar

1. A’zamov A., B. Haydarov. Matematika sayyorasi. Toshkent. «O‘qituvchi», 1993.
2. Александров А.Д. "Геометрия -9", учебник, Москва. Просвешение", 2013.
3. Атанасян С. "Геометрия 7-9 классы", учебник, Москва. Просвешение", 2002.
4. Бевз Г.П. и др. "Геометрия 9" учебник, Киев, "Вежа", 2007
5. Билянина О.Я. и др. "Геометрия 8" учебник, Киев, "Генеза", 2010.
6. Истер О.С. "Геометрия 9" учебник, Киев, Освита, 2007.
7. Мерзляк А.Г. и др., "Геометрия 9" учебник, Харьков, Гимназия, 2008.
8. Перельман Я.И. Қизиқарли геометрия, Тошкент. Ўқитувчи, 1981.
9. Погорелов А.В. "Геометрия 7-9", учебник, Москва. Просвешение", 2004.
10. Штейнгауз Г. Математический калейдоскоп, Москва. Наука, 1993.
11. Daniel C.Alexander, Elementary geometry for college students, Canada, Brooks/ Cole, Cengage Learning, 2011.
12. Mal Coad and others, Mathematics for the international students, Haese and Harris publocations, Australia, 2010.
13. Jennie M. Bennett, «Pre-Algebra» Holt, Rinehart and Winston, New York, 2004
14. http://www.uzedu.uz - Xalq ta’limi vazirligining axbarot ta’lim portali.
15. http://www.eduportal.uz - Multimedia merkezi axbarot ta’lim portali.
16. http://www.matematika.uz - Masofadan turib o‘qitish sayti (uzbek tilida).
17. http://www.problems.ru/ Matematikadan meseleler izlash tizimi (rus tilida).
18. http://www.ixl.com - Masofadan turib o‘qitish sayti (ingliz tilida).
19. http://www.mathkang.ru - "Kenguru" xalqaro matematik tanlov sayti (rus tilida).
20. http://www.khanakademy.org -"Xon akademiyasi" masofaviy ta'lim sayti (ingliz tilida)
21. http://www.brilliant.org – Matematikadan masofaviy ta’lim sayti (ingliz tilida).
22. http://www.merkez.tdi.uz - Ta'lim sifatini baholash bo‘yicha halkara tadqiqotlarni amalga oshirish milliy merkezi sayti.
23. http://www.occd.org/pisa - Iqtisodiy hamkorlik va taraqqiyot tashkiloti sayti, PISA – tadqiqotlarning ochiq materiallari.

Haýdarow Bahadir Kaýumowiç
Geometriýa: 9-njy synp üçin derslik/B.K.Haýdarow, E.S.Sarykow, A.Ş.Koçkarow. — D.:, 2019.—160 s.
X 18
K. Haýdarow, Bahadir.
ISBN 978-9943-5875-9-5

UDK 514.1(075)
BBK 22.151ýa7

Boxodir Qayumovich Xaydarov,
Ergashvoy Sotvoldiyevich Sariqov,
Atamurod Shamuratovich Qo‘chqorov

GEOMETRIYA

9-sinp uchun darslik

To‘rtinchi nashri
(Turkman tilida)

Original-maket "Huquq va Jamiyat" nashriyoti tomonidan tayyorlandi.

Terjime eden	*K. Hallyýew*
Redaktor	*J.Metýakubow*
Çeper redaktor	*A.Umarowa*
Baş dizaýner	*H&J dizaýn topary*
Korrektor	*J.Metýakubow*
Sahaplaýjy	*D.Iskandarbekow*

Litsenziya AI №022, 27.10.2018 yil.

Çap etmäge 2019-njy ýylyň 5-nji awgustynda rugsat edildi. Möçberi $70\times100^{1}/_{16}$.
Tayms garniturasy. Kegli 10. Ofset çap ediliş usuly. Şertli çap listi 11,7.
Neşir listi 11,83. 1030 nusgada çap edildi. Buýurma № 19-20.

"Huquq va Jamiyat" nashriyotining matbaa bo‘limi
Toshkent, Yunusobod 6, Jumamasjid ko‘chasi.
Guvohnoma №10-2750, 13.06.2017 yil

Kärendesine berlen dersligiň ýagdaýyny görkezýän jedwel

T/n	Okuwçynyň ady, familiýasy	Okuw ýyly	Dersligiň alnandaky ýagdaýy	Synp ýolbaşçysynyň goly	Dersligiň tabşyrylandaky ýagdaýy	Synp ýolbaşçysynyň goly
1						
2						
3						
4						
5						

Derslik kärendesine berlip, okuw ýylynyň ahyrynda gaýtarylyp alnanda ýokardaky jedwel synp ýolbaşçysy tarapyndan aşakdaky baha bermek ölçeglerine esaslanylyp doldurylýar:

Täze	Dersligiň birinji gezek peýdalanmaga berlendäki ýagdaýy.
Ýagşy	Sahaby bütin, dersligiň esasy böleginden aýrylmandyr. Ähli sahypalary bar, ýyrtylmadyk, goparylmadyk, sahypalarynda ýazgylar we çyzyklar ýok.
Kanagatlanarly	Kitabyň daşy ýenjilen, ep-esli çyzylan, gyralary gädilen, dersligiň esasy böleginden aýrylan ýerleri bar, peýdalanyjy tarapyndan kanagatlanarly abatlanan. Goparylan sahypalary täzeden ýelmenen, käbir sahypalary çyzylan.
Kanagatlanarsyz	Kitabyň daşy çyzylan ýyrtylan, esasy böleginden aýrylan ýa-da bütinleý ýok, kanagatlanarsyz abatlanan. Sahypalary ýyrtylan, sahypalary ýetişmeýär, çyzylyp taşlanan. Dersligi dikeldip bolmaýar.