

Б.Хайдаров, Э.Сариқов, А.Қўчқоров

ГЕОМЕТРИЯ



*Китоби дарсӣ барои донишомӯзони синфҳои
9-уми мактабҳои миёнаи таълими умумӣ
Наири сеюм
Вазорати таълими халқи Республикаи
Ўзбекистон ба сифати китоби дарсӣ тавсия
намудааст*

НДУ
«O‘zbekiston milliy ensiklopediyasi»

Тошканд — 2014

UO'K 514.1(075)
КВК 22.151ya721
Х-33

Дар зери тахрири доктори илмҳои физика-математика, профессор А.Аъзамов

Муқарризон:

- А. Нарманов** — мудирӣ кафедраи геометрия ва математикаи амалии Донишгоҳи миллии Ўзбекистон, доктори илмҳои физика-математика;
- Г. Юсупова** — коркуни калони илмии Пажӯҳишгоҳи математикаи ФУ Ўзбекистон, номзоди илмҳои физика-математика;
- М. Акрамов** — муаллими тоифаи олии математикаи мактаби рақами 5-уми ноҳияи Паркенти вилояти Тошканд.
- М. Шониёзова** — муаллими математикаи мактаби рақами 300-и ноҳияи Сирғали шаҳри Тошкент.

Дар синфи 9-ум қисми планиметрияи геометрия — омӯзиши хосиятҳои шаклҳои геометрии ҳамвор давом дода мешавад. Дар он Шумо бо монандии шаклҳои геометрии муносибатҳои байни тарафҳо ва кунҷҳои секунҷаҳо, дарозии давра ва масоҳати доира, муносибатҳои метрикий дар секунҷа ва давра шинос мешавед.

Мазмунӣ китоби дарсии мазкури «Геометрия»-ро асоси низомии аксиоматикии қатъӣ ташкил медиҳад. Дар он баёни маводи назариявӣ бо забони содда ва раван ифода гардидааст. Барои ба воситаи мисолҳои ҳаётии гуногун фаҳмонда додани тамоми мавзӯву мафҳумҳо саъю кӯшиш зоҳир гаштааст. Саволҳое, ки пас аз ҳар як мавзӯ дода шудаанд, исботҳои зиёд, масъала ва мисолҳое, ки доирӣ сохтан ва ҳисобкуниҳо оварда шудаанд, донишомӯзонро ба фикрронии эҷодӣ водор месозад, барои амиқ гардидан ва мустаҳкамкунии донишҳои андӯхта ёрӣ мерасонад. Китоби дарсӣ бо ороиши ба худ хос ва тақдим гардидани маводҳои дарсӣ бо айёният фарқ мекунад. Барои беҳтар аз худ намудани маводи таълимӣ расму нақшаҳое, ки дар он оварда шудаанд, хизмат мерасонад.

**«Аз ҳисоби маблағҳои Бунёди максадноки китоби
республика ба ичора ҷоп шудааст».**

© «O'zbekiston milliy ensiklopediyasi»
НДУ, 2014.

© Нашриёти шабех ҚММ
«Хуқуқ ва Ҷамъиёт», 2014

ISBN 978-9943-07-307-4

МУНДАРИЧА

Такрори мавзӯҳо аз синфҳои 7—8

1. Секунҷаҳо	8
2. Секунҷаҳо (давомаш)	10
3. Чоркунҷаҳо	12
4. Чоркунҷаҳо (давомаш)	14

Боби I. Шаклҳои геометрии монанд

5. Монандии бисёркунҷаҳо	18
6. Секунҷаҳои монанд ва хосиятҳои онҳо	20
7. Аломати якуми монандии секунҷаҳо	22
8. Аломати дуоми монандии секунҷаҳо	24
9. Аломати сеюми монандии секунҷаҳо	26
10. Аломатҳои монандии секунҷаҳои росткунҷа	28
11. Татбиқи аломатҳои монандӣ барои исботкунии масъалаҳо	30
12. Ҳалли масъалаҳо	32
13. Дониши худро санчида бинед	34
14. Монандии шаклҳои геометрӣ	36
15. Хосиятҳои бисёркунҷаҳои монанд	38
16. Гомотетия ва монандӣ	40
17. Сохтани бисёркунҷаҳои монанд	42
18. Машғулияти амалӣ	44
19. Ҳалли масъалаҳо	46
20. Ҳалли масъалаҳо	48
21. Маълумот ва масъалаҳои иловагӣ доир ба боби I	49

Боби II. Муносибатҳои байни тарафҳо ва кунҷҳои секунҷаҳо

22. Таърифи синус, косинус, тангенс ва котангенс кунҷи тез	52
23. Ҳалли масъалаҳо	54
24. Ҳисобкунии синус, косинус, тангенс ва котангенс баъзе кунҷҳо	56
25. Ҳалли масъалаҳо	58
26. Синус, косинус, тангенс ва котангенс, ки кунҷҳояшон аз 0° то 180° мебошанд	60
27. Айниятҳои асосии тригонометрӣ	62
28. Айниятҳои асосии тригонометрӣ (давомаш)	64
29. Дониши худро санчида бинед	66
30. Бо ёрии синуси кунҷ ҳисоб кардани масоҳати секунҷа	70
31. Теоремаи синусҳо	72
32. Теоремаи косинусҳо	74
33. Баъзе татбиқҳои теоремаҳои синусҳо ва косинусҳо	76
34. Ҳисоб кардани кунҷи байни ду вектор	78

35. Ҳалли секунҷаҳо	80
36. Ҳалли масъалаҳо	82
37. Татбиқи усулҳои ҳалли секунҷаҳо дар амал	84
38-39. Маълумот ва масъалаҳои иловагӣ доир ба боби II	86

Боби III. Дарозии давра ва масоҳати доира

40. Бисёркунҷаҳои аз давра дарункашидашуда	90
41. Бисёркунҷаҳои аз давра берункашидашуда	92
42. Бисёркунҷаҳои мунтазам	94
43. Давраҳои ба бисёркунҷаи мунтазам дарун ва берункашидашуда	96
44. Вобастагии байни тарафҳои бисёркунҷаи мунтазам ва радиусҳои давраи дарун ва берункашидашуда	98
45. Дониши худро санчида бинед	100
46. Дарозии давра	102
47. Дарозии камони давра. Ченаки радиансии кунҷ	104
48. Масоҳати доира	106
49. Масоҳати қисмҳои доира	108
50. Ҳалли масъалаҳо	110
51. Маълумот ва масъалаҳои иловагӣ доир ба боби III	112

Боби IV. Муносибатҳои метрикӣ дар секунҷа ва давра

52. Проексия. Масофа аз нукта то порча	116
53. Хосиятҳои порчаҳои мутаносиб	118
54. Порчаҳои мутаносиб дар секунҷам росткунҷа	120
55. Бо ду порчаи додашуда сохтани порчаи мутаносиби миёна	122
56. Порчаҳои мутаносиб дар давра	124
57. Ҳалли масъалаҳо	126
58. Маълумот ва масъалаҳои иловагӣ доир ба боби IV	128

Боби V. Такрори курси планиметрия

59. Усули координатаҳо	132
60. Усули координатаҳо ва векторҳо	134
61. Давра ва доира	136
62. Такроркунӣ	138
63. Такроркунӣ	139
64. Такроркунӣ	141
65. Такроркунӣ	142
66. Такроркунӣ	143
67-68. Кори назоратии чамъбасти	144

Маълумот ва мафҳумҳои асосӣ доир ба планиметрия	146
--	-----

Ҷавобҳо ва нишондодҳо	154
------------------------------------	-----

САРСУХАН

Донишомӯзони гиромӣ!

Мо дар асри технологияҳои иттилоотӣ зиндагонӣ мекунем. Дар замири тағйиротҳои олашумуле, ки дар тараққиёти замонавӣ руҳ медиҳанд, албатта, ривочу раванқи илму фан ва техника хоб меравад. Дар ин гуна шароит вазифаи асосии Шумо, ҷавонон, аз авлоди муносиб будан ба аҷдодони бузурги худ, ҳамнафас ва баробари замон қадам задан ва фатҳи қуллаҳои баланди илму фан иборат аст. Дар ин бобат мавқеи математика беқийс мебошад.

Маълум аст, ки барои ба камол расондани шумоён, ҷавонон, математика ба сифати фанни таълимӣ дорои имкониятҳои калон мебошад. Он тафаккурро инкишоф дода, ақлатонро тез мекунад, фикрронии мантиқӣ, ҳислатҳои тезфикркуниро ташиқу медиҳад ва дар ҳисси ҳосил кардани малакаи оид ба дар вазъиятҳои гуногун қабул намудани қарорҳои оқилона, таҳлилу баровардани ҳуҷҷа тарбия менамояд.

Вазифаи асосии китоби дарсии «Геометрия»-и синфи 9-ум, ки дар даст доред, баробари омӯзиши хосиятҳои асосии шаклҳои геометрии ҳамвор аз болоравии ақлиатон оиди собитқадамона пеш рафтани фикрронии мантиқӣ иборат аст. Он барои ба ҳаёт татбиқ намудани дониш, маҳорат ва малакаи андӯхташуда кӯмак мерасонад.

Ҳангоми таълифи китоби дарсӣ аз намунаҳои таҷрибаҳои пешқадаме, ки дар дунё гирд омадаанд, истифода бурдем. Баробари ин ҳаракат кардем, ки ба арзишҳои ҷовидона ва шарқонаи ба сарзаминамон хос, ҳамчунин ба мероси аҷдодони бузургамон муроҷиат намоем.

Ба Шумоён ҳангоми таълим аз ин китоби дарсӣ, ки аз роҳи масъулиятноку бари ин шавқангез иборат аст, субот ва таҳаммулро таманно дорем. Донише, ки аз асосҳои геометрия мегиред, Шуморо ба сӯи баркамолӣ мебарад. Умедворем, ки дар бобати хизмат дар роҳи тараққиёти Ватанамон кӯмакрасонатон мегардад.

Аломатҳое, ки дар китоби дарсӣ истифода гардидаанд



— таърифи мафҳумҳои наवे, ки дохил мегарданд



— тавсифи теорема



— масъалае, ки ба таври намунавӣ ҳалли он нишон дода шудааст



— савол, масъала ва супориш



— супоришҳое, ки фаъолнокии до-нишомӯзонро пурзӯр мегардон-над ё ки дар гурӯҳҳо муҳокима мегарданд



— кори амалие, ки бо тартиби инфиродӣ ё гурӯҳӣ ба иҷро мерасанд



— маълумотҳои таърихӣ ва масъ-алаҳо



— масъалаҳои шавқовар ва муам-моҳо (кроссворд)



— манбаи маълумотҳое, ки аз Интернет тавсия мегарданд

8. — масъалаҳое, ки ҳалли онҳо ба сифати вазифаи хонагӣ тавсия гардидаанд

Тавзеҳоти схематикӣ теорема ё ки масъала

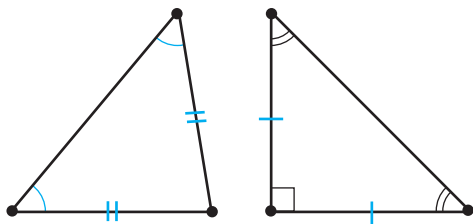


Маълумотҳое, ки бо шартӣ теорема ё ки масъала дода шудаанд



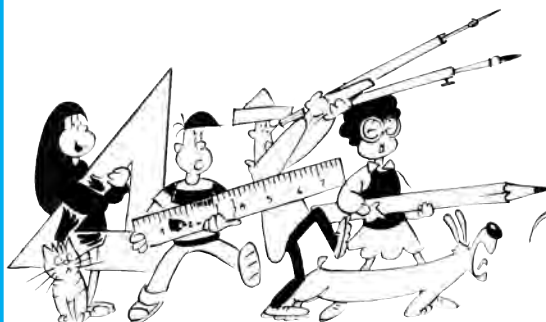
Хосиятҳои исботталаб лозим ё ки элементҳое, ки ёфтанишон талаб карда мешавад.

Аломатҳои алоҳидае, ки дар нақшаҳо қабул карда шудаанд



Кунҷҳои баробар дар нақшаҳо бо ранг-ҳои якхела ё ки бо камончаҳои ададашон якхела ҷудо карда мешаванд

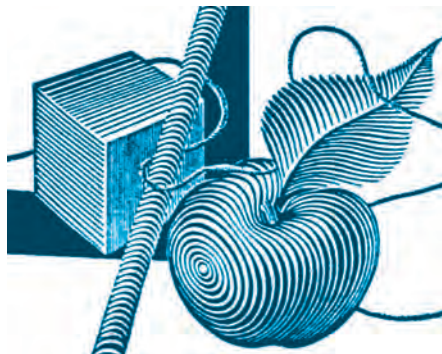
Порчаҳои дарозиашон баробар, ки бо хатчаҳои ададашон якхела нишон дода мешаванд.



Барои фатҳи геометрия ба пеш!



ТАКРОРЇ



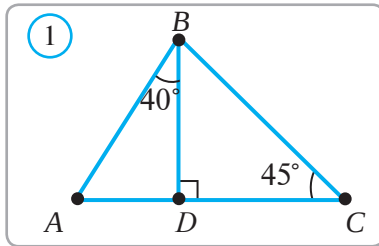
ТАКРОРИ МАВЗЎЪҲО АЗ СИНФҲОИ 7—8

- √ *Аз геометрияи синфҳои 7—8-ум мавзӯҳои гузаштаре такрор намуда донишҳои гирифтаатонро ба хотир меоваред ва малакаҳоятонро мустаҳкам мекунад.*
- √ *Ин ба Шумо барои бомуваффақият давом додани омӯзиши геометрия дар синфи 9-ум замина мегузорад.*

1

СЕКУНЧАҲО

Масъалаҳои боби мазкур барои ба хотир овардани шаклҳои геометрӣ ва хосиятҳои онҳо, ки дар синфҳои 7-8-ум омӯзонида шудаанд пешниҳод карда мешавад. Барои ҳалли масъалаҳо аз маълумотҳо дар бораи шаклҳо ва формулаҳои ифодакунандаи хосиятҳои онҳо, ки дар охири китоби дарсӣ оварда шудаанд, истифода бурдан мумкин аст.



Масъалаи 1. Дар баландии BD -и секунҷаи ABC гузаронида шудааст (расми 1). Агар $\angle ABD = 40^\circ$, $\angle BCD = 45^\circ$ бошад, кунҷҳои назди қуллаҳои A ва B -и секунҷаро ёбед.

Ҳалли он. 1) Дар секунҷаи росткунҷаи ABD $\angle ABD = 40^\circ$ ва аз ба 180° баробар будани суммаи кунҷҳои дохилии секунҷа

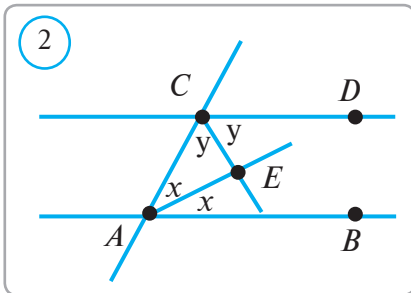
$$\angle A = 180^\circ - (90^\circ + 40^\circ) = 50^\circ.$$

2) Ҳангоми дар секунҷаи росткунҷаи BCD кунҷи $\angle BCD = 45^\circ$ будан

$$\angle DBC = 180^\circ - (90^\circ + 45^\circ) = 45^\circ.$$

Ҳангоми $\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$ будан $\angle B = 40^\circ + 45^\circ = 85^\circ$.

Ҷавоб: 50° , 85° .



Масъалаи 2. Кунҷи байни биссектрисаҳои кунҷҳои дарунии яктарафаи дар натиҷаи буриши ду хати рости параллел бо буранда ҳосил шударо ёбед.

Ҳалли он. Бигуздор хати рости AC хатҳои рости параллели AB ва CD -ро чун дар расми 2-юм тасвиршуда бурида бошад. Кунҷҳои дарунии яктарафаи BAC ва ACD дар нуктаи E бурида $\angle EAC = x$, $\angle ECA = y$ бошад, онҳо мувофиқи таърифи биссектрисаҳои кунҷ

$$\angle BAC = x + x = 2x, \quad \angle ACD = y + y = 2y.$$

Азбаски $AB \parallel CD$ аст, мувофиқи хосияти кунҷҳои дарунии яктарафа

$$2x + 2y = 180^\circ, \quad x + y = 90^\circ.$$

Акнун, аз ба 180° баробар будани суммаи кунҷҳои дохилии секунҷаи ACE

$$\angle AEC = 180^\circ - (x + y) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ.$$

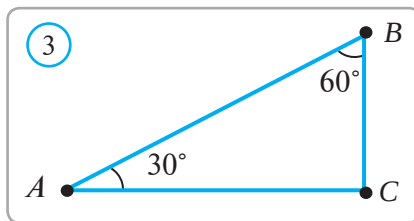
Ҷавоб: 90° .

Масъалаи 3. Агар дар секунҷаи ABC тарафи AB 6 см, кунҷҳои A ва B мувофиқи 30° ва 60° бошад, масоҳати секунҷаи ABC -ро ёбед.

Ҳалли он. Кунчи С-и секунҷаро меёбем:

$$\angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B) = 180^\circ - (60^\circ + 30^\circ) = 90^\circ.$$

Аз ин ҷо, дар секунҷаи росткунҷаи ABC гипотенузаи AB 6 см ва кунчи A 30° будааст. Дар секунҷа катети муқобили кунчи 30° ба нисфи гипотенуза баробар аст, пас $BC = 3$ см (расми 3).



Аз теоремаи Пифагор истифода бурда, катети AC -ро меёбем::

$$AC^2 = AB^2 - BC^2 = 6^2 - 3^2 = 27, AC = 3\sqrt{3} \text{ см.}$$

Акнун масоҳати секунҷаро меёбем:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{3} \cdot 3 = \frac{9\sqrt{3}}{2} \text{ (см}^2\text{)}.$$

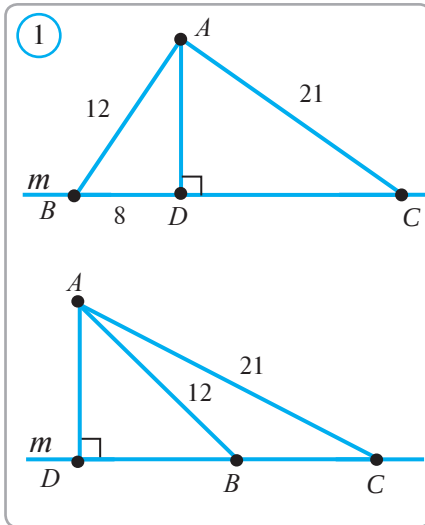
Ҷавоб: $\frac{9\sqrt{3}}{2} \text{ см}^2.$

? Савол, масъала ва супориш

1. Дар секунҷаи ABC $\angle A = 47^\circ$, $\angle C = 83^\circ$ бошад, кунчи сеюми дарунии секунҷа ва кунҷҳои берунии онро ёбед.
2. Баландии ба гипотенузаи секунҷаи росткунҷаи катетҳояш 15 см ва 20 см буда фароварда шударо ёбед.
3. Хати рости ба тарафи AC -и секунҷаи ABC параллел тарафҳои AB ва BC -ро бо равиши мувофиқ дар нуктаҳои E ва F бурида мегузарад. Агар $\angle BEF = 65^\circ$, $\angle EFC = 135^\circ$ бошад, кунҷҳои секунҷаи ABC -ро ёбед.
4. Биссектрисаҳои секунҷаи ABC дар нуктаи I якдигарро мебуранд. Агар $\angle A = 80^\circ$ ва $\angle B = 70^\circ$ бошад, кунҷҳои AIB , BIC ва CIA -ро ёбед.
5. Якто кунчи берунии секунҷаи баробарпахлӯ ба 70° баробар аст. Кунҷҳои секунҷаро ёбед.
6. Биссектрисаи AK -и секунҷаи ABC гузаронида шудааст. Агар $\angle BAK = 47^\circ$ ва $\angle AKC = 103^\circ$ бошад, кунҷҳои секунҷаро ёбед.
- 7*. Баландҳои секунҷаи ABC дар нуктаи H якдигарро мебуранд. Агар $\angle A = 50^\circ$, $\angle B = 60^\circ$ бошад, кунҷҳои AHB , BHC ва CHA -ро ёбед.
8. Исбот кунед, ки хатҳои миёнаи секунҷа онро ба чорто секунҷаи баробар тақсим мекунад.
- 9*. Дар секунҷаи ABC ба давоми медианаи CD порчаи DE -и ба ин медиана баробар гузошта шудааст. Ба давоми медианаи AF порчаи ба он баробари FH гузошта шудааст. Исбот кунед, ки нуктаҳои B , H , E дар як хати рост меҳубад.
10. Дар секунҷаи баробарпахлӯи ABC ($AB = BC$) биссектрисаҳои AN ва CK гузаронида шудааст.
 - а) Нишон диҳед, ки порчаи KN ба тарафи AC параллел аст.
 - б) Исбот кунед, ки баробарии зерин ҷой дорад: $AK = KN = NC$.

2

СЕКУНЧАҶО (ДАВОМАШ)



Масъалаи 1. Аз нуқтаи A ба хати рости m дуто моили дарозихояш 12 см ва 21 см буда фароварда шудааст. Агар проексияи моили якум дар хати рости m 8 см бошад, проексияи моили дуюмро ёбед.

Ҳалли он. Ба хати рости m аз нуқтаи берунии A ба ин хати рост моилҳои AB ва AC , инчунин перпендикуляр AD фароварда шуда, $AB=12$ см ва $AC=21$ см бошад (расми 1). Онгоҳ мувофиқи шарти масъала $BD=8$ см мешавад ва дарозии порчаи CD -ро ёфтан лозим аст.

1) Аз теоремаи Пифагор истифода бурда катети AD -и секунҷаи росткунҷаи ABD -ро меёбем.
 $AD^2 = AB^2 - BD^2 = 12^2 - 8^2 = 80$, $AD = \sqrt{80}$ см.

2) Аз секунҷаи росткунҷаи ACD аз теоремаи

Пифагор истифода бурда дарозии порчаи CD -ро меёбем

$$CD^2 = AC^2 - AD^2 = 21^2 - (\sqrt{80})^2 = 441 - 80 = 361, \quad CD = 19 \text{ см.}$$

Ҷавоб: 19 см.

Масъалаи 2. Агар тарафҳои секунҷа ба 13, 14 ва 15 баробар бошад, масоҳат ва баландии онро ёбед.

Ҳалли он. Аз формулаи Герон истифода бурда, масоҳати секунҷаи тарафҳояш $a=13$, $b=14$, $c=15$ бударо меёбем:

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{13+14+15}{2} = \frac{42}{2} = 21,$$

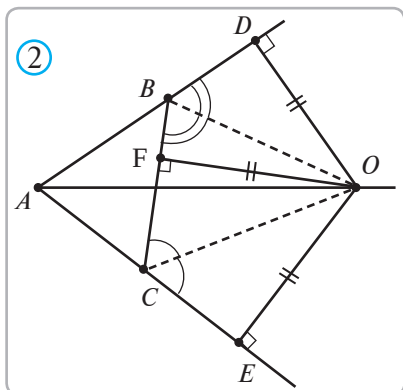
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21 \cdot (21-13) \cdot (21-14) \cdot (21-15)} = \\ = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \sqrt{7 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3} = 3 \cdot 4 \cdot 7 = 84.$$

Акнун, аз формулаи ҳисоб кардани масоҳати секунҷа $S = \frac{1}{2} a \cdot h_a$ истифода бурда, баландии h_a -и секунҷаро меёбем:

$$h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2 \cdot 84}{13} = \frac{168}{13} = 12 \frac{12}{13}.$$

Ба монанди ҳамин баландии h_b ва h_c -ро меёбем.

Ҷавоб: 84; $12 \frac{12}{13}$; 12; $11 \frac{1}{5}$.



Масъалаи 3. Биссектрисаҳои кунҷҳои берунии секунҷаи ABC -и қуллаҳои B ва C дар нуқтаи O бурида мешаванд. Исбот кунед, ки нуқтаи O дар биссектрисаи кунҷи BAC меҳобад.

Исбот. Проексияҳои нуқтаи O дар хатҳои ростии AB , AC ва BC бо равиши мувофиқ нуқтаҳои D , E ва F бошад (расми 2). Дар ин ҷо якумин аз барои нуқтаи O ба биссектрисаи кунҷи DBC ҳобиданаш $OD=OF$ мешавад. Дуюмин аз барои нуқтаи O ба биссектрисаи кунҷи BCE ҳобиданаш $OF=OE$ мешавад. Ҳамин тавр, $OD=OF=OE$. Пас, нуқтаи O аз тарафҳои кунҷи BAC дар як хел масофа воқеъ

будаст. Бинобар ин нуқтаи O дар биссектрисаи кунҷи BAC меҳобад.

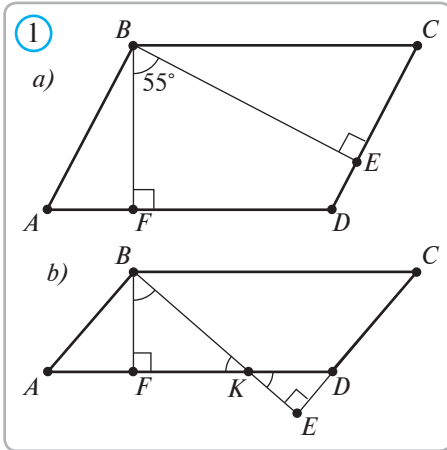


Савол, масъала ва супориш

1. Масоҳати секунҷаи тарафҳояш 5, 6 ва 7 бударо ёбед.
2. Аз нуқтаи додашуда ба хати ростии a ду моили фарқи дарозиашон ба 6 баробар буда фароварда шудааст. Проексияҳои дар хати ростии a будаи моилҳо ба 27 ва 15 баробар аст. Масофаи аз нуқтаи додашуда то хати ростии a бударо ёбед.
- 3*. Биссектрисаҳои кунҷҳои берунии қуллаҳои A ва B -и секунҷаи ABC дар нуқтаи D якдигарро мебуранд. Агар $\angle ADB=75^\circ$ бошад, кунҷи ACB -и секунҷаро ёбед.
4. Дар секунҷаи баробарпахлуи ABC -и асосаш AC биссектрисаи CD гузаронида шудааст. Кунҷи ADC ба: а) 60° ; б) 75° баробар бошад, кунҷҳои секунҷаро ёбед.
5. Баландии ба гипотенуза фаровардашудаи секунҷаи росткунҷаи як катеташ ба 7 см, гипотенузааш бошад, ба 25 см баробар бударо ёбед.
6. Баландии BD -и секунҷаи ABC гузаронида шудааст (нуқтаи D ба порчаи AC тааллуқ дорад). Агар $BD=12$, $AD=5$ ва $DC=16$ бошад, масоҳат ва периметри секунҷаро ёбед.
7. Тарафи пахлуи секунҷаи баробарпахлӯ 10 см, асосаш бошад, $10\sqrt{3}$ см. Баландии ба асоси секунҷа фаровардашуда, масоҳат ва кунҷҳои онро ёбед.
8. Дар секунҷаи тезкунҷаи ABC маркази давраи берункашидашуда дар нуқтаи O буда, $\angle AOB=120^\circ$, $\angle BOC=110^\circ$ бошад, кунҷҳои секунҷаи ABC -ро ёбед.
9. Агар медианаи CD -и секунҷаи ABC аз тарафи AB ду маротиба хурд бошад, кунҷи ACB -ро ёбед.
10. Баландии секунҷаи ABC дар нуқтаи O бурида мешавад. Агар $\angle A=60^\circ$, $\angle B=80^\circ$ бошад, кунҷи AOB -ро ёбед.
11. Биссектрисаҳои кунҷҳои берунии назди қуллаҳои A ва B -и секунҷаи ABC дар нуқтаи O бурида мешаванд. Агар $\angle ACB=80^\circ$ бошад, кунҷи AOB -ро ёбед.

3

ЧОРКУНЧАҶО



Масъалаи 1. Агар кунчи байни баландиҳои аз як қуллаи параллелограмм ба ду тарафи он гузаронида шуда ба 55° баробар бошад, кунҷҳои параллелограммро ёбед.

Ҳалли он. Бигузор кунчи байни баландиҳои параллелограмм BF ва BE - и параллелограмм ба 55° баробар бошад (расми 1). Ду ҳолати дар расм тасвир ёфта:

а) Баландии BE ба тарафи CD ;

б) Баландии BE ба давоми тарафи CD гузаронида шуданаш мумкин.

Дар ҳолати а) Аз сабаби суммаи кунҷҳои чоркунҷаи $BEDF$ 360° буданаш,

$$55^\circ + 90^\circ + \angle D + 90^\circ = 360^\circ.$$

Аз ин ҷо $\angle D = 125^\circ$.

Дар ҳолати б) Бигузор буриши баландии BE бо тарафи AD нуктаи K бошад. Он гоҳ

$$\angle DKE = \angle BKF = 90^\circ - 55^\circ = 35^\circ.$$

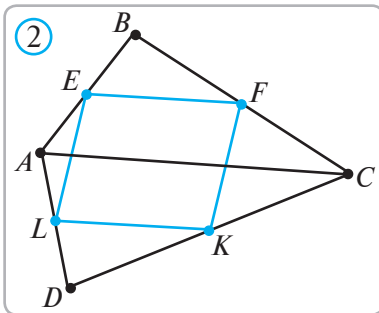
Мувофиқи хосияти кунчи берунии секунҷа:

$$\angle ADC = \angle DKE + \angle KED = 35^\circ + 90^\circ = 125^\circ.$$

Аз ин рӯ, дар ду ҳолат ҳам $\angle D = 125^\circ$ аст. Бинобар ин

$$\angle A = \angle C = 180^\circ - \angle D = 55^\circ, \quad \angle B = \angle D = 125^\circ.$$

Ҷавоб: $55^\circ, 125^\circ, 55^\circ, 125^\circ$.



Масъалаи 2. Миёнаҳои тарафҳои чоркунҷа қуллаҳои параллелограмм буданашро исбот кунед.

Ҳалли он. Нуктаҳои E, F, K ва L мувофиқан миёнаҳои тарафҳои AB, BC, CD ва DA -и чоркунҷаи $ABCD$ бошад, диагонали AC -ро мегузаронем (расми 2). $EFKL$ параллелограмм буданашро нишон медиҳем.

Порчаи EF хати миёнаи секунҷаи ABC , порчаи KL бошад, хати миёнаи секунҷаи ACD мешавад. Бинобар ин дар асоси хосиятҳои хати миёнаи секунҷа:

$$EF \parallel AC, \quad KL \parallel AC, \quad EF = \frac{1}{2} AC, \quad KL = \frac{1}{2} AC.$$

Аз ин $EF \parallel KL$ ва $EF = KL$. Бинобар ин дар асоси аломатҳои параллелограмм $EFKL$ — параллелограмм.

Масъалаи 3. $ABCD$ росткунча аст. Биссектрисаҳои кунҷҳои A ва D дар тарафи BC ҳамдигарро мебуранд. Агар $AB=4$ см бошад, масоҳати ин росткунчаро ёбед.

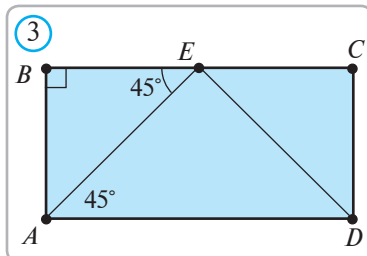
Ҳалли он. Нуктаи буриши биссектрисаҳои кунҷҳои A ва D , бигуздор, E бошад (расми 3). Дар ин ҳол $\angle B = 90^\circ$, $\angle BAE = 45^\circ$ аст. Бинобар ин

$$\angle AEB = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$$

мешавад. Яъне ABE секунҷаи баробарпахлӯ. Дар он $AB = BE = 4$ (см).

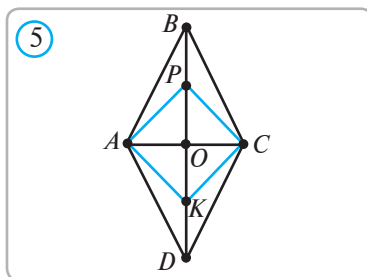
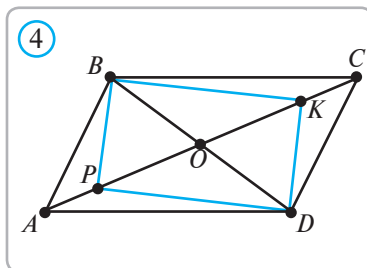
Инчунин, $EC = CD = 4$ (см) аз ин $BC = BE + EC = 8$ (см) ва $S_{ABCD} = AB \cdot BC = 4 \cdot 8 = 32$ (см²).

Ҷавоб: 32 см².



? Савол, масъала ва супориш

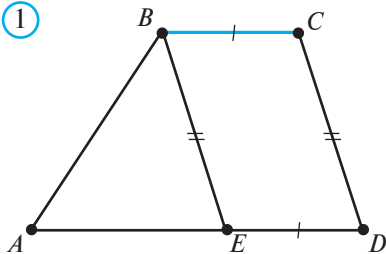
1. Се кунҷи чоркунча маълум: 47° , 83° ва 120° . Кунҷи чоруми онро ёбед.
2. Ҳосили ҷамъи ду кунҷи параллелограмм 156° аст. Кунҷҳои онро ёбед.
3. Кунҷи байни диагоналҳои росткунча 74° . Кунҷеро ёбед, ки яке аз диагоналҳои он бо тарафҳояш ҳосил мекунад.
4. Фарқи байни ду кунҷи трапетсияи баробарпахлӯ 40° аст. Кунҷҳои онро ёбед.
5. Яке аз кунҷҳои ромб аз дигараш се баробар калон аст. Кунҷҳои ромбро муайян кунед.
6. Биссектрисаи кунҷи A -и росткунҷаи $ABCD$ тарафи BC -ро ба порчаҳои ба 2 см ва 6 см баробар ҷудо мекунад. Периметри росткунчаро ёбед.
7. Параллелограмми тарафҳояш 3 см ва 6 см, масофаи байни тарафҳои калонаш 2 см бударо созад.
8. Дар диагонали AC -и параллелограмми $ABCD$ нуктаҳои P ва K интиҳоб шудаанд (расми 4). Агар $OP = OB = OK$ бошад, исбот кунед, ки $BKDP$ росткунча аст.
- 9*. Дар диагонали калони BD -и ромби $ABCD$ нуктаҳои P ва K интиҳоб шудаанд (расми 5). Агар $OA = OP = OK$ бошад, исбот кунед, ки чоркунҷаи $APCK$ квадрат аст.
- 10*. Дар диагонали BD -и параллелограмми $ABCD$ нуктаҳои P ва K интиҳоб шудаанд. Агар $BP = KD$ бошад, исбот кунед, ки чоркунҷаи $APCK$ параллелограмм аст.



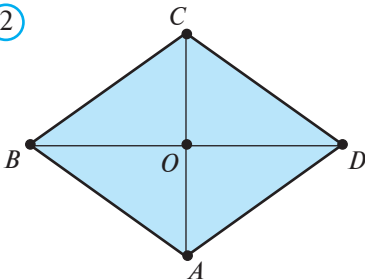
4

ЧОРКУНЧАҲО (давомаш)

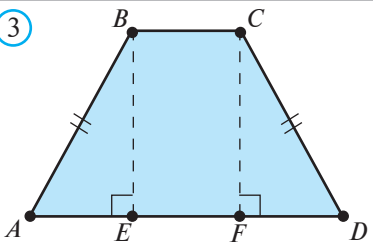
①



②



③



Масъалаи 1. Аз қуллаи B -и асоси хурди BC -и трапетсияи $ABCD$ ба тарафи CD хати рости мувозӣ (параллел) гузаронида шудааст. Периметри секунҷаи дар натиҷаи он ҳосилшуда ба 24 см баробар аст. Агар периметри трапетсия 36 см бошад, дарози тарафи BC -ро ёбед.

Ҳалли он. Мувофиқи шарти масъала хати рости параллели аз қуллаи BC ба тарафи CD гузаронидашуда порчаи BE бошад, нуқтаи E ба тарафи AD меҳобад (расми 1). Порчаи BC трапетсияро ба секунҷаи ABE ва параллелограмми $BCDE$ ҷудо мекунад. Аз параллелограмми $BCDE$, $BC = ED$ ва $CD = BE$ мувофиқи шарти масъала,

$$P_{ABCD} = AB + BC + CD + DA = AB + BC + CD + DE + EA = AB + BE + EA + 2BC = P_{ABE} + 2BC = 24 + 2BC = 36 \text{ (см)}.$$

Аз ин, $2BC = 12$ ё ки $BC = 6$ см буданаширо меёбем. **Ҷавоб:** 6 см.

Масъалаи 2. Яке аз диагоналҳои ромб 14 см, тарафи он 25 см. Масоҳати ромбро ёбед.

$ABCD$ — ромб
 $AC = 14$ см, $AB = 25$ см, $S_{ABCD} = ?$

Ҳалли он. Бигузур нуқтаи буриши диагоналҳои ромб O бошад (расми 2). Он гоҳ мувофиқи хосияти ромб,

$$AO = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \cdot 14 = 7 \text{ (см)}, \quad \angle AOB = 90^\circ.$$

Аз теоремаи Пифагор истифода бурда, порчаи OB -ро меёбем:

$$OB^2 = AB^2 - AO^2 = 25^2 - 7^2 = 576 \text{ ё ки } OB = 24 \text{ см.}$$

Дар ин ҷо $BD = 2 \cdot OB = 2 \cdot 24 = 48$ (см). Мувофиқи формулаи масоҳати ромб,

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 48 = 7 \cdot 48 = 336 \text{ (см}^2\text{)}. \quad \textbf{Ҷавоб: } 336 \text{ см}^2.$$

 **Масъалаи 3.** Тарафи паҳлуии трапетсияи баробарпаҳлу 20 см, асосҳояш бошад, 12 см ва 36 см. Масоҳати трапетсияро ёбед.

Ҳалли он. Бигузор, дар трапетсияи $ABCD$ $AB=CD=20$ см, $BC=12$ см, $AD=36$ см бошад. Баландиҳои трапетсияи BE ва CF -ро мегузаронем (расми 3).

Дар ин ҷо,

$$EF = BC = 12 \text{ (см)},$$

$$AE = FD = \frac{AD - EF}{2} = \frac{36 - 12}{2} = 12 \text{ (см)}.$$

Ба секунҷаи росткунҷаи ABE теоремаи Пифагорро истифода намуда, баландии BE -ро меёбем:

$$BE^2 = AB^2 - AE^2 = 20^2 - 12^2 = 256 \quad \text{ё ки} \quad BE = 16 \text{ см.}$$

Масоҳати трапетсияро меёбем:

$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot BE = \frac{12 + 36}{2} \cdot 16 = 24 \cdot 16 = 384 \text{ (см}^2\text{)}. \quad \textbf{Ҷавоб: } 384 \text{ см}^2.$$



Савол, масъала ва супориш

1. Асоси хурди BC -и трапетсияи $ABCD$ ба 7 см баробар аст. Аз қуллаи B ба тарафи CD хати рости параллел гузаронида шудааст. Периметри секунҷаи ҳосилшуда 16 см аст. Периметри трапетсияро ёбед.
2. Нўғҳои порчае, ки хати ростро бурида намегузарад, аз хати рост дар масофаҳои 8 см ва 18 см қойгир аст. Масофаи байни миёнаҳои порча ва хати ростро ёбед.
3. Параллелограмми тарафҳояш 4 см ва 5 см, масоҳаташ 10 см² бударо созад.
4. Яке аз диагоналҳои ромб 80 см, тарафи он бошад 81 см. Масоҳати ромбро ёбед.
5. Баландии аз кунҷи кунди ба 135° баробар будаи параллелограмм гузаронида 4 см буда, тарафи гузаронидашударо ба ду қисми баробар тақсим мекунад.
 - а) Ҳамон тарафро ёбед.
 - б) Кунҷҳои байни диагонали қуллаҳои кунҷҳои кунди параллелограмм-ро пайваस्तкунанда ва тарафҳои онро ёбед.
 - в) Периметр ва масоҳати параллелограммро ёбед.
6. Баландие, ки аз қуллаи кунҷи кунди ромб гузаронида шудааст, тарафи онро ба ду қисми баробар тақсим мекунад. Агар тарафи ромб 6 см бошад, масоҳати ромбро ёбед.
7. Гипотенузаи секунҷаи росткунҷа 13 см, ҳосили ҷамъи (суммаи) катетҳояш 17 см. Масоҳати секунҷаро ёбед.
- 8*. Яке аз кунҷҳои трапетсияи росткунҷа 135°? хати миёнаи он бошад, 18 см аст. Агар асосҳои он 1:8 нисбат дошта бошанд, тарафҳои паҳлуии трапетсияро ёбед.
- 9*. Трапетсияи $ABCD$ ($AB \parallel CD$) ба давраи марказаш O берун кашида шудааст. $\angle AOD = 90^\circ$ буданашро исбот кунед.

ХАЗИНАИ МАСЪАЛАҲОИ МАТЕМАТИКӢ

Маълум аст, ки вақтҳои охир технологияҳои коммуникатсияҳои иттилоотӣ бо суръати баланд инкишоф меёбанд. Интернет бошад, торафт деҳаҳои дурдастро ҳам фаро мегирад. Дар ин рӯзо дар World-Wide-Web — соҳаи ахбороти ҷаҳонии Интернет манбаъҳои басо зиёди ахбор ҷойгир гаштаанд, ки истифода аз ин хазина барои ҳар як шаҳрванди замонамон ҳам қарз ва ҳам фарз аст. Аз ҷумла, яке аз дигаре шавқовар ҳамин гуна саҳифаҳо — Web ҳастанд, ки аз онҳо фанни дилхоҳ, аз ҷумла омӯзиши геометрияро низ самаранок истифода бурдан мумкин. Дар поён овардани манзили манбаъҳои ин иттилоотро лозим донистем. Аз Web — саҳифаҳо Шумо бо забонҳои ўзбекӣ, русӣ, англисӣ ва ғайраҳо бо навигарҳои охирини олами математика, китобҳои дарсии электроние, ки дар анбори китобхонаҳои электронӣ маҳфузанд, курсҳои гирифтани таълими математика аз масофа ва маводҳои онон, материалҳои назариявии гуногуне, ки ба саҳифаи китоби дарсии мазкур дохил шудаанд ва нашудаанд, нақшаи дарси муаллимони ботаҷрибае, ки аз фанни математика сабақ медиҳанд ва тавсияҳои методиҳои онҳо, масъалаҳои бешумор, мисолҳо ва ҳалли онҳо, маълумотҳо дар бораи азназаргузаронӣ ва озмунҳои математикӣ дар давлатҳои гуногун гузаронидаистода ва масъалаҳои пешкашгардида, инчунин ҳалли онҳо, масъалаҳои шавқовари математикӣ ва ҳалли онҳо шинос шуданатон мумкин.

<http://www.eduportal.uz> — Портالي иттилооту таълими Вазорати таълими халқ
<http://www.multimedia.uz> — Сайти Маркази мултимедияи назди Вазорати таълими халқ
<http://www.uzedu.uz> — Сайти Вазорати таълими халқ
<http://www.edu.uz> — Портالي таълими Вазорати маълумоти олий ва миёнаи махсус
<http://www.pedagog.uz> — Портالي муассисаҳои таълими педагогӣ
<http://ziyo.edu.uz> — Портالي муассисаҳои таълимӣ
<http://www.matematika.uz> — Сайти материалҳои иловагӣ аз математика
<http://ziyonet.uz> — Соҳаи захираҳои иттилоотӣ-таълимӣ
<http://cde.sakha.ru> — Сайти омӯзонидан аз масофа (бо забони русӣ)
<http://www.ixl.com> — Портالي сайти аз масофа истода омӯзонидан (бо забони англисӣ)
<http://www.iro.sakha.ru> — Сайти муассисоти ривҷдиҳии таълим (бо забони русӣ)
<http://www.school.edu.ru> — Портالي таълими умумӣ (бо забони русӣ)
<http://www.alledu.ru> — Портالي «Таълим аз Интернет» (бо забони русӣ)
<http://www.rsl.ru> — Портالي Китобхонаи давлатии Россия (бо забони русӣ)
<http://www.rostest.runnet.ru> — Сервери маркази тест (бо забони русӣ)
<http://www.allbest.ru> — Китобхонаи электронии захираҳои Интернет (бо забони русӣ)
http://int-edu.ru/soft/base_geom.html — Сайти ҷонибдорӣ барномаи «Живая геометрия»
<http://matematica.mgtd.ru/> — Озмуни ғоибона аз математика ва информатика (бо забони русӣ)
<http://www.mathtype.narod.ru/> — Online — китобҳои дарсӣ (бо забони русӣ)
<http://www.e-pi.narod.ru/> — Ҳамааш дар бораи ададҳои e ва π (бо забони русӣ)
<http://mschool.kubsu.ru/> — Китобхонаи дастурҳои электронӣ. Олимпиадаҳои ғоибонаи математикӣ
<http://matematika.agava.ru/> — Зиёда аз 2000 масъала аз математика (бо забони русӣ)
<http://mat-game.narod.ru/> — Гимнастикаи математикӣ. Масъалаҳои математикӣ ва муаммоҳо
<http://mathc.chat.ru/> — Калейдоскопи математикӣ (бо забони русӣ)
<http://mathmag.spbu.ru/> — Маҷаллаи математикӣ дар Интернет (бо забони русӣ)

БОБИ I



ШАКЛҲОИ ГЕОМЕТРИИ МОНАНД

Дар натиҷаи омӯзиши ин боб Шумо ба дониш ва малакаи амалии зерин соҳиб мегардед:

Донишҳо:

- ✓ донишани таърифи шаклҳои монанд ва ишора кардани онҳо;
- ✓ донишани аломатҳои монандии секунҷаҳо;
- ✓ донишани мафҳуми гомотетия.

Малакаи амалӣ:

- ✓ аз ду секунҷаҳои монанд ёфта тавонистани элементҳои мувофиқ;
- ✓ татбиқ карда тавонистани аломатҳои монандии секунҷаҳо ҳангоми исботкунӣ ва ҳисобкунии ҳалли масъалаҳо;
- ✓ аз гомотетия истифода бурда, сохта тавонистани бисёркунҷаҳои монанд.

5

МОНАДИИ БИСЁРКУНЧАҲО



Дар ҳаёти ҳамамуз нафақат бо шаклҳои (намудҳои) якхела, балки андозаҳояш гуногун ҳам дучор меем. Дар фанҳои таърих ва ҷуғрофия аз хариҷаҳои масштабҳояшон гуногун истифода бурдаед. Хариҷаҳои республикаамон, ки дар китоби дарси тасвир ёфтаанд ба тахтаи синф оварта мешаванд, дар андозаҳои гуногунанд, лекин онҳо шаклҳои якхела доранд. Аз як фототасма фотосурати андозаҳояш гуногун тайёр карда мешавад. Андозаи ин суратҳо ҳар ҳел бошад ҳам, онҳо дар як намуданд, яъне онҳо ба якдигар монанд (*расми 1*).

Маъл. Дар расми 2 чор ромб тасвир ёфтааст. Аз онҳо фақат ромбҳои б) ва в) ба шакли якхела соҳибанд. Ин ромбҳо бо чияшон аз дигар ромбҳо фарқ мекунанд? Биёед, инро яқоя аниқ менамоем.

1. Аз расм аён аст, ки $AD = 3$, $A_1D_1 = 2$. Аз сабаби баробар будани тарафҳои ромб баробарии

$$\frac{AD}{A_1D_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{AD}{A_1D_1} = \frac{3}{2} = 1,5$$

ҳосил мекунем. Дар ин ҳолат тарафҳои мувофиқи ромб мутаносиб гуфта мешавад.

2. Кунҷҳои мувофиқи ромбҳои $ABCD$ ва $A_1B_1C_1D_1$ байни якдигар баробаранд. Дар ҳақиқат $\angle A = \angle A_1 = 45^\circ$, $\angle B = \angle B_1 = 135^\circ$, $\angle C = \angle C_1 = 45^\circ$, $\angle D = \angle D_1 = 135^\circ$.

Ҳамин тавр, аз сабаби ба якдигар монандии ин ромбҳо — мутаносиб будани тарафҳои мувофиқ ва баробар будани кунҷҳои мувофиқро аниқ намудем. Маълуми монандии бисёркунҷаи дилхоҳ ҳам дар ҳамин асос дохил карда мешавад.

Бисёркунҷаҳои миқдори кунҷҳояшон якхела (бинобар ин, миқдори тарафҳояшон ҳам якхела) **бисёркунҷаҳои ҳамном** гуфта мешавад.

Бигузор кунҷҳои мувофиқи ду бисёркунҷаҳои ҳамноми $ABCDE$ ва $A_1B_1C_1D_1E_1$ баробар бошанд: $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $\angle D = \angle D_1$,

$\angle E = \angle E_1$. Ин кунҷоро, кунҷҳои мувофиқ меноманд. Дар ин ҳол тарафҳои AB ва A_1B_1 , BC ва B_1C_1 , CD ва C_1D_1 , DE ва D_1E_1 , EA ва E_1A_1 **тарафҳои мувофиқ** номида мешавад.

✓ **Таъриф.** Кунҷҳои яке аз бисёркунҷаҳои ҳамном мувофиқан ба кунҷҳои бисёркунҷаи дуюм баробар ва тарафҳои мувофиқ мутаносиб бошад, ин гуна бисёркунҷаҳо **бисёркунҷаҳои монанд** номида мешавад (расми 3).

Монандии бисёркунҷаҳо бо аломати $\sim$ ишора мегардад.

③

$$F \sim F_1 \left\{ \begin{array}{l} \angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1, \angle C = \angle C_1, \\ \angle D = \angle D_1, \angle E = \angle E_1 \\ \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1D_1}{CD} = \frac{D_1E_1}{DE} = \frac{E_1A_1}{EA} = k \end{array} \right.$$

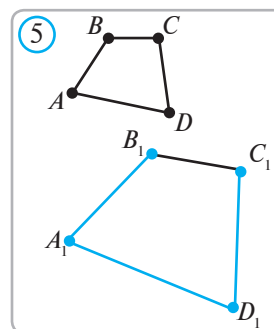
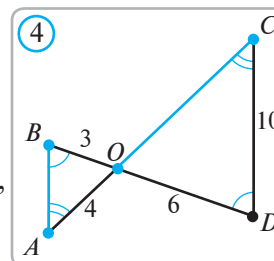
Кунҷҳои мувофиқ баробаранд

Тарафҳои мувофиқ мутаносибанд

Адади ба нисбати тарафҳои мувофиқи бисёркунҷаҳои монанд баробар **коэффициенти монандӣ** номида мешавад.

? Савол, масъала ва супориш

- Таърифи бисёркунҷаҳои монандро гӯед.
- Коэффициенти монандӣ чист ва он чӣ тавр муайян карда мешавад?
- Агар дар секунҷаҳои ABC ва DEF $\angle A = 105^\circ$, $\angle B = 35^\circ$, $\angle E = 105^\circ$, $\angle F = 40^\circ$, $AC = 4,4$ см, $AB = 5,2$ см, $BC = 7,6$ см, $DE = 15,6$ см, $DF = 22,8$ см, $EF = 13,2$ см бошад, оё онҳо монанданд?
- Аз чӣ сабаб ромбҳои а) ва б), ки дар расми 2 тасвир ёфтаанд, монанд нестанд? Ромбҳои б) ва в) -чӣ?
- Агар секунҷаҳои дар расми 4 тасвирёфтаи ABO ва CDO монанд бошанд, дарозии порчаҳои AB , OC ва коэффициенти монандиро ёбед.
- Дар расми 5 $ABCD \sim A_1B_1C_1D_1$. $AB = 24$, $BC = 18$, $CD = 30$, $AD = 54$, $B_1C_1 = 54$. Тарафҳои A_1B_1 , D_1A_1 ва C_1D_1 -ро ёбед.
- Миёнаи тарафҳои AB ва AC -и секунҷаи ABC бо равиши мувофиқ нуқтаҳои P ва Q бошад. $\triangle ABC \sim \triangle APQ$ буданашро исбот кунед.



6

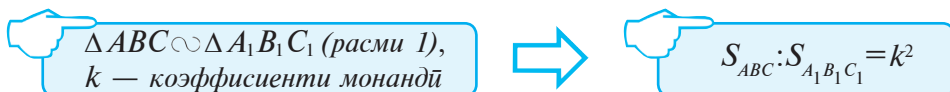
СЕКУНЧАҲОИ МОНАНД ВА ХОСИЯТҲОИ ОНҲО

Монандии бисёркунҷаи аз ҳама содда буда-секунҷаро меомӯзем.

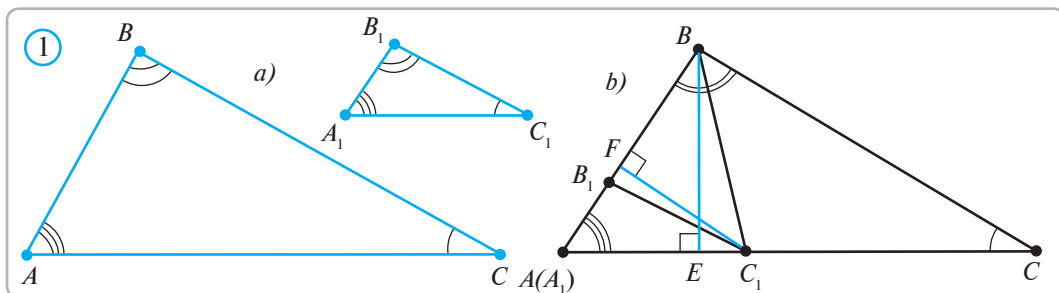
Теорема. Нисбати периметрҳои ду секунҷаи монанд ба коэффициентҳои монандӣ баробар аст.

Ин теоремаро мустақил исбот кунед.

Теорема. Нисбати масоҳатҳои ду секунҷаи монанд ба квадрати коэффициентҳои монандӣ баробар аст.



Исбот. Мувофиқи шартҳои теорема, $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. Пас, мувофиқи таърифи бисёркунҷаҳои монанд, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$ ва $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k$.



Аз баробарии $\angle A = \angle A_1$ истифода бурда ба монанди дар (расми 1, в) буда, болои ҳам гузошта сохтан ва ишораҳои заруриро иҷро менамоем.

Масоҳатҳои секунҷаҳои дар зер овардашударо ёфта нисбатҳои онҳоро дида мебароем:

$$\left. \begin{aligned} S_{ABC} &= \frac{AC \cdot BE}{2}; \\ S_{ABC_1} &= \frac{A_1C_1 \cdot BE}{2}; \\ S_{A_1B_1C_1} &= \frac{A_1B_1 \cdot C_1F}{2}; \\ S_{ABC_1} &= \frac{AB \cdot C_1F}{2}; \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{ABC_1}} = \frac{AC}{A_1C_1} \quad (1),$$

$$\Rightarrow \frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC_1}} = \frac{A_1B_1}{AB} \quad (2).$$

Агар баробарии (1)-ро аъзо ба аъзо ба баробарии (2) тақсим намоем, нисбати масоҳатҳои секунҷаҳои кунҷҳояш баробарии (3)-ро ҳосил мекунем.

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1} \quad (3)$$

Дар ин ҷо мувофи шарт, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k$ буданастро ба ҳисоб гирем, баробарои зерин ҳосил мешавад.

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1} \cdot \frac{AC}{A_1C_1} = k \cdot k = k^2$$

Теорема исбот шуд.

Масъалаи 1. Нисбати тарафҳои ҳоси секунҷаҳои монанд ба нисбати баландиҳои ба ҳамин тарафҳо гузаронидашуда баробар буданастро исбот кунед (расми 2).

$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, BD , B_1D_1 — баландиҳо

$$\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BD}{B_1D_1}$$

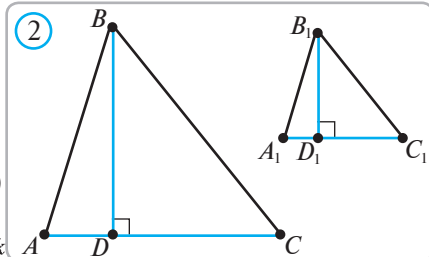
Ҳалли он. Коэффициенти монандии секунҷаҳои додашуда бигуздор k бошад. Он гоҳ

$AC : A_1C_1 = k$; $S_{ABC} : S_{A_1B_1C_1} = k^2$ (1)
мешавад. Аз тарафи дуюм,

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{\frac{1}{2} AC \cdot BD}{\frac{1}{2} A_1C_1 \cdot B_1D_1} = \frac{AC}{A_1C_1} \cdot \frac{BD}{B_1D_1} = k \cdot \frac{BD}{B_1D_1} \quad (2)$$

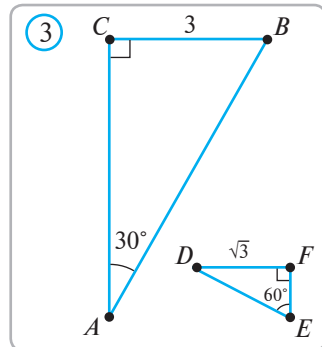
Аз баробариҳои (1) ва (2) $k \cdot \frac{BD}{B_1D_1} = k^2$ ё ки $\frac{BD}{B_1D_1} = k$

Ҳамин тавр, нисбати $\frac{BD}{B_1D_1}$ ҳам, нисбати $\frac{AC}{A_1C_1}$ ҳам ба k баробар аст, яъне $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BD}{B_1D_1}$.



Савол, масъала ва супориш

1. Теорема дар бораи нисбати масоҳатҳои секунҷаҳои монандро ғўед ва исбот кунед.
2. Ду секунҷаи монанди ABC ва $A_1B_1C_1$ дода шудааст. Агар $S_{ABC} = 25 \text{ см}^2$ ва $S_{A_1B_1C_1} = 81 \text{ см}^2$ бошад, коэффициенти монандиро ёбед.
3. Масоҳатҳои ду секунҷаи монанд 65 м^2 ва 260 м^2 аст. Яке аз тарафҳои секунҷаи яқум 6 м бошад, тарафи ба он мувофиқи секунҷаи дуюмро ёбед.
4. Тарафҳои секунҷаи додашуда 15 см , 25 см ва 30 см . Агар ба секунҷаи додашуда секунҷаи периметраш 35 см монанд бошад, тарафҳои онро ёбед.
5. $ABC \sim A_1B_1C_1$ ва нисбати тарафҳои мувофиқи ин секунҷаҳо ба $7 : 5$ баробар аст. Агар масоҳати секунҷаи ABC аз масоҳати секунҷаи $A_1B_1C_1$ 36 м^2 зиёд бошад, масоҳати ин секунҷаҳоро ёбед.
6. Аз расми 3 истифода бурда, монанд ё ки монанд набудани секунҷаҳоро муайян кунед.



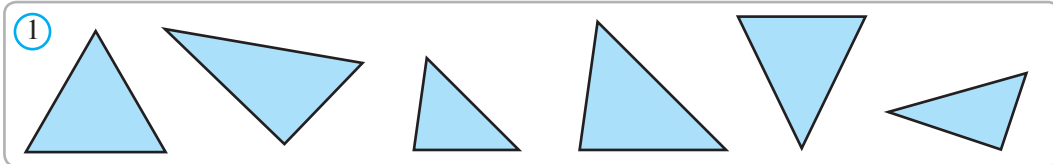
7

АЛОМАТИ ЯКУМИ МОНАНДИИ СЕКУНЧАҲО



Машқи фаъолкунанда

Аз секунҷаҳое, ки дар расми 1 тасвир ёфтаанд, монандашонро муайян намоед. Монандии онҳоро чӣ тавр муайян кардед?



Дар асоси таъриф барои муайян кардани монандии ду секунҷа баробарии кунҷҳои онҳо ва мутаносибии тарафҳои мувофиқашон лозим меояд. Барои секунҷаҳо ин кор ниҳоят осон мекӯчад. Теоремаҳои дар поён овардашуда дорои чунин хислат аст. Онон *аломатҳои монандии секунҷаҳо* номида мешаванд.



Теорема (Аломати КК монандии секунҷаҳо). Агар ду кунҷи як секунҷа мувофиқан ба ду кунҷи секунҷаи дигар баробар бошад, ин гуна секунҷаҳо монанд аст (расми 2).

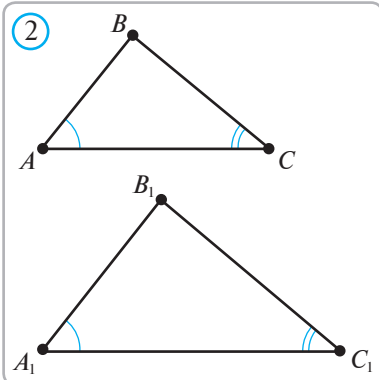


$\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1, \angle A = \angle A_1, \angle C = \angle C_1$



$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$

Исбот. 1. Дар асоси теорема дар бораи ҳосили ҷамъи кунҷҳои дарунии секунҷа,



$$\left. \begin{aligned} \angle B &= 180^\circ - (\angle A + \angle C), \\ \angle B_1 &= 180^\circ - (\angle A_1 + \angle C_1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \angle B = \angle B_1$$

Аз ин рӯ, кунҷҳои мувофиқи секунҷаҳои ABC ва $A_1B_1C_1$ баробаранд.

2. Дар асоси шарт, $\angle A = \angle A_1, \angle C = \angle C_1$. Дар асоси теорема дар бораи нисбати масоҳати секунҷаҳои кунҷояшон баробар бошад,

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1} \quad \text{ва} \quad \frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{CA \cdot CB}{C_1A_1 \cdot C_1B_1}.$$

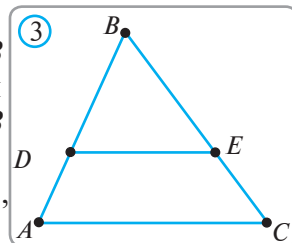
Тарафи рости ин баробарихоро ба ҳисоб гирифта, аъзоҳои якхела кӯтоҳ гарданд, баробарии $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$ -ро ҳосил мекунем. Инчунин аз баробарии $\angle A = \angle A_1$ ва $\angle B = \angle B_1$ истифода бурда, баробарии $\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}$ -ро ҳосил мекунем. Ҳамин тавр, кунҷҳои секунҷаҳои ABC ва $A_1B_1C_1$ баробар ва тарафҳои мувофиқ мутаносиб, яъне ин секунҷаҳо монанданд.

Теорема исбот шуд.

Масъала. Хати рости DE -е,ки ду тарафи секунҷаи $ABCD$ -ро бурида мегузарад ва ба тарафи сеюм параллел аст аз секунҷа,секунҷаи ба он монанд чудо мекунад. Онро исбот кунед (расми 3).

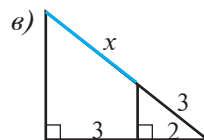
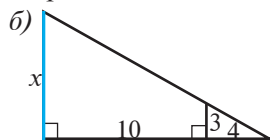
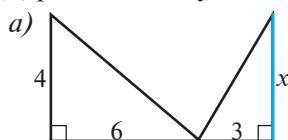
Исбот. Дар ABC ва DBE $\angle B$ — кунҷи умумӣ, $\angle CAB = \angle EDB$ (Аз сабаби кунҷҳои мувофиқи дар буриши хатҳои рости параллели AC ва DE бо буррандаи AB ҳосил шуданаш) (расми 3).

Пас, дар асоси аломати KK -и монандии секунҷаҳо, $ABC \sim DBE$.

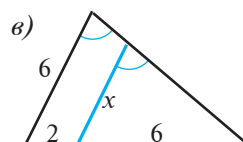
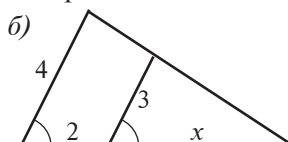
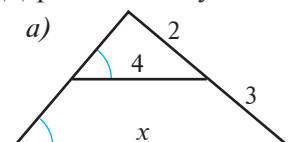


? Савол, масъала ва супориш

1. Таърифи монандии секунҷаҳо ва аломатҳои KK -ро байни ҳам муқоиса кунед.
2. Аломати KK монандии секунҷаҳоро исбот кунед.
3. Дар асоси маълумотҳои расм x -ро ёбед.



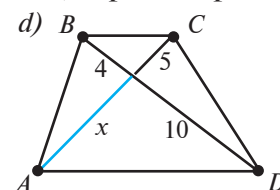
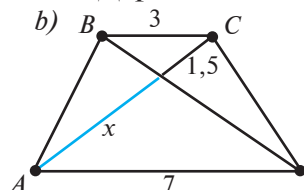
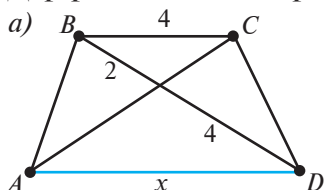
4. Дар асоси маълумотҳои расм x -ро ёбед.



5. Дар тарафи CD -и параллелограмми $ABCD$ нуқтаи E гирифта шудааст. Нурҳои AE ва BC дар нуқтаи F бурида мешаванд.

- а) Агар $DE = 8$ см, $EC = 4$ см, $BC = 7$ см, $AE = 10$ см бошад, EF ва FC -ро;
- б) Агар $AB = 8$ см, $AD = 5$ см, $CF = 2$ см бошад, DE ва EC -ро ёбед.

6. Дар расм $ABCD$ — трапетсия. Дар асоси маълумотҳои расм x -ро ёбед.



- 7*. Яке аз кунҷҳои тези ду секунҷаи росткунҷа ба ҳамдигар баробар бошанд, монанд будани онҳоро исбот кунед.

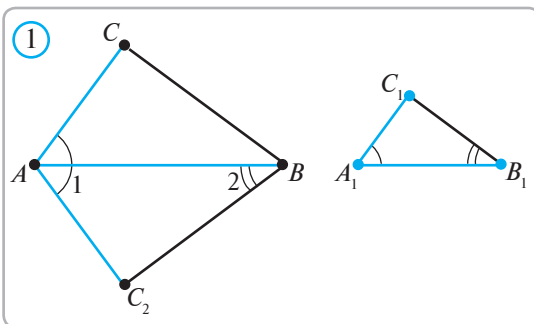
- 8*. Дар тарафи AC -и секунҷаи ABC нуқтаи D гирифта шудааст. Агар $\angle ABC = \angle BDC$ бошад, монанд будани секунҷаҳои ABC ва BDC -ро исбот кунед. Агар $3AB = 4BD$ ва $BC = 9$ см бошад, порчаи AC -ро ёбед.

8

АЛОМАТИ ДУЮМИ МОНАНДИИ СЕКУНЧАХО

Теорема. (Аломати ТКТ монандии секунҷаҳо). Агар ду тарафи як секунҷа ба ду тарафи секунҷаи дигар мутаносиб ва кунчи ин тарафҳо ташкилнамуда баробар бошанд, ин гуна секунҷаҳо монанд мешаванд (расми 1).

$$\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1, \angle A = \angle A_1, \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$$



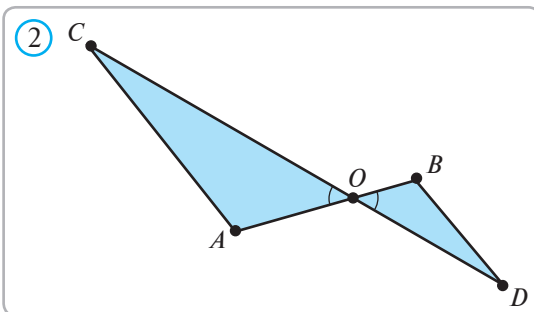
Исбот. Ба секунҷаи $A_1B_1C_1$ секунҷаи монанди (дар асоси аломати КК) ABC_2 -ро дида мебароем (расми 1): $\angle 1 = \angle A_1$, $\angle 2 = \angle B_1$ он гоҳ,

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC_2}{A_1C_1} \Leftrightarrow (\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC_2)$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} \Leftrightarrow (\text{мувофиқи шарт}).$$

Аз ин ду баробарӣ, $AC_2 = AC$ мешавад. Бинобар ин мувофиқи аломати якумӣ баробарии секунҷаҳо $\triangle ABC = \triangle ABC_2$. Аз баробарии охирин $\angle 2 = \angle B$. Мувофиқи сохта шуданаш $\angle 2 = \angle B_1$ буд. Аз ин рӯ, дар ҳолати $\angle B = \angle B_1$, аз $\angle A = \angle A_1$ ва $\angle B = \angle B_1$ буданаш, мувофиқи аломати КК-и монандии секунҷаҳо $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. **Теорема исбот шуд.**

Масъала. Порчаҳои AB ва CD дар нуктаи O бурида мешаванд, $AO = 12$ см, $BO = 4$ см, $CO = 30$ см, $DO = 10$ см бошад, нисбати масоҳатҳои секунҷаҳои AOC ва BOD -ро ёбед.



Ҳалли он. Мувофиқи шарт.

$$\left. \begin{aligned} \frac{OA}{OB} &= \frac{12}{4} = 3 \\ \frac{OC}{OD} &= \frac{30}{10} = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} = 3.$$

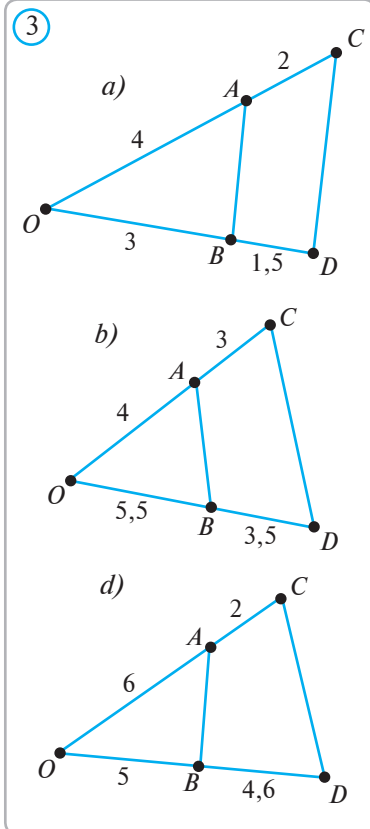
Аз ин ҷо ду тарафи секунҷаи AOC ба ду тарафи секунҷаи BOD мутаносиб ва кунчи байни онҳо дар ҳолати шокулӣ (вертикалӣ) баробаранд: $\angle AOC = \angle BOD$. Аз ин рӯ, дар асоси аломати ТКТ монандии секунҷаҳо $\triangle AOC \sim \triangle BOD$ ва коэффисиенти

монандӣ: $k = \frac{OA}{OB} = 3$. Мувофиқи теоремаи нисбати масоҳатҳои секунҷаҳои

монанд: $\frac{S_{AOC}}{S_{BOD}} = k^2 = 9$. **Ҷавоб:** 9.

? Савол, масъала ва супориш

- Таърифи монандии секунҷаҳо ва аломати ТКТ-ро муқоиса кунед.
- Аз аломати ТКТ монандии секунҷаҳоро исбот кунед.
- Монандии секунҷаҳои баробарпахлуи кунҷҳои куллашон баробарро аз аломати а) КК; б) ТКТ истифода бурда исбот кунед.
- Секунҷаҳои OAB ва OCD -е, ки дар расми 3 тасвир ёфтаанд, оё монанданд? Агар монанд бошанд, нисбати периметриҳои ин секунҷаҳоро ёбед.
- Нурҳои AC ва BD дар нуқтаи O бурида мешаванд ва $AO:CO=BO:DO=3$, $AB=7$ см бошад, порчаи CD , инчунин нисбати масоҳатҳои секунҷаҳои AOB ва COD -ро ёбед.
- Дар секунҷаи ABC ва $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $AB:A_1B_1=AC:A_1C_1=4:3$.
 а) агар порчаи AB аз порчаи A_1B_1 5 см зиёд бошад, тарафҳои AB ва A_1B_1 -ро;
 б) агар порчаи A_1B_1 аз AB 6 см кам бошад, тарафҳои AB ва A_1B_1 -ро;
 в) агар ҳосили ҷамъи масоҳатҳои секунҷаҳои додашуда 400 см² бошад, масоҳати ҳар як секунҷаро ёбед.
- Агар катетҳои секунҷаи росткунҷа якҷоя ба катетҳои секунҷаи росткунҷаи дуюм мутаносиб бошанд, монанд будани ин секунҷаҳоро исбот кунед.
- Дар секунҷаи ABC $AB=15$ м, $AC=20$ м, $BC=32$ м. Ба тарафи AB -и секунҷа порчаи $AD=9$ м, ба тарафи AC порчаи $AE=12$ м гузошта шуд. Порчаи DE -ро ёбед.
- Монанд будани секунҷаи росткунҷаи катетҳояш 3 дм ва 4 дм ва секунҷаи росткунҷаи яке аз катетҳояш 8 дм ва гипотенузааш 10 дм-ро исбот кунед.
- Порчаи AB ва хати ростии l дар нуқтаи O бурида мешаванд. Ба хати ростии l перпендикулярҳои AA_1 ва BB_1 фуруварда шудаанд. Агар $AA_1=2$ см, $OA_1=4$ см ва $OB_1=3$ см бошад, порчаҳои BB_1 , OA ва AB -ро ёбед.

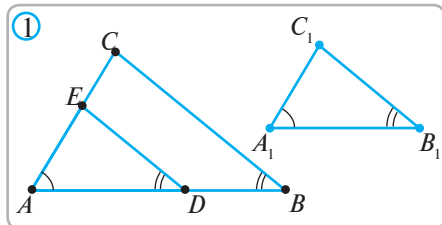


9

АЛОМАТИ СЕЮМИ МОНАНДИИ СЕКУНЧАҲО

Теорема. (Аломати ТТТ монандии секунҷаҳо). Агар се тарафи як секунҷа ба се тарафи секунҷаи дигар бо равиши мувофиқ мутаносиб бошад, ин гуна секунҷаҳо монанд аст.

$$\Delta ABC, \Delta A_1B_1C_1, \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} \text{ (расми 1)} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$$



Исбот. Дар тарафи AB секунҷаи ABC нуктаи D -ро ҳамин тавр мегузорем, ки $AD = A_1B_1$ шавад. Хати рости параллелии ба тарафи BC аз нуктаи D гузаронидашуда тарафи AC -ро дар нуктаи E мебурад. Он гоҳ мувофиқи аломати KK секунҷаҳои ΔADE ва ΔABC монанд аст. Мувофиқи таърифи шарти теорема:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} \quad \text{ва} \quad \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE}.$$

Аммо мувофиқ сохтан $A_1B_1 = AD$ буданаширо ба ҳисоб гирем, $B_1C_1 = DE$ ҳосил мешавад. Ҳамин тавр, мувофиқи аломати ТКТ баробарии секунҷаҳои ΔADE ва $\Delta A_1B_1C_1$ баробар аст ва $\Delta ADE \sim \Delta ABC$ мебошад. Аз ин мебарояд, ки $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$. **Теорема исбот шуд.**

Масъала. Агар аз ду секунҷаи баробарпахлу асос ва тарафи паҳлуи яке аз инҳо ба асос ва тарафи паҳлуи дуюм мутаносиб бошад, монанд будани ин секунҷаҳоро исбот кунед.

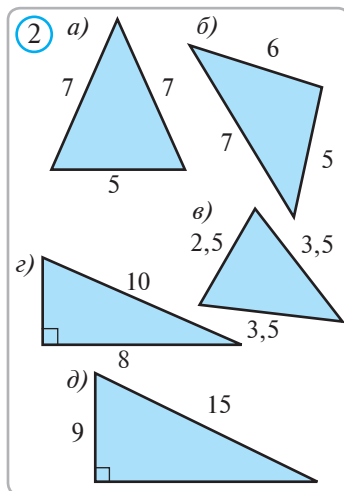
$$\Delta ABC, AB = BC, \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$$

Исбот. Аз баробарии $AB = BC$, $A_1B_1 = B_1C_1$ ва аз нисбати додашуда $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ баробариҳои $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$ -ро ҳосил мекунем. Бинобар ин мувофиқи аломати ТТТ секунҷаҳои $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Савол, масъала ва супориш

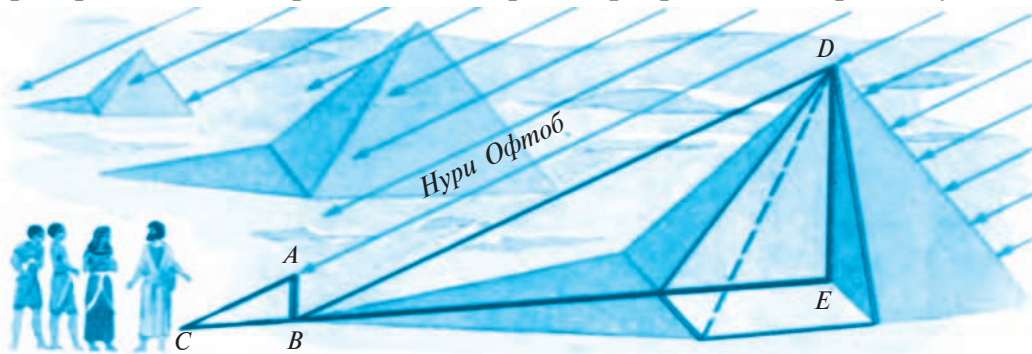
- Аломати ТТТ-монандии секунҷаҳоро гуфта диҳед ва исбот намоед.
- Агар $AC = 14$ см, $AB = 11$ см, $BC = 13$ см, $A_1C_1 = 28$ см, $A_1B_1 = 22$ см, $B_1C_1 = 26$ см бошад, оё секунҷаҳои ABC ва $A_1B_1C_1$ монанд аст?
- Ҷуфти секунҷаҳои монанди расми 2-ро нишон диҳед.

4. Монанди тарафҳои паҳлуи трапетсияи $ABCD$ AB ва CD давом дода шавад дар нуктаи E бурида мешавад. Агар $AB=5$ см, $BC=10$ см, $CD=6$ см, $AD=15$ см бошад, масоҳати секунҷаи AED -ро ёбед.
5. Асосҳои трапетсия 6 см ва 9 см, баландиаш 10 см. Масофаи байни нуктаи буриши диагонало ва асосхоро ёбед.
6. Исбот кунед, ки ду секунҷаи дилхоҳи баробартараф монанд мебошад.
7. Ба дохили секунҷаи баробарпаҳлу, ки асосаш 12 см, баландиаш 8 см аст, квадрат ҳамин тавр кашида шудааст, ки ду қуллаи он дар асоси секунҷа, ду қуллаи боқимонда дар тарафҳои паҳлӯй меҳобад. Тарафи квадраторо ёбед.
- 8*. Баландиҳои AA_1 ва BB_1 дар секунҷаи тезқунҷаи ABC гузаронида шудааст. Исбот кунед, ки $ABC \sim A_1B_1C$ аст.
9. Масоҳати ду секунҷаи монанд ба 6 ва 24 баробар аст. Периметри яке аз онҳо аз дуюмаш 6-то зиёд аст. Периметри секунҷаи калонро ёбед.



Лавҳаҳои таърихӣ.

Ин воқеа асри VI пеш аз мелод рӯй додааст. Ҳамон вақт юнониён умуман бо геометрия машғул набуданд. Файласуфи Юнон Фалес барои шиносӣ бо фанҳо дар Миср ба он ҷо таширф овард. Мисриён ба ӯ масъалаи душворро доданд: баландии яке аз аҳромҳои бузургро чӣ тавр ёфтан мумкин? Фалес ҳалли содда ва ҷозибаноки ин масъаларо ёфт. Вай ба замин чӯбчае кӯфт ва гуфт: «Қадам вақте ки сояи ин чӯбча ба дарозии баробар мешавад, дарозии сояи аҳром ҳам ба баландии аҳром (пирамида) баробар мешавад». Барои асоснок кардани фикри Фалес ҳаракат кунед.



10 АЛОМАТҲОИ МОНАНДИИ СЕКУНЧАҲОИ РОСТКУНЧА

Маълум аст ки яке аз кунҷҳои секунҷаи росткунча аз кунҷи рост иборат аст. Аз хамин сабаб дар ин гуна секунҷаҳо аломатҳои монандӣ содда гардонда мешаванд.

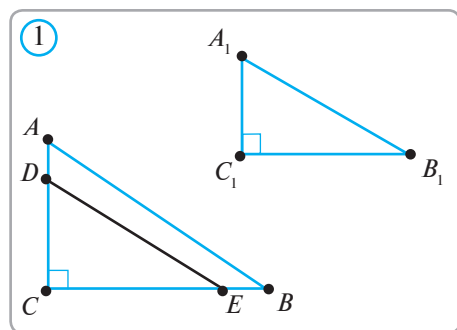
Теоремаи 1. Яке аз кунҷҳои тези секунҷаи росткунча мувофиқан ба кунҷи тези секунҷаи росткунчаи дигар баробар бошад, онҳо монанд мешаванд.

Теоремаи 2. Катетҳои секунҷаҳои росткунчаҳо бо равиши мувофиқ ба якдигар мутаносиб бошанд, онҳо монанд мешаванд.

Теоремаи 3. Катет ва гипотенузаи яке аз секунҷаи росткунча ба катет ва гипотенузаи секунҷаи дигар бо равиши мувофиқ мутаносиб бошад, онҳо монанд мешаванд.

Дуруст будани аломатҳои якуму дуёми он худ аз худ аён аст. Биёед, аломати сеюмо исбот кунем.

$$\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1, \angle C = 90^\circ, \angle C_1 = 90^\circ, \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$$



Исбот. Ба тарафи BC секунҷаи ABC порчаи C_1B_1 -ро бо шарти $CE = C_1B_1$ мегузарем ва $DE \parallel AB$ -ро мегузаронем (расми 1). Он гоҳ мувофиқи аломати КТК монандии секунҷаҳо, $\triangle DEC$ ва $\triangle ABC$ монанд мешаванд. Тарафҳои мувофиқи секунҷаҳои монанд мутаносибанд:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{CB}{CE}.$$

Мувофиқи сохта шуданаш он $CE = C_1B_1$. Аз

$$\text{ин рӯй, баробарии } \frac{AB}{DE} = \frac{CB}{C_1B_1} \quad (1)$$

чой дорад. Аз тарафи дигар мувофиқи шарти теорема $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$ (2) аст.

Аз баробариҳои (1) ва (2) $DE = A_1B_1$ буданашро муайян мекунем. $\triangle A_1B_1C_1$ ва $\triangle DEC$ -хоро дида мебароем. Дар онҳо:

1. $CE = C_1B_1$ (аз рӯйи сохтан), 2. $DE = A_1B_1$ (баробарии исботшуда).

Мувофиқи баробарии секунҷаҳои росткунча аз рӯйи як катет ва гипотенузааш $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle DEC$.

Аз тарафи дуум бошад, $\triangle ABC \sim \triangle DEC$. Дар ин ҳолат $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ мешавад. **Теорема исбот шуд.**

Масъала. Агар дар ду секунҷаи баробарпахлу баландӣ ва тарафи паҳлуи яке ба баландӣ ва тарафи паҳлуи дуюм мутаносиб бошад, монанд будани ин секунҷахоро исбот кунед (расми 2).

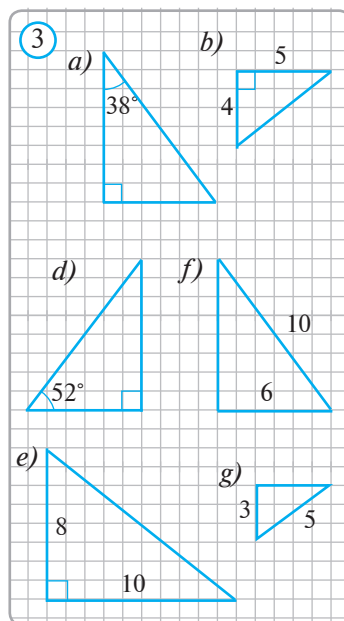
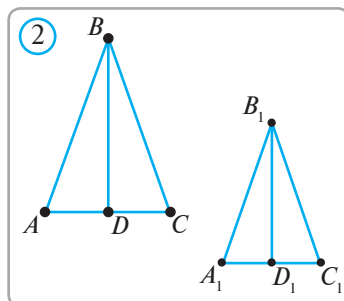
Исбот. Секунҷаҳои росткунҷаи ABD ва $A_1B_1D_1$ - ро дида мебароем. Мувофиқи шарт яке аз катет ва гипотенузаи онҳо байни худ мутаносибанд. Бинобар ин, дар асоси теоремаи 3 $\triangle ABD \sim \triangle A_1B_1D_1$ мешавад. Он гоҳ $\angle DBA \sim \angle D_1B_1A_1$.

Биссектриса ҳам будани баландии ба асоси секунҷаи баробар паҳлу гузаронидашударо ба ҳисоб гирем, $\angle B = 2\angle DBA = 2\angle D_1B_1A_1 = \angle B_1$ мешавад.

Дар натиҷа, дар секунҷаҳои ABC ва $A_1B_1C_1$ ба баробариҳои

$$\angle B = \angle B_1 \text{ ва } \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} \text{ соҳиб мешавем.}$$

Аз ин рӯ мувофиқи аломати ТКТ секунҷаҳо монанд: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. **Теорема исбот шуд.**

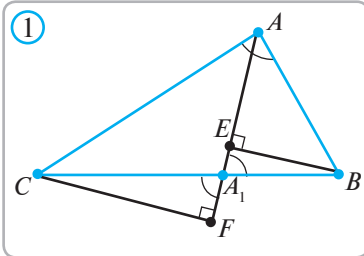


? Савол, масъала ва супориш

1. Аломатҳои монандии секунҷаҳои росткунҷаро ҷӯед ва исбот кунед.
2. Аз расми 3 секунҷаҳои монандро ёбед.
3. Яке аз катети секунҷаи росткунҷаи ба секунҷаи росткунҷаи катетҳояш 3 м ва 4 м монанд буда 27 м бошад, катети дуюми он чанд м мешавад?
4. Ду секунҷаи росткунҷаи масоҳатҳояшон 21 м² ва 84 м² монанданд. Агар яке аз катети секунҷаи якум 6 м бошад, катетҳои секунҷаи дуюмро ёбед.
5. Ба як давра ду секунҷаи росткунҷаи монанд дарун кашида шудааст. Баробарии ин секунҷахоро исбот кунед.
- 6*. Дар секунҷаи росткунҷаи катетҳояш 10 см ва 12 см квадрати яке аз кунҷаш умумӣ дарун кашида шудааст. Агар яке аз қуллаҳои квадрат дар гипотенуза буданаш маълум бошад, тарафи квадраторо ёбед.
- 7*. Секунҷаи ABC дода шудааст. Дар он ромби $ADEF$ чунон дарун кашида шудааст, ки нуқтаҳои D , E ва F бо равиши мувофиқ ба тарафҳои AB , BC ва CA -и секунҷа меҳобад. Агар $AB=c$, $AC=b$ бошад, тарафи ромбро ёбед.

11

ТАТБИҚИ АЛОМАТҲОИ МОНАНДӢ БАРОИ ИСБОТКУНИИ
МАСЪАЛАҲО



Масъалаи 1. Исроти кунед, ки биссектрисаи секунча тарафи муқобилро ба порчаҳои ба ду тарафи боқимонда мутаносиб ҷудо мекунад.

$$\triangle ABC, AA_1 \text{ — биссектриса (расми 1)} \Rightarrow \frac{AB}{A_1B} = \frac{AC}{A_1C}$$

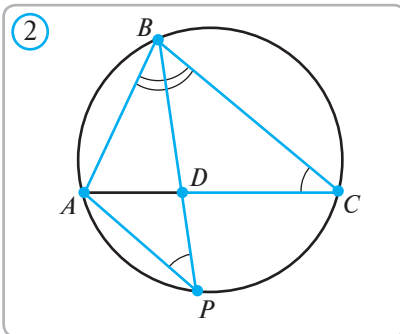
Ҳалли он. Ба хати рости AA_1 перпендикулярӣ BE ва CF мегузаронем. Он гоҳ аз $\angle CAF = \angle BAE$ буданаш секунҷаҳои CAF ва BAE монанд мешаванд. Тарафҳои секунҷаҳои монанд мутаносибанд:

$$\triangle CAF \sim \triangle BAE \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{CF}{BE}. \quad (1)$$

Ба монанди он:

$$\triangle CA_1F \sim \triangle BA_1E \Rightarrow \frac{CA_1}{BA_1} = \frac{CF}{BE}. \quad (2)$$

Баробариҳои 1 ва 2-ро муқоиса кунем $\frac{AC}{AB} = \frac{CA_1}{BA_1}$, яъне $\frac{AB}{A_1B} = \frac{AC}{A_1C}$ мешавад. Ин порчаҳои BA_1 ва CA_1 бо порчаҳои AB ва AC мутаносиб буданашро мефаҳмонад.



Масъалаи 2. Биссектрисаи BD -и секунҷаи ABC давраи аз секунча берун кашидашударо дар нуқтаҳои B ва P мебурад. $\triangle ABP \sim \triangle BDC$ буданашро исбот кунед (расми 2).

Ҳалли он. Дар $\triangle ABP$ ва $\angle BDC$:

- $\angle DBC = \angle ABP \Leftarrow$ мувофиқи шарт;
- $\angle DCB = \angle APB \Leftarrow$ як қамонро дарҳам мекашанд.

Аз ин рӯ, баробариҳо мувофиқи аломати KK секунҷаҳои $\triangle ABP \sim \triangle BDC$ монанд (ба як қамон такя мекунад) буданашро нишон медиҳад.

Савол, масъала ва супориш

- Порчаҳои биссектрисаи кунҷи фаромада ҷудо карда ва мутаносибии байни ду тарафи боқимондаро навишта нишон диҳед.
- Аз росткунҷаи рости C -и секунҷаи росткунҷаи ABC баландии CD гузаронида шудааст. $\angle ACD = \angle CBD$ шуданашро исбот кунед. Аз шакли

- ҳосилшуда чанд секунҷаи ба ҳам монандро нишон дода метавонед?
3. Дар асоси маълумотҳои расми 3 х-ро ёбед.
 4. Аз секунҷаи ABC биссектрисаи AD гузаронида шудааст. Агар $CD=4,5$ м; $BD=13,5$ м ва периметри секунҷаи ABC 42 м бошад, тарафҳои AB ва AC -и онро ёбед.
 5. Медианаҳои секунҷаи ABC дар нуқтаи N бурида мешавад. Агар масоҳати секунҷаи ABC 87 дм^2 бошад, масоҳати секунҷаи ANB ба чӣ баробар аст?
 6. Масофа аз нуқтаи буриши медианаҳои секунҷаи ABC нуқтаи N то тарафҳои AB ва BC мувофиқан 3 дм ва 4 дм. Агар $AB=8$ дм бошад, тарафи BC -ро ҳисоб кунед.
 - 7*. Маълум аст, ки хати рости ба асоси трапетсия параллел яке аз тарафҳои паҳлуиро ба нисбати $m:n$ чудо мекунад. Ин хати рост тарафи дуҷуми паҳлуи онро бо кадом нисбат чудо мекунад?

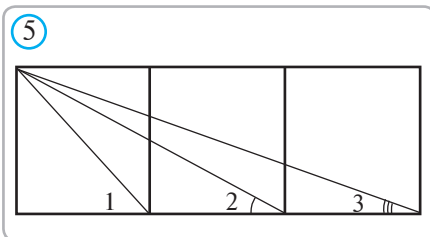
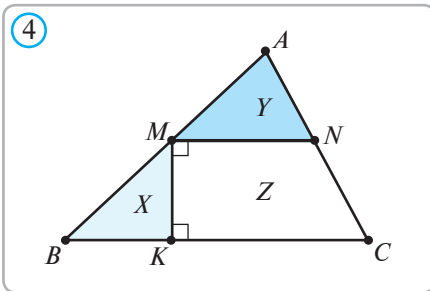
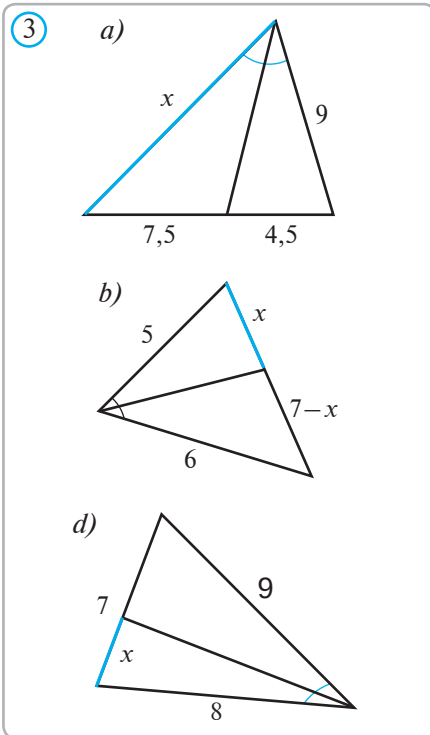


Масъалаҳои шавқовар

Геометрия ва забони англисӣ. Масъалаи геометрии ба забони англисӣ дар поён додашударо ҳаллу фасл карда бинед. Бо ин амал ҳам аз забони англисӣ, ҳам аз геометрия ба чӣ гуна қодир будани худро озмуда мебинед.

1) **Dissection Puzzle:** Let M be the midpoint of the side AB of a given triangle ABC . The triangle has been dissected into parts X , Y , Z along the lines MN and MK passing through M such that MN is parallel while MK is perpendicular to the base BC (picture 4). Show how the three pieces can be fitted together to make a rectangle, respectively two different parallelograms.

- 2) Look at the picture 5 and proof $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 90^\circ$.



12

ҲАЛЛИ МАСЪАЛАҲО

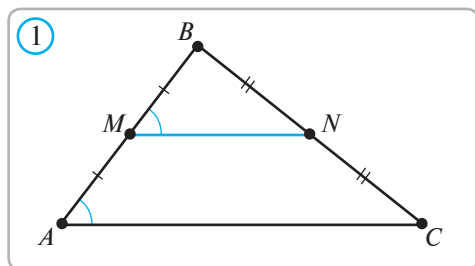
Масъалаи 1. Аз монандии секунҷаҳо истифода бурда хати миёнаи секунҷа ба як тарафи секунҷа параллел ва ба нисфи ана ҳамин тараф баробар буданашро исбот кунед.



$\triangle ABC$, MN — хати миёна (расми 1): $MA = MB$, $NC = NB$



$MN \parallel AC$, $MN = \frac{1}{2} AC$



Ҳалли он. Дар $\triangle ABC$ ва $\triangle MBN$:

$$\angle B \text{ — кунчи умумӣ, } \frac{BM}{AB} = \frac{BN}{BC} = \frac{1}{2}.$$

Бинобар ин, мувофиқи аломати ТКТ ин ду секунҷа монанданд. Акнун мушоҳида ро ин тавр давом медиҳем:

$$\triangle MBN \sim \triangle ABC \Rightarrow \begin{cases} \angle BMN = \angle A, \\ \frac{MN}{AC} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MN \parallel AC, \\ MN = \frac{1}{2} AC. \end{cases}$$

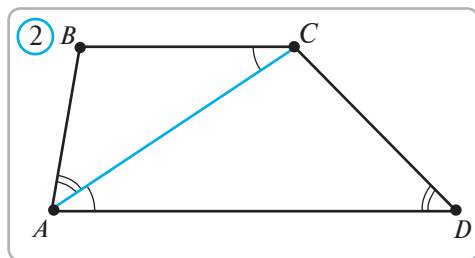
Масъалаи 2. Диагонали AC -и трапетсияи $ABCD$, ки асосҳояш BC ва AD аст, онро ба ду секунҷаи монанд ҷудо мекунад. $AC^2 = BC \cdot AD$ буданашро исбот кунед.



$ABCD$ — трапетсия, $BC \parallel AD$, $\triangle ABC \sim \triangle DCA$ (расми 2)



$AC^2 = BC \cdot AD$



Ҳалли он. Қадами 1. Кунҷҳои баробари секунҷаҳои ABC ва ACD -ро муқоиса мекунем. $\angle ACB = \angle CAD$, чунки ин кунҷҳо — кунҷҳои дарунии ивазшаванда. $\angle B \neq \angle D$, чунки $ABCD$ — трапетсия (дар акси ҳол,

$$\angle D + \angle A = \angle B + \angle A = 180^\circ,$$

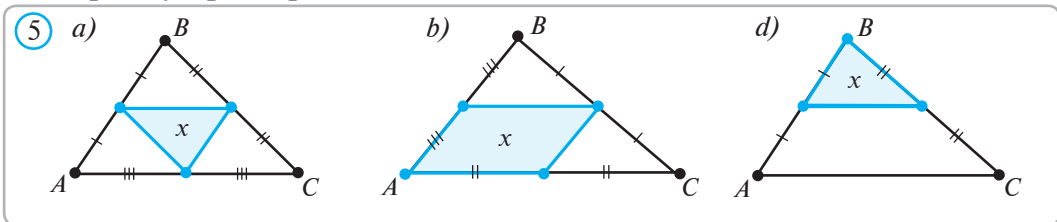
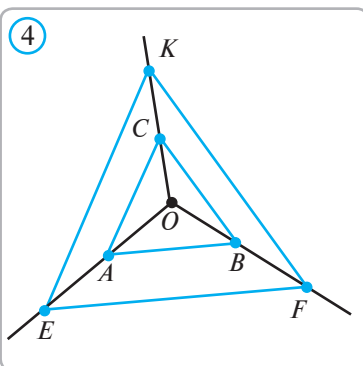
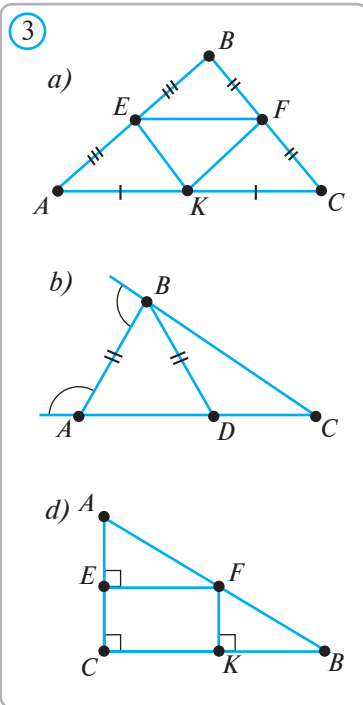
яъне $AB \parallel CD$ буда, $ABCD$ трапетсия

намегардад. Ҳамин тариқ, $\angle D = \angle BAC$ ва $\angle ACD = \angle B$.

Қадами 2. Нисбати тарафҳои мувофиқи секунҷаҳои ABC ва ACD -ро менависем: $\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{AC}$, аз ин $AC^2 = BC \cdot AD$.

? Савол, масъала ва супориш

1. а) Агар сояи одами қадаш 170 см 1 м бошад, сояи дарахти баландиаш 5, 4 м чӣ қадар мешавад?
б) Кунчи қуллаҳои ду секунҷаи баробарпахлу баробар аст. Тарафи паҳлуи секунҷаи якум 17 см, асосаш 10 см, асоси секунҷаи дуюм 8 см аст. Тарафи паҳлуи секунҷаи дуюмро ёбед.
2. Аз ҳар як нақшаи расми 3 секунҷаҳои монандро ёбед.
3. Иббот кунед, ки медианаи AP -и секунҷаи ABC порчаи дилхоҳи ба тарафи BC параллел ва қуллаҳояш дар тарафҳои AB ва AC ҳобидаро ба ду қисми баробар тақсим мекунад.
4. Дар масофаи баробар ҳобидани қуллаҳои секунҷа аз хати росте, ки хати миёнаи секунҷаро дар бар мегирад, иббот кунед.
5. Диагоналҳои чоркунҷаи $ABCD$ -и ба давра дарункашидашуда дар нуқтаи O бурида мешаванд. Иббот кунед, ки $\angle AOB \sim \angle COD$.
6. Дар соҳаи дохили секунҷа нуқтаи O ва дар нурҳои OA , OB , OC бо равиши мувофиқ нуқтаҳои E , F , K гирифта шудаанд (расми 4). Агар $AB \parallel EF$ ва $BC \parallel FK$ бошад, иббот кунед, ки секунҷаҳои ABC ва EFK монанданд.
- 7*. Хати росте аз буриши диагоналҳои трапетсия гузаранда яке аз асосҳои трапетсияро дар нисбати $m:n$ тақсим мекунад. Ин хати рост асоси дуюмро дар кадом нисбат тақсим мекунад?
8. Агар масоҳати секунҷаи ABC ба S баробар бошад, масоҳати соҳаҳои бо x ишора кардашударо аз расми 5 ёбед.



13

ДОНИШИ ХУДРО САНЧИДА БИНЕД

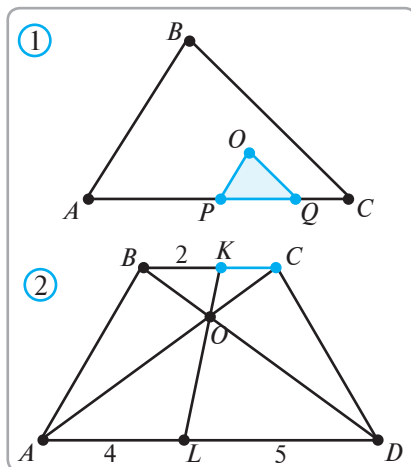
I. Тестҳо

1. **Кадоме аз таърифҳои зерин дурустанд: ду секунча монанд гуфта мешавад, агар:**
 - А) Кунҷҳои онҳо мувофиқан баробар бошанд;
 - Б) Тарафҳои онҳо мувофиқан баробар бошанд;
 - В) Тарафҳои онҳо мувофиқан мутаносиб ва кунҷҳои мувофиқ баробар бошанд;
 - Г) Тарафҳои мувофиқашон баробар ва кунҷҳои мувофиқ ҳам баробар бошанд.
2. **Нисбати масоҳатҳои ду секунчаи монанд ба чӣ баробар аст?**
 - А) Ба коэффисиенти монандӣ;
 - Б) Ба нисбати тарафҳои мувофиқ;
 - В) Ба нисбати периметрҳои онҳо;
 - Г) Ба квадрати коэффисиенти монандӣ.
3. **Кадоме аз тасдиқотҳои зерин дуруетанд: ду секунча монанд мешавад, агар:**
 - А) Ду кунҷи яке ба ду кунҷи дуюм баробар бошад;
 - Б) Ду тарафи яке аз онҳо ба ду тарафи дуюм баробар бошад;
 - В) Якогӣ кунҷҳояшон баробар ва ду тарафҳояшон мутаносиб бошанд;
 - Г) Якогӣ кунҷҳояш баробар ва ятогӣ тарафҳояш мутаносиб бошад.
4. **Дурусташро ёбед: агар ду секунча монанд бошад,**
 - А) Баландиҳояш баробар мешаванд;
 - Б) Тарафҳояшон мутаносиб мешаванд;
 - В) Тарафҳояшон баробар мешаванд.
 - Г) Масоҳатҳояшон баробар мешаванд.
5. **Нисбати периметрҳои бисёркунҷаҳои монанд ба чӣ баробар аст?**
 - А) Ба квадрати тарафҳои мувофиқ;
 - Б) Ба коэффисиенти монандӣ;
 - В) Ба квадрати коэффисиенти монандӣ;
 - Г) Ба нисбати масоҳатҳо

II. Масъалаҳо

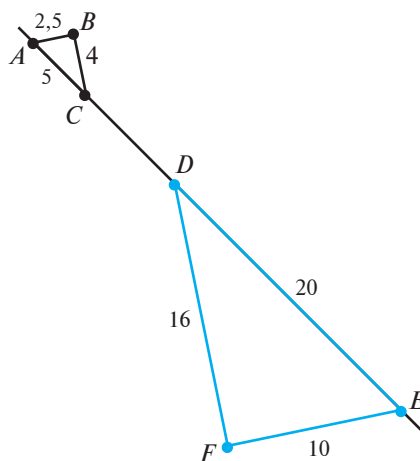
1. Миёнаҳои тарафҳои AB ва AC -и секунчаи ABC бо равиши мувофиқ нуқтаҳои E ва F бошад. Агар масоҳати секунчаи AEF 3 см^2 бошад, масоҳати секунчаи ABC -ро ёбед.
2. Хати ростии ба тарафи AC -и секунчаи ABC параллел тарафҳои AB ва BC -ро бо равиши мувофиқ дар нуқтаҳои N ва P мебурад. Агар $AN = 4$, $NB = 3$, $BP = 3,6$ бошад, тарафи BC -ро ёбед.

3. Дар тарафи AB -и секунҷаи тезкунҷаи ABC нуктаи K гирифта шудааст. Агар $AK=3$, $BK=2$ баробар ва баландии BD -и секунҷа ба 4 баробар бошад, масофаи аз нуктаи K то порчаи AC -ро ёбед.
4. Аз нуктаи K -и тарафи BC -и параллелограмми $ABCD$ нурҳои DK ва AB гузаронида шудааст, ки дар нуктаи F бурида мешаванд. Агар $AD=4$, $DK=5$ ва $DC=5$ бошад, периметри секунҷаи BKF -ро ёбед.
5. Аз нуктаи O , ки дар дохили секунҷаи ABC гирифта шудааст, ба тарафи AB ва BC хати рости параллел гузаронида шудааст. Ин хатҳои рост тарафи AC -ро бо равиши мувофиқ дар нуктаҳои P ва Q мебурад. Агар $PQ=2$, $AC=7$ ва масоҳати секунҷаи ABC ба 98 баробар бошад, масоҳати секунҷаи POQ -ро ёбед.
6. Дар асоси BC ва AD трапетсияи $ABCD$ мувофиқан нуктаҳои K ва L гирифта шудаанд. Порчаи KL аз нуктаи буриши диагоналҳои трапетсия мегузарад. Агар $AL=4$, $LD=5$ ва $BK=2$ бошад, порчаи KC -ро ёбед.



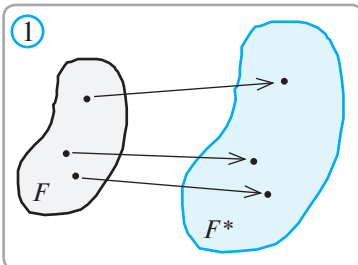
III. Худатонро озмуда бинед (Кори намунавии назоратӣ)

1. Диагонали AC -и трапетсияи $ABCD$ онро ба секунҷаҳои монанди $\triangle ABC$ ва $\triangle ACD$ чудо мекунад. Агар $BC=4$ м, $AD=9$ м бошад, дарозии диагонали AC -ро ёбед..
2. Масоҳатҳои ду секунҷаи монанд 50 dm^2 ва 32 dm^2 , ҳосили ҷамъи периметрҳои онҳо 117 dm бошад, периметри ҳар як секунҷаро ёбед.
3. Монандии секунҷаҳои дар расм тасвирёфтaro исбот кунед ва байни ҳам ҷойгиршавии хатҳои рости BC ва DF -ро шарҳ диҳед.
4. (Иловагӣ). Баландии BD ва AE -и секунҷаи тезкунҷаи ABC гузаронида шудааст. $DC \cdot AC = EC \cdot BC$ буданаширо исбот кунед.



14

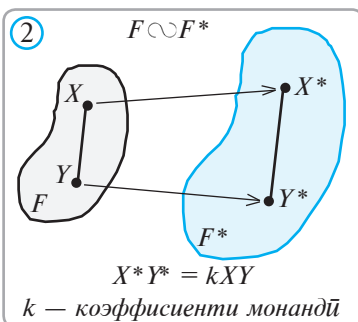
МОНАНДИИ ШАКЛҲОИ ГЕОМЕТРӢ



Дар дарсҳои пештара бо мафҳуми бисёркунчаҳои монанд шинос шудем. Мафҳуми монандиро на фақат ба бисёркунчаҳо, балки ба шаклҳои геометрии дилхоҳ дохил кардан мумкин аст.

Шаклҳои F ва F^* дода шуда бошад. Агар ба ҳар як нуқтаи шакли F ягон нуқтаи шакли F^* мувофиқ ва баръакс ҳар як нуқтаи шакли F^* ба ягон нуқтаи шакли F мувофиқ гузошта шуда бошад, шакли F ба шакли F^* табдил ёфта доништа мешавад (расми 1).

Таъриф. Агар ҳангоми шакли F -ро ба шакли F^* табдил додан масофаҳои байни нуқтаҳо ба адади аз O фарқкунандаи муайян зиёд шавад, ин гуна табдилдиҳӣ **табдилдиҳии монандӣ** номида мешавад (расми 2).



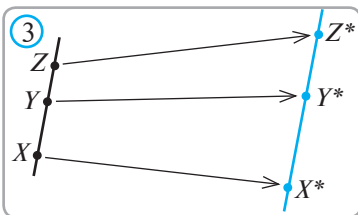
Ин таърифро дигар хел тавзеҳ додан мумкин: бигузур, дар натиҷаи ягон табдилдиҳии монандӣ ба нуқтаҳои ихтиёрии X, Y шакли F нуқтаҳои X^*, Y^* шакли F^* мувофиқ гузошта шуда бошад. Агар $X^*Y^* = k \cdot XY$, $k > 0$ бошад, ин табдилдиҳӣ **табдилдиҳии монандӣ** номида мешавад. Дар ин ҷо k барои тамоми нуқтаҳои X ва Y як адад буда, он **коэффициенти монандӣ** номида мешавад.

Агар шаклҳои F ва F^* дода шуда буда, табдилдиҳии монандии якеро ба дигаре гузаронанда мавҷуд бошад, шаклҳои F ва F^* байни худ **монанд** гуфта мешаванд. Монандии шаклҳо $F \sim F^*$ навишта мешавад. Агар коэффициент монандӣ k -ро ҳам нишон додан лозим бошад, $F \sim F^*$ навиштан мумкин.

Агар ҳангоми табдилдиҳии монандӣ нуқтаи X ба нуқтаи X^* мувофиқ гузошта шуда бошад, нуқтаи X ба нуқтаи X^* табдилёфта, ё ки гузашта мегӯянд.

Табдилдиҳии монандӣ ба хосиятҳои зерин молик аст:

Теорема. Табдилдиҳии монандӣ а) хати ростро ба хати рост; б) нуירו ба нур; в) кунҷро дар ҳолати нигоҳ доштани бузургии он ба кунҷ; г) порчаро ба порча мегузаронад, фақат дарозии порча ба k зиёд мешавад.



Исбот. а) Табдилдиҳии монандии коэффициент монандиаш k нуқтаҳои гуногун дар як хати рост хобидаи X^*, Y^* ва Z^* -ро бо равиш мувофиқ ба нуқтаҳои X, Y ва Z табдил

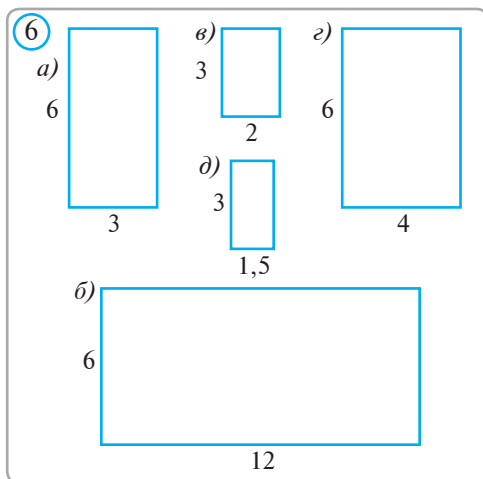
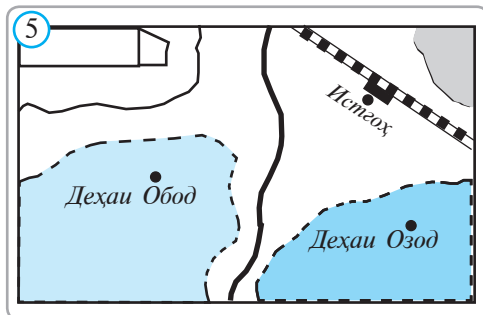
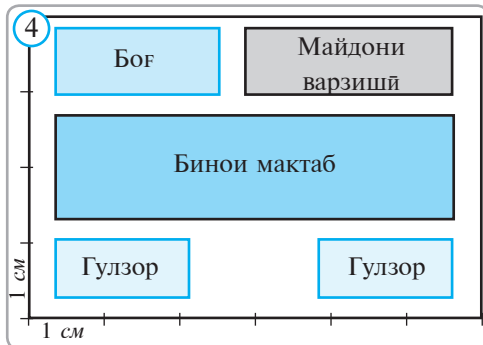
диҳад (расми 3). Яке аз нуктаҳои X, Y, Z , бигузур нуктаи Y дар байни ду нуктаи боқимонда ҳобад. Дар ин ҳолат $XZ = XY + YZ$. Дар асоси таърифи табдилдиҳии монандӣ:

$$X^*Z^* = k \cdot XZ = k \cdot (XY + YZ) = k \cdot XY + k \cdot YZ = X^*Y^* + Y^*Z^*.$$

Аз ин баробарии нуктаҳои X^* , Y^* ва Z^* дар як хати рост хобиданаш бармеояд. Ибтидои теоремаро танҳо ба банди а) овардем. Ибтидои бандҳои боқимондари ба ихтиёри Шумо чун машқ мегузorem.

? Савол, масъала ва супориш

1. Табдилдиҳии монандӣ чист?
2. Чӣ гуна шаклҳо шаклҳои монанд номида мешаванд?
3. Коэффициенти монандиро баробарии 2 гирифта, бо росткунҷаи бараш 3 см ва қадаш 4 см росткунҷаи монанд созад.
4. Дар расми 4 тарҳи ҳавли мактаб дар масштаби 1:1000 тасвир ёфтааст. Андозаҳои а) ҳавлӣ; б) бинои мактаб; в) гулзорҳо; г) майдони варзишӣ; д) боғро ёбед.
5. Агар харита дар масштаби 1:50000 тасвир карда шуда бошад (расми 5), масофаи байни деҳаҳои Озод ва Ободро ёбед.
6. Дар табдилдиҳии монандӣ кунҷи байни нурҳо тағйир намоебад, онро исбот кунед.
- 7*. Секунҷаи ABC ҳангоми табдилдиҳии монандӣ ба секунҷаи $A^*B^*C^*$ табдил меёбад. Агар коэффициенти монандӣ ба 0,6 ва периметри секунҷаи ABC баробари 12 см бошад, периметри секунҷаи $A^*B^*C^*$ -ро ёбед.
8. Аз расми 6 чуфти росткунҷаҳои монандро ёбед ва коэффициенти монандиро муайян созад.



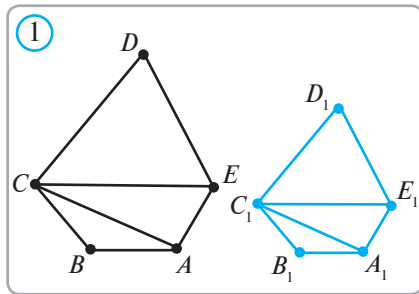
15

ХОСИЯТҲОИ БИСЁРКУНЧАҲОИ МОНАНД

Теоремаи 1. Нисбати периметрҳои бисёркунчаҳои монанд ба коэффисиенти монандӣ баробар аст.

Исбот. Дар ҳақиқат, бисёркунчаҳои, $A_1A_2...A_n$ ва $B_1B_2...B_n$ монанд буда, коэффисиенти монандӣ k бошад, он гоҳ $B_1B_2=k \cdot A_1A_2$, $B_2B_3=k \cdot A_2A_3$, ... , $B_nB_1=k \cdot A_nA_1$ мешавад. Аз ин баробарии $P=B_1B_2+B_2B_3+...+B_nB_1=k \cdot A_1A_2+k \cdot A_2A_3+...+k \cdot A_nA_1=k \cdot (A_1A_2+A_2A_3+...+A_nA_1)=k \cdot P_1$ -ро ҳосил мекунем. **Теорема исбот шуд.**

Теоремаи 2. Бисёркунчаҳои монандро ба бисёркунчаҳои монанди миқдорашон яхела ҷудо кардан мумкин.



Исбот. Бигуздор бисёркунчаҳои $ABCDE$ ва $A_1B_1C_1D_1E_1$ монанд буда, коэффисиенти монандӣ k бошад.

Аз қуллаҳои байни якдигар мувофиқи C ва C_1 диагонаҳои CA , CE ва C_1A_1 , C_1E_1 -ро мегузaronем. Дар натиҷа бисёркунчаҳо ба миқдори баробари секунҷаҳо ҷудо мешаванд. Монандии се ҷуфти секунҷаҳои мувофиқро нишон медиҳем.

1. $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. Чунки дар он секунҷаҳо мувофиқи шарт $\angle B = \angle B_1$, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = k$. Дар асоси аломати ТКТ-и монандии секунҷаҳо $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

2. Ҳамин тавр, $\triangle CDE \sim \triangle C_1D_1E_1$. Ин монандиро чун банди 1 исбот кунед.

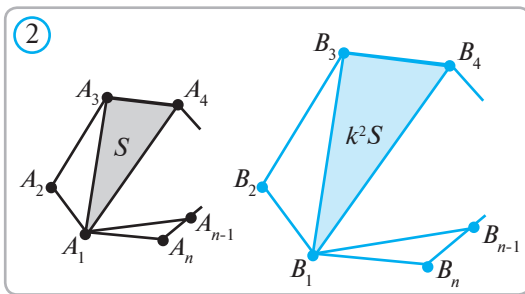
3. $\triangle ACE \sim \triangle A_1C_1E_1$. Кунҷҳои, $\angle CAE$ ва $\angle C_1A_1E_1$ -и ин секунҷаҳоро дида мебароем: $\angle CAE = \angle BAE - \angle CAB$, $\angle C_1A_1E_1 = \angle B_1A_1E_1 - \angle C_1A_1B_1$.

Дар ин ҷо, $\angle BAE = \angle B_1A_1E_1$ (кунҷҳои мувофиқи панҷкунҷаи монанди додашуда). $\angle CAB = \angle C_1A_1B_1$ (кунҷҳои мувофиқи секунҷаҳои монанди ABC ва $A_1B_1C_1$). Бинобар ин, $\angle CAE = \angle C_1A_1E_1$.

Тарафҳои AC ва AE , инчунин A_1C_1 ва A_1E_1 -ро дида мебароем: $AC=kA_1C_1$, чунки онҳо тарафҳои мувофиқи секунҷаҳои байни худ монанди ABC ва $A_1B_1C_1$, $AE=kA_1E_1$, чунки онҳо ҳам тарафҳои мувофиқи панҷкунҷаҳои монанди додашуда. Аз ин рӯ, дар асоси аломати ТКТ-и секунҷаҳои монанд $\triangle ACE \sim \triangle A_1C_1E_1$. Барои бисёркунчаҳои монанди дилхоҳ ҳам ин гуна мушоҳидаҳо ҷой доштани равшан аст. **Теорема исбот шуд.**

Теоремаи 3. Нисбати масоҳатҳои бисёркунчаҳои монанд ба квадрати коэффисиенти монандӣ баробар аст.

Исбот. Бигузур, бисёркунчаҳои $A_1A_2\dots A_n$ ва $B_1B_2\dots B_n$ монанд ва коэффисиенти монандӣ k бошад. Дар ин ҳол масоҳати секунҷаҳои $A_1A_2A_3$, $A_1A_3A_4$, ..., $A_1A_{n-1}A_n$ ба масоҳати секунҷаҳои $B_1B_2B_3$, $B_1B_3B_4$, ..., $B_1B_{n-1}B_n$ ба равиши мувофиқ монанд буда, нисбати масоҳатҳои секунҷаҳо ба k^2 баробар мешавад (расми 2).



$$S_{A_1A_2A_3} = k^2 S_{B_1B_2B_3}, \quad S_{A_1A_3A_4} = k^2 S_{B_1B_3B_4}, \quad \dots, \quad S_{A_1A_{n-1}A_n} = k^2 S_{B_1B_{n-1}B_n}.$$

Он гоҳ, $S_{A_1A_2\dots A_n} = k^2 S_{B_1B_2\dots B_n}$. **Теорема исбот шуд.**

Масъала. Нисбати масоҳатҳои ду бисёркунҷаи монанди периметрҳояшон 18 см ва 24 см-ро ёбед.

Ҳалли он. 1) Аз нисбати периметрҳои бисёркунҷаҳои монанд ба коэффисиенти монандӣ баробар буданаш истифода бурда, $k = 24 : 18 = 4 : 3$ буданашро меёбем. 2) Аз сабаби нисбати масоҳати бисёркунҷаҳои монанд ба квадрати коэффисиенти монандӣ баробар буданаш ин нисбат ба $k^2 = \frac{16}{9}$ баробар аст.

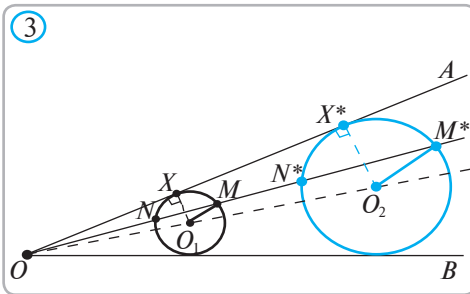
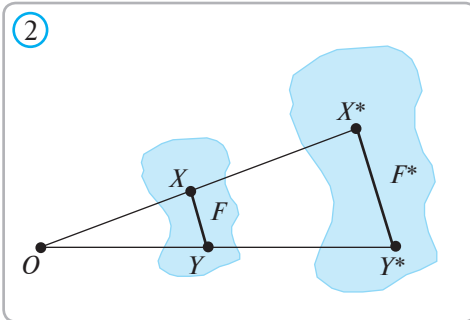
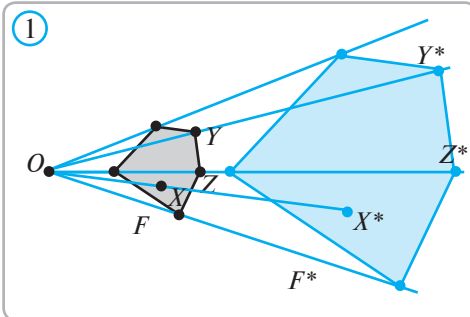
Ҷавоб: $\frac{16}{9}$.

Савол, масъала ва сунориш

1. Нисбати периметри бисёркунҷаҳои монанд ба чӣ баробар аст?
2. Теорема дар бораи нисбати масоҳатҳои бисёркунҷаҳои монандро шарҳ диҳед.
3. Оё секунҷа бо чоркунҷа монанд шуданаш мумкин аст?
4. Ду чоркунҷае, ки масоҳатҳояшон 6 m^2 ва 24 m^2 мебошанд, монанд аст. Коэффисиенти монандиро ёбед.
5. Периметрҳои ду бисёркунҷа 18 см ва 36 см, ҳосили ҷамъи масоҳатҳои онҳо бошад, 30 cm^2 аст. Масоҳатҳои ин бисёркунҷаҳоро ёбед.
6. Хати ростии ба яке аз тарафҳои секунҷаи периметраш 84 см параллел гузаронидашуда аз он секунҷаи периметраш 42 см ва масоҳаташ 26 cm^2 -ро ҷудо кард. Масоҳати секунҷаи додашударо ёбед.
7. Шаклҳои нисбат ба нуқтаи O симметрӣ оё монанд аст? Шаклҳои нисбат ба тир симметрӣ-чӣ? Коэффисиенти монандии онҳо ба чӣ баробар аст?
8. Пахтазори шакли чоркунҷа дар харита бо чоркунҷан масоҳаташ 12 cm^2 тасвир ёфтааст. Агар масштаби харита 1:1000 бошад, масоҳати ҳақиқии майдонро ёбед.
- 9*. Ҳосили ҷамъи периметрҳои ду секунҷаи монанди масоҳатҳояшон 8 cm^2 ва 32 cm^2 ба 48 см баробар аст. Периметри секунҷаҳоро ёбед.

16

ГОМОТЕТИЯ ВА МОНАНДИЙ



Яке аз табдилдиҳиҳои монанди содда-тарин ин гомотетия аст. Бигузор шакли F , нуқтаи O ва адади мусбати k дода шуда бошад. Ба воситаи нуқтаи дилхоҳи X -и шакли F нури OX мегузаронем ва ба ин нур порчаи OX^* -ро, ки дарозияш $k \cdot OX$ аст, мегузорем (расми 1). Бо ҳамин усул табдилдиҳие, ки ба ҳар як нуқтаи X -и шакли F нуқтаи X^* -ро мувофиқ мегузорад, **гомотетия** номида мешавад. Дар ин нуқтаи O маркази гомотетия, адади k коэффисиенти гомотетия, шаклҳои F ва F^* **шаклҳои гомотетӣ** номида мешаванд.

Теорема. Гомотетия табдилдиҳии монанд мешавад.

Исбот. Гомотетияи марказаш нуқтаи дилхоҳи O , коэффисиенташ k -ро дида мебароем. Бигузор, нуқтаҳои X ва Y -и шакли F аз нуқтаҳои X^* ва Y^* гузарад (расми 2). Дар ин ҳол, дар асоси таърифи гомотетия дар секунҷаҳои XOY ва X^*OY^* $\angle O$ — умумӣ ва $\frac{OX^*}{OX} = \frac{OY^*}{OY} = k$ мешавад. Бинобар ин секунҷаҳои XOY ва X^*OY^* аз рӯи ду тараф ва кунҷи байни онҳо монанд аст. Аз ин рӯ $\frac{X^*Y^*}{XY} = \frac{OX^*}{OX} = k$ ва $X^*Y^* = k \cdot XY$.

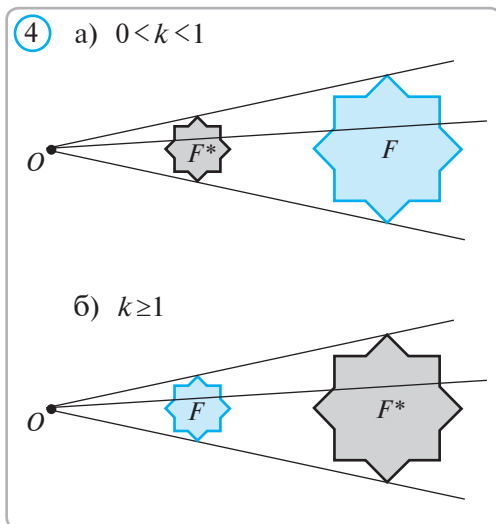
Теорема исбот шуд.

Масъала. Исбот кунед, ки ду давраи дилхоҳи ба тарафи кунҷҳои AOB расанда гомотетӣ ва нуқтаи O маркази ин гомотетия аст.

Ҳалли он. Давраҳои марказҳояшон O_1 ва O_2 буда бигузор ба тарафҳои кунҷи AOB расанда бошад (расми 3). Исбот мекунем, ки ин давраҳо гомотетӣ аст.

Давраҳо бо равиши мувофиқ ба нури OA дар нуқтаҳои X ва X^* расанда бошад (расми 3). Он гоҳ $\triangle OXO_1 \sim \triangle OX^*O_2$ (чунки $\angle XO O_1 = \angle X^*O O_2$ ва $\angle OXO_1 = \angle OX^*O_2 = 90^\circ$). Аз ин, $\frac{OX^*}{OX} = \frac{OO_2}{OO_1}$.

Нисбати тарафи ростро бо k ишора мекунем ва гомотетияи коэффисиенташ $k = \frac{OO_2}{OO_1}$, марказаш нуқтаи O бударо дида мебароем. Бигуздор дар ин гомотетия нуқтаи дилхоҳи M -и давраи марказаш O_1 ба нуқтаи M^* табдил ёфта бошад. Дар ин ҳол, $O_2M^* = k \cdot O_1M$ ёки $O_2M^* = \frac{O_2X^*}{O_1X} \cdot O_1M$. Аз ин баробари $O_1X = O_1M$ буданаш, баробарии $O_2M^* = O_2X^*$ -ро ҳосил мекунем. Ин нуқтаи M^* дар давраи марказаш O_2 , радиусаш O_2X^* хобиданастро мефаҳмонад. Бинобар ин даврахои дидашаванда байни худ гомотетӣ будаанд.



Машқи фаъолкунанда

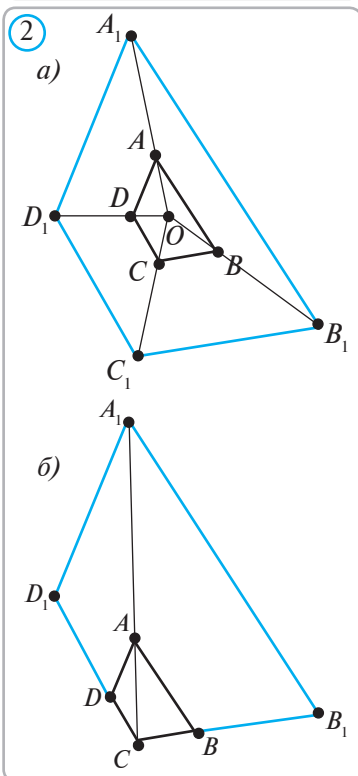
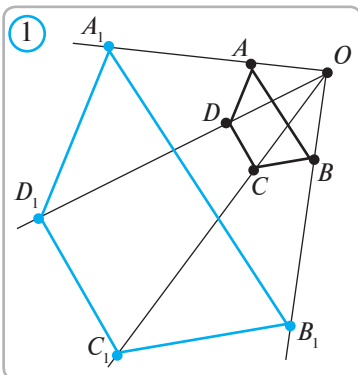
Дар расми 4 шаклҳои гомотетие тасвир ёфтааст, ки коэффисиенти гомотеташ а) $0 < k < 1$; б) $k \geq 1$ аст. Мувофиқи қимати коэффисиенти гомотетия аз хусуси “фишурдашавӣ” ва “дарозшавӣ”-и шаклҳои гомотетӣ чӣ гуна хулоса баровардан мумкин аст?

Савол, масъала ва супориш

1. Гомотетия чист? Маркази гомотетия, коэффисиенти он-чӣ?
2. Табдилдиҳии монандӣ будани геометрияро шарҳ диҳед.
3. Секунча кашед: а) дар даруни секунча; б) дар беруни секунча нуқтаи O -ро ишора кунед; в) ба гомотетияи марказаш O ва коэффисиенташ 2 нигоҳ карда, бо секунчаи додашуда секунчаи гомотетӣ созед.
4. Ду ромби периметрҳояш 18 см ва 27 см байни якдигар гомотетианд. Нисбати тарафҳо ва масоҳатҳои ин ромбҳоро ёбед.
5. Дар гомотетия нуқтаи X ба нуқтаи X^* , нуқтаи Y ба нуқтаи Y^* табдил меёбад. Агар нуқтаҳои X , X^* , Y , Y^* дар як хати рост нахобад, маркази ин гомотетияро ёбед.
6. Дар гомотетияи коэффисиенташ баробари 2 табдил ёфтани нуқтаи X ба нуқтаи X^* маълум. Маркази ин гомотетияро созед.
7. Шакли гомотетии ба давра монанд давра буданастро исбот кунед.
8. Давра кашед. Дар гомотетияи марказаш дар маркази давра ва коэффисиенташ баробари а) $\frac{1}{2}$; б) 2; в) 3; г) $\frac{1}{3}$ буда шакли гомолтетӣ созед.
9. Кунҷ ва дар соҳаи даруни он нуқтаи A дода шудааст. Даврае кашед, ки аз нуқтаи A гузашта, ба тарафҳои кунҷ расанда бошад.

17

СОХТАНИ БИСЁРКУНЧАҲОИ МОНАНД



То ин вақт ҳангоми исботи теоремаҳо ва ҳалли масъалаҳо секунҷаҳои монанди гуногунро сохта омадем. Бисёркунҷаҳои монанд чӣ тавр сохта мешаванд? Дар поён роҳҳои сохтани бисёркунҷаҳои монандро дар асоси гомотетия меоварем.

Масъала. Ба чоркунҷаи додашудаи $ABCD$ монанд чоркунҷаи $A_1B_1C_1D_1$ -ро созед, ки коэффисиенти монандиаш ба 3 баробар аст (расми 1).

Сохтани он. Дар ҳамворӣ нуқтаи дилхоҳи O мегирем. Нурҳои аз он ва қуллаҳои чоркунҷа гузарандаи OA, OB, OC ва OD -ро мегузаронем. Дар ин нурҳо порчаҳои аз нуқтаи O барояндаи $OA_1 = 3OA, OB_1 = 3OB, OC_1 = 3OC$ ва $OD_1 = 3OD$ -ро мегузорем. Чоркунҷаи ҳосилшудаи $A_1B_1C_1D_1$ чоркунҷаи қустуҷӯ кардашуда аст.

Асосноккунӣ. $ABCD \sim A_1B_1C_1D_1$ буданаширо нишон медиҳем.

1. **Мутаносиби тарафҳои мувофиқ.**

$$а) \triangle AOD \sim \triangle A_1OD_1 \Rightarrow \frac{A_1D_1}{AD} = \frac{OD_1}{OD} = \frac{OA_1}{OA} = 3; \quad (1)$$

$$б) \triangle DOC \sim \triangle D_1OC_1 \Rightarrow \frac{OD_1}{OD} = \frac{D_1C_1}{DC} = \frac{OC_1}{OC} = 3. \quad (2)$$

Аз баробарии (1) ва (2) $\frac{A_1D_1}{AD} = \frac{D_1C_1}{DC}$ буданаширо ҳосил мекунем.

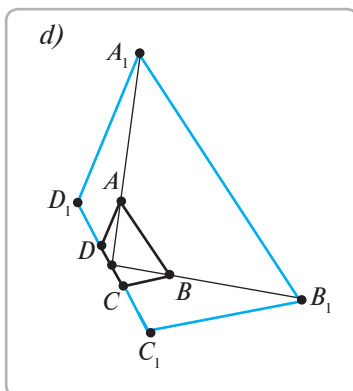
Ба ин монанд мутаносиб будани тарафҳои дигари чоркунҷаи монандро исбот кардан мумкин.

2. **Баробарии кунҷҳои мувофиқ.**

Аз баробар будани кунҷҳои мувофиқи секунҷаҳои монанд $\angle A_1D_1O = \angle ADO$, $\angle C_1D_1O = \angle CDO$. Дар ин ҷо $\angle A_1D_1C_1 = \angle A_1D_1O + \angle C_1D_1O = \angle ADO + \angle CDO = \angle ADC$, яъне кунҷҳои мувофиқи чоркунҷаҳои $A_1D_1C_1$ ва ADC баробаранд. Ба ҳамин монанд баробарии кунҷҳои мувофиқи дигари чоркунҷаҳои монанд исбот карда мешавад.

Аз ин рӯ, чоркунҷаҳои, $ABCD$ ва $A_1B_1C_1D_1$ монанд будаанд. Бисёркунҷае, ки ба бисёркунҷаи тарафхояш адади дилхоҳ дошта монанд аст, худи ҳамин тавр сохта мешавад.

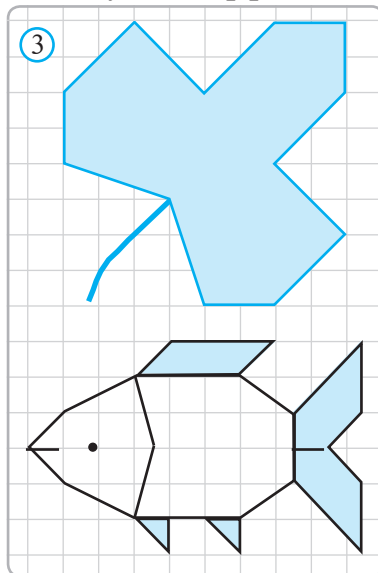
Маркази гомотетияро дар ин масъала аз соҳаи берунии чоркунҷа интихоб кардем. Умуман маркази гомотетияро дар соҳаи дохилии чоркуна (расми 2, а), дар ягон қуллааш (расми 2, б) ё ки дар ягон тарафаш (расми 2, в) гирифтани мон ҳам мумкин буд. Маркази гомотетияро дар кучое нагирем, коэффисиенти ба 3 баробари чоркунҷа ба чоркунҷаи $ABCD$ монанд аст ва монандӣ дорад, байни ҳам баробар мебошанд.



? Савол, масъала ва супориш

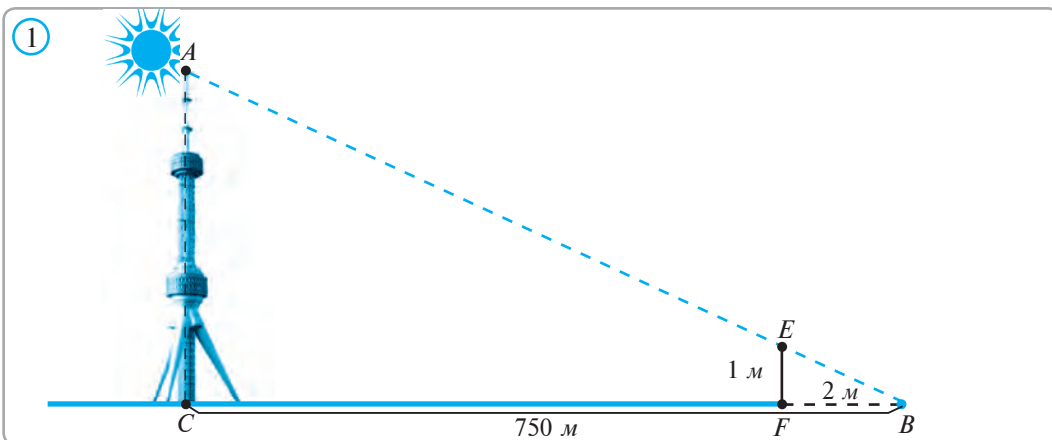
1. Сохтани бисёркунаи монанд ба бисёркунаи додашударо пай дар пай гӯед ва созед.
2. Ба дафтаратон ягон панҷкунҷаи $ABCDE$ кашед. Бо ёрии гомотетия ба ин панҷкунҷа панҷкунҷаи монанди коэффисиенти монандиаш баробари 0,5-ро созед. Маркази гомотетияро дар ҳолатҳои а) дар нуқтаи C будан; б) дар даруни панҷкунҷа будан; в) дар тарафи AB будан алоҳида дида бароед.
3. Дар ҳолати ба ҳисоб гирифтани катакҳо шаклҳои дар расми 3 додашударо ба дафтаратон кашед: а) барги ба барги додашуда коэффисиенти монандиаш ба 3 баробарии; б) моҳичаи ба моҳичаи додашуда коэффисиенти монандиаш ба 2 баробар бударо кашед.
4. Бисёркунҷаи F_1 ба бисёркунҷаи F_2 монанд, k — коэффисиенти монандӣ. Дар равиши мувофиқ бо харфҳои P_1, P_2, S_1, S_2 периметрҳои бисёркунҷаҳо ва масоҳати онҳо ишора карда шудаанд. Ҷадвали зеринро ба дафтаратон кўчонед ва онро пур кунед.

	P_1	P_2	S_1	S_2	k
а)	84		100	25	
б)	14	28		48	
в)		150	200	100	
г)		30	24		3



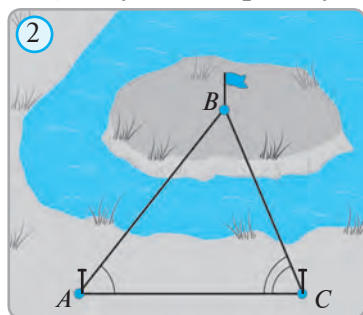
18

МАШҒУЛИЯТИ АМАЛӢ



1. Муайян кардани баландӣ.

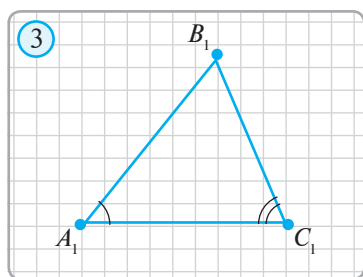
Дар Замин истода баландии телеманораи Тошкандро меёбем. Соияи куллаи манора — нуқтаи A дар нуқтаи B бошад. Чўбчаи EF -ро ҳамин тавр шокулӣ (вертикалӣ) ҷойгир мекунем, ки (расми 1) соияи куллаи он E ҳам дар нуқтаи B бошад. Бо C проексияи нуқтаи A -ро ифода мекунем. Дар ин ҳол, секунҷаҳои росткунҷаи ABC ва EBF монанд мешавад. Аз ин рӯ



$$\frac{AC}{EF} = \frac{BC}{BF} \quad \text{ё ки} \quad AC = \frac{BC \cdot EF}{BF}.$$

Масофаи BC , BF ва дарозии EF -ро чен намуда, аз формулаи ҳосилшуда баландии телеманора — дарозии порчаи AC -ро меёбем. Масалан, $EF = 1$ м, $BC = 750$ м, $FB = 2$ м бошад, дар ин ҳол $AC = 375$ м.

2. Чен кардани масофаи дастнорас



Бигузур чен кардани масофа аз нуқтаи A то нуқтаи B -и имкони рафтан надошта лозим гардид (расми 2). Аз нуқтаи A -и имкони рафтан дошта нуқтаи C -ро ишорат мекунем. Дар ин ҳол ҳангоми назар аз нуқтаи C бояд нуқтаҳои A ва B намудор бошанд ва масофаи AC -ро чен кардан лозим бошад. Бо ёрии асбобҳо кунҷҳои BAC ва ACB -ро чен мекунем. Бигузур $\angle BAC = \alpha$ ва $\angle ACB = \beta$ бошад. Дар қоғаз $\angle A_1 = \alpha$, $\angle C_1 = \beta$

-и секунҷаи $A_1B_1C_1$ -ро месозем. Дар он секунҷаҳои ABC ва $A_1B_1C_1$ секунҷаҳои аз рӯи як тараф ва ду кунҷашон монанд мешаванд (расмҳои 2 ва 3). Аз ин,

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} \text{ ё ки } AB = \frac{AC \cdot A_1B_1}{A_1C_1}.$$

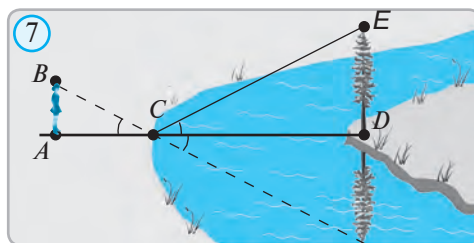
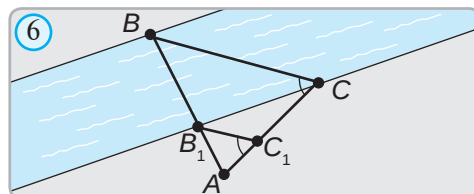
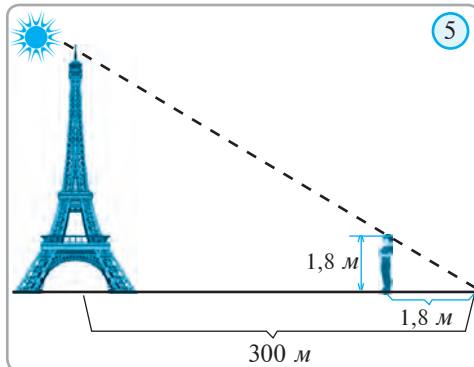
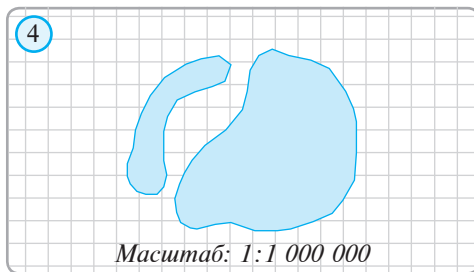
Масофаи AC ва порчаҳои A_1B_1 , A_1C_1 -ро чен намуда, бо ёрии формулаи ҳосилшуда порчаи AB ҳисоб карда мешавад. Барои осон кардани натиҷаи ҳисобкуниҳо нисбати $AC:A_1C_1$ -ро чун $100:1$, $1000:1$ гирифтани мумкин. Масалан, $AC = 130$ м, $\angle A = 73^\circ$, $\angle C = 58^\circ$ бошад, дар коғаз секунҷаи $A_1B_1C_1$ $\angle A_1 = 73^\circ$, $\angle C_1 = 58^\circ$, $A_1C_1 = 130$ мм гирифта қашида мешавад. Порчаи A_1B_1 -ро чен намуда, вай ба 153 мм баробар буданаширо меёбем. Бинобар ин масофаи аниқшаванда 153 м мешавад.

3. Кори амалӣ оид ба баҳри Арал

Дар расми 4 сурати аз киштии кайҳонӣ гирифташудаи баҳри Арал тасвир ёфтааст. Ҳисобкунӣ ва ченкуниҳои ба он вобастаро иҷро карда, масоҳати тақрибии ҳавзаи оби ҳозираи баҳри Аралро ёбед.

? Савол, масъала ва супориш

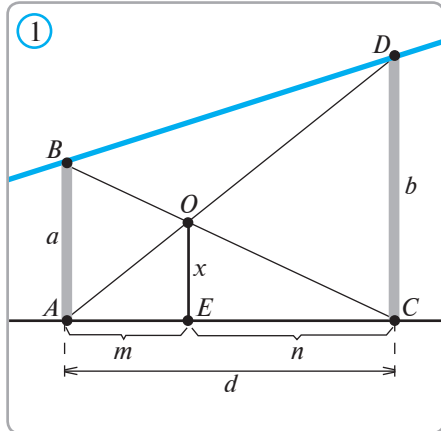
1. Агар сояи одами қадаш 1,7 м буда, 2,5 м бошад, баландии дарахти дарозии сояаш 10,2 м чӣ қадар мешавад?
2. Баландии монандиҳоеро, ки дар расми 5 тасвир ёфтаанд, муайян кунед.
3. Бо ёрии ду секунҷаи монанди AB_1C_1 ва ABC , ки дар расми 6 тасвир ёфтааст, васеъгии дарёро (барашро) муайян кардан лозим. Агар $AC = 100$ м, $AC_1 = 32$ м ва $AB_1 = 34$ м бошад, бари дарё (BB_1)-ро ёбед.
4. Ба одами дар нуқтаи A буда, акси дарахти DE -и лаби соҳили чуйбор намудор аст. Агар $AB = 165$ см, $AC = 120$ см ва $CD = 4,8$ м бошад, баландии дарахтро ёбед (расми 7).
5. Ягон дарахтро дар ҳавли интиҳоб намоед ва баландии онро муайян кунед. Ҳисоботро дар хусуси чӣ тавр иҷро кардани ин кор омода созед.



19

ҲАЛЛИ МАСЪАЛАҲО

Масъалаи 1. Сутунҳои AB ва CD , ки дарозияшон бо равиши мувофиқ a ва b вертикалӣ гузошта шудааст. Барои боз ҳам қулла(и он бо симҳои пӯлодини дар нуқтаи O буридашаванда охири он A ва D , B ва C пайваст карда шудаанд (расми 1). Дар асоси маълумоти расм а) $\frac{m}{m+n} = \frac{x}{b}$ ва $\frac{n}{m+n} = \frac{x}{a}$ -ро исбот кунед; б) дуруст будани баробарии $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1$ -ро нишон диҳед ва онро шарҳ диҳед.



Ҳалли он.

а) Дар асоси шarti масъала секунҷаҳои

1. $\triangle AOE \sim \triangle ADC$. Бинобар ин

$$\frac{AE}{AC} = \frac{OE}{DC}, \quad \text{яъне} \quad \frac{m}{m+n} = \frac{x}{b}.$$

2. Боз дар асоси шarti масъала $\triangle EOC \sim \triangle ABC$. Бинобар ин

$$\frac{EC}{AC} = \frac{OE}{AB}, \quad \text{яъне} \quad \frac{n}{m+n} = \frac{x}{a}.$$

б) Баробарии (1) ва (2)-ро аъзо баъзо ҷамъ кунем $\frac{m}{m+n} + \frac{n}{m+n} = \frac{x}{b} + \frac{x}{a}$ яъне $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1$

ҳосил мешавад. Аз ин мебарояд, ки сутунҳо

ҷи тавр гузошта нашаванд, нуқтаи O бо симҳои пӯлодини буридашаванда аз сатҳи замин дар як сатҳ баландӣ мешаванд.

Масъалаи 2. Дар тарафҳои паҳлуи AB ва CD -и трапетсияи $ABCD$ нуқтаҳои M ва N гирифта шудаанд. Дар ин порчаи MN ба асосҳои трапетсия мувозӣ буда, аз нуқтаи буриши диагонаҳои он O мегузарад. Агар $BC=a$, $AD=b$ бошад, парчаҳои а) MO ; б) ON ; в) MN -ро ёбед (расми 2).

Ҳалли он. 1) Дар асоси аломати KK секунҷаҳои AOD ва BOC монанд, чунки $\angle BOC = \angle AOD$, $\angle OBC = \angle ADO$. Аз ин,

$$\frac{OC}{OA} = \frac{BC}{AD} \quad \text{ё ки} \quad \frac{OC}{OA} = \frac{a}{b}.$$

2) Дар асоси аломати KK секунҷаҳои ABC ва AOM ҳам монанд, чунки $\angle AMO = \angle ABC$, $\angle ACB = \angle AOM$. Аз ин,

$$\frac{AC}{OA} = \frac{BC}{MO} \quad \text{ё ки} \quad \frac{OA+OC}{OA} = \frac{a}{MO} \Rightarrow 1 + \frac{OC}{OA} = \frac{a}{MO}, \quad \frac{OC}{OA} = \frac{a}{MO} - 1.$$

3) Қисмҳои рости баробариҳои (1) ва (2)-ро баробар намуда,

$$\frac{a}{MO} - 1 = \frac{a}{b} \text{ -ро ҳосил мекунем ва аз ин}$$

$$MO = \frac{ab}{a+b} \quad (3)$$

буданаширо меёбем.

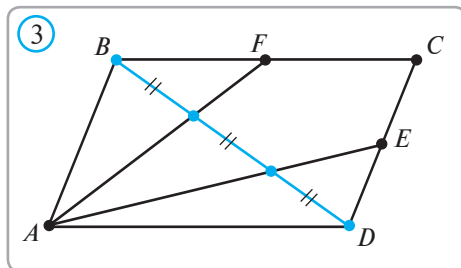
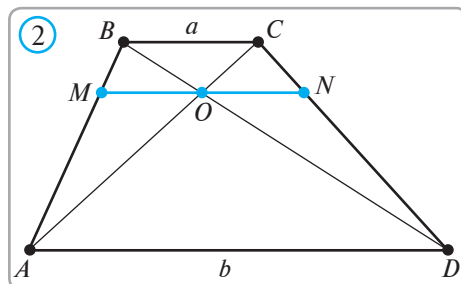
4) Чун гуфтаҳои болоӣ баробарии

$$ON = \frac{ab}{a+b} \quad (4)$$

ҳосил намуда, пас аз қисмҳои мувофиқ баробариҳои (3) ва (4)-ро ҳамчун намуда, ҳосил мекунем:

$$MN = \frac{2ab}{a+b}$$

Ҷавоб: а) $\frac{ab}{a+b}$; б) $\frac{ab}{a+b}$; в) $\frac{2ab}{a+b}$.

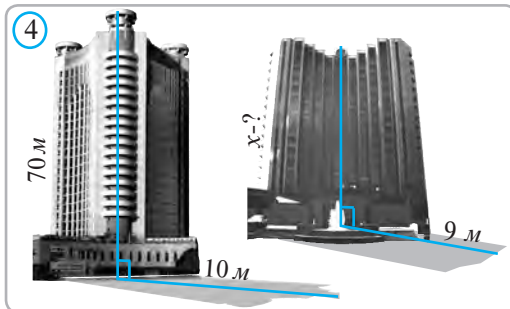
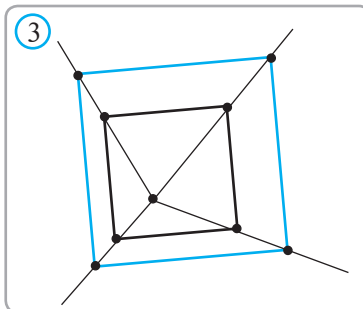
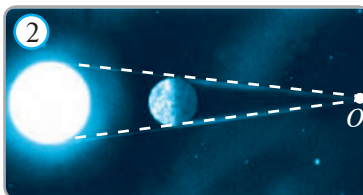
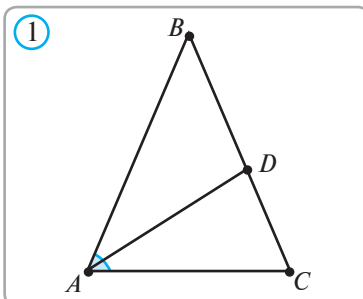


Эзоҳ. Аз ҳалли ин масъала $MO = ON$ буданаширо бармеояд.

? Савол, масъала ва супориш

1. Аз тарафҳои паҳлуи AB ва BC -и секунҷаи ABC нуқтаҳои D ва E гирифта шудаанд. Агар $AC \parallel DE$, $AC = 6$, $DB = 3$ ва $DE = 2$ бошад, тарафи AB -ро ёбед.
2. Масоҳатҳои ду бисёкунҷаи монанд ба 8 дм^2 ва 72 дм^2 баробар аст, периметри яке аз онҳо аз дигаре 26 дм кам аст. Периметри секунҷаи калонро ёбед.
3. Периметри секунҷаи $A_1B_1C_1$, ки 1 м аст, миёнаҳои тарафҳои секунҷаи $A_2B_2C_2$, секунҷаи $A_2B_2C_2$ миёнаҳои тарафҳои секунҷаи $A_3B_3C_3$, секунҷаи $A_3B_3C_3$ бошад, миёнаҳои тарафҳои секунҷаи $A_4B_4C_4$ -ро аз пайваستкунӣ ҳосил карда бошад, периметри секунҷаи $A_4B_4C_4$ ба чӣ баробар мешавад?
4. Периметрҳои ду секунҷаи монанд 18 дм ва 36 дм , ҳосили ҳамчун масоҳатҳояшон ба 30 дм^2 баробар аст. Масоҳати секунҷаи калонро ёбед.
5. Миёнаҳои тарафҳои ромб куллаҳои росткунҷа буданаширо исбот кунед.
6. Секунҷаи ABC созед. Секунҷаи $A_1B_1C_1$ -и ба ин секунҷаи ABC монанд ва масоҳаташ аз масоҳати он 9 маротиба хурдро созед.
- 7*. Нуқтаҳои E ва F бо равиши мувофиқ миёнаҳои тарафҳои CD ва BC -и параллелограмми $ABCD$. Исбот кунед, ки хатҳои рости AF ва AE диагонали BD -ро ба се қисми баробар тақсим мекунад (расми 3).

1. Биссектрисаи кунчи назди асоси секунҷаи баробарпахлу аз ин секунҷа секунҷаи ба ҳудаш монанд ҷудо мекунад. Кунҷҳои секунҷаро муайян кунед (*расми 1*, $AB=BC$, $\triangle ABC \sim \triangle CAD$).
2. Давра созад ва дар он нуқтаи O -ро гиред. Дар гомотетияи марказаш дар нуқтаи O ва коэффисиенташ баробари 2 давраи ба давраи додашуда гомотетӣ созад.
3. Нисбати периметрҳои ду бисёркунҷаи монанд 2:3 аст. Масоҳати бисёркунҷаи калон 27 бошад, масоҳати бисёркунҷаи хурдро ёбед.
4. Дар расми 2 ҳолати пурра гирифтани Офтоб тасвир ёфтааст. Агар радиуси Офтоб 686784 км, радиуси Моҳ 1760 км ва масофа аз Замин то Моҳ 384400 км бошад, масофаи байни Замину Офтобро ёбед.
5. а) Ба як давра ду бисёркунҷаи монанд дарун кашида шудааст. Оё ин бисёркунҷаҳо баробаранд? б) Ба як давра ду бисёркунҷаи монанд берун кашида шудааст. Оё ин бисёркунҷаҳо баробаранд?
- 6*. Тарафҳои як квадрат ба тарафҳои квадрати дигар параллел. Агар квадратҳо ба якдигар баробар набоянд, гомотетӣ будани онҳоро исбот кунед (*расми 3*).
7. Тарафҳои AB ва BC -и секунҷаи ABC ба чор порчаи баробар тақсим карда шуд ва нуқтаҳои тақсимшавӣ бо порчаҳои ба тарафи AB параллел пайваست карда шуд (*расми 4*). Агар $AC=24$ см бошад, дарозии порчаҳои ҳосилшударо ёбед.
8. Агар расмҳо айнан дар як вақт ба навор бардошта шуда бошанд, дар асоси маълумотҳои додашуда баландии бинои дуюмро муайян кунед (*расми 5*).



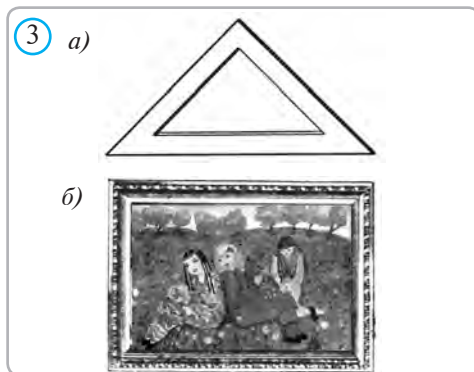
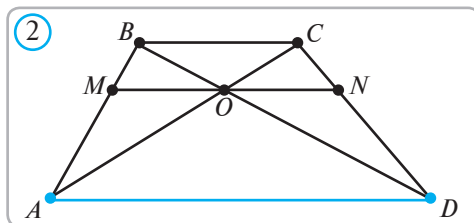
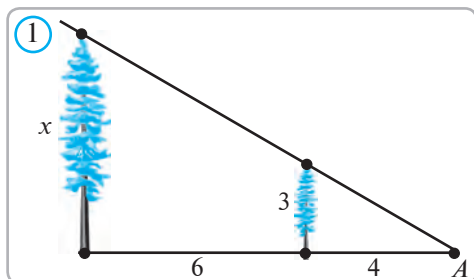
I. Тестҳо

1. Ба ду секунуи монанд тасдиқи нодурустро ёбед:
 - А. Нисбати масоҳатҳо ба коэффисиенти монандӣ баробар аст;
 - Б. Нисбати медианаи мувофиқ ба коэффисиенти монандӣ баробар аст;
 - В. Нисбати баландиҳои мувофиқ ба коэффисиенти монандӣ баробар аст;
 - Г. Нисбати баландиҳои мувофиқ ба коэффисиенти монандӣ баробар аст.
2. Тасдиқи дурустро ба ду бисёркунҷаи гомотетӣ ёбед:
 - А. Онҳо баробаранд;
 - Б. Онҳо монанданд;
 - В. Онҳо баробарандозанд;
 - Г. Ҷавоби дуруст нест.
3. Оиди медианаҳои секунҷа тасдиқи нодурустро нишон диҳед:
 - А. Дар як нукта бурида мешаванд;
 - Б. Дар нуктаи буриш дар нисбати 2:1 тақсим мешавад;
 - В. Ба якдигар баробаранд;
 - Г. Ҳар як секунҷаро ба ду секунҷаи баробарандоза ҷудо мекунад.
4. Оиди биссектрисаҳои секунҷа тасдиқи нодурустро нишон диҳед:
 - А. Дар як нукта бурида мешаванд;
 - Б. Дар нуктаи буриш дар нисбати 2:1 тақсим мешаванд;
 - В. Тарафи ҳудаш гузаронидашударо ба ду тарафи боқимонда дар ҳолати мутаносибӣ ҷудо мекунад;
 - Г. Кунҷи ҳудаш баромадаро ба ду қисми баробар тақсим мекунад.

II. Масъалаҳо

1. Аз нуктаи буриши диагоналҳои трапетсияи асосҳояш 6 м ва 12 м хати рост ба асосҳо параллел параллел гузаронида шудааст. Дарозии қисми дар дохили трапетсия будаи хати ростро ёбед.
2. Дар секунҷаи ABC $BC=BA=10$, $AC=8$. Агар AA_1 ва CC_1 биссектрисаҳои секунҷа бошад, порчаи A_1C_1 ро ёбед.
3. Барои аз нуктаи A то нуктаи дағнараси B масофаро муайян кардан дар ҳамворӣ нуктаи C -ро гирифтанд. Пас масофаи AC , кунҷҳои BAC ва ACB -ро чен карданд ва бо секунҷаи ABC секунҷаи монанди $A_1B_1C_1$ -ро сохтанд. Агар $AC=42$ м, $A_1C_1=6,3$ см, $A_1B_1=7,2$ см бошад, масофаи AB -ро ёбед.
4. Дар гомотетияи коэффисиенташ $k=3$ бисёркунҷаи F ба бисёркунаи F_1 тақдир меёбад. Агар периметри бисёркунҷаи F_1 12 см ва масоҳаташ 4,5 см² бошад, периметр ва масоҳати бисёркунаи F -ро ёбед.
5. Ҳангоми дарозии сояи одами қадаш 180 м дар вақти 2,4 м будан дарозии сояи симҷӯби баландиаш 4 м чанд метрӣ мешавад?

6. Дар харита тасвири масофаи байни шаҳрҳои Тошканд ва Урганч 8,67 см аст. Агар масштаби харита 1:100000 бошад, масофаи байни шаҳрҳои Тошканд ва Урганчро ёбед.



III. Худатонро озмуда бинед (кори назоратии намунавӣ)

1. Дар асоси маълумотхое, ки дар расми 1 оварда шудаанд, баландии дарахтро муайян созед.
2. Тарафҳои секунҷаи ABC $AB = 5$ см, $AC = 6$ см, $BC = 7$ см, Хати ростии ба тарафи AC -и ин секунҷа гузаронидашуда тарафи AB -ро дар нуктаи P , тарафи BC -ро дар нуктаи K мебурад. Агар $PK = 2$ см бошад, периметри секунҷаи PBK -ро ёбед.
3. Дар расми 2 $AD \parallel BC \parallel MN$. Агар $BC = 6$ см, $AD = 10$ см бошад, порчаи, MN -ро ёбед.
4. Исбот кунед, ки миёнаҳои тарафҳои ромб қуллаҳои росткунҷа мебошад.



Масъалаҳои шавқовар.

1. Ҳангоми назар андохтан бо лупае, ки 4 маротиба калон карда нишон медиҳад, бузургии кунҷи 2° чӣ қадар тағйир меёбад?
2. а) Оё секунҷаҳои дарунӣ ва берунӣ дар расми хаткашаки секуна тасвирёфта монанданд (расми 3, а)? б) Оё тегаҳои дарунӣ ва берунӣ росткунҷаи роми дар расми 3, б тасвирёфта монанд аст?
3. Масъалаи зерини бо забони русӣ таълифёфтaro дида бароед. Бо хамин роҳ қобилиятатонро оид ба чӣ тавр донистани ҳам забони русӣ ва ҳам геометрия дониста мегиред.

На 4-рисунок изображена русская игрушка “матрёшка”. Выполните соответствующие измерения, найдите коэффициент подобия игрушек:
а) A и B ; б) A и D ; в) C и F ; г) B и E .

БОБИ II



МУНОСИБАТҲОИ БАЙНИ ТАРАФҲО ВА КУНҶҲОИ СЕКУНҶАҲО

Дар натиҷаи омӯзиши ин боб Шумо ба дониш, малакаи амалии зерин соҳиб мегардед:

Донишҳо:

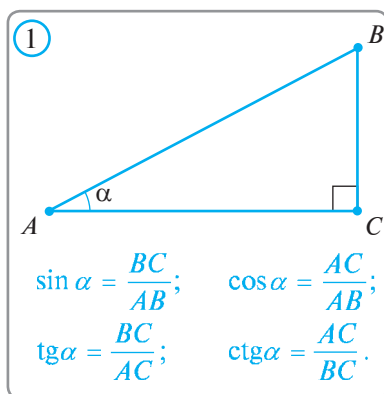
- √ дониستاني таърифҳои синус, косинус, тангенс ва котангенс кунҷи дилхоҳ;
- √ дониستاني ченаки радиани кунҷ;
- √ дониستاني айниятҳои асосии тригонометрӣ;
- √ дониستاني формулаи ҳисобкунии масоҳати секунҷа бо ёрии синуси кунҷ;
- √ дониستاني теоремаи синусҳо ва косинусҳо.

Малакаи амалӣ:

- √ ҳисоб карда тавонистани синус, косинус, тангенс ва котангенс баъзе кунҷҳо;
- √ татбиқ карда тавонистани айниятҳои асосии тригонометрӣ бо роҳи ҳал кардани мисолҳо;
- √ ҳисоб карда тавонистани масоҳати секунҷа дар асоси ду тараф ва кунҷи байни онҳо;
- √ аз теоремаҳои синусҳо, косинусҳо истифода бурда, ҳал карда тавонистани масъалаҳо оиди ҳисобкунӣ ва исботкунӣ.

22

ТАЪРИФИ СИНУС, КОСИНУС, ТАНГЕНС ВА КОТАНГЕНСИ КУНЧИ ТЕЗ



Дар секунҷаи росткунҷаи ABC кунҷи $\angle C = 90^\circ$ бошад, ба тарафи AB —гипотенуза, тарафи BC ба катети муқобили кунҷи A , тарафи AC бошад, катети ба кунҷи A часпида гуфта мешавад (*расми 1*).

Синуси кунҷи тези секунҷаи росткунҷа гуфта нисбати катети муқобили ин кунҷ ба гипотенузоро меноманд.

Косинуси кунҷи тези секунҷаи росткунҷа гуфта нисбати катети ба ин кунҷ часпида бар гипотенузоро меноманд.

Тангенс кунҷи тези секунҷаи росткунҷа гуфта нисбати катети муқобили ин кунҷ бар

катети ба ин кунҷ часпидаро меноманд.

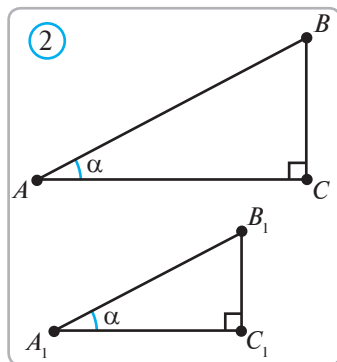
Котангенс кунҷи тези секунҷаи росткунҷа гуфта нисбати катети ба ин кунҷ часпида бар катети муқобили ин кунҷро меноманд.

Синус, косинус, тангенс ва котангенс кунҷи α дар равиши мувофиқ дар шакли **sin** α , **cos** α , **tg** α ва **ctg** α ишорат карда мешавад (хондани он: «**синус алфа**», «**косинус алфа**», «**тангенс алфа**», «**котангенс алфа**»).

Аз таърифи болой формулаи зерин бармеояд:

$$1. \left. \begin{aligned} \frac{\sin A}{\cos A} &= \frac{BC}{AB} \cdot \frac{AB}{AC} = \frac{BC}{AC}; \\ \operatorname{tg} A &= \frac{BC}{AC}. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A}} \quad 2. \left. \begin{aligned} \frac{\cos A}{\sin A} &= \frac{AC}{AB} \cdot \frac{AB}{BC} = \frac{AC}{BC}; \\ \operatorname{ctg} A &= \frac{AC}{BC}. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\operatorname{ctg} A = \frac{\cos A}{\sin A}}$$

$$3. \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{ctg} A = \frac{BC}{AC} \cdot \frac{AC}{BC} = 1 \Rightarrow \boxed{\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{ctg} A = 1}.$$



Теорема. Кунҷи тези як секунҷаи росткунҷа ба кунҷи тези секунҷаи росткунҷаи дуоим баробар бошад, синусҳои ин кунҷҳои тез (косинус, тангенс ва котангенсҳояшон ҳам) баробар мешаванд.

Исбот. Дар ин ҳол секунҷаҳои ABC ва $A_1B_1C_1$ аз рӯи ду кунҷашон монанд мешаванд. Он гоҳ ($\angle C = \angle C_1 = 90^\circ$) $\angle A = \angle A_1$ мешавад (*расми 2*). Дар ин ҳолат секунҷаҳои ABC ва $A_1B_1C_1$ мувофиқи аломати KK монанд мешаванд. Аз ҳамин сабаб $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$. Аз ин баробарихо $\frac{BC}{AB} = \frac{B_1C_1}{A_1C_1}$ ё худ

$\sin A = \sin A_1$ буданастро меёбем.

Косинус, тангенс ва котангенс ин кунҷҳои тез ҳам ба монанди мас болой исбот мегардад. **Теорема исбот шуд.**

Масъала. Дар секунҷаи ABC $\angle C = 90^\circ$, $AC = 8$ см, $BC = 15$ см бошад, синус, косинус, тангенс ва котангенс кунҷи B -и онро ёбед.

Ҳалли он. Аз теоремаи Пифагор истифода бурда, гипотенузаи секунҷаро меёбем:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 8^2 + 15^2 = 289, AB = 17 \text{ (см)}.$$

Катети муқобили кунҷи B AC , катети ба кунҷи B часпида бошад, BC (расми 3). Бинобар ин, дар асоси таъриф,

$$\sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{8}{17}; \quad \cos B = \frac{BC}{AB} = \frac{15}{17};$$

$$\operatorname{tg} B = \frac{AC}{BC} = \frac{8}{15}; \quad \operatorname{ctg} B = \frac{BC}{AC} = \frac{15}{8}.$$

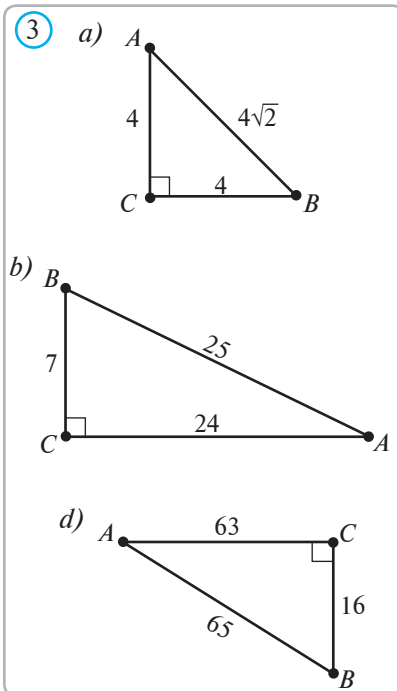
Ё ки $\operatorname{tg} B = \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{8}{17} \cdot \frac{17}{15} = \frac{8}{15};$

$$\operatorname{ctg} B = \frac{\cos B}{\sin B} = \frac{15}{17} \cdot \frac{17}{8} = \frac{15}{8}.$$

Ҷавоб: $\frac{8}{17}; \frac{15}{17}; \frac{8}{15}; \frac{15}{8}.$

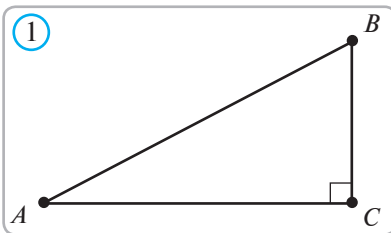
? Савол, масъала ва супориш

1. Синус, косинус, тангенс ва котангенс кунҷи тез гуфта чиро мегӯянд?
2. Синус, косинус, тангенс ва котангенс кунҷи тез ба чӣ вобаста аст ва ба чӣ вобаста нест?
3. Дар асоси маълумотҳои расми 4 $\sin A$, $\cos A$, $\sin B$, $\cos B$ -ро ёбед.
4. Гипотенузаи секунҷаи росткунҷаи ABC AB ба 13 см, катети AC бошад, ба 12 см баробар аст. Синус, косинус, тангенс ва котангенс кунҷи A -и секунҷаро ёбед.
5. Агар дар секунҷаи росткунҷа кунҷи рости ABC ($\angle C = 90^\circ$) а) $AB = 25$, $BC = 7$; б) $AC = 5$, $BC = 12$; в) $AB = 41$, $AC = 40$; г) $AC = 24$, $AB = 25$ бошад, синус, косинус, тангенс ва котангенс кунҷҳои A ва B -ро ёбед.
6. Агар дар секунҷаи ABC $\angle C = 90^\circ$, $\cos A = \frac{60}{61}$ ва $AC = 3$ см бошад, тарафҳои боқимондаи секунҷаро ёбед.
7. Агар дар секунҷаи ABC $\angle C = 90^\circ$, $\sin A = \frac{8}{17}$ ва $BC = 16$ см бошад, тарафҳои боқимондаи секунҷаро ёбед.



23

ҲАЛЛИ МАСЪАЛАҲО



Дуруст будани боз як баробарии муҳимро нишон медиҳем, ки барои ҳалли масъалаҳо заруранд, Дар секунҷаи росткунҷаи ABC (расми 1) мувофиқи теоремаи Пифагор $AB^2 = BC^2 + AC^2$. Дар ин ҳолат

$$\sin^2 A + \cos^2 A = \frac{BC^2}{AB^2} + \frac{AC^2}{AB^2} = \frac{BC^2 + AC^2}{AB^2} = \frac{AB^2}{AB^2} = 1.$$

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

айнияти асосии тригонометрӣ, ин баробарӣ номида мешавад (калимаи “тригонометрия” юнонӣ буда, маънои “секунҷахоро чен мекунам”-ро дорад).

Масъалаи 1. Агар $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ бошад, $\sin \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ ва $\operatorname{ctg} \alpha$ -ро ёбед.

Ҳалли он. Мувофиқи айн timerи асосии тригонометрӣ:

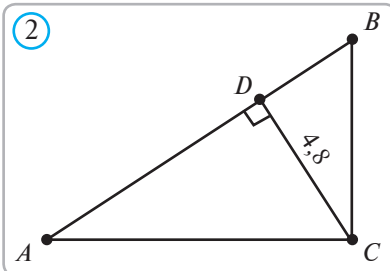
$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Дар ин ҳол

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Масъалаи 2. Дар секунҷаи ABC $\angle C = 90^\circ$ ва $\sin A = 0,6$. Агар баландии CD -и секунҷа 4,8 см бошад, катети AC ва проексияи он дар гипотенузаро ёбед.

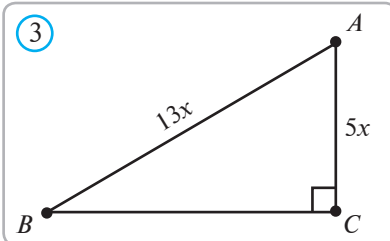
Ҳалли он. Секунҷаи росткунҷаи ADC -ро дида мебароем (расми 1). Он гоҳ дар асоси таърифи синус,



$$\sin A = \frac{DC}{AC}. \quad \text{Аз ин } AC = \frac{DC}{\sin A} = \frac{4,8}{0,6} = 8 \text{ (см).}$$

Аз теоремаи Пифагор истифода бурда, проексияи катети AC дар гипотенузаи AD -ро меёбем: $AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = \sqrt{8^2 - 4,8^2} = 6,4 \text{ (см).}$

Ҷавоб: 8 см; 6,4 см.



Масъалаи 3. Агар дар секунҷаи ABC $\angle C = 90^\circ$ ва $\cos A = \frac{5}{13}$ бошад, тарафҳои секунҷа дар чӣ гуна нисбат мешаванд (расми 3).

Ҳалли он. Дар асоси таърифи косинуси кунҷ $\cos A = \frac{AC}{AB}$. Бинобар ин, $\frac{AC}{AB} = \frac{5}{13}$.

Агар $AC = 5x$ гўем, он гоҳ

$$AB = \frac{13 \cdot AC}{5} = 13x.$$

Дар асоси теоремаи Пифагор

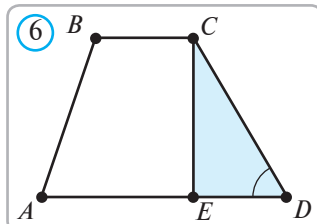
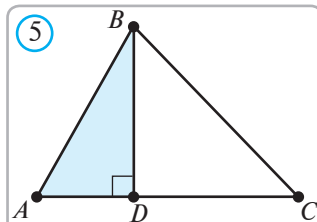
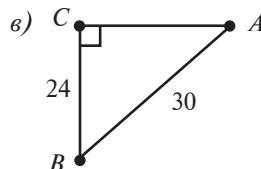
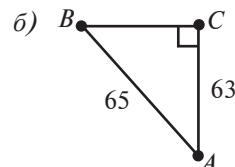
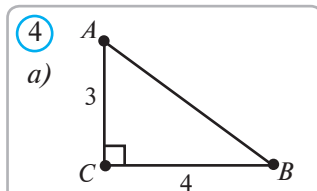
$$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{169x^2 - 25x^2} = 12x.$$

Ҳамин тавр, $AC : BC : AB = 5 : 12 : 13$.

Ҷавоб: дар $5 : 12 : 13$ нисбатанд.

? Савол, масъала ва супориш

- Дар асоси маълумотҳои расми 4 инҳоро: а) $\sin A$, $\cos A$, $\operatorname{tg} A$, $\operatorname{ctg} A$; б) $\sin B$, $\cos B$, $\operatorname{tg} B$, $\operatorname{ctg} B$ ёбед.
- Агар $\sin \alpha = 0,5$ бошад, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ ва $\operatorname{ctg} \alpha$ -ро ёбед.
- Агар $\cos \alpha = 0,6$ бошад, $\sin \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ ва $\operatorname{ctg} \alpha$ -ро ёбед.
- Агар дар секунҷаи росткунҷаи ABC ($\angle C = 90^\circ$) $BC = 17$ см ва $\sin B = \frac{15}{17}$ бошад: а) баландии секунҷаи CD ; б) проексияи катет BC дар гипотенуза; в) гипотенуза; г) катети дуюмро ёбед.
- Агар дар секунҷаи ABC $\angle C = 90^\circ$, $\sin A = \frac{3}{8}$ ва $BC = 15$ см бошад, баландии ба гипотенуза гузаронидашудаи секунҷаро ёбед.
- *. Агар а) $\sin \alpha = \frac{2}{3}$; б) $\cos \alpha = \alpha$; в) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$; е) $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{4}{5}$ бошад, кунҷи α -ро созад.
- Дар секунҷаи ABC $AC = 12$ см, $AB = 10$ см, $\sin A = 0,7$ бошад, масоҳати секунҷаро ёбед (расми 5).
- Дар секунҷаи ABC BD — баландӣ, $AC = 7$ см, $AD = 2$ см ва $\operatorname{tg} A = 3$ бошад, масоҳати секунҷаро ёбед (расми 5).
- Дар трапецияи $ABCD$ ($BC \parallel AD$) $\sin D = 0,5$; $CD = 8$, $BC = 6$, $AD = 10$ бошад, масоҳати трапецияро ёбед (расми 6).
- Дар ромби $ABCD$ $\sin A = 0,8$ ва $AB = 15$ см бошад, масоҳати ромбро ёбед (расми 7).
- *. Баландии ба асос фаровардашудаи секунҷаи баробарпахлу 5 см, асосаш $10\sqrt{3}$ см бошад: а) кунҷҳои; б) тарафи пахлуи; в) масоҳати секунҷахоро ёбед.
- Дар секунҷаи расткунҷаи ABC $\sin A = \frac{3}{7}$ ва $\sin B = \frac{4}{7}$ шуданаш оё мумкин аст?

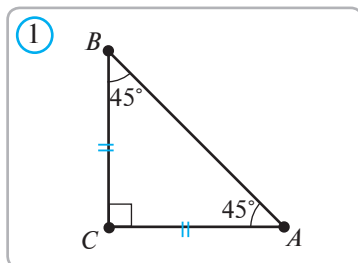


24

ҲИСОБКУНИИ СИНУС, КОСИНУС, ТАНГЕНС ВА КОТАНГЕНСИ БАЪЗЕ КУНЧҲО

1. Ҳисоб кардани синус, косинус, тангенс ва котангенс кунчи 45 градус.

Секунҷаи росткунҷаи баробарпахлуи ABC ($\angle C = 90^\circ$)-ро дида мебароем



(расми 1). Дар ин секунҷа $AC = BC$, $\angle A = \angle B = 45^\circ$ бошад дар асоси теоремаи Пифагор

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 2AC^2 \text{ ё ки } AB = AC\sqrt{2}.$$

$$\text{Аз ин } AC = BC = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{AB\sqrt{2}}{2} \text{ ҳосил мешавад.}$$

Ҳамин тавр,

$$\sin 45^\circ = \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos 45^\circ = \cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC} = 1;$$

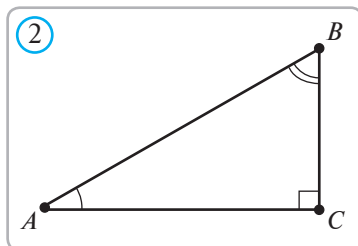
$$\operatorname{ctg} 45^\circ = \operatorname{ctg} A = \frac{AC}{BC} = 1.$$

Масъалаи 1. Дар секунҷаи росткунҷаи ABC ($\angle C = 90^\circ$) $\angle A = 45^\circ$ ва $BC = 6$ см. Тарафҳои боқимондаи секунҷаро ёбед (расми 1).

Ҳалли он. $\frac{AC}{BC} = \operatorname{ctg} 45^\circ$ ё ки $\frac{AC}{BC} = 1$, $AC = BC = 6$ (см);

$$\frac{BC}{AB} = \sin 45^\circ \text{ ё ки } \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad AB = BC\sqrt{2} = 6\sqrt{2} \text{ (см).}$$

Ҷавоб: 6 см; $6\sqrt{2}$ см.

2. Ҳисоб кардани синус, косинус, тангенс ва котангенс кунҷҳои 30° ва 60° 

Секунҷаи кунҷҳояш $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 60^\circ$ ва $\angle C = 90^\circ$ будаи ABC -ро дида мебароем (расми 2). Аз сабаби катети муқобили кунҷи 30 градус ба нисфи гипотенуза баробар буданаш

$$BC = \frac{1}{2}AB \text{ ё ки } \frac{BC}{AB} = \frac{1}{2}. \text{ Аз ин}$$

$$\sin 30^\circ = \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{2}; \quad \cos 60^\circ = \cos B = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{2}$$

-ро меёбем. Аз айнияти асосии тригонометрӣ истифода мебарем:

$$\cos 30^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 30^\circ} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin 60^\circ = \sqrt{1 - \cos^2 60^\circ} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Дар асоси қиматҳои ёфташуда } \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}; \quad \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} = \sqrt{3};$$

$$\operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} = \sqrt{3}; \quad \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{\cos 60^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

3. Қиматҳои $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ ва $\operatorname{ctg} \alpha$ ро, ки барои кунҷҳои 30° , 45° , 60° ҳосил кардем, ба ҷадвал менависем.

 **Масъалаи 2.** Гипотенузаи секунҷаи росткунҷа 10 см ва яке аз кунҷҳояш 60° аст. Тарафҳои боқимондаи онро ёбед.

Ҳалли он. Аз расми 2 истифода мебарем. Дар он

$$BC = AB \sin A = 10 \cdot \sin 30^\circ = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5 \text{ (см)},$$

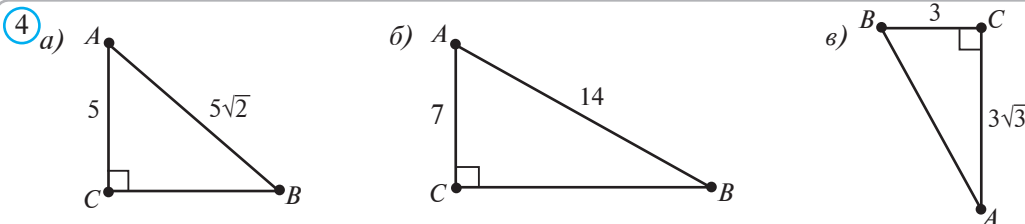
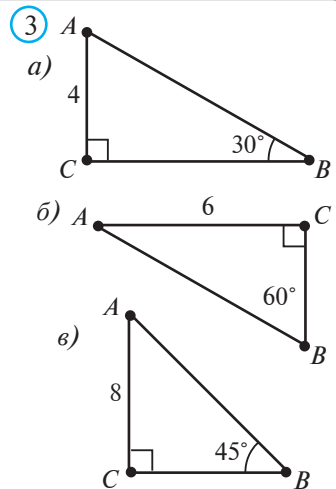
$$AC = AB \cos A = 10 \cdot \cos 30^\circ = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} \text{ (см)}.$$

Ҷавоб: 5 см; $5\sqrt{3}$ см

Савол, масъала ва супориш

- Агар кунҷи α ба $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ баробар бошад, $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ ва $\operatorname{ctg} \alpha$ ба чӣ баробар аст. Ҷавоб асоснок кунед.
- Периметри секунҷаҳои дар расми 3 бударо ёбед.
- Кунҷҳои секунҷаҳои дар расми 4 бударо ёбед.
- Дар қиматҳои $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ -и барои $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ ва $\operatorname{ctg} \alpha$ ҷадвали қиматҳоро аз ёд намоед.
- Як кунҷи тези секунҷаи росткунҷа ба 30° баробар аст, катети ба он часпида 6 дм. Тарафҳои боқимондаи онро ёбед.
- Асоси секунҷаи баробарпахлу ба 10 см, яке аз кунҷҳояш ба 120° баробар аст. Масоҳати онро ёбед.
- Дар секунҷаи ABC $\angle C = 90^\circ$, $AB = 25$ см, $\sin A = \frac{7}{25}$. Тарафҳои боқимондаи секунҷа ва $\cos A$, $\operatorname{tg} A$ ва $\operatorname{ctg} A$ -ро ёбед.
- Кунҷҳои ромби диагоналҳояш $5\sqrt{3}$ см ва 5 см-ро ёбед.

α	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$



25

ҲАЛЛИ МАСЪАЛАҲО



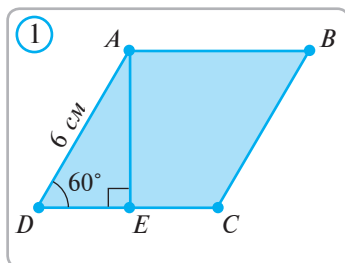
Машқи фаъолкунанда

Хонаҳои ҳолии чадвалро пур кунед.

α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
	$\frac{\sqrt{3}}{2}$			
			$\frac{\sqrt{3}}{3}$	
		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		



Масъалаи 1. Агар дар ромби $ABCD$ $\angle A = 120^\circ$ ва $AB = 6$ см бошад, баландӣ ва масоҳати ромбро ёбед (расми 1).



Ҳалли он. 1) Ҳосили чамъи кунҷҳои ба як тарафи ромб часпида ба 180° баробар аст. Аз ин $\angle D = 180^\circ - \angle A = 60^\circ$. Баландии AE -и ромбро мегузaronем (расми 1), секунҷаи росткунҷаи AED -ро ҳосил мекунем. Дар он,

$$\frac{AE}{AD} = \sin D = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ё ки } AE = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AD = 3\sqrt{3} \text{ (см).}$$

2) Акнун масоҳати ромбро меёбем:

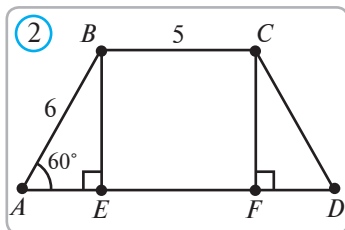
$$S_{ABCD} = DC \cdot AE = 6 \cdot 3\sqrt{3} = 18\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ҷавоб: $h = 3\sqrt{3}$ см; $S_{ABCD} = 18\sqrt{3}$ см².



Масъалаи 2. Асоси хурди трапетсияи баробарпахлӯи $ABCD$, BC баробари 5 см аст. Агар $\angle A = 60^\circ$, $AB = 6$ см бошад, масоҳати трапетсияро ёбед.

Ҳалли он. Баландиҳои трапетсия BE ва CF -ро мегузaronем (расми 2). Он гоҳ аз секунҷаи росткунҷаи ABE



$$AE = AB \cos 60^\circ = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3 \text{ (см),}$$

$$BE = AB \sin 60^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \text{ (см).}$$

Бидуни ин $AE = FD$, $EF = BC$ буданаш,

$$AD = AE + EF + FD = 3 + 5 + 3 = 11 \text{ (см).}$$

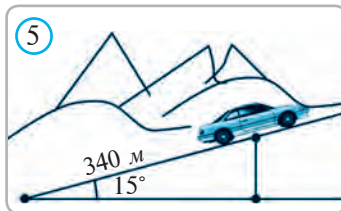
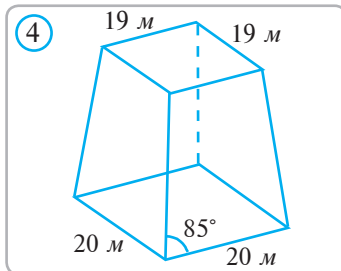
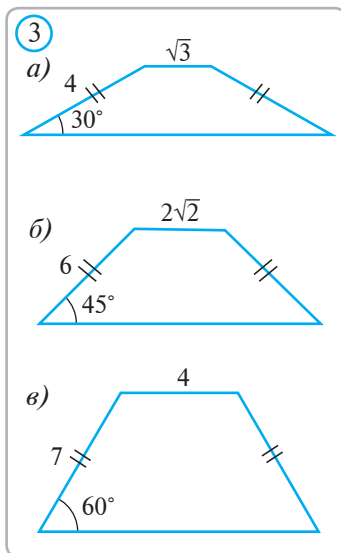
Дар асоси формулаи ёфтани масоҳати трапетсия

$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot BE = \frac{5 + 11}{2} \cdot 3\sqrt{3} = 24\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ҷавоб: $24\sqrt{3} \text{ см}^2$.

Савол, масъала ва сунориш

1. Гипотенузаи секунҷаи росткунҷаи баробарпахлу 12 см. Масоҳати онро ёбед.
2. Периметри секунҷаи баробарбартарафи баландиаш $4\sqrt{3}$ см -ро ёбед.
3. Мувофиқи нишондодҳои расми 3 масоҳати трапетсияҳои баробарпахлуро ёбед.
4. Кунҷи тези трапетсияи росткунҷа 30° , баландиаш 4 см ва асоси хурдаш 6 см аст. Периметри трапетсия ва масоҳатро ёбед.
5. Хордаи давра камони 120° градусро дарҳам мекашад. Агар радиуси давра 10 см бошад, дарозии хордаро ёбед.
- 6*. Кунҷи назди куллаи секунҷаи баробарпахлу а) 120° ; б) 90° ; в) 60° . аст. Нисбати баландии секунҷаҳоро ба асос ҳисоб кунед.
- 7*. Рӯяҳои паҳлуии хирмани пахтаи дар расми 4 тасвирёфта трапетсияи баробарпахлу, рӯяи болоӣ бошад, дар шакли квадрат аст. Аз нишондодҳои расм истифода бурда, муайян кунед, ки барои пурра пӯшидани хирман чӣ қадар газвор лозим аст.
8. Мошинаи сабукрав дар қисми болоравии ағба 340 м роҳ тай намуд. Агар кунҷи бардошташавӣ нисбат ба уфуқ 15° бошад, мошинаи сабукрав чанд метр баланд рафтааст (расми 5).



Бо ёрии калкуляторҳои махсус ёфтани қиматҳои функцияҳои тригонометрии.

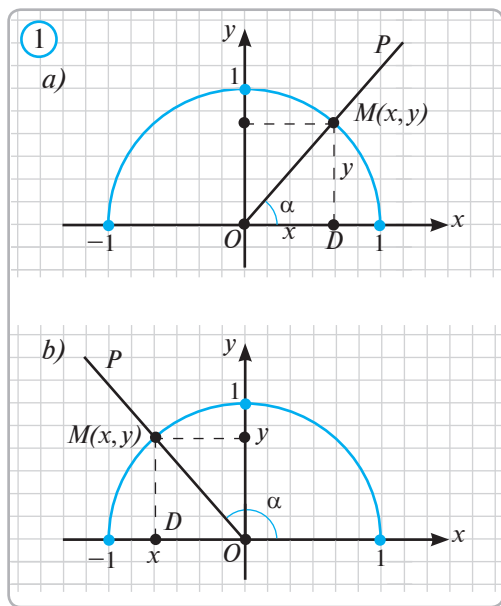
Дар калкуляторҳои махсуси тугмаҳои **(sin)** ва **(cos)** дошта қиматҳои функцияҳои тригонометрии чунин ҳисоб карда мешавад.

Кунҷ бо градусҳо дода шуда бошад: Масалан, $\sin 30^\circ$:

1. Калкуляторро ба кор андохта тугмаҳои **(DEG)** (градус) пахш карда мешавад.
2. Пас аз ин тугмаҳои **(C)** **(3)** **(0)** **(sin)** дар ҳамин тартиб пахш карда, ҷавоби дарқории 0,5 гирифта мешавад $\sin 30^\circ = 0,5$.

Агар калкулятори махсус набошад, аз ҷадвали қиматҳои функцияҳои тригонометрии дар иловаи охири китоб овардашуда истифода бурдан мумкин аст.

СИНУС, КОСИНУС, ТАНГЕНС ВА КОТАНГЕНС, КИ КУНЧҲОЯШОН АЗ 0° ТО 180° МЕБОШАНД



Системаи координатаҳои росткунҷаи Oxy ва нимдавраи марказаш дар ибтидои координатаҳо будаи радиусаш ба як порчаи воҳиди баробарӣ дар чорякҳои I ва II ҷойгиршуда месозем (*расми 1*). Нури OP -и давраро дар нуктаи $M(x, y)$ буранда мегузаронем. Кунчи ин нур бо нури Ox ҳосил кардара бо α ишорат мекунем. Кунчи ин нурро, ки бо тире абсиссаи Ox ҳосил шудааст, ба сифати кунчи ба 0° баробар қабул мекунем. Чунки нури OP ва Ox болои ҳам меҳобанд.

Агар α кунчи тез бошад (*расми 1-а*), аз секунҷаи росткунҷаи ODM баробариҳои

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{DM}{MO}; & \cos \alpha &= \frac{OD}{MO}; \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{DM}{OD}; & \operatorname{ctg} \alpha &= \frac{OD}{DM}. \end{aligned}$$

меёбем. Агар $MO = 1$, $DM = y$, $OD = x$ буданаширо ба ҳисоб гирем,

$$\text{баробариҳои } \sin \alpha = y, \quad \cos \alpha = x, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y} \text{ соҳиб} \quad (1)$$

мешавем. Дар ҳолати умумӣ синус, косинус, тангенс ва котангенс ҳамаи қиматҳои куни α -ро аз 0° то 180° ҳам бо формулаи (1) муайян мекунем:

Синуси кунчи дилхоҳи α ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$) гуфта ординатаи нуктаи M у-ро, **косинусаш** гуфта абсиссаи нуктаи M х-ро меноманд. **Тангенс** кунчи дилхоҳи α ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$, $\alpha \neq 90^\circ$) гуфта нисбати ординатаи нуктаи M бар нисбати абсиссаашро меноманд. **Котангенс** кунчи дилхоҳи α ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$) гуфта нисбати абсиссаи нуктаи M бар ординатаашро меғўянд.

Дар секунҷаи ODM , $OD^2 + DM^2 = MO^2$ ё худ $x^2 + y^2 = 1$. $\sin \alpha = y$ ва $\cos \alpha = x$ буданаширо ба ҳисоб гирем, барои кунчи дилхоҳи α ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$) баробарии

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad (2)$$

ҳосил мекунем. Ин баробарӣ **айнияти асосии тригонометрӣ** номида шуда, он дар дарсҳои гузашта барои кунҷҳои тез исбот гардида буд.



Супориши амалӣ.

1. Порчаи воҳидиро ба 5 см баробар гуфта, системаи координатаҳои росткунҷаро кашед.
2. Нимдаврае кашед, ки марказаш дар ибтидои координата, радиусаш баробари порчаи воҳидӣ ва дар қорякҳои I ва II ҷойгир шуда бошад.
3. Нури OM -ро созед, ки он нимдавраро дар нуқтаи M бурида, бо нури Ox а) $\alpha = 67^\circ$; б) $\alpha = 118^\circ$; в) $\alpha = 150^\circ$ кунҷҳои баробар ташкил кунад.
4. Бо ёрии ченакҳо координатаи нуқтаи M , ҳамчунин қимати $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ ва $\operatorname{ctg}\alpha$ -ро ёбед.



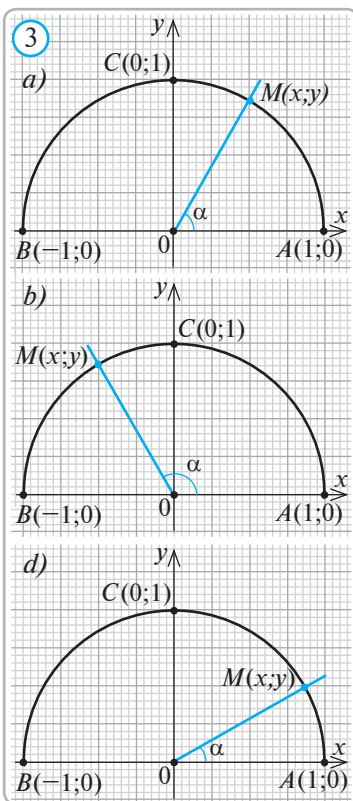
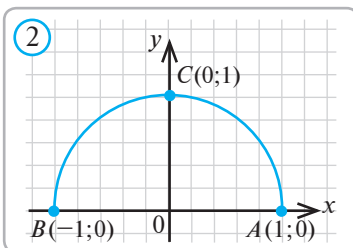
Масъала. Синуси кунҷҳои 0° , 90° ва 180° -ро ёбед.

Ҳалли он. Кунҷи 0° бо воситаи нури OA , кунҷи 90° бо қўмаки нури OC , кунҷи 180° бо қўмаки нури OB муайян мегардад (расми 2). Мувофиқи таърифи $\sin 0^\circ$ ба сифати ординатаи нуқтаи $A(1;0)$ ба 0, $\sin 90^\circ$ ба сифати ординатаи нуқтаи $C(0;1)$ ба 1, $\sin 180^\circ$ бошад, ба сифати ординатаи нуқтаи $B(-1;0)$ ба 0 баробар мешавад. **Ҷавоб:** $\sin 0^\circ = 0$, $\sin 90^\circ = 1$, $\sin 180^\circ = 0$.



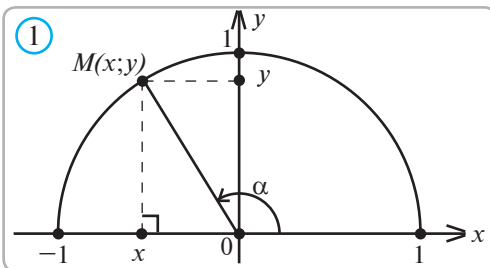
Савол, масъала ва супориш

1. Синус ва косинуси кунҷҳои аз 0° то 180° гуфта чиро мефаҳмед. Онро маънидод созед.
2. Тангенс ва котангенс кунҷи α чист? Тангенс ва котангенс кунҷи α дар кадом қиматҳои α аниқ нагардидаанд?
3. Агар $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ бошад, ишораи қимати $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ ва $\operatorname{ctg}\alpha$ -ро муайян кунед.
4. Агар $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ бошад, нобаробариҳои $0 \leq \sin\alpha \leq 1$ ва $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$ ҷоиш буданашро маънидод созед.
5. Кунҷи α -и расми 3-ро чен кунед ва бо қўмаки ченакҳои зарурӣ синус, косинус, тангенс ва котангенс онро муайян созед.
- 6*. Нимдоираро кашед, ки дар расми 1 а тасвир ёфтааст. Бо қўмаки нури Ox нурҳоро созед, ки кунҷҳои 45° ва 135° -ро ҳосил менамоянд. Аз расми кашидашуда истифода бурда, $\sin 45^\circ$ ни $\sin 135^\circ$ -ро бо $\cos 45^\circ$ -ро бо $\cos 135^\circ$ муқоиса кунед.



27

АЙНИЯТҲОИ АСОСИИ ТРИГОНОМЕТРӢ



Машқи ғазолқунанда

Аз расми 1 истифода бурда, чои нуқтаҳоро пур кунед:

$$\sin \alpha = \dots; \quad \cos \alpha = \dots;$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\dots}{\dots}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\dots}{\dots}.$$

Дар асоси таърифҳо ба ҳар як кунчи тез як қимати синуси (косинуси, тангенс, котангенс) ин кунҷ мувофиқ гузошта шудааст. Ин мувофиқой функцияҳои тригонометрии кунчи тез: функцияҳои синус, косинус, тангенс ва котангенсро муайян мекунад. Аз сабаби ин функцияҳо ҳангоми ҳалли секунаҳо зиёдтар истифода гардидан онҳо функцияҳои тригонометрӣ номида мешаванд.

Калимаи “Тригонометрия” аз юнонӣ гирифта шуда, маънои “ҳалли секунҷаҳо”-ро дорад.

Акнун муносибатҳои байни синус, косинус, тангенс ва котангенс кунҷи α ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$) -ро муайян мекунем.

1. Дар дарсҳои пештара бо формулаи

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad (1)$$

ки **айнияти асосии тригонометрӣ** ҳисоб ёфта, дар қиматҳои $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ -и α чой дорад, шинос шуда будем.

2. Дар асоси таъриф $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}$, $x = \cos \alpha$, $y = \sin \alpha$ буданаш, аиниятҳои

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (\alpha \neq 90^\circ), \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (\alpha \neq 0, \alpha \neq 180^\circ),$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1 \quad (\alpha \neq 0, \alpha \neq 90^\circ, \alpha \neq 180^\circ) \quad (2)$$

чой дорад.

3. Ҳар ду қисми баробарии (1)-ро аввал ба $\cos^2 \alpha$, баъд ба $\sin^2 \alpha$ тақсим намуда, аиниятҳои

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad (\alpha \neq 90^\circ), \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \quad (\alpha \neq 0, \alpha \neq 180^\circ) \quad (3)$$

-ро ҳосил мекунем.



Масъала. Агар $\sin \alpha = 0,6$ ва $90^\circ \neq \alpha \neq 180^\circ$ бошад, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ ва $\operatorname{ctg} \alpha$ -ро ёбед.

Ҳалли он. Аз айнияти асосии тригонометрӣ истифода бурда, $\cos \alpha$ -ро ҳисоб мекунем:

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - 0,6^2} = -\sqrt{1 - 0,36} = -\sqrt{0,64} = -0,8.$$

$90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$, яъне α дар чоряки II бошад, $\cos \alpha \leq 0$. Аз ин рӯ, реша бо ишораи “-” гирифта шуд.

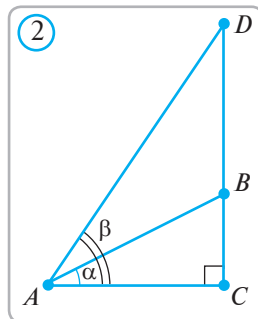
Мувофиқи формулаи (2)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{0,6}{0,8} = -\frac{3}{4}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = -\frac{4}{3}.$$

Ҷавоб: $\cos \alpha = -0,8$; $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$; $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{4}{3}$.

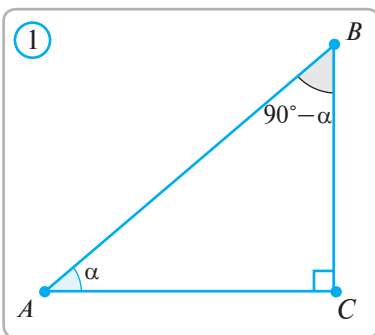
? Савол, масъала ва супориш

- $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$, $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$ барои кадом қиматҳо дурустанд?
- Ифодаҳоро содда кунед:
 - $1 - \cos^2 \alpha$;
 - $(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)$;
 - $\sin^4 \alpha + 2\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha$;
 - $1 - \sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$;
 - $\operatorname{ctg}^2 \alpha (2\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 1)$;
 - $\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha$.
- Агар а) $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ ва $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ бошад, ба чӣ баробар будани $\cos \alpha$ $\cos$ -ро ёбед; б) $\cos \beta = -\frac{2}{3}$ ва $90^\circ < \beta < 180^\circ$ бошад, $\sin \beta$ ба чӣ баробар аст; в) $\cos \alpha = 1$ бошад, қимати $\sin \alpha$ -ро ҳисоб кунед.
- Масоҳати ромби кунчи тезаш 60° баландиаш 3 см бударо ёбед.
- Асоси секунҷаи баробарпахлӯ 4,8 см, кунчи назди асос бошад 30° . Баландӣ ва тарафи паҳлуии секунҷаро ёбед.
- Агар а) $\cos \alpha = \frac{1}{2}$; б) $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$; в) $\cos \alpha = -1$ бошад, $\sin \alpha$ ба чӣ баробар аст?
- а) $\sin A = \frac{2}{3}$; б) $\cos A = \frac{3}{4}$; в) $\cos \alpha = \frac{2}{5}$ буданаш маълум. Кунчи A -ро созед.
- 8*.** Кунҷҳои α ва β шарти $0^\circ < \alpha < \beta < 90^\circ$ -ро қаноат мекунонад. Аз расми 2 истифода бурда, исбот кунед:
 - $\sin \alpha < \sin \beta$;
 - $\cos \alpha > \cos \beta$;
 - $\operatorname{tg} \alpha < \operatorname{tg} \beta$;
 - $\operatorname{ctg} \alpha > \operatorname{ctg} \beta$.
- 9*.** Кунчи байни нури OA ва нури Ox баробари α аст. Агар а) $OA = 3$, $\alpha = 45^\circ$; б) $OA = 1,5$, $\alpha = 90^\circ$; в) $OA = 5$, $\alpha = 150^\circ$; г) $OA = 2$, $\alpha = 180^\circ$; д) $OA = 4$, $\alpha = 30^\circ$ бошад, координатаҳои нуқтаи A -ро ёбед.



Теоремаи 1. Барои ҳар гуна кунчи тез:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha, \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha. \quad (1)$$



Исбот. Кунчи тези куллаи A -и секунҷаи росткунҷаи ABC -ро, ки баробарӣ аст, дида мебароем (расми 1). Дар ин ҳол кунчи тези куллаи $\beta = 90^\circ - \alpha$ - баробар мешавад. Дар асоси таърифи

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \sin \beta = \frac{AC}{AB} = \cos \alpha,$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \cos \beta = \frac{BC}{AB} = \sin \alpha.$$

Теорема исбот шуд.

Масъалаи 1. Аз байни ададҳои зерини додашуда ададҳои баробарро ёбед: $\sin 10^\circ$, $\cos 10^\circ$, $\sin 80^\circ$, $\cos 80^\circ$.

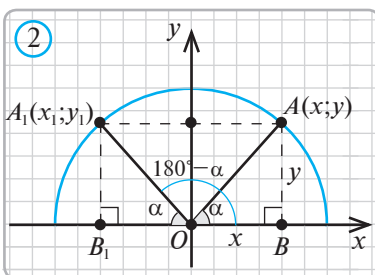
Ҳалли он. $80^\circ = 90^\circ - 10^\circ$ ($\alpha = 10^\circ$) ва $50^\circ = 90^\circ - 40^\circ$ ($\alpha = 40^\circ$) буданаш дар асоси теоремаи 1.

$$\sin 80^\circ = \sin(90^\circ - 10^\circ) = \cos 10^\circ, \quad \cos 80^\circ = \cos(90^\circ - 10^\circ) = \sin 10^\circ.$$

$$\text{Ҷавоб: } \sin 80^\circ = \cos 10^\circ, \quad \cos 80^\circ = \sin 10^\circ.$$

Теоремаи 2. Барои ҳар гуна кунчи α ($0 \leq \alpha \leq 180^\circ$):

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha, \quad \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha. \quad (2)$$



Исбот. Дар системаи координатаҳои росткунҷаи Oxy давраи марказаш дар нуқтаи O буда ва радиусаш баробари 1-ро месозем (расми 2). Кунчи байни нури Ox ва радиуси давра OA бигузор бошад. Радиуси OA_1 -ро, ки бо нури Ox кунчи $180^\circ - \alpha$ -ро ташкил мекунад, мегузаронем. Секунҷаҳои росткунҷаи OAA_1 ва OBB_1 баробаранд. Хусусан, баробарии $OB = OB_1$ ва $AB = A_1B_1$ ё ки $x_1 = x$ ва $y_1 = y$ соҳиб

мешавем. Ҳамин тавр,

$$\sin(180^\circ - \alpha) = y_1 = y = \sin \alpha; \quad \cos(180^\circ - \alpha) = x_1 = -x = -\cos \alpha.$$

Теорема исбот шуд.

Формулаҳои (1) ва (2) **формулаҳои мувофиқоварӣ** номида мешаванд.

 **Масъалаи 2.** Агар $\alpha = 120^\circ$ бошад, қиматҳои $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ ва $\operatorname{ctg} \alpha$ -ро ҳисоб кунед.

Ҳалли он. а) дар асоси формулаи (2)

$$\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

Он гоҳ

$$\operatorname{tg} 120^\circ = \frac{\sin 120^\circ}{\cos 120^\circ} = -\sqrt{3}; \quad \operatorname{ctg} 120^\circ = \frac{\cos 120^\circ}{\sin 120^\circ} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ҷаваб: $\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$; $\operatorname{tg} 120^\circ = -\sqrt{3}$; $\operatorname{ctg} 120^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

 **Савол, масъала ва сунориш.**

1. Айниятҳои $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$ ($\alpha \neq 0^\circ$) ва $\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$ ($\alpha \neq 0^\circ$) -ро исбот кунед.
2. $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$ ($\alpha \neq 90^\circ$) ва $\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$ ($\alpha \neq 0^\circ$ ва $\alpha \neq 180^\circ$) ин айниятҳоро исбот намоед.
3. Ҷадвалро пур кунед.

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin \alpha$									
$\cos \alpha$									
$\operatorname{tg} \alpha$									
$\operatorname{ctg} \alpha$									

4. Агар $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ ва а) $\sin \alpha = \frac{1}{2}$; б) $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\operatorname{tg} \alpha = -1$; г) $\operatorname{ctg} \alpha = -\sqrt{3}$ бошад, бузургии кунчи α -ро ёбед.
5. Ҳисоб намоед:

а) $\sin 180^\circ + 2\cos 90^\circ$;	б) $4\sin 150^\circ + \sqrt{3}\operatorname{tg} 150^\circ$;
в) $\cos 40^\circ + \cos 50^\circ - \sin 40^\circ - \sin 50^\circ$;	г) $3\cos 120^\circ - 2\sqrt{3}\operatorname{ctg} 60^\circ$.
6. Содда намоед:

а) $\cos^2(180^\circ - \alpha) + \cos^2(90^\circ - \alpha)$;	б) $\sin^2(180^\circ - \alpha) + \sin^2(90^\circ - \alpha)$;
в) $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)$;	г) $\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha)$.
7. Дар секунҷаи ABC $\angle A = 150^\circ$ ва $AC = 7$ см бошад, баландии аз қуллаи C гузаронидашударо ёбед.
8. Диагонали росткунҷае, ки 12 см аст, бо як тарафаш кунҷи 30° -ро ташкил медиҳад. Масоҳати росткунҷаро ёбед.
9. Агар а) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\sin \alpha = \frac{1}{4}$; в) $\sin \alpha = 1$ бошад, $\cos \alpha$ -ро ёбед.
- 10*. Агар а) $\sin \alpha = \frac{1}{2}$; б) $\operatorname{tg} \alpha = -1$; в) $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ бошад, α -ро ёбед.

I. Ба мафҳумҳои сутуни чап аз таърифҳои сутуни рост мувофиқашро гузоред.

- | | |
|-----------------------------|---|
| 1. Синуси кунчи α | а) нисбати катети муқобили кунчи α бар гипотенуза |
| 2. Косинуси кунчи α | б) нисбати катети ба кунчи α часпида бар гипотенуза |
| 3. Тангенс кунчи α | в) нисбати катети муқобили кунчи α ба катети дуюм |
| 4. Котангенс кунчи α | г) нисбати катети ба кунчи α часпида ба катети дуюм. |

II. Тестҳо

1. Формулаи нодурустро ёбед.

A. $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$;

B. $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$;

C. $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$;

D. $\cos(180^\circ - \alpha) = \cos \alpha$.

2. Агар $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ бошад, кадоме аз зайл мусбат?

A. $\sin \alpha$;

B. $\cos \alpha$;

C. $\tan \alpha$;

D. $\cot \alpha$.

3. Баробарии дурустро ёбед.

A. $\sin^2 \alpha = 1 + \cos^2 \alpha$;

B. $\tan^2 \alpha = 1 + \cos^2 \alpha$;

C. $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha$ ($\alpha \neq 90^\circ$);

D. $\sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1$.

4. $\sin 70^\circ$ ба чӣ баробар аст?

A. $\sin 20^\circ$;

B. $-\sin 20^\circ$;

C. $\cos 70^\circ$;

D. $\cos 20^\circ$.

5. Кунчи тези α -ро нишон диҳед, ки дар он $\sin \alpha = \frac{1}{2}$.

A. 30° ;

B. 45° ;

C. 90° ;

D. 60° .

6. Агар $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ бошад, кунчи тези α -ро ёбед.

A. 30° ;

B. 45° ;

C. 90° ;

D. 60° .

7. Агар $\tan \alpha = 1$ бошад, кунчи тези α -ро ёбед.

A. 30° ;

B. 45° ;

C. 90° ;

D. 60° .

8. Агар $\cot \alpha = 1$ бошад, кунчи тези α -ро ёбед.

A. 30° ;

B. 45° ;

C. 90° ;

D. 60° .

9. Баробарии $\sin \alpha = \cos \alpha$ барои кадом қиматҳои кунчи тези α ҷой дорад?

A. 30° ;

B. 45° ;

C. 90° ;

D. 60° .

10. Агар $\sin B = \frac{2}{5}$ бошад, $\cos B$ -ро ёбед.

A. $\frac{4}{25}$; B. $\frac{\sqrt{29}}{5}$; C. $\frac{\sqrt{21}}{5}$; D. $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

11. Агар $\cos A = 0,2$ бошад, $\operatorname{tg} A$ -ро ёбед.

A. $\sqrt{96}$; B. $2\sqrt{6}$; C. $\sqrt{15}$; D. $\frac{\sqrt{6}}{12}$.

12. Диагонали росткунча аз яктарафи 2-маротиба дароз аст. Кунчи байни диагоналҳои росткунчаро ёбед.

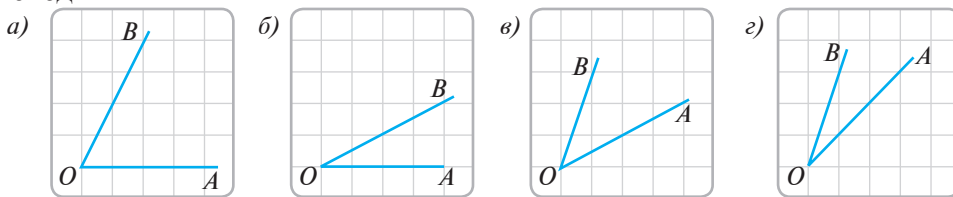
A. 30° ; B. 60° ; C. 90° ; D. 150° .

13. Баланди ба асоси баробарпахлӯ фароварда шуда 3 см, асосаш бошад, 8 см, синуси кунчи ба асоси секунча часпидаро ёбед.

A. $\frac{3}{5}$; B. $\frac{3}{4}$; C. $\frac{\sqrt{73}}{73}$; D. $\frac{4}{5}$.

III. Масъалаҳо

1. Синус, косинус, тангенс ва котангенс кунҷҳои дар расм тасвир шударо ёбед.



2. Мунучеҳр аз хонаашон 800 м, ба тарафи Шарқ баъд ба тарафи Шимол 600 м роҳ тай намуд. Ў аз хонаашон чанд метр ба дурӣ омад? Ў акнун аз рӯи хати рост барои ба хона омаданиш нисбат ба тарафи Ғарб дар тахти кадом кунҷ ҳаракат намуданиш лозим аст?

3. Поезд дар ҳар 30 м роҳ рафтани 1 м ба баландӣ бардошта мешавад. Кунчи нисбат ба вертикал бардошташавии роҳи оҳанро ёбед.

4. Агар дарозии сояи бинои баландиаш 30 м, 45 м бошад, кунчи афтиши нури Офтобро дар майдони бино чойгир шударо ёбед.

5. Яке аз кунҷҳои секунҷаи росткунча ба 60° катети бузургаш ба 6 баробар аст. Катети хурди он ва гипотенузаашро ёбед.

6. Дар расандаи ба нуқтаи А-и давраи марказаш О гузаронидашуда нуқтаи В гирифта шудааст. Агар $AB = 9$ см, $\angle ABO = 30^\circ$ бошад, радиуси давра ва дарозии порчаи ВС -ро ёбед.

7. Хати ростии m ва порчаи АВ, ки ин хати ростро бурида намегузарад, дода шудааст. Дар ин $AB = 10$, кунчи байни АВ ва хати ростии m 60° аст. Аз куллаҳои порчаи АВ ба хати ростии m перпендикулярҳои АС ва ВD гузаронида шудааст. Порчаи CD -ро ёбед.

8. Кунчи тези ромб ба 60° баландии он бошад, ба 6 баробар аст. Масоҳати ромбро ёбед. Дарозии диагонали калон ва масоҳати ромбро ёбед.

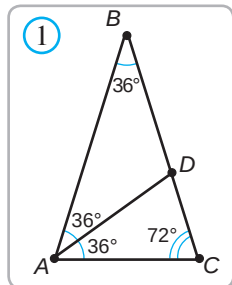
9. Ба давраи радиусаш 5 см трапетсияи баробарпахлу берун кашида шудааст. Агар кунчи тези трапетсия 30° бошад, тарафи пахлуи ва масоҳати онро муайян кунед.
10. Агар дар росткунҷаи $ABCD$ $AB=4$, $\angle CAD=30^\circ$ бошад, радиуси давраи ба он берункашидашуда ва масоҳати росткунҷаро ёбед.
11. Тарафҳои росткунҷа 3 см ва $\sqrt{3}$ см. Кунчи ташкилкардаи яке аз диагоналҳои онро бо тарафҳояш ёбед.
12. Агар а) $\sin A = \frac{4}{7}$; б) $\cos A = \frac{4}{7}$; в) $\cos A = -\frac{4}{7}$ бошад, кунчи A -ро созед.
13. Яке аз кунҷҳои секунҷаи росткунҷа 30° , баландии ба гипотенуза гузаронидашуда 6 см аст. Тарафҳои секунҷаро ёбед.
14. Масоҳати ромби кунчи тезаш 30° ва баландиаш 4 см -ро ёбед.
15. Агар $\sin A = \frac{8}{17}$ ва $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ бошад, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ ва $\operatorname{ctg} \alpha$ -ро ёбед.
16. Ба гипотенузаи AB -и секунҷаи росткунҷаи ABC баландии CD гузаронида шудааст. Агар $\angle A = 60^\circ$ ва $BD = 2$ бошад, катети BC -ро ёбед.
17. Дар секунҷаи ABC $\angle A = 30^\circ$, $\angle C = 45^\circ$. Агар баландии секунҷаи $BD = 12$ см бошад, тарафи AC ва масоҳаташро ёбед.

IV. Худатонро бисанҷед (кори назоратии намунавӣ)

1. Агар $\cos \alpha = -\frac{8}{17}$ ва $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ бошад, $\sin \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$ ба чӣ баробар аст?
2. Гипотенузаи секунҷаи росткунҷа $c = 18$ см ва катети он $a = 4$ см бошад, катети дуюм ва кунҷҳои тези онро муайян кунед.
3. Медианаи секунҷаи баробартараф аз тарафи он хурд буданашро исбот кунед.
4. (Илова). Ҳар як тарафи чоркунҷа аз ҳосили ҷамъи тарафҳои боқимонда хурд буданашро исбот кунед.



Лавҳаҳои таърихи. «Секунҷаи тиллоӣ».



Юнониёни қадим секунҷаи баробарпахлуи кунҷҳояш 36° , 72° ва 72° бударо — «секунҷаи тиллоӣ» номидаанд. Сабаби ин вай ба ҳосияти аҷоибӣ зерин соҳиб аст: биссектрисаи кунҷи AD онро ба ду секунҷаи баробарпахлу ҷудо мекунад (расми 1).

Дар ҳақиқат, аз сабаби AD биссектриса буданаш, кунҷҳои BAD ва DAC ҳам 36° . Бинобар ин секунҷаи ABD секунҷаи баробарпахлу. Дар секунҷаи ADC кунҷи ADC $180^\circ - 36^\circ - 72^\circ = 72^\circ$ буда ба кунҷи ACD баробар аст. Аз ин рӯ секунҷаи

ADC ҳам баробарпахлу аст.

Натиҷа. Секунҷаи ABC ба секунҷаи ACD монанд ва $\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{AC}$. (1)

Агар тарафҳои паҳлуи секунҷаи ABC $AB=BC=1$ гуфта гирем, асоси он чунин ёфта мешавад (расми 2): $AC=a$ бошад. Дар ин ҳол

1. $AD=a$ чунки $\triangle ACD$ баробарпахлу.
 2. $BD=a$ мешавад, чунки $\triangle ABD$ баробарпахлу.
 3. $CD=BC-BD=1-a$.
- дар асоси баробарии (1):

$$\frac{a}{1} = \frac{1-a}{a}$$

Аз ин $a^2+a-1=0$. Ин муодилаи квадратиро ҳал намуда, $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ буданашро меёбем.

Масъала. Қиматҳои $\sin 18^\circ$, $\cos 18^\circ$, $\sin 72^\circ$, $\cos 72^\circ$ -ро ҳисоб кунед.

Ҳалли он: “Секунҷаи тиллоӣ”-ро дида мебароем, ки тарафи паҳлуи $AB=BC=1$ ва асосаш $AC=a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Яъне секунҷаи ABC -ро дида мебароем (расми 3). Баландии он BE -ро мегузaronем.

Аз секунҷаи росткунҷаи ABE

$$\sin 18^\circ = \frac{AE}{AB} = \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

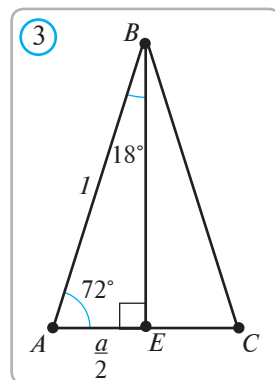
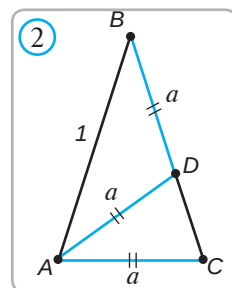
Аз ин истифода бурда, қиматҳои дигари ёфтанишон талаб кардашударо ҳисоб мекунем:

$$\cos 18^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 18^\circ} = \frac{\sqrt{5}+1}{4};$$

$$\sin 72^\circ = \sin(90^\circ - 18^\circ) = \cos 18^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4};$$

$$\cos 72^\circ = \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Ҷавоб: $\sin 18^\circ = \cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$; $\cos 18^\circ = \sin 72^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$.



Лавҳаҳои таърихи.

Улуғбек (1394–1449) — олими бузурги ўзбек ва арбоби давлати Номии аслии он Муҳаммад Тарағай, набераи соҳибкирон Амир Темур. Падари Улуғбек Шохрух ҳам арбоби давлатӣ буд. Улуғбек тахминан солҳои 1425–1428 дар баландии Оби Раҳмати наздикии Самарқанд расадхонаи машҳури худро месозад. Бинои расадхона аз се ошёна иборат буда, чиҳозоти асосии он — квадрант 50 метр баланди дошт. Асари машҳури Улуғбек «Зичи кўрагонӣ» ном дошта, ҷадвали астрономӣ аст ва он 1018 то ситорахоро дар бар мегирад.



Улуғбек
(1394 — 1449)

30

БО ЁРИИ СИНУСИ КУНЧ ҲИСОБ КАРДАНИ МАСОҲАТИ СЕКУНЧА

Теорема 1. Масоҳати секунча ба нисфи ҳосили зарби ду тараф ва синуси кунчи байни онҳо баробар аст.



$\triangle ABC$, $BC = a$, $AC = b$, $\angle C$ (расми 1)



$$S_{ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C$$

Исбот. Баландии секунчаи ABC BD -ро мегузаронем. Дар ин ҳолат се ҳолатҳое, ки дар расми 1 нишон дода шудааст, буданаш мумкин.

Ҳолати якумро дида мебароем. Дар секунчаи BCD $\sin C = \frac{BD}{BC}$.

Аз ин $BD = BC \cdot \sin C = a \cdot \sin C$. Ҳамин тавр,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot b \cdot a \cdot \sin C = \frac{1}{2} ab \sin C.$$

Исботи ҳолатҳои ду ва се ро мустақилона исбот намоед. **Теорема исбот шуд.**

Дар асоси теоремаи 1, барои масоҳати секунча формулаҳои

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A \quad \text{ва} \quad S_{ABC} = \frac{1}{2} ac \sin B$$

ҳам ҷой дорад.



Масъалаи 1. Масоҳати секунчаи ABC 24 см^2 . Агар $AC = 8 \text{ см}$ ва $\angle A = 30^\circ$ бошад, тарафи BC -ро ёбед.

Ҳалли он. Дар асоси формулаи ёфтани масоҳати секунча бо ёрии синуси кунч,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A$$

Аз ин,

$$AB = \frac{2S_{ABC}}{AC \cdot \sin A} = \frac{2 \cdot 24}{8 \cdot \sin 30^\circ} = \frac{2 \cdot 24}{8 \cdot 0,5} = 12 \text{ (см)}.$$

Ҷавоб: 12 см .



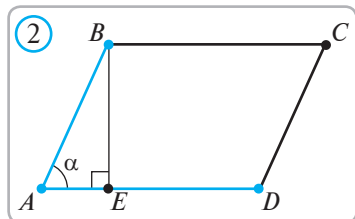
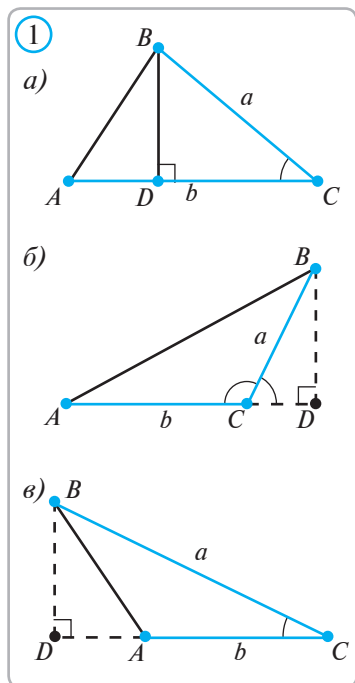
Масъалаи 2. Исбот кунед, ки масоҳати параллелограмм ба ҳосили зарби ду тарафи ҳамсоя ва синуси кунчи байни онҳо баробар аст.



$ABCD$ параллелограмм,
 $AB = a$, $AD = b$, $\angle A = \alpha$
(расми 2)



$$S_{ABCD} = ab \sin \alpha$$



Ҳалли он. Баландии BE -ро мегузаронем. Дар секунҷаи ABE $\sin A = \frac{BE}{AB}$ ё ки $BE = AB \sin A = a \sin \alpha$. Дар ин ҳол $S_{ABCD} = AD \cdot BE = ab \sin \alpha$.

Теоремаи 2. Масоҳати чоркунча ба нисфи ҳосили зарби диагоналҳои он ва синуси кунчи байни диагоналҳо баробар аст.

Исбот. Кунҷҳои ҳосилшударо дар буриши диагоналҳо дида мебароем (расми 3):

$\angle AOB = \alpha \iff$ дар асоси шарт,

$\angle COD = \alpha \iff$ аз ба $\angle AOB$ вертикалӣ буданаш,

$\angle BOC = 180^\circ - \alpha \iff$ аз ба $\angle AOB$ ҳамсоя буданаш,

$\angle DOA = 180^\circ - \alpha \iff$ аз ба $\angle BOC$ вертикалӣ буданаш.

Дар асоси формулаи ҳисоб кардани масоҳати секунҷа бо ёрии синуси кунҷ:

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} AO \cdot OB \sin \alpha; \quad S_{BOC} = \frac{1}{2} BO \cdot OC \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{2} BO \cdot OC \sin \alpha;$$

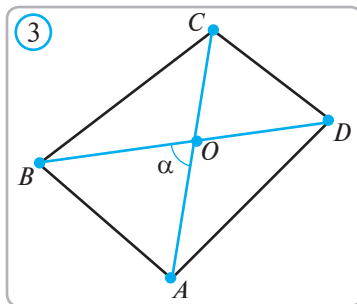
$$S_{COD} = \frac{1}{2} CO \cdot OD \sin \alpha; \quad S_{DOA} = \frac{1}{2} DO \cdot OA \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{2} DO \cdot OA \sin \alpha.$$

$$\text{Мувофиқи хосияти масоҳатӣ: } S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{DOA} =$$

$$= \frac{1}{2} AO \cdot OB \sin \alpha + \frac{1}{2} BO \cdot OC \sin \alpha + \frac{1}{2} CO \cdot OD \sin \alpha + \frac{1}{2} DO \cdot OA \sin \alpha =$$

$$= \frac{1}{2} (AO \cdot OB + BO \cdot OC + CO \cdot OD + DO \cdot OA) \sin \alpha = \frac{1}{2} \{ (OB \cdot (AO + OC) +$$

$$+ OD \cdot (CO + OA)) \sin \alpha = \frac{1}{2} (OB \cdot AC + OD \cdot AC) \sin \alpha = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin \alpha.$$



? Савол, масъала ва супориш

Теорема исбот шуд.

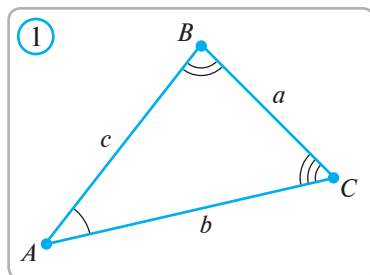
1. Теоремаи 1-ро дар ҳолатҳои тасвирёфтаи расми 1-б ва расми 1-в исбот кунед.
2. Агар а) $AB = 6$ см, $AC = 4$ см, $\angle A = 30^\circ$; б) $AC = 14$ см, $BC = 7\sqrt{3}$ см, $\angle C = 60^\circ$; д) $BC = 3$ см, $AB = 4\sqrt{2}$ см, $\angle B = 45^\circ$ бошад, масоҳати секунҷаи ABC -ро ёбед.
3. Масоҳати росткунҷаи диагоналаш 12 см ва кунҷи байни диагоналҳояш 30° -ро ёбед.
4. Масоҳати ромбе, ки тарафаш $7\sqrt{2}$ см ва кунҷи кунди он 135° аст, ёбед.
5. Диагонали калони ромб 18 см буда, кунҷи кунди он 120° аст. Масоҳати ромбро ёбед.
6. Дар секунҷаи ABC , ки масоҳаташ $6\sqrt{2}$ см² аст, $AB = 9$ см, $\angle A = 45^\circ$. Тарафи AC ва баландии ба ин тарафи секунҷа гузаронидашударо муайян кунед.
- 7*. Дар секунҷаи ABC $\angle A = \alpha$, баландии аз қуллаҳои B ва C гузаронидашуда мувофиқан h_b ва h_c бошад, масоҳати секунҷаро ёбед.
- 8*. Дар секунҷаи ABC $AB = 8$ см, $AC = 12$ см ва $\angle A = 60^\circ$ бошад, биссектрисаи он AD ёфта шавад (нишондод: $S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ADC}$).

31

ТЕОРЕМАИ СИНУСҲО

Теорема. (Теоремаи синусҳо). Тарафҳои секунҷа ба синуси кунҷҳои муқобил мутаносибанд.

$$\triangle ABC, AB=c, BC=a, CA=b \text{ (расми 1)} \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$



Исбот. Дар асоси формулаи ёфтани масоҳати секунҷа ба воситаи синуси кунҷ

$$S = \frac{1}{2}ab \sin C, \quad S = \frac{1}{2}bc \sin A, \quad S = \frac{1}{2}ac \sin B. \quad (\diamond)$$

Аз баробарии ду формулаи аввал

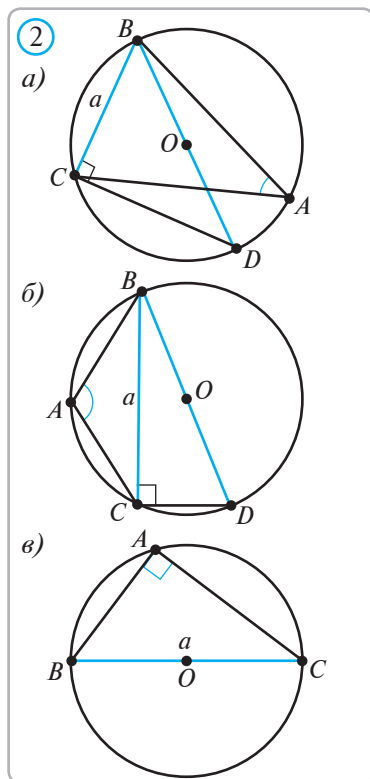
$$\frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}bc \sin A, \quad \text{аз ин рӯ,} \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}.$$

Ҳамин тавр, аз баробарии якум ва сеюми ($\diamond$)

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B} \quad \text{— ро ҳосил мекунем.}$$

$$\text{Бинобар ин,} \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Теорема исбот шуд.



Масъалаи 1. Дар секунҷа ABC $AB=14$ дм, $\angle A=30^\circ$, $\angle C=65^\circ$ (расми 1). Тарафи BC -ро ёбед.

Ҳалли он. Дар асоси теоремаи синусҳо

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A}. \quad \text{Аз ин}$$

$$BC = \frac{AB \cdot \sin A}{\sin C} = \frac{14 \cdot \sin 30^\circ}{\sin 65^\circ} \approx \frac{14 \cdot 0,5}{0,9} \approx 7,78 \text{ (дм)}.$$

Эзоҳ: Қиматҳои функсияҳои тригонометрӣ бо ёрии калкулятори махсус ё ки ҷадвалҳо ёфта мешавад. Дар ин ҷо $\sin 65^\circ \approx 0,9$ буданаширо аз рӯи ҷадвали саҳифаи 153 китоби дарсӣ муайян кардем. **Ҷавоб:** 7,78 дм.

Масъалаи 2. Нисбати тарафҳои секунҷа бар синуси кунҷҳои муқобили ин тарафҳо ба диаметри давраи ба ин секунҷа берункашидашуда баробар буданаширо исбот кунед (расми 1).

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

Ҳалли он. Равшан аст, ки дар асоси теоремаи синусҳо $\frac{a}{\sin A} = 2R$ -ро исбот кардан кифоя. Се ҳолат шуданаш мумкин:

Ҳолати 1: $\angle A$ — кунчи тез (расми 2,а); Ҳолати 2: $\angle A$ — кунчи кунд (расми 2,б);

Ҳолати 3: $\angle A$ — кунчи рост (расми 2,в).

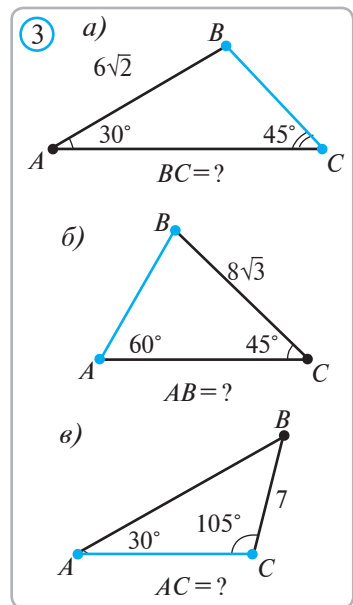
Ҳолати 1-ро дида мебароем: нуктаҳои C ва D -ро пайваст мекунем. BCD — секунҷаи росткунҷа, чунки кунчи $\angle BCD$ ба диаметри BD таъя мекунад. Дар секунҷаи $\triangle BCD$ $BC = BD \cdot \sin D = 2R \sin D$. Лекин, $\angle D = \angle A$, чунки онҳо кунҷҳои бо як камони BC кашидашудаи дохилӣ мебошанд. Он гоҳ

$$BC = 2R \sin A \quad \text{ё ки} \quad \frac{a}{\sin A} = 2R.$$

Ҳолатҳои боқимондари мустақилона исбот кунед. (Нишондод: Дар ҳолати 2 аз $\angle D = 180^\circ - \angle A$ буданаш, дар ҳолати 3 $a = 2R$ буданаш истифода баред).

? Савол, масъала ва супориш

- Нисбати тарафи дилхоҳи секунҷа бар синуси кунчи муқобил ба диаметри давраи берункашидашуда баробар буданашро барои ҳолатҳои 2 ва 3 дар масъалаи 2 исбот намоед.
- Дар асоси нишондодҳои расми 3 порчаҳои номаълумро ёбед.
- Агар дар секунҷаи ABC :
 а) $\sin A = 0,4$; $BC = 6$ см ва $AB = 5$ см бошад, $\sin C$ -ро;
 б) $\sin B = \frac{3}{5}$; $AC = 8$ дм ва $BC = 7$ дм бошад, $\sin A$ -ро;
 в) $\sin C = \frac{4}{7}$; $AB = 6$ м ва $AC = 8$ м бошад, $\sin B$ -ро ёбед.
- Як кунҷи секунҷа 30° аст. Тарафи муқобили он $4,8$ дм. Радиуси давраи ба секунҷа берункашидашударо ҳисоб кунед.
- Яке аз тарафҳои секунҷа ба радиуси давраи берункашидашуда баробар аст. Кунҷи муқобили ҳамин тарафи секунҷаро ёбед. Дар ин ду ҳолат дида баромадан лозим буданашро ба эътибор гиред.
- Ба секунҷаи ABC баробарии $AB : BC : CA = \sin C : \sin A : \sin B$ чой доштанаширо асоснок намоед. Баробарии $\sin A : \sin B : \sin C = 3 : 5 : 7$ оё дуруст аст?
- Агар дар секунҷаи ABC $BC = 20$ м, $AC = 13$ м ва $\angle A = 67^\circ$ бошад, тарафи AB , кунҷҳои B ва C -и секунҷаро ёбед.
- Агар дар секунҷаи ABC $BC = 18$ дм, $\angle A = 42^\circ$, $\angle B = 62^\circ$ бошад, кунҷи C , тарафҳои AB ва AC -и секунҷаро ёбед.



32

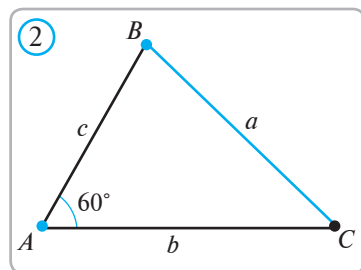
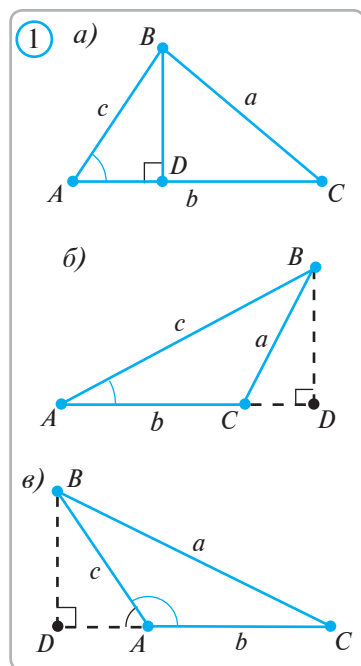
ТЕОРЕМАИ КОСИНУСҲО

Дар секунҷаи росткунҷа квадрати тарафи муқобили кунҷи рост (гипотенуза) ба ҳосили ҷамъи квадрати тарафҳои боқимонда (катетҳо) баробар аст.

Фараз мекунем, ки кунҷи рост нест? Теоремаи зерин дар ҳамин хусус.

Теорема. (Теоремаи косинусҳо). **Квадрати тарафи дилҳохи секунҷа ба ҷамъи квадратҳои ду тарафи дигари он (боқимонда) ва фарқи ҳосили зарби дучанди ин тарафҳо бар косинуси кунҷи байни онҳо баробар аст.**

$$\triangle ABC, AB=c, BC=a, CA=b \text{ (расми 1)} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$



Исбот. Ба секунҷаи ABC баландии BD мегузаронем. Нуқтаи D дар тарафи AC (расми 1-а) ё ки дар давоми он (расмҳои 1-б ва 1-в) шуданаш мумкин. Ҳолати якумро дида мебароем. Дар секунҷаи росткунҷаи BCD дар асоси теоремаи Пифагор $BC^2 = BD^2 + DC^2$.

Аз $DC = AC - AD$ буданаш:

$$BC^2 = BD^2 + (AC - AD)^2 = BD^2 + AC^2 - 2 \cdot AC \cdot AD + AD^2.$$

Дар секунҷаи росткунҷаи ABD $BD^2 + AD^2 = AB^2$ ва $AD = AB \cos A$ буданашро ба ҳисоб гирифта, аз баробарии охирин

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A,$$

яъне ба баробарии $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ соҳиб мешавем. **Теорема исбот шуд.**

Дар ҳолати тасвир чун расми 1-б аз баробарии $DC = AD - AC$ ва тасвир чун расми 1-в аз баробарии $DC = AD + AC$ ва $\cos(180^\circ - A) = -\cos A$ истифода бурда, теоремаи косинусҳоро мустақилона исбот кунед.

Эзоҳ. Теоремаи косинусҳо теоремаи умумӣ-кардашудаи Пифагор аст. $\angle A = 90^\circ$ бошад, (аз сабаби $\cos 90^\circ = 0$ будан), аз теоремаи косинусҳо, теоремаи Пифагор бармеояд.

Масъалаи 1. Дар секунҷаи ABC $AB = 6$ см, $AC = 7$ см, $\angle A = 60^\circ$ (расми 2). Тарафи BC -ро ёбед.

Ҳалли он. Дар асоси теоремаи косинусҳо $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ ё ки $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A$ буданаш.

$$BC^2 = 7^2 + 6^2 - 2 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cos 60^\circ = 49 + 36 - 84 \cdot \frac{1}{2} = 43,$$

яъне $BC = \sqrt{43}$ см. **Ҷавоб:** $\sqrt{43}$ см.

Инчунин аз теоремаи косинусҳо истифода бурда, аз маълум будани тарафҳо кунҷҳои секунҷаро ёфтан мумкин:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}. \quad (1)$$

Масъалаи 2. Тарафҳои секунҷаи ABC $a=5$ м, $b=6$ м ва $c=4$ м. Проексияи тарафи хурдро дар тарафи калон ёбед (расми 3).

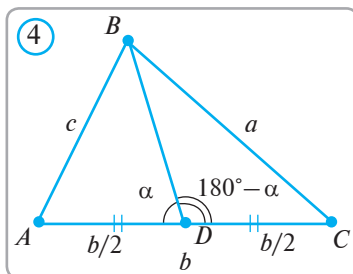
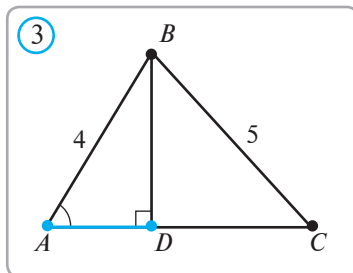
Ҳалли он. Мувофиқи формулаи 1 $\cos A$ -ро меёбем:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{6^2 + 4^2 - 5^2}{2 \cdot 6 \cdot 4} = \frac{9}{16}.$$

Дар секунҷаи росткунҷаи ABD $AD = AB \cdot \cos A$ буданаш

$$AD = 4 \cdot \frac{9}{16} = 2,25 \text{ (м)}.$$

Ҷавоб: 2,25 м.



Савол, масъала ва супориш

1. Теоремаи косинусҳоро дар ҳолатҳое, ки дар расми 1-б ва 1-в нишон дода шудаанд, исбот кунед.
2. Дар секунҷаи ABC
 - а) $AC=3$ см, $BC=4$ см ва $\angle C=60^\circ$ бошад, AB -ро;
 - б) $AB=4$ м, $BC=4\sqrt{2}$ м ва $\angle B=45^\circ$ бошад, AC -ро;
 - в) $AB=7$ дм, $AC=6\sqrt{3}$ дм ва $\angle A=150^\circ$ бошад, BC -ро ёбед.
3. Косинуси кунҷҳои секунҷаи тарафҳояш 5 см, 6 см, 7 см бударо муайян кунед.
4. Дар секунҷаи ABC , $AB=10$ см, $BC=12$ см ва $\sin B=0,6$ бошад, тарафи AC -ро ёбед.
5. Диагонали параллелограмм 10 см ва 12 см буда, кунҷи байни онҳо 60° аст. Тарафҳои параллелограммро ёбед.
6. Яке аз кунҷҳои параллелограмм, ки тарафҳояш 5 см ва 7 см мебошад, ба 120° баробар аст. Диагонали онро ёбед.
- 7*. Исбот кунед, ки медианаи BD -и секунҷаи тарафҳояш a, b, c буда бо формулаи $BD = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$ ҳисоб карда мешавад (расми 4).
- 8*. Медианаи секунҷаи тарафҳояш 6 м, 7 м ва 8 м-ро муайян кунед.
9. Биссектрисаи секунҷаи масъалаи 3-ро ёбед.
10. Баландии секунҷаи масъалаи 3-ро ёбед.

БАЪЗЕ ТАТБИҚҲОИ ТЕОРЕМАИ СИНУСҲО ВА КОСИНУСҲО

Теоремаи синусҳо ва косинусҳо, ки дар дарсҳои гузашта исбот намудем, ҳангоми ҳалли масъалаҳои гуногун оиди секунҷаҳо самаранок истифода бурдан мумкин аст. Дар ин дарс ба татбиқи баъзеи ин теоремаҳо истода мегузарем.

1. Теоремаи косинусҳо имкон медиҳад, ки кунҷҳои секунҷаро наёфта, намуди кунҷҳои он (кунҷи тез, кунд ё ки рост буданаш) муайян карда шавад. Дар ҳақиқат, дар формулаи

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

- 1) агар $b^2 + c^2 > a^2$ бошад, $\cos A > 0$, аз ин рӯ, A — **кунҷи тез**;
- 2) агар $b^2 + c^2 = a^2$ бошад, $\cos A = 0$, аз ин рӯ, A — **кунҷи рост**;
- 3) агар $b^2 + c^2 < a^2$ бошад, $\cos A < 0$, аз ин рӯ, A — **кунҷи кунд**.

Баробарии $b^2 + c^2 = a^2$ ё ки нобаробарии $b^2 + c^2 < a^2$ дар ҳолати a тарафи калонтарини секунҷа будан иҷро мешавад. Аз ҳамин сабаб кунҷи рост ё ки кунди секунҷа муқобили тарафи калонтарини он меҳобад.

Ба бузургии кунҷи муқобили тарафи калони секунҷа нигоҳ карда, ба чӣ гуна секунҷа (тезкунҷа, кундкунҷа, росткунҷа) будани он ба хулоса омадан мумкин.

 **Масъалаи 1.** Кунҷҳои секунҷаи тарафҳояш 5 м, 6 м ва 7 м-ро наёфта, намуди онро муайян кунед.

Ҳалли он. Дар муқобили кунҷи калон тарафи калон меҳобад. Бинобар ин, агар $a=7, b=6, c=5$ бошад, кунҷи аз Ҳама калон $\angle A$ мешавад.

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{36 + 25 - 49}{2 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{12}{60} = \frac{1}{5} > 0.$$

Аз ин рӯ, A кунҷи тез, секунҷаи додашуда бошад, секунҷаи тезкунҷа аст.

2. Аз формулаи ҳисоб кардани масоҳати секунҷа аз рӯи ду тараф ва кунҷи байни онҳо

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A$$

ва аз формулаи $\sin A = \frac{a}{2R}$ барои ҳисобкунии масоҳати секунҷа аз формулаи

$S = \frac{abc}{4R}$ барои ҳисобкунии радиуси давраи дар беруни секунҷа кашида

формулаи $R = \frac{abc}{4S}$ -ро ҳосил мекунем.

Масъалаи 2. Радиуси давраи ба секунҷаи тарафҳояш $a=5, b=6, c=10$ берункашидашударо ёбед.

Ҳалли он. Аз формулаи Герон истифода бурда, масоҳати секунҷаро муайян мекунем.

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{5+7+10}{2} = 11,$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{11(11-5)(11-7)(11-10)} = \sqrt{11 \cdot 6 \cdot 4} = \sqrt{264} \approx 16,3.$$

Он гоҳ $R = \frac{abc}{4S} \approx \frac{5 \cdot 7 \cdot 10}{4 \cdot 16,3} \approx 5,4.$

Ҷавоб: $R \approx 5,4.$

? Савол, масъала ва супориш

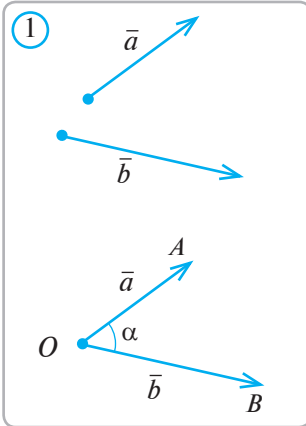
1. Агар $AB=7$ см, $BC=8$ см, $CA=9$ см бошад, кунҷи аз ҳама калон ва хурди секунҷаи ABC -ро ёбед.
2. Агар дар секунҷаи ABC $\angle A=47^\circ$, $\angle B=58^\circ$ бошад, тарафи аз ҳама калонтарин ва хурдтарини онро аниқ намоед.
3. Се тарафи секунҷа дода шудааст:
а) $a=5$, $b=4$, $c=4$; б) $a=17$, $b=8$, $c=15$; в) $a=9$, $b=5$, $c=6$.
Тезкунча, кундкунча ё ки росткунча буданаширо муайян кунед.
4. Радиуси давраи ба секунҷаи тарафҳояш а) 13, 14, 15; б) 15, 13, 4; в) 35, 29, 8; г) 4, 5, 7 буда берункашидашударо ёбед.
5. Дар тарафи AB -и секунҷаи ABC нуктаи D дода шудааст. Порчаи CD ҳеҷ набошад аз яке порчаҳои AC ва BC хурд буданаширо исбот кунед.
6. Дар муқобили кунҷи калони секунҷа тарафи калон хобиданаширо исбот кунед.
7. Дар муқобили тарафи калони секунҷа кунҷи калон хобиданаширо исбот кунед.
- 8*. Дар секунҷаи ABC медиана CD гузаронида шудааст. Агар $AC > BC$ бошад, кунҷи ACD аз кунҷи BCD хурд буданаширо исбот кунед.
9. Дар асоси расм масъалаи мувофиқ тартиб диҳед.



34

ҲИСОБ КАРДАНИ КУНЧИ БАЙНИ ДУ ВЕКТОР

Шумо дар синфи 8 ба мафҳуми зарби скалярии вектор ва хосиятҳои онҳо шинос шуда будед. Зарби скалярии ду вектор бо ёрии координатаҳои он ифода карда мешуд. Ҳоло мо аз теоремаи косинусҳо истифода бурда боз як формулаи асосиро барои зарби скалярии векторҳо ҳосил мекунем. Дар он зарби скалярии бо ёрии дарозии вектор ва кунчи байни онҳо ифода карда мешавад.



Бигузор векторҳои $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ аз вектори сифри (нули) ғарикунанда дода шуда бошад. Ба нуқтаи дилхоҳи O векторҳои $\vec{OA} = \vec{a}$ ва $\vec{OB} = \vec{b}$ -ро мегузорем. Кунчи байни векторҳои $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ гуфта кунчи AOB гуфта мешавад (расми 1). Кунчи байни векторҳои самташон якхела ба 0° баробар аст.

Агар кунчи байни ду вектор ба 90° баробар бошад, онҳоро **перпендикуляр** меноманд.

Ба ёд меорем:

1. Дарозии вектори $\vec{a}(a_1; a_2)$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

2. Зарби скалярии векторҳои $\vec{a}(a_1; a_2)$ ва $\vec{b}(b_1; b_2)$

$$\vec{a}\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$$

бо ҳамин формулаҳо ҳисоб карда мешуд.

Векторҳои коллинеарии набудаи $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ -ро дида мебароем. Ба нуқтаи дилхоҳи O векторҳои $\vec{OA} = \vec{a}$ ва $\vec{OB} = \vec{b}$ -ро мегузорем (расми 2). $\angle AOB = \alpha$ бошад, он гоҳ аз як тараф дар асоси теоремаи косинусҳо

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cos \alpha. \quad (1)$$

Аз тарафи дуюм

$$AB^2 = |\vec{AB}|^2 = |\vec{OB} - \vec{OA}|^2 = (\vec{OA} - \vec{OB})^2 = \vec{OA}^2 + \vec{OB}^2 - 2\vec{OA} \cdot \vec{OB}. \quad (2)$$

Бинобар ин, дар асоси баробариҳои (1) ва (2) $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = OA \cdot OB \cos \alpha$ ё ки $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha$.

Натиҷа. Барои а векторҳои аз сифр (нул) фарқ кунандаи $\vec{a}(a_1; a_2)$ ва $\vec{b}(b_1; b_2)$ барои кунчи байни векторҳои

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \quad \text{ё ки} \quad \cos \alpha = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

формулаҳои зерини ҷой дорад.

Масъала. Кунчи байни векторҳои $\vec{a}(1; 2)$ ва $\vec{b}(4; -2)$ -ро ёбед.

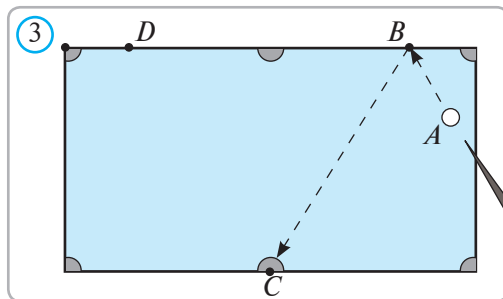
Ҳалли он. Фара мекунем, ки кунчи байни векторҳо α бошад, дар асоси формула,

$$\cos \alpha = \frac{1 \cdot 4 + 2 \cdot (-2)}{\sqrt{1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{4^2 + (-2)^2}} = \frac{4 - 4}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{20}} = 0.$$

Пас $\alpha = 90^\circ$. **Ҷавоб:** 90° .

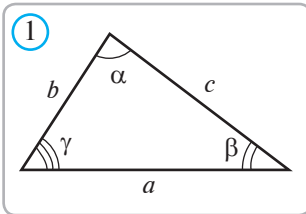
? **Савол, масъала ва супориш**

- Агар барои векторҳои $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ а) $a=4, b=5, \alpha=30^\circ$; б) $a=8, b=7, \alpha=45^\circ$; в) $a=2,4, b=10, \alpha=60^\circ$; г) $a=0,8, b=\frac{1}{4}, \alpha=40^\circ$ бошад, зарби скалярии ин векторҳоро ёбед (дар ингр α — кунчи байни векторҳои $\vec{a}$ ва $\vec{b}$).
- Зарби скаляри векторҳои а) $\vec{a}(\frac{1}{4}; -1)$ ва $\vec{b}(2; 3)$; б) $\vec{a}(-5; 6)$ ва $\vec{b}(6; 5)$; в) $\vec{a}(1,5; 2)$ ва $\vec{b}(4; -2)$ -ро ҳисоб намуда кунчи байни онҳоро ёбед.
- Диагоналҳои ромби $ABCD$ дар нуқтаи O якдигарро мебурад ва дар он $BD=AB=4$ см. Зарби скалярии векторҳои.
а) $\vec{AB}$ ва $\vec{AD}$; б) $\vec{AB}$ ва $\vec{AC}$; в) $\vec{AD}$ ва $\vec{DC}$; г) $\vec{AC}$ ва $\vec{OD}$ ва кунчи байни онҳоро ёбед.
- Бигуздор вектори аз вектори сифр фарқ кунандаи $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ дода шуда бошад. Агар $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ бошад, ин векторҳо перпендикуляр ва агар векторҳои $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ перпендикуляр бошад, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ буданашро исбот кунед.
- Ба кадом қимати x векторҳои: а) $\vec{a}(4; 5)$ ва $\vec{b}(x; 6)$; б) $\vec{a}(x; 1)$ ва $\vec{b}(3; 2)$; в) $\vec{a}(0; -3)$ ва $\vec{b}(5; x)$ байни худ перпендикуляранд?
- Чуфти байни худ перпендикулярро аз байни векторҳои зерин ёбед. $\vec{a}(3; 3)$, $\vec{b}(2; -2)$, $\vec{c}(-1; -4)$ ва $\vec{d}(-4; 1)$.
- Баробари $a^2 = |\vec{a}|^2$ -ро исбот кунед.
- Дар бозии биллиард (билярд) тўпчаи дар нуқтаи A буда баъди зарба ба нуқтаи B -и стол бархўрда самташ тағйир ёфт ва ба сабадчаи дар нуқтаи C буда афтод (расми 3). $AB=40$ см, $BC=150$ см ва $\angle ABD=120^\circ$ бошад, зарби скалярии $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$ -ро ёбед.
- Бо таъсири қувваи $F(-3, 4)$ нуқта аз ҳолати (намуди) $A(5, -1)$ ба ҳолати $B(2, 1)$ мегузарад. Дар ин чараён чӣ хел кор иҷро шуд?



35

ҲАЛЛИ СЕКУНЧАҲО



Тарафҳои секунҷаро бо a, b, c ва кунчи муқобили ин тарафҳоро бо равиши мувофиқ α, β, γ ишора мекунем (расми 1). 1) Тарафҳо ва кунҷҳои секунҷаро бо як ном — **элементҳои** секунҷа мегуянд.

Аз рӯи элементи додашудаи муайянкунандаи секунҷа ёфтани элементҳои боқимондаи дигар **ҳалли секунҷаҳо** номида мешавад.

Масъалаи 1. (Ҳалли секунҷа аз рӯи як тарафи додашуда ва кунҷҳои ба он часпида). Агар дар секунҷа $a=6, \beta=60^\circ$ ва $\gamma=45^\circ$ бошад, кунчи сеюми он ва ду тарафи боқимондари ёбед.

Ҳалли он. 1. Ҳосили ҷамъи кунҷҳои дарунии секунҷа 180° буданаш

$$\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma = 180^\circ - 60^\circ - 45^\circ = 75^\circ.$$

Дар ҳолати дониستاني як тараф ва се кунчи он аз теоремаи синусҳо истифода бурда, ду тарафи боқимондари меёбем:

$$2. \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} \text{ аз ин баробари } b = a \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = 6 \cdot \frac{\sin 60^\circ}{\sin 75^\circ} \approx 6 \cdot \frac{0,8660}{0,9659} \approx 5,3794 \approx 5,4.$$

(қиматҳои $\sin 60^\circ$ ва $\sin 75^\circ$ бо ёрии калкулятори махсус ё ки аз ҷадвали саҳифаи 153 китоби дарсӣ гирифта ҳисоб карда мешавад).

$$3. \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma} \text{ аз баробари } c = a \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} = 6 \cdot \frac{\sin 45^\circ}{\sin 75^\circ} \approx 6 \cdot \frac{0,7071}{0,9659} \approx 4,3924 \approx 4,4.$$

Ҷавоб: $\alpha = 75^\circ; \beta \approx 5,4; c \approx 4,4.$

Масъалаи 2. (Ҳалли секунҷа мувофиқи ду тараф ва кунчи байни онҳо). Агар дар секунҷа $a=6, b=4$ ва $\gamma=120^\circ$ бошад, тарафи сеюм ва кунҷҳои боқимондари ёбед.

Ҳалли он. 1. Аз теоремаи косинусҳо истифода бурда, c тарафи сеюми онро меёбем.

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma} = \sqrt{36 + 16 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot (-0,5)} = \sqrt{76} \approx 8,7.$$

2. Акнун дар ҳолати дониستاني се тарафи секунҷа аз теоремаи косинусҳо истифода бурда, кунҷҳои боқимондаи секунҷаро меёбем.

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{4^2 + 76 - 6^2}{2 \cdot 4 \cdot \sqrt{76}} \approx 0,8046.$$

$\cos \alpha \approx 0,8046$ аз ин баробарӣ қимати кунчи α -ро аз ҷадвал муайян мекунем (α — кунчи тез): $\alpha \approx 36^\circ$.

$$3. \beta = 180^\circ - \alpha - \gamma \approx 180^\circ - (36^\circ + 120^\circ) = 24^\circ.$$

Ҷавоб: $c \approx 8,7; \alpha \approx 36^\circ, \beta \approx 24^\circ.$

Масъалаи 3. (Ҳалли секунча аз рӯи се тарафи додашуда). Агар дар секунча $a=10$, $b=6$ ва $c=13$ бошад, кунҷҳои онро ёбед.

Ҳалли он. Кунчи кунд доштан ё надоштани секунҷаро аз рӯи ишораи косинуси кунчи тарафи муқобил аниқ мекунем:

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{100 + 36 - 169}{2 \cdot 10 \cdot 6} = -\frac{33}{120} \approx -0,275 < 0.$$

Аз ин рӯ C — кунчи кунд будааст. Инро ҳангоми муайян кардани бузургии кунчи C аз ҷадвал ба ҳисоб мегирем. Аз ҷадвал $\angle C_1 = 74^\circ$ буданаширо меёбем. Он гоҳ $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$.

$$\angle C = 180^\circ - \angle C_1 = 180^\circ - 74^\circ = 106^\circ.$$

2. Дар асоси теоремаи синусҳо

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}. \text{ Аз он } \sin A = \frac{a \cdot \sin C}{c} = \frac{10 \cdot \sin 106^\circ}{13} = \frac{10 \cdot \sin 74^\circ}{13} \approx \frac{10 \cdot 0,9615}{13} \approx 0,7396.$$

A — аз сабаби кунчи тез шуданаш, аз ҷадвал $\angle A \approx 47^\circ$ буданаширо аниқ мекунем.

3. $\angle B \approx 180^\circ - (106^\circ + 47^\circ) = 26^\circ$.

Ҷавоб: $\angle A \approx 47^\circ$, $\angle B \approx 26^\circ$, $\angle C \approx 106^\circ$.

? Савол, масъала ва супориш

1. Як тараф ва ду кунчи ба он часпидаи секунча дода шудааст:

- а) $a=5$ см, $\beta=45^\circ$, $\gamma=45^\circ$; б) $a=20$ см, $\alpha=75^\circ$, $\beta=60^\circ$;
в) $a=35$ см, $\beta=40^\circ$, $\gamma=120^\circ$; г) $b=12$ см, $\alpha=36^\circ$, $\beta=25^\circ$.

Кунчи сеюм ва ду тарафи боқимондаи секунҷаро ёбед.

2. Ду тараф ва кунчи байни онҳо дода шудааст:

- а) $a=6$, $b=4$, $\gamma=60^\circ$; б) $a=14$, $b=43$, $\gamma=130^\circ$;
в) $b=17$, $c=9$, $\alpha=85^\circ$; г) $b=14$, $c=10$, $\alpha=145^\circ$.

Кунҷҳои боқимонда ва тарафи сеюми секунҷаро ёбед.

3. Се тарафи секунча дода шудааст:

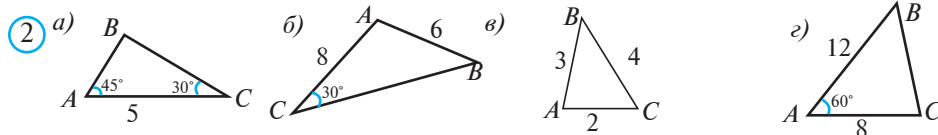
- а) $a=2$, $b=3$, $c=4$; б) $a=7$, $b=2$, $c=8$;
в) $a=4$, $b=5$, $c=7$; г) $a=15$, $b=24$, $c=18$.

Кунҷҳои секунҷаро ёбед.

4. Ду тарафи секунча ва кунчи муқобили яке аз ин тарафҳо дода шудааст. Тарафҳо ва кунҷҳои боқимондаи секунҷаро ёбед.

- а) $a=12$, $b=5$, $\alpha=120^\circ$; б) $a=27$, $b=9$, $\alpha=138^\circ$;
в) $b=2$, $c=2$, $\alpha=60^\circ$; г) $b=6$, $c=8$, $\alpha=30^\circ$.

5. Дар асоси маълумотҳои дар (расми 2) додашуда, секунҷаро ҳал кунед.



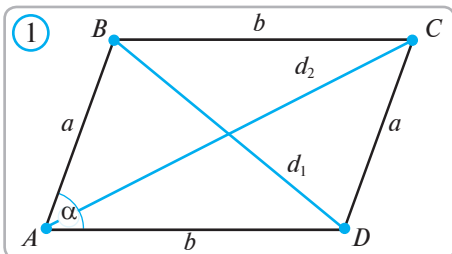
36

ҲАЛЛИ МАСЪАЛАҲО

Масъалаи 1. Иббот кунед, ки ҳосили ҷамъи квадрати диагоналҳои параллелограмм ба ҳосили ҷамъи квадрати тарафҳо баробар аст.

$ABCD$ — параллелограмм, $AB=a$, $AD=b$, $BD=d_1$, $AC=d_2$ (расми 1)

$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$$



Ҳалли он. Кунчи A -и параллелограмми $ABCD$ бигузур баробарии α бошад. Он гоҳ $\angle B = 180^\circ - \alpha$. Ба секунҷаҳои ABD ва ABC теоремаи косинусҳоро татбиқ мекунем (расми 1):

$$d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha, \quad (1)$$

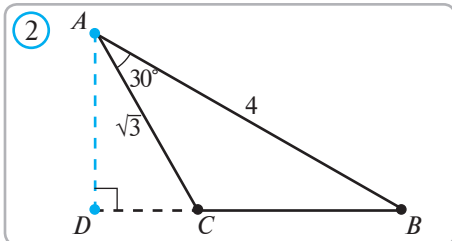
$$d_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos (180^\circ - \alpha).$$

$\cos (180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ ин баробариро ба ҳисоб гирем,

$$d_2^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha. \quad (2)$$

Қисмҳои мувофиқи баробариҳои (1) ва (2)-ро ҷамъ намуда, баробарии $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$ -ро ҳосил мекунем.

Масъалаи 2. Дар секунҷаи ABC $\angle A = 30^\circ$, $AB = 4$, $AC = \sqrt{3}$ бошад, баландии аз қуллаи A гузаронидашуда AD ёфта шавад.



Ҳалли он. 1) Аз теоремаи косинусҳо истифода бурда, тарафи секунҷа BC -ро меёбем:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A = 4^2 + (\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ = 7, \quad BC = \sqrt{7}.$$

2) Акнун масоҳати секунҷаро меёбем:

$$S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 4 \cdot \sin 30^\circ = \sqrt{3}.$$

3) Аз қиматҳои ёфташуда истифода бурда, баландии AD -ро меёбем:

$$S = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AD \text{ аз ин формула } AD = \frac{2S}{BC} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{21}}{7}. \quad \text{Ҷавоб: } \frac{2\sqrt{21}}{7}.$$

Масъалаи 3. Ронанда қоидаи ҳаракати роҳро вайрон намуда, соати 12^{00} аз нуқтаи A -и кўча ба тарафи кўчаи Алмазор тоб хўрда, бо суръати 140 км/соат ҳаракати худро давом дод (расми 3). Соати 12^{00} корманди НДА (назорати давлатии автомобили) аз нуқтаи B роҳи сангфарш барои бурида баромадани роҳи ронандаи қоидавайронкун бо суръати 70 км/соат ба

ҳаракат даромад. Корманди НДА дар чорраҳа, яъне дар нуқтаи C ронандаи қоидавайронкардаро оё нигоҳ дошта метавонад?

Ҳалли он: Дар секунҷаи ABC

$$\angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B) = 180^\circ - (20^\circ + 50^\circ) = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ.$$

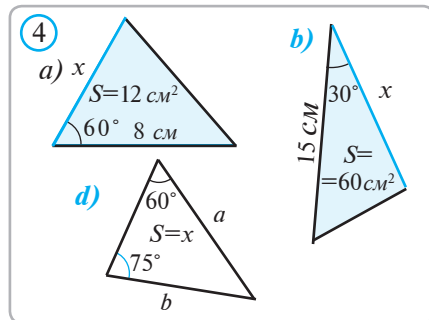
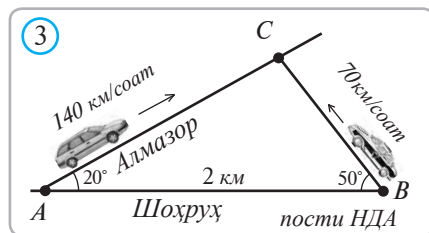
1. Дарозии қисми AC -и роҳи қўҷаи Алмазорро меёбем. Дар асоси теоремаи синусҳо $\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}$. Аз ин баробарии $AC = \frac{AB \cdot \sin B}{\sin C} = \frac{2 \cdot \sin 50^\circ}{\sin 110^\circ} = \frac{2 \cdot \sin 50^\circ}{\sin(90^\circ + 20^\circ)} = \frac{2 \cdot \sin 50^\circ}{\cos 20^\circ} \approx \frac{2 \cdot 0,766}{0,940} = \frac{1,532}{0,94} \approx 1,630$ (км). Ин роҳро ронандаи қоидавайронкун дар $\frac{1,630 \text{ км}}{140 \text{ км/соат}} \approx 0,0116 \text{ соат} = 0,012 \cdot 3600 \text{ сония} \approx 42$ сония тай мекунад.

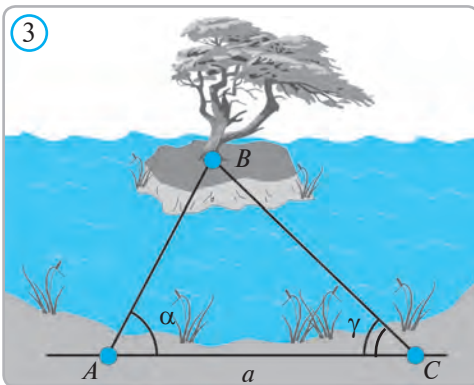
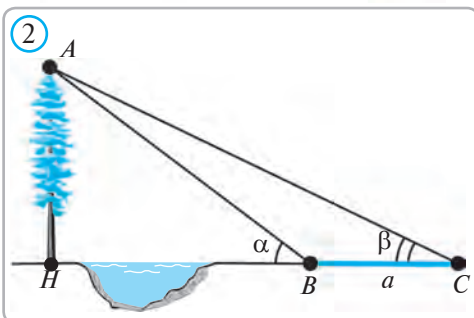
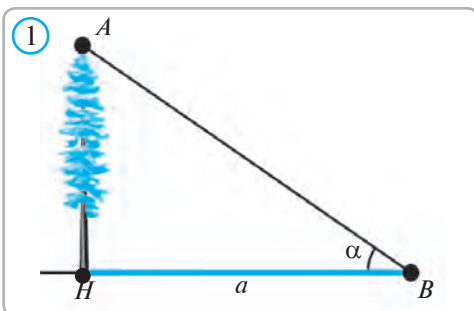
2. Акун дарозии роҳи BC -и санг фаришро меёбем: мувофиқи теоремаси синусҳо, $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}$. Аз ин баробарӣ $BC = \frac{AC \cdot \sin A}{\sin B} = \frac{2 \cdot \sin 20^\circ}{\sin 50^\circ} = \frac{2 \cdot 0,342}{0,766} \approx 0,893$ (км).

Ин роҳро ходими НДА дар $\frac{0,893 \text{ км}}{70 \text{ км/соат}} \approx 0,0128 \text{ соат} = 0,0128 \cdot 3600 \text{ солия} \approx 46$ солия тай мекунад. Пас, корманди НДА дар чорроҳаи C баъд аз ронанда омада мерасад **Ҷавоб:** Не.

? Савол, масъала ва супориш

- Дар асоси маълумотҳои расми 4 қимати x -ро ёбед.
- Баландии секунҷаи ABC ба 4 м баробар аст. Агар $\angle A = 45^\circ$, $\angle B = 30^\circ$ бошад, тарафҳои секунҷаро ёбед.
- Ба як нуқта ду қувваи бузургияшон якхела гузошта шудаанд (расми 5). Агар кунҷи байни самтҳои ин қувваҳо 60° баробартаъсиркунандаи ин қувваҳо 150 кг бошад, бузургии қуввахоро муайян кунед.
- Ду тарафи секунҷа 7 дм ва 11 дм, медианаи ба тарафи сеюм гузаронидашуда 6 дм аст. Тарафи сеюми секунҷаро ёбед.
- Яке аз диагонаҳои параллелограмми тарафҳояш 6 см ва 8 см буда 12 см бошад, диагонали дуюми онро ёбед.
- Муқобили тарафи 12 см будаи секунҷа ба кунҷи 60° баробар аст. Радиуси давраи ба секунҷа берункашидашударо ёбед.
- Асоси хурди трапетсияи баробарпахлу ба тарафи паҳлӯи баробар буда, асоси калонаш 20 см аст. Агар яке аз кунҷҳои трапетсия 120° бошад, периметри онро ёбед.





1. Чен кардани баландӣ. Бигузур баландии ягон ашё (масалан дарахт) AH -ро чен кардан зарур бошад (расми 1).

а) Барои ин нуқтаи B -ро мегирем ва масофаи BH a , инчунин кунчи HBA α -ро чен мекунем. Он гоҳ дар секунҷаи росткунҷаи

$$ABH \quad AH = BH \operatorname{tg} \alpha = a \operatorname{tg} \alpha.$$

б) Агар асоси баландӣ-нуқтаи H дар масофаи дастнорас бошад (расми 2), бо усули болоӣ баландии AH -ро муайян карда наметавонем. Аз ин рӯ, ин тавр рафтор мекунем.

1) Ду нуқтаи B ва C -ро, ки бо нуқтаи H дар як хати рост меҳобад, мегирем.

2) Масофаи BC -ро чен карда α -ро меёбем.

3) Кунҷҳои ABH ва ACH -ро чен намуда, $\angle ABH = \alpha$ ва $\angle ACH = \beta$ -ро ҳоро меёбем.

4) Ба секунҷаи ABC теоремаи синусҳоро татбиқ кунем ($\angle BAC = \alpha - \beta$)

$$\frac{AB}{\sin \beta} = \frac{a}{\sin(\alpha - \beta)}, \quad \text{яъне } AB = \frac{a \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

5) Баландии AH -ро аз секунҷаи росткунҷаи ABH меёбем.

$$AH = AB \sin \alpha = \frac{a \sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

2. Ҳисобкунии масофа то нуқтаи дастнорас. Бигузур аз нуқтаи A то нуқтаи дастнорас B масофаро ҳисоб намудан лозим ояд (расми 3). Ин масъаларо аз аломатҳои

монандии секунҷаҳо истифода бурда, ҳал кардана монро хотиррасон мекунем. Акнун ин масъаларо аз теоремаи синусҳо истифода бурда, ҳал мекунем.

1) Дар ҷои ҳамворе, ки нуқтаҳои A ва B намудоранд, нуқтаи C -ро мегирем.

2) Масофаи AC -ро чен мекунем: $AC = a$.

3) Бо ёрии асбобҳои кунҷҳои ACB ва BAC -ро чен мекунем. $\angle BAC = \alpha$, $\angle ACB = \gamma$.

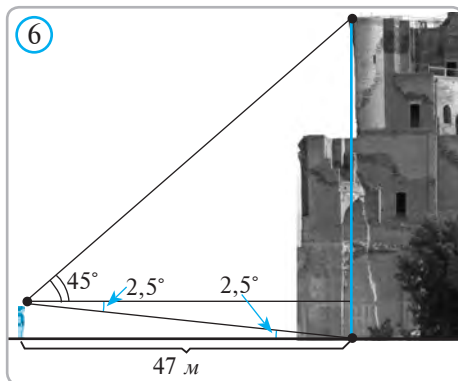
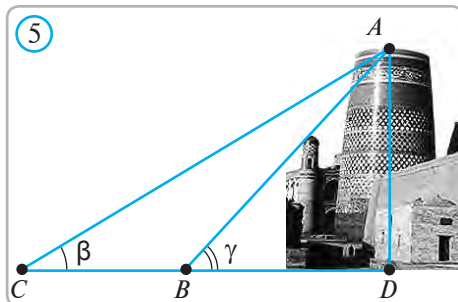
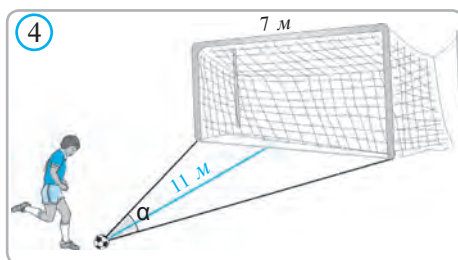
4) Дар секунҷаи ABC $\angle B = 180^\circ - \alpha - \gamma$ будана шро ба ҳисоб гирем,

$$\sin B = \sin(180^\circ - \alpha - \gamma) = \sin(\alpha + \gamma).$$

Дар асоси теоремаи синусҳо $\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B}$ ё ки $AB = \frac{a \sin \gamma}{\sin(\alpha + \gamma)}$.

? Савол, масъала ва супориш

1. Дар расми 1 $a=12$ м, $\alpha=42^\circ$ бошад, баландии дарахтро ҳисоб кунед.
2. Дар расми 2 $a=8$ м, $\alpha=43^\circ$, $\beta=32^\circ$ бошад, баландии дарахтро ҳисоб кунед.
3. Дар расми 3 $a=60$ м, $\alpha=62^\circ$, $\gamma=44^\circ$ бошад, масофаи AB -ро ёбед.
4. Дар бозии футбол тўби чармавии 11 м-ро бо кадом кунчи α ба дарвоза равона кардан лозим, ёбед. Васеъгии дарвоза 7 м (расми 4).
5. Дар расми 5 Калтаманораи шаҳри Хева тасвир ёфтааст. Агар $\beta=45^\circ$, $\gamma=24^\circ$, $BC=50$ м бошад, баландии Калтаманоро ро ёбед.
6. Сайёҳ Оксаройи шаҳри Шахрисабзро аз масофаи 47 м тамошо мекунад (расми 6). Агар ба он асоси Оксарой нисбат ба горизонт (уфук) тахти кунчи $2,5^\circ$ баландии он бошад, тахти кунчи 45° намуда истода бошад, баландии Оксаройро ёбед.
7. Се роҳ секунҷаи ABC -ро ташкил мекунад. Дар ин секунҷа $\angle A=20^\circ$, $\angle B=150^\circ$. Ронандаи аз нуқтаи A ба роҳ баромада то қадри имкон ба нуқтаи C тезтар омада расиданӣ аст. Роҳҳои AC ва CB сангфарш, AB роҳи асфалтфарш буда, дар роҳи асфалт нисбат ба сангфарш ду маротиба тез ҳаракат намудан мумкин. Ба ронанда бо кадом роҳ рафтанро маслиҳат медодед?



⌚ Масъалаи шавқовар. Боз як «исботи» нави теоремаи Пифагор

Дар секунҷаи росткунҷаи ABC (расми 7) $a = c \sin \alpha$, $b = c \cos \alpha$. Ин ду баробарию ба квадрат бардошта, аъзо ба аъзо ҷамъ кунему $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ буданахро ба ҳисоб гирем, $a^2 + b^2 = c^2 \sin^2 \alpha + c^2 \cos^2 \alpha = c^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = c^2$. Бинобар ин, $a^2 + b^2 = c^2$. Мантиқан нодуруст будани ин «исбот»-ро исбот кунед.

38–39**МАЪЛУМОТ ВА МАСЪАЛАҲОИ ИЛОВАҒИ
ДОИР БА БОБИ II****I. Тестҳо**

1. Ба секунҷаи тарафҳояш a, b, c , кунҷҳояш мувофиқан α, β, γ , масоҳаташ S кадоме аз формулаҳо нодуруст?

А. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos\alpha$; Б. $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$;
 В. $S = \frac{1}{2}absin\gamma$; Г. $S = \frac{1}{2}absin\alpha$.

2. Баробари нодурустро ёбед.

А. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; Б. $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$;
 В. $\cos(180^\circ - \alpha) = \cos\alpha$; Г. $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$.

3. Се тарафи секунҷа маълум бошад, аз кадом теорема истифода бурда, кунҷҳои онро ёфтан мумкин?

А. Теоремаи синусҳо; Б. Теоремаи косинусҳо;
 В. Теоремаи Фалес; Г. Формулаи Герон;

4. Як кунҷи секунҷа ба 137° кунҷи дуюмаш ба 15° баробар аст. Агар тарафи калони ин секунҷа ба 22 баробар бошад, тарафи хурди онро ёбед.

А. 8,3; Б. 9,3; В. 3,8; Г. 6,5.

5. Кунҷи байни секунҷаи тарафҳояш ба 14 ва 19 баробар буда 26° аст. Тарафи сеюми ҳамин секунҷаро ёбед.

А. 1,2; Б. 5,4; В. 6,9; Г. 19,7.

6. Агар дарозиҳои ду вектор $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$ ва кунҷи байни онҳо 45° бошад, зарби скалярии векторҳои $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ -ро ёбед.

А. 52; Б. 32 В. 102; Г. 2.

7. Зарби скалярии векторҳои $\vec{a}(4; -1)$ ва $\vec{b}(2; 3)$.

А. 5; Б. 3; В. 4; Г. 9.

8. Кунҷи байни векторҳои $\vec{a}(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$ ва $\vec{b}(\sqrt{3}; 1)$

А. 30° ; Б. 60° ; В. 90° ; Г. 45° .

9. Нисбати кунҷҳои секунҷа ба 3:2:1 бошад, нисбати тарафҳои онро ёбед.

А. 3:2:1; Б. 1:2:3; В. $2:\sqrt{3}:1$; Г. $\sqrt{3}:\sqrt{2}:1$.

10. Радиуси давраи берункашидашудаи секунҷаи мунтазами тарафаш 3 см бударо ёбед.

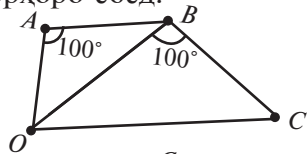
А. $\sqrt{3}$; Б. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ В. $2\sqrt{3}$; Г. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

II. Масъалаҳо

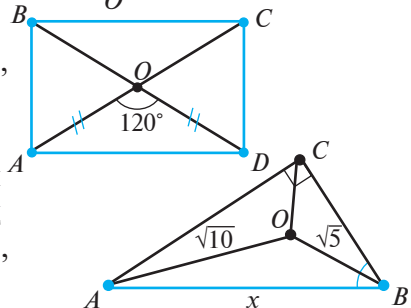
1. Дар секунҷаи ABC $AB = 6$ см; $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 75^\circ$. Тарафи BC ва радиуси давраи ба секунҷаи ABC берункашидашударо ёбед.

2. Косинуси кунҷҳои секунҷаи тарафҳояш 5 м, 6 м ва 10 м-ро ҳисоб кунед.
3. Дар секунҷаи ABC $\angle B = 60^\circ$, $AB = 6$ см, $BC = 4$ см. Тарафи AC ва радиуси давраи берункашидашуда ба секунҷаи ABC -ро ёбед.
4. Радиуси давраи ба секунҷаи тарафҳояш 51 см, 52 см ва 53 см берункашидашударо ёбед.
5. Ду тарафи секунҷа 14 см ва 22 см, медианаи ба тарафи сеюм гузаронидашуда бошад 12 см. Тарафи сеюми секунҷаро ёбед.
6. Диагоналҳои параллелограмм 4 см ва $4\sqrt{2}$ см кунҷи байни онҳо 45° . а) масоҳат; б) периметр; в) баландии параллелограммро ёбед.
7. Яке аз диагоналҳои параллелограмми тарафҳояш 3 ва 5 баробари 4 аст. Диагонали дуюми онро ёбед.
8. Намуди секунҷаи тарафҳояш а) 2, 2 ва 2,5; б) 24, 7 ва 25; в) 9, 5 ва 6 бударо муайян кунед.
9. Тарафҳои параллелограмм $7\sqrt{3}$ ва 6 см. Агар кунҷи кунди он 120° бошад, масоҳати онро ёбед.
10. Дар тарафҳои AB, BC секунҷаи ABC нуқтаҳои N, K гирифта шудаанд. Дар он $BN = 2AN, 3BK = 2KC$. Агар $AB = 3, BC = 5, CA = 6$ бошад, порчаи MK -ро ёбед.
11. Дар секунҷаи ABC $\angle A = 30^\circ$, $BC = 7$ см. Радиуси давраи ба секунҷа берункашидашударо ёбед.
12. Дар секунҷаи ABC биссектрисаи BE гузаронида шудааст. Аз нуқтаи E ба тарафи BC перпендикуляри EF фуруварда шудааст. Агар $EF = 3$, $\angle A = 30^\circ$ бошад, AE -ро ёбед.
13. Миёнаҳои тарафи AD -и росткунҷаи $ABCD$ дар нуқтаи N аст. Агар $AB = 3$, $BC = 6$ бошад, зарби скалярии $\vec{NB} \cdot \vec{NC}$ -ро ёбед.
14. $\vec{a}(2; x)$, $\vec{b}(-4; 1)$ буда, векторҳои $\vec{a} + \vec{b}$ ва $\vec{b}$ перпендикуляранд. x -ро ёбед.
15. $\vec{m}(7; 3)$ ва $\vec{n}(-2; -5)$ бошад, кунҷи байни ин векторҳоро ёбед.

16. Аз бузургии дар расм дода шуда истифода бурда, порчаи аз ҳама калонтаринро ёбед.



17. Диагоналҳои росткунҷаи $ABCD$ ҳамдигарро дар нуқтаи O мебуранд. Агар $AO = 12$ см, $\angle AOD = 120^\circ$ бошад, периметри росткунҷаро ҳисоб кунед.
18. Биссектрисаҳои секунҷаи росткунҷаи ABC якдигарро дар нуқтаи O мебуранд ($\angle C = 90^\circ$). Агар $OA = \sqrt{10}$, $OB = \sqrt{5}$ бошад, гипотенузаи AB -ро ёбед.



III. Худатонро санчида бинед (Кори назоратии намунавӣ)

1. Кунчи аз ҳама калони секунҷаи тарафҳояш $a=45$, $b=70$, $c=95$ -ро ёбед.
2. Дар секунҷа $b=5$, $\alpha=30^\circ$, $\beta=50^\circ$ бошад, онро ҳал намоед.
3. Дар секунҷаи PKH $PK=6$, $KH=5$, $\angle PKH=100^\circ$. Дарозии медианаи HF ва масоҳати секунҷаи PFH -ро ёбед.
4. (Илова). Дар секунҷа $a=\sqrt{3}$, $b=1$, $\alpha=135^\circ$ бошад, кунчи β -ро ёбед.



Лавҳаҳои таърихӣ. Дар бораи синус

Маълумотҳои аввалин оид ба синус дар асарҳои ситорашиносони асри IV–V-и ҳинд воমেҳӯранд. Олимони Осиёи Миёна Ал Хоразмӣ, Берунӣ, Ибни Сино, Абдурахмон ал Ҳазинӣ (асри IX) барои синус мафҳуми «ал-ҷайб»-ро истифода бурдаанд.

Ишораи ҳозираи $\sin$ -ро Симпсон, Эйлер, Даламбер, Лагранж (асри XVII) ва дигарон истифода бурдаанд.

Мафҳуми «косинус» аз лотинии «*compliment sinus*» кӯтоҳ карда гирифта шуда, маънои «синуси иловагӣ», аниқтараш «синуси камони иловагӣ»-ро дорад.

Теоремаи косинусҳоро юнониёни қадим ҳам медонистанд, исботи он дар асари «Решаҳо»-и Эвклид оварда шудааст. Исботи теоремаи синусҳоро Абурайхон Берунӣ баён кардааст.



Лавҳаҳои таърихӣ. Берунӣ (номи пуррааш Абурайхон Берунӣ Муҳаммад



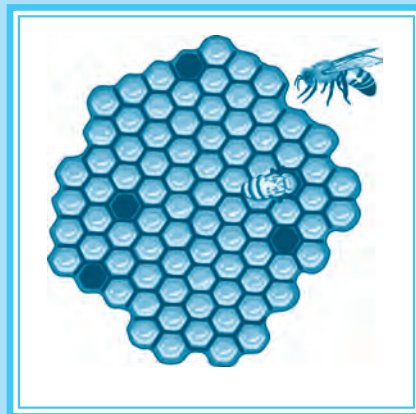
Берунӣ
(973 — 1048)

ибни Аҳмад) — олими бузурги қомусии асри миёна. Вай дар кишвари Хоразм, шаҳри Қиёт ба дунё омадааст. Он дар соҳили рости Амударё дар ҷои шаҳри ҳозираи Берунӣ ҷой гирифта будо то вақтҳои наздик онро Шаббоз меғуфтанд. Ҳиссаи гузоштаи Беруниро ба математика ва соҳаҳои дигари фан аз зиёда аз 150 асари навиштаи он дидан мумкин. Калонтарини онҳо — «Ҳиндустон», «Ёдгориҳо», «Қонунҳои Масъуд», «Геодезия», «Минералогия» ва «Астрономия».

Шоҳасари Берунӣ «Қонунҳои Масъуд» асосан оиди астрономия бошад ҳам, кашфиётҳои зиёди он оиди математика дар ҳамин асар баён шудаанд.

Дар ин асараш Берунӣ синуси сумма ва фарқи ду кунҷ теоремаҳо дар бораи кунҷи дучанда ва нисфи кунҷ, инчунин теоремаҳо оиди хордаҳо исбот кардааст, хордаи ду градусро ҳисоб намудааст, ҷадвали синусҳо ва тангенсҳо сохтааст, теоремаи синусҳо исбот намудааст.

БОБИ III



ДАРОЗИИ ДАВРА ВА МАСОҲАТИ ДОИРА

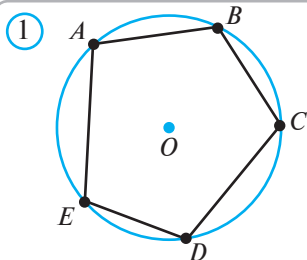
Дар натиҷаи омӯзиши ин боб Шумо ба дониш ва малакаи амалии зерин соҳиб мегардед:

Донишҳо:

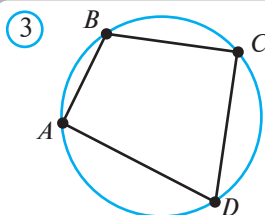
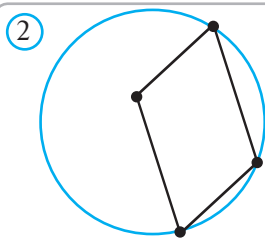
- √ донистани хосиятҳои давраи бо бисёркунҷа дарун ва берункашидашуда;
- √ донистани хосиятҳои бисёркунҷаҳои мунтазам;
- √ донистани формулаҳои ҳисоб кардани масоҳати бисёркунҷаҳои мунтазам;
- √ донистани формулаи ҳисоб кардани дарозии камони давра ва давра;
- √ донистани доира ва формулаи масоҳати қисмҳои он;
- √ донистани ченаки радиани кунҷ.

Малакаи амалӣ:

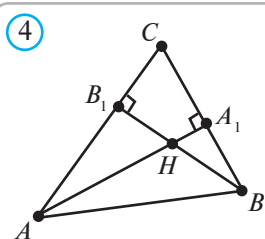
- √ тасвир карда тавонистани бисёркунҷаи мунтазам;
- √ ёфта тавонистани радиусҳои давраи ба бисёркунҷа дарун ва берункашидашуда;
- √ ҳисоб карда тавонистани дарозии давра ва камонҳои он;
- √ ҳисоб карда тавонистани доира ва қисмҳои он.



Ба давра дарункашидашуда панчкунҷаи. Панчкунҷаи ба бисёркунча берункашидашуда.



$$\begin{aligned}\angle A + \angle C &= 180^\circ \\ \angle B + \angle D &= 180^\circ\end{aligned}$$



Масъалаи 2. Ба давраи радиусаш 10 см секунҷаи тезкунҷаи баробарпахлӯи баландиаш 16 см дарун кашида шудааст. Тарафҳои онро ёбед.

Таъриф. Агар ҳамаи қуллаҳои бисёркунча дар давра хобад, ин бисёркунча ба давра **дарункашидашуда**, давра бошад, ба бисёркунча **берункашидашуда** номида мешавад (расми 1).

Бо секунҷаи дилхоҳ давраи дарункашидашуда кашидан мумкин буданаш ва маркази ин давра дар нуқтаи буриши перпендикуляри миёнаи тарафҳои секунҷа хобиданашро дар синфи 8 омӯхтед.

Агар шумораи тарафҳои бисёркунча аз се зиёд бошад, ҳар доим ҳам бо бисёркунча давраи берункашидашуда кашидан иҷро намегардад. Масалан, барои параллелограмми аз росткунҷа фарқкунанда давраи берункашидашуда мавҷуд нест (расми 2).

Аз синфи 8 маълум аст, ки ба чоркунча фақат дар ҳолати ҳосили ҷамъи кунҷҳои муқобил 180° будан давраи берункашидашуда кашидан мумкин (расми 3).

Масъалаи 1. Баландиҳои секунҷаи тезкунҷаи ABC AA_1 ва BB_1 дар нуқтаи H бурида мешаванд. Исбот кунед, ки чоркунҷаи A_1HB_1C ба давра дарун кашида шудааст.

Ҳалли он. $AA_1 \perp BC$ ва $BB_1 \perp AC$ буданаш (расми 4).
 $\angle HB_1C = \angle HA_1C = 90^\circ$.

Он гоҳ $\angle HB_1C + \angle HA_1C = 180^\circ$. Ҳосили ҷамъи кунҷҳои дарунии чоркунча 360° буданаш

$$\angle B_1CA_1 + \angle B_1HC = 180^\circ.$$

Аз ин рӯ, бо чоркунҷаи A_1HB_1C давраи берункашидашуда кашидан мумкин.

Аз сабаби қуллаҳои бисёркунҷаи ба давра дарункашидашуда аз маркази давра дар масофаи якхела хобиданаш маркази давра дар перпендикуляри миёнаи тарафҳои бисёркунча меҳобад (расми 5). Аз ин рӯ, перпендикулярҳои ба миёнаҳои тарафҳои бисёркунҷаи ба давра дарункашидашуда гузаронида дар як нуқта бурида шуданашон шарт мебошад.

Ҳалли он. Маркази давраи нуқтаи O , ки ба секунҷаи ABC берун кашида шудааст, дар перпендикулярӣ миёнаҳои тарафи AC , яъне дар баландии BD меҳабд (расми 6). Он гоҳ, $OD = BD - OB = 16 - 10 = 6$ (см) мешавад ва дар асоси теоремаи Пифагор,

$$AD = \sqrt{OA^2 - OD^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \text{ (см)}, AC = 2AD = 16 \text{ (см)}.$$

Ҳамин тавр, дар секунҷаи росткунҷаи ABD

$$AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = \sqrt{8^2 + 16^2} = 8\sqrt{5} \text{ (см)}.$$

Ҷавоб: $8\sqrt{5}$ см, $8\sqrt{5}$ см, 16 см.

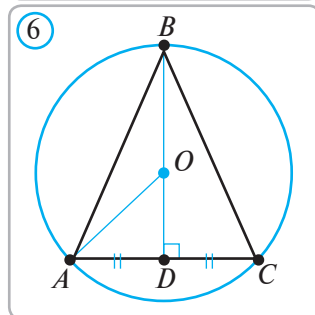
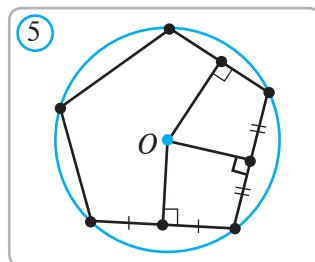
? Савол, масъала ва супориш

1. Агар бисёркунча ба давра дарункашидашуда бошад, перпендикулярӣ миёнаҳои тарафҳои он дар як нуқта бурида шуданаширо исбот кунед.
2. Чӣ гуна секунҷа ба давра дарункашидашуда шуданаши мумкин? Чоркунча-чӣ?
3. Панҷкунҷаи $ABCDE$ ба давра дарункашидашуда бошад, $\angle ACB = \angle AEB$ буданаширо исбот кунед.
4. Радиуси давраи берункашида шудаи секунҷаи росткунҷаи катет хояш 16 см ва 12 см бударо ёбед.
5. Ба давраи радиусаш 25 см росткунҷаи яке аз тарафҳояш 14 см дарункашида шудааст. Масоҳати росткунҷаро ёбед.
6. Тарафҳои ба давраи радиусаш 10 см буда дарункашида шуда: а) секунҷаи баробартараф; б) квадрат; в) секунҷаи росткунҷаи баробарпахлуро ёбед.
7. Радиуси давраи ба секунҷаи тарафҳояш 16 см, 10 см ва 10 см берункашидашударо ёбед.
8. Агар дар шашкунҷаи $ABCDEF$ ба давра дарункашидашуда $\angle BAF + \angle AFB = 90^\circ$ бошад, маркази давра дар тарафи AF хобиданаширо исбот кунед.
9. Трапетсияи баробарпахлуи дилхоҳ ба давра дарункашида шуданаширо исбот кунед.

🕒 Масъалаи шавқовар.

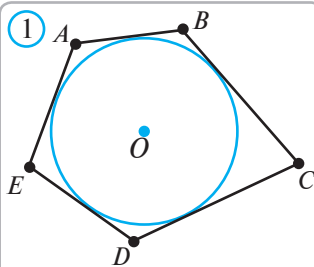
Вақтҳои дар коллеч хонда истодан (математики франсуз, 1811-1832) Галуаи 16- сола аз вай муаллим ҳал намудани се масъаларо дар бадали 1 соат дархост. Галуа ин масъалаҳои ҳаллашон душворро дар 15 дақиқа ҳал намуда, ҳамаро дар ҳайрат гузошт. Яке аз ин масъалаҳо. Онро шумо ҳам ҳал карда бинед?

Масъала. Чор тарафи чоркунҷаи ба давра дарункашидашуда ба a, b, c ва d баробар аст. Диагоналҳои онро ёбед.

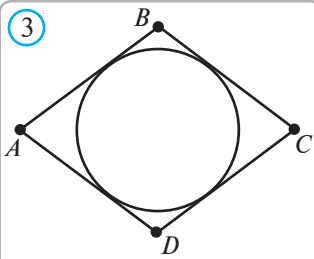
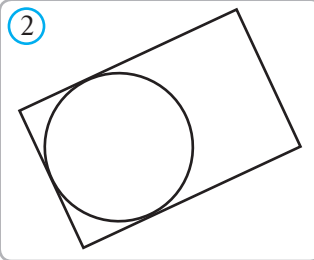


41

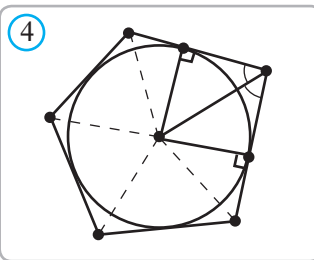
БИСЁРКУНЧАҲОИ АЗ ДАВРА БЕРУНКАШИДАШУДА



Панчкунҷаи ба давра берункашидашудаи $ABCDE$.
Давраи ба панчкунҷаи $ABCDE$ дарункашидашуда.



$$AB + CD = AD + BC$$



Таъриф. Агар ҳамаи тарафҳои бисёркунча ба давра расанда бошад, дар ин ҳол бисёркунча ба давра **берункашидашуда**, давра бошад, ба бисёркунча **дарункашидашуда** номида мешавад (*расми 1*).

Ба секунҷаи дилхоҳ давраи берункашидашуда кашидан мумкин буданаҳ ва маркази ин давра дар нуқтаи буриши биссектрисаҳо хобиданаширо дар синфи 8 шинос шуда будед.

Агар миқдори кунҷҳои бисёркунча аз се зиёд бошад ба ин бисёркунча на ҳама вақт давраи дарункашида гузаронидан мумкин аст. Масалан, ба росткунҷаи аз квадрат фарқкунанда давраи дарункашида гузаронида намешавад (*расми 2*).

Боз аз синфи 8 маълум аст, ки ба чоркунча фақат ва фақат дар ҳама вақт давраи дарункашида гузаронидан мумкин, агар ҳосили чамъи тарафҳои муқобил ба якдигар баробар бошанд (*расми 3*).

Аз сабаби тарафҳои кунҷҳои бисёркунҷаи берункашидашуда ба давра расиданашон маркази давра дар ҳуди биссектрисаи ҳамаи кунҷ меҳобад (*расми 4*). Бинобар ин биссектрисаҳои кунҷҳои бисёркунҷаи ба давра берункашидашуда дар як нуқта бурида мешаванд.

Теорема. Агар масоҳати бисёркунҷаи ба давраи радиусаи r берункашидашуда S , нимпериметри он p бошад, $S = pr$ мешавад.

Исбот. Маркази давра нуқтаи O -ро бо қуллаҳои бисёркунча пайваст намуда бисёркунҷаро ба секунҷаҳо ҷудо мекунем. Баландии ин секунҷаҳо ба r баробар аст (*расми 5*). Он гоҳ,

$$S = S_{AOB} + S_{BOC} + \dots + S_{FOA} = \frac{1}{2}AB \cdot r + \frac{1}{2}BC \cdot r + \dots + \frac{1}{2}FA \cdot r = \frac{AB + BC + \dots + FA}{2} \cdot r = pr.$$

Теорема исбот шуд.

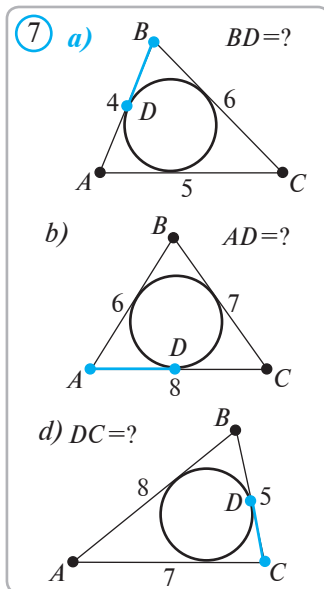
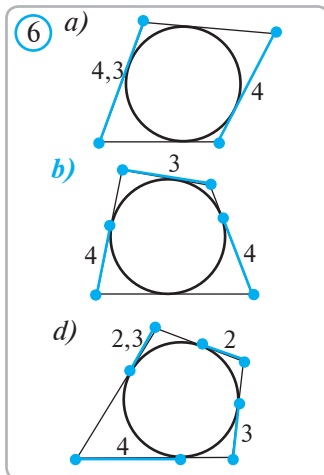
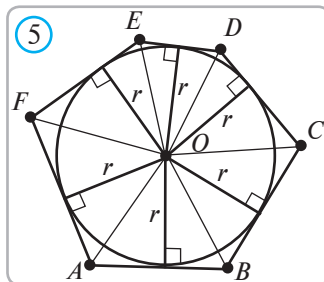
Масъала. Масоҳати чоркунҷаи ба давра берункашидашуда ба 21 см^2 , периметраш бошад, ба 7 см баробар аст. Радиуси давраро ёбед.

Ҳалли он. Формулаи $S = pr$ -ро дар назар дошта

$$r = \frac{S}{p} = \frac{21}{3,5} = 6 \text{ (см)}. \quad \text{Ҷавоб: } 6 \text{ см.}$$

Савол, масъала ва супориш

- Агар тарафи а) секунҷаи баробартараф б) квадрат 6 см бошад, радиуси давраи дарункашидашударо ёбед.
- Масоҳати бисёркунҷаи ба давраи радиусаш 5 см берункашидашуда 18 см^2 аст. Периметри бисёркунҷаро ёбед.
- Периметри чоркунҷаҳои дар расми 6 тасвирёфтaro муайян кунед.
- Дар асоси маълумотҳои расми 7 порчаи талабкардаистодаро ёбед.
- Ромб будани параллелограмми ба давра берункашидашударо ёбед.
- Радиуси давраи ба секунҷаи росткунҷа дарункашидашуда ба нисфи фарқи ҳосили ҷамъи катетҳо ва гипотенуза баробар буданаширо исбот кунед.
- Хати миёнаи трапетсияи баробарпахлуи ба давра берункашидашуда ба тарафи паҳлуи он баробар буданаширо исбот кунед.
- Трапетсияи баробарпахлуи асосҳояш 9 см ва 16 см аз давра берункашида шудааст. Радиуси давраро ёбед.
- *. Чоркунҷаи $ABCD$ ба давраи марказаш O берункашида шудааст. Исбот кунед, ки ҳосили ҷамъи масоҳати секунҷаҳои AOB ва COD ба нисфи масоҳати чоркунҷа баробар аст.
- *. Асосҳои трапетсияи ба давра берункашидашуда a ва b бошад, ба $\sqrt{ab}$ баробар будани баландии онро исбот кунед.





Машиқи фаъолкунанда

1. Чӣ гуна шаклҳо бисёркунча номида мешаванд?
2. Кунҷҳои бисёркунча, тарафҳои ҳамсоя, диагоналҳои он гуфта чиро мегӯянд?
3. Чӣ гуна бисёркунча бисёркунҷаи барҷаста номида мешавад?
4. Теорема дар бораи ҳосили ҷамъи кунҷҳои дарунии бисёркунҷаи барҷастаро гуфта диғед.



Таъриф. Бисёркунҷаи барҷастае, ки ҳамаи тарафҳо ва кунҷҳояш баробаранд, **бисёркунҷаи мунтазам** номида мешавад.

Секунҷаи баробартараф, квадрат ба бисёркунҷаи мунтазам мисол мешаванд. Дар расми 1 панҷкунҷа, шашкунҷа ва ҳашткунҷаи мунтазам тасвир ёфтааст.



Теорема. Ҳар як кунҷи n —кунҷаи мунтазам ба $\frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ$ баробар аст.

Исбот. Ҳосили ҷамъи (суммаи) кунҷҳои n —кунҷаи мунтазам ба $(n-2) \cdot 180^\circ$ баробар аст (синфи 8).

Аз ин рӯ, ҳар як кунҷи он ба $\frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ$ баробар аст.



Теорема исбот шуд.

Масъала. Дар панҷкунҷаи мунтазам $A_1A_2A_3A_4A_5$ диагоналҳои A_1A_3 ва A_1A_4 баробар буданашро нишон диҳед (расми 2).

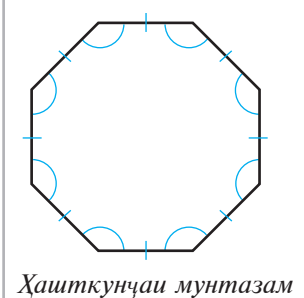
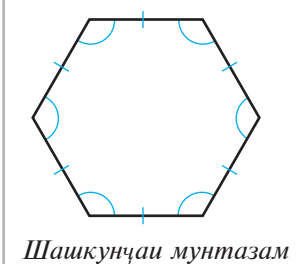
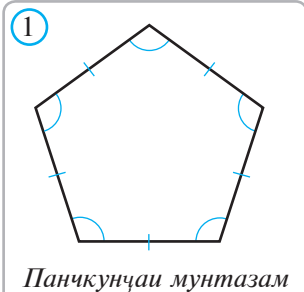


$A_1A_2A_3A_4A_5$ — панҷкунҷаи мунтазам



$A_1A_3 = A_1A_4$

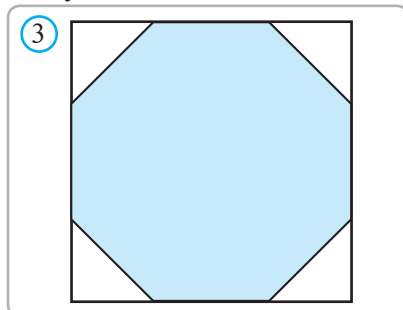
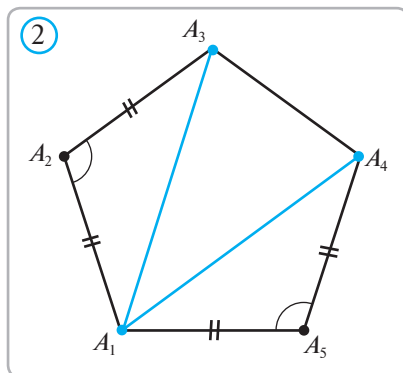
Ҳалли он. Дар асоси аломати **ТКТ** баробарии секунҷаҳо секунҷаҳои $A_1A_2A_3$ ва $A_1A_5A_4$ байни худ баробаранд. Дар ҳақиқат, тарафҳои бисёркунҷаи мунтазам баробар ва ҳамчунин кунҷҳояшон ҳам баробар буданашон, $A_1A_2 = A_1A_5$, $A_2A_3 = A_5A_4$ ва $\angle A_1A_2A_3 = \angle A_1A_5A_4$. Аз ин рӯ, $\triangle A_1A_2A_3 = \triangle A_1A_5A_4$. Аз он $A_1A_3 = A_1A_4$ буданаш бармеояд.



Натижа. *Ҳамаи диагоналҳои панҷкунҷаи мунтазам байни худ баробаранд.*

? *Савол, масъала ва супориш*

1. Ба бисёркунҷаҳои номунтазам мисолҳо оред ва барои чи мунтазам набуданашонро исбот кунед.
2. Аз тасдиқоти зерин дурусташро ёбед:
 - а) секунҷаи ҳамаи тарафҳояш баробар мунтазам мешавад;
 - б) чоркунҷаи ҳамаи тарафҳояш баробар мунтазам мешавад;
 - в) чоркунҷаи ҳамаи кунҷҳояшон баробар мунтазам мешавад;
 - г) ромби ҳамаи кунҷҳояш баробар мунтазам мешавад;
 - д) росткунҷаи ҳамаи тарафҳояш баробар мунтазам мешавад.
3. Агар а) $n=3$; б) $n=5$; в) $n=6$; г) $n=10$; д) $n=18$ бошад, ҳамаи кунҷҳои n — кунҷаи мунтазамро ёбед.
4. Кунҷи берунии n — кунҷа мунтазам ба чӣ баробар аст? Агар а) $n=3$; б) $n=5$; в) $n=6$; г) $n=10$; д) $n=12$ бошад, кунҷи берунии n — кунҷаи мунтазамро муайян кунед.
5. Ҳосили ҷамъи аз ҳар як қуллаи n — кунҷаи мунтазам яктогӣ гирифташудаи кунҷҳои берунии он ба 360° баробар буданашро исбот кунед.
6. Агар ҳар як кунҷи бисёркунҷаи мунтазам а) 60° ; б) 90° ; в) 135° ; г) 150° бошад, миқдори тарафҳои бисёркунҷаро муайян кунед.
7. Шашкунҷаи мунтазам $ABCDEF$ дода шудааст.
 - а) баробарии диагоналҳо AC ва BD -ро исбот кунед.
 - б) секунҷаи мунтазам будани ACE -ро исбот кунед.
 - в) байни якдигар баробар будани диагоналҳои AD , BE ва CF -ро исбот кунед.
8. Диагонали хурди а) панҷкунҷа; б) шашкунҷа; в) ҳашткунҷа; г) дувоздакунҷа; г) ҳашдакунҷаи мунтазामी тарафаш 10 см-ро ҳисоб кунед.
9. Исбот кунед, ки чоркунҷаи мунтазам квадрат аст.
- 10*. Тарафи квадрат ба a баробар. Ба тарафҳои он аз ҳар қуллаи он порчаҳои ба нисфи диагонал баробар гузошта мешавад. Оқибат шакли ҳашткунҷа ҳосил мешавад, ки дар *расми 3* тасвир ёфтааст, навъи онро муайян намоед ва масоҳаташро ёбед.



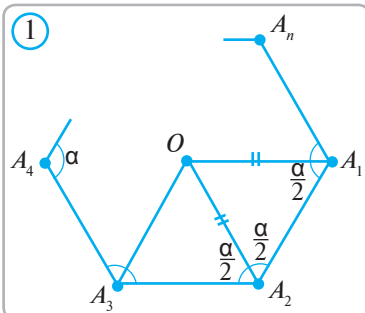
43

ДАВРАҲОИ БА БИСЁРКУНЧАИ МУНТАЗАМ ДАРУН ВА БЕРУНКАШИДАШУДА



Машқи фаёлқунанда

1. Чй гуна бисёркунча бисёркунчаи ба давра дарункашидашуда номида мешавад?
2. Чй гуна бисёркунча бисёркунчаи ба давра берункашидашуда номида мешавад?
3. Оё бисёркунчаи дилхоҳ ба давра дарун (берун)кашидашуда буданаш мумкин аст? Мисолҳо оваред.



Теорема. Ба ҳар гуна бисёркунчаи мунтазам давраи дарун ҳам, берун ҳам кашидашуда гузаронидан мумкин.

Исбот. Бигузур $A_1A_2 \dots A_n$ — бисёркунчаи мунтазам, нуқтаи O нуқтаи буриши биссектрисаҳои кунҷи A_1 ва A_2 бошад. Кунҷи ин бисёркунчаи мунтазамро бо α ишорат мекунем.

1. $OA_1 = OA_2 = \dots = OA_n$ буданашро исбот мекунем (расми 1). Дар асоси, таърифи биссектрисаи кунҷ,

$$\angle OA_1A_2 = \angle OA_2A_1 = \frac{\alpha}{2}.$$

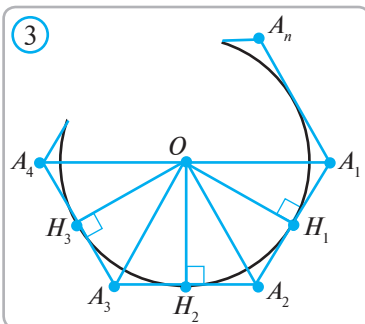
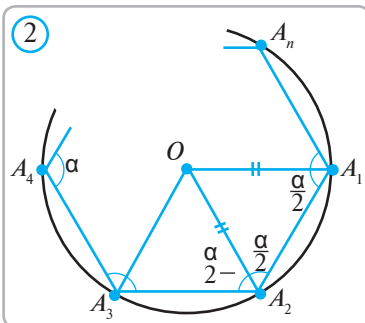
Бинобар ин A_1OA_2 — секунҷаи баробарпахлу. Аз ин $OA_1 = OA_2$ бармеояд. Дар асоси аломати ТКТ баробарии секунҷаҳо $\triangle A_1A_2O$ ва $\triangle A_3A_2O$ баробар, чунки $A_1A_2 = A_3A_2$, A_2O — тарафи умумӣ ва

$$\angle OA_1A_2 = \angle OA_2A_1 = \frac{\alpha}{2}.$$

Аз ин ҷо $OA_3 = OA_1$. Бо ҳамин роҳ ҷой доштани $OA_4 = OA_2$, $OA_5 = OA_3$ ва дигар баробариҳо нишон дода мешавад. Ҳамин тавр, $OA_1 = OA_2 = \dots = OA_n$, яъне давраи марказаш O ва радиусаш OA_1 аз давраи ба бисёркунча берункашидашуда иборат мешавад (расми 2).

2. Дар асоси нуқтаҳои болои секунҷаҳои баробарпахлу A_1OA_2 , A_2OA_3 , ... A_nOA_1 ба якдигар баробаранд. Аз ин рӯ, баландҳои аз қуллаи O -и секунҷаҳо гузаронидашуда ҳам баробар мешавад (расми 3): $OH_1 = OH_2 = \dots = OH_n$. Бинобар ин давраи марказаш O ва радиусаш OH_1 ба ҳамаи

тарафҳои бисёркунча расида мегузарад. Ҳамин тавр, ин давра ба бисёркунча дарункашидашуда мешавад. **Теорема исбот шуд.**

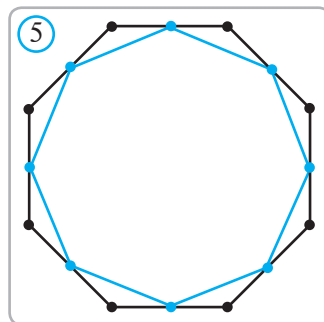
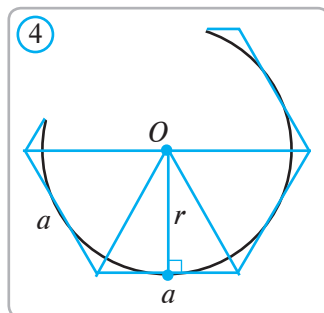


Натижа. Маркази давраҳои ба бисёркунҷаи мунтазам дарун ва берункашидашуда дар як нуқта мешавад.

Ин нуқта **маркази** бисёркунҷаи мунтазам номида мешавад. Кунҷе, ки бо нуруҳо пайваस्तкунии ду қуллаи ҳамсоя бо маркази бисёркунҷа иборат аст (дар расми 1, кунҷҳои A_1OA_2 , $A_2OA_3 \dots$) кунҷи марказии он номида мешавад. Перпендикулярӣ аз **маркази бисёркунҷаи** мунтазам ба тарафи он гузаронидашуда (дар расми 3, порчаҳои OH_1 , OH_2 , ...) **апофемаи** он номида мешавад.

Масъала. Агар тарафи n — кунҷаи мунтазам a , радиуси давраи ба он дарункашидашуда r бошад, мумкин будани ҳисобкунии масоҳати он S -ро бо формулаи $S = \frac{1}{2}nar$ исбот кунед. (расми 4).

Ҳалли он. Аз сабаби нимпериметри бисёркунҷа $p = \frac{1}{2}na$ буданаш, дар асоси формулаи $S = pr$, $S = \frac{1}{2}nar$ мешавад.



? Савол, масъала ва супориш

1. Радиуси давраҳои ба квадрати масоҳаташ 36 см^2 дарун ва берункашидашударо ёбед.
2. Радиуси давраҳои ба секунҷаи мунтазами периметраш 18 см дарун ва берункашидашударо ҳисоб кунед.
3. Исбот кунед, ки радиуси давраи ба шашкунҷаи мунтазам берункашидашуда ба тарафи он баробар аст.
4. Исбот кунед, ки миёнаҳои тарафҳои бисёркунҷаи мунтазам қуллаҳои дигар бисёркунҷаи мунтазам мебошад (расми 5).
5. Исбот кунед, ки радиуси давраи ба секунҷаи мунтазам дарункашидашуда аз радиуси давраи берункашидашуда ду маротиба хурд аст.
- 6*. Исбот кунед, ки перпендикулярӣ миёнаҳои ду тарафи дилхоҳи бисёркунҷаи мунтазам ё дар як нуқта бурида мешавад ё ки дар як хати рост меҳобад.
7. Як тарафи бисёркунҷаи мунтазам ба давра дарункашидашуда аз давра камони ба а) 60° ; б) 30° ; в) 36° ; г) 18° ; д) 72° баробарро ҷудо мекунад. Бисёркунҷа чандто тараф дорад?
8. Аз коғаз шашто секунҷаи мунтазами баробарро бурида гиред. Аз онҳо истифода бурда, шашкунҷаи мунтазам созед. Нисбати масоҳатҳои шашкунҷаи мунтазам ва секунҷаи тарафҳояшон баробарро ёбед.

44

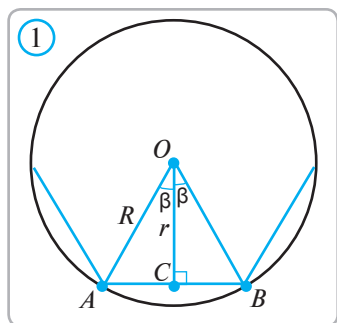
ВОБАСТАГИИ БАЙНИ ТАРАФҲОИ БИСЁРКУНЧАИ МУНТАЗАМ ВА РАДИУСҲОИ ДАВРАИ ДАРУН ВА БЕРУНКАШИДАШУДА



Машқи фаъолкунанда

Чиро а) синус; б) косинус; в) тангенс; кунчи тези секунҷаи росткунҷа меноманд?

Барои ҳисоб кардани радиусҳои давраи ба n — кунҷаи мунтазами тарафаш a_n баробар дарункашидашуда R ва берункашидашуда r формулаҳо меёбем. Барои ин аз секунҷаи росткунҷаи ACO истифода мебарем. Дар ин ҷо O — маркази бисёркунҷа, C — миёнаҳои тарафи AB -и бисёркунҷа (расми 1). Он гоҳ,



$$\beta = \angle AOC = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{1}{2} \cdot \frac{360^\circ}{n} = \frac{180^\circ}{n};$$

$$R = OA = \frac{AC}{\sin \beta} = \frac{\frac{a_n}{2}}{\sin \frac{180^\circ}{n}}; \quad r = OC = \frac{AC}{\tan \beta} = \frac{\frac{a_n}{2}}{\tan \frac{180^\circ}{n}};$$

$$r = OC = OA \cdot \cos \beta = R \cos \frac{180^\circ}{n}.$$

Азин формулаҳо истифода бурда, вобастагии байни тарафи баъзе бисёркунҷаҳои мунтазам, радиусҳои давраҳои берун ва дарункашидашударо меёбем.

1. Барои секунҷаи мунтазам ($n=3$):

$$\beta = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ; \quad R = \frac{a_3}{2 \sin 60^\circ} = \frac{a_3}{\sqrt{3}}; \quad r = \frac{a_3}{2 \tan 60^\circ} = \frac{a_3}{2\sqrt{3}}; \quad R = 2r.$$

2. Барои квадрат ($n=4$):

$$\beta = \frac{180^\circ}{4} = 45^\circ; \quad R = \frac{a_4}{2 \sin 45^\circ} = \frac{a_4}{\sqrt{2}}; \quad r = \frac{a_4}{2 \tan 45^\circ} = \frac{a_4}{2}; \quad R = r\sqrt{2}.$$

3. Барои шашкунҷаи мунтазам ($n=6$):

$$\beta = \frac{180^\circ}{6} = 30^\circ; \quad R = \frac{a_6}{2 \sin 30^\circ} = a_6; \quad r = \frac{a_6}{2 \tan 30^\circ} = \frac{a_6 \sqrt{3}}{2}; \quad R = \frac{2r}{\sqrt{3}}.$$



Масъала. Тарафи n — кунҷаи мунтазам a_n -ро бо формулаи давраи ба хамин бисёркунҷа берункашидашуда R ва дарункашидашуда r ифода кунед.

Ҳалли он. $R = \frac{a_n}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}$ ва $r = \frac{a_n}{2 \tan \frac{180^\circ}{n}}$ Аз формулаҳои $a_n = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}$ ва $a_n = 2r \tan \frac{180^\circ}{n}$

-ро ҳосил мекунем. Хусусан, $n=3$ бошад, $a_3 = R\sqrt{3} = 2r\sqrt{3}$.

Савол, масъала ва супориш

1. Радиуси давраҳои ба а) чоркунҷаи мунтазам; б) секунҷаи мунтазам в) шашкунҷаи мунтазами тарафаш 15 см дарун ва берункашидашударо ҳисоб кунед.
2. Дар тарафи рости расми 2 квадрат, секунҷаи мунтазам ва шашкунҷаи мунтазами ба давраи радиусаш R дарункашидашуда тасвир ёфтааст. Ҷадвали додашударо ба дафтаратон кашида, хонаҳои холии онро пур кунед. (a_n — тарафи бисёркунча, P — периметри бисёркунча, S — масоҳати он, r — радиуси давраи ба он дарункашидашуда).

2 а)

	R	r	a_4	P	S
1.			6		
2.		2			
3.	4				
4.				28	
5.					16

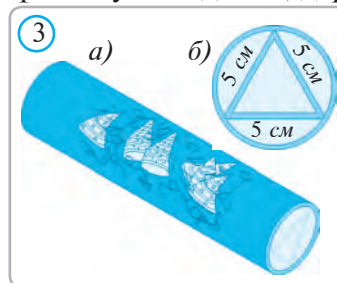
б)

	R	r	a_3	P	S
1.	3				
2.					10
3.		2			
4.			5		
5.				6	

д)

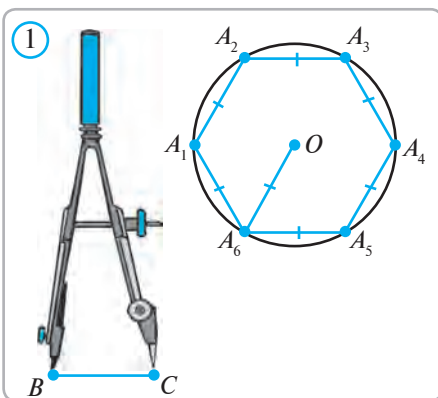
	R	r	a_6	P	S
1.	4				
2.		5			
3.			6		
4.				42	
5.					48

3. Диагоналҳои аз як қуллаи дувоздаҳкунҷаи мунтазами ба давраи радиусаш 8 см дарункашидашуда барояндаро ёбед.
4. Периметри секунҷаи мунтазами ба давра дарункашидашуда 24 см аст. Тарафи квадрати ба ҳамин давра дарункашидашударо ёбед.
5. Аз ҷўби шакли силиндри дошта сутуни шакли призмаи асосаш аз а) квадрат; б) шашкунҷаи мунтазами тарафаш 20 см буда тайёр намудан лозим. Барои ин хурдтарин диаметри буриши арзии ҷўб бояд чӣ қадар бошад?
6. Бо бозичаи калейдоскоп ном гирифтаи дар расми 3-а тасвирёфта, ки нақшҳои рангорангро тамошо кардан мумкин аст, Шумо эҳтимол шинос ҳастед. Бозича аз лўла ва аз 3 оина иборат аст. Дар расми 3-в буриши арзӣ ва андозаҳои он тасвир ёфтааст. Радиуси буриши арзии калейдоскопро ёбед.



I. Тестҳо

- Дар кадоме аз бисёркунчаҳои додашуда давраи дарункашидашуда мавҷуд нест?
 А) Ба секунча; С. Ба ромби аз квадрат фарқкунанда;
 Б) Ба квадрат; Д. Ба росткунҷаи аз ромб фарқкунанда.
- Дар кадоме аз бисёркунчаҳо давраи берункашидашуда мавҷуд нест?
 А) Ба секунча; Д) Ба ромби аз квадрат фарқкунанда;
 Б) Ба квадрат; Е) Ба росткунҷаи аз ромб фарқкунанда.
- Барои ҳамаи чоркунҷаҳои $ABCD$ -и дарункашидашудаи давра баробарии нодурустро ёбед.
 А) $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$; Д) $AB + CD = BC + AD$;
 Б) $\angle A + \angle C = 180^\circ$; Е) $\angle B + \angle D = 180^\circ$.
- Барои ҳамаи чоркунҷаҳои $ABCD$ -и берункашидашудаи давра баробарии нодурустро ёбед.
 А) $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$; Д) $AB + CD = BC + AD$;
 Б) $\angle A + \angle C = 180^\circ$; Е) $AB - BC = AD - CD$.
- Радиуси давраи берункашидашудаи росткунҷаи тарафҳояш 5 см ва 12 см бударо ёбед.
 А) 6 см; Б) 6,5 см; Д) 7 см; Е) 7,5 см.
- Кунҷи дарунии 24-кунҷаи мунтазамро ёбед.
 А) 120° ; Б) 135° ; Д) 150° ; Е) 165° .



II. Машқҳо доир ба сохтан.

1. Шашкунҷаи мунтазами тарафаш ба порчаи додашудаи баробарро созад. Дар он аз радиуси давраи ба шашкунҷаи мунтазан, ки ба тарафи баробар аст, истифода баред (расми 1).

2. Аз маълумотҳои расмҳои 2-4 истифода бурда, ба давраи додашуда: а) секунҷаи мунтазам; б) квадрат; в) ҳашткунҷаи мунтазами дарункашидашуда созад.

3. Аз расми 5 истифода бурда, ба давраи додашуда шашкунҷаи мунтазами берункашидашуда созад. (Тарафҳои шашкунҷаи мунтазами

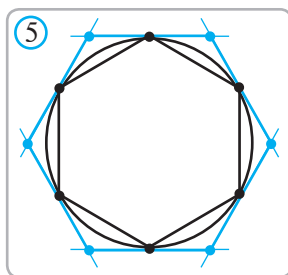
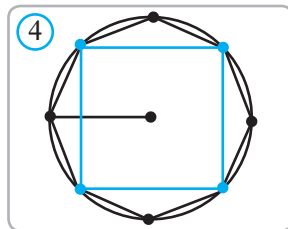
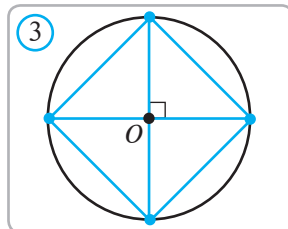
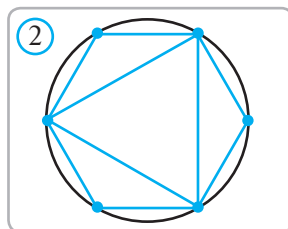
дар расми 5 тасвиршуда ба расандаҳои шашкунҷаи мунтазами дарункашидашудаи давра меҳобад).

III. Масъалаҳо доир ба ҳисобкунӣ.

1. Тарафҳои секунҷаи мунтазам, квадрат ва шашкунҷаи мунтазам ба якдигар баробаранд. Нисбати масоҳати онҳоро ёбед.
2. Нисбати масоҳатҳои шашкунҷаи мунтазामी дарункашидашуда ва берункашидашудаи даврaro ёбед.
3. Масофаи байни тарафҳои параллели а) шашкунча; б) ҳашткунча; в) дувоздакунҷаи мунтазам ба 10 см баробар аст. Тарафҳои бисёркунҷарo ёбед.
4. Ба давраи радиусаш R ҳашткунҷаи мунтазामी $A_1 A_2 \dots A_8$ дарункашида шудааст. Иббот кунед, ки чоркунҷаи $A_3 A_4 A_7 A_8$ росткунҷа аст ва масоҳати онро ёбед.
5. Гипотенузаи секунҷаи росткунҷаи ба давра берункашидашуда дар нуқтаи расиш ба давра ба порчаҳои дарозияшон 4 см ва 6 см тақсим мешавад. Масоҳати секунҷарo ёбед.
6. Кунҷи байни диагоналҳои аз ҳама хурд ва аз ҳама калони аз як қуллаи даҳкунҷаи мунтазам барояндарo ёбед.

IV. Худатонро бисанҷед (кори назорати намунавӣ).

1. Радиуси давраҳои дарун ва берункашидашудаи секунҷаи росткунҷаи катетҳояш 10 см ва 24 см бударo ёбед.
2. Як кунҷи ромби ба давраи радиусаш 5 см будаи берункашидашуда ба 150° баробар аст.
а) Периметри;
б) Диагоналҳояш;
в) Масоҳати ромбро ёбед.
3. Диагоналҳои аз як қулла барояндаи шашкунҷаи мунтазामी тарафаш 4 см бударo ёбед.
4. (Илова). Фарқи масоҳатҳои шашкунҷаи мунтазам ва секунҷаи мунтазामी ба давраи радиусаш 3 см буда дарункашидашударo ёбед.



Лавҳаҳои таърихӣ Бисёркунҷаи мунтазामी дилхоҳро бо ёрии паргор ва хаткашак сохтан душвор аст. Инро соли 1801 математики немис Карл Гаусс (1777-1855) бо усули алгебравӣ исбот кардааст. Ў адади n -ро дар ҳолати паҳишавии $2^m p_1 p_2 \dots p_n$ ба $p_1, p_2, \dots, p_n$ ададҳои соддаи гуногун ба намуи $2^{2^k} + 1$ овардан, сохтани n -кунҷаи мунтазамро бо ёрии паргор ва хаткашак исбот кардааст.

Дар ин ҷо m ва k ададҳои ғайриманфии бутун аст.



Машқи фаъолкунанда

1. Одатан буриши арзӣ ё ки кўндаланги порчаи лўла аз давра иборат аст. Як нўги риштаи бориқро гирифта, ба лўла як маротиба печонед. Риштаи ба лўла як маротиба печонидашуда буриши арзии лўла, яъне дарозии давра мешавад. Онро чун нишондоди расм бо хаткашак чен кунед.
2. Бо усули болоӣ диаметри буриши арзии лўларо муайян кунед.
3. Нисбати дарозии давраи аниқ кардашударо ба диаметри он ҳисоб кунед.
4. Усули болоии ченкунӣ ва ҳисобкуниро боз барои якчанд порчаҳои лўлаи ченакашон гуногун ҳам татбиқ намуда, нисбати дарозии давраро ба диаметраш ёбед.
5. Дар натиҷаи тадқиқот оиди нисбати дарозии давра ба диаметри он чӣ гуна хулоса баровардан мумкин?

 **Теорема.** Нисбати дарозии давра ба диаметри он ба радиуси давра вобаста нест, яъне барои ҳар гуна давра ин нисбат як хел рақам аст.

Исбот. Ду давраи дилхоҳ мегирем. Радиуси онҳо R_1 ва R_2 , дарозияшон бошад, дар ҳолати мувофиқ C_1 ва C_2 бошад. Баробарии $\frac{C_1}{2R_1} = \frac{C_2}{2R_2}$ -ро исбот намудан лозим. Ба ҳар ду давра n -кунҷаи мунтазами дарункашидашударо мекашем. Периметри онҳоро мувофиқан P_1 ва P_2 гуфта ишорат мекунем.

$$P_1 = n \cdot 2R_1 \sin \frac{180^\circ}{n}, \quad P_2 = n \cdot 2R_2 \sin \frac{180^\circ}{n} \quad \text{буданаш} \quad \frac{P_1}{P_2} = \frac{2R_1}{2R_2} \quad (*) \quad \text{мешавад.}$$

Ин баробарӣ ба n -и дилхоҳ дуруст аст. Адади n афзудан гирад, периметри n -кунҷаки ба давра дарункашидашуда P_1 ба дарозии ҳамин давра C_1 наздик шудан мегирад. Монанди ин P_2 ҳам ба C_2 наздик шудан мегирад.

Аз ин рӯ, нисбати $\frac{P_1}{P_2}$ ба нисбати $\frac{C_1}{C_2}$ баробар мешавад (Исботи пурраи ин дар зинаҳои болоии математика омӯхта мешавад. Ҳамин тавр, аз баробарии $(*) \frac{C_1}{C_2} = \frac{2R_1}{2R_2}$, аз ин бошад, баробарии $\frac{C_1}{2R_1} = \frac{C_2}{2R_2}$ бармеояд.

Теорема исбот шуд.

Нисбати дарозии давра ба диаметри онро бо ҳарфи алифбои юнонӣ π ишораткунӣ қабул шудааст (“ π ” гуфта хонда мешавад). Ишораткунии нисбати дарозии давра ба диаметро бо ҳарфи “ π ” математики бузург Леонард Эйлер (1707—1783) ба фан дохил намудааст. Дар юнони калимаи “давра” бо ҳамин ҳарф сар мешавад. π адади ирратсионалӣ буда, дар амалиёт қимати тақрибии ба 3,1416 баробар будаи он истифода бурда мешавад.

Ҳамин тавр, $\frac{C}{2R} = \pi$. Аз ин баробарӣ барои дарозии давра формулаи $C = 2\pi R$ -ро ҳосил мекунем.

 **Масъала.** Дарозии давраи ба секунҷаи мунтазами тарафаш 6 см буда берункашидашударо ёбед.

Ҳалли он. Мувофиқи формулаи ёфтани радиуси давраи ба секунҷаи мунтазам берункашидашуда $R = \frac{a_3}{\sqrt{3}}$, $R = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$ (см) мешавад. Акнун аз формулаи ёфтани дарозии давра

$$C = 2\pi R = 2\pi \cdot 2\sqrt{3} = 4\pi\sqrt{3} \text{ (см).} \quad \textbf{Ҷавоб: } 4\pi\sqrt{3} \text{ см.}$$

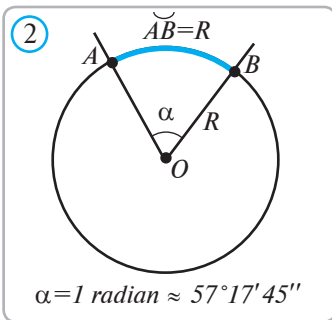
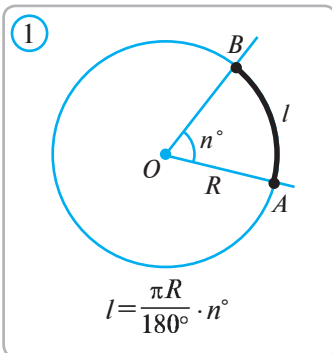
Савол, масъала ва супориш

1. Чӣ гуна адад бо π ишорат мешавад? Аз формулаи ёфтани дарозии давраи радиусаш R истифода бурда, чадвалро пур кунед ($\pi \approx 3,14$ гуфта гиред).

C			82	18π		6,28	
R	4	3			0,7		101,5

2. Агар радиуси давра а) 3 маротиба зиёд шавад; б) 3 см зиёд шавад; в) 3 маротиба кам шавад; г) 3 см кам шавад, дарозии давра чӣ қадар тағйир меёбад?
3. Агар аз 40 миллион як қисми экватори кураи Замин ба 1 м баробар бошад, радиуси кураи Заминро ёбед.
4. Дарозии давраи ба а) секунҷаи мунтазами тарафаш ба a баробар; б) секунҷаи росткунҷаи катетҳояш a ва b ; в) секунҷаи баробарпахлуи асосаш a тарафи пахлуиаш b буда берункашидашударо ёбед.
5. Дарозии давраи ба а) квадрати тарафаш баробари a ; б) секунҷаи росткунҷаи баробарпахлуи гипотенузааш c ; в) секунҷаи росткунҷаи гипотенузааш c , кунҷи тезаш α кашидашударо ёбед.
6. Тепловод 1413 м роҳ рафт. Дар ин масофа чархи он 300 маротиба давр зад. Диаметри чархи тепловодро ёбед.
7. Радиуси чархи давраи автомобили “Нексия” 24 см аст. Автомобил 100 км роҳ паймояд, чархи он чанд маротиба давр мезанад (расми 1).





1. Дарозии камони кунчи марказии n° дарҳам кашида

Бигузор дар давраи радиусаш баробарии R кунчи марказии n° AOB дода шуда бошад (расми 1).

Дар он ченаки градусии калони AB , ки ба кунчи марказии AOB -и давра така мекунад n° ё ки камони n° -а гуфта қабул мекунем.

Давраи радиусаш R , яъне аз сабаби дарозии камони 360° ба $2\pi R$ баробар буданаш,

дарозии камони 1° ба $\frac{2\pi R}{360^\circ} = \frac{\pi R}{180^\circ}$ мешавад.

Дар ин ҳол, дарозии камони n° бо формулаи

$l = \frac{\pi R}{180^\circ} \cdot n^\circ$ муайян карда мешавад (расми 1).

2. Ченаки радиани кунч

Баробари ченаки градусии кунч дар як навбат, ченаки радиани он ҳам истифода бурда мешавад.

Дар асоси формулаи болоӣ нисбати дарозии давра ба градус ба: $\frac{l}{R} = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot n^\circ$ баробар аст. Пас, нисбати

дарозин давра ба градус фақат ба бузургии кунчи марказии ба ҳанин камон така шуда вобаста аст. Аз ин хосият истифода бурда ба сифати ченаки радиани кунч ҳамин нисбатро мегирием:

$$\alpha = \frac{l}{R} = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot n^\circ.$$

Одатан калимаи радиан навишта намешавад. Масалан ба чоӣ 5 рад. 5 гуфта навишта мешавад.

Ин радиан ба $\frac{180^\circ}{\pi}$ градус баробар аст: $1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 17' 45''$. Барои аз ченаки градуси ба ченаки радианӣ гузаштан аз формулаи $\alpha = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot n^\circ$ истифода мебарем.

Ҳамин тавр, барои ёфтани ченаки кунчи n° бо радиан ченаки градуси онро ба $\frac{\pi}{180^\circ}$ зарб кардан кифоя аст. Дар ҳолати хусусӣ ченаки радиани кунчи 180° ба π баробар аст, кунчи 90° яъне кунчи рост ба $\frac{\pi}{2}$ баробар мешавад.

Дарозии камони ба кунчи марказӣ мувофиқи баробари α радиан бо формулаи $l = \alpha R$ ҳисоб карда мешавад.

Масъала. Ченаки радиани кунҷҳои секунҷаи кунҷҳояш 30° ва 45° -ро ёбед.

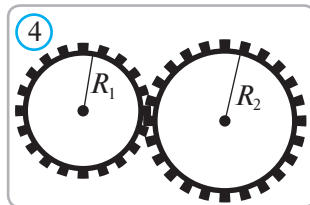
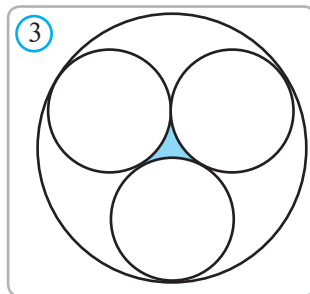
Ҳалли он. Ченаки радиани кунҷи 30° ба $30^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{6}$, ченаки радиани кунҷи 45° ба $45^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{4}$ баробар аст. Аз теорема дар бораи ҳосили ҷамъи кунҷҳои дохилии секунҷа ба 180° , яъне ба π баробар буданаш истифода бурда, кунҷи сеюми онро меёбем.

$$\pi - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{12}.$$

Ҷавоб: $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ ва $\frac{7\pi}{12}$.

? Савол, масъала ва супориш

1. Дарозии камони давраи радиусаш 6 см ва ченаки градусии а) 30° ; б) 45° ; в) 90° ; г) 120° бударо ёбед.
2. Ченаки радиани кунҷи а) 40° ; б) 60° ; в) 75° -ро ёбед.
3. Ченаки градусии кунҷи а) 1,2; б) $\frac{2\pi}{3}$; в) $\frac{5\pi}{6}$ радиан баробарро ёбед.
4. Агар радиуси давра 5 см бошад, дарозии камони ба кунҷи марказӣ тақриқан шуда ба а) $\frac{\pi}{8}$; б) $\frac{2\pi}{5}$; в) $\frac{3\pi}{4}$ радиан баробарро ёбед.
5. Секунҷаи ABC ба давраи радиусаш 12 см дарун кашида шудааст. Агар: а) $\angle A = 30^\circ$; б) $\angle A = 120^\circ$ бошад, дарозии камони BC , ки нуқтаи A -ро ба дохили худ намегирад, ҳисоб кунед.
6. Хордаҳои баробари давраи маълум камонҳои баробар ҷудо карданашро исбот кунед.
- 7*. Ду давра аз маркази якдигар мегузарад. Нисбати камонҳои дар ин давраҳо ҷудокардаи хордаи умумии онҳоро ёбед.
- 8*. Се давраҳои радиусҳояшон баробар ба якдигар аз берун ва бо давраи радиусаш баробари K аз дарун мерасанд (расми 3). а) радиуси даврахоро ёбед; б) ҳосили ҷамъи дарозии камонҳои шакли ранг кардашударо ёбед.



Масъалаи шавқовар.

Ду ҷархи дандонадори дар расми 4 тасвирёфта ба якдигар “газонда” шудаанд. Радиуси ҷархҳо R_1 ва R_2 . Ҷархи якум n мартиба давр занад, ҷархи дуюм чанд маротиба давр мезанад?

Дар ин ҷо, P_n' ва P_n'' мувофиқан периметрҳои бисёркунҷаҳои $A_1A_2...A_n$ ва $B_1B_2...B_n$. Аз $\alpha = \frac{180^\circ}{n}$ буданаш дар қимати калонтарини кифоягии n аз қимати $\cos \alpha$ қиматҳои P_n' ва P_n'' аз дарозии давра, яъне аз $2\pi R$ бо қимати дилхоҳи хурд кам фарқ мекунад. Он гоҳ мувофиқи баробарии (1) дар қиматҳои калонтарини кифоягии n масоҳати бисёркунҷаҳо ба πR^2 наздик шудан мегирад. Аз ин барои масоҳати доира формулаи $S = \pi R^2$ бармеояд. **Теорема исбот шуд.**

Масъала. Дарозии давраи сахнаи сирк 41 м. Радиуси сахна ва масоҳати онро ёбед.

Ҳалли он. 1) Аз формулаи дарозии давра радиуси онро меёбем (расми 3):

$$R = \frac{C}{2\pi} \approx \frac{41}{2 \cdot 3,14} \approx 6,53 \text{ (м)}.$$

2) Аз формулаи ҳисоб кардани масоҳати доира масоҳати сахнаро меёбем:

$$S = \pi R^2 \approx 3,14 \cdot 6,53^2 \approx 133,84 \text{ (м}^2\text{)}. \text{ Ҷавоб: } R \approx 6,53 \text{ м; } S = 133,84 \text{ м}^2.$$

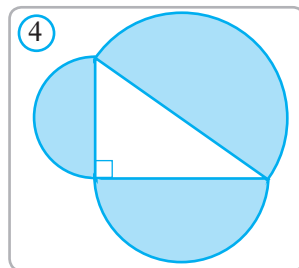


Савол, масъала ва супориш

1. Ҳисоб кардани формулаи масоҳати доираро асоснок кунед.
2. Аз формулаи ёфтани масоҳати доира S -и радиусаш ба R баробар истифода бурда, чадвалро пур кунед. ($\pi \approx 3,14$ гуфта гиред).

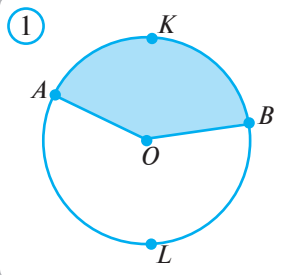
R	2	5		$\frac{2}{7}$		54,3		6,25
S			9		49π		$\sqrt{3}$	

3. Агар радиуси доира а) k маротиба зиёд шавад; б) k маротиба кам шавад, масоҳати доира чӣ қадар тағйир меёбад?
4. Масоҳати доираи ба квадрати тарафаш 5 см дарун ва берункашидашударо ёбед.
5. Масоҳати доираи ба секунҷаи мунтазами тарафаш $3\sqrt{3}$ см дарун ва берункашидашударо ёбед.
6. Аз доираи радиусаш R квадрати калонтарин бурида гирифтанд. Масоҳати қисми боқимондаи доираро ёбед.
7. Масоҳати доираи ба росткунҷаи тарафаш 6 см ва 7 см берункашидашударо ҳисоб кунед.
8. Масоҳати доираи ба ромби тарафаш 10 см ва кунҷи тезаш 60° дарункашидашударо ёбед.
- 9*. Тарафҳои секунҷаи росткунҷаро диаметр карда нимдоираҳо кашида шудаанд. Нишон диҳед, ки масоҳати нимдоираи ба гипотенуза кашидашуда ба ҳосили ҷамъи масоҳати нимдоираҳои ба катетҳо кашидашуда баробар аст (расми 4).



49

МАСОҲАТИ ҚИСМҲОИ ДОИРА

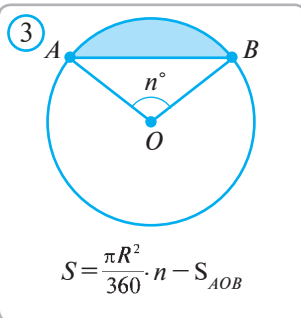
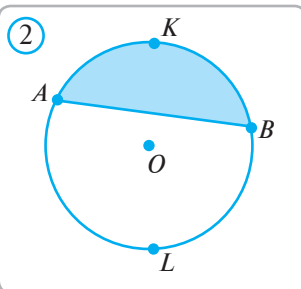


✓ Таъриф. Камони доира ва қисми бо ду радиус маҳдудкардашудаи охириҳои ин камон бо маркази доира **сектор** номида мешавад. Камони дар ҳудуди сектор буда **камони сектор** номида мешавад.

Дар расми 1 ду сектори камони AKB ва BLA дошта тасвир ёфтааст (якумаш ранг карда шудааст).

Барои ёфтани масоҳати сектори S -и радиусаш R ва ченаки градусиаш n° формула мебарорем. Аз сабаби масоҳати сектори камонаш баробари 1° ба $\frac{1}{360}$ қисми масоҳати доира (яъне сектори камонаш 360° буда) баробар буданаш, масоҳати сектори камонаш n° буда бо формулаи

$S = \frac{\pi R^2}{360} \cdot n$ ёки $S = \frac{1}{2} Rl$ ёфта мешавад. Дар ин ҷо l – дарозии камони сектори n° мебошад.

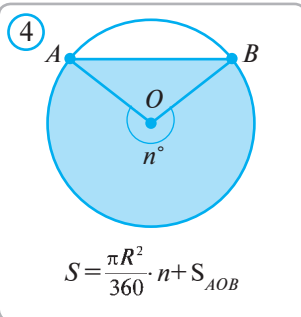


✓ Таъриф. Қисми бо камони доира ва хордаи охириҳои ин камонро пайвастанданда маҳдудкардашуда **сегмент** номида мешавад.

Дар расми 2 ду сегменти камонҳояш AKB ва BLA тасвир ёфтааст (аз онҳо якумаш ранг карда шудааст). Масоҳати сегменти аз нимдоира фарқкунанда S бо формулаи

$$S = S_{\text{сектор}} \pm S_{\Delta} = \frac{\pi R^2}{360} \cdot n \pm S_{AOB}$$

ҳисоб карда мешавад (ба расмҳои 3 ва 4 нигаред).



✎ Масъала. Масоҳати сектори ченаки градусаш 72° ба 45π баробар аст. Радиуси секторро ёбед.

Ҳалли он. Мувофиқи формулаи ёфтани масоҳати сектор $\frac{\pi R^2}{360} \cdot 72 = 45\pi$.

Аз ин, $R^2 = \frac{45\pi \cdot 360}{72\pi} = 225$, яъне $R = 15$.

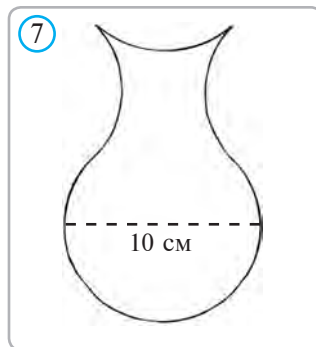
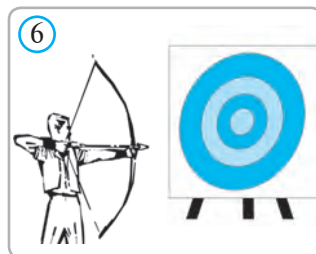
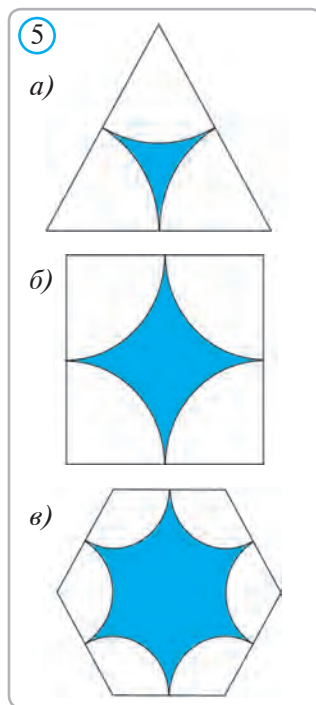
Ҷавоб: 15.

? Савол, масъала ва супориш

1. Формулаи ҳисоб кардани масоҳати секторро оварда бароред.
2. Формулаи ёфтани масоҳати сегментро оварда бароред.
3. Масоҳатҳои сектор ва сегменти радиусаш 7 см-ро ёбед. Дар ин ҷо ченаки градусии он а) 30° ; б) 45° ; в) 120° ; г) 90° .
4. Дар расми 5 секунҷаи мунтазам, квадрат ва шашкунҷаи мунтазами тарафаш a тасвир ёфтааст. Масоҳати шаклҳои рангкардашударо ёбед. Дар ин ҷо радиуси секторҳо ба нисфи тарафи бисёркунча баробар аст.
5. Дар нишон чор давраи радиусҳояшон 1, 2, 3, 4 ҳафт. Масоҳати доираи хурдтарин ва масоҳати ҳар як ҳалқаро ёбед (расми 6).
6. Дар доираи радиусаш баробари 10 см хордаи ба радиус баробар гузаронида шудааст. Масоҳати сегментҳои ҳосилшударо ёбед.
7. Масофаи байни марказҳои ду доираи радиусҳояшон 15 см ба 15 см баробар аст. Масоҳати қисми умумии доираҳоро ёбед.
8. Масоҳати дувоздаҳкунҷаи мунтазами ба давраи радиусаш 10 см дарун ва берункашидашударо ҳисоб кунед. Натиҷаҳоро бо масоҳати доира муқоиса намоед.

⌚ Масъалаи шавқовар

Бо се хати рост расми гулдони дар расми 7 тасвирёфтaro: а) ҳамин тавр ба чор қисм тақсим кунед, ки аз онҳо росткунҷа сохтан мумкин бошад; б) бо ду хати рост ҳамин тавр ба се қисм тақсим кунед, ки аз онҳо квадрат сохтан мумкин бошад.

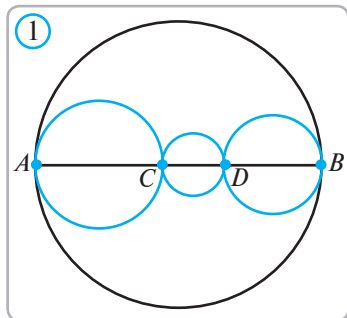


📐 Лавҳаҳои таърихи. Дар тўли вақтҳои дуру дароз математикҳои зиёди дунё барои ҳалли масъалаи зерини номаш «квадратураи доира» ҳаракат кардаанд: бо ёрии паргор ва хаткашак сохтани квадрати масоҳаташ ба масоҳати доираи додашуда баробар. Фақат дар охири асри XIX ҳаллу фасл надоштани ин масъала исбот гардидааст.

50

ҲАЛЛИ МАСЪАЛАҲО

Масъалаи 1. Нуктаҳои C ва D диаметри давра AB -ро ба се порчаи AC , CD ва DB ҷудо мекунад. Иббот кунед, ки ҳосили ҷамъи дарозии давраҳои диаметрашон AC , CD ва DB ба дарозии давраи диаметраш AB баробар аст (расми 1).



Ҳалли он. Аз формулаи ёфтани дарозии давра истифода бурда, ҳосили ҷамъи дарозии давраҳои C_1 , C_2 , C_3 -ро, ки диаметрашон AC , CD ва DB аст, меёбем:

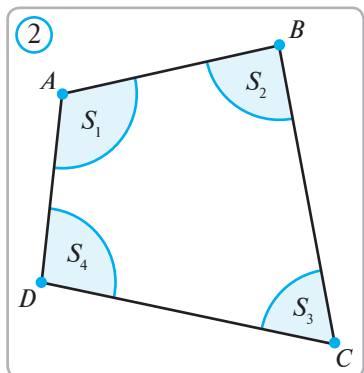
$$C_1 + C_2 + C_3 = AC \cdot \pi + CD \cdot \pi + DB \cdot \pi = \pi(AC + CD + DB).$$

Аз сабаби дарозии давраи диаметрашон $AC + CD + DB = AB$ Ҷ бода ба $AB \cdot \pi$ баробар будан

$$C_1 + C_2 + C_3 = C.$$

Ибботи ин баробари дархост шуда буд.

Масъалаи 2. Куллаҳои чоркунҷаи $ABCD$ -ро марказ гирифта, секторҳои радиусашон як хел сохта шудаанд (расми 2). Аз ин секторҳо ду сектори дилҳо ба нуктаи умумӣ соҳиб нест. Радиуси онҳо 1 см. Ҳосили ҷамъи масоҳати секторҳоро ёбед.



Ҳалли он. 1) Кунҷҳои чоркунҷа A, B, C, D бо равиши мувофиқ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ бошанд. Он гоҳ дар асоси теорема дар бораи ҳосили ҷамъи кунҷҳои дарунии бисёркунҷа

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 360^\circ.$$

2) Дар асоси формулаи ёфтани масоҳати сектор ($R = 1$ см),

$$S_1 = \frac{\pi}{360^\circ} \cdot \alpha_1, S_2 = \frac{\pi}{360^\circ} \cdot \alpha_2, S_3 = \frac{\pi}{360^\circ} \cdot \alpha_3, S_4 = \frac{\pi}{360^\circ} \cdot \alpha_4. \quad (1)$$

3) Қисмҳои мувофиқи баробарии (1)-ро ҷамъ мекунем. Он гоҳ,

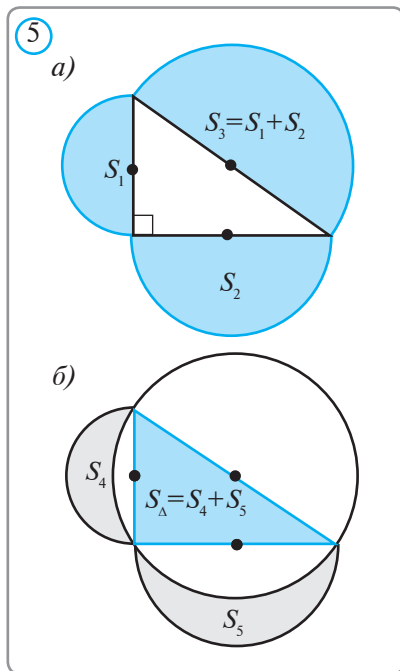
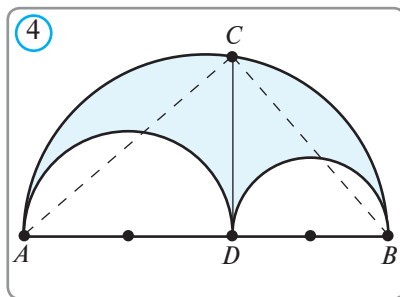
$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = \frac{\pi}{360^\circ} (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) = \frac{\pi}{360^\circ} \cdot 360^\circ = \pi \text{ (см}^2\text{) мешавад.}$$

Ҷавоб: π см².

Савол, масъала ва супориш

1. Квадрати периметраш 1 м ва давраи дарозияш 1 м дода шудааст. Масоҳати бо давра маҳдудкардашударо бо масоҳати квадрат муқоиса кунед.

2. Аз доираи радиусаш 8 см сектори 60° бурида гирифта шудааст. Масоҳати боқимондаи қисми доираро ёбед.
3. Масоҳати доираи бо ромби диагоналҳояш 6 см ва 8 см дарункашидашударо ҳисоб кунед.
4. Масоҳати шакли дар расми 3 ранг кардашударо ёбед. Дар он $ABCD$ — квадрат, $AB=4$ см.
- 5*. Дар расми 4 шакли номаш “Корди Архимед” ранг карда нишон дода шудааст. Масоҳати он бо формулаи $\frac{\pi \cdot CD^2}{4}$ ҳисоб карда шуданашро исбот кунед. (Дар ин ҷо аз $\angle ACB=90^\circ$ ва $CD^2=AD \cdot DB$ буданаш истифода баред).
6. Агар $AD=6$ см, $BD=4$ см бошад, масоҳат ва периметри шакли рангкардашудаи дар расми 4 нишондодашударо ёбед. (сумма ва дарозии камони ҳосилкардаи онро)



Лавҳаҳои таърихӣ. Моҳчаҳои Гиппократ

Моҳчаҳои Гиппократ — шакли бо ду давра маҳдуд кардашуда ва дорои хосиятҳои зайл аст: бо ёрии хордаҳои ин камонҳо ва радиуси давраҳо (моҳчаҳо) квадрати ба ин моҳчаҳо баробарбузург сохтан мумкин.

Теоремаи Пифагор татбиқ карда шавад, масоҳати нимдоираи ба гипотенузаи тасвирёфта сохташуда ба ҳосили ҷамъи масоҳатҳои нимдоираи дар катетҳо сохташуда баробар мешавад (расми 5-а). (ба масъалаи 9*-саҳ оғнигаред). Бинобар ин, ҳосили ҷамъи масоҳати моҳчаҳои дар расми 5-б тасвирёфта ба масоҳати секунҷа баробар аст (мушоҳида карда бинед). Агар ба ҷои секунҷаи дар расм тасвирёфта секунҷаи росткунҷаи баробарпахлу гирем, аз ду моҳчаи ҳосилшуда масоҳати ҳар яки моҳчаҳо ба нисфи масоҳати секунҷа баробар мешавад. Математики юнони қадим Гиппократ (асри V, пеш аз эраи мо) барои ҳалли фасли масъала дар бораи квадратураи доира кӯшиш карда, якчанд моҳчаҳои бо бисёркунҷа баробарбузургро ихтироъ кардааст.

Қадвали пурраи моҳчаҳои Гиппократ фақат дар асрҳои XIX—XX тартиб дода шудаанд.

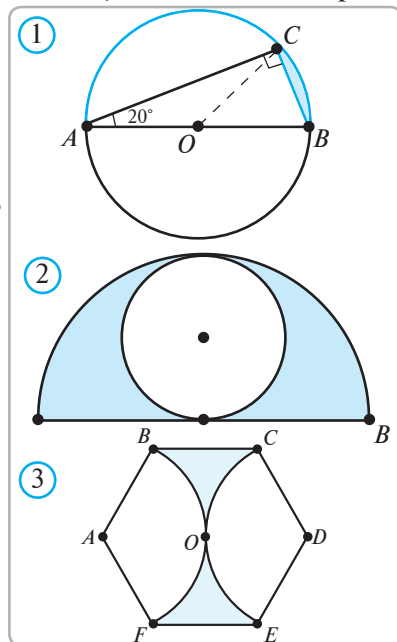
I. Тестҳо

- Ченаки радиани кунчи бузургиаш 45 градус ба чӣ баробар аст.
 А. Ба 1 баробар аст; В. Ба $\frac{\pi}{2}$ баробар аст;
 Д. Ба $\frac{\pi}{4}$ баробар аст; Е. Ба $\sqrt{2}$ баробар аст.
- Дарозии камони ба давраи радиусаш 3 см-и бузургии кунчи марказиаш ба 150° баробарбуда таъкардари ёбед.
 А. $\frac{5\pi}{2}$ см; В. $\frac{5\pi}{3}$ см; Д. $\frac{10\pi}{3}$ см; Е. $\frac{5\pi}{4}$ см.
- Дарозии камони кунчи марказии бузургиаш ба $\frac{5\pi}{4}$ баробари ба давраи радиусаш 6 см таъакунандари ёбед.
 А. $\frac{15\pi}{2}$ см; В. $\frac{5\pi}{6}$ см; Д. $\frac{4\pi}{3}$ см; Е. $\frac{5\pi}{2}$ см.
- Ба квадрати тарафаш 5 см давра берункашида шудааст. Дарозии ин даврари ёбед.
 А. $5\sqrt{2}\pi$; В. $\sqrt{2}\pi$; Д. $3\sqrt{2}\pi$; Е. 5π .
- Масоҳати доираи диаметраш ба 6 см баробарро ёбед.
 А. 9π ; В. 6π ; Д. $3\sqrt{2}\pi$; Е. 12π .
- Ченаки градусии камон 150° , масоҳати сектори доиравии радиусаш 6 см будари ёбед.
 А. 15π см²; В. 6π см²; Д. $30\sqrt{2}\pi$ см²; Е. 24π см².
- Масоҳати сектори доиравии радиусаш 6 см ва дарозии камонаш 12 см будари ёбед.
 А. 15π см²; В. 6π см²; Д. $30\sqrt{2}\pi$ см²; Е. 24π см².
- Масоҳати сегменти доиравии радиусаш 3 см ва ченаки градусии камонаш ба 120° баробар будари ёбед.
 А. $6\pi - 4\sqrt{3}$; В. $6\pi + 4\sqrt{3}$; Д. $3\pi - 4\sqrt{3}$; Е. $3\pi + 4\sqrt{3}$.

II. Масъалаҳо

- Тарафи ҳашткунҷаи мунтазами $ABCDEFGKL$ 6 см. Диагонали AC -и онро ёбед.
- Квадрат ба давраи радиусаш 4 дм дарун кашида шудааст. Дарозии камони хордаи аз миёнаҷои тарафҳои ҳамсои квадрати гузашта аз давра ҷудокардари ёбед.
- Дарозии камони 90° -и давра 15π см. Радиуси даврари ёбед.
- Аз давраи радиусаш 20 камони дарозияш 10π ҷудо карда шуд. Кунчи марказии ба ин камон мувофиқро ёбед.
- Хордаи умумии ду доира аз давраи ин доираҳоро маҳдудкунанда камонҳои 60° ва 120° -ро ҷудо мекунад. Нисбати масоҳати доираҳоро ёбед.

6. Масоҳати доираҳои ба секунҷаи тарафҳояш 3,4,5 дарун ва берункашидашударо ёбед.
7. Хордаи доира камони 60° -ро дарҳам мекашад. Нисбати масоҳати сегментҳои ин хорда ҷудокардари ёбед.
8. Нисбати масоҳати шашкунҷаи мунтазам бар масоҳати доираи ба он дарункашидашударо ёбед.
9. Шашкунҷаи мунтазами $ABCDEF$ -и тарафаш баробари a дода шудааст. Давраи марказаш нуқтаи A ва радиусаш ин шашкунҷаро ба ду қисм ҷудо мекунад. Масоҳати ҳар як қисмро ёбед.
10. Дар секунҷаи росткунҷаи ABC $\angle A = 72^\circ$, $\angle C = 90^\circ$, $BC = 15$ см. Дарозии камони диаметраш BC -и дар дохили секунҷа хобидари муайян кунед.
11. Ҳашткунҷаи мунтазами ба доира дарункашидашуда дода шудааст. Радиусҳои ба ду қуллаи ҳамсоя гузаронидашуда доираро ба ду сектор ҷудо мекунад. Нисбати масоҳатҳои ин секторҳоро ёбед.
12. Дар секунҷаи росткунҷаи ABC $\angle A = 20^\circ$, $\angle C = 90^\circ$, $AB = 18$ см. Порчаи BC доираи ба секунҷа берункашидашударо ба ду сегмент ҷудо мекунад. Масоҳати сегменти ранг кардашударо ёбед (расми 1).
13. Давраи хурд ба давраи калон ва диаметри он AB расида мегузарад. Агар нуқтаи расиш ба диаметр маркази даврзанӣ ва $AB = 4$ бошад, шакли дар расм ранг кардашударо ёбед (расми 2).
14. Тарафи шашкунҷаи мунтазами $ABCDEF$ ба 6 баробар буда, марказаш дар нуқтаи O аст. Дар нуқтаи O давраҳои марказашон дар нуқтаи A ва D будаи радиусҳояшон баробар ба якдигар расида мегузарад. Масоҳати соҳаи рангкардашударо ёбед (расми 3).
15. Дар секунҷаи росткунҷаи ABC $\angle C = 90^\circ$, $AC = 4$, $CB = 2$. Давраи марказаш дар гипотенуза буда ба катетҳои секунҷа расида мегузарад. Дарозии ин давраро ёбед.



III. Худатонро санҷида бинед (кори назоратии намунавӣ)

1. Ба квадрати 6 см дарозии давраи берункашидашуда ва масоҳати доираи дарун кашидашударо ёбед.
2. Радиуси давраи ба бисёркунҷаи мунтазами тарафаш 24 см дарункашидашуда $4\sqrt{3}$ см бошад, радиуси давраи ба он берункашидашударо ёбед.

3. Дарозии камони давраи 240° баробари 24 см бошад,
 а) радиуси давра; б) масоҳати сектори камонаш 240° ; в) масоҳати
 сегменти камонаш 240° -ро муайян кунед.



Масъалаи шавқовар

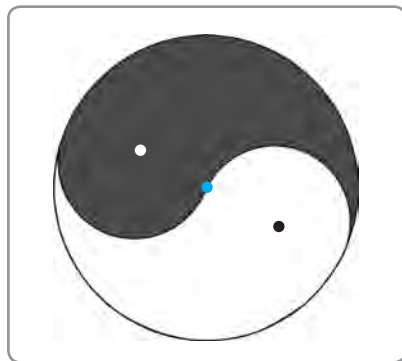
Ин ва Ян

Дар расм ифодакунандаи зиддиятҳои табиати
 рамзи Чин бо номи “Ин ва Ян” тасвир ёфтааст.

а) Нишон диҳед, ки масоҳати рамзҳои Ин ва Ян
 баробаранд.

б) Бо як хати рост ин рамзҳоро бо ду қисми
 масоҳати ҳар яки он баробар ҷудо намоед.

с) Периметри рамзҳои Ин ва Янро ёбед. (суммаи
 дарозии камонҳои ҳосил кардом онҳоро ёбед).



Лавҳаҳои таърихӣ

Ҳисоб кардани дарозии давра аз замонҳои қадим муаммои
 асосӣ ба ҳисоб мерафт. Усули дарозии давраро ба периметри бисёркунҷаи ба он
 дарункашидашуда иваз кардан васеъ паҳн шудааст.

Риёзидонони Осиёи Миёна ҳам бо масъалаҳои сохтани бисёркунҷаҳои мунтазами
 ба давра дарункашидашуда, ифода кардани тарафҳои онҳо ба воситаи радиуси доира
 машғул шудаанд. Абӯрайҳон Берунӣ дар асари худ «Қонуни Масъуд» бо муайян
 кардани тарафи бисёркунҷаи мунтазами ба доира дарункашидашуда машғул шуда,
 усулҳои амиқ кардани тарафҳои панҷкунҷа, шашкунҷа, ҳафткунҷа, даҳкунҷаро
 нишон дод. Дар натиҷаи ин ҳисобкуни ба қимати $\pi \approx 3,14$ соҳиб шуд.

Дар дастнавис ва меҳнатҳои Бобил ва Мисри қадим π баробарии се гуфта
 гирифта шудааст. Ин ба талаби саҳеҳии он давр кифоя шуданаш мумкин. Сонитар
 римӣҳо ба π қимати 3,12-ро қор фармудаанд. Қимати ба адади π гирифтаи Архимед
 3,14 буда, он дар ҳалли масъалаҳои амалӣ мақбул аст.

Дар рисолаи яке аз намоёндагони «мактаби астрономия»-и Улуғбек Ал-Кошӣ,
 ки соли 1424 бо номи «Қитоб дар бораи дарозии давра» таълиф шудааст, адади
 тарафҳои бисёркунҷаи мунтазами дарун ва берункашидашударо бо роҳи дучанд
 зиёдкунӣ $3 \cdot 2^{28} = 800\,335\,168$ гирифта, периметри бисёркунҷаи мунтазамро ҳисоб
 намуд ва барои π қимати $\pi = 3,1\,415\,826\,535\,897\,932$ -ро ҳосил намуд. Ин то 16
 рақами даҳӣ амиқ аст.

Лекин асари Ал-Коши муддати дуру дароз ба Аврупо номаълум буд. Аз аврупоиҳо
 Ван Ромени белгиягӣ соли 1597 ба бисёркунҷаи мунтазами тарафҳояш 2^{30} усули
 Архимедро татбиқ намуда, барои π қимати то 17 адади саҳеҳи даҳиро муайян намуд.
 Олими голландиягӣ Рудолф ван Сеймон (1540-1610) ин саҳеҳиро то 38 рақами даҳӣ
 расонидаст. Ҳоли ҳозир бо ёрии мошинаи ҳисобкунии электронӣ барои π то саҳеҳии
 аз миллион зиёдтар қимати даҳӣ он ёфта шудааст. Барои ҳисобкуниҳои ҳаррӯза
 3,1416, барои ҳисобкуниҳои математикӣ 3,1416, барои ҳисобкуниҳои астрономӣ ва
 кайҳонӣ қимати 3,1415826 кифоя аст.

БОБИ IV



МУНОСИБАТҲОИ МЕТРИКӢ ДАР СЕКУНЧА ВА ДАВРА

Шумо дар натиҷаи омӯзиши ин боб ба дониш ва малакаи амалии зерин соҳиб мешавад:

Донишҳо:

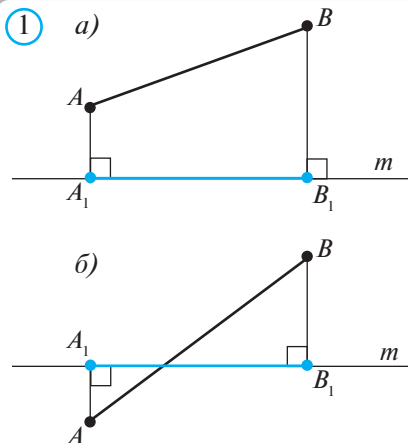
- ✓ Донишони хосиятҳои парчаҳои мутаносиб;
- ✓ донишони хосиятҳои баландии ба гипотенуза гузаронидашуда дар секунҷаи росткунҷа;
- ✓ Донишони хосиятҳои хордаҳои якдигарро бурандаи парчаҳо ва ингуни парчаҳои хати рости бурандаи давра.

Малакаи амалӣ:

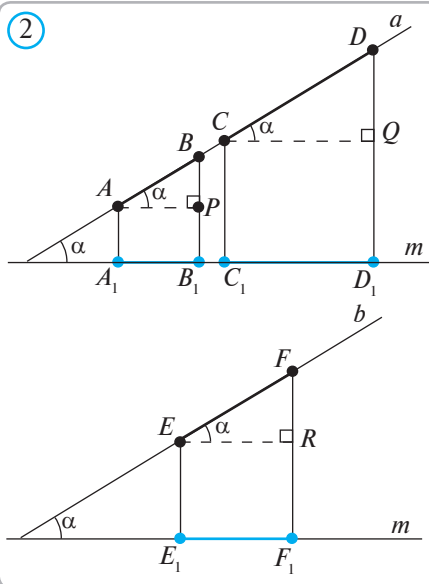
- ✓ ҳал карда тавонистани масъалаҳо оиди нисбати порчаҳо ва порчаҳои мутаносиб;
- ✓ аз хосиятҳои баландии ба гипотенуза гузаронидашуда дар секунҷаи росткунҷа истифода бурда ҳал карда тавонистани масъалаҳо;
- ✓ аз хосиятҳои порчаҳои хордаҳои буранда ва порчаҳои хати рости буранда истифода бурда ҳал кардани масъалаҳо.

52

ПРОЕКЦИИ И ПОРЧАҲО ВА МУТАНОСИБӢ



проекции нуқтаи A_1 — A ,
нуқтаи B_1 — B ,
порчаи A_1B_1 — AB дар тири m



Машқи ғазолкунанда

1. Нисбати порчаҳо чиро мефаҳмонад?
2. Чӣ гуна порчаҳоро мутаносиб мегӯянд.
3. Теоремаи Фалесро гӯед.

Дар ҳамворӣ хати ростии m ва порчаи AB дода шуда бошад. Аз нуқтаҳои A ва B то хати ростии m перпендикулярҳои AA_1 ва BB_1 мекурорем (расми 1). Порчаи A_1B_1 проексияи (сояи) порчаи AB дар тири m номида мешавад.

Сохтаи амали проексияи порчаи AB дар хати ростии m A_1B_1 — ро проексиякунонии AB дар хати ростии m меноманд.

Теорема. Порчаҳои дар як хати рост a ва b ба хати ростии m параллел бошад, дода шуда бошад. Проексияҳои онҳо айнан ба як хати рост ба порчаҳои додашуда мутаносиб мешавад.

$a \parallel b$, проексияҳои A_1B_1 — AB , C_1D_1 — CD , E_1F_1 — EF дар хати ростии m (расми 2).

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{C_1D_1}{CD} = \frac{E_1F_1}{EF} \quad (1)$$

Исбот. а) Агар хатҳои ростии a ва b ба хати ростии m параллел бошад, $AB = A_1B_1$, $CD = C_1D_1$, $EF = E_1F_1$ буданаш ва баробарии (1) ҷой доштаниш равшан аст.

б) Агар хати ростии a ва b ба хати ростии m перпендикуляр бошад, нуқтаҳои A_1 ва B_1 , C_1 ва D_1 , E_1 ва F_1 болои ҳам меҳобанд. Аз ин рӯ, дарозии порчаҳои A_1B_1 , C_1D_1 , E_1F_1 ба сифр баробаршуда баробарии (1) иҷро мешавад.

в) Акнун ҳолатҳои дигарро дида мебароем. Секунҷаҳои росткунҷаи ABP , CDQ , EFR — ро месозем. Дар он $a \parallel b$ буданаш $\angle BAP = \angle DCQ = \angle FER$. Аз ин

рў,секунчаҳои росткунҷаи, ABP , CDQ ва EFR секунҷаи монанд аст. Аз ин $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{C_1D_1}{CD} = \frac{E_1F_1}{EF}$ -ро ҳосил мекунем. **Теорема исбот шуд.**

Масъала. Порчаҳои AB ва CD дар хатҳои рости параллел меҳобанд. Агар $AB=12$ см, $CD=15$ см ва проексияи порчаи AB дар ягон хати рости m 8 см бошад, проексияи порчаи CD дар хати рости m -ро ёбед.

Ҳалли он. Проексияи порчаи CD дар хати рости m x бошад. Он гоҳ аз теоремаи исботкардашуда ва шарти масъала истифода бурда, таносуб тартиб медиҳем:

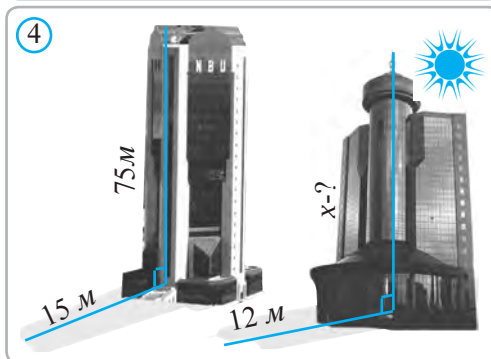
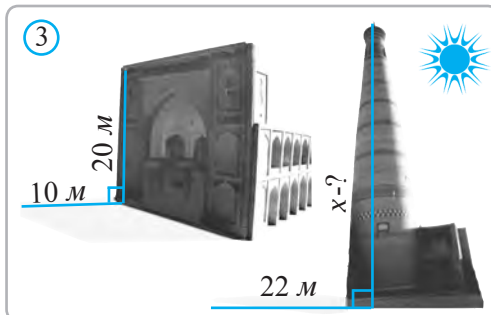
$$\frac{x}{15} = \frac{8}{12}$$

Аз ин баробарӣ $x = 10$ буданахро меёбем.

Ҷавоб: 10 см.

? Савол, масъала ва супориш

1. Проексияи порча дар хати рости додашуда чист?
2. Проексияҳои порчаҳои дар як хати рост ё ки хатҳои рости параллел хобида айнан ба як хати рост мутаносиб буданашонро исбот кунед.
3. Кунчи байни хатҳои рости a ва b ба 45° баробар аст. Дар хати рости a порчаи дарозияш 10 см буда AB гирифта шудааст. Проексияи порчаи AB -ро дар хати рости b ёбед.
4. Қуллаи порчаи AB аз хати рости l дар масофаҳои 9 см ва 14 см меҳобад. Агар порчаи AB хати рости l -ро бурида нагузарад ва $AB=13$ см бошад, проексияи AB дар хати рости l ёфта шавад.
5. Баландии биноҳои дар расми 3 ва 4 тасвирёфтaro дар асоси маълумотҳои додашуда ёбед.
6. Хати рост ва порчаи ба он параллел набуда кашед. Проексияи порчаро дар хати рост созед.
7. Дар ҳамвории координати нуктаҳои $A(2;3)$ ва $B(3;-4)$ дода шудаанд. Дарозии проексияи порчаи AB дар тирҳои координатӣ ёфта шавад.
8. Кунчи байни хатҳои рости a ва b α буданааш маълум, дар хати рости a порчаи AB гирифта шудааст. Проексияи порчаи AB дар хати рости b ёфта шавад.



53

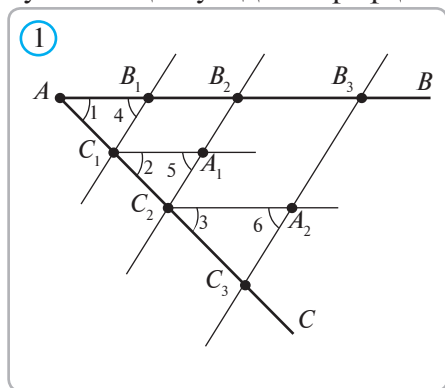
ХОСИЯТҲОИ ПОРЧАҲОИ МУТАНОСИБ

Хосияти асосии гардонидашудаи теоремаи Фалесро исбот мекунем.

Теорема. Хатҳои рости параллели (мувозии) ҳар ду тарафи кунҷро бурида гузашта, дар тарафҳои он порчаҳои мутаносиб ҷудо мекунад.

$\angle BAC$, $B_1C_1 \parallel B_2C_2 \parallel B_3C_3$ (расми 1)
 $\Rightarrow \frac{AB_1}{AC_1} = \frac{B_1B_2}{C_1C_2} = \frac{B_2B_3}{C_2C_3}$

Исбот. Аз нуқтаҳои C_1 ва C_2 хатҳои рости C_1A_1 ва C_2A_2 - и ба AB параллел мегузаронем. Дар ин ҳолат аз тарафи якум $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$ мешавад, чунки онҳо кунҷҳои мувофиқи хангоми хати рости AC бурида гузаштани хатҳои рости параллели AB , C_1A_1 ва C_2A_2 ҳосил шудаанд. Аз тарафи дуюм $\angle 4 = \angle 5 = \angle 6$, чунки онҳо кунҷҳои тарафҳои параллел.



Бинобар ин дар асоси аломати KK -и монандии секунҷаҳо $\triangle AB_1C_1 \sim \triangle C_1A_1C_2 \sim \triangle C_2A_2C_3$ мешавад.

Дар ин ҳол $\frac{AB_1}{AC_1} = \frac{C_1A_1}{C_1C_2} = \frac{C_2A_2}{C_2C_3}$ (1) ҳосил мекунем.

Бидуни ин чоркунҷаҳои $B_1C_1A_1B_2$ ва $B_2C_2A_2B_3$ — параллелограмм, чунки:

$B_1C_1 \parallel B_2C_2 \parallel B_3C_3$ — дар асоси шарт;

$AB \parallel C_1A_1 \parallel C_2A_2$ — мувофиқи сохтан.

Аз ҳамин сабаб тарафҳои муқобили ин параллелограммҳо баробаранд:

$$C_1A_1 = B_1B_2 \text{ ва } C_2A_2 = B_2B_3. \quad (2)$$

аз баробариҳои (1) ва (2) $\frac{AB_1}{AC_1} = \frac{B_1B_2}{C_1C_2} = \frac{B_2B_3}{C_2C_3}$ буданаш бармеояд.

Теорема исбот шуд.

Машқҳои амалӣ. Тақсим кардани порча ба нисбати додашуда

Порчаи додашуда a -ро ҳамин тавр ба чор қисм тақсим кунед, ки нисбати порчаҳо байни якдигар $m:n:k:l$ шавад.

Барои ин қадам ба қадам инҳоро иҷро мекунем:

Қадами 1. Кунҷи дилхоҳи тез кашида, ба як тарафи он порчаҳои дарозияшон $OA=m$, $AB=n$, $BC=l$ ва $CD=k$ -ро чун нишондоди расми 2 пай дар ҳам гузошта мебароем.

Қадами 2. Ба тарафи дуюми кунҷ ба порчаи додашудаи $a=OD_1$ -ро мегузорем.

Қадами 3. Нуқтаҳои D ва D_1 -ро пайваст мекунем.

Қадами 4. Аз нуқтаҳои A, B, C порчаҳои AA_1, BB_1 ва CC_1 -ро ба DD_1 параллел мегузаронем.

Дар асоси теоремаи болой порчаи додашудаи $a = OD_1$ бо нуқтаҳои A_1, B_1, C_1 ва D_1 дар нисбати $m:n:l:k$ тақсим мешавад.

Супориш: Ин тасдиқотро мустақилона асоснок кунед.

Супориши амалӣ. Сохтани порчаи чоруми мутаносиб.

Порчаҳои a, b ва c дода шудаанд, порчаҳои a ва b , c ва d мутаносиб буданашон маълум аст, яъне $a:b=c:d$ порчаи d -ро созед (расми 3).

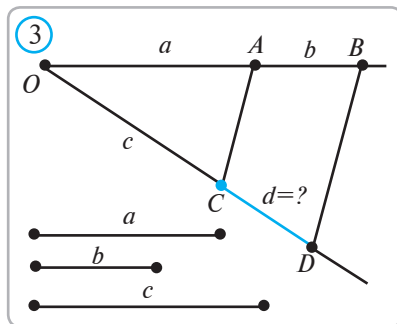
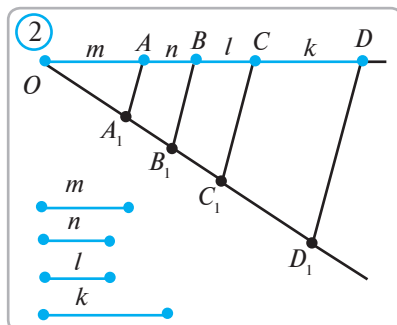
Қадами 1. Кунчи тези ихтиёрӣ кашида, дар як тарафи вай порчаҳои $OA=a$ ва $AB=b$ -ро чун нишондоди расми 3 мегузаронем.

Қадами 2. Ба тарафи дуумаш бошад, порчаи $OC=c$ -ро мегузаронем.

Қадами 3. Нуқтаҳои A ва C -ро мепайвандем.

Қадами 4. Аз нуқтаи B ба AC хати рости параллели BD -ро мегузаронем.

Супориш: CD порчаи талабкардашудаи d буданашро асоснок кунед.

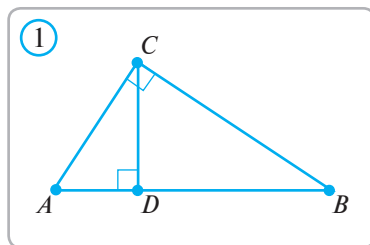


Савол, масъала ва супориш

- Порчаи дарозияш 42 см дода шудааст. Онро бо қисмҳои дар нисбати а) 5:2; б) 3:4:7; в) 1:5:1:7 буда тақсим кунед.
- Дар расм ҳар як қисм аз порчаи воҳидӣ иборат бошад, нисбати порчаҳои AB ва CD , EF ва MN , AC ва DF , AN ва CE , EN ва BM -ро ёбед.
- Агар а) $m = 4$ см, $n = 3$ см ва $l = 8$ см; б) $m = 2$ см, $n = 3$ см ва $l = 7$ см бошад, порчаи чоруми мутаносибро созед ва дарозии онро ёбед. Порчаи m, n ба порчаи l ва k мутаносиб.
- Периметри чоркунча 54 см ва тарафҳояш дар нисбати 3:4:5:6 бошад, ҳар як тарафи онро ёбед.
- Кунҷҳои чоркунча байни якдигар дар нисбати 3:4:5:6 бошад, ба чӣ баробар будани кунҷи хурди онро ёбед.
- Порчаҳои дарозияш ба 4, 5 ва 6 баробар дода шудааст. Порчаи дарозияш ба 4, 8 баробар созед.
- Яке аз тарафҳои чоркунчаи периметраш 60 см буда 15 см, тарафҳои боқимонда чун 2:3:4 нисбат доштани маълум. Тарафи калони онро ёбед.

54 ПОРЧАҲОИ МУТАНОСИБ ДАР СЕКУНЧАИ РОСТКУНЧА

Хосият. Баландии аз қуллаи кунчи рости секунҷаи росткунҷа гузаронидашуда онро ба ду секунҷаи монанд чудо мекунад.



Исбот. Секунҷаи ABC ва ACD секунҷаҳои росткунҷа буда, A ба онҳо кунчи умумӣ аст. Бинобар ин $\triangle ABC \sim \triangle ACD$. Хамин тавр, $\triangle ABC$ ва $\triangle CBD$ ҳам секунҷаи росткунҷа буда, барои онҳо кунчи $\angle B$ умумӣ аст. Аз ин ҷо, $\triangle ABC \sim \triangle CBD$.

Порчаҳои AD ва DC -и дар расми 1 тасвиршуда бо равиши мувофиқ проексияи дар гипотенуза будаи катетҳои AC ва BC мебошад.

Таъриф. Агар барои порчаҳои a, b ва c $a:b=b:c$ бошад, **порчаи мутаносиби** миёна байни порчаҳои a ва b меноманд.

Шарти мутаносиби миёнаро дар намуди $b^2 = ac$ ё ки $b = \sqrt{ac}$ ҳам навиштан мумкин. Ба хосияти дар боло исбот кардашуда асоснок кардани шавем, теоремаи зерини дар бораи порчаҳои мутаносибӣ буда бо осонӣ исбот карда мешавад:

Теоремаи 1. Баландии аз қуллаи кунчи рости секунҷаи росткунҷа гузаронидашуда байни проексияи катетҳо дар гипотенуза мутаносиби миёна мешавад.

Дар ҳақиқат, дар асоси хосияти исбот кардашуда: $\triangle ACD \sim \triangle CBD$. Аз ин

$$\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD} \Rightarrow CD^2 = AD \cdot BD \Rightarrow CD = \sqrt{AD \cdot BD}.$$

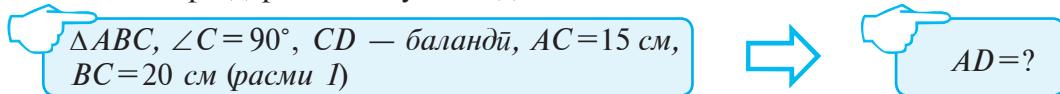
Теоремаи 2. Катети секунҷаи росткунҷа байни гипотенуза ва проексияи хамин катет дар гипотенуза мутаносиби миёна аст (расми 1).

Дар ҳақиқат, дар асоси хосияти исбот кардашуда: $\triangle ABC \sim \triangle ACD$. Аз ин

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD} \Rightarrow AC^2 = AB \cdot AD \Rightarrow AC = \sqrt{AB \cdot AD} \quad \text{монандӣ}$$

Хамин $BC = \sqrt{BD \cdot AB}$ буданаширо исбот кардан мумкин.

Масъала. Проексияи катети хурди секунҷаи росткунҷаи катетҳояш 15 см ва 20 см -ро дар гипотенуза ёбед.



Ҳалли он. 1) Аз теоремаи Пифагор истифода бурда гипотенузаи секунҷаи росткунҷаро меёбем: $AC^2 = AC^2 + BC^2 = 15^2 + 20^2 = 625$, яъне $AB = 25$ см.

2) Аз теоремаи дуюм истифода бурда AD -ро меёбем:

$$AC^2 = AB \cdot AD \Rightarrow AD = \frac{AC^2}{AB} = \frac{15^2}{25} = 9 \text{ (см)}. \quad \textbf{Ҷавоб: 9 см.}$$

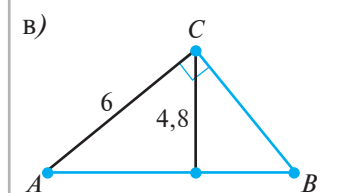
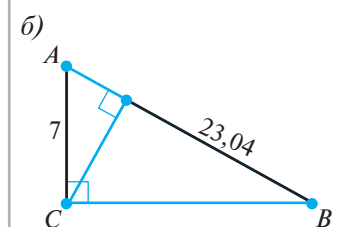
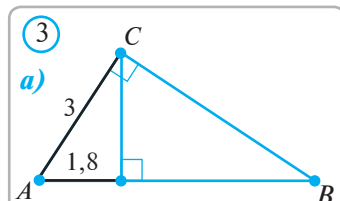
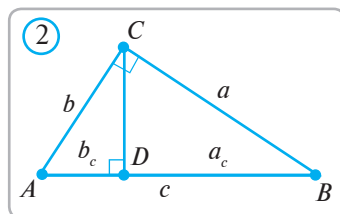
Аз ин ду теорема ба сифати натиҷа **исботи ҳуди Пифагор навишта монда**, аз теоремаи Пифагор бармеояд (расми 1). Дар ҳақиқат, дар асоси теоремаи 2

$$\left. \begin{array}{l} AC^2 = AD \cdot AB \\ BC^2 = BD \cdot AB \end{array} \right\} \Rightarrow AC^2 + BC^2 = AD \cdot AB + BD \cdot AB = AB \cdot (\underbrace{AD + BD}_{AB}) = AB \cdot AB = AB^2.$$

Ҳамин тавр, $AC^2 + BC^2 = AB^2$.

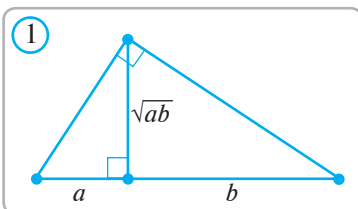
? Савол, масъала ва супориш

1. Исбот кунед (расми 2):
 - а) $\triangle ACD \sim \triangle CBD \sim \triangle ABC$;
 - б) $b^2 = b_c \cdot c$, $a^2 = a_c \cdot c$; **в)** $h_c^2 = a_c \cdot b_c$.
2. Баландии ба гипотенузаи секунҷаи росткунҷа гузаронидашуда онро ба порчаҳои 9 см ва 16 см чудо мекунад. Тарафҳои секунҷаро ёбед.
3. Гипотенузаи секунҷаи росткунҷа 15 см, яке аз катетҳояш ба 9 см баробар аст. Проексияи катети дуюм дар гипотенузаро ёбед.
4. Дар асоси маълумотҳои расми 3 тарафҳои секунҷаи ABC -ро ёбед.
- 5*. Нисбати проексияҳои катетҳои секунҷаи росткунҷа дар гипотенузаро ёбед, агар катетҳо чун 4:5 нисбат дошта бошанд.
- 6*. Секунҷаи росткунҷаи нисбати катетҳояш 3:2 буда дода шудааст. Проексияҳои катетҳо дар гипотенуза яке аз дигаре 6 см зиёд аст. Масоҳати секунҷаро ёбед.
7. Масоҳати секунҷаи росткунҷаи проексияи катетҳояш дар гипотенуза 2 см ва 18 см буда ёфта шавад.
- 8*. Дар секунҷаи ABC $\angle C = 90^\circ$, CD — баландӣ, CE — биссектриса ва $AE:EB = 2:3$ нисбатҳои а) $AC:BC$; б) $S_{ACE}:S_{BCE}$; в) $AD:BD$ ёфта шавад.



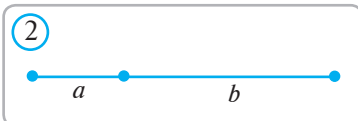
55

БО ДУ ПОРЧАИ ДОДАШУДА СОХТАНИ ПОРЧАИ МУТАНОСИБИ МИЁНА



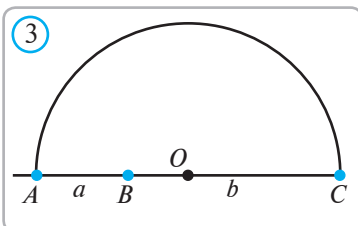
Дида будем, ки дар секунҷаи росткунҷа баландии аз кунҷи рост гузаронида шуда гипотенузро ба ду қисмҳои a ва b чудо кунад, баландӣ ба $\sqrt{ab}$ баробар мешавад (*расми 1*).

Пас, Барои ду порчаи додашуда сохтани порчаи мутаносиби миёна:



1) дарозии гипотенуза ба $a+b$ баробар (*расми 2*);

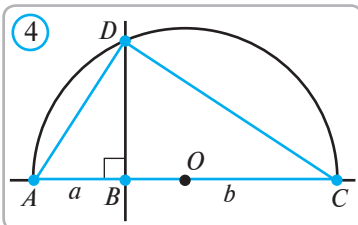
2) сохтани секунҷаи росткунҷаи баландии аз кунҷи росташ гузаронидашуда, ки гипотенузро ба қисмҳои a ва b тақсим мекунад, ки ғоя аст.



Барои ин аз маркази давраи ба секунҷаи росткунҷа берун кашидашуда дар миёнаҳои гипотенуза буданаш истифода мебарем (*расми 3*).

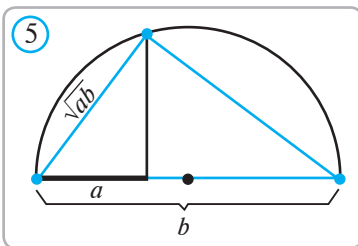
Сохтан:

1) Хати росте кашида, дар он $AB=a$ ва $BC=b$ карда нуқтаҳои A , B ва C -ро ишорат мекунем (*расми 3*).



2) Миёнаҳои порчаи AC нуқтаи O -ро меёбем. Нимдавраи диаметраш AC ва марказаш нуқтаи O -ро месозем (*расми 3*).

3) Аз нуқтаи B ба хати рости AC хати рости перпендикуляр мегузаронем (*расми 4*). Ин хати рост нимдавранро дар нуқтаи D бурида гузашта бошад. Он гоҳ $\triangle ADC$ — секунҷаи росткунҷа, $BD = \sqrt{ab}$ — порчае сохтанамон лозим буд, мешавад. **Сохтан иҷро карда шуд.**



Ҳангоми сохтани порчаи мутаносиби миёна аз катети секунҷаи росткунҷа, ки бо гипотенуза ва байни проексияи ҳамин катет дар гипотенуза мутаносиби миёна аст, истифода бурдан мумкин (*расми 5*).

? Савол, масъала ва супориш

1. Порчаҳои дарозияшон a ва b дода шудаанд. Порчаи дарозияш $\sqrt{ab}$ -ро созад.

2. Порчаҳои дарозиашон баробарии a ва b дода шудаанд. Аз теоремаи Пифагор истифода бурда, порчаҳои дарозиаш

а) $\sqrt{a^2 + b^2}$; б) $\sqrt{a^2 - b^2}$ бударо созед.

3. Порчаи дарозиаш баробарии 1 дода шудааст. Порчаҳои дарозиаш а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{3}$; в) $\sqrt{5}$; г) $\sqrt{6}$; д) $\sqrt{18}$; е) $\sqrt{30}$ -ро созед.

4. Дар асоси маълумотҳои расми 6 масоҳати секунҷаи ABC ёфта шавад.

5. Аз нуқтаи C -и давра ба диаметри AB перпендикуляр CD фуруварда шудааст. Агар $CD = 12$ см, $AD = 24$ см бошад, масоҳати доираро ёбед.

6. Масоҳати секунҷаи дар масъалаи болоӣ гирифташудаи ABC -ро ёбед.

7. Биссектрисаи кунҷи рости секунҷаи росткунҷа гипотенузаро дар нисбати 5:3 тақсим мекунад. Нисбати порчаҳои дар гипотенуза ҷудо кардани баландии аз кунҷи рост ба гипотенуза гузаронидашударо ёбед.

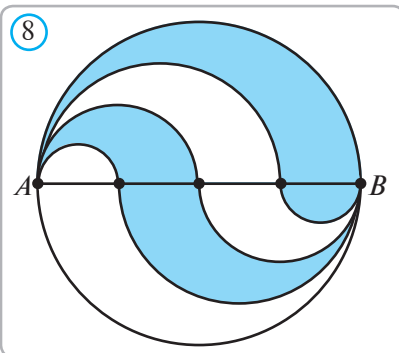
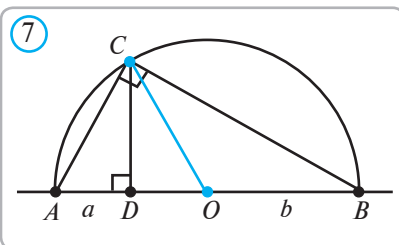
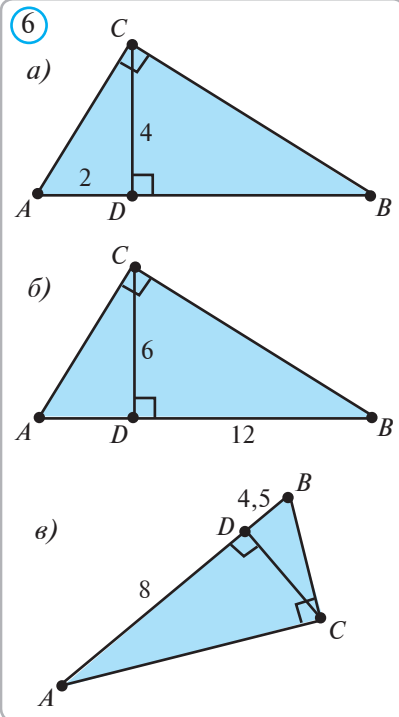
8. Ба доираи радиусаш 8 см секунҷаи росткунҷаи яке аз кунҷаш 30° буда дарун кашида шудааст. Қисми аз секунҷа берунии доира аз 3 сегмент иборат аст. Масоҳати ин сегментҳоро ёбед.

- 9*. Дар расми 7 $AD = a$, $DB = b$, бинобар ин $OC = \frac{a+b}{2}$ (O — маркази давра). Аз расм истифода бурда, нобаробарии $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ -ро исбот кунед.



Масъалаи шавқовар

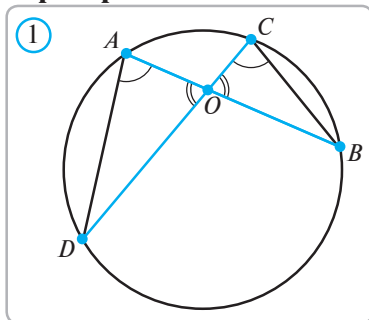
Диаметри давра AB ба чор қисми баробар тақсим карда ва чун нишондоди расми 8 нимдавраҳо сохта шуд. Агар $AB = d$ бошад, масоҳати ҳар як шакли дар расм ранг карда нишон додашударо ҳисоб кунед.



56

ПОРЧАҲОИ МУТАНОСИБ ДАР ДАВРА

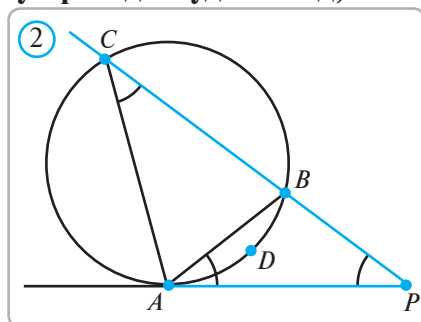
Теоремаи 1. Хордаҳои давра AB ва CD дар нуқтаи O бурида шаванд, баробарии $AO \cdot OB = CO \cdot OD$ ҷой дорад.



Исбот. Хордаҳои AB ва CD дар тартиби нишон додашуда ҷойгир шуда бошанд (расми 1). Нўғҳои онҳоро бо хордаҳои AD ва BC пайваست мекунем. Он гоҳ кунҷҳои BAD ва BCD ба як камон таъя мекунанд, бинобар ин $\angle BAD = \angle BCD$. Боз равшан аст, ки $\angle AOD = \angle BOC$. Аз ин ду баробарӣ дар асоси аломати КК монандии секунҷаҳои AOD ва COB бармеояд. Тарафҳои мувофиқи секунҷаҳои монанд бошад, мутаносибанд: $\frac{OD}{OB} = \frac{AO}{CO}$

ё ки $AO \cdot OB = CO \cdot OD$. **Теорема исбот шуд.**

Теоремаи 2. Агар аз нуқтаи соҳаи берунии давра P ба давра расандаи PA (A -нуқтаи расиш) ва хати рости давраро дар ду нуқтаи B ва C бурида гузаронида шуда бошад, $PA^2 = PB \cdot PC$ мешавад.



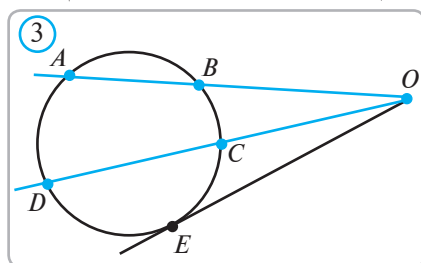
Исбот. Секунҷаҳои ABP ва CPA -ро дида мебароем (расми 2). Дар он,

$\angle C = \frac{ADB}{2} = \angle BAP$ ва $\angle P$ — барои ин секунҷаҳои кунҷи умумӣ. Бинобар ин, секунҷаҳои ABP ва CPA аз рӯи ду кунҷашон монанд аст.

$$\frac{PA}{PC} = \frac{PB}{PA} \quad \text{ё ки} \quad PA^2 = PB \cdot PC.$$

Теорема исбот шуд.

Масъала. Нуқтаҳои A , B , C ва D давраро ба камонҳои AB , BC , CD ва AD тақсим мекунад. Агар нурҳои AB ва DC дар нуқтаи O бурида шаванд, дар ин ҳол $OA \cdot OB = OC \cdot OD$ ҷой доштанаширо исбот кунед.

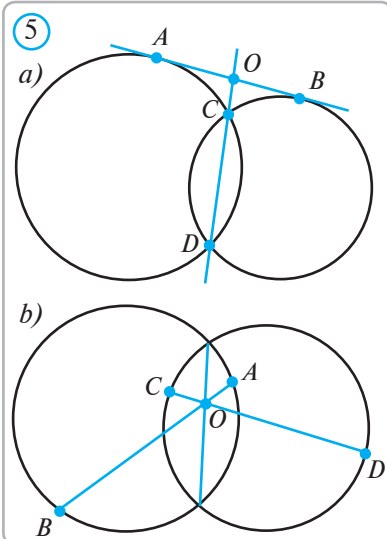
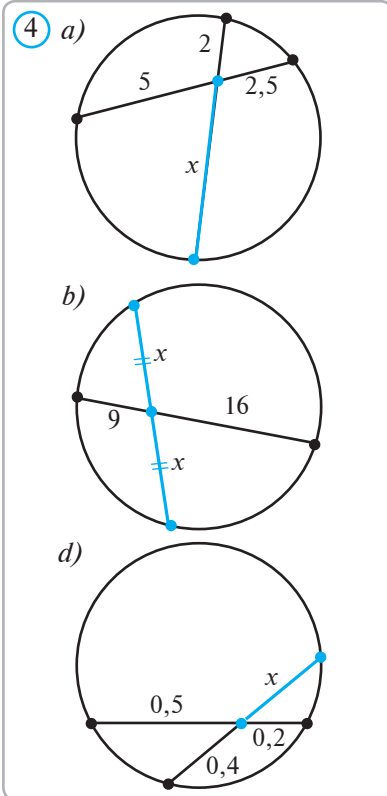


Ҳалли он. Ба шарти масъала нақшаи мувофиқ мекашем (расми 3) ва аз нуқтаи O расандаи OE мегузаронем. Он гоҳ мувофиқи теоремаи 2,

$$\begin{cases} OB \cdot OA = OE^2 \\ OC \cdot OD = OE^2 \end{cases} \Rightarrow OA \cdot OB = OC \cdot OD.$$

? Савол, масъала ва супориш

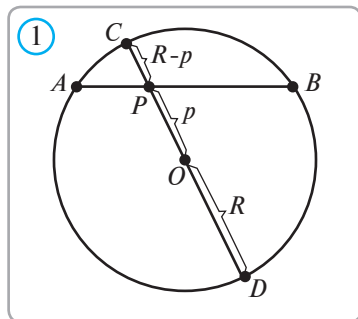
1. Порчаи номаълуми бо x ишорат кардашудаи расми 4-ро ёбед.
2. Аз нуқтаи A ба давра расандаи AB (B — нуқтаи расиш) ва бурандаи давра дар нуқтаҳои C ва D гузаронида шудааст. Агар
 - а) $AB = 4$ см, $AC = 2$ см, бошад, порчаи AD ;
 - б) $AB = 5$ см, $AD = 10$ см бошад, порчаи AC ;
 - в) $AC = 3$ см, $AD = 2,7$ см бошад, порчаи AB -ро ёбед.
3. Ба давра чоркунҷаи $ABCD$ дарун кашида шудааст. Нурҳои AB ва CD дар нуқтаи O бурида мешаванд. Агар
 - а) $AO = 10$ дм, $BO = 6$ дм, $DO = 15$ дм бошад, порчаи OC ;
 - б) $CD = 10$ дм, $OD = 8$ дм, $AB = 4$ дм бошад, порчаи OB -ро ёбед.
4. Диаметри давра AB ва хордаи CD ба ин диаметр перпендикуляр дар нуқтаи E бурида мешаванд. Агар $AE = 2$ см, $EB = 8$ см бошад, хордаи CD -ро ёбед.
5. Порчаҳои AB ва CD дар нуқтаи O бурида мешаванд. Агар $AO \cdot OB = BO \cdot OD$ бошад, исбот кунед, ки нуқтаҳои A, B, C ва D дар як давра меҳобанд.
6. Аз маркази давраи радиусаш 13 дм дар дурии 5 дм нуқтаи P гирифта шудааст. Аз нуқтаи P хордаи $AB = 25$ дм гузаронида шудааст. Порчаи AP ва PB -ро ёбед.
7. Аз монанд будани секунҷаҳои AOD ва BOC - и дар расми 3 тасвирёфта истифода бурда, баробарии $AO \cdot OB = CO \cdot OD$ -ро исбот кунед.
- 8*. Дар асоси маълумотҳои расми 5 баробарии $AO \cdot OB = CO \cdot OD$ -ро исбот кунед.
- 9*. Ду давра дар нуқтаи C расанда мебошад. Хати рости AB ба давраи якум дар нуқтаи A ва ба давраи дуюм дар нуқтаи B расанда мебошад. $\angle ACB = 90^\circ$ буданаширо исбот кунед.



57

ҲАЛЛИ МАСЪАЛАҲО

Дар дарсҳои пешина хосиятҳои бурандаҳо ва хордаҳои давраро исбот карда будем. Акнун бо баъзе ҳолатҳои хусусии ин хосиятҳо шинос мешавем.



Масъалаи 1. Нуқтаи P аз маркази давраи радиусаш R , дар масофаи p дар соҳаи дохилии он ҷойгир шуда бошад. Он гоҳ барои хордаи дилҳои AB -и аз нуқтаи P гузаранда баробарии

$$AP \cdot PB = R^2 - p^2 \quad (1)$$

ҷой доштанастро исбот кунед.

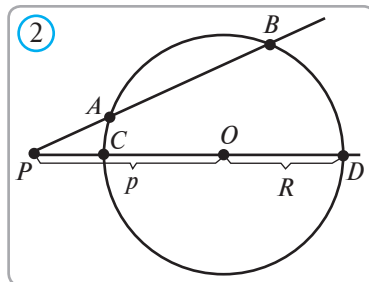
Ҳалли он. Аз нуқтаи P диаметри давра CD -ро мегузаронем. Он гоҳ, $PC = R - p$, $PD = R + p$ (расми 1). Дар асоси теорема дар бораи хордаҳои буранда

$$AP \cdot PB = CP \cdot PD = (R - p)(R + p) = R^2 - p^2. \quad \text{Баробарӣ исбот шуд. (1)}$$

Масъалаи 2. Аз маркази O -и давраи радиусаш 6 см дар масофаи 4 см нуқтаи P гирифта шуд. Аз нуқтаи P хордаи AB гузаронида шуд. Агар $AP = 2$ см бошад, порчаи PB -ро ёбед.

Ҳалли он. Мувофиқи шарти масъала $R = 6$ см, $d = 4$ см, $AP = 2$ см. Дар ин ҳол мувофиқи баробарии (1) $2 \cdot PB = 6^2 - 4^2 = 36 - 16 = 20$.

Аз ин, $PB = 10$ см. **Ҷавоб:** $PB = 10$ см.



Масъалаи 3. Нуқтаи P дар соҳаи берунии давраи радиусаш R аз маркази он дар масофаи p ҷойгир шуда бошад. Он гоҳ барои хати рости дилҳои бурандаи давра дар нуқтаҳои A ва B аз нуқтаи P гузаранда баробарии

$$PA \cdot PB = p^2 - R^2 \quad (2)$$

ҷой доштанастро исбот кунед.

Ҳалли он. Хати рости аз маркази давра O гузарандаи PO бо давра дар нуқтаҳои C ва D (расми 2) бурида шавад. Он гоҳ, дар асоси шарт $PC = p - R$, $PD = p + R$ аст. Дар асоси теоремаи бурандаҳои аз нуқтаҳои беруни соҳаи давра гузаранда

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD = (p - R)(p + R) = p^2 - R^2.$$

Ҳамин тавр, баробарии (2) исбот шуд.

Масъалаи 4. Хати рости аз нуқтаи P гузаранда, ки аз маркази давраи радиусаш 7 см дар масофаи 13 см воқеъ аст, давраро дар нуқтаҳои A ва B

мебурад. Агар $PA=10$ см бошад, хордаи AB -ро ёбед.

Ҳалли он. Мувофиқи шарт $R=7$ см, $d=13$ см. Дар ин ҳол мувофиқи формулаи (2).

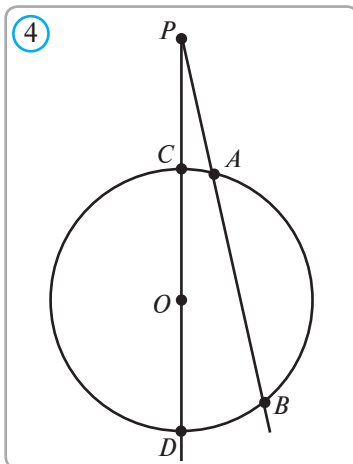
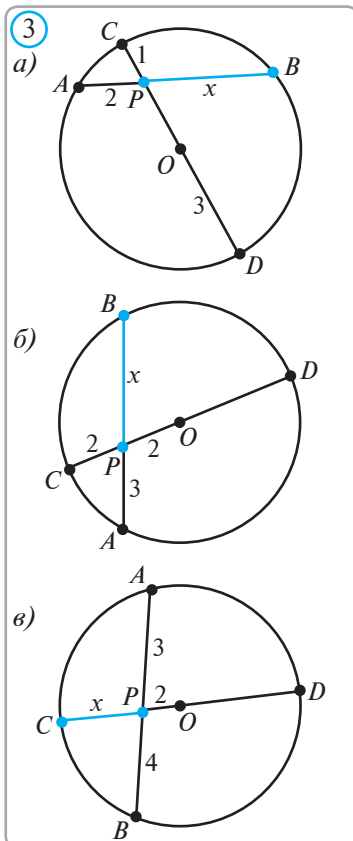
$$PA \cdot PB = p^2 - R^2 = 13^2 - 7^2 = 169 - 49 = 120.$$

$$\text{Аз ин, } PB = \frac{120}{PA} = \frac{120}{10} = 12 \text{ (см). Бинобар ин,}$$

$$AB = PB - PA = 12 - 10 = 2 \text{ (см). } \textbf{Ҷавоб: 2 см.}$$

? Савол, масъала ва супориш

1. Аз маркази давраи радиусаш 5 см дар дурии 3 см нуқтаи P гирифта шудааст. Хордаи AB аз нуқтаи P мегузарад. Агар $PA=2$ см бошад, дарозии хордаи AB ёфта шавад.
2. Аз маркази давраи радиусаш 5 м буда дар дурии 7 м нуқтаи P гирифта шудааст. Хати ростии аз нуқтаи P гузаранда давраро дар нуқтаи A ва B мебуранд. Агар $PA=4$ м бошад, дарозии хордаи AB -ро ёбед.
3. Дар асоси маълумотҳои расми 3 порчаи бо x ишорат кардашударо ёбед (O — маркази давра).
4. Аз расми 4 истифода бурда, масъаларо ҳал намоед. Дар ин чо
а) $PC=5$ дм, $OD=7$ дм, $AB=2$ дм, $PA=?$
б) $PA=5$ дм, $AB=4$ дм, $PC=3$ дм, $OD=?$
5. Хордаҳои давра $AB=7$ см ва $CD=5$ см дар нуқтаи P бурида мешаванд. Агар $CP:PD=2:3$ бошад, нуқтаи P хордаи AB -ро дар кадом нисбат мебурад?
6. Аз нуқтаи C -и давра ба диаметр AB перпендикуляри CD гузаронида шудааст. Агар $AD=2$ см, $DB=18$ см бошад, порчаи CD -ро ёбед.
- 7*. Диагоналҳои чоркунҷаи ба давра дарункашидашудаи $ABCD$ дар нуқтаи K якдигарро мебуранд. Агар $AB=2$, $BC=1$, $CD=3$ ва $CK:KA=1:2$ бошад, порчаи AD -ро ёбед.
- 8*. Дар чоркунҷаи ба давра дарункашидаи $ABCD$ $AB:DC=1:2$ ва $BD:AC=2:3$ бошад, нисбати $DA:BC$ -ро ёбед.



I. Тестҳо

1. Тасдиқоти нодурустро дар бораи баландии секунҷаи росткунҷаи ба гипотенуза гузаронидашуда нишон диҳед.
А. Аз катетҳо хурд;
Б. Секунҷаро ба ду секунҷаи монанд чудо мекунад;
В. Дар байни проексияи катетҳо дар гипотенуза мутаносиби миёна;
Г. Ба нисфи гипотенуза баробар аст.
2. Хордаҳои AB ва CD дар нуктаи O бурида мешаванд. Тасдиқоти нодурустро нишон диҳед.
А. $\angle DAB = \angle DCB$; Б. Секунҷаҳои AOD ва COB монанд;
В. $AO \cdot OB = CO \cdot OD$; Г. $AO = CO$.
3. Тасдиқоти дурустро ёбед:
А. Проексияи порчаҳои баробар ҳам баробаранд;
Б. Проексияи порчаи калон аст;
В. Проексияи порчаҳои баробари як хати рост баробаранд;
Г. Дарозии проексия ба дарозии порчаи проексияшаванда баробар аст.
4. Баландии секунҷаи росткунҷаи ба гипотенуза гузаронидашуда онро ба ду секунҷа чудо мекунад. Ин секунҷаҳо:
А. Баробар; Б. Баробарандоза; В. Монанд; Г. Баробарпахлу.
5. Мутаносиби миёнаи порчаҳои дарозиашон a ва b ба чӣ баробар аст?
А. $a + b$; Б. $\sqrt{ab}$; В. $\frac{a+b}{2}$; Г. $a:b$.
6. Чоркунҷаи $ABCD$ ба давраи марказаш O дарун кашида шудааст. Тасдиқоти нодурустро нишон диҳед:
А. $\triangle AOB \sim \triangle COD$; Б. $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$;
В. $AO \cdot OB = CO \cdot OD$; Г. $AB \cdot CD = BC \cdot AD$.

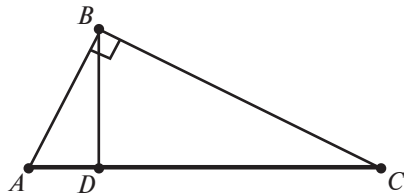
II. Масъалаҳо

1. Нисбати катетҳои секунҷаи росткунҷа ба 3:4 баробар аст. Гипотенузаи ин секунҷа 50 см баландии аз кунҷи рости секунҷаи росткунҷа гузаронидашуда гипотенузаро ба порчаҳои дарозиашон чӣ гуна буда чудо мекунад?
2. Хордаҳои давра AB ва CD дар нуктаи E бурида мешаванд. Агар $AE=5$ см, $BE=2$ см ва $EC=2,5$ см бошад, ED -ро ёбед.
3. Нуктаи K аз Маркази давраи радиусаш 6 м дар масофаи 10 м дурӣ гирифта ва аз нуктаи K ба давра расанда гузаронида шуд. Масофаи байни нуктаи расиши расанда P ва нуктаи K -ро ёбед.
4. Дар секунҷаи ABC $\angle C=90^\circ$ ва баландии $CD = 4,8$ дм. Агар $AD=3,6$ дм бошад, тарафи AB -ро ёбед.

5. Хордаҳои давра AB ва CD дар нуқтаи O бурида мешаванд. Агар $AO=6$, $OB=4$ ва $CO=3$ бошад, порчаи OD -ро ёбед.
6. Дар давра нуқтаҳои A, B, C, D дода шудаанд. Нурҳои BA ва CD дар нуқтаи O бурида мешаванд. Агар $OA=5$, $AB=4$, $OD=6$ бошад, хордаи DC -ро ёбед.
7. Дар хати ростии ба давра дар нуқтаи B расанда нуқтаи A гирифта шуд. Агар $AB=12$ ва масофаи қўтоҳтарин аз нуқтаи A то давра 8 бошад, радиуси давраро ёбед.
8. Дар нимдавра аз нуқтаи C перпендикуляри ба диаметр AB гузаронида CD порчаи AB -ро ба қисмҳои баробари 4 ва 9 ҷудо мекунад. Порчаи CD -ро ёбед.
9. Баландии секунҷаи росткунҷа гипотенузаро ба порчаҳои баробари 3 дм ва 12 дм ҷудо мекунад. Масоҳати секунҷаро ёбед.
10. Дар хордаи AB -и давраи марказаш O ва радиусаш 5 см нуқтаи D гирифта шудааст. Агар $AD=2$ см, $DB=4,5$ см бошад, порчаи OD -ро ёбед.
11. Дар хати ростии давраи марказаш O ва радиусаш 5 м-ро дар нуқтаҳои A ва B буридагузаранда нуқтаи P гирифта шудааст. Агар $PA=5$ м, $AB=2,8$ м бошад, масофаи OP -ро ёбед.
12. Ҷор хати ростии параллел дода шудаанд. Онҳо тарафҳои кунҷро дар нуқтаҳои A ва A_1 , B ва B_1 , C ва C_1 инчунин D ва D_1 мебуранд. Дар он нуқтаҳои A, B, C, D дар як тарафи кунҷ меҳобад. Агар $AB=8$, $CD=12$ ва $C_1D_1=9$ бошад, порчаи A_1B_1 ёфта шавад.
13. Давра ба кунҷ дарункашида шудааст. Агар масофаи аз қуллаи кунҷ то давра ба радиус баробар бошад, бузургии кунҷро ёбед.
14. Аз нуқтаи B диаметри AB -и давра расандаи BC ва бурандаи AC гузаронида шудааст. AC бо давра дар нуқтаи D бурида мешавад. Агар $AD=DC$ бошад, кунҷи CBD -ро ёбед.
15. Нисбати катетҳои секунҷаи росткунҷа 2:3 аст. Баландии ба гипотенуза гузаронидашуда онро ба ду секунҷа ҷудо мекунад. Нисбати масоҳатҳои онҳоро ёбед.

III. Худатонро санҷида бинед (кори намунавии назоратӣ)

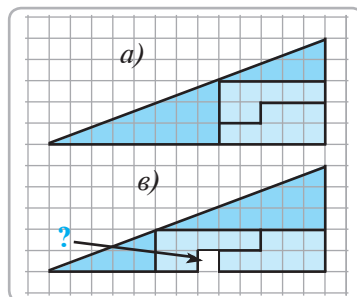
1. Аз нуқтаи берунии давра ба давра расанда гузаронида шудааст. Аз нуқтаи берун аз давра масофаи қўтоҳтарин то давра 2 см, масофа то нуқтаи расиш 6 см аст. Радиуси давраро ёбед.
2. $\triangle ABC$ секунҷаи росткунҷа, $AD=9$ дм, $DC=16$ дм бошад, радиуси ба ин секунҷа давраи дарун кашидашударо ёбед.



3. Аз нуқта ба хати рост ду моил гузаронида шудааст. Агар моилҳо дар нисбати 1:2 буда, проексияи онҳо 1 м ва 7 м бошад, дарозии моилҳоро ёбед.
- 4.* (Машқи иловагӣ) Порчаҳои PQ ва аз он дарози ET дода шудаанд. Ҳамин гуна чоркунҷаи $ABCD$ созед, ки, $AB=BC=PQ$; $BD=ET$ шуда, дар буриши диагоналҳо барои нуқтаи O $AO \cdot OC=BO \cdot OD$ чой дошта бошад.

Масъалаи шавқовар

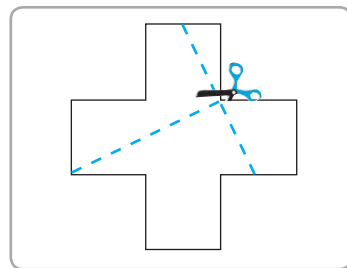
Секунча чун дар расми a нишон додашуда ба чор хисса чудо карда шуда ва чун дар расми b нишон додашуда аз дигар ин хиссаҳоро ҷамъ намуданд. Гӯед, ки, ин квадрати зиёдатӣ аз кучо пайдо шуд?



Хочи Юнон

Пеш аз эраи мо дар солҳои 500-ум шакли дар расми 4 тасвир ёфта, ба сифати рамзи ҳаёт ба рӯи нон кашида шудааст.

Ин шаклро ба коғази ғафс кашида, онро аз рӯи хатҳои дар расм нишон додашуда буред. Аз қисмҳои ҳосилшуда ба сохта шудани квадрат боварӣ ҳосил кунед.



БОБИ V



ТАКРОР КУРСИ ПЛАНИМЕТРИЯ

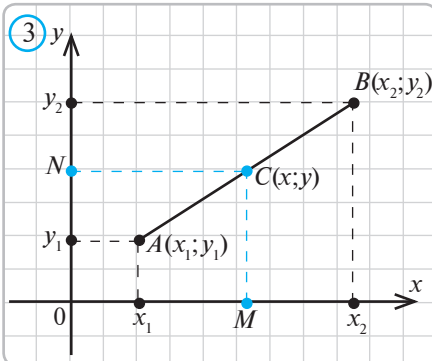
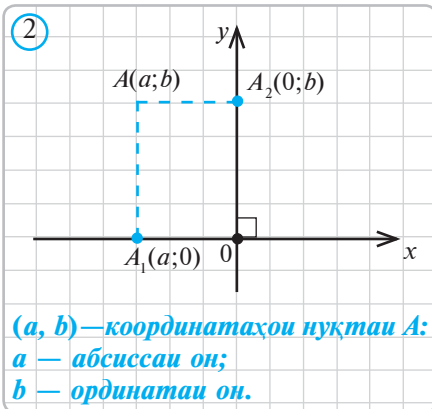
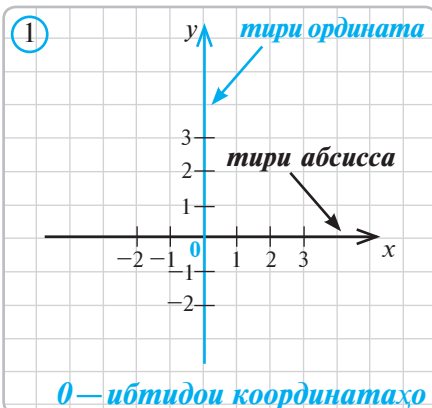
Дар натиҷаи омӯзиши ин боб Шумо ба дониш ва малакаи амалии зерин соҳиб мешавед:

- ✓ ба хотир овардани мавзӯҳои гузашта доир ба қисми планиметрияи геометрия;
- ✓ мустаҳкам намудани дониш, маҳорат ва малакаи доир ба курси планиметрияи азхудкардашуда;
- ✓ тайёрии дидан ба кори назоратии ҷамъбасти.

59

УСУЛИ КООРДИНАТАҲО

Дар бораи системаи координатаҳои росткунча дар ҳамворӣ номгузории тирҳо, ишораи координатаҳои нуқта дар курси «Алгебра» барои синфи 7-ум ҳам маълумотҳо дода шудаанд (*расмҳои 1 ва 2*). Дар поён масъалаҳои геометрии доири ҳамин мавзӯро баррасӣ мекунем.



Масъалаи 1. Дар ҳамвори координатаҳо бигузор порчаи AB , ки нӯғояш дар чор-яки якуми он мебошад, дода шуда бошанд: $A(x_1; y_1)$ ва $B(x_2; y_2)$, $x_1 > 0$, $y_1 > 0$, $x_2 > 0$, $y_2 > 0$ (*расми 3*). Миёнаи порчаи AB — координатаҳои нуқтаи $C(x, y)$ -ро ёбед.

Ҳалли он. Дар ин ҳолат порчаи CN хати миёнаи трапетсияи дарозии асосҳояш x_1 ва x_2 буда, порчаи CM бошад, хати миёнаи трапетсияи дарозии асосҳояш y_1 ва y_2 мешавад.

Мувофиқи хосияти хати миёнаи трапетсия

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad (1)$$

мешавад.

Дурустии ин формуларо бо дигар ҳолатҳои порчаи AB ҳам ба монанди ин нишон додан мумкин аст.

Масъалаи 2. Чоркунҷаи $ABCD$ -и кулла-хояш дар нуқтаҳои $A(-1; -2)$, $B(2; -5)$; $C(1; -2)$, $D(-2, 1)$ буда параллелограмм буданашро исбот кунед.

Ҳалли он. Аз формулаи (1) истифода бурда, координатаҳои миёнаҳои диагоналҳои чоркунҷаи AC ва BD -ро меёбем:

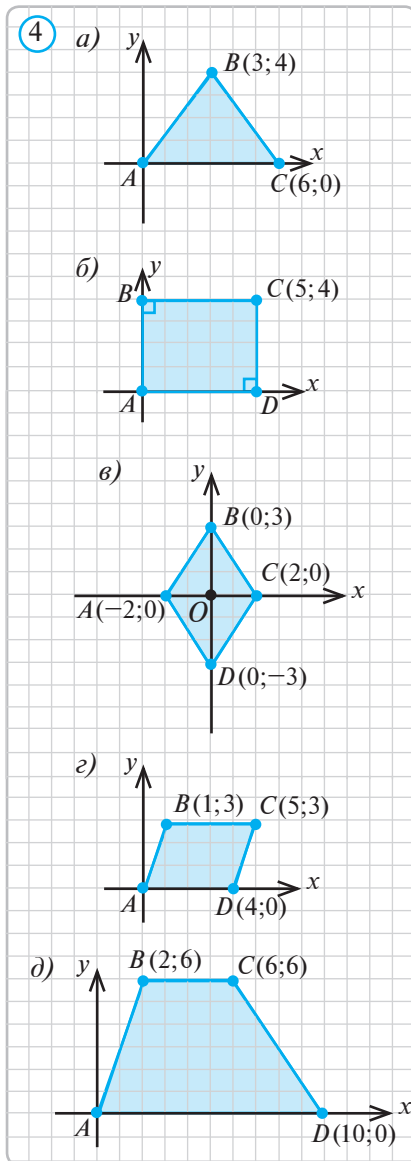
$$AC: \quad x = \frac{-1+1}{2} = 0, \quad y = \frac{-2+(-2)}{2} = -2;$$

$$BD: \quad x = \frac{2+(-2)}{2} = 0, \quad y = \frac{-5+1}{2} = -2.$$

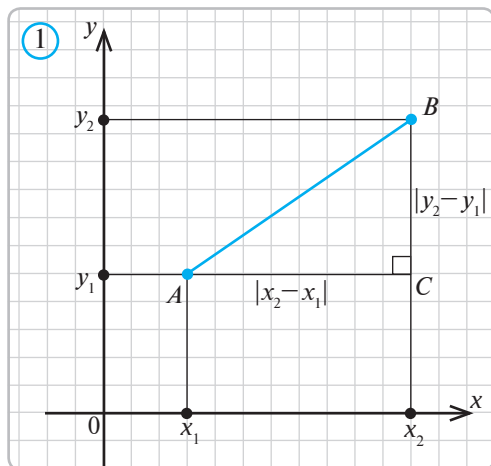
Аз ин мебарояд, ки миёнаҳои ҳар ду диагонали чоркунҷаи $ABCD$ дар як нуқта $(0; -2)$ будааст. Яъне диагоналҳои чоркунҷаи $ABCD$ дар нуқтаи $(0; -2)$ бурида мешаванд ва дар ин нуқта ба ду қисми баробар тақсим мегарданд. Ин бошад, чоркунҷаи $ABCD$ параллелограмм буданаширо нишон медиҳад.

? Савол, масъала ва супориш

1. Масоҳатҳои бисёркунҷаҳоро ёбед (расми 4).
2. Хордаи дарозияш 8 см дар давра камони 90° -ро чудо мекунад. Масофа аз маркази давра то хордаро ёбед.
3. Масоҳати секунҷаи тарафҳояш: а) 5,5 ва 6; б) 17,65 ва 80-ро ёбед.
4. Радиуси давраи ба секунҷаи тарафҳояш: а) 13,13,12; б) 35,29,8 дарункашидашударо ёбед.
5. Агар
а) $A(1; -2)$, $B(5; 6)$;
б) $A(4; -3)$, $B(1; 2)$;
в) $A(-4; 5)$, $B(2; 3)$;
г) $A(-0,7; 2)$, $B(-0,3; 4,2)$ бошад, координатаҳои миёнаҳои порчаро ёбед.
- 6*. Агар $A(1; 0)$, $B(2; 3)$, $C(3; 2)$ бошад, координатаи куллаи D -и параллелограмми $ABCD$ -ро ёбед.
- 7*. Иббот кунед, ки нуқтаи буриши биссектрисаҳои кунҷҳои параллелограмм куллаҳои росткунҷа аст.
8. Радиусҳои давраҳои ба секунҷаи росткунҷаи катетҳояш 40 см ва 30 см дарун ва берункашидашударо ёбед.
9. Секунҷаи чоркунҷаи давраи дарункашидашуда $2:3:4$ нисбат доранд. Кунҷҳои онро ёбед.
10. Хордае, ки камони 60° будаи давраи радиусаш 6 см-ро кашида меистад, ёбед.
11. Масофаи байни марказҳои давраҳои радиусашон 6 см ба $6\sqrt{2}$ см баробар аст. Дарозии хордаи умумии давраҳоро ёбед.



Масъалаи 1. Масофаи байни нуқтаҳои $A(x_1; y_1)$ ва $B(x_2; y_2)$, ки дар ҳам-
вории координати дода шудаанд, бо формулаи $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ ҳисоб
карда шуданахро нишон диҳед.



Ҳалли он. Бигузор, нуқтаҳои A ва B чун нишондоди расми 1 чойгир
шуда бошанд ($x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$). Аз нуқтаи
 A ва B ба тирҳои координати хатҳои
рости параллел мегузаронем ва нуқтаи
буриши онҳоро бо C ишора мекунем.

Дар ин ҳол, $AC = |x_2 - x_1|$, инчунин
 $BC = |y_2 - y_1|$. Ба секунҷаи росткунҷаи ABC
теоремаи Пифагорро татбиқ намоем,

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

мешавад. Аз ин

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

-ро ҳосил мекунем. Ба дурустии

формулаи (1) дар ҳолати $x_1 = x_2$ ё ки $y_1 = y_2$ ҳам бовар кунед.

Масъалаи 2. Агар $A(-3; -1)$, $B(1; -1)$, $C(1; -3)$, $D(-3; -3)$ бошад, чоркунҷаи
 $ABCD$ росткунҷа буданахро исбот кунед.

Ҳалли он. 1) Координатаҳои миёнаҳои диагонали AC -ро меёбем:

$$x = \frac{-3+1}{2} = -1; \quad y = \frac{-1-3}{2} = -2.$$

Координатаҳои миёнаҳои диагонали BD -ро меёбем:

$$x = \frac{1-3}{2} = -1; \quad y = \frac{-1-3}{2} = -2.$$

Аз ин рӯ, диагоналҳои чоркунҷаи $ABCD$ дар як нуқтаи $(-1; -2)$
бурида ва дар ин нуқта ба ду қисми баробар ҷудо мешаванд. Бинобар ин,
 $ABCD$ — параллелограмм.

2) Дарозии диагоналҳои параллелограмми $ABCD$ -ро меёбем:

$$AC = \sqrt{(1 - (-3))^2 + (-3 - (-1))^2} = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20};$$

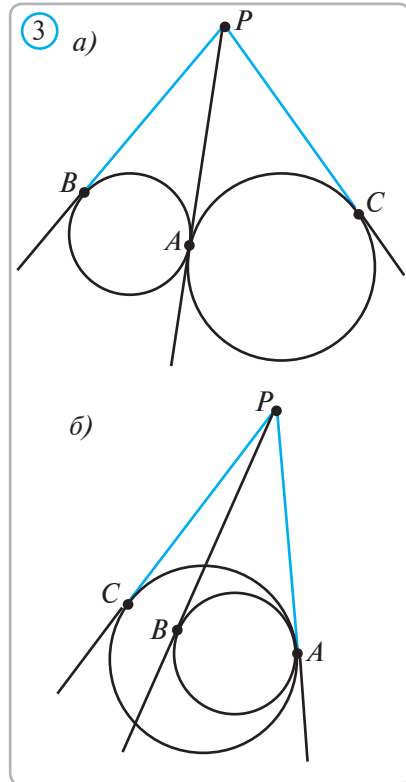
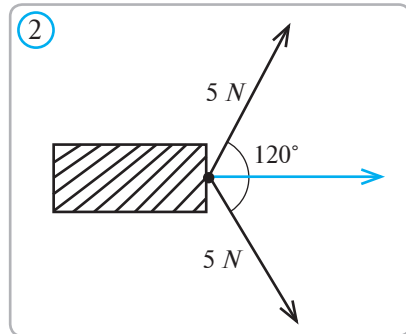
$$BD = \sqrt{(1 - (-3))^2 + (-1 - (-3))^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}.$$

Аз ин рӯ, диагоналҳои параллелограмми $ABCD$ байни ҳам баробар
будааст. Ин бошад, (мувофиқи аломати росткунҷа) $ABCD$ — росткунҷа
буданахро нишон медиҳад.

? Савол, масъала ва супориш

1. Агар а) $A(2; 7), B(-2; 7)$; б) $A(-5; -1), B(-5; -7)$; в) $A(-3; 0), B(0; 4)$; г) $A(0; 3), B(-4; 0)$ бошад, дарозии порчаи AB -ро ёбед.
2. Агар $M(4; 0), N(12; -12), P(5; -9)$ бошад, периметри секунҷаи MNP -ро ёбед.
3. Векторҳои коллинеарии $\vec{x}$ ва $\vec{y}$ -ро кашед ва вектори $2\vec{x} + 3\vec{y}$ -ро созед.
4. Агар нуқтаҳои A, B, C ва D дар як хати рост нахобад ва $\overline{AB} = 0,7\overline{DC}$ бошад, намуди чоркунҷаи $ABCD$ -ро муайян кунед.
5. Агар векторҳои $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ ғайриколлинеар ва $3\vec{a} - x\vec{b} = y\vec{a} + 4\vec{b}$ бошад, ададҳои x ва y -ро ёбед.
6. Агар порчаҳои AA_1, BB_1, CC_1 медианаҳои секунҷаи ABC ва O нуқтаи ихтиёрий бошад, баробарии $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \overline{OA_1} + \overline{OB_1} + \overline{OC_1}$ -ро исбот кунед.
7. Медианаҳои секунҷаи ABC дар нуқтаи O бурида мешаванд. Векторҳои $\overline{AB}, \overline{BC}$ ва $\overline{CA}$ -ро бо ёрии векторҳои $\vec{a} = \overline{OA}$ ва $\vec{b} = \overline{OB}$ ифода кунед.
8. Ба чисм ду қувваи ҳар яке $5N$ буда, таъсир мерасонад (расми 2). Агар самтиқунҷи байни таъсири ин қувваҳо 120° бошад, бузургии баробар таъсиркунандаи онҳоро ёбед.
9. Радиуси давраи ба секунҷаи баробартараф берункашидашуда 6 см аст. Периметр ва масоҳати секунҷаро ёбед.
10. Аз расандаи ба давраи дар нуқтаи A гузаронидашуда нуқтаи B гирифта шуд. Масофа аз нуқтаи B то нуқтаи наздиктарини давра 4 см, то нуқтаи дуртарин 8 см аст. Порчаи AB -ро ёбед.

- 11*. Ду давраи радиусҳояшон гуногун дар нуқтаи A ба хати рости PA мерасанд. Ба ин давраҳо мувофиқан расандаҳои PB ва PC (аз PA фарқкунанда) гузаронида шудааст. Агар нуқтаҳои B ва C нуқтаҳои расиши расандаҳо ба давра бошад, баробари $PC - PB$ буданаширо исбот кунед (расми 3).

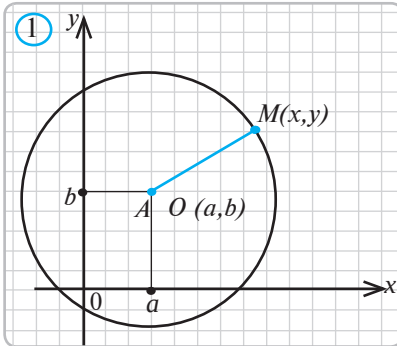


61

ДАВРА ВА ДОИРА

Масъалаи 1. Исбот кунед, ки координатаҳои x ва y -и нуктаи дилхоҳи $M(x,y)$ -и давраи радиусаш R ва марказаш дар нуктаи $O(a;b)$ будаи ҳамвори координати баробарии $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ (1)

-ро қаноат (1) мекунонад.



Ҳалли он. Бигузор нуктаи $O(a;b)$ маркази давраи додашуда ва $M(x;y)$ - нуктаи дилхоҳи он бошад. Он гоҳ $OM=R$ мешавад. Дар асоси формулаи ёфтани масофаи байни ду нукта дар ҳамвории координатӣ (мувофиқи масъалаи саҳифаи 134)

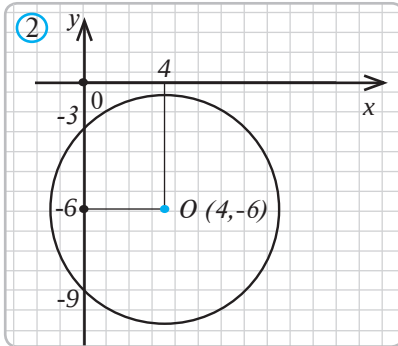
$$OM=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}.$$

ҳамин тавр,

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=R.$$

ҳар ду тарафи баробарии охириро ба квадрат бардошта баробарии (1) - ро ҳосил мекунем.

Дар хотир доред. Муодилаи (1)-ро муодилаи давраи марказаш дар нуктаи $(a;b)$ ва радиусаш ба R баробар буда меноманд.



Масъалаи 2. Дар ҳамвории координатӣ аз тири ордината давраи бо муодилаи

$$(x-4)^2+(y+6)^2=25$$

додашуда порчаеро ҷудо мекунад. Дарозии ин порчаеро ёбед.

Ҳалли он. Абсиссаи нуктаи буриши давраи додашуда бо тири ордината ба сифр баробар мешавад. Дар ҳолати $x=0$ будан, аз муодилаи додашуда истифода бурда ординатаҳои ин нуктаҳоро меёбем:

$$(0-4)^2+(y+6)^2=25, (y+6)^2=9,$$

$$y=-9 \text{ ё } y=-3.$$

Бинобар ин, давра ва тири ординатаҳо дар нуктаҳои $(0;-9)$ ва $(0;-3)$ якдигарро мебаранд. Масофаи байни ин нуктаҳо ба 6 воҳид баробар аст. **Ҷавоб:** 6.

Масъалаи 3. Ду давраи марказаш дар нуктаи O воқеъ буда, ҳалқа ташкил мекунад. Хордаи AB -и ба 32 см баробари доираи калон дар нуктаи C ба доираи хурд расанда мебошад (расми 3). Агар васеъгии ҳалқа 8 см бошад, он гоҳ масоҳати ин ҳалқаро ёбед.

Ҳалли он. Радиуси доираи калонро бо R , хурдашро бошад, бо r ишорат мекунем. Мувофиқи шарти масъала, $OA=R=r+\delta$ (см) ва $OC=r$. Ба ғайр аз ин нуктаи C

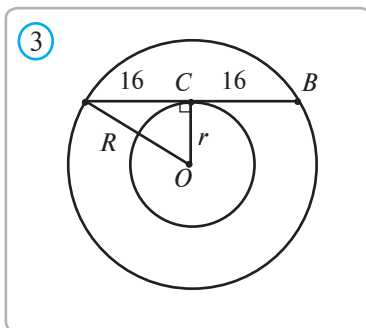
миёнаҳои хордаи AB , яъне $AC = 16$ см, секунҷаи OCA бошад, секунҷаи росткунча мешавад.

Дар асоси теоремаи Пифагор барои $OC^2 + CA^2 = OA^2$ буданаш муодилаи

$$r^2 + 16^2 = (r + 8)^2$$

-ро ҳосил мекунем. Ин муодиларо ҳал карда, $r = 12$ см ҳосил мекунем. Аз он $R = r + 8 = 20$ см мешавад. Аз масоҳати доираи калон масоҳати доираи хурдашро тарҳ намуда, масоҳати ҳалқаи додашудом S -ро меёбем:

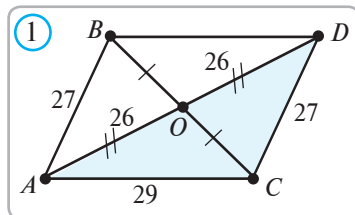
$$S = \pi R^2 - \pi r^2 = 20^2\pi - 12^2\pi = 400\pi - 144\pi = 256\pi \text{ (см}^2\text{)}. \text{ Ҷавоб: } 256\pi \text{ см}^2.$$



? Савол, масъала ва супориш

1. Радиус ва координатаҳои марказҳои давраи ба муодилаҳои зерин додашударо гӯед ва ин даврахоро созед.
 а) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$; б) $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 16$;
 в) $x^2 + y^2 = 25$; г) $x^2 + (y - 2)^2 = 9$.
2. Дар чоркунҷаи $ABCD$ -и дарункашидашудаи давра кунҷҳои назди қуллаҳои A, B ва C ба нисбати $1:2:3$ аст. Кунҷҳои дохилии чоркунҷаро ёбед.
3. Ба $1:8$ ҳиссаи давра кунҷи марказии мувофиқро ёбед.
4. Дар давраи марказаш A нуқтаи B гирифта шудааст. Давраи дигари марказаш дар нуқтаи B буда аз нуқтаи A мегузарад. Ин ду давра дар нуқтаи C бурида мешавад. Кунҷи ACB -ро ёбед.
5. Хордаҳои AB ва CD -и давра дар нуқтаи O бурида мешаванд. Агар $AO = 4$ см, $BO = 6$ см ва $CD = 11$ см бошад, порчаҳои OC ва OD -ро ёбед.
6. Диагонали росткунҷаи дарункашидашудаи давра аз як тарафаш 2-то зиёд. Ченаки градусии камонҳои қуллаҳои чоркунҷа аз давра ҷудо кардари ёбед.
7. Ҳато миёнаи трапетсияи берункашидашудаи давра 7 см. Периметри трапетсияро ёбед.
- 8*. Хордаи AB аз нуқтаи K -и 7 см аз маркази доираи радиусаш 15 см буда ба 27 см дурӣ гузаронида шудааст. Порчаҳои AK ва BK -ро ёбед.
9. Кунҷи байни диагоналҳои аз ҳама калон ва аз ҳама хурди аз як қуллаи ҳашткунҷаи мунтазам барояндари ёбед.
10. Дар ҳамвории координатаи секунҷаи қуллаҳояш дар нуқтаҳои $A(-3; 4)$, $B(3; 4)$, $C(3; -8)$ дода шудааст.
 а) $\angle ABC = 90^\circ$ буданашро нишон диҳед;
 б) Марказ, радиус ва масоҳати доираи берункашидашудаи секунҷаи ABC -ро ёбед.

Масъала. Дар секунҷаи росткунҷаи ABC AO медиана, $AO=26$, $AB=27$ ва $AC=29$. Масоҳати секунҷаро ёбед.



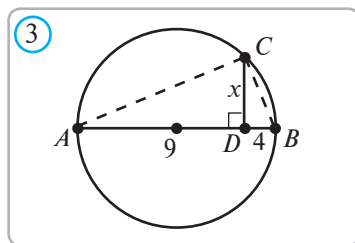
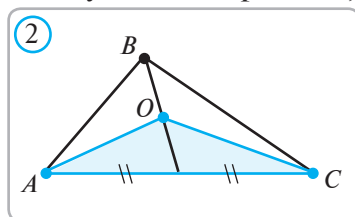
Ҳалли он. Дар нури AO аз нуктаи A шарти $AD=2AO=52$ иҷрошаванда карда интиҳоб мекунем (расми 1). Он гоҳ аз $BO=OC$, $AO=OD$ буданаш $ABDC$ параллелограмм мешавад.

Масоҳатҳои секунҷаҳои ABC ва ADC баробар. Аз формулаи Герон истифода бурда, масоҳати секунҷаи ADC -ро ҳисоб мекунем:

$$P = \frac{29+52+27}{2} = 54; \quad S = \sqrt{54 \cdot (54 - 29)(54 - 52)(54 - 27)} = 270. \quad \text{Ҷавоб: } 270.$$

Савол, масъала ва супориш

- Секунҷаҳои ABC ва EFC монанд: AB ва EF , BC ва FC тарафҳои мувофиқи онҳо. Агар $AB=4$ см, $BC=5$ см, $CA=7$ см ва $EF:AB=2,1$ бошад, тарафҳои секунҷаи EFC -ро ёбед.
- Секунҷаҳои ABC ва $A_1B_1C_1$ монанд ва нисбати тарафҳои мувофиқи онҳо ба $6:5$ баробар аст. Масоҳати секунҷаи ABC аз масоҳати секунҷаи $A_1B_1C_1$ 77 $дм^2$ зиёд аст. Масоҳатҳои секунҷаҳоро ёбед.
- Нуктаи буриши медианаҳои секунҷаи ABC нуктаи O бошад. Агар масоҳати секунҷаи AOC 4 $дм^2$ бошад, масоҳати секунҷаи ABC -ро ёбед (расми 2).
- Аз нуктаи давра C ба диаметри AB перпендикуляри CD гузаронида шудааст. Агар $AD=9$, $DB=4$ бошад, порчаи CD -ро ёбед (расми 3).



- Масоҳати секунҷаи тарафаш 6 м ва кунҷҳои ба он часпидааш 30° ва 45° бударо ёбед.
- Баландии трапетсияи асосҳояш 28 $дм$ ва 16 $дм$, тарафи паҳлуиаш бошад, 25 $дм$ ва 17 $дм$ -ро ёбед.
- Трапетсияи баробарпаҳлуи масоҳаташ 20 $см^2$ аз давраи радиусаш 2 $см$ берун кашида шудааст. Дарозии тарафҳои трапетсияро ёбед.
- Нуктаи расиши давраи ба секунҷаи росткунҷа дарункашидашуда гипотенузаро ба порчаҳои 2 $см$ ва 3 $см$ чудо мекунад. Катетҳои секунҷаро ёбед.

63

ТАКРОРКУНӢ

Масъала. Масофаи байни марказҳои давраҳои ба секунҷаи росткунҷаи катетҳояш 3 ва 4 буда дарун ва берункашидашударо ёбед (расми 1).

Ҳалли он. 1) Дар секунҷаи ABC $\angle C = 90^\circ$, $AC = 4$ ва $BC = 3$ бошад. Он гоҳ мувофиқи теоремаи Пифагор

$$AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

2) Маркази давраи ба секунҷаи росткунҷа берункашидашуда дар миёнаҳои гипотенуза E мешавад:

$$BE = \frac{AB}{2} = \frac{5}{2}.$$

3) Радиуси OD -и ба секунҷа давраи дарункашидашударо меёбем (D – нуқтаи расиши давраи дарункашидашуда дар гипотенуза):

$$OD = \frac{AC + BC - AB}{2} = \frac{4 + 3 - 5}{2} = 1.$$

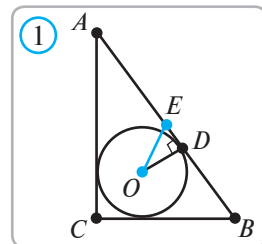
4) Порчаҳои BD ва DE -ро меёбем:

$$BD = \frac{AB + BC - AC}{2} = \frac{5 + 3 - 4}{2} = 2; \quad ED = BE - DE = \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2}.$$

5) Порчаи OE -и секунҷаи росткунҷаи ODE -ро меёбем:

$$OE = \sqrt{OD^2 + ED^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

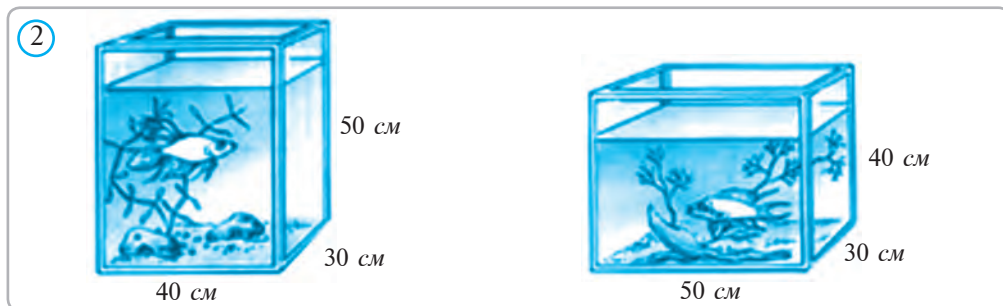
Ҷавоб: $\frac{\sqrt{5}}{2}.$



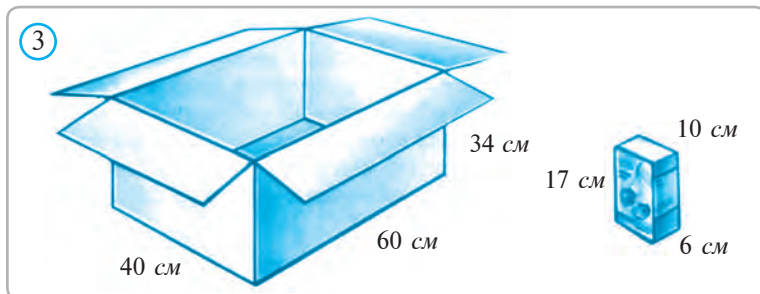
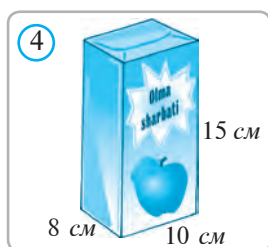
? Савол, масъала ва супориш

1. Дар секунҷаи баробарпахлуи ABC $AB = AC = 4$ см ва $\angle A = 30^\circ$ бошад, баландии он BE ёфта шавад.
2. Асосҳои трапетсия 5 дм ва 8 дм, тарафҳои паҳлуи бошад, ба 3,6 дм ва 3,9 дм баробар аст. Давоми тарафҳои трапетсия дар нуқтаи O бурида мешавад. Масофа аз нуқтаи O то куллаҳои трапетсияро ёбед.
3. Ба як тарафи кунҷи A порчаҳои $AB = 5$ см ва $AC = 16$ см, ба тарафи дуюм бошад, порчаҳои $AD = 8$ см ва $AF = 10$ см гузошта шудаанд. Оё секунҷаҳои ACD ва AFB монанданд? Ҷавобатонро асоснок кунед.
4. Масоҳати росткунҷа 9 дм², яке аз кунҷҳои ҳосилкардаи диагоналҳои он 120° аст. Тарафҳои росткунҷаро ёбед.
5. Агар асоси секунҷаи баробарпахлу 24 см ва тарафи паҳлуи 13 см бошад, дар ин ҳол радиуси давраи ба секунҷа берункашидашударо ёбед.
6. Баландии ромб 12 см буда, яке аз диагоналҳояш 15 см. Масоҳати ромбро ёбед.

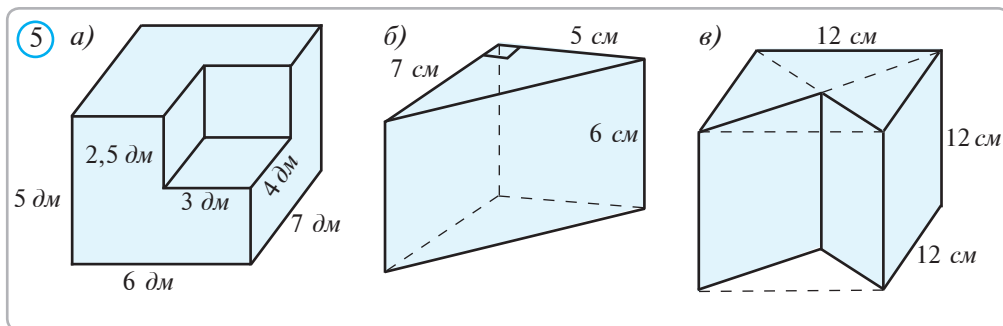
7. Агар дар параллелограмми $ABCD$ $A(1;-3)$, $B(-2;4)$ ва $C(-3;1)$ бошад, координатаҳои куллаи D -и онро ёбед.
8. Ба ду аквариум аз қисми болоӣ 10 см паст об рехта шуд (расми 2). Дар кадом аквариум об зиёд аст?



9. Ба куттӣ чанд пакет шарбати мева меғунҷад? (расми 3)
10. Пакети 1 литраи шарбати мева дар шакли параллелепипеда росткунҷа аст (расми 4). Барои 1 пакет чӣ қадар мавод лозим мешавад?



- 11*. Ҳаҷми қисмҳои ҷӯби дар расм тасвиршударо ҳисоб кунед (расми 5).



64

ТАКРОРКУНӢ



Масъала. Баландии аз кунчи кунди ромб гузаронидашуда яке аз тарафҳои онро аз кунчи тези он сар намуда ба порчаҳои 5 см ва 8 см чудо мекунад. Масоҳати ромбро ёбед.

Ҳалли он. $ABCD$ ромб, $\angle B > 90^\circ$, BE — баландӣ $AE = 5$ см, $ED = 8$ см бошад (расми 1).

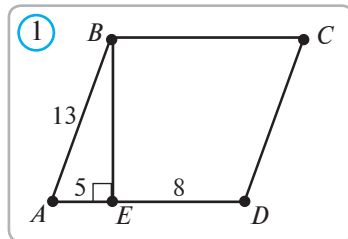
1) Тарафи ромбро меёбем:

$$AD = AE + ED = 5 + 8 = 13 \text{ (см)}.$$

2) Дар секунҷаи росткунҷаи ABE дар асоси теоремаи Пифагор баландии BE -ро меёбем:

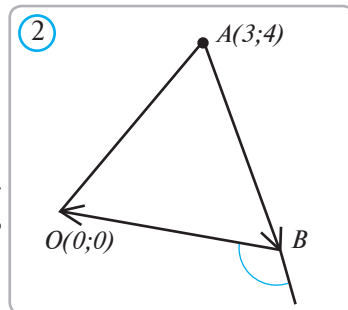
$$BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ (см)}.$$

3) Масоҳати ромбро меёбем: $S = AD \cdot BE = 13 \cdot 12 = 156 \text{ (см}^2\text{)}$. **Ҷавоб:** 156 см^2 .



Савол, масъала ва супориш

- Агар дар секунҷаи баробартарафи AOB $O(0;0)$ ва $A(3;4)$ буданаш маълум бошад, зарби скалярии $\vec{AB} \cdot \vec{BO}$ -ро ёбед (расми 2).
- Диагонали трапетсияи $ABCD$, ки асосҳои AB ва CD аст, дар нуктаи O бурида мешаванд. Агар $OB=8$ см, $OD=20$ см ва $OC=50$ см бошад, порчаи AO -ро ёбед.
- Агар $AB=1,7$ см, $BC=3$ см, $CA=4,2$ см, $A_1B_1=34$ дм, $B_1C_1=60$ дм ва $C_1A_1=84$ дм бошад, оё секунҷаҳои ABC ва $A_1B_1C_1$ монанд аст?
- Ҳангоми буриши диагоналҳои параллелограмми периметраш 18 см буда ду секунҷа ҳосил мешавад. Периметри яке аз секунҷаҳои ҳосилшуда аз дуюмаш 8 см зиёд бошад, тарафҳои параллелограммро ёбед.
- Ба кунчи ба 60° баробари ба якдигар аз берун расанда ду давра дарун кашида шудааст. Радиуси давраи хурд 1 см бошад, радиуси давраи калонро ёбед.
- Диагонали AC -и трапетсияи $ABCD$, ки AD асоси калон аст, ба тарафи CD перпендикуляр ва $\angle BAC = \angle CAD$. Агар периметри трапетсия 20 см ва $\angle D = 60^\circ$ бошад, дарозии тарафи AD -ро ёбед.
- Агар нӯтҳои диаметри давра аз ягон расандааш дар дурии 18 см ва 12 см буданаш маълум бошад, дарозии давраро ёбед.
- Дарозии асосҳои ва масоҳаташ бо равиши мувофиқ дар трапетсияи баробарпахлу 8 см, 14 см ва 44 см^2 бошад, тарафи пахлуи онро ёбед.



65

ТАКРОРКУНӢ

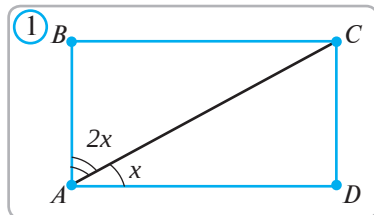
Масъала. Диагоналҳои росткунча ба 12 см баробар буда, онҳо кунчи росткунчаро дар нисбати 2:1 тақсим мекунад. Периметри росткунчаро ёбед.



$ABCD$ — росткунча,
 $AC = 12$ см, $\angle BAC : \angle CAD = 2:1$



$P = ?$



Ҳалли он. 1) Агар $\angle CAD = x$ гўем, $\angle BAC = 2x$ ва $\angle CAD + \angle BAC = x + 2x = 90^\circ$ мешавад. Аз ин $x = 30^\circ$.

2) Катетҳои секунҷаи росткунҷаи ADC -ро меёбем:

$$CD = AC \sin CAD = 12 \cdot \sin 30^\circ = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6 \text{ (см)},$$

$$AD = AC \cdot \cos CAD = 12 \cdot \cos 30^\circ = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \text{ (см)}.$$

3) Периметри росткунчаро меёбем:

$$P = 2(AD + CD) = 2(6 + 6\sqrt{3}) = 12(1 + \sqrt{3}) \text{ (см)}.$$

Ҷавоб: $12(1 + \sqrt{3})$ см.



Савол, масъала ва сунориш

1. Секунҷаи ABC ва $A_1B_1C_1$ монанд, $AB = 6$ см, $BC = 9$ см ва $CA = 10$ см. Агар тарафи калони секунҷаи $A_1B_1C_1$ ба 7,5 см бошад, тарафҳои боқимондаи онро ёбед.
2. Хати ростии ба тарафи AB -и секунҷаи ABC параллел тарафи AC -ро аз қуллаи A ба ҳисобкунӣ сар кунем чун нисбати 2:7 тақсим мекунад. Агар $AB = 10$ см, $BC = 18$ см ва $CA = 21,6$ см бошад, тарафҳои секунҷаи аз секунҷаи ABC хати рости ҷудокардари ёбед.
3. Агар дар трапетсияи баробарпахлу тарафи паҳлуи ба хати миёна баробар ва периметраш 48 см бошад, дарозии тарафи паҳлуи трапетсияро ёбед.
4. Радиуси давраи ба трапетсияи баробарпахлуи асосҳояш 6 см ва 3 см дарункашидашударо ёбед.
5. Агар $A_1A_4 = 2,24$ бошад, дар ин ҳол периметри шашкунҷаи мунтазами $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ -ро ёбед.
6. Агар $N(7;3)$ ва $M(-3;5)$ бошад, дарозии давраи диаметраш NM ёфта шавад.
7. Масоҳати секунҷаи баробар паҳлуи давраи радиусааш 10 см ва кунчи назди қуллааш 120° дарункашидашударо ёбед.
8. Агар дар чоркунҷаи $ABCD$ $AB = 5$ см, $BC = 13$ см, $CD = 9$ см, $DA = 15$ см ва $AC = 12$ см бошад, масоҳати чоркунҷаи $ABCD$ -ро ёбед.
- 9*. Дарозии камони мувофиқи кунчи марказии 90° ба 15π баробар аст. Масоҳати секунҷаи мунтазами ба давра берункашидашударо ёбед.

66

ТАКРОРКУНӢ



Масъала. Дарозии хордаи давра AB 10 см аст. Аз нуғи A -и хорда расандаи AD , аз нуғи B бошад, хордаи ба ҳамин расанда параллели BC гузаронида шуд. Агар $BC=12$ см бошад, радиуси даврано ёбед.

Ҳалли он: 1) Хати рости аз нуқтаи A ва маркази давра O гузаронда хордаи BC -ро дар нуқтаи K бурида гузарад. Аз сабаби AD расанда буданаш $AK \perp AD$, $AD \parallel BC$ буданаш бошад, $AK \perp BC$ мешавад.

2) $AK \perp BC$, яъне аз $OK \perp BC$ буданаш $CK = KB$. Порчаи AK ҳам медиана ва баландии секунҷаи ABC будааст. Бинобар ин секунҷаи ABC — секунҷаи баробарпахлу: $AC = AB = 10$ см.

3) Аз формулаи Герон истифода бурда масоҳати секунҷаи ABC -ро меёбем:

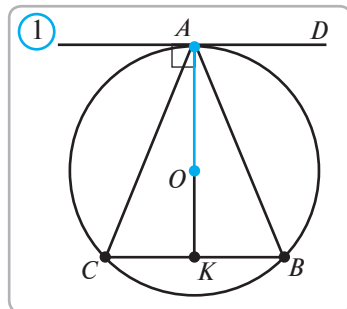
$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{10+10+12}{2} = 16 \text{ (см)},$$

$$S = \sqrt{p \cdot (p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{16 \cdot (16-10)(16-10)(16-12)} = 48 \text{ (см}^2\text{)}.$$

4) Радиуси давраи ба секунҷаи ABC берункашидашударо меёбем:

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{12 \cdot 10 \cdot 10}{4 \cdot 48} = 6,25 \text{ (см)}.$$

Ҷавоб: 6,25 см.

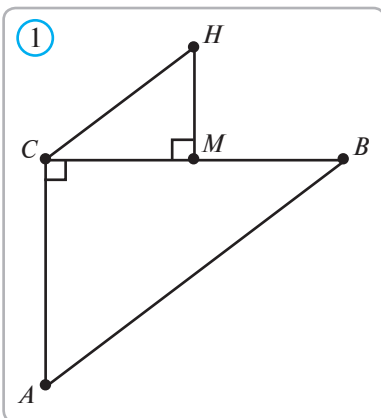


Савол, масъала ва супориш

1. Тарафҳои секунҷаи бо равиши мувофиқ 13 см, 14 см ва 15 см аст. Нисбати масоҳатҳои доираҳои ба секунҷа дарун ва берункашидашударо ёбед.
2. Агар $\angle BDC = 40^\circ$ ва $\angle CBD = 60^\circ$ бошад, кунҷҳои A ва C -и чоркунҷаи ба давра дарун кашидашуда $ABCD$ -ро ёбед.
3. Асосҳои трапетсияи баробарпахлуи ба давра берункашидашуда 4 см ва 16 см бошад, радиуси даврано ёбед.
4. Медианаҳои дар секунҷаи росткунҷа ба катетҳо гузаронидашуда ба $\sqrt{52}$ см ва $\sqrt{73}$ см баробар аст. Масоҳати секунҷаро ёбед.
5. Баландии ба гипотенуза гузаронидашудаи секунҷаи росткунҷаи катетҳояш 6 м ва 8 м бударо ёбед.
6. Як катети секунҷаи росткунҷа 5 см ва гипотенузаи он 13 см бошад, масоҳати онро ёбед.
7. Дар кадом қиматҳои x векторҳои $\vec{a}(x; 7)$ ва $\vec{b}(5; 2-x)$ перпендикуляр мешаванд?

67–68

КОРИ НАЗОРАТИИ ЧАМЪБАСТӢ



I. Кори назорати намунавӣ

- Дар параллелограмми $ABCD$ $\angle A = 45^\circ$, $AD = 4$. Ба давоми тарафи AB -и параллелограмм порчаи BP бо шарт $\angle PDA = 90^\circ$ гузошта шуд. Порчаҳои BC ва PD дар нуқтаи T бурида мешавад, дар ин $PT : TD = 3 : 1$ аст.
 а) $\triangle BPT \sim \triangle CDT$ буданаширо исбот кунед, нисбати масоҳати ин секунҷаҳо ро ёбед.
 б) Масоҳати параллелограмми $ABCD$ -ро ёбед.
 в) Дарозии порчаи миёнаҳои порчаҳои AB ва TD -и пайвастананда ёфта шавад.
 г) Вектори $\overrightarrow{AB}$ -ро бо векторҳои $\overrightarrow{CA}$ ва $\overrightarrow{TB}$ ифода кунед.

- д) Синуси кунҷи CAD -ро ёбед.
- (Илова). Дар расми 1 $BC \perp AC$, $MH \perp BC$, $2MC = BC$, $MH = 0,5AC$ бошад, $AB \parallel CH$ буданаширо исбот кунед.

II. Тестҳои намунавӣ барои кори назоратӣ

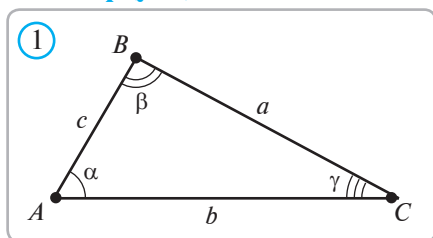
- Агар баландии секунҷаи росткунҷаи гипотенузари ба порчаҳои 6 см ва 54 см чудо кунед, масоҳати ин секунҷаҳо ёбед.
 А. 648 см^2 ; Б. 324 см^2 ; В. 1080 см^2 ; Г. 540 см^2 .
- Яке аз бурандаи аз нуқтаи C гузаранда давраро дар нуқтаи A ва B , дуомаш дар нуқтаи D ва E бурида мегузарад. Агар $CA = 18 \text{ см}$, $CB = 8 \text{ см}$, $CD = 8 \text{ см}$ бошад, дарозии порчаи DE -ро ёбед.
 А. 17 см; Б. 1 см; В. 9 см; Г. Ҷавоби дуруст нест.
- Агар $A(-5; 2\sqrt{3})$, $B(-4; 2)$, $C(-2; \sqrt{3})$, $D(0; 2)$ бошад, кунҷи байни диагоналҳои чоркунҷаи $ABCD$ -ро ёбед.
 А. 30° ; Б. 60° ; В. 90° ; Г. Ҷавоби дуруст нест.
- Агар диагоналҳои параллелограмм 10 см ва $8\sqrt{2}$ см ва кунҷи байни онҳо 45° бошад, тарафҳои параллелограммро ёбед.
 А. $\sqrt{17}$ см ва $\sqrt{97}$ см; Б. 5 см ва 6 см;
 В. $\sqrt{34}$ см ва $\sqrt{63}$ см; Г. Ҷавоби дуруст нест.
- Масоҳати шашкунҷаи мунтазам ба давраи радиусаш 8 см дарункашидашударо ёбед.
 А. $48\sqrt{3} \text{ см}^2$; Б. $192\sqrt{3} \text{ см}^2$; В. $96\sqrt{2}$; Г. Ҷавоби дуруст нест.

6. Радиуси сектори доиравии кунчи марказиаш 140° , масоҳаташ $31,5\pi \text{ см}^2$ бударо ёбед.
 А. 9 см ; Б. 18 см ; В. $9\pi \text{ см}$; Г. Ҷавоби дуруст нест.
7. Ба асоси секунча, ки 15 см дарози дорад, порчаи параллел гузаронида шудааст. Агар масоҳати трапетсияи ҳосилшуда аз $\frac{3}{4}$ қисми масоҳати секунчаро ташкил диҳад, дарозии порчаро ёбед.
 А. $6,5$; Б. 7 ; В. $7,5$; Г. 5 .
8. Нисбати баландии секунчаи баробарпахлуи тарафи паҳлуиаш $2\sqrt{39} \text{ см}$ ба асос бо $3:4$ баробар бошад, масоҳати секунчаро ёбед.
 А. 260 ; Б. 245 ; В. 310 ; Г. 72 .
9. Кунчи байни векторҳои $a(4; 4\sqrt{3})$ ва $b(8\sqrt{3}; 8)$ -ро ёбед.
 А. 45° ; Б. 90° ; В. 30° ; Г. 60° .
10. Асосҳои трапетсияи баробарпахлу 10 см ва 16 см , тарафи паҳлуӣ бошад, 5 см . Масоҳати трапетсияро ёбед.
 А. 45 ; Б. 50 ; В. 48 ; Г. 52 .
11. Гипотенузаи секунчаи росткунча 13 см буда, яке аз катетҳо аз дигаре 7 см зиёд аст. Масоҳати секунчаро ёбед.
 А. 30 см^2 ; Б. 25 см^2 ; В. 45 см^2 ; Г. 40 см^2 .
12. Як диагоналҳои ромби тарафаш 5 см буда ба 6 см баробар аст. Масоҳати ромбро ёбед.
 А. 24 см^2 ; Б. 30 см^2 ; В. 29 см^2 ; Г. 40 см^2 .
13. Дарозии давраи ба квадрати диагоналаш $6\sqrt{2}$ буда дарункашидашударо ёбед.
 А. 10π ; Б. 8π ; В. 9π ; Г. 6π .
14. Масоҳати доираи ба квадрати тарафаш $6\sqrt{2} \text{ см}$ буда берункашидашударо ёбед.
 А. 9π ; Б. 12π ; В. 15π ; Г. 18π .
15. Масоҳати параллелограмми баландиҳояш 4 см ва 6 см ба 36 см^2 баробар аст. Периметри онро ёбед.
 А. 26 см ; Б. 30 см ; В. 29 см ; Г. 36 см .
16. Нисбати тарафҳои параллелограмми периметраш 30 см буда $2:3$ аст. Агар кунчи тези параллелограмм 30° бошад, масоҳати онро ёбед.
 А. 26 см^2 ; Б. 27 см^2 ; В. 29 см^2 ; Г. 30 см^2 .
17. Агар дар секунчаи ABC $AB=6\sqrt{3} \text{ см}$, $BC=12 \text{ см}$ ва $\angle C=60^\circ$ бошад, кунчи A -и секунчаро ёбед.
 А. 45° ; Б. 90° ; В. 30° ; Г. 60° .

МАЪЛУМОТ ВА МАФХУМҲОИ АСОСӢ ДОИР БА ПЛАНИМЕТРИЯ

СЕКУНЧАҲО

1°. Мафхумҳои асосӣ



Дар ҳамворӣ се нуқта дода шуда бошад ва ҳар сеи он дар дар як хати рост нахобад. Ду нуқтаи онҳоро бо порчаҳои хати рост пайваست мекунем. Шакли ҳосилшуда секунҷа номида мешавад. Нуқтаҳо куллаҳои секунҷа, порчаҳо тарафҳои он номида мешавад. Ишорати он: A, B, C — куллаҳо, a, b, c — тарафҳо (расми 1).

Секунҷа ба се кунҷи дарунӣ соҳиб: $\angle BAC, \angle CBA, \angle ACB$. Ишорати он: α, β, γ .

Медиана — порчаи хати росте, ки кулла ва миёнаҳои тарафи муқобилро мепайвандад. Дар секунҷа се медиана буда, онҳоро бо m_a, m_b, m_c ишорат мекунанд.

Биссектриса — секунҷа ба хати росте ба тарифи муқобил хобида. Дар секунҷа сето биссектриса буда онҳоро бо l_a, l_b, l_c ишорат мекунанд.

Баландӣ — перпендикулярӣ аз куллаи гузаронидашуда аст.

Дар секунҷа сето баландӣ буда онҳоро бо h_a, h_b, h_c ишорат мекунанд.

Хати миёна — порчаи миёнаҳои ду тарафро пайваستкунанда.

Миқдори хатҳои миёна ҳам сетоанд.

Периметр — ҳосили ҷамъи дарозии се тараф. Ишораташ P .

Секунҷаҳо аз рӯи тарафҳояшон ба се намуд чудо мешаванд:

а) баробартараф ($a = b = c$); б) баробарпахлу (кадоме аз дутои a, b, c баробаранд); в) тарафҳояшон гуногун (кадоме аз дутои a, b, c баробар нест).

Даврае, ки ба се тарафи секунҷа расида мегузарад, *давраи дарункашидашуда* номида мешавад (ин гуна давра мавҷуд, ягона ва дар дохили секунҷа чойгир аст). Радиуси давраи дарункашидашуда бо r ишорат карда мешавад.

Давраи аз се куллаи секунҷа гузаронида *давраи ба он берункашидашуда* номида мешавад ва радиуси он бо R ишорат карда мешавад (ин гуна давра мавҷуд ва ягона).

2°. Муносибатҳои асосӣ.

1) $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Ҳосили ҷамъи кунҷҳои секунҷа ба 180° баробар аст;

2) Се медиана дар як нуқта бурида мешавад. Ин нуқта медианаро дар нисбати 2:1 тақсим мекунанд. Медиана секунҷаро ба ду секунҷаи масоҳатҳояшон баробар тақсим мекунанд. Дарозии медианаҳо бо формулаҳои $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$; $m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$; $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$ ҳисоб карда мешавад.

3) Се биссектриса дар як нуқта бурида мешавад. Ин нуқта маркази давраи

дарункашидашуда мешавад. Биссектриса тарафи муқобилро (тарафи худаш гузоштаро) ба қисмҳои ба тарафҳои боқимонда мутаносиб ҳудо мекунад (расми 2).

BD биссектриса бошад, $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DC}$.

Дарозии биссектрисаҳо:

$$l_a = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{p(p-a)}; \quad l_b = \frac{2\sqrt{ac}}{a+c}\sqrt{p(p-b)};$$

$$l_c = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\sqrt{p(p-c)}, \quad p = \frac{1}{2}(a+b+c) \text{ ҳисоб карда мешавад.}$$

4) Баландиҳои секунҷа ё ки давоми онҳо дар як нуқта бурида мешавад. Дарозии баландиҳо бо формулаҳои

$$h_a = \frac{2S}{a}; \quad h_b = \frac{2S}{b}; \quad h_c = \frac{2S}{c}$$

ёфта мешавад. Дар ин ҷо S — масоҳати секунҷа аст.

5) Перпендикулярҳои миёнаҳои тарафҳои секунҷа дар як нуқта бурида мешавад. *Ин нуқта маркази давраи ба секунҷа берункашидашуда мешавад.*

6) *Ҳамаи миёнаҳои секунҷа ба тарафи сеюм параллел ва ба нисфи он баробар аст.*

7) Теоремаи синусҳо:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R.$$

8) Теоремаи косинусҳо:

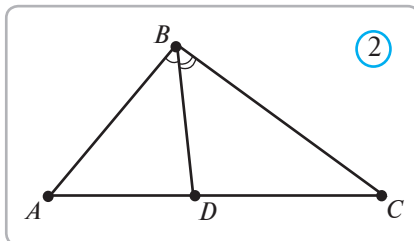
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos\alpha, \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2accos\beta, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos\gamma$$

9) Формулаҳои ҳисоб кардани масоҳати секунҷа:

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c; \quad S = \frac{1}{2}absin\gamma = \frac{1}{2}bcsin\alpha = \frac{1}{2}acsin\beta;$$

10) Дар формулаи Герон:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad p = \frac{a+b+c}{2}; \quad S = \frac{abc}{4R}, \quad S = pr.$$



3°. Хулосаҳои муҳим.

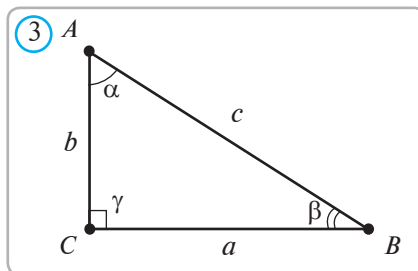
а) Секунҷаи росткунҷа (расми 3).

$\angle \gamma = 90^\circ$, $\alpha + \beta = 90^\circ$, AC ва BC — катетҳо,

AB — гипотенуза. Теоремаи Пифагор: $a^2 + b^2 = c^2$.

$$S = \frac{1}{2}ab; \quad R = \frac{c}{2}; \quad r = \frac{a+b-c}{2};$$

$$\frac{a}{c} = \sin \alpha; \quad \frac{a}{c} = \cos \beta; \quad \frac{b}{c} = \sin \beta; \quad \frac{b}{c} = \cos \alpha.$$

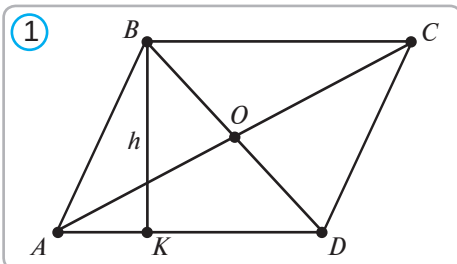


$$\frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha; \quad \frac{a}{b} = \operatorname{ctg} \beta; \quad \frac{b}{a} = \operatorname{ctg} \alpha; \quad \frac{b}{a} = \operatorname{tg} \beta.$$

б) Секунҷаи баробартараф

$$\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ, \quad S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}, \quad r = \frac{a \sqrt{3}}{6}, \quad R = \frac{a \sqrt{3}}{3}.$$

ЧОРКУНЧАҲО



1°. Параллелограмм

Чоркунҷаи тарафҳои муқобилаш параллел параллелограмм номида мешавад (расми 1). Порчаи қуллаҳои ғайриҳамсояро пайвастанда *диагонал* гуфта мешавад. AB ва CD ; AD ва BC тарафҳои параллел; BD ва AC диагоналҳо.

Ҳосиятҳои асосӣ ва муносибатҳо

1) Нуқтаи буриши диагоналҳо симметрияи марказии параллелограмм мешавад.

2) Дарозии тарафҳои муқобил ба якдигар баробаранд.

$$AB = CD \quad \text{ва} \quad AD = BC.$$

3) Кунҷҳои муқобили параллелограмм баробаранд.

$$\angle BAD = \angle BCD \quad \text{ва} \quad \angle ABC = \angle ADC.$$

4) Ҳосили ҷамъи кунҷҳои ҳамсоя 180° аст.

5) Диагоналҳо дар нуқтаи буриш ба ду қисми баробар тақсим мешаванд: $BO = OD$ ва $AO = OC$

6) Ҳосили ҷамъи квадрати тарафҳо ба ҳосили ҷамъи квадрати диагоналҳо баробаранд

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 \quad \text{ё ки} \quad 2(AB^2 + BC^2) = AC^2 + BD^2.$$

7) Масоҳати параллелограмм: а) $S = ah_a$, дар ин ҷо $a = AD$ тарафи он, $h_a = BK$ — баландии он; б) $S = ab \sin \alpha$, дар ин ҷо $b = AB$ — тарафи он, $\alpha = \angle BAD$ — кунҷи байни тарафҳои AB ва AD .

2°. Ромб

Параллелограмми ҳамаи тарафҳояш байни худ баробар *ромб* номида мешавад.

Ҳамаи ҳосиятҳои параллелограмм барои ромб низ ҷой дорад.

Ҳосиятҳои иловагии ромб.

1) Диагоналҳои ромб байни якдигар перпендикуляр.

2) Диагоналҳои ромб биссектрисаи кунҷҳои дарунӣ мешавад.

3) Масоҳати ромб $S = \frac{1}{2} d_1 d_2$, дар ин ҷо d_1, d_2 — диагоналҳои ромб.

3°. Росткунча

Параллелограмми ҳамаи кунчаҳояш ба 90° баробар буда *росткунча* номида мешавад.

- 1) Диагонали росткунча баробаранд.
- 2) Масоҳати росткунча $S = ab$, дар ин ҷо a ва b — тарафҳои ҳамсояи росткунча.

4°. Квадрат

Росткунчаи ҳамаи тарафҳояш байни худ баробар квадрат номида мешавад. Ҳамаи хосиятҳои дар ромб ва росткунча ҷой дошта ба квадрат ҳам ҷой дорад.

Агар a — тарафи квадрат, d диагонали он бошад: $S = a^2$; $S = \frac{d^2}{2}$; $d = a\sqrt{2}$.

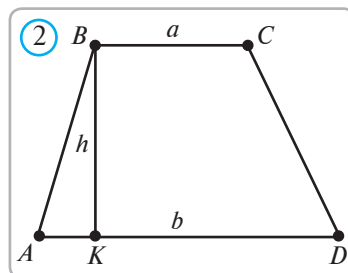
5°. Трапетсия

Чоркунҷаи ду тарафаш параллел (асосҳо) ва ду тарафи дигараш параллел набуда (тарафҳои паҳлӯӣ) *трапетсия* номида мешавад.

Порчаи миёнаҳои тарафи паҳлӯиро пайваस्तкунанда, *хати миёнаи трапетсия* номида мешавад.

Хосиятҳои асосӣ

- 1) Хати миёнаи трапетсия ба асосҳо параллел буда, ба нисфи суммаи асосҳо баробар аст.
- 2) Масоҳати трапетсия $S = \frac{a+b}{2}h$, дар ин ҷо a ва b — асосҳо, h баландӣ (расми 2).

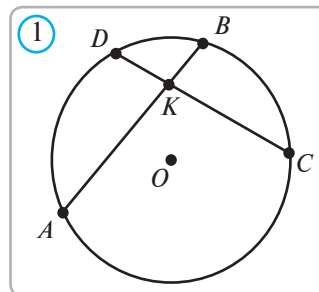


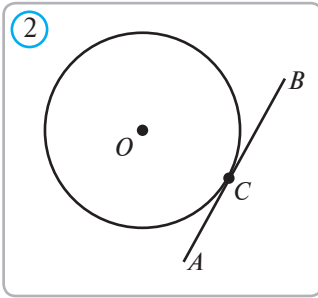
ДАВРА, ДОИРА

1°. Бигуздор дар ҳамворӣ адади мусбати R ва нуқтаи O дода шуда бошад, шакле, ки аз нуқтаи O дар масофаи R аз маҷмӯи нуқтаҳо ташкил шудааст, *давра* номида мешавад. Нуқтаи O маркази давра, порчаи маркази давраро ба нуқтаи давра пайваस्तкунанда радиус ва адади R бошад, *дарозии радиус* номида мешавад. Порчаи ду нуқтаи давраро пайваस्तкунанда хорда, хордаи аз маркази давра гузаранда *диаметр* номида мешавад. Қисми охирноки ба давра маҳдудкардашудаи ҳамворӣ, *доира* номида мешавад.

Муносибатҳои асосӣ

- 1) $D = 2R$, дар ин ҷо D — дарозии диаметр.
- 2) $L = 2\pi R$ — дарозии давра.
- 3) $S = \pi R^2$ — масоҳати доира.
- 4) AB ва CD ки хордаҳоянд, дар нуқтаи K бурида шаванд (расми 1), $AK \cdot KB = CK \cdot KD$ иҷро мешавад.
- 5) Диаметри хордаро ба ду қисми баробар тақсимкунанда ба ин хорда перпендикуляр аст.





6) Хордаҳои баробар аз марказ дар масофаҳои баробар ҷойгир шудаанд ва баръакс хордаҳои аз марказ дар масофаи якхела ҷой гирифта ба якдигар баробаранд.

2°. Расанда

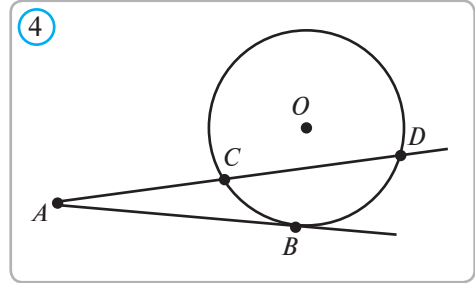
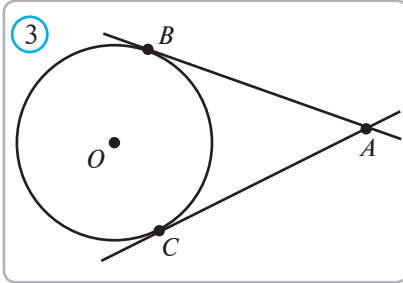
Хати росте, ки бо давра (ё ки доира) нуқтаи умумии ягона дорад, *расанда* номида мешавад. Нуқта бошад, *нуқтаи* расиш ном дорад (*расми 2*).

Хати рости бо давра 2- то нуқтаи умумӣ дошта,

буранда ном дорад.

Хосиятҳои расанда

- 1) Радиуси ба нуқтаи расиш гузаронидашуда ба расанда перпендикуляр аст.
- 2) Аз нуқтаи берунии доира ба ин доира дуто расанда гузаронидан мумкин. Порчаҳои ин расандаҳо ба якдигар баробаранд (*расми 3*): $AB=AC$.



- 3) Агар AC буранда шуда давраро дар нуқтаи C ва D бурида гузарад ва AB расанда бошад, баробарии $AB^2=AD \cdot AC$ ҷой дорад (*расми 4*).

3°. Кунҷҳои марказӣ ва дарункашида

Бо ёрии ду нуқтаи дар давра буда давра ба ду қисм ҷудо мешавад. Ин қисмҳо камонҳо ном дорад. Ишорати он: $\widehat{ADB}$; $\widehat{ACB}$.

Кунҷи AOB кунҷи марказии камони ADB-ро дарҳамкашандаи маркази (*расми 5*), кунҷи ACB бошад, камони ADB-ро дарҳамкашанда ва ба давра кунҷи дарункашида номида мешавад. Дар байни ин кунҷҳо муносибатҳои

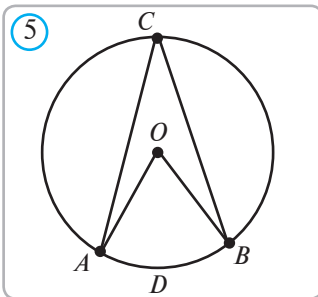
$$\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB$$

ҷой дорад.

Хусусан кунҷи дохилии нимдавраро (диаметрро) дарҳамкашанда кунҷи рост мешавад (*расми 6*). Кунҷи дохилии як камони давраро дарҳамкашанда баробаранд.

4°. Сектор ва сегмент

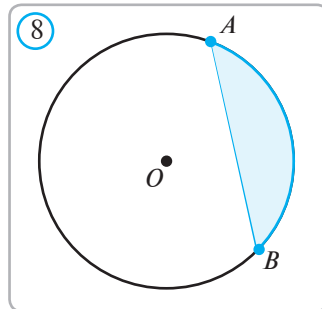
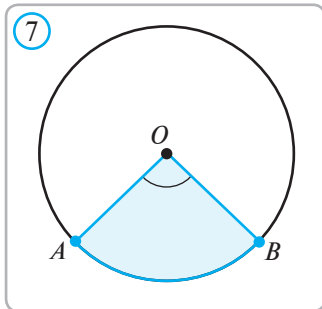
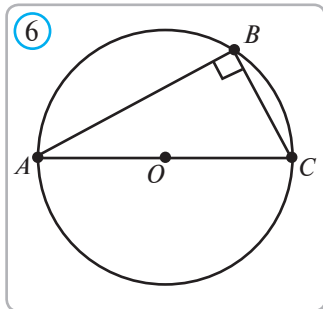
Қисми бо ду радиус маҳдуд кардашудаи доира



сектор номида мешавад (расми 7). Дарозии камони сектор: $l = \frac{\pi R \alpha}{180}$, дар ин ҷо α — ченаки градусии кунҷи марказӣ

Масоҳати секторҳо: $S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360}$; $S = \frac{1}{2} Rl$.

Сегмент — бо хордаи доира ва камони ҳамин хордаро дарҳамкашида маҳдуд аст (расми 8).



Масоҳати сегмент: $S = S_{\text{сектор}} \pm S_{\Delta} = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha \pm \frac{1}{2} R^2 \sin \alpha$

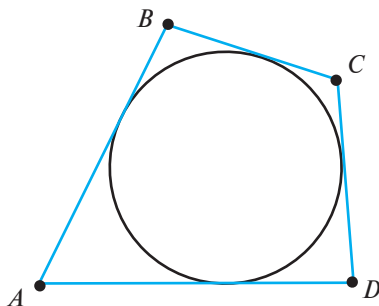
БИСЁРКУНҶАҲОИ МУНТАЗАМ

Тарафи n кунҷаи мунтазами a_n , периметраш P_n , масоҳаташ S_n , радиуси давраи дарункашидашуда r_n , радиуси давраи берункашида шуда R_n , кунҷи дарунин α_n бошад,

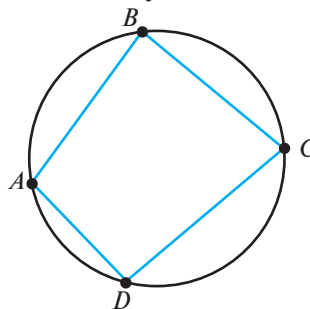
$$P_n = na_n, \quad S_n = \frac{1}{2} P_n r_n = \frac{1}{2} na_n r_n, \quad \alpha_n = \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$$

$$R_n = \frac{a_n}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}, \quad r_n = \frac{a_n}{2 \tan \frac{180^\circ}{n}}$$

Чоркунҷаҳои ба давра дарун 155 ва берункашидашуда.



$$BC + AD = AB + CD$$



$$\angle A + \angle C = 180^\circ$$

$$\angle B + \angle D = 180^\circ$$

Чадвали квадрати ададҳои натуралӣ аз 10 то 99

дахҳо воҳидҳо	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	100	400	900	1600	2500	3600	4900	6400	8100
1	121	441	961	1681	2601	3721	5041	6561	8281
2	144	484	1024	1764	2704	3844	5184	6724	8464
3	169	529	1089	1849	2809	3969	5329	6889	8649
4	196	576	1156	1936	2916	4036	5476	7056	8836
5	225	625	1225	2025	3025	4225	5625	7225	9025
6	256	676	1296	2116	3136	4356	5776	7396	9216
7	289	729	1369	2209	3249	4489	5929	7569	9409
8	324	784	1444	2304	3364	4624	6084	7744	9604
9	361	841	1521	2401	3481	4761	6241	7921	9801

Чадвали баъзе бузургиҳо

$\pi \approx 3,1416$	$\sqrt{8} \approx 2,8284$
$\sqrt{2} \approx 1,4142$	$\sqrt{10} \approx 3,1623$
$\sqrt{3} \approx 1,7320$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7071$
$\sqrt{5} \approx 2,2360$	$\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,5774$
$\sqrt{6} \approx 2,4495$	$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \approx 0,3183$
$\sqrt{7} \approx 2,6457$	

Ҷадвали қиматҳои функсияҳои тригонометрӣ

α°	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	α°	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
1	0,0175	1,000	0,0175	57,3	46	0,719	0,695	1,036	0,966
2	0,0349	0,999	0,0349	28,6	47	0,731	0,682	1,072	0,933
3	0,0523	0,999	0,0524	19,1	48	0,743	0,669	1,111	0,900
4	0,0698	0,998	0,0699	14,3	49	0,755	0,656	1,150	0,869
5	0,0872	0,996	0,0875	11,4	50	0,766	0,643	1,192	0,839
6	0,1045	0,995	0,1051	9,51	51	0,777	0,629	1,235	0,810
7	0,1219	0,993	0,1228	8,14	52	0,788	0,616	1,280	0,781
8	0,139	0,990	0,141	7,11	53	0,799	0,602	1,327	0,754
9	0,156	0,988	0,158	6,31	54	0,809	0,588	1,376	0,727
10	0,174	0,985	0,176	5,67	55	0,819	0,574	1,428	0,700
11	0,191	0,982	0,194	5,145	56	0,829	0,559	1,483	0,675
12	0,208	0,978	0,213	4,507	57	0,839	0,545	1,540	0,649
13	0,225	0,974	0,231	4,331	58	0,848	0,530	1,600	0,625
14	0,242	0,970	0,249	4,011	59	0,857	0,515	1,664	0,601
15	0,259	0,966	0,268	3,732	60	0,866	0,500	1,732	0,577
16	0,276	0,961	0,287	3,487	61	0,875	0,485	1,804	0,554
17	0,292	0,956	0,306	3,271	62	0,883	0,469	1,881	0,532
18	0,309	0,951	0,325	3,078	63	0,891	0,454	1,963	0,510
19	0,326	0,946	0,344	2,904	64	0,899	0,438	2,050	0,488
20	0,342	0,940	0,364	2,747	65	0,906	0,423	2,145	0,466
21	0,358	0,934	0,384	2,605	66	0,914	0,405	2,246	0,445
22	0,375	0,927	0,404	2,475	67	0,921	0,391	2,356	0,424
23	0,391	0,921	0,424	2,356	68	0,927	0,375	2,475	0,404
24	0,405	0,914	0,445	2,246	69	0,934	0,358	2,605	0,384
25	0,423	0,906	0,466	2,145	70	0,940	0,342	2,747	0,364
26	0,438	0,899	0,488	2,050	71	0,946	0,326	2,904	0,344
27	0,454	0,891	0,510	1,963	72	0,951	0,309	3,078	0,325
28	0,469	0,883	0,532	1,881	73	0,956	0,292	3,271	0,306
29	0,485	0,875	0,554	1,804	74	0,961	0,276	3,487	0,287
30	0,500	0,866	0,577	1,732	75	0,966	0,259	3,732	0,268
31	0,515	0,857	0,601	1,664	76	0,970	0,242	4,011	0,249
32	0,530	0,848	0,625	1,600	77	0,974	0,225	4,331	0,231
33	0,545	0,839	0,649	1,540	78	0,978	0,208	4,507	0,213
34	0,559	0,829	0,675	1,483	79	0,982	0,191	5,145	0,194
35	0,574	0,819	0,700	1,428	80	0,985	0,174	5,67	0,176
36	0,588	0,809	0,727	1,376	81	0,988	0,156	6,31	0,158
37	0,602	0,799	0,754	1,327	82	0,990	0,139	7,11	0,141
38	0,616	0,788	0,781	1,280	83	0,993	0,1219	8,14	0,1228
39	0,629	0,777	0,810	1,235	84	0,995	0,1045	9,51	0,1051
40	0,643	0,766	0,839	1,192	85	0,996	0,0872	11,4	0,0875
41	0,656	0,755	0,869	1,150	86	0,998	0,0698	14,3	0,0699
42	0,669	0,743	0,900	1,111	87	0,999	0,0523	19,1	0,0524
43	0,682	0,731	0,933	1,072	88	0,999	0,0349	28,6	0,0349
44	0,695	0,719	0,966	1,036	89	1,000	0,0175	57,3	0,0175
45	0,707	0,707	1,000	1,000	90	1,000	0,0000	-	0,0000

ҶАВОБҲО ВА НИШОНДОДҲО

- Дарси 1.** 1. 50° ; 130° ; 133° ; 97° . 2. 12 см. 3. 65° ; 70° ; 45° . 4. 105° ; 130° ; 125° . 5. 35° ; 35° ; 110° . 6. 94° ; 56° ; 30° . 7. 110° ; 130° ; 120° . 8. Нишондод: Дар чорто секунча тарафҳои ҳар кадомаш ба нисфи тарафҳои секунчаи аввала баробар аст. 9. Нишондод: Порчаи DF хати миёнаи секунчаҳои ABH ва CEB мешавад. 10. Нишондод: Аз баробарии кунҷҳои дарунии ивазшавандаи секунчаҳои ANC ва $СКА$ истифода баред.
- Дарси 2.** 1. $6\sqrt{6}$. 2. 36. 3. 30° . 4. а) 80° ; 80° ; 20° ; б) 70° ; 70° ; 40° . 5. 6,72 см. 6. 54. 7. 5 см; $25\sqrt{3}$ см²; 120° ; 30° ; 30° . 8. 55° ; 60° ; 65° . 9. 90° . 10. 140° . 11. 50° .
- Дарси 3.** 2. 78° ; 102° ; 78° ; 102° . 3. 53° ; 37° . 4. 110° ; 70° ; 110° ; 70° . 5. 45° ; 135° ; 45° ; 135° . 6. 20 см ё ки 28 см. 7. Нишондод: Росткунҷаи $ABCD$ -и тарафҳои пешаш $AB=2$ см, $BC=6$ см созад. Баъд давраҳои марказаш дар нуқтаҳои B ва C ва радиусаш 3 см бударо созад.
- Дарси 4.** 1. 30 см. 2. 13 см. 3. Нишондод: ба масъалаи 7-уми дарси 3 нигаред. 4. $880\sqrt{41}$ см². 5. а) 4 см, 8 см; б) 45° , 90° ; в) $16+8\sqrt{2}$ см, 32 см². 6. $18\sqrt{3}$ см². 7. 30 см². 8. 28 см; $28\sqrt{2}$ см.
- Дарси 5.** 3. Секунчаҳо монанд. 5. 5; 8; $\frac{1}{2}$. 6. 72; 162; 90.
- Дарси 6.** 3. 12 м. 4. 7,5 см; 12,5 см; 15 см. 5. 73,5 м²; 37,5 м². 6. Секунчаҳо монанд.
- Дарси 7.** 3. а) 4,5; б) 10,5; в) 4,5. 4. а) 10; б) 6; в) 4,5. 5. а) 5 см, 3,5 см; б) $5\frac{5}{7}$ см, $2\frac{2}{7}$ см. 6. а) 8; б) 3,5; в) 12,5. 8. 12 см.
- Дарси 8.** 4. а) ҳа; б) ҳа; в) не. 5. $2\frac{1}{3}$ см, 9. 6. а) 15 см; 20 см; б) 24 см; 18 см; в) 144 см²; 256 см². 8. 19,2 м.
- Дарси 9.** 2. ҳа. 3. а) ва в); г) ва д). 4. 108 см². 5. 4 см; 6 см. 7. 4,8 см. 9. 12.
- Дарси 10.** 2. а) ва е); б) ва д); е) ва ф). 3. 36 м ё ки 20,25 м. 4. 12 см; 14 см. 6. $5\frac{5}{11}$ см.
- Дарси 11.** 3. а) 15; б) $3\frac{2}{11}$; в) $3\frac{5}{17}$. 4. 18 см; 6 см. 5. 29 дм². 6. 6 дм. 7. $m:n$.
- Дарси 12.** 1. $3\frac{3}{17}$ м; 13,6 см. 7. $n:m$. 8. а) $S:4$; б) $S:2$; д) $S:4$.
- Дарси 13.** II. 1. 12 см². 2. 8,4. 3. 2,4. 4. 24. 5. 8. 6. 1,6. III. 1. 6 см. 2. 65 дм; 52 дм. 3. $AB \parallel EF$.
- Дарси 14.** 5. 1 км 750 м. 8. 7,2 см. 9. $k=\frac{1}{2}$ ё ки $k=2$.
- Дарси 15.** 4. $k=2$. 5. 6 см²; 24 см². 6. 104 см². 7. Дар ҳар ду ҳолат $k=1$. 8. 1,2 м². 9. 16 см, 32 см.
- Дарси 16.** 4. $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{9}$. 5. Нуқтаи буриши нурҳои X^*X ва Y^*Y маркази гомотетия аст. 6. $OX_1=2 \cdot OX$. 7. Нишондод: Аз ҳалли масъалаи мавзӯи истифода баред.

8. а) $OA_1 = \frac{2}{3}OA$; б) $OA_1 = 20A$; д) $OA_1 = 30A$; е) $OA_1 = OA$. 9. Нишондод: Аз расми 3-юми мавзӯи истифода баред.

Дарси 17. 4. а) $P_2 = 42$; $k = \frac{1}{2}$; б) $S_1 = 12$, $k = 2$; в) $P_1 = 150\sqrt{2}$, $k = \sqrt{2}$; г) $P_1 = 10$, $S_2 = 216$.

Дарси 18. 1. $\approx 6,97$ м. 2. 300 м. 3. ≈ 72 м. 4. 6,6 м.

Дарси 19. 1. 9. 2. 12 дм. 3. 8 м. 4. 24 дм². 6. Нишондод: Секунчаи ABCD кашед, аз масъалаи 1 мавзӯи сохтани бисёркунчаҳо истифода бурда секунчае созед, ки тарафҳояш аз тарафҳои секунчаи кашидашуда се маротиба хурд бошад.

Дарси 20. 1. 72°; 72°; 36°. 3. 12 см². 4. 15 000 000 км. 5. а) ҳа; б) ҳа. 7. 6 см, 12 см, 18 см. 8. 63 м.

Дарси 21. II. 1. 8 см. 2. $4\frac{4}{9}$ см. 3. 48 м. 4. 4 см; 0,5 см². 5. $5\frac{1}{3}$ м. 6. 867 км. III. 1. 7,5 м. 2. 6 см. 3. а) 7,5 см; б) 6 см; в) 16,2 см. Масъалаҳои шавқовар. 1. Тағйир намеёбад. 2. а) ҳа; б) не. 3. Нишондод: Бо хаткашак қадӣ ҳар як лўхтакро чен кунед ва нисбати онҳоро ёбед.

Дарси 22. 4. $\sin A = \frac{5}{13}$; $\cos A = \frac{12}{13}$; $\operatorname{tg} A = \frac{5}{12}$; $\operatorname{ctg} A = \frac{12}{5}$. 5. а) $\sin A = \frac{7}{25}$; $\cos A = \frac{24}{25}$; $\operatorname{tg} A = \frac{7}{25}$; $\operatorname{ctg} A = \frac{25}{7}$. $\sin B = \frac{24}{25}$; $\cos B = \frac{7}{25}$; $\operatorname{tg} B = \frac{25}{7}$; $\operatorname{ctg} B = \frac{7}{25}$. 6. $BC = \frac{11}{20}$; $AB = \frac{61}{20}$. 7. $AB = 34$; $AC = 30$.

Дарси 23. 4. а) 15 см; б) 8 см; в) 36,125 см; г) 31,875 см. 5. $\frac{15\sqrt{55}}{8}$ см. 7. 42 см². 8. 21 см². 9. 32 см². 10. 180 см².

Дарси 24. 3. $2\sqrt{3}$ дм, $4\sqrt{3}$ дм. 4. а) $12 + 4\sqrt{3}$; б) $6 + 6\sqrt{3}$; в) $16 + 8\sqrt{2}$. 5. а) $\angle A = 45^\circ$, $\angle B = 45^\circ$; б) $\angle A = 60^\circ$; $\angle B = 30^\circ$; в) $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 60^\circ$. 6. $\frac{25\sqrt{3}}{3}$ см². 7. 7 см; 24 см, $\cos A = \frac{24}{25}$, $\operatorname{tg} A = \frac{7}{24}$; $\operatorname{ctg} A = \frac{24}{7}$. 8. 120°; 120°; 60°; 60°.

Дарси 25. 1. 36 см². 2. 24 см. 3. а) $6\sqrt{3}$; б) 30; в) $\frac{105\sqrt{3}}{4}$. 4. $(24 + 4\sqrt{3})$ см; $(24 + 8\sqrt{3})$ см². 5. $10\sqrt{3}$ см. 6. а) $\frac{\sqrt{3}}{6}$; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 7. ≈ 807 м². 8. ≈ 88 м.

Дарси 26. 2. Тангенс дар 90° котангенс дар 0° ва 180° . 3. $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha < 0$, $\operatorname{tg} \alpha < 0$, $\operatorname{ctg} \alpha < 0$. 6. $\sin 45^\circ = \sin 135^\circ$; $\cos 45^\circ > \cos 135^\circ$. 7. 24 см; 18 см².

Дарси 27. 2. 1) $\sin^2 \alpha$; 2) $\cos^2 \alpha$; 3) 1; 4) $\cos^2 \alpha$; 5) $\cos^2 \alpha$; 6) $\sin^2 \alpha$. 3. а) $-\frac{3}{5}$; б) $\frac{\sqrt{5}}{3}$; д) 0. 4. $6\sqrt{3}$ см². 5. $0,8\sqrt{3}$ см, $1,6\sqrt{3}$ см. 6. а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{5}}{3}$; г) 0. 9. а) $A\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$; г) $A(-2; 0)$; д) $A\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}, 2\right)$.

Дарси 28. 4. а) 150° ; б) 135° ; в) 135° ; г) 150° . 5. а) 0; б) 1; в) 0; е) $-3,5$; 6. а) 1; б) 1; в) 1. 7. 3,5 см. 8. $36\sqrt{3}$ см². 9. а) $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$; б) $\pm \frac{\sqrt{15}}{4}$; в) 0. 10*. а) 30° ; б) 135° ; в) 150° .

Дарси 29. III. 2. 1000, 37° . 3. 2° . 4. 34° . 5. $2\sqrt{3}$; $4\sqrt{3}$. 6. $3\sqrt{3}$ см. 7. 5 см. 8. 12, $24\sqrt{3}$. 9. 20 см, 100 см². 10. 4, $16\sqrt{3}$. 11. 30° ; 60° . 13. 12 см; $4\sqrt{3}$ см; $8\sqrt{3}$ см. 14. 32 см². 15. $-\frac{15}{17}$; $-\frac{8}{15}$; $-\frac{15}{8}$. 16. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. 17. $12(\sqrt{3}+1)$, $72(\sqrt{3}+1)$. IV. 1. $\frac{15}{17}$; $-\frac{8}{15}$; $-\frac{15}{8}$.

2. $2\sqrt{77}$; 13° ; 77° . 4. Нишондод: Аз теорема дар бораи баробарии секунҷа-хо истифода баред.
- Дарси 30. 2. а) 6 см^2 ; б) $73,5 \text{ см}^2$; в) 6 см^2 . 3. 36 см^2 . 4. $49\sqrt{2} \text{ см}^2$. 5. $54\sqrt{3} \text{ см}^2$. 6. $\frac{22}{3} \text{ см}$; $4,5\sqrt{2} \text{ см}$. 7. $\frac{h_a h_b}{2 \sin \alpha}$. 8. $4,8\sqrt{3} \text{ см}$.
- Дарси 31. 2. а) $BC=6$; б) $AB=8\sqrt{2}$; в) $AC=7\sqrt{2}$. 3. а) $\sin C=\frac{1}{3}$; б) $\sin A=\frac{21}{40}$; в) $\sin B=\frac{16}{21}$. 4. $4,8 \text{ дм}$. 5. 30° ё ки 150° . 6. Мумкин. 7. $AB \approx 21,1 \text{ м}$; $\angle B \approx 37^\circ$, $\angle C \approx 76^\circ$. 8. 76° ; $26,1 \text{ см}$; $23,8 \text{ см}$.
- Дарси 32. 2. а) $\sqrt{13} \text{ см}$; б) 4 м ; в) $\sqrt{283} \text{ дм}$. 3. $\frac{1}{5}$; $\frac{19}{35}$; $\frac{5}{7}$. 4. $2\sqrt{13} \text{ см}$ ё ки $2\sqrt{109} \text{ см}$. 5. $\sqrt{31} \text{ см}$, $\sqrt{91} \text{ см}$. 6. $\sqrt{109} \text{ см}$, $\sqrt{39} \text{ см}$. 7. Нишондод: Аз теоремаи косинус истифода бурда, a^2 ва c^2 -ро ёбед, сипас ин баробариҳоро аъзо ба аъзо чамъ кунед. 8. $\frac{\sqrt{106}}{2} \text{ см}$; $\frac{\sqrt{151}}{2} \text{ см}$; $\frac{\sqrt{190}}{2} \text{ см}$.
- Дарси 33. 1. $\angle B$ ва $\angle C$. 2. AB ва BC . 3. а) тезкунча; б) росткунча; в) кундкунча. 4. а) $8\frac{1}{8}$; б) $8\frac{1}{6}$; в) $24\frac{1}{6}$; г) $\frac{35\sqrt{6}}{24}$. 6. Нишондод: Аз теоремаи синусҳо истифода баред. 7. Нишондод: 7. Чун масъалаи 6 ҳал кунед. 8. Нишондод: Аз теоремаи синусҳо истифода баред.
- Дарси 34. 1. а) $10\sqrt{3}$; б) $28\sqrt{2}$; в) 12 ; г) $\approx 0,1532$. 2. а) $-2,5$; б) 0 ; в) 2 . 3. а) 8 ; б) 24 ; в) 8 ; г) 0 . 5. а) $-7,5$; в) 0 . 6. $a \perp b$, $c \perp d$.
- Дарси 35. 1. а) $\alpha=90^\circ$, $a=b=5$, $c=5\sqrt{2}$. б) $\gamma \approx 45^\circ$; $b \approx 17,9$, $c \approx 14,6$; в) $\alpha=20^\circ$; $b \approx 65,8$; $c \approx 88,6$; г) $\gamma=119^\circ$; $a \approx 16,7$; $b \approx 11,2$. 2. а) $c \approx 5,29$; $\alpha \approx 79^\circ 6'$; $\beta \approx 138^\circ 21'$; б) $c \approx 53,09$; $\alpha \approx 11^\circ 39'$; $\beta \approx 38^\circ 21'$; в) $a \approx 19,9$; $\beta \approx 58^\circ 19'$; $\gamma \approx 936^\circ 41'$; г) $a \approx 22,9$; $\beta \approx 21'$; $\gamma \approx 15^\circ$. 3. а) $\alpha \approx 29^\circ$; $\beta \approx 47^\circ$; $\gamma \approx 104^\circ$; б) $\alpha \approx 54^\circ$; $\beta \approx 13^\circ$; $\gamma \approx 113^\circ$; в) $\alpha \approx 34^\circ$; $\beta \approx 44^\circ$; $\gamma \approx 102^\circ$; г) $\alpha \approx 39^\circ$; $\beta \approx 93^\circ$; $\gamma \approx 48^\circ$.
- Дарси 36. 1. а) $2\sqrt{3} \text{ см}$; б) 16 см ; в) $\frac{ab\sqrt{2}}{4}$. 2. $4\sqrt{2} \text{ м}$; 8 м ва $4+4\sqrt{3} \text{ м}$. 3. $50\sqrt{3} \text{ кг}$. 4. 14 см . 5. $2\sqrt{14} \text{ см}$. 6. $6\sqrt{3} \text{ см}$. 7. 50 см .
- Дарси 37. 1. $\approx 10,8 \text{ м}$. 2. $\approx 15 \text{ м}$. 3. $\approx 43,4 \text{ м}$. 4. $\approx 35^\circ$. 5. $\approx 73,2 \text{ м}$. 6. $\approx 49 \text{ м}$. 7. Аз роҳи асфалт.
- Дарси 38-39. II. 1. $3\sqrt{6}$, $3\sqrt{2}$. 2. $\frac{111}{120}$; $0,89$; $-0,65$. 3. $2\sqrt{7} \text{ см}$; $\frac{2\sqrt{21}}{3} \text{ см}$. 4. $30\frac{1}{30} \text{ см}$. 5. 28 см . 6. 8 см^2 ; $(4+4\sqrt{5}) \text{ см}$; $h_a=4 \text{ см}$, $h_b=0,8\sqrt{5} \text{ см}$. 7. $2\sqrt{13}$. 8. а) кунҷҳои тез; б) кунҷҳои рост, в) кунҷҳои кунд. 9. 63 см^2 . 10. $\approx 3,7 \text{ см}$. 11. 7 см . 12. 6. 13. 0. 14. -9 . 15. 135° . 16. $OC \approx 9,6$. 17. $(24+24\sqrt{3}) \text{ см}$. 18. 5. III. 1. $\approx 109^\circ$. 2. $\gamma=100^\circ$, $a \approx 3,25$; $c \approx 6,43$. 3. $6,25$; $14,76$.
- Дарси 40. 2. а) Секунҷаҳои дилҳох дар давра дарун кашида шуданаш мумкин; б) Чоркунҷае, ки ҳосили чамъи кунҷҳои муқобилашон ба 180° баробаранд. 3. Кунҷҳои ба як камон часпида баробар. 4. 10 см . 5. 672 см^2 . 6. а) $10\sqrt{3} \text{ см}$; б) $10\sqrt{2} \text{ см}$; в) $10\sqrt{2} \text{ см}$; $10\sqrt{2} \text{ см}$; 20 см . 7. $8\frac{1}{3} \text{ см}$. 8. Дар $\triangle ABF$, $\angle BAF + \angle AFB = 90^\circ$, $\angle ABF = 90^\circ$. Ҳамин тавр, AF - диаметр. 9. Ҳосили

чамъи кунҷҳои муқобил 180° , яъне давра кашидан мумкин. **10.** Нишондод: Перпендикулярӣ миёнаи нуқтаи буриши як асос ва як тарафи паҳлуи маркази давра мешавад.

Дарси 41. **2.** 7,2 см. **3.** а) 16,6; б) 22; в) 22,6. **4.** а) 2,5; б) 3,5; в) 2. **8.** 6 см.

Дарси 42. **3.** а) 60° ; б) 108° ; в) 120° ; г) 144° ; д) 160° . **4.** а) 120° ; б) 72° ; в) 120° ; г) 36° ; д) 30° . **5.** а) 3; б) 4; в) 8; г) 12.

Дарси 43. **1.** 3 см ва $3\sqrt{2}$ см. **2.** $\sqrt{3}$ ва $2\sqrt{3}$. **7.** а) 6; б) 12; в) 10; г) 20; д) 5.

Дарси 44. **3.** 8 см; $8\sqrt{2}$ см; $8\sqrt{3}$ см; $8\sqrt{2}+3$ см; 16 см.

4. $\frac{8\sqrt{6}}{3}$ см; **5.** а) $20\sqrt{2}$ см; б) 40 см. **6.** $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ см.

Дарси 45. **I.** 1. Г; 2. В; 3. В; 4. Б; 5. Б; 6. Г; 7. Г. **III.** 1. $\sqrt{3}:4$; $6\sqrt{3}$. 2. 3:4. 3. а) $\approx 5,780$ см; б) $\approx 4,142$ см; в) $\approx 2,679$ см. 4. $S=\sqrt{2}R^2$. 5. 24 см^2 . **IV.** 1. 4 см; 13 см. 2. а) 80 см; б) $20\sqrt{2-\sqrt{3}}$ см; $40\sqrt{2-\sqrt{3}}$ см; в) 200 см^2 . 3. $4\sqrt{3}$ см; 8 см. 4. $\frac{27\sqrt{3}}{4}\text{ см}^2$.

Дарси 46. **2.** а) 3 маротиба зиёд; б) ба 6π см зиёд; в) 3 маротиба хурд мешавад; е) 6π см хурд мешавад. **3.** 6369 км. **4.** а) $\frac{2\pi\sqrt{3}a}{3}$; б) $\pi\sqrt{a^2+b^2}$; в) $\frac{2\pi b^2}{\sqrt{4b^2-a^2}}$. **5.** а) πa ; б) $\pi c(\sqrt{2}-1)$; в) $\pi c(\sin\alpha + \cos\alpha - 1)$. **6.** 1,5 м. **7.** 66348 маротиба.

Дарси 47. **1.** а) π см; б) $1,5\pi$ см; в) 3π см; г) 4π см. **2.** а) $\frac{2\pi}{9}$; б) $\frac{\pi}{3}$; в) $\frac{5\pi}{12}$. **3.** а) $\approx 69^\circ$; б) 120° ; в) 150° . **4.** а) $\frac{5\pi}{8}$ см; б) 2π см; в) $\frac{15\pi}{4}$ см; **5.** а) 4π ; б) 16π . **7.** 2.

Дарси 48. **3.** k^2 маротиба калон мешавад; б) k^2 маротиба хурд мешавад. **4.** $6,25\pi\text{ см}^2$; $12,5\pi\text{ см}^2$. **5.** $2,25\pi\text{ см}^2$; $9\pi\text{ см}^2$. **6.** $(\pi-2)R^2$. **7.** $21,25\pi\text{ см}^2$. **8.** $7,5\text{ см}^2$.

Дарси 49. **3.** а) $\frac{49}{12}\pi\text{ см}^2$; $\frac{49(\pi-3)}{12}\text{ см}^2$; б) $6,125\pi\text{ см}^2$; $\frac{49(\pi-2\sqrt{2})}{8}\text{ см}^2$; в) $\frac{49\pi}{3}\text{ см}^2$; $\frac{49(4\pi-3\sqrt{3})}{12}\text{ см}^2$; г) $\frac{49\pi}{4}\text{ см}^2$; $\frac{49(\pi-2)}{4}\text{ см}^2$. **4.** а) $a^2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{8}\right)$; б) $a^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$; в) $\frac{3\sqrt{3}-\pi}{2}a^2$; **5.** $\pi\text{ см}^2$; $3\pi\text{ см}^2$; $5\pi\text{ см}^2$; $7\pi\text{ см}^2$. **6.** $\frac{25(2\pi-3\sqrt{3})}{3}\text{ см}^2$; $\frac{25(10\pi+3\sqrt{3})}{3}\text{ см}^2$; **7.** $\frac{75\cdot(4\pi-3\sqrt{3})}{2}\text{ см}^2$. **8.** $S_1 < S < S_2$; $300\text{ см}^2 < 314\text{ см}^2 < 321,48\text{ см}^2$.

Дарси 50. **1.** Аз они доира калон. **2.** $\frac{160\pi}{3}\text{ см}^2$. **3.** $5,76\pi\text{ см}^2$. **4.** $8\cdot(\pi-2)\text{ см}^2$. **6.** $6\pi\text{ см}^2$; $10\pi\text{ см}$.

Дарси 51. **II.** 1. $6\sqrt{2+\sqrt{2}}$. 2. $\frac{8\pi}{3}$ дм. 3. 30 см. 4. 90° . 5. 3. 6. π ва $6,25\pi$. 7. $\frac{10\pi+3\sqrt{3}}{2\pi-3\sqrt{3}}$. 8. $\frac{2\sqrt{3}}{\pi}$. 9. $\frac{9\sqrt{3}-2\pi}{6}a^2$. 10. $1,5\pi$. 11. 7. 12. $\approx 9\pi-26,04$. 13. π . 14. $54\sqrt{3}-24\pi$. 15. $\frac{3\pi}{8}$. **III.** 2. $8\sqrt{3}$ см. 3. а) $\frac{18}{\pi}\text{ см}$; б) $\frac{216}{\pi}\text{ см}^2$; д) $\frac{216\pi+81\sqrt{3}}{\pi^2}\text{ см}^2$.

Дарси 52. **3.** $5\sqrt{2}$ см. **4.** 12 см. **5.** 44 м, 60 м. **7.** 1:7. **8.** $AB\cos\alpha$.

Дарси 53. **1.** а) 30 см, 12 см; б) 9 см, 12 см, 21 см; в) 3 см, 15 см, 3 см, 21 см.

3. 6 см; 10,5 см. 4. 9 см, 12 см, 15 см, 18 см. 5. 60° . 6. 21 см. 7. 20 см.
- Дарси 54. 1. Нишондод: $\triangle ACD \sim \triangle CBD \sim \triangle ABC$. 2. 25 см, 15 см, 20 см. 3. $9\frac{3}{5}$ см.
4. а) 5, 4; б) 24, 25; в) 8, 10. 5. 16:25. 6. 56, 16 см². 7. 60 см². 8. $\frac{2}{3}; \frac{4}{9}; \frac{2}{3}$.
- Дарси 55. 2. Нишондод: а) секунҷаи росткунҷае катетҳояш a ва b - ро созед; б) секунҷаи росткунҷае гипотенузааш a ва як катетааш b -ро созед. 3. Нишондод: секунҷаи $\triangle ABC$ -и катетҳояш $AB = BC = 1$ созед баъд. секунҷаи $\triangle BCC_1$ -и катет $CC_1 = 1$ ва $\angle C_1 = 90^\circ$ доштаро созед ва ҳоказо. 4. а) 20; б) 45; в) 37,5. 5. 225 см². 6. 180 см². 7. 25:9. 9. $OC \geq OD$ буян набаробари ҳама вақт дуруст.
- Дарси 56. 1. а) 6,25; б) 12; в) 0,25. 2. а) 8 см; б) 2,5 см; в) 0,9 см. 3. а) 4 дм; б) 4 дм.
4. 4 см. 6. 9 дм; 16 дм.
- Дарси 57. 1. 10 см. 2. 2 см. 3. а) 2,5; б) 4; в) 2. 4. а) $4\sqrt{6} - 1$ см; б) 6 см. 5. 1:6. 6. 6 см.
7. 3. 8. 1:4.
- Дарси 58. II. 1. 18 см; 32 см. 2. 4 см; 3. 8 см; 4. 6,4 дм. 5. 8 см. 6. 1,5. 7. 5. 8. 6.
9. 45 дм². 10. 4 см. 11. 8 см. 12. 6. 13. 60° . 14. 45° . 15. 4:9. III. 1. 8 см.
2. 5 дм. 3. 4 см; 8 см.
- Дарси 59. 1. а) 12 (кв.в.); б) 20 (кв.в.); в) 12 (кв.в.); г) 12 (кв.в.); д) 42 (кв.в.).
2. 4 см. 3. а) 12; б) 288. 4. а) $\frac{6\sqrt{133}}{19}$; б) $2\frac{1}{3}$. 5. а) (3;2); б) (2,5; -0,5);
в) (-1;4); г) (-0,5;3,1). 6. D(2; -1). 8. 10 см; 25 см. 9. 60° ; 90° ; 120° ; 90° .
10. 6 см. 11. $6\sqrt{2}$ см.
- Дарси 60. 1. а) 4; б) 6; в) 5; г) 5. 2. $4\sqrt{13} + \sqrt{82} + \sqrt{58}$. 4. трапетсия. 5. $x=4$, $y=3$.
7. $b-a$; $-a-2b$; $2a+b$. 8. 5N. 9. $18\sqrt{3}$; $27\sqrt{3}$. 10. $4\sqrt{2}$ см. 11. $PA = PB$ ва
 $PA = PC$ барои буданаш $PB = PC$.
- Дарси 61. 2. 45° ; 90° ; 135° ; 90° . 3. 45° . 4. 60° . 5. 3 см; 8 см. 7. 28 см. 9. 45° .
- Дарси 62. 1. 8,4 см, 10,5 см, 14,7 см. 2. 175 дм²; 252 дм². 3. 12 см². 4. 6. 5. $9(3 - \sqrt{3})$
см². 6. 8 см. 7. 5 см; 2 см; 5 см; 8 см. 8. 3 см, 4 см.
- Дарси 63. 1. 2 см. 2. 6 дм; 9,6 дм; 6,5 дм; 10,4 дм. 3. ҳа. 4. $\sqrt[4]{27}$; $3\sqrt[4]{3}$. 5. 16,9 см.
6. 150 см². 7. (0; -6). 8. Ба якҷумаш. 9. 80- то. 10. 7 дм². 11. а) 180 дм³;
б) 105 см³; д) 1296 см³.
- Дарси 64. 1. -12,5. 2. 20 см. 3. ҳа. 4. 5 см, 13 см. 5. 3 см. 6. 8 см. 7. 30π см. 8. 5 см. 9.
25 см ё ки $20\sqrt{2}$ см.
- Дарси 65. 1. 4,5 см; 6,75 см. 2. $\frac{20}{9}$ см, 4 см; 4,8 см. 3. 12 см. 4. 2 см. 5. 6,72.
6. $2\sqrt{26}\pi$. 7. $25\sqrt{3}$ см². 8. 84 см². 9. $675\sqrt{3}$ см².
- Дарси 66. 1. $4\frac{129}{1024}$. 2. 100° ; 80° . 3. 4 см. 4. 24 см². 5. 4,8 м. 6. 30 м². 7. 7. 8. 10 см
ё ки $2\sqrt{97}$ см.
- Дарси 67-68. 1. а) 9; б) 4 см²; в) 3,5 см; г) $\frac{4}{3} TB - CA$; д) 0,2. 2. $\triangle CMH \sim \triangle BCA$.

X 33 Қ.Ҳайдаров Баҳодир

Геометрия: китоби дарси барои донишомӯзони синфҳои 9-уми мактабҳои миёнаи таълими умумӣ /Б.Ҳайдаров, Э.Сариқов, А. Қўчқоров. — Т.:, 2014.— 160 с.

Қ.Ҳайдаров Баҳодир
ISBN 978-9943-07-307-4

UO*К 514.1(075)
ББК 22.151ya721

Bahodir Qayumovich Haydarov,
Ergashvoy Sotvoldiyevich Sariqov,
Atamurod Shamuratovich Qo'chqorov

GEOMETRIYA

9-sinf uchun darslik

Uchinchi nashri
(*Tojik tilida*)

«O'zbekiston milliy ensiklopediyasi» Davlat ilmiy nashriyoti, 2014.
Toshkent-129, Navoiy ko'chasi 30-uy.

Оригина́л макет да́р на́шриёни "Хуқуқ ва Ҷамъият" тайёр карда шудааст.

Тарчимон	А.Эшонқулов
Муҳаррир	Э.Турдиқулов
Муҳаррир техникӣ	М. Садиров
Ороишгар	Х.Сариқов
Саҳифабанд	С. Қўчқорова

Литсензия АИ №160, 14.08.2009.

Ба чопаш 04.08.2014 иҷозат дода шуд. Андозаи 70 x 90 $\frac{1}{16}$. Гарнитурани Таймс.
Кегли 11. Қоғози офсет. Чопи офсетӣ. Қўзъи чопии шартӣ 11,7 Қўзъи нашриву ҳисобӣ
10,53. Теъдоди нашр 6740 дона. Супориш №14-294

Дар ХЭТН «O'zbekiston»-и Оҷонсии матбуот ва иттилооти Республикаи Ўзбекистон,
100129, Тошканд, кўчаи Навой, 30 чоп шудааст.

Чадвали нишондиҳандаи ҳолати китоби ба ичора додашуда

№	Ному насаби хонанда	Соли хониш	Ҳолати китоб ҳангоми гирифтани	Имзои раҳбари синф	Ҳолати китоб ҳангоми супоридан	Имзои раҳбари синф
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Китоб ҳангоми ба ичора дода шудан ва дар охири соли хониш ҳангоми баргардонида гирифтани чадвали болоӣ аз тарафи раҳбари синф аз рӯи меъёрҳои зерин баҳо гузошта мешавад:

Нав	Ҳолати китоб ҳангоми бори аввал супоридан.
Нағз	Муқовааш бутун, аз қисми асосии китоб ҷудо нашудааст. Ҳамаи варақҳои хаст, нодарида, ҷудо нашуда, дар саҳифаҳо навишт ва хатҳо нест.
Қаноатбахш	Муқова қатъи шудааст, қаноатбахш қотида, яқинд хатҳо қотида шудаанд, ҳолати аз қисми асосӣ ҷудошавӣ дорад, аз тарафи истифодабаранда қаноатбахш таъмир гардидааст. Варақҳои ҷудошудааш аз нав таъмир гашта, дар баъзе саҳифаҳо хат қотида шудаанд.
Ғайри-қаноатбахш	Муқова хат қотида шудааст, даридааст, аз қисми асосӣ ҷудо шудааст ё қи умуи нест, ғайриқаноатбахш таъмир шудааст. Саҳифаҳо дарида, варақҳо намерасанд, хат қотида, ранг қарда партофта шудааст, китоб ро барқарор қарда намешавад.