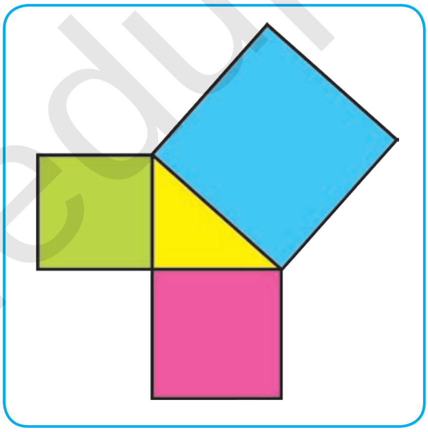
А.А. РАҲИМҚОРИЕВ, М.А. ТӮХТАХОДЖАЕВА

ГЕОМЕТРИЯ 8

Китоби дарсӣ барои донишомӯзони синфҳои 8-уми мактабҳои таълими миёнаи умумӣ

Нашри чоруми такмилёфта ва пурракардашуда

Вазорати таълими халқи Республикаи Ӯзбекистон ба нашр тавсия намудааст



ТОШКАНД
«YANGIYO‘L POLIGRAPH SERVICE»
2019

UO‘K 514(075)
KBK 22.151 я 721
R 45

Муқарризон:

Н.А. Умарова — омӯзгори калони МХБТИ – ХТХ вилояти Тошканд;

Г.А. Фозилова — омӯзгори фанни математикаи мактаби таълими миёнаи умумии рақами 274-уми ноҳияи Юнусободи шаҳри Тошканд.

Китоби дарсӣ аз тарафи таълими маркази Республика 25 – уми ноябри соли 2018 дар асоси модули блоки фанҳои аник ва дастури таълими миёнаи умумӣ барои синфи 8-ум навишта шудааст. Ба китоби дарсӣ мувофики нишондоди таълими миёнаи умумӣ мақсад ва вазифаҳои омӯзиши фанни математика ва талаботи ба фаолияти саводхонии донишомӯзон гузошта шуда акс ёфтааст. Китоби дарсӣ барои дар донишомӯзон ташаккул додани элементҳои компетенсиявии фанниро фаро гирифтааст.

Дар ҷараёни аз нав такмилсозӣ фикрҳои экспертон ва тақризчиён ба инобат гирифта шуд.

Дар охири ҳар як боб тестҳо ва намунаи корҳои назоратӣ оварда шудааст, ки ин барои ба корҳои назоратӣ пухта тайёрӣ дидан кӯмак мерасонад.

Дар рукни маълумотҳои таърихӣ оиди хизматҳои бузурги олимону файласуфонамон, ки дар ин соҳа ҳиссаи беқиёс ва корҳои илмию таърихӣ гузоштаанд, шинос хоҳед шуд.

Дар рукни «забони англисиро меомӯзем» тарҷумаи истилоҳҳои муҳими математикӣ дар мавзӯъҳои додашуда ба забони англисӣ оварда шудааст.

Аз масъалаҳои ба қисми такрорӣ додашуда дар давоми сол истифода хоҳед бурд.

Барои аз худ намудани донишҳои ба ҳар як мавзӯъҳои додашуда ба Шумо муваффақиятхо орзумандем!

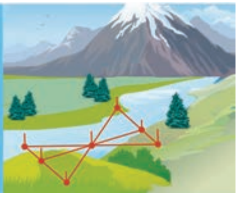
АЛОМАТҲОИ ШАРТИИ КИТОБИ ДАРСӢ:

- ▭ - Қоида, хосият, таърифҳо;
- ? - Савол ва супоришҳои фаъолкунанда;
- 🟦 - Машқҳои дар синф иҷрокунанда;
- 🟪 - Машқҳои инкишофдиҳанда;
- ⬢ - Намунаи ҳалли масъалаҳо;
- ⬬ - Машқҳо барои супориши вазифаи хонагӣ.

Аз ҳисоби маблағҳои бунёди максадноки китоби Республика ба ичора чоп шудааст

ISBN 978-9943-25-816-7

ТАКРОРИ МАВОДҲОИ ДАР СИНФИ 7-УМ ОМӮХТАШУДА



1. Масъалаҳо доир ба периметр, биссектриса ва баландии секунча

Савол, масъала ва супоришҳо

1. Периметр, медиана, баландӣ ва биссектрисаи секунча чист?

2. Биссектрисаи секунчаи периметраш ба 18 см баробар буда онро бо ду секунчаҳои периметраш ба 12 см ва 15 см баробар чудо мекунад. Биссектрисаи секунчаро ёбед (расми 1).

3. Медианаи ба асоси секунча фаровардашуда онро ба ду секунчаҳои периметрҳояш ба 18 см ва 24 см баробар буда чудо мекунад. Тарафи паҳлӯии хурди секунчаи додашуда ба 6 см баробар аст. Тарафи пахлӯи калони онро ёбед (расми 2).

4. Дар секунчаи ABC, ки $AB=BC$ ва медианаи BD ба 6 см баробар аст. Периметри секунчаи ABD ба 24 см баробар аст. Периметри секунчаи дода шударо ёбед (расми 3).

Дода шудааст: дар $\Delta\ ABC$: $AB=BC$, $BD=6$ см – медиана, $P_{ABD}=24$ см.

Ёфтан лозим: $P_{ABC}=?$

Ҳал. 1) $P_{ABD}=AB+BD+AD$, аз ин:

$24=AB+AD+6$, $AB+AD=24-6$, $AB+AD=18$ (см).

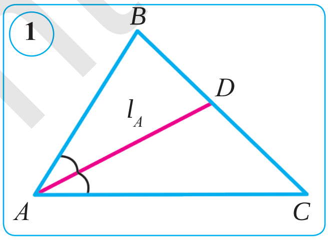
2) $AB=BC$ ва $AC=2AD$, дар ин ҳолат

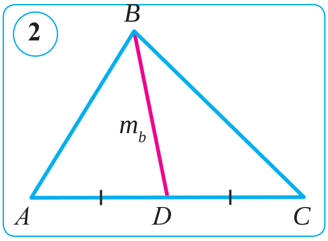
$P_{ABC}=AB+BC+AC=2(AB+AD)=2\cdot18=36$(см).

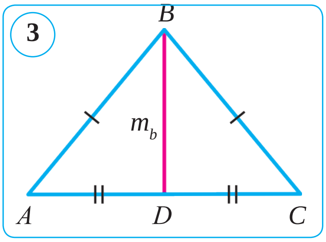
Чавоб: $P_{ABC}=36$ см.

5. Ду тарафи секунча ба 0,5 дм ва 8,7 дм баробар аст. Дар ҳолати адади натуралӣ дарозии будани тарафи сеюмро дониста ҳамин тарафро ёбед.

6. Биссектрисаи секунчаи периметраш ба 30 см баробар буда онро бо секунчаҳои периметраш ба 16 см ва 24 см баробар буда чудо мекунад. Биссектрисаи секунчаро ёбед.







7. Баландии секунҷаи периметраш ба 36 см баробар буда онро бо секунҷаҳои периметраш ба 18 см ва 24 см баробар буда ҷудо мекунад. Баландии секунҷаро ёбед.

8. Периметри секунҷаи баробарпаҳлӯ 22,5 см, тарафи паҳлӯиаш бошад, 0,6 дм. Асоси ҳамин секунҷаро ёбед.

2. Аломатҳои баробарии секунҷаҳо, масъалаҳо доир ба суммаи кунҷҳои секунҷа ва хосиятҳои кунҷи берунӣ

9. Дар секунҷаҳои ABC ва DEF: $AB = DE$, $AC = DF$, $\angle A = \angle D$. Оё ин секунҷаҳо баробаранд?

10. Нисбати кунҷҳои дохилии ба кунҷи берунии 117°-а ҳамсоя набудаи секунҷа $5:4$ аст. Кунҷҳои дохилии секунҷаро ёбед.

11. Дар секунҷаҳои баробартарафи ABC, биссектрисаҳои AD ва BE дар нуқтаи O якдигарро мебуранд. Кунҷи байни биссектрисаҳои AOE-ро ёбед.

12. Оё дар секунҷаи баробарпаҳлӯ кунҷи асоси он кунд шуда метавонад?
Ҳал. Ба мо маълум аст, ки дар секунҷаи баробарпаҳлӯ кунҷҳои назди асос баробаранд. Аммо суммаи ду кунҷи кунд аз 180° калон мебошад. Ин ба теоремаи доир ба суммаи кунҷҳои дохилии секунҷа муқобил аст. *Ҷавоб:* не, шуда наметавонад.

13. Нисбати кунҷҳои дохилии ҳамсоя набуда, ба кунҷи берунии 180°-аи секунҷа мисли $2:7$ аст. Кунҷҳои дохилии секунҷаро ёбед.

14. Ду тараф ва кунҷи як секунҷа мувофиқан бо ду тараф ва кунҷи секунҷаи дуюм баробаранд. Оё ин секунҷаҳо баробаранд?

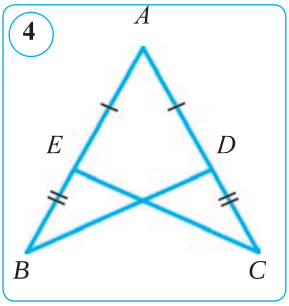
15. Дар секунҷаҳои ABC ва $A_1B_1C_1$ тарафҳои AB ва A_1B_1, BC ва B_1C_1 баробар, инчунин ба тарзи мувофиқ ба тарфҳои AB ва A_1B_1 гузаронида, медианаи CD ва C_1D_1 ҳам баробар аст. Баробарии секунҷаро исбот кунед.

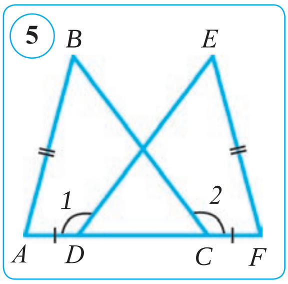
16. Дар расми 4 $AB = AC$ ва $AE = AD$. $BD = CE$ буданшаро исбот кунед.

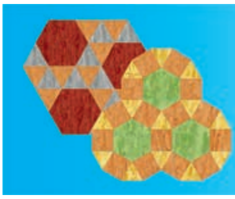
17. Дар расми 5 $AD = CF$, $AB = FE$ ва $CB = DE$. $\angle 1 = \angle 2$ буданашро исбот намоед.

18. Кунҷи B-и секунҷаи ABC ба 42° ва кунҷи берунии назди қуллаи A ба 100° баробар аст. Кунҷи ACB-ро ёбед.

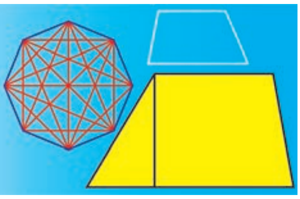
19. Дар секунҷаи росткунҷаи ABC кунҷи C рост аст, кунҷи берунии қуллаи A ба 136° баробар аст. Кунҷи B-ро ёбед.







БОБИ 1. ЧОРКУНҶАҲО



§ 1. ЧОРКУНҶАҲОИ АСОСӢ ВА ХОСИЯТҲОИ ОНҲО

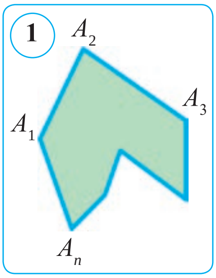
1. ХОСИЯТИ КУНҶҲОИ ДОХИЛӢ ВА БЕРУНИИ БИСЁРКУНҶА

1. Бисёркунҷаҳо. Шакли аз порчаҳои A_1A_2, A_2A_3, …. , $A_{n\text{-}1}\,A_n$, A_1 сохта шударо дида мебароем. Порчаҳо ҳаминтавр ҷойгиранд, ки ҳеҷ кадоми аз ду *порчаи* ҳамсоя (онҳо ба куллаи умумӣ соҳиб) дар як хати рост намехобад, порчаҳои ҳамсоя набуда бошад, ба нуқтаи умумӣ соҳиб нестанд (расми 1). Ин гуна шакл ***бисёркунҷа*** ном дорад. Нуқтаҳо (куллаҳо)-и A_1, A_2, …. , A_n ***куллаҳои бисёркунҷа***, порчаҳои A_1A_2, A_2A_3, …., $A_{n\text{-}1}\,A_n$, A_nA_1 бошад, ***тарафҳои бисёркунҷа*** номида мешавад.

Тарафҳои бисёркунҷа ба шумораи куллаҳои он, яъне ба шумораи кунҷҳо баробар аст. Куллаҳо (тарафҳо)-и бисёркунҷа муофиқи шуморааш ба *секунҷаҳо, чоркунҷаҳо, панҷкунҷаҳо* ва ҳоказо тақсим мешаванд.

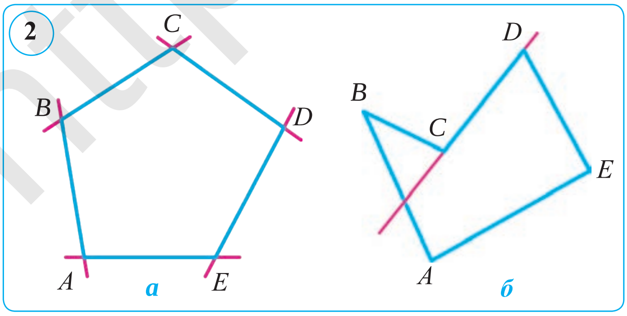
Агар хати шикастаи сарбаста якдигарро набурад, ин *хати шикастаи содда* ном дорад. Он нуқтаҳои ба хати шикаста тааллуқ надоштаи ҳамвориро ба ду *соҳа – соҳаҳои дохилӣ ва берунӣ* ҷудо намуда, ин чунин вазифаи ҳудуди умумиро иҷро менамояд. Дар расми 1 соҳаи дохилӣ ранг карда нишон дода шудааст.

1



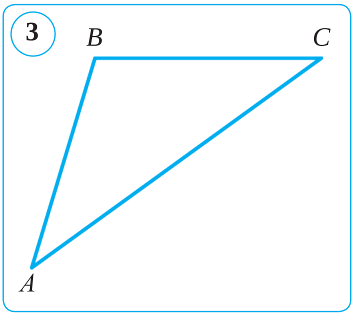
Таърифи 1. *Бисёркунҷае, ки аз хати рости ягон тарафро дарбаргиранда дар як нимҳамворӣ воқеъ аст,* ***бисёркунҷаи барҷаста*** *номида мешавад. Дар ин ҷо худи хати рост ба ҳамин нимҳамворӣ тааллуқдошта ба ҳисоб меравад.*

2



а б

3



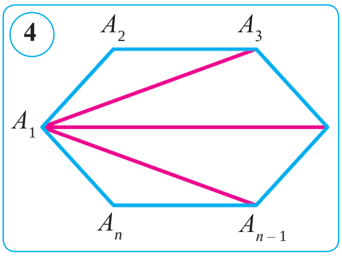
Масалан, дар расми 2, *а* ва 3, бисёркунҷаи барҷаста, дар расми 2,б бошад, бисёркунҷаи ғайрибарҷаста тасвир ёфтааст. Секунҷаи дилхоҳ – бисёркунҷаи барҷаста аст (расми 3).

2. Хосияти кунҷҳои дохилӣ ва берунии бисёркунҷа.

Таърифи 2. ***Кунҷи дохилии қуллаи додашудаи бисёркунҷа*** *гуфта, кунҷеро меноманд, ки онро ҳамон тарафҳои дар қулла бархӯранда (вохӯранда) ҳосил кардаанд.*

Теоремаи 1.

Суммаи кунҷҳои дохилии *n*-кунҷаи барҷаста ба 180° (*n*-2) баробар аст, дар инҷо *n*-адади тарафҳо мебошад.


4

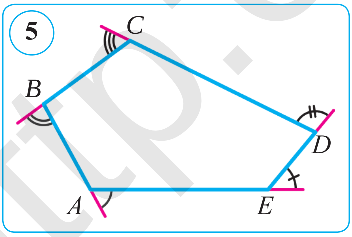
Исбот. $A_1A_2A_3...A_n$– барҷастаи додашуда кунҷи *n* ва *n*>3 бошад (расми 4). Аз яке қуллаҳо, масалан аз нуқтаи A_1 ҳамаи диагоналҳои бисёркунҷаро мегузаронем. Ин диагоналҳо онро ба (*n*–2)-то секунҷа ҷудо мекунад.

Дарҳақиқат, *секунҷаҳои канории* ($\triangle A_1A_2A_3$ ва $\triangle A_1A_{n-1}A_n$) аз ду тараф ва аз як диагонали бисёркунҷа сохта шудааст. Бинобар ин, адади секунҷаҳо (*n*–2)-то, яъне аз адади тарафҳои бисёркунҷа дуто кам мебошад. Суммаи кунҷҳои бисёркунҷа ба суммаи кунҷҳои секунҷаи онро ташкилкунанда, яъне, Sn=180°(*n*–2) баробар аст. Теорема исбот шуд.

Таърифи 3. ***Кунҷи берунаи дар қуллаи бисёркунҷа додашуда*** *гуфта, кунҷи ҳамсояи дар дохили ҳамин қуллаи он бударо меноманд.*

Теоремаи 2.

Дар *n*- кунҷаи барҷаста суммаи кунҷҳои берунии аз ҳар қулла яктогӣ гирифта шуда, ба 360° баробар аст.


5

Исбот. Дар ҳар як қуллаи бисёркунҷа яктогӣ кунҷи берунӣ месозем. Суммаи кунҷи дарунии бисёркунҷа ва кунҷи ҳамсояи он ба 180° (расми 5) баробар аст. Суммаи ҳамаи кунҷҳои дарунӣ ва берунии аз ҳар як қулла яктогӣ гирифташуда, ба 180°*n* баробар аст. Вале суммаи ҳамаи кунҷҳои дарунии бисёркунҷа ба 180°(*n*–2) баробар аст. Дар ин ҳолат суммаи ҳамаи кунҷҳои берунии аз ҳар қулла яктогӣ гирифташуда, ба $180°n-180°(n-2)=180°n-180°n+360°=360°$

Масъалаи 1. Дар n-кунҷаи баробартараф (мунтазам) ҳар як кунҷи дохилии (a_n) ба чӣ баробар аст?

Ҳал. Ба мо маълум аст, ки суммаи кунҷҳои n-кунҷаи барҷастаи дилхоҳ ба 180° (n-2) баробар аст. Дар бисёркунҷаи мунтазам кунҷҳо баробар аст, пас $\alpha_n = \frac{180°(n-2)}{n}$ аст.

Масъалаи 2. Дар n-кунҷаи баробартараф (мунтазам) ҳар як кунҷи берунӣ (β_n) ба чӣ баробар аст?

Ҳал. Ба мо маълум аст, ки дар n-кунҷаи барҷастаи дилхоҳ суммаи кунҷҳои берунии аз ҳар як қулла якто гирифташуда, ба 360° баробар аст.

Бинобар ин дар n-кунҷаи баробартараф ҳар як кунҷи берунӣ ба инҳо баробар аст: $\beta_n = \frac{360°}{n}$.

Савол, масъала ва супоришҳо

1. 1) Кунҷи дохилии қуллаи додашудаи бисёркунҷа гуфта чӣ гуна кунҷро меноманд? Кунҷи берунӣ – чӣ?

2) Суммаи кунҷҳои дохилии n- кунҷаи барҷаста ба чӣ баробар аст?

2. Суммаи кунҷҳои бисёркунҷа ба 1) 1080° 2) 1620° 3) 3960° баробар аст. Бисёркунҷа чанд тараф дорад?

3. 1) Суммаи кунҷҳои дохилии 1) чоркунҷа; 2) дувоздаҳкунҷа;

3) Сикунҷа; 4) панҷоҳкунҷа – ро ёбед.

Намуна. 1) $S_{13} = 180° \cdot (13-2) = 180° \cdot 11 = 1980°$.

4. Агар сето суммаи кунҷҳои дохилии чоркунҷа мувофиқан 240°, 260° ва 280° бошад, кунҷи аз ҳама хурди онро ёбед.

5. Кунҷи дохилии бисёркунҷаи барҷаста ба: 1) 150°; 2) 170°; 3) 171° баробар буда, чанд тараф дорад?

6. Суммаи кунҷҳои дохилии бисёркунҷа аз суммаи аз ҳар як қулла яктогӣ гирифташудаи кунҷи берунӣ се маротиба калон аст. Миқдори тарафҳои ҳамин бисёркунҷа чандто аст? Ба ҷойҳои холӣ адади мувофиқ гузоред.

Ҳал. Мувофиқи шарти масъала, $180°(n-2) = \ldots \cdot 360°$. Аз ин ҷо $180°(n-2) = \ldots \cdot 2 \cdot 180°$, $n-2=6$, $n = \ldots$. *Ҷавоб:* $n = \ldots$.

7. Бисёркунҷаи барҷастаи ҳар як кунҷи беруниаш ба: 1) 18°, 2) 24°, 3) 60° баробар буда чанд тараф дорад?

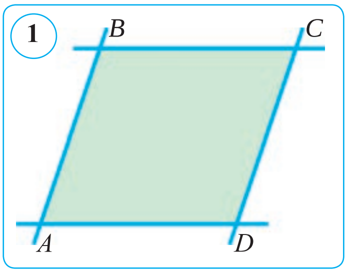
8. Агар се кунҷи чоркунҷа кунд бошад, онгоҳ кунҷи чоруми он тез мешавад. Онро исбот кунед.

9. Ҳар як кунҷи берунии бисёркунҷаи барҷаста ба: 1) 15°, 2) 45°, 3) 72° баробар бошад, он чанд тараф дорад?

10. Кунҷҳои чоркунҷаи барҷаста ба ададҳои 1, 2, 3 ва 4 мутаносибанд. Ҳамин кунҷҳоро ёбед.

2. ПАРАЛЛЕЛОГРАММ ВА ХОСИЯТҲОИ ОН

1. Параллелограмм. Дар ҳамворӣ чоркунҷаи ҳангоми буриши ду хати рости параллел бо ду хати рости параллели дигар ҳосил шударо дида мебароем (расми 1). Ин чоркунҷа бо номи *махсус* соҳиб буда, онро ***параллелограмм*** меномем.



Таъриф: *Чоркунҷае, ки тарафҳои муқобилаш байни ҳамдигар параллел аст,* ***параллелограм*** *номида мешавад.*

Агар $ABCD$ параллелограмм бошад, $AB||DC$ ва $AD||BC$ мешавад (расми 1).

Масъалаи 1. Дар расми 2 $\Delta ABC = \Delta CDA$ параллелограмм будани чоркунҷаи $ABCD$ – ро исбот кунед.

Ҳал. Аз баробарии секунҷаҳои ABC ва CDA баробариҳои зерин бармеоянд: $\angle 1=\angle 3$ ва $\angle 2=\angle 4$. 1 ва 3 – кунҷи дохилии ивазшавандае мебошад, ки дар натиҷаи буриши хатҳои рости параллели AB ва CD бо бурандаи AC ҳосил шудааст баробаранд. Ҳаминтавр, кунҷҳои 2 ва 4 барои хатҳои рости параллели BC ва AD, инчунин кунҷҳои ивазшавандаи дохилии бурандаи ҳосил шудаи AC буданаш баробар аст. Мувофиқи аломати хатҳои рости параллел ба $AB||DC$ ва $BC||AD$ соҳиб мешавем. Пас, дар чоркунҷаи $ABCD$ тарафҳои муқобил бо ҷуфт-ҷуфташ параллел, яъне мувофиқи таъриф $ABCD$ – параллелограмм.

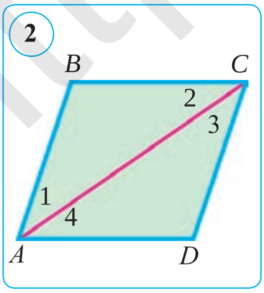
Аз нуқтаи дар як тарафи параллелограмм хобидаи перпендикуляри ба хати рости тарафи муқобилро дарбаргиранда фаровarда шуда, ***баландии*** параллелограмм номида мешавад. Ба як тарафи параллелограмм баландиҳои бешумор гузаронидан мумкин (расми 3). Онҳо масофаҳои байни хатҳои рости параллел буда байни ҳам баробаранд. Аз қуллаи параллелограмм ба тарафҳои гуногуни он ду баландии аз ҳамдигар фарққунанда гузаронидан мумкин. Масалан, дар расми 4, BP ва BF – баландиҳо мебошанд.

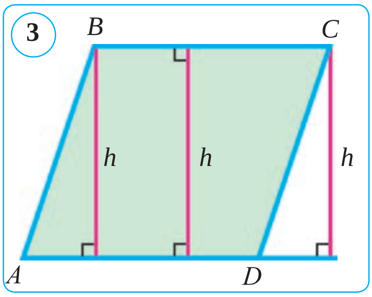
2. Хосиятҳои параллелограмм.

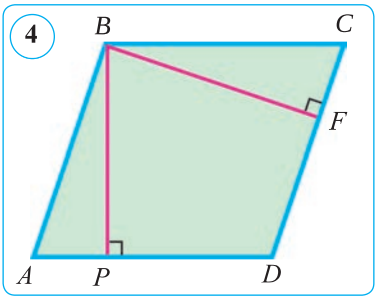
Теоремаи 1

(Хосияти 1) Суммаи кунҷҳои ба як тараф часпидаи параллелограмм ба 180° баробар аст.

Исбот: Кунҷҳои ба як тарафи параллелограмм часпида, кунҷҳои







дарунии як тарафа мебошад. Барои ҳамин суммаи онҳо ба 180° баробар аст. Теорема исбот шуд.

Теоремаи 2.

(Хосияти 2) Тарафҳои муқобил ва кунҷҳои муқобили параллелограмм байни туд баробаранд.

Исбот: Бигзор $ABCD$ – параллелограмми додашуда бошад, яъне $AB||CD$ ва $BC||AD$. Диагонали AC–и параллелограммро мегузаронем (ниг. ба расми 2) инчунин секунҷаҳои ABC ва CDA – ро дида мебароем. Ба онҳо AC – тарафи умумӣ. 1 ва 3 кунҷҳои дохилии ивазшавандае мебошад, ки дар натиҷаи буриши хатҳои рости параллели AB ва CD бо бурандаи AC ҳосил шудааст баробаранд. Кунҷҳои 2 ва 4 бошад, кунҷҳои дохилии ивазшавандае мебошад, ки дар натиҷаи буриши хатҳои рости параллели AD ва BC бо бурандаи AC ҳосил шудааст баробаранд. Пас, мувофиқи аломати дуюми баробари секунҷа, секунҷаҳои ABC ва CDA баробаранд. Хусусан, аз ин ҷо $AB=CD$, $AD=BC$ ва $\angle B=\angle D$, инчунин $\angle 1+\angle 4=\angle 2+\angle 3$, яъне $\angle A=\angle C$ ҳосил мешавад.

Масъалаи 2. Суммаи дуто кунҷҳои параллелограм ба 172° баробар аст. Кунҷҳои онро ёбед.

Ҳал. Параллелограмми $ABCD$ додашуда бошад. Азбаски дар параллелограмм суммаи кунҷҳои ҳамсоя ба 180° баробар аст, бинобар ин кунҷҳои додашуда, кунҷҳои ҳамсоя нестанд, пас онҳо кунҷҳои муқобиланд. $\angle A+\angle C=172°$ бошад. Аз баробар будани кунҷҳои муқобил дар параллелограми ҳар яки онҳо ба $\angle A=\angle C=172°:2=86°$ баробар мешавад. Суммаи ҳамаи кунҷҳои параллелограмм ба 360° баробар, барои ҳамин ду кунҷи боқимонда $\angle B=\angle D=(360°-172°):2=94$ мешавад. *Ҷавоб:* 86°, 94°, 86°, 94°.

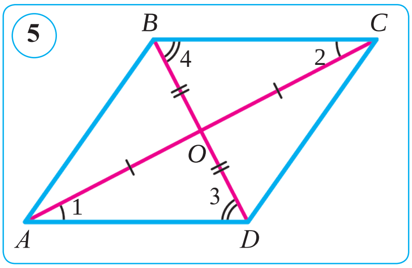
Теоремаи 3

(Хосияти 3). Диагоналҳои параллелограмм бурида мешавад ва дар натиҷаи буриш ба ду қисми баробар ҷудо мешавад.

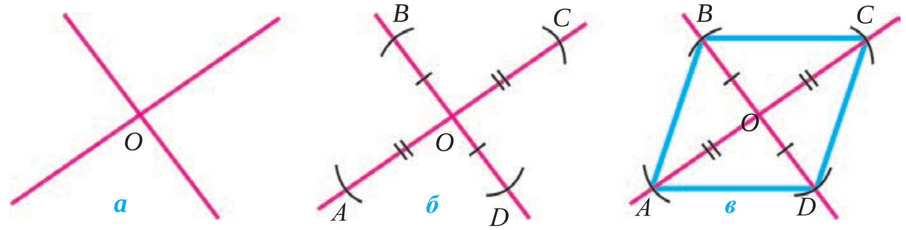
Исбот. Бигзор $ABCD$ – параллелограмми додашуда буда, O – AC ва BD нуқтаи буриши диагоналҳо бошад (расми 5). Исбот мекунем, ки. $AO=OC$ ва $DO=OB$ аст.

Секунҷаҳои $AOD=COB$-ро дида мебароем. Дар ин секунҷаҳо $AD=BC$ (аз рӯи хосияти 2-юми параллелограмм тарафҳои муқобили он баробар аст), $\angle 1=\angle 2$ ва $\angle 3=\angle 4$ (чунки кунҷи дохилаи ивазшавандаест, ки дар натиҷаи буриши хати рости параллели AD ва BC бо бурандаҳои AC ва BD ҳосил шудааст). Бинобар ин мувофиқи аломати дуюми баробарии секунҷаҳо $\triangle AOD=\triangle COB$. Аз ин ҷо $AO=CO$ ва $DO=OB$, яъне буриши диагоналҳои AC ва BD нуқтаи-O бо ду тақсим мешавад. Теорема исбот шуд.

5



6



Масъалаи 3. Аз хосияти 3 истифода бурда параллелограмм созед.

Қадами 1. Ду хати рости буранда гузаронида нуқтаи буриши онҳоро бо ҳарфи *O* ишорат мекунем (расми 6 а). *Қадами 2.* Бо ёрии сиркул дар яке хатҳои рост порчаҳои баробари *OA* ва *OC* ба хати рости дуюм бошад, порчаҳои баробари *OB* ва *OD*-ро мегузорем (расми 6 б). *Қадами 3.* Нуқтаҳои *A, B, C* ва *D*-ро пай дар пай пайваст намуда, параллелограмми мо ҷустаро ҳосил мекунем (расми 6, *в*).

Савол, масъала ва супоришҳо

1. 1) Чӣ гуна чоркунҷа параллелограмм номида мешавад? Суммаи кунҷҳои ба як тарафи параллелограмм часпанда ба чӣ баробар аст?
2) Оиди диагоналҳои параллелограмм чӣ гуфтан мумкин?
Суммаи тарафҳои ҳамсояи параллелограмм 20 см, фарқаш ба 12 см баробар аст. Тарафҳои ҳамин параллелограммро ёбед.

2. Периметри параллелограмм 152 см, яке аз тарафҳои он аз дуюмаш 25 см зиёд. Тарафҳои параллелограммро ёбед.

3. Суммаи ду кунҷҳои параллелограмм ба: 1) 70°; 2) 110°; 3) 170° баробар бошад, ҳамаи кунҷҳои онро ёбед.

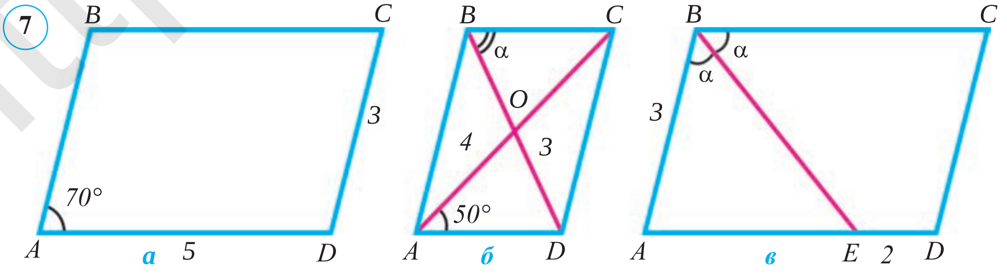
4. Дар параллелограмми *ABCD:* *AB*=7см, *BC*=11см, *AC*=14 см, *BD*=12 см; *O*–нуқтаи буриши диагоналҳо буданаш маълум бошад, периметри секунҷаҳои *ABO* ва *BOC*–ро ёбед.

5. Суммаи тарафҳои ҳамсояи параллелограмм 20 см, фарқаш ба 12 см баробар аст. Тарафҳои ҳамин параллелограммро ёбед.

6. Нисбати ду тарафи параллелограмм ба 5:3, периметраш бошад, ба 6,4 дм баробар аст. Тарафҳои параллелограммро ёбед.

7. Дар расми 7, баъзе бузургиҳои элементҳои параллелограмм нишон дода шудааст. Боз кадом бузургиҳоро ёфтан мумкин?

7



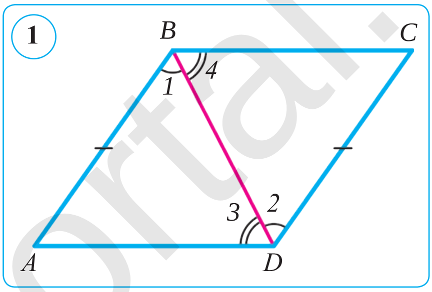
3. АЛОМАТҲОИ ПАРАЛЛЕЛОГРАММ

Аз мавзӯъҳои гузашта маълум шуд, ки барои тадбиқ намудани хосиятҳои параллелограмм дар бисёр ҳолатҳо ба параллелограмм будани чоркунҷаи додашуда боварӣ ҳосил намудан лозим. Онро мувофиқи таъриф (нигаред ба масъалаи 1, мавзӯи 2). Дар бисёр мавридҳо аломатҳои дар амалиёт татбиқшавандаи параллелограммро исбот менамоем. Акнун бо аломатҳои параллелограмм шинос мешавем.

Теоремаи 1.

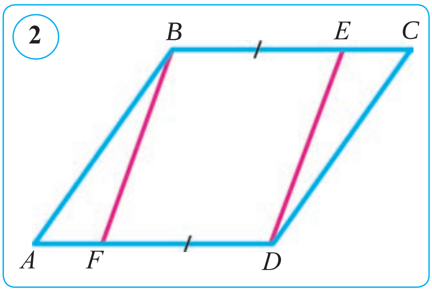
(Аломати 1). Агар ду тарафи чоркунҷа баробар ва параллел бошад, ин чоркунҷа параллелограмм аст.

Исбот. Бигзор дар чоркунҷаи $ABCD$ $AB||CD$ ва $AB||CD$ бошад (расми 1). Диагонали BD-и онро мегузаронем. Дар натиҷа мо дорои ду секунҷаи баробари ABD ва CDB мешавем (нисбат ба ду тараф ва кунҷи байни онҳо), чунки дар он $AB=CD$ (аз рӯи шарт), тарафи BD умумӣ, $\angle 1=\angle 2$ (чунки дар натиҷаи буриши хатҳои рости параллели AB ва DC кунҷи ивазшавандаи дохилии дар натиҷаи буриши BD ҳосилшуда аст). Аз баробарии секунҷаҳо бармеояд ки $\angle 3=\angle 4$ аст. Ин кунҷҳо, кунҷҳои дохилии ивазшаванда мебошанд, ки дар натиҷаи буриши хатҳои рости AD ва BC ва буранди BD ҳосил шудаанд. Пас, $AD||BC$. Ҳамин тавр, тарафҳои муқобилхобидаи чоркунҷаи $ABCD$ бо ҷуфти худ параллеланд. Аз рӯи таърифи параллелограмм чоркунҷаи $ABCD$ – параллелограмм мебошад. Теорема исбот шуд.



Масъалаи 1. Ба тарафҳои BC ва AD–и параллелограмми $ABCD$ порчаҳои баробар гузошта шудааст: $BE=DF$ (расми 2). Чоркунҷаи $BEDF$ оё параллелограмм шуда метавонад?

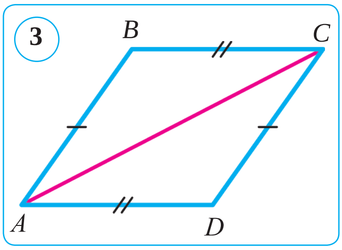
Ҳал. Тарафҳои муқобили BE ва DF –и чоркунҷаи $BEDF$ баробар ва параллеланд. Барои ҳамин, аз рӯи аломати 1-и параллелограмм чоркунҷаи $BEDF$ параллелограмм аст. *Ҷавоб:* ҳа, мешавад.

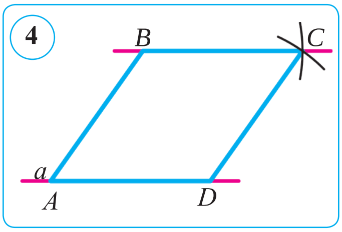


Теоремаи 2.

(Аломати 2). Агар тарафҳои муқобилхобидаи чоркунҷаҳо бо ҷуфти худ баробар бошад, ин чоркунҷа параллелограмм аст.

Исбот. Дар чоркунҷаи $ABCD$, $AB = CD$ ва $BC=DA$ бошад. Диагонали AC-и онро мегузаронем (расми 3). Дар натиҷа, секунҷаҳои ABC ва CDA ҳосил мешавад. Аз рӯи аломати 3-и баробарии секунҷаҳо, ин секунҷаҳо





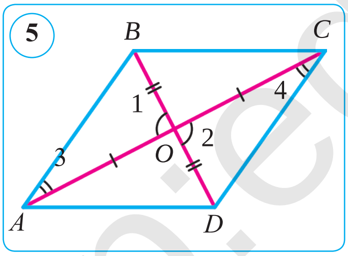
(тарафи *AC*-умумӣ, ба сифати теорема бошад, *AB*=*CD* ва *BC*=*DA*) баробар аст. Аз баробарии секунҷаҳои *CAB* ва *ACD* баробари кунҷҳо бармеоянд. Ин кунҷҳо бошад, *AB* ва *DC* хатҳои рост, инчунин кунҷҳои ивазшавандаи дохили бурандаи ҳосилкардаи *AC* мебошад. Аз рӯи аломати параллелии хати рост, *AB*||*CD*. Ҳамин тавр, дар чоркунҷаи *ABCD* тарафҳои *AB* ва *CD* баробар ва параллел аст. Яъне, аз рӯи аломати 1-уми параллелограмм *ABCD* чоркунҷаи-параллелограмм аст. Теорема исбот шуд.

Масъалаи 2. Аз нуқтаи додашуда, хати рости гузаранда ва ба хати рости додашуда хати рости параллелро созед.

Ҳал. *a*–хати рост, *B*–нуқтаи дар он нахобанда бошад. Ба хати рости *a* нуқтаҳои *A* ва *D*-ро ишора мекунем (расми 4). Аз нуқтаҳои *B*, *D* бо равиши мувофиқ, радиусҳои давраҳои *AD* ва *AB* мегузаронем. Нуқтаи буриши онҳоро бо *C* ишора мекунем. Хати рости *BC* мегузаронем, ки он хати рости мо ҷустуҷӯ карда мебошад. Дар ҳақиқат, тарафҳои муқобилхобидаи чоркунҷаи *ABCD* баробар аст. Мувофиқи аломати 2-юми параллелограмм, чоркунҷаи *ABCD*-пароллелограмм аст. Бинобар ин *BC*||*AD*.

Теоремаи 3.

(Аломати 3). Агар диагоналҳои чоркунҷа ҳамдигарро буранд ва дар нуқтаи буриш ба ду қисми баробар ҷудо шаванд, ин чоркунҷа параллелограмм мебошад.



Исбот. Дар чоркунҷаи *ABCD* нуқтаи буриши диагоналҳо *O* – бошад. Аз рӯи шарт *AO*=*OC* ва *BO*=*OD* (расми 5). Секунҷаҳои *AOB* ва *COD*-ро дида мебароем. Дар ин секунҷа ∠1=∠2 (кунҷҳои вертикалӣ) *AO*=*CO* ва *BO*=*DO* (аз рӯи шарт). Пас, аз рӯи аломати якуми секунҷаҳои *AOB* ва *COD* баробар аст. Аз баробарии ин секунҷаҳо тарафҳои мувофиқи онҳо ва баробарии кунҷҳояшон бармеоянд: *AB* = *CD*, ∠3=∠4. Аз рӯи аломати хати рост, *AB*||*CD* чунки кунҷҳои 3 ва 4 хатҳои рости *AB* ва *CD*, инчунин кунҷҳои ивазшавандаи дохилии бурандаи ҳосил кардаи AC мебошад. Дар чоркунҷаи *ABCD* барои *AB* = *CD* ва *AB*||*CD* буданаш аз рӯи аломати 1-уми параллелограмм, чоркунҷаи *ABCD* параллелограмм мешавад. Теорема исбот шуд.

Савол, масъала ва супоришҳо

1. 1) Агар ду тарафи чоркунҷа баробар ва параллел бошад, оё исбот карда метавонед, ки ин чоркунҷа параллелограмм аст?

2) Аломатҳои 2-3 – и параллелограммро ифода кунед.

2. (*Масъалаи фаолкунанда*) 1) Ду порчаи баробар ва параллел дода шудааст. Охирҳои онҳо бо порчаҳои якдигарро набуранда пайваст карда шудаанд. Оё чоркунҷаи ҳосилшуда параллелограмм шуда метавонад?
2) Агар ду кунҷи муқобили чоркунҷа баробар бошад, оё он параллелограмм шуда метавонад?

3. Дар чоркунҷаи *ABCD* тарафҳои *AB* ва *CD* параллел, $AB=CD=11$ см, $AD = 5$ см, периметри ҳамин чоркунҷаро ёбед.

4. Агар: 1)$\angle 1=70°$, $\angle 3=110°$, $\angle 2 \neq \angle 4$; 2)$\angle 1=\angle 2=60°$, $\angle 3=115°$ бошад, дар он ҳолат чоркунҷаи *ABCD* параллелограмм шуда метавонад (расми 6)?
Ҳал. 1) Дар чоркунҷаи *ABCD* ду тарафи *AB* ва *CD* параллел мебошад, чунки $\angle 1+\angle 3=70°+110°=180°$. Ин кунҷҳо – *AB* ва *DC* кунҷҳои дохилии яктарафаи бурандаи *AD* ҳосилкунанда мебошад. Аз он сабаб, ки $AB||DC$ аст, $\angle 1=\angle 4$ мешавад (кунҷҳои мувофиқ). Ду тарафи боқимондаи чоркунҷаи *ABCD* ва тарафҳои *AD* ва *BC* параллел нестанд, чунки кунҷҳои яктарафаи дохили 1 ва кунҷҳои 2 баробар нестанд ($\angle 1=\angle 4 \neq \angle 2$). Пас, чоркунҷаи *ABCD* параллелограмм шуда наметавонад.

Ҷавоб: не, чоркунҷаи *ABCD* параллелограмм шуда наметавонад.
2) Мисли банди 1 ҳал карда мешавад.

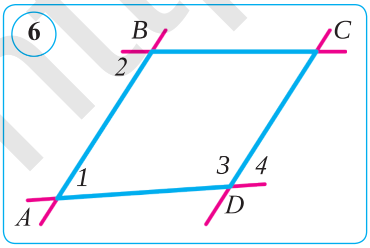
5. Миёнаҷои тарафи *AB*–и параллелограмми *ABCD* аз нуқтаи *E* ва миёнаҷои тарафи *CD* аз нуқтаи *F* иборат аст. Параллелограмм будани чоркунҷаи *EBFD* –ро исбот кунед (расми 7).

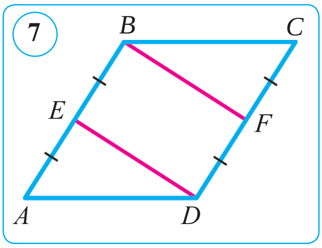
6. Дар чоркунҷаи *ABCD* $AD=BC$, $\angle 1=\angle 2$ (расми 8). Параллелограмм будани чоркунҷаи *ABCD* – ро исбот кунед.

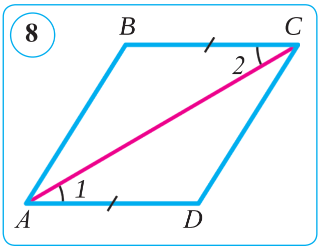
7. Дар чоркунҷаи *ABCD* тарафҳои *AB* ва *CD* параллел, $AB=CD=9$ см, $AD=4$ см периметри ҳамин чоркунҷаро ёбед.

8. Дар чоркунҷаи *ABCD* : $AB=CD$, $AD=BC$ кунҷи *A*, аз кунҷи *B* се маротиба калон. Кунҷҳои ҳамин чоркунҷаро ёбед.

9. Биссектрисаҳои яке аз кунҷҳои параллелограмм тарафи муқобилро бурида, аз он порчаҳои 4 см ва 5 см – ро ҳосил мекунад. Периметри параллелограммро ёбед.

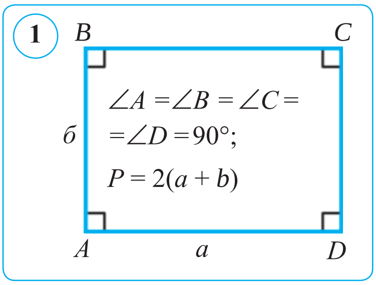

6


7


8

4. РОСТКУНҶА ВА ХОСИЯТҲОИ ОН

Таъриф. *Параллелограмме, ки ҳамаи кунҷҳояш ростанд,* ***росткунҷа*** *номида мешавад* (расми 1).

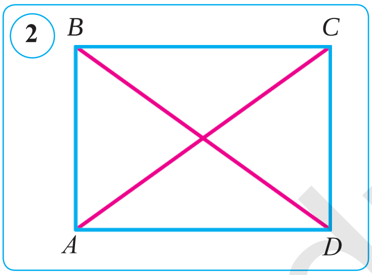


Аз он сабаб, ки росткунҷа ҳолати махсуси параллелограмм аст, он дарои як қатор хосиятҳои параллелограмм мебошад: тарафҳои муқобилхобидаи росткунҷа баробаранд; диагоналҳои росткунҷа дар як нуқта бурида шуда, ба ду ҳиссаи баробар тақсим мешаванд; диагонали росткунҷа онро ба ду секунҷаи росткунҷаи баробар тақсим мекунад.

Хусусиятҳои ба худ хоси росткунҷаро дида мебароем.

Теоремаи.

Диагоналҳои росткунҷа байни худ баробаранд.



Исбот. Бигзор дар росткунҷаи $ABCD$ диагоналҳои AC ва BD дода шуда бошад. Исбот мекунем, ки $AC=BD$ аст (расми 2).

Секунҷаҳои росткунҷаи ACD ва DBA нисбат ба ду катет (AD – тарафи умумӣ, $CD=BA$) баробар аст. Аз ин ҷо баробар будани гипотенузаи ин секунҷаҳо, яъне $AC=BD$ бармеояд.

Аз ин теорема чунин теоремаи чаппа бармеояд аломати росткунҷа.

Теоремаи чаппа.

Агар диагоналҳои параллелорамм баробар бошад, он росткунҷа аст.

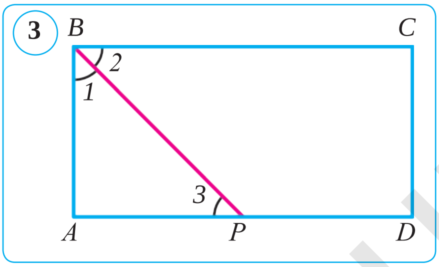
Исбот. Дар параллелограмми $ABCD$ диагонали AC ва BD баробар бошад (расми 2). Секунҷаҳои ABC ва DCA аз рӯи се тараф баробар аст ($AB=DC$, $BD=CA$, AD – ин тарафи умумӣ). Аз ин $\angle A=\angle D$ бармеояд. Тарафҳои муқобили параллелограмм баробар, бинобар ин $\angle A=\angle C$ ва $\angle B=\angle D$. Ҳаминтавр $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D$. Параллелограмм чоркунҷаи барҷаста, барои ҳамин ҳам $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360^\circ$. Аз ин ҷо $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90^o$ яъне, росткунҷа будани параллелограмми $ABCD$ бармеояд. Теорема исбот шуд.

Масъалаи 1. Периметри росткунчаи $ABCD$ ба 24 см, диагонали BD-и он бошад, ба 9 см баробар аст. Периметри секунчаи ABD-ро ёбед.

Ҳал. $AB+AD=P_{ABCD}:2=\ 24:2=12$ (см) суммаи тарафҳои ҳамсоя (расми 2).

$$P_{ABD}=AB+AD+BD=12+9=21\ \text{(см)}.$$

Ҷавоб: $P_{ABD}=21$ см.



Масъалаи 2. Росткунчаи $ABCD$ биссектрисаи кунҷи B-и тарафи AD-ро дар нуқтаи P мебурад ва онро ба порчаҳои $AP=17$ см ва $PD=21$ см тақсим мекунад (расми 3). Периметри ин росткунҷаро ёбед.

Ҳал. 1) Аз он сабаб, ки $ABCD$–росткунча аст, $AD||BC$ ва бинобар ин $\angle 2=\angle 3$. Вале, мувофиқи шарт $\angle 2=\angle 1$, пас, $\angle 1=\angle 3$ ҳамчунин $\triangle ABP$–секунчаи баробарпаҳлӯи асосаш BP. Ҳаминтавр, $AB\ =\ AP\ =\ 17$ см.

$$2)\ AD=AP+PD=17+21=38\ \text{(см)};$$

$$P_{ABCD}=2\,(AB+AD)=2\cdot(17+38)=2\cdot 55=110\ \text{(см)}.$$

Ҷавоб: $P_{ABCD}=110$ см.

Савол, масъала ва супоришҳо

1. 1) Чӣ гуна параллелограммро росткунча меноманд?

2) Чӣ гуна хусусиятҳои бо худ хоси росткунҷа ҳаст?

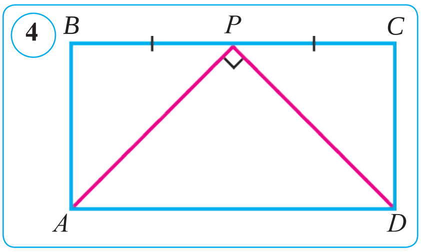
3) Аломатҳои росткунҷаро ифода намоед.

2. Дар росткунчаи $ABCD$: $AB=9$ см, $BC=7$ см.

1) Масофаи аз нуқтаи C то тарафи AD-ро ёбед.

2) Масофаи байни хатҳои рости AB ва CD-ро ёбед.

3. Периметри росткунча 24 см. Суммаи масофаи нуқтаи дилхоҳи дохилиро то тарафҳои он муайян кунед.



4. Периметри росткунчаи $ABCD$ ба 24 см баробар аст. Нуқтаи P миёначои порчаи BC, $\angle APD=90°$ (расми 4). Тарафҳои ин росткунчаро ёбед.

5. Агар диагоналҳои чоркунча баробар буда, дар нуқтаи буриш ба ду ҳиссаи баробар чудо кунад, исбот кунед, ки ин чоркунча росткунча аст.

6. Тарафҳои параллелограмм 4 см ва 7 см. Оё диагоналҳои ин параллелограмм: 1) 12 см ва 5 см; 2) 10 см ва 3 см; шуда метавонад?

7. Периметри росткунча ба 42 см, яке аз тарафҳояш аз дуюмаш ду маротиба калон аст. Тарафҳои росткунчаро ёбед.

5-6. ХОСИЯТҲОИ РОМБ ВА КВАДРАТ

1. Ромб ва хосиятҳои он.

Таъриф. *Параллелограмме, ки ҳамаи тарафҳояш баробаранд,* ***ромб*** *номида мешавад* (расми 1).

Ромб ғайр аз хосиятҳои умумии параллелограмм боз дорои чунин хосиятҳост.

Теорема.

Диагоналҳои ромб байни худ перпендикуляр буда, кунҷҳои ромбро ба ду ҳисса тақсим мекунад.

Исбот. Бигзор ромби $ABCD$ додашуда бошад (расми 2). Исбот мекунем, ки $AC \perp BD$ буда, ҳар як диагонал кунҷҳои мувофиқи ромбро ба ду ҳиссаи баробар ҷудо мекунад (масалан, $\angle BAC=\angle DAC$).

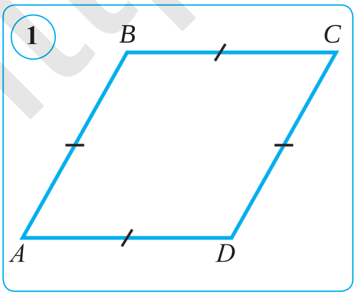
Аз рӯи таърифи ромб $AB=AD$, бинобар ин, $BAD–BD$ секунҷаи баробарпаҳлӯ аст. Аз он сабаб, ки ромб параллелограмм аст, диагоналҳои он дар нуқтаи бурриш ба ду ҳиссаи баробар ҷудо мешавад, яъне $BO=OD$. Пас, AO – медианаи секунҷаи баробарпаҳлӯи BAD мебошад. Мувофиқи хосияти секунҷаи баробарпаҳлӯи, медианаи ба асоси он гузаронидашуда ҳам биссектриса, ҳам баландӣ мебошад. Бинобар ин, $AC \perp BD$ ва $\angle BAC=\angle DAC$, ки исботаш талаб карда шуда буд.

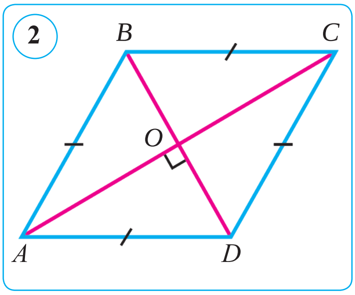
Масъалаи 1. Тарафи диагонали BD-и ромби $ABCD$ кунҷи 35°– ро ҳосил мекунад. Кунҷҳои онро ёбед.

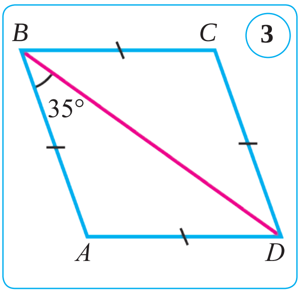
Ҳал. $\angle ABD=35^{\circ}$, гӯем (расми 3). Онгоҳ $\angle CBD=35^{o}$ (мувофиқи хосияти ромб). $\angle ABC=2\angle ABD=2.35^{o}=70^{o}$, $\angle ADC=\angle ABC=70^{o}$ (мувофиқи хосияти 2–4 параллелограмм), $\angle DAB=180^{o}\ \angle ABC$ (параллелограмм мув. хосияти 1). Пас $\angle DAB=180^{o}\text{-}700=110^{o}$, $\angle BCD=\angle DAB=110^{o}$ (мувофиқи хосияти 2-и параллелограмм). *Ҷавоб: 70°, 110°, 70°, 110°.*

Масъалаи 2. Оё периметрҳои ҳар гуна ромб баробар аст?

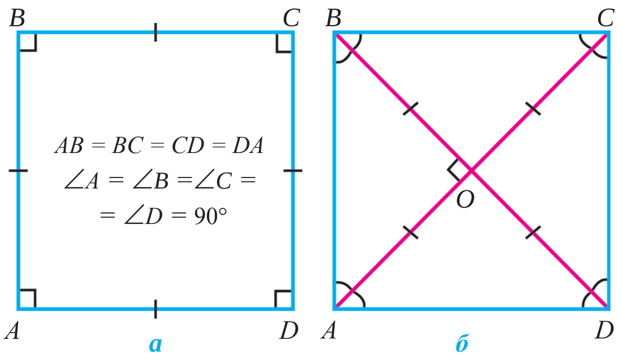
Ҳал. Ромбҳои периметрҳояшон баробар аз якдигар бо кунҷҳояшон фарқ мекунанд. Агар кунҷи тези ромб 1) ба 40° баробар бошад, онгоҳ кунҷҳои боқимондааш бо равиши мувофиқ 140°, 40°, 140° мешавад; 2) ба 15° баробар бошад, онгоҳ кунҷҳои боқимонда бо равиши мувофиқ 165°,



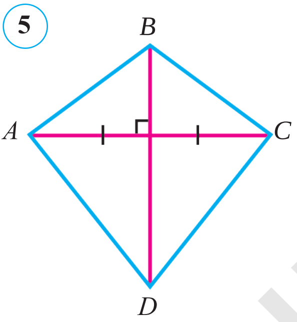




4



5



$AC = BD,\ AC \perp BD$

15°, 165° мешавад ва ҳоказо. Бинобар ин, ба ҷои кунҷи тез ҳар гуна кунҷи кундро гирифтан мумкин.

Ҷавоб: ҳа, мумкин.

2. Квадрат ва хосиятҳои он.

Таъриф. *Росткунҷае, ки ҳамаи тарафҳояш баробаранд,* ***квадрат*** *ном дорад.*

Аз рӯи таърифи квадрат ва ромб маълум мешавад, ки квадрат аз ромбе иборат аст, ки ҳамаи кунҷҳояш рост аст (расми 4, а). Аз он сабаб, ки квадрат ҳам параллелограмм, ҳам росткунҷа ва ҳам ромб буда, дорои ҳамаи хосиятҳои онҳо низ мебошад. Хосиятҳои асосии квадратро меорем:

1. Дар квадрат ҳамаи кунҷҳо ростанд.

2. Диагоналҳои квадрат баробаранд.

3. Диагоналҳои квадрат перпендикуляр буда, дар нуқтаи буриш ба ду қисми баробар тақсим мешаванд ва кунҷҳои квадратро ба ду қисми баробар тақсим мекунанд (расми 4).

Ин хосиятҳоро мустақилона исбот кунед.

Масъалаи 3. Исбот кунед, ки агар диагоналҳои ромб баробар бошад, онгоҳ ингуна ромб квадрат аст.

Исбот. Барои он ки ромб параллелограмм аст, дар он ҳол аз рӯи аломати росткунҷа, росткунҷа будани ромби диагоналҳояш баробар бармеояд ва пас он яъне, квадрат мешавад.

Масъалаи 4. Диагоналҳои чоркунҷа перпендикуляр ва байни якдигар баробар аст. Оё ин чоркунҷа квадрат мешавад?

Ҳал. Яке аз чоркунҷаҳои шарти масъаларо қаноаткунонанда дар расми 5-ум тасвир ёфтааст. Дар ин ҷо яке аз диагоналҳо ба ду ҳиссаи баробар ҷудо шудааст. Аммо он хосияти 2-юми квадрат ва як қисми шартҳои дар хосияти 3-юм овардашударо, яъне шарти байни якдигар перпендикуляр будаpo қаноат мекунонад халос. Ду диагоналҳои чоркунҷа дар нуқтаи буриш ба ду қисми баробар ҷудо шуданаш мумкин. Фақат дар ҳамин ҳолат чоркунҷа квадрат шуда метавонад. *Ҷавоб:* чоркунҷа квадрат шуданаш шарт нест.

Савол, масъала ва супоришҳо

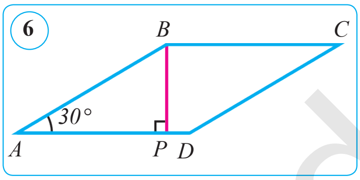
1. 1) Ромб чист? Хосияти ромбро гӯед.
2) Квадрат чист? Хосиятҳои квадратро номбар кунед.
3) Квадратро бо ёрии мафҳумҳои: а) «параллелограмм»; б) «ромб»; в) «росткунҷа» таъриф диҳед.

2. Тарафи квадрат ба 20 см баробар. Масофаи байни аз нуқтаи буриши диагоналҳо ба яке аз тарафҳоро ёбед.

3. Тарафи ромби *ABCD* ба 24 см, кунҷи *A* бошад, ба 30° баробар аст. Масофаи аз қуллаи *B* то тарафи ба он муқовилхобидаи *AD*-ро ёбед (расми 6). Ба ҷойҳои холӣ ададҳои мувофиқро гузоред.

Ҳал. Масофаи аз нуқтаи *B* то хати рости AD ба дарозии перпендикуляри аз нуқтаи *B* ба ҳамин хати рост фаровarda шуда, яъне ба дарозии порчаи *BP* баробар аст. Секунҷаи *ABP* – ро дида мебароем. Дар он $\angle APB = A\ldots$, $\angle AB = \ldots$. Онгоҳ $BP = 0{,}5.$ $\ldots = 0{,}5.$ $\ldots = \ldots$ (см) (Мувофиқи хосияти муқобили кунҷи ...-нок) *Ҷавоб:* BP=... см.

4. (*супориши амалӣ*) 1) Аз ду секунҷаи баробар; 2) Аз чор секунҷаи баробар чӣ хел ромб ва квадрат ҳосил кардан мумкин аст? Ҳалли имкондоштаи онро нишон диҳед?



5. Квадрат ба дохили секунҷаи росткунҷаи баробарпаҳлӯ ҳамин тавр кашида шудааст, ки ду қуллаи он ба гипотенуза ва ду қуллаи боқимондааш ба катетҳо мехобад. Гипотенуза ба 21 см баробар буданаш маълум бошад тарафи квадратро ёбед.

6. Нисбати диагоналҳо ва тарафҳои байни кунҷи ҳосил шудаи ромб ба мисли 2:7. Кунҷҳои ромбро ёбед.

7. Миёнаҷои тарафҳои квадрат пайи ҳам пайваст карда шудаанд. Дар натиҷа чӣ гуна шакл ҳосил мешавад?

8. Исбот кунед, ки ҳамаи баландиҳои ромб байни худ баробаранд.

9. Тарафҳои чоркунҷа ба нисбати 2:4:5:7 аст. Периметри он ба 108 см баробар. Тарафҳои ҳамин чоркунҷаро ёбед.

10. Периметри ромбро ёбед, ки яке аз кунҷҳояш 60°, дарозии диагонали хурдаш 16 см аст.

11. Нисбати кунҷи байни диагоналҳои ромб ва тарафҳои ҳосилшуда 5:4 аст. Кунҷҳои ромбро ёбед.

12. Баландии росткунҷа 32 см, бараш ба 28 см баробар аст. Тарафи квадрате ёбед, ки ба периметри ин росткунҷа баробар бошад.

13. Тарафи аз ҳама хурди чоркунҷа ба 5 см баробар аст, тарафҳои аз пешинааш 2 см – и калон. Периметри ҳамин чоркунҷаро ёбед.

7–8. ТРАПЕТСИЯ ВА ХОСИЯТҲОИ ОН

1.Таърифи трапетсия. Ба мо маълум аст, ки ба ҳар гуна параллелограмм ду ҷуфт тарафҳои параллел мебошад. Акнун мо фақат бо як ҷуфт тарафи параллел соҳиббуда шинос мешавем.

> **Таърифи 1.** *Чоркунҷае, ки фақат ду тарафаш параллел буда, ду тарафи дигараш параллел нест,* ***трапетсия*** *номида мешавад.*

Тарафҳои параллели трапетсия *асосҳои* он, тарафҳои параллел набудаи трапетсия, *тарафҳои паҳлӯӣ* номида мешавад. Дар трапетсияи *ABCD* тарафҳои *AD* ва *BC асосҳо*, тарафҳои *AB* ва *CD* бошад, *тарафҳои паҳлӯӣ* аст (расми 1).

> **Таърифи 2.** *Агар яке аз тарафҳои трапетсия ба асоси он перпендикуляр бошад, трапетсияро,* ***трапетсия росткунҷа*** *меноманд (расми 2).*

> **Таърифи 3.** *Трапетсияе, ки тарафҳои паҳлӯиаш баробар аст,* ***трапетсияи баробарпаҳлӯ*** *номида мешавад.*

Дар расми 3 трапетсияи *ABCD* – и баробарпаҳлӯ тасвир шудааст: *AB = CD*

2. Аломати трапетсия. Акнун шартҳои зарарурии трапетсия шудани росткунҷаро дида мебароем.

Теорема.

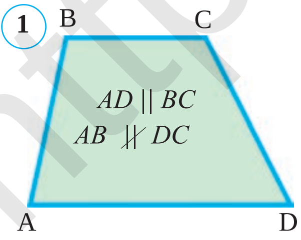
Агар суммаи ду кунҷи ба як тараф часпидаи чоркунҷа ба 180° баробар бошад ва суммаи ду кунҷи ба тарафҳои ҳамсояи он часпанда аз 180° фарқ кунад, ин гуна чоркунҷа трапетсия мешавад.

Исбот. Дар чоркунҷаи ABCD $\angle A+\angle B=180°$, $\angle A+\angle D\neq 180°$ ***бошад, исбот кунед, ки чоркунҷаи ABCD трапеция шуда метавонад.***

Якум, параеллели як ҷуфт тарафҳои муқобилро нишон медиҳем. Хатҳои рости *AB, BC* (l_t) ва *AD* (l_2)-ро мегузаронем (расми 4). Ҳаминтавр $\angle A + \angle B = 180°$ бошад. Дар он ҳолат порчаҳои *AD* ва *BC* аз рӯи аломати параллелӣ, параллел мешавад. (*Агар ҳангоми ду хати рости a ва b бо хати рости сеюми c бурида шудан, суммаи кунҷҳои дохилии яктарафа ба 180° баробар бошад, дар он ҳолат хатҳои рости a ва b параллел мешавад*).

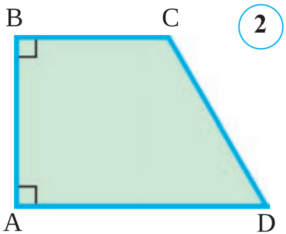
Дуюм, параллел набудани ду тарафи дигари чоркунҷаи *ABCD*-ро нишон

1



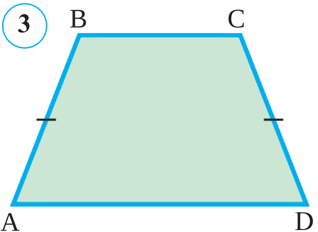
AD ва *BC* – асосҳо,
AB ва *DC* – тарафи паҳлӯӣ

2



$\angle A=90°$,
трапетсияи ротскунча

3



AB=*DC*,
трапетсияи баробарпаҳлӯ

медиҳем. Барои ин, $\angle A + \angle D \neq 180°$ дар ин ҳолат порчаҳои *AB* ва *DC* параллел шуда наметавонад (аз рӯи аксиомаи 5-уми хатқои рости параллели Евклид, яъне шарти зарурии параллел нашудани хатҳои рост иҷро намешавад). Пас, чоркунҷаи *ABCD* трапетсия будааст. Мо ҳамроҳ аломати трапетсияро исбот кардем. Онро ифода мекунем.

Аз ин теорема чунин натиҷа бармеояд.

Натиҷа. Агар як кунҷи трапетсия 90° бошад, он боз як кунҷи 90° дорад.

Тарифи 4. *Аз нуқтаи яке аз асосҳои трапетсияи перпендикуляри ба хати росте, ки асоси дуюми онро гузаронида шуда ифода мекунад,* ***баландии трапетсия*** *ном дорад.* .

Ҳар гуна перпендикуляре, ки ба асоси трапетсия фароворда шудааст, ба сифати баландӣ қабул кардан мумкин аст. Ба трапетсияи дилхоҳ, баландӣ гузаронидан мумкин аст (расми 5).

3. Хосияти трапетсияи баробар.

Бигзор ABCD – трапетсияи баробарпаҳлӯ бошад. Дар он AD = a – асоси калон, BC = b – асоси хурд аст. Аз қуллаи B-и асоси хурд баландии BP мегузаронем (расми 6). Асоси P-и баланди асоси AD-ро ба порчаҳои AP ва PD ҷудо карда шавад.

Теоремаи.

Баландии трапетсияи баробарпаҳлӯ, ки аз қуллаи кунҷи кунд фароварда шудааст, асоси калони трапетсияро ба қисмҳое ҷудо мекунад, ки ба нимфарқ ва нимсуммаи асосҳо баробар аст, яъне:

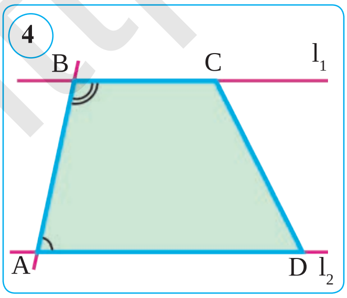
$$AP = \frac{a-b}{2}, \quad PD = \frac{a+b}{2}.$$

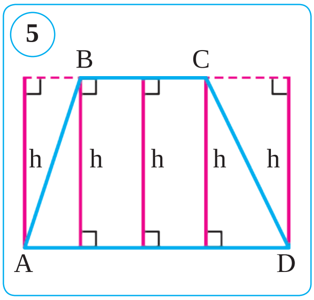
Исбот. Аз қуллаи *C*, $CF \perp AD$-ро мегузаронем. Секунҷаҳои росткунҷаи *ABP* ва *DCF* баробаранд: *AB* = *DC*. Аз он сабаб, ки мувофиқи шарт *BP* = *CF* бошад, *BC* ва *AD* масофаи байни хатҳои рости параллел барои буданаш, аз баробарии секунҷаҳо *AP* = *FD* бармеояд.

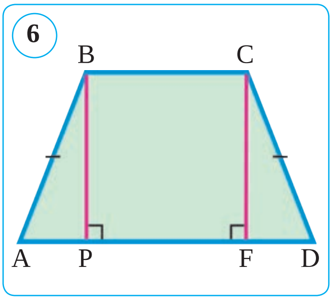
Аз рӯи аломати хати рост, $BP \parallel CF$, чунки $BP \perp AD$, $CF \perp AD$. Барои масофаи байни хатҳои рост баробар буданаш *BC* = *PF* = *b*.

Ҳаминтавр $AP = FD = \frac{AD - PF}{2} = \frac{a-b}{2}$, $PD = AD - AP = a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$

Пас, $AP = \frac{a-b}{2}$ ва $PD = \frac{a+b}{2}$ аст. Теорема исбот шуд.







Масъалаи 1. Баробар будани кунҷҳои дар асоси трапетсияи баробарпаҳлӯ бударо исбот кунед.

Ҳал. $ABCD$ трапетсияи баробарпаҳлӯ, яъне $AB = DC$ ва $AD \parallel BC$ баробарии кунҷҳои ба асосҳои AD ва BC часпидаро исбот мекунем ($\angle A = \angle D, \angle B = \angle C$).

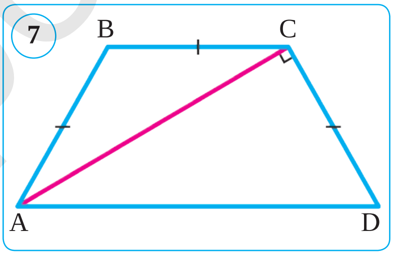
Аз қуллаҳои кунҷи кунди трапетсия (B ва C) ба асоси AD перпендикуляр мегузаронем: $BP \perp AD$, $CF \perp AD$ (ниг. ба расми 6). Секунҷаҳои росткунҷаи ABP ва DCF (мувофиқи катет ва гипотенуза) баробар аст. $AB=DC$ – мувофиқи шарт, $BP = CF$ аз баски BC ва AD масофаи байни хатҳои рости параллел аст. Аз баробарии секунҷаҳо $\angle A=\angle D$ бармеояд.

Кунҷҳои A ва B, C ва D мувофиқан дар натиҷаи буриши хатҳои рости параллели AD ва BC бурандаҳои AB ва CD кунҷҳои дарунии яктарафа мебошад. Бинобар ин $\angle A + \angle B = 180°$ ва $\angle C + \angle D = 180°$. Аз ин ҷо $\angle B = \angle C$ ҳосил мешавад:

Ҳаминтавр, кунҷҳои асоси дар трапетсияи баробарпаҳлӯ буда баробар будааст: $\angle A = \angle D$ ва $\angle B = \angle C$. Ҳаминро исбот кардан лозим буд.

Масъалаи 2. Асоси хурди трапетсия ба тарафи паҳлӯӣ баробар, диагонали он бошад, ба тарафи паҳлӯи перпендикуляр аст. Кунҷҳои трапетсияро ёбед.

Ҳал. Трапетсияи баробарпаҳлӯи $ABCD$ дода шудааст, дар он $AD \parallel BC$, $AB = BC = CD$, $AC \perp CD$ бошад (расми 7). Мувофиқи шарти масъала, AC – асоси секунҷаи баробарпаҳлӯи ABC аст пас, $\angle BCA = \angle CAB$, $\angle A = \angle D$, чунки кунҷҳои назди асосҳои трапетсияи баробарпаҳлӯ баробар аст, кунҷҳои CAD ва BCA бошад, кунҷҳои дарунии ивазшавандаи хатҳои рости параллели $AD \parallel BC$ ва бурандаи AC ҳосил кардааст баробар мебошад, яъне $\angle CAD = \angle BCA$.



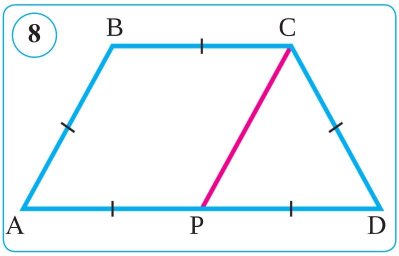
Пас, $\angle A = 2 \angle CAD$, мувофиқи шарт, ACD кунҷи рост, бинобар ин $\angle CAD + \angle D = 90°$, лекин $\angle D = \angle A$, дар ин ҳолат $90° = 3 \angle CAD$, пас, $\angle CAD = 30°$ ва дар он ҳолат

$\angle D = \angle A = 60°$, $\angle C = \angle B = 120°$.

Ҷавоб: $\angle A = \angle D = 60°$, $\angle B = \angle C = 120°$.

Масъалаи 3. Нисбати тарафҳои трапетсияи баробарпаҳлӯ ба мисли 1:1:1:2 мебошад. Кунҷҳои ин трапетсияро ёбед.

Ҳал. Дар трапетсияи $ABCD$, $AB=BC=CD=1$ ва $AD=2$ бошад. Миёнаҷои тарафи AD-ро бо P ишора мекунем (расми 8). Тарафҳои AP ва BC –и чоркунҷаи $ABCP$ баробар ва параллел аст.



Пас, аз рӯи аломати параллелограмм, ин чоркуҷна параллелограмм мешавад. Аз ин рӯ, $PC=AB=1$.

Ҳамаи тарафҳои секунҷаи PCD ба 1 баробар аст, барои ҳамин $\angle PDC=60°$.

Ҳаминтавр, дар трапетсияи $ABCD$, $\angle A=\angle D=60°$ ва $\angle B=\angle C=120°$.
Ҷавоб: $\angle A=\angle D=60°$ ва $\angle B=\angle C=120°$.

Савол, масъала ва супориш

1. 1) Чӣ гуна чоркунҷаро трапетсия мегӯянд?
2) Чӣ гуна трапетсия: а) трапетсияи баробарпаҳлӯ; б) трапетсияи росткунҷа мегӯянд?

2. Баландие, ки аз қуллаи трапетсия намегузарад, онро ба дуто трапетсияи росткунҷа ҷудо мекунад. Шаклро сохта нишон диҳед.

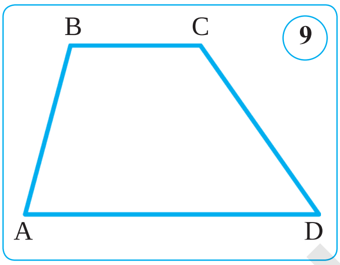
3. Дар трапетсияи росткунҷа, нисбати тарафҳои паҳлуӣ ба 1:2 аст. Кунҷи аз ҳама калони трапетсияро ёбед.

4. Асосҳои трапетсия 12 см ва 20 см, паҳлӯҳояш 4 см ва 11 см. Аз қуллаи асоси хурд ба тарафи хурд хати рости параллел гузаронида шудааст. Периметри секунҷаи ин хати рости параллел ҷудо кардаро ёбед.

5. Аз трапетсияи $ABCD$, ки асосҳояш AD ва BC мебошад, кунҷҳои B ва C-ро ёбед, ки дар он $\angle A=75°$ ва $\angle D=55°$ (расми 9). Ба ҷойҳои холӣ ҷавобҳои мувофиқро нависед.

Ҳал. Кунҷҳои A ва B, C ва D хатҳои рости AD ва BC – ро бо бурандаҳои ... ва ... мебурад ва дар ..., нуқтаи буриш $\angle A+\angle B=...°$ ва $\angle C+\angle D=...°$. Мувофиқи шарт, $\angle A=75°$ ва $\angle D=55°$, онгоҳ $\angle B = ...° - \angle A = =...°-...°=...°$ ва $\angle C= ...°-\angle D = ...°-...° = ...°$.

Ҷавоб: $\angle B = ...°$, $\angle C = ...°$.



9

6. Яке аз кунҷҳои тези трапетсияи баробарпаҳлӯ ба 60°, тарафи паҳлӯӣ бошад, ба 16 см баробар аст. Агар суммаи асосҳои трапетсия ба 38 см баробар бошад, асосҳои онро ёбед.

7. Баландии аз қуллаи кунҷи кунди трапетсияи баробарпаҳлӯ гузаронидашуда асоси калони онро бо порчаҳои 3 см ва 17 см ҷудо мекунад. Асосҳои онро ёбед.

8. Исбот кунед, ки диагоналҳои трапетсияи баробарпаҳлӯ баробаранд.

9. Дар трапетсия: 1) сето кунҷи рост 2) сето кунҷи тез 3) суммаи сето кунҷ ба 180° оё баробар шуда метавонад. Ҷавобатонро асоснок кунед.

10. Дар трапетсияи росткунҷа нисбати кунҷи аз ҳама калон ва кунҷи аз ҳама хурд ба 5:4 баробар аст. Кунҷҳои ҳамин трапетсияро ёбед.

11. Асоси хурди трапетсияи $ABCD$ ба 6 см, переметри секунҷаи ABE $(BE// CD)$ ба 36 см баробар аст. Переметри ҳамин трапетсияро ёбед.

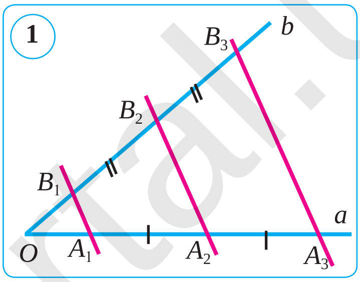
12. Диагонали траетсияи баробарпаҳлӯ кунҷи кунди онро бо ду қисми баробар тақсим мекунад. Асосҳои трапетсия 10 см ва 20 см аст. Переметри онро ёбед.

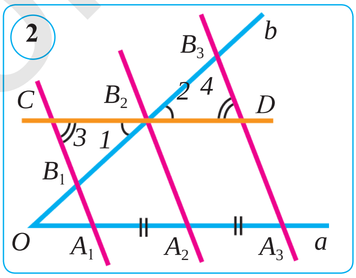
§ 2. ТЕОРЕМАИ ФАЛЕС ВА ТАТБИҚҲОИ ОН

9. ТЕОРЕМАИ ФАЛЕС

Теорема

Агар хатҳои рости параллели тарафҳои кунҷро бурранда аз як тарафи он порчаҳои баробарро ҷудо кунад, аз тарафи дуюм низ порчаҳои баробар ҷудо мекунад.





Исбот. Бигзор аз қуллаи кунҷи O ба тарафи (нури а) порчаҳои баробари A_1 A_2 ва A_2 A_3 гузаронида ва интиҳои онҳо ба воситаи (A_1, A_2, A_3) ба тарафи дуюм (нури в) дар нуқтаҳои буриши B_1, B_2, B_3 бо хатҳои рости байни худ параллели A_1B_1, A_2B_2 ва A_3B_3 гузаронида шуда бошад (расми 1).

Акнун баробарии порчаҳои ҳосилшудаи B_1B_2 ва B_2B_3, яъне агар $A_1A_2=A_2A_3$ бошад, онгоҳ $B_1B_2=B_2B_3$ буданашро исбот мекунем. Барои ин аз нуқтаи B_2 ба нури а хати рости параллели CD мегузаронем (расми 2). Ин хати рост бо хатҳои рости A_1B_1 ва A_3B_3 ба таври мувофиқ дар нуқтаҳои C ва D буранд. Чоркунҷаҳои $A_1CB_2A_2$ ва $A_2B_2DA_2$ – параллелограмм (мувофиқи таъриф), чунки тарафҳои муқобили онҳо аз рӯи шарт ва сохт параллел аст. Ҳаминтавр, $A_1A_2=A_2A_3$ инчунин тарафҳои муқобили параллеллограмм буданаш $A_1A_2=CB_2$ ва аз $A_2A_3=B_2D$ ва $CB_2=B_2D$ соҳиб мешавад.

Дар секунҷаҳои B_1B_2C ва B_3B_2D $CB_2=B_2D$ (мувофиқи исбот), инчунин, $\angle 1=\angle 2$ (кунҷаҳои вертикалӣ), $\angle 3=\angle 4$ (A_1B_1 ва A_3B_3 хатҳои рости параллел инчунин CD барои кунҷаҳои ивазшавандаи дохилаи аз буриши буранда ҳосилшаванда буданаш).

Мувофиқи аломати дуюми баробарии секунҷаҳои, ин секунҷаҳо байни ҳам баробар $\Delta B_1B_2C=\Delta B_3B_2D$. Аз ин $B_1B_2=B_2B_3$ бармеояд.

Ҳамин тавр, агар $A_1A_2=A_2A_3$ бошад, $B_1B_2=B_2B_3$ шудонаш исбот шуд. Исботи ҳамин талаб карда шуда буд. Исбот шуд. Исботи ҳамин талаб карда шуда буд.

Дар хотир доред! *Дар шарти теоремаи Фалес ба ҷои кунҷ ду хати рости дилхоҳро (ҳар чӣ гуна) гирифтан мумкин аст. Дар ин ҳолат хулосаи теорема ба таври пешина мешавад. Мувофиқи аломати 2-юми баробарии секунҷаҳо, ин секунҷаҳо байни ҳам баробар $\Delta B_1B_2C=\Delta B_3B_2D$, аз ин $B_1B_2=B_2B_3$ бармеояд.*

Натиҷа. Хати рости параллеле, ки ду хати рости додашударо мебурад ва дар яке аз онҳо порчаҳои баробарро ҷудо мекунад, дар хати дуюм низ порчаҳои баробар ҷудо мекунад.

Масъалаи 1. *(порчаро ба ҳиссаҳои баробар тақсим кардан.)* Порчаи додашудаи AB-ро ба n-то ҳиссаҳои баробар тақсим кунед.

Ҳал. Бигзор порчаи AB дода шуда бошад. Онро ба n-то ҳиссаҳои баробар тақсим мекунем. Аз нуқтаи A нури ба хати рости AB нахобанда нури AC-ро мегузаронем ва дар он аз нуқтаи A саркарда n-то порчаҳои баробари AA_1, A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$; яъне мо аз шарти масъала истифода бурда, порчаи AB-ро ба чанд ҳисса ҷудо кардан зарур бошад, ҳамонқадар порчаи баробарро мегузорем (расми 3, $n=6$). Баъд аз он хати рости A_nB-ро мегузаронем (нуқтаи A_n-интиҳои порчаи охирин) ва бо ёрии нуқтаҳои A_1, A_2, A_3, ..., A_{n-1} дар хати рости A_nB хатҳои рости параллел мегузаронем. Ин хатҳои рост порчаи AB-ро дар нуқтаҳои B_1, B_2, B_3, ..., B_{n-1} мебурад ва онро мувофиқи теоремаи Фалес ба n-то ҳиссаҳо тақсим мекунад:

$$AB_1 = B_1B_2 = ... = B_{n-1}B.$$

Пас, ҳар гуна порчаро ба қисмҳои баробари дилхоҳ тақсим кардан мумкин.

Масъалаи 2. Тарафи BC-и секунҷаи ABC ба чор қисми баробар тақсим шуда, бо воситаи он ба тарафи AB-и дарозиаш 18 см хатҳои рости параллел гузаронидаанд. Дарозии порчаҳои дар дохили секунҷа мондаи хатҳои ростро ёбед.

Дода шудааст: Дар ΔABC :

$BB_1=B_1B_2=B_2B_3=B_3C$, $AB=18$ см; $B_1C_3 \| B_2C_2 \| B_3C_1 \| AB$.

Ёфтан лозим: B_1C_3, B_2C_2, B_3C_1 (расми 4).

Ҳал. 1) $A_1B_3 \| A_2B_2 \| A_3B_1 \| AC$ мегузаронем.

2) Мувафиқи теоремаи Фалес:

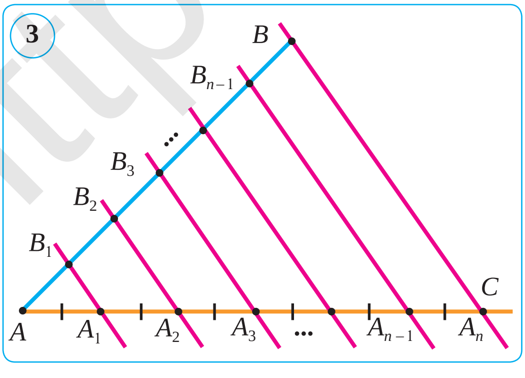
$$AA_1=A_1A_2=A_2A_3=A_3B=AB:4=18:4=4{,}5 \text{ (см)}.$$

2) $AA_1B_3C_1$ чоркунҷа – параллелограмм чунки $AA_1 \| C_1B_3$ (мувофиқи шарт) ва $A_1B_3 \| AC_1$ (мувофиқи сохтан). Пас, $AA_1=C_1B_3=4{,}5$ (см).

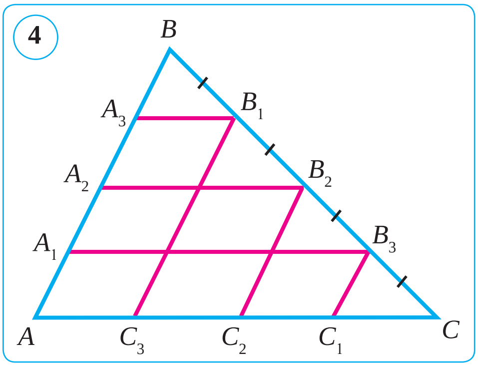
3) Мувофиқи таъриф, $AA_2B_2C_2$ чоркунҷа – праллелограмм, чунки $AA_2 \| C_2B_2$ (мувофиқи шарт) ва $A_2B_2 \| AC_2$ (мувофиқи сохтан). Пас,

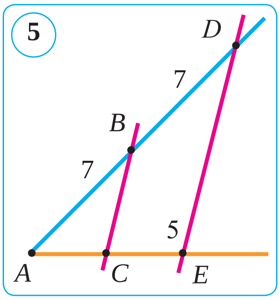
$$AA_2=C_2B_2=2AA_1=2\cdot 4{,}5=9 \text{ (см)}.$$

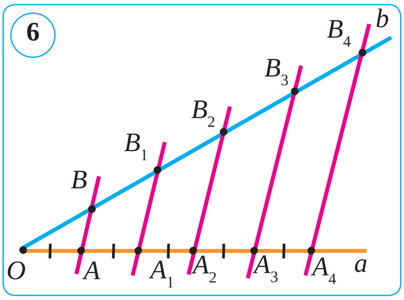
3

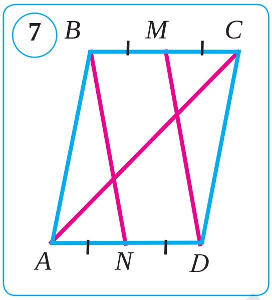


4




5


6


7

4) Мувофиқи таъриф, $AA_3B_1C_3$ чоркунҷа-параллелограмм, чунки $AA_3 \| C_3B_1$ (мувофиқи шарт) ва $A_3B_1 \| AC_3$ (мувофиқи сохтан) Пас,

$$AA_3 = C_3B_1 = 3AA_1 = 3 \cdot 4{,}5 = 13{,}5 \text{ (см)}.$$

Ҷавоб: $C_1B_3 = 4{,}5$ см, $C_2B_2 = 9$ см, $C_3B_1 = 13{,}5$ см.

Савол, масала ва супоришҳо

1. 1) Теоремаи Фалесро гӯед.
2) Оё теоремаи Фалес танҳо барои кунҷҳо мавқеъ дорад?
3) Порчаи додашуда чӣ тавр ба *n*- қисми баробар тақсим карда мешавад?

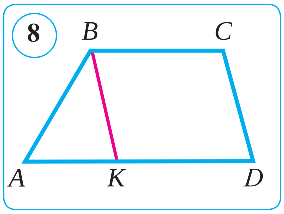
2. (*Супориши амалӣ*) Бо ёрии сиркул ва хаткашак порчаи AB-ро бо: 1) дуто; 2) сето; 3) шашто; 4) ҳафтто ҳиссаи баробар тақсим кунед;

3. *Дода шудааст*: $\angle A$, $AB = BD = 7$ см, $BC \| DE$, $CE = 5$ см (расми 5).
Ёфтан лозим: AC.

4. *Дода шудааст:* $<aOb, OA = AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$,
$AB \| A_1B_1 \| A_2B_2 \| A_3B_3 \| A_4B_4, OB_4 = 8$ см (расми 6).
Ёфтан лозим: OB_1, OB_2, OB_3.

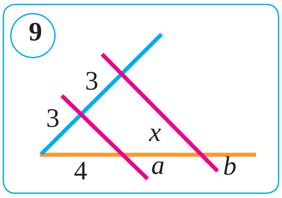
5. Дар параллелограмми *ABCD* нуқтаи *M* тарафи *BC* нуқтаи, *N* миёнаҷои тарафи *AD* хатҳои рости *BN* ва *MD* тарафи параллелограммро ба диагонали *AC* ба се ҳиссаи баробар тақсим мекунад.Онро исбот кунед (расми 7).

6. Дар трапетсияи *ABCD* ба воситаи куллаи *B* хати рости *BK*-и ба тарафи *CD* параллел гузаронидаанд (расми 8).
1) *KBCD* – параллелограмм буданашро исбот кунед.
2) Агар $BC = 4$ см, $P_{ABK} = 11$ см бошад, периметри трапетсияро ёбед.


8

7. Бо ёрии сиркул (паргор) ва хаткашак порчаи *AB*-ро ба: 1) чорто; 2) панҷто ҳиссаи баробар ҷудо кунед.

8. Маълум аст, ки $a \| b$. Дар асоси маълумотҳои расми 9 *x*-ро ёбед.


9

9. *Дода шудааст :* $<aOb$, $OA = AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$,
$AB \| A_1B_1 \| A_2B_2 \| A_3B_3 \| A_4B_4, OB_4 - B_3B_4 = 18$ см
(ниг. ба расми 6).
Ёфтан лозим: OB_1, OB_2, OB_3.

10–11. ХОСИЯТИ ХАТИ МИЁНАИ СЕКУНҶА ХОСИЯТИ ХАТИ МИЁНАИ ТРАПЕТСИЯ

1. Хосияти хати миёнаи секунҷа.

Таърйф. *Хати миёнаи секунҷа гуфта, порчаеро меноманд, ки миёнаҷои ду тарафи онро пайваст мекунад.*

Дар секунҷаи *ABC* бигзор *AD*=*DB* ва *CE*=*EB* бошад, дар он ҳол *DE* хати миёна мешавад (аз рӯи таъриф). Нисбат ба хати миёнаи *DE* тарафи *AC асосӣ* ҳисоб мешавад (расми 1). Дар ҳар гуна секунҷа се хати миёна вуҷуд дорад (расми 2).

Теоремаи 1.

Хати миёнаи секунҷа ба тарафи сеюми он параллел ва дарозии он бошад, ба нисфи дарозии ин тараф баробар аст.

Дода шудааст: дар ΔABC: $AD=DB$, $CE=EB$, DE (расми 3).

Исбот кардан лозим: 1) $DE \parallel AC$; 2) $DE=\frac{1}{2}AC$.

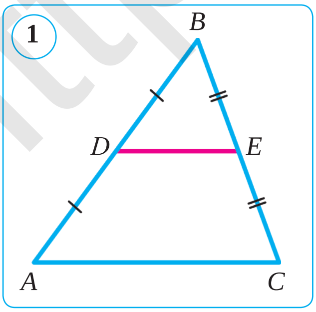
Исбот. 1) Порчаи *DE* хати миёнаи секунҷаи *ABC* бошад. Бо воситаи нуқтаи *D* ба тарафи *AC* хати рости параллел мегузаронем. Ин хати рост мувофиқи теоремаи Фалес порчаи *BC*-ро бурида мегузарад, яъне *DE* хати миёнаро дар бар мегирад. Аз рӯи сохт, $DE \parallel AC$.

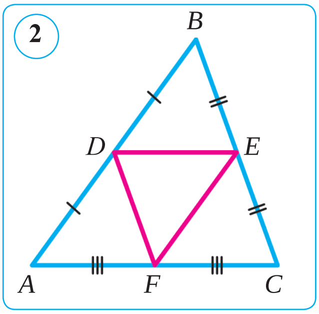
2) Акнун хати рости миёнаи *EF* мегузаронем. Аз рӯи исботи банди 1-ум, он ба тарафи *AB* параллел мешавад. $EF \parallel AB$, аз ин $EF \parallel AD$. Барои байниҳам параллел будани тарафҳои муқобили чоркунҷаи *ADEF* аз рӯи он таъриф параллелограмм мешавад. Аз рӯи хосияти параллелограмм $DE = AF$, аз рӯи теоремаи Фалес барои $AF = FC$ буданаш $DE=\frac{1}{2}AC$.

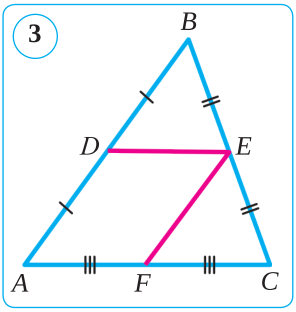
Теорема исбот шуд.

Масъалаи 1. Периметри секунҷа ба *p* баробар аст. Периметри секунҷаи куллаҳояш ба миёнаҷои тарафҳои секунҷаи додашуда бударо ёбед.

Ҳал. Тарафҳои секунҷаи ҳосилшуда хати миёнаи секунҷаи додашуда мебошад (расми 2). Пас, онҳо ба нисфи тарафҳои мувофиқ баробар аст. Аз ҳамин







сабаб периметре, ки мо барои дарёфташ будем ба нисфи периметри секунҷаи додашуда баробар мебошад:

$$P_{DEF}=DE+EF+FD=0{,}5(AC+AB+BC)=0{,}5p.$$

Ҷавоб: $0{,}5p$.

2. Хосияти хати миёнаи трапетсия.

Таъриф. *Порчаи миёнаҷои тарафҳои паҳлӯии трапетсияро пайвасткунанда* ***хати миёнаи трапетсия*** *ном дорад.*

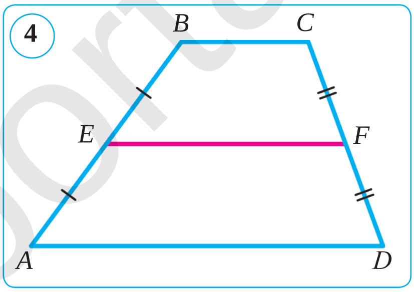
Ба мо трапетсияи $ABCD$ додашуда, дар он AD ва BC – асосҳои трапетсия; AB ва DC тарафҳои паҳлӯии он, нуқтаҳои E ва F миёнаҷои тарафҳои паҳлӯӣ аст (расми 4). Дар ин ҷо EF – хати миёна мешавад.

Теоремаи 2.

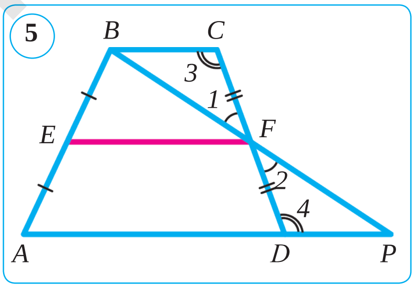
Хати миёнаи трапетсия ба асосҳои он параллел ва дарозии он ба нисфи суммаи дарозиҳои асосҳои трапетсия баробар аст.

Исбот. Бигзор EF- хати миёнаи трапетсияи $ABCD$ – и асосҳояш AD ва BC бошад, $(AD \| BC)$ хати рости BF мегузаронем ва нуқтаи буриши он ба хати рост AD -ро бо P ишора мекунем. (расми 5). Аз рӯи аломати дуюми баробарии секунҷаҳо, секунҷаҳои BCF ва PDF баробаранд (аз рӯи шарти $CF = DF$, $\angle 1 = \angle 2$ кунҷҳои вертикалӣ ва $\angle 3 = \angle 4$ BC ва AD хатҳои рости параллел ва CD кунҷҳои яктарафаи ивазшаванда барои буданаш). Аз баробарии ин секунҷаҳо $BF=PF$ ва $BC=DP$ ҳосил мешавад (бармеояд) ва пас EF-хати миёнаи секунҷаи ABP мешавад. Дар асоси хосияти хати миёнаи секунҷа:

4



5



$$EF \| AP \text{ ва } EF = \frac{1}{2}AP.$$

Ба $AD \| BC$ соҳиб мешавем. Аз сабаби, EF буданаш ба ҳарду асос параллел мешавад ва ин тавр ифода ёфтанаш мумкин:

$$EF = \frac{1}{2}AP = \frac{1}{2}(AD + DP) = \frac{1}{2}(AD + BC).$$

Пас, $EF \| AD \| BC$ ва $EF = \frac{1}{2}(AD + BC)$.

Теорема исбот шуд.

Натиҷа. Хати рости аз миёнаҷои тарафи паҳлӯии трапетсия гузаранда ба асосҳои он параллел шуда, тарафи дуюми паҳлӯиро ба ду қисми баробар ҷудо мекунад.

Инро мустақил исбот кунед.

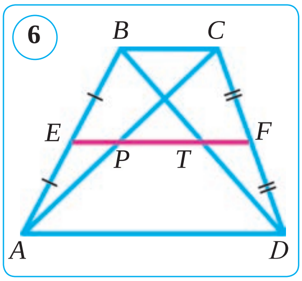
Савол, масала ва супоришҳо

1. 1) Хати миёнаи секунча чист?
2) Дар секунча чандто хати миёна сохтан мумкин?

2. Тарафҳои секунча ба 5 см, 7 см ва 11 см баробар аст. Тарафҳои секунчаи қуллааш дар хати миёнаи секунчаи додашуда воқеъ бударо ёбед.

3. Тарафҳои секунчаи хати миёнааш ба 6 см, 7 см ва 9 см баробар бударо ёбед.

4. Диагонали трапетсия хати миёнаи онро *(EF)* аз қуллаи *E* сар карда ба порчаҳои 5 см, 7 см ва 4 см тақсим мекунад (расми 6). Асосҳои трапетсияро ёбед.

6


5. Ҳар як тарафи секунчаи *ABC* бо се порчаи баробар тақсим шудааст ва нуқтаҳои ҷудо карда шуда бо ёрии порчаҳо пайваст карда шудааст. Агар секунчаи *ABC* ба *P* баробар бошад, периметри шакли дар расми 7 ҳосилшударо ёбед.

6. Асосҳои трапетсия ба: 1) 4,5 дм ва 8,2 дм; 2) 9 см ва 21 см баробар аст. Дарозии хати миёнаи он чӣ қадар аст?

7. Дар трапетсияи *ABCD* (расми 8), порчаи *EF* ба тарафи *CD* параллел нуқтаи *E* бошад, миёнаҷои *AB*, исбот намоед, ки *EF=0.5 CD* аст.

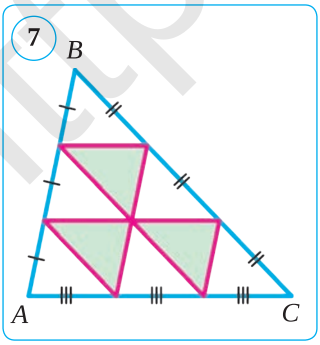
8. Дарозиҳои номаълуми дар расми 9 бударо ҳисоб кунед.

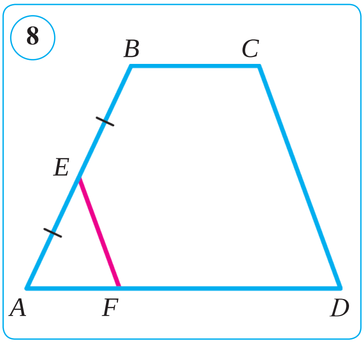
9. Ҳар як диагоналҳои трапетсия хати миёнаи онро ба порчаҳои 6 см –а ҷудо мекунад. Асосҳои ҳамин трапетсияро ёбед.

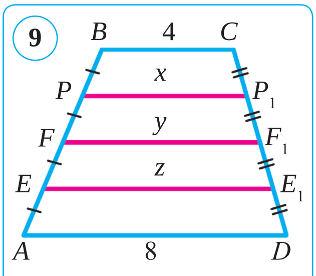
10. Диагонали трапетсияи баробарпаҳлӯ ба 6 см баробар буда, он бо асоси он кунҷи 60°-ро ташкил медиҳад. Хати миёкаи трапетсияро ёбед.

11. Асоси калони трапетсия аз асоси хурдаш 3 маротиба калон ва хати миёнаи он ба 20 см баробар. Асосҳои трапетсияро ёбед.

12. Периметри трапетсия ба 40 см, суммаи тарафҳои параллел набуда, ба 16 см баробаранд. Хати миёнаи ин трапетсияро ёбед.

7


8


9


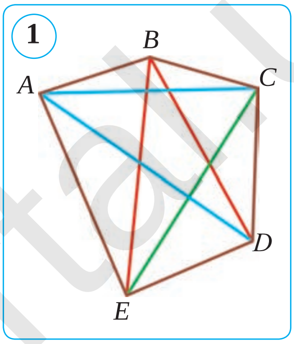
ABCD – трапетсия.
Ёфтан лозим: *x*, *y*, *z*.

12. ТАТБИҚ ВА МАШҚИ АМАЛӢ

1. Масъалаҳо доир ба тадқиқот.

Масъалаи 1. Бисёркунҷаи тарафаш n–то бударо созед ва диагоналҳои онро созед, дар он : 1) $n=5$; 2) $n=7$; 3) $n=8$ шумораи диагоналҳои гуногуни бисёркунҷаи (d_n). Бо роҳи мулоҳизаронӣ формулаи ҳисобкуниро ёбед.

Ҳал. 1) $n=5$. *Аз қуллаи* **2** то *AC* ва *AD*, *B* аз қуллаи **2** то *BD* ва *BE* диагоналҳо мебароянд (расми 1).



Аз он шумораи диагоналҳои аз қуллаи бисёркунҷаи барҷаста бароянда аз шумораи тараф (қулла)-ҳои он 3-то кам, яъне ба 5-3=2 баробар буданаш бармеояд. Барои ёфтани шумораи ҳамаи диагоналҳои аз қуллаҳо бароянда шумораи тарафҳои онро ба 2 зарб мезанем:

$$\mathbf{5\cdot(5-3)=5\cdot 2=10}.$$

Дар ин ҳосили зарб ҳар як диагонал 2 маротабгӣ ба ҳисоб гирифта шудааст. Аммо *AC* ва *CA, BD* ва *DB* ва ҳоказо. Яъне, як диагоналро бо ду тарз ифода намудан аст, яъне онҳо диагоналҳо нестанд. Аз ҳамин сабаб ҳосили зарби ҳосилшударо ба 2 тақсим намуда, адади ҳамаи диагоналҳои гуногунро меёбем:

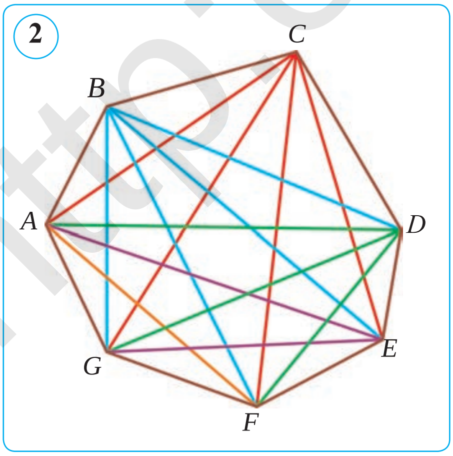
$$5\cdot 2:2=\mathbf{5}.$$

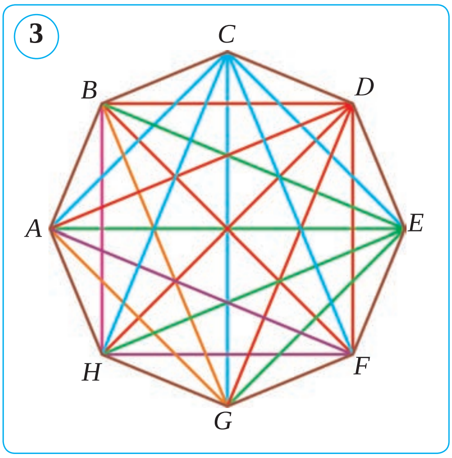
Пас, адади диагоналҳои гуногуни ҳамаи панҷкунҷаҳои барҷаста ба инҳо баробар аст.

$$d_5=\frac{5\cdot(5-3)}{2}=\frac{5\cdot\cancel{2}^1}{{}_1\cancel{2}}=\mathbf{5}.$$

Ҷавоб: 5-то.

2) $n=7$. Миқдори диагоналҳои ҳархелаи ҳафткунҷаи барҷаста ба мисли масъалаи болоӣ ҳал карда мешавад. Аз рӯи муҳокимаронихо дар асоси қонунияти муайяншуда, миқдори диагоналҳои ҳафткунҷаро ин тавр меёбем (расми 2):





$$d_7 = \frac{7\cdot(7-3)}{2} = \frac{7\cdot \cancel{4}^{2}}{{}_{1}\cancel{2}} = \mathbf{14}.$$

Ҷавоб: 14-то.

3) $n=8$. Миқдори диагоналҳои ҳархелаи ҳашткунҷаи барҷастаро аз рӯи ҳалли масъалаҳои болоӣ ёфта мешавад. Аз рӯи муҳокимаронихо дар асоси қонунияти муйяншуда миқдори диагоналҳои ҳашткунҷаи барҷастаро ин тавр меёбем (расми 3):

$$d_8 = \frac{8\cdot(8-3)}{2} = \frac{{}^{4}\cancel{8}\cdot 5}{\cancel{2}_{1}} = \mathbf{20}.$$

Ҷавоб: 20-то.

Пас, миқдори диагоналҳои гуногуни бисёркунҷаи барҷаста аз рӯи формулаи зерин ёфта мешавад:

$$d_n = \frac{n(n-3)}{2}.$$

Дар хотир доред! *Диагоналҳои аз як қуллаи n-кунҷаи барҷаста бароянда, онро ба (n -2)-то секунҷа тақсим мекунад.*

Масъалаи 2. Оё бисёркунҷа 25-то диагонал дошта метавонад?

Ҳал. Миқдори диагоналҳои гуногуни ҳамаи кунҷаҳои n ба $d_n = \frac{n(n-3)}{2}$ баробар аст.

Пас, $\frac{n(n-3)}{2} = 25$. Дар ин маврид $n(n-3)=50$ ё ки $n(n-3)=2\cdot5\cdot5$. Аз ин ҷо маълум мешавад, ки адади 50-ро ба намуди ҳосили зарби ададҳои натуралӣ аз якдигар 3 фоиз фарқ кунанд, ифода кардан мумкин нест. Бинобар ин миқдори ҳамаи диагоналҳои бисёркунҷаи барҷаста 25-то шуда наметавонад.

Ҷавоб: не мавҷуд нест.

Масъалаи 3. Адади секунҷа ва чоркунҷаҳои расмҳои дар хонаи математика таъсвир шуда 15-то миқдори тарафҳои онҳо 53-то. Дар расмҳо чантогӣ секунҷа ва чоркунҷа тасвир шудааст?

Ҳал. Шумораи тарафҳои чоркунҷаҳо ба ададҳои дилхоҳи натуралӣ ба 4 каратӣ аст, яъне адади ҷуфт мешавад. Дар ҳолати тоқ будани миқдори секунҷаҳо ҳосили ҷамъ тоқ мешавад. Дар асоси шарти масъала муодила тартиб медеҳем. $3x+4y=53$; ҳолатҳои мувофиқи зеринро дида мебароем.

Ба ҷои ададҳои номаълуми муодилаҳо ададҳои мувофиқро гузошта, ҳалли онро қаноаткунандаро меёбем:

Ҳолати 1. $x=1$ ва $y=14$ бошад, дар ин ҳолат $3\cdot1+4\cdot14=53$, яъне $59\neq53$.

Ҳолати 2. $x=3$, $y=13$; $3\cdot3+4\cdot12=53$, яъне $57\neq53$.

Ҳолати 3. $x=5$, $y=10$; $3\cdot5+4\cdot10=53$, яъне $55\neq53$.

Ҳолати 4. $x=7$, $y=8$; $3\cdot7+4\cdot8=53$, яъне $53=53$.

Ҳолати 4, шарти масъаларо қаноат мекунонад, аз ин сабаб ҳолатҳои дигаро намебинем.

Ҷавоб: 7-то секунҷа, 8-то чоркунҷа .

Машқҳои иловагӣ барои мустаҳкамкунӣ.

1. Миқдори диагоналҳои аз як қуллаи бисёркунҷаи барҷаста бароянда 13-то. Миқдори тарафҳои ҳамаи бисёркунҷа чандтоанд? Миқдори ҳамаи диагоналҳо-чӣ?
2. Бисёркунҷаи миқдори диагоналҳояш: 1) ба миқдори тарафҳояш баробар; 2) Аз миқдори тарафҳояш кам оё мавҷуд ҳаст?

МАТЕРИАЛҲОИ ИЛОВАГИИ ИНКИШОФДИҲАНДАИ КОМПЕТЕНСИЯИ АМАЛӢ

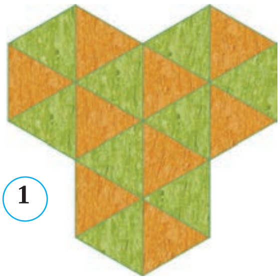
ПАРКЕТҲОИ БИСЁРКУНҶАИ МУНТАЗАМ

Шумо албатта дар бораи паркет тасаввурот доред. Дар бисёр мавридҳо хонаҳо полҳои иншоотҳои гуногун бо паркетҳои росткунҷа, квадрат ва шашкунҷаи мунтазам пӯшонида шудааст.

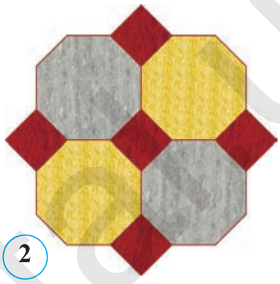
Аз нуқтаи назари математикӣ, паркет – ин якдигарро набурида бо ҳам зич ҷойгир намудани шаклҳои геометрӣ дар ҳамворӣ мебошад. Аввал паркетҳои бисёркунҷаи мунтазам – квадрат, чоркунҷа ва шашкунҷаро дида мебароем. Дафтари аз як хел квадратча (катак)-ҳо сохта шуда мисоли аз ҳама соддаи паркетҳо мебошад. Дар расми 1-ум аз бисёркунҷаҳои мунтазам; дар расми 2-юм аз квадрат ва шашкунҷаи мунтазам; дар расми 3-юм бошад, аз шашкунҷаи мунтазам квадратҳо ва секунҷаҳои баробартараф; дар расми 4-ум паркетҳои зебо аз шашкунҷаҳои мунтазам ва секунҷаҳо тасвир карда шудааст.

Паркет гуфта чунин пӯшондани ҳамвориро бо бисёркунҷаҳо меноманд, ки дар он ду бисёркунҷаи дилхоҳ ба тарафи умумӣ ё ки ба қуллаи умумӣ соҳиб мешавад, ё худ ба қуллаҳои умумӣ соҳиб намешавад. Агар паркет аз бисёркунҷаҳои мунтазам ташкил ёфта бошад ва ба атрофи ҳар як қулла бисёркунҷаҳо бо як хел усул ҷойгир шуда бошанд, паркетро *мунтазам* меноманд.

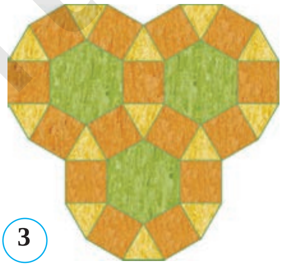
Давоми паркетҳо секунҷаи баробартараф, квадратҳо ва шашкунҷаи мунтазам ва паркетҳои ҳамвориро пӯшонда мисол шуда метавонад. Ғайр аз бисёркунҷаи мунтазам мавҷуд набудани дигар бисёркунҷаҳои мунтазами ҳамвории пӯшонандаро дида мебароем ва



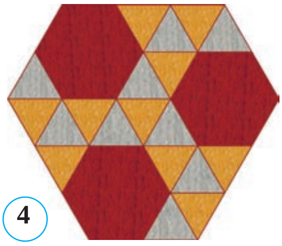
1



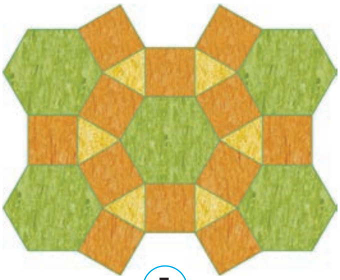
2



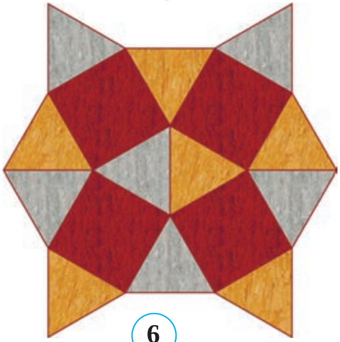
3



4



5



6

исбот мекунем. Барои ин ба 360° баробар будани суммаи кунҷҳои бисёркунҷаи аз як қуллаи паркети бароянда истифода мебарем.

Барои он панҷкунҷаи мунтазамро дида мебароем. Ба мо маълум аст, ки суммаи кунҷҳои дохили панҷкунҷаи мунтазам ба 108° баробар аст. Ба як қуллаи паркет сето панҷкунҷаи мунтазамро ғунҷонидан мумкин нест; чунки дар ин ҳолат суммаи кунҷҳо 324° < 360° мешавад. Агар миқдори панҷкунҷаи мунтазам 4-то ё ки аз он бисёр бошад, онгоҳ суммаи кунҷҳо 432°>360° мешавад. Бинобар ин паркети аз панҷкунҷаи мунтазам сохта вуҷуд надорад. Ба монанди ҳамин паркетет мавҷуд нест, ки ба як қуллаи он қисмҳои паркетҳои аз сето ё ки аз он зиёд ҳафткунча ва ҳашткунҷаи мунтазам ва ҳоказоро ҷойгир намудан лозим бошад, чунки ҳар як кунҷи он аз 120° калон ва суммаи онҳо аз 360° калон мешавад. Аз ҳамин сабаб паркетҳои аз ҳафткунҷаи мунтазам, ҳашткунҷаи мунтазам ва ҳоказо сохта шуда мавҷуд нест. Паркетҳои (расми 5) аз секунҷаҳои баробартараф квадрат ва шашкунҷаи мунтазам аз паркетҳои дар расми 3 буда, бо тарзи ҷойгиршавиашон фарқ мекунанд. Дар расми 6 бошад, паркети аз секунҷаҳои баробартараф ва квадрат сохта шуда тасвир карда шудааст. Дар ҳар ду паркети овардашуда ҳам қонунияти умумиро дидан мумкин аст, яъне суммаи кунҷҳои доҳилии шаклҳои дар атрофи ҳар як қулла буда, ба 360° баробар буданаш худ аз худ маълум аст. Масалан, дар расми 5, 60°+90°+90°+120°=360°, яъне, дар атрофи як қулла якта секунҷаи баробартараф 2-то квадрат ва якто шашкунҷаи мунтазам ҷой грифтаанд. Дар расми 6-ум бошад, дар атрофи як қулла 3-то секунҷаи баробартараф (ҳар як кунҷи дохилӣ бо 60°) ва 2-то квадрат (ҳар як кунҷи дохилӣ бо 90°) ҷойгир шудааст. Дигар намудҳои паркетҳои ҳамвории пӯшонандаро бо ҷадвал меоварем. Паркетҳои дар расмҳои 5 ва 6 бударо сохта бинед.

α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots=360°$
60°	60°	60°	60°	60°	60°	Паркети аз секунҷаҳо сохташуда
60°	60°	120°	120°			Паркетҳои аз секунҷаҳо ва шашкунҷаҳо сохташуда
60°	90°	90°	120°			Паркетҳои аз секунҷа, квадрат ва шашкунҷа сохташуда
60°	150°	150°				Паркетҳои аз секунҷа ва дувоздаҳкунҷаҳо сохташуда
90°	90°	90°	90°			Паркети аз квадратҳо сохташуда
120°	120°	120°				Паркети аз шашкунҷаҳо сохташуда

13–14. КОРИ НАЗОРАТӢ. ИСЛОҲ НАМУДАНИ ХАТОГИҲО

1. Переметри росткунча ба 40 см, нисбати тарафҳояш ба 3:5 баробар аст. Тарафҳои ҳамин чоркунчаро ёбед.

2. Яке аз тарафҳои параллелограмм аз дигараш 4 маротиба калон аст, периметраш ба 30 см баробар. Тарафҳои параллелограммро ёбед.

3. Кунҷи тези трапетсияи росткунҷа ба 45° баробар. Тарафи хурди паҳлӯӣ, инчунин асоси хурди он ба 16 см баробар аст. Асоси калони трапетсияро ёбед.

4. Дар трапетсияи *ABCD*. *AD* – асоси калон бо воситаи қуллаи *B* хати рости ба тарафи *CD* параллел ва тарафи *AD*-ро дар нуқтаи *E* буранда гузаронида шудааст, *BC* =7 см, *AE*=4 см. 1) Хати миёнаи трапетсияро; 2) агар переметри секунҷаи *ABE* ба 17 см баробар бошад, переметри ҳамин трапетсияро ёбед.

ТЕСТИ 1.

Худро санҷед!

1. Яке аз кунҷҳои чоркунҷаи барҷаста рост, боқимондааш бошад, ба нисбати 3:4:8. Кунҷи хурди чоркунҷаро ёбед.
A) 72°; B) 54°; D) 144°; E) 90°.

2. Агар ҳар як кунҷи дохилии бисёркунҷаи барҷаста 156° бошад, он чанд тараф дорад?
A) 10-то; B) 15-то; D) 12-то; E) 8-то.

3. Периметри параллелограмми *ABCD* ба 32 см, диагонали *BD = 9 см* баробар. Периметри секунҷаи *ABD* – ро ёбед.
A) 16 см; B) 25 см; D) 23 см; E) 41 см.

4. Параллелограмми суммаи дукунҷаш ба 100° баробарро ёбед?
A) 120°; B) 110°; D) 150°; E) 130°.

5. Яке аз кунҷҳои ромб ба 150° баробар аст, диагонали хурдаш бошад, ба 4,5 см баробар. Периметри ромбро ёбед.
A) 27 см; B) 18 см; D) 13 см; E) 21,5 см.

6. Трапетсияи *ABCD*-и хати миёнаи трапетсия онро ба ду трапетсияи хатҳои миёнааш ба 13 см ва 17 см баробар ҷудо мекунад. Асоси калони трапетсияро ёбед.
A) 19 см; B) 21 см; D) 18 см; E) 30 см.

7. Хати миёнаи секунҷа аз асоси он 5,4 см кӯтоҳ аст. Суммаи хати миёнаи секунҷа ва асоси онро ёбед.
A) 13,5 см; B) 16,2 см; D) 10,8 см; E) 21,6 см.

8. Периметри трапетсияи баробарпаҳлӯ 36 см, хати миёнааш 10 см. Дарозии тарафи паҳлӯиро ёбед.
A) 10 см; B) 8 см; D) 12 см; E) 13 см.

9. Хати миёнаи трапетсия 9 см, яке аз асосҳои он аз дигараш 6 см кӯтоҳ аст. Асоси калони трапетсияро ёбед.
A) 15 см; B) 18 см; D) 12 см; E) 10 см.

Забони англисиро меомӯзем!

Бисёркунча – polygon
Росткунча – rectangle
Ромб – rhombus
Квадрат – square
Баландӣ – height

Периметр – perimeter
Диагонал – diagonal
Параллелограмм – parallelogramm
Трапетсия – trapezoid
Кунҷ – angle

Маълумотҳои таърихӣ

Абӯрайҳон Берунӣ
(973–1048)

Дар математикаи Миср ва Бобулистони қадим, намудҳои зерини чоркунҷа вомехӯранд: квадратҳо, росткунҷаҳо, трапетсияҳои росткунҷа ва баробарпаҳлӯ. Аз олимони осиёимиёнагӣ **Абӯрайҳони Берунӣ** намудҳои чоркунҷаҳоро муфассал омӯхтааст. Ӯ дар асари худ «Китоб дар бораи санъати астрономӣ» савол мегузорад: «Чоркунҷа чӣ намуд дорад?» ва чунин ҷавоб медиҳад:

*«**Якум – квадрат**, ҳамаи тарафҳои он баробар, хатҳои пайвасткунандаи кунҷ (нӯг)-и муқобилхобида, яъне диагоналҳо баробаранд.*

***Дуюм – росткунҷа,** нисбат ба квадрат дарозтар, ҳамаи кунҷҳояш рост, аз ҳар тараф хар хел, танҳо тарафҳои муқобилхобида ва диагоналҳояшон баробаранд.*

***Сеюм – ромб**, чор тарафаш баробар, аммо диагоналҳояшон гуногун, танҳо ду тарафи муқобилхобидаи онҳо баробаранд.*

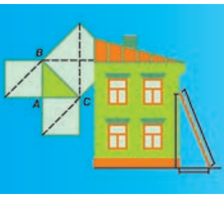
***Чорум – ромбоид**, диагоналҳои он гуногунанд, танҳо дутогӣ тарафҳои муқобил баробаранд.*

***Чоркунҷае,** ки аз ин гуна шаклҳо фарқ мекунад, **трапетсияҳо** номида мешаванд».*

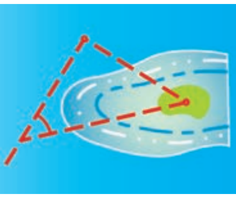
Квадрат калимаи лотинӣ буда, маънои «чоркунҷа»-ро дорад. Берунӣ калимаи арабии «*мураббаъ*»-ро истифода кардааст. Ба забони лотинӣ айнан ҳамин калимаи арабӣ тарҷима шудааст. Росткунҷа дар забони арабӣ «*мустатил*» – «кашишхӯранда» ном дорад.

Ба миён омадани мафҳуми **ромб** ба тарзи гуногун фаҳмонида мешавад. Он аз калимаи юнонӣ гирифта шуда, маънои «*ҷисми гарданда*», «*тобхӯранда*»-ро дорад. Мафҳуми зерин ба геометрия аз сабаби ба ромб монанд будани хати бодбарак дохил гардидааст. Дар забони арабӣ мафҳуми «*ромб*»-ро «*муайян*» қабул кардаанд.

Трапетсия калимаи юнонӣ, маънои «*мизча*»-ро дорад. Маънои айнани луғавии он – чорпоя. Дар ҳақиқат, калимаи юнонии «*трапедзион*» мизча, мизи ғизохӯриро мефаҳмонад. Берунӣ «*трапетсия*»-ро «*муҳарриф*» номидааст, ки ин тарҷимаи айнан калимаи юнонии «трапедзион» мебошад.



БОБИ II. МУНОСИБАТҲОИ БАЙНИ ТАРАФҲО ВА КУНҶҲОИ СЕКУНҶАИ РОСТКУНҶА



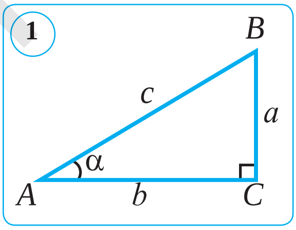
§ 3.

ФУНКСИЯҲОИ ТРИГОНОМЕТРИИ КУНҶИ ТЕЗ

15. СИНУС, КОСИНУС, ТАНГЕНС ВА КОТАНГЕНСИ КУНҶИ ТЕЗ

Тригонометрия, як қисми математика буда, он вобастагии байни тарафҳо ва кунҷҳои секунҷа, хосиятҳои функсияҳои тригонометрӣ ва муносибатҳои байни онҳоро меомӯзад. **„Тригонометрия“** аз калимаи юнони **“trigon”** – секунҷа ва **“metrezis”** ченкунӣ гирифта шуда, маъ노яш ба забони тоҷикӣ **“ченкардани секунҷаҳо”** мебошад. Вазифаи асосии тригонометрия аз ҳалли секунҷаҳо иборат аст. Секунҷа яке аз шаклҳои асосии геометрия мебошад. Бинобар ин омӯхтани геометрияро давом медиҳем. Мақсади асосии боб, ягон элементи секунҷаро (тарафҳо ва кунҷҳо)-ро ба воситаи дигар элементҳояш ифода намудан мебошад.

1



Бигзор секунҷаи росткунҷаи ($\angle C=90°$) катетҳояш $BC = a$ ва $AC = b$, гипотенузааш $AB = c$ ва кунҷи тезаш $\angle A = a$ додашуда бошад (расми 1).

Нисбати тарафҳои секунҷаҳоро ҷуфт-ҷуфт мегирем:

$\frac{a}{c}$ – нисбати катети муқобили кунҷи α бар гипотенуза;

$\frac{b}{c}$ – нисбати катети ба кунҷи α часпида бар гипотенуза;

$\frac{a}{b}$ – нисбати катети муқобили кунҷи α ба катети ба кунҷ часпида;

$\frac{b}{a}$ – нисбати катети ба кунҷи α часпида ба катети муқобили ҳамон кунҷ;

$\frac{c}{b}$ – нисбати гипотенуза ба катети ба кунҷи α часпида;

$\frac{c}{a}$ – нисбати гипотенуза ба катети муқобили кунҷи α ҳамин тавр ҳамагӣ 6-то нисбатро ҳосил намудем.

Ба монанди ҳамин барои кунҷи тези дуюм (B) ҳам бо ҳамин тартиб нисбатҳоро тартиб додан мумкин.

Чор нисбати аввалин бо номҳои махсус ифода карда мешавад.

Таърифи 1. ***Синуси*** *кунҷи тези секунҷаи росткунҷа гуфта, нисбати катети муқобили кунҷ бар гипотенузаро меноманд.*

Синуси кунҷи α-ро бо **sinα** ишорат намуда, он “*Синус алфа”* хонда мешавад. Мувофиқи таъриф:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \cdot$$

Таърифи 2. ***Косинуси*** *кунҷи тези секунҷаи росткунҷа гуфта, нисбати катети ба кунҷ часпида бар гипотенузаро меноманд.*

Косинуси кунҷи α-ро бо **cosα** ишорат намуда, он “*Косинуси алфа”* хонда мешавад. Мувофиқи таъриф:

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \cdot$$

Таърифи 3. ***Тангенси*** *кунҷи тези секунҷаи росткунҷа гуфта, нисбати катети муқобили кунҷ бар катети ба кунҷ часпидаро меноманд.*

Тангенси кунҷи α-ро бо **tgα** ишорат намуда, он “*Тангенси алфа”* хонда мешавад.Мувофиқи таъриф:

$$\text{tg}\alpha = \frac{a}{b} .$$

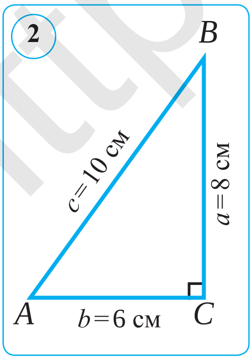
Таърифи 4. ***Котангенси*** *кунҷи тези секунҷаи росткунҷа гуфта, нисбати катети ба кунҷ часпида ба катети муқобили кунҷро меноманд.*

Котангенси кунҷи α-ро бо **ctg**α ишорат намуда, он “*Котангенси алфа”* хонда мешавад. Мувофиқи таъриф:

$$\text{ctg}\alpha = \frac{b}{a} .$$

Аз сабаби дар секунҷаи росткунҷа аз гипотенуза хурд будани катет *синус ва косинуси кунҷи тез аз як хурд* мебошад. Дар секунҷаи росткунҷа катетҳо байни ҳам баробар аст. Яке аз дуюм хурд ё калон шуданаш мумкин.

Бинобар ин қиматҳои тангенс ва котангенс *аз 1 хурд ба 1 баробар, инчунин аз 1 калон* шуда метавонад.



Масъала: Дар секунҷаи ABC $\angle C=90°$, $AB=10$ см, $BC=8$ см, $AC=6$ см (расми 2). Қиматҳои функсияи тригонометрии кунҷи A-ро ёбед.

Ҳал. Мувофиқи таъриф:

$$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{8}{10} = 0,8; \qquad \operatorname{tg}A = \frac{{}^{4}\cancel{8}}{\cancel{6}_{3}} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3};$$

$$\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{6}{10} = 0,6; \qquad \operatorname{ctg}A = \frac{{}^{3}\cancel{6}}{\cancel{8}_{4}} = \frac{3}{4} = 0,75;$$

Ҷавоб: $\sin A=0,8$; $\cos A=0,6$; $\operatorname{tg}A=1\frac{1}{3}$; $\operatorname{ctg}A=0,75$.

Савол, масъала ва супоришҳо

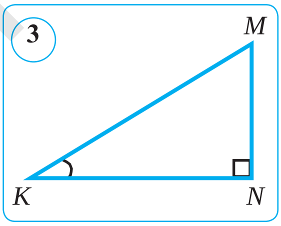
1. 1) Аз тарафҳои секунҷаи росткунҷа чӣ хел нисбатҳо тартиб додан мумкин ва он чӣ тавр хонда мешаванд?
2) Дар секунҷаи росткунҷа синус, косинус, тангенс ва котангенси кунҷи тез гуфта чиро меноманд ва онҳо чӣ хел ишорат карда мешаванд?

2. Ҳар як каср мувофиқи таъриф кадом функсияи тригонометрии кунҷи K-ро ифода мекунад (расми 3).

а) $\frac{KN}{KM}$; б) $\frac{MN}{KN}$; в) $\frac{MN}{KM}$; г) $\frac{KN}{MN}$?

3. Дар $\triangle ABC$, $\angle C=90°$, $AB=6$ см, $BC=5$ см, $AC=\sqrt{11}$ см (расми 1). Қиматҳои синус, косинус, тангенс ва котангенси кунҷҳои A ва B-ро ёбед.

3



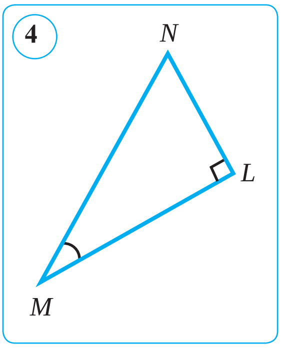
4. Дар секунҷаи росткунҷа оё синуси кунҷи тез ба: а) 0,98; б) $\sqrt{2}$; в) $\sqrt{5}-2$ баробар шуда метавонад?

5. Дар секунҷаи росткунҷаи MNL $\sin N = \frac{24}{25}$. Аз ин баробарӣ кадом тарафи секунҷаро ёфтан мумкин (расми 4).

6. Дар секунҷаи MNL $\angle L=90°$, $MN=13$ см $ML=12$ см $NL=5$ см (расми 4). Қиматҳои синус, косинус, тангенс ва котангенси кунҷи М-ро ёбед.

7. Дар секунҷаи ABC $\angle L=90°$, $AB=17$ см $BC=8$ см $AC=15$ см. Қиматҳои синус, косинус, тангенс ва котангенс кунҷҳои A ва B-ро ёбед.

4



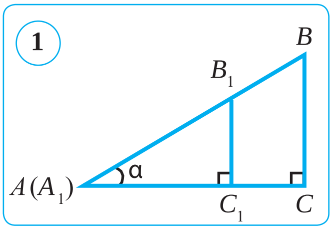
Донистан фоиданок аст!

- *Калимаи «**синус**» аз забони лотинӣ гирифта шуда, маънояш «**сархамӣ**» -ро мефаҳмонад.*
- *Калимаи «**тангенс**»-ро аз забони лотинӣ тарҷума намоем маънояш «**расанда**» мебошад.*
- *Калимаҳои «**косинус**» ва «**отангенс**» sinus ва «complementi tangens» калимаҳои мухтасари «синуси пуркунанда» ва «тангенси пуркунанда» мебошад.*

16. СИНУС, КОСИНУС, ТАНГЕНС ВА КОТАНГЕНСИ КУНҶИ ТЕЗ (ДАВОМАШ)

1. Функсияҳои тригонометрии кунҷи тез.

Функсияи тригонометрии кунҷи тез дар секунҷаи росткунҷа қиматҳои синус, косинус, тангенс ва котангенс фақат вобаста ба бузургии кунҷи тез ва ба интихоби секунҷаи росткунҷа новобаста будани онро нишон медиҳем.



Дар секунҷаи росткунҷаи ABC ва $A_1B_1C_1$ ($\angle C = \angle C_1 = 90°$) $\angle A = \angle A_1$ бошад (расми 1). Мувофиқи хосияти асосии таносуб:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{B_1C_1}{A_1B_1}; \quad \frac{AC}{AB} = \frac{A_1C_1}{A_1B_1}; \quad \frac{BC}{AC} = \frac{B_1C_1}{A_1C_1}; \quad \frac{AC}{BC} = \frac{A_1C_1}{B_1C_1}$$

Қисмҳои чап ва рости ин баробарӣ мувофиқан ба синус, косинус, тангенс ва котангенси кунҷҳои A ва A_1 баробар аст. Пас,

$$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{B_1C_1}{A_1B_1} = \sin A_1, \quad \mathrm{tg} A = \frac{BC}{AC} = \frac{B_1C_1}{A_1C_1} = \mathrm{tg} A_1,$$

$$\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{A_1C_1}{A_1B_1} = \cos A_1, \quad \mathrm{ctg} A = \frac{AC}{BC} = \frac{A_1C_1}{B_1C_1} = \mathrm{ctg} A_1.$$

Аз ин ҷо маълум мешавад, ки синус, косинус, тангенс ва котангенси кунҷи тези A аз интихоби секунҷа вобаста нест. Агар қимати кунҷи тез тағйир ёбад, ин нисбатҳо албатта тағйир меёбад.

Ҳамин тавр, **синус, косинус, тангнес ва котангенси кунҷи тез фақат аз бузургии кунҷи тез вобаста аст.**

Синус, косинус, тангенс ва котангенси кунҷи тезро функсияҳои тригонометрӣ меноманд. Аз баробариҳои дар боло овarда шуда чунин хулосаи асосӣ бармеояд.

Агар барои кунҷҳои тези A ва A_1 ягон функсияи тригонометрӣ баробар бошад, онгоҳ кунҷҳои тези A ва A_1 ба ($\angle A = \angle A_1$) баробар мешавад.

Бо тарзи дигар гӯем, ***ба ҳар як қимати функсияи тригонометрӣ кунҷи тези ягона мувофиқ меояд***.

2. Ифода намудани тангенс ва котангенс бо ёрии синус ва косинус.

Аз таърафҳои синус ва косинус баробариҳои зерин ҳосил мешавад (ниг. ба мавзӯи 15).

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{b}{c} : \frac{a}{c} = \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} = \frac{b}{a} = \mathrm{ctg}\alpha, \quad \text{яъне} \quad \mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \qquad (1)$$

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{b}{c} : \frac{a}{c} = \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} = \frac{b}{a} = \mathrm{ctg}\alpha, \quad \text{яъне} \quad \mathrm{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \qquad (2)$$

Ҳаминтавр тангенс ва котангенси кунҷи тез бо ёрии синус ва косинус чунин таъриф дода мешавад.

Нисбати синуси кунҷи тез бо косинуси он ***тангенси*** *ҳамин кунҷ номида мешавад.*

Нисбати косинуси кунҷи тез бо синуси он ***котангенси*** *ҳамин кунҷ номида мешавад.*

Баробарии (1) ва (2)-ро аъзо ба аъзо зарб намуда, баробарии зеринро ҳосил мекунем:

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=1\Leftrightarrow\operatorname{tg}\alpha\times\operatorname{ctg}\alpha=1. \qquad (3)$$

Пас, ***ҳосили зарби тангенс ва котангенси кунҷи тези α ба 1 баробар аст.*** Аз ин ҷо байни худ чаппа будани функсияҳои тангенс ва котангенси кунҷи тези α бармеояд. Ҳаминтавр мо барои кунҷи тези α-сето *баробарии* нав *(айният)*- ро ҳосил намудем.

3. Муносибатҳои байни тарафҳо ва кунҷҳои секунҷаи росткунҷа.

Аз таърифҳои функсияҳои тригонометрӣ қоидаҳои зерин бармеояд.

Қоидаи 1. Катети муқобили кунҷи α ба ҳосили зарби гипотенуза ва синуси кунҷи α баробар аст:

$$a=c\sin\alpha.$$

Қоидаи 2. Катети муқобили кунҷи α ва ҳосили зарби катети дуюм тангенси кунҷи α баробар аст:

$$a=b\operatorname{tg}\alpha.$$

Қоидаи 3. Катети ба кунҷи α часпида ба ҳосили зарби гипотенуза ва косинуси кунҷи α баробар аст:

$$b=c\cos\alpha.$$

Қоидаи 4. Катети ба кунҷи α часпида ба нисбати катети муқобили кунҷ ба тангенси кунҷи α баробар аст:

$$b=\frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}$$

Қоидаи 5. Нисбати катети муқобили кунҷ бар тангенси кунҷи α ба гипотенузаи α баробар аст:

$$c=\frac{a}{\sin\alpha}.$$

Қоидаи 6. Нисбати катети ба кунҷ часпида бар косинуси кунҷи α ба гипотенузаи α баробар аст:

$$c=\frac{b}{\cos\alpha}.$$

Масъала: Дар секунчаи ABC кунчи C ба 90° баробар аст. Агар: 1) $AB = 18$ см ва $\sin A = \frac{1}{3}$ бошад, катети BC-ро; 2) $AC = 15$ см ва $\cos A = \frac{5}{6}$ бошад, гипотенузаи, AB-ро; 3) $BC = 26$ см $\operatorname{tg} A = \frac{13}{15}$ бошад, катети AC-ро ҳисоб кунед.

Ҳал. 1) Аз қоидаи 1 истифода бурда, катети BC-ро меёбем:

$$BC = AB\sin A = {}^{6}\cancel{18} \cdot \frac{1}{\cancel{3}_1} = 6 \ \ (\text{см}).$$

Ҷавоб: 6 см.

2) Аз қоидаи 6 истифода бурда, гипотенузаи AB–ро меёбем:

$$AB = \frac{AC}{\cos A} = 15 : \frac{5}{6} = {}^{3}\cancel{15} \cdot \frac{6}{\cancel{5}_1} = 3 \cdot 6 = 18 \ \ (\text{см}).$$

Ҷавоб: 18 см.

3) Аз қоидаи 4 истифода бурда, катети AC-ро меёбем:

$$AC = \frac{BC}{tgA} = 26 : \frac{13}{15} = {}^{2}\cancel{26} \cdot \frac{15}{\cancel{13}_1} = 2 \cdot 15 = 30 \cdot$$

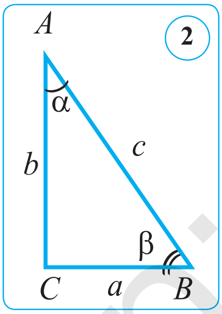
Ҷавоб: 30 см.

Савол, масъала ва супоришҳо

1. 1) Функсияи тригонометрии кунчи тез чист?

2) Бузургии кунчи тези синус, косинус, тангенс ва котангенс ба чӣ вобаста аст?

2. Дуруст будани кадоме аз баробарии дода шудаи зеринро муайян кунед (расми 2). Ҷавобатонро асоснок кунед.



а) $c = \frac{a}{\sin\alpha}$; б) $b = c\sin\alpha$; в) $c = a\operatorname{tg}\alpha$; г) $a = \frac{b}{\operatorname{ctg}\alpha}$.

3. Оё тангенси кунчи тези секунчаи росткунча ба $\sqrt{2}$; 0,001 ва 100 баробар шуда метавонад? Ҷавобатонро асоснок кунед.

4. Дар секунчаи ABC кунчи C ба 90° баробар аст. Агар

1) $BC = 10$ см ва $\operatorname{tg} A = \frac{5}{8}$ бошад, катети AC-ро;

2) BC=8 см ва $\sin A$=0,16 бошад, гипотенузаи AB-ро ҳисоб кунед.

5. 6-то муносибати байни тарафҳо ва кунҷҳои секунчаи росткунчаро барои кунчи B низ ҳосил кунед (расми 2).

6. Дар секунчаи ABC кунчи C ба 90° баробар аст. Агар BC=4 см ва $\sin A$=0,25 бошад, гипотенузаи AB-ро ҳисоб кунед.

7. Дар секунчаи ABC кунчи C ба 90° баробар аст. Агар AC=2 см ва $\cos A$=0,4 бошад, гипотенузаи AB-ро ҳисоб кунед.

8. Дар секунчаи ABC кунчи C ба 90° баробар аст. Агар BC=14 см ва $\cos B = \frac{7}{25}$ бошад, гипотенузаи AB-ро ҳисоб кунед.

§ 4. ТЕОРЕМАИ ПИФАГОР ВА ТАТБИҚҲОИ ОН

17. ТЕОРЕМАИ ПИФАГОР ВА ИСБОТҲОИ ГУНОГУНИ ОН

1. Теоремаи Пифагор – яке аз муҳимтарин теоремаҳои геометрия мебошад.

Дар бораи ҳаёти математики машҳури юнонӣ *Пифагор* маълумот хеле кам аст. Мактаби Пифагор ҷудо кардани шаклҳо, шаклҳои хати ростро ба шаклҳои баробар иваз намуда, теоремаро бо усули геометрӣ исбот намуда, барои ҳалли масъалаҳо истифода кардан аз асарҳои математики юнон маълум аст. Дар ташаккули геометрия чун фан Пифагор ва мактаби ӯ ҳиссаи калон гузоштаанд. Теоремаи зерин бо номи Пифагор машҳур аст.

Теорема.

(*Теоремаи Пифагор.*) Дар секунҷаи росткунҷа квадрати гипотенуза ба суммаи квадрати катетҳои он баробар аст.

Ин теорема дар бораи секунҷаҳои росткунҷа мебошад ва таносуби байни масоҳати квадратҳои ба тарафҳои секунҷа баробарро дар назар дорад. Пифагор исботи назариявии ин теоремаро овардааст. Ҳолатҳои хусусии муносибатҳои геометрии бо теоремаи Пифагор муайяншуда пеш аз Пифагор ҳам дар байни халқҳои гуногун маълум буд, аммо шакли умумии теорема ба мактаби Пифагор тааллуқ дорад.

Бигзор секунҷаи росткунҷаи ABC, ки катетҳояш a ва b ва гипотенузааш c аст, додашуда бошад. Дар ин ҳолат теоремаи Пифагор бо формулаи

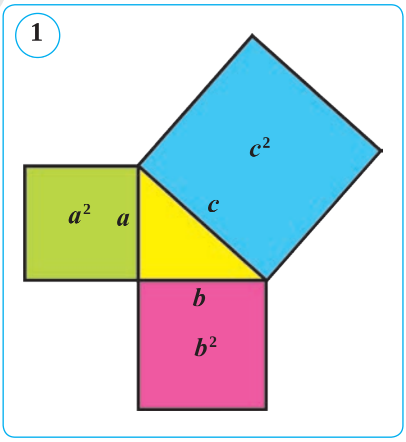
$$c^2=a^2+b^2, \qquad (1)$$

ифода меёбад. Дар ин ҷо a^2, b^2, c^2 – ба масоҳати тарафҳояш a, b, c баробар аст. Бинобар ин, баробарии зерин баробарии тарафро ба ***дарозии гипотенуза, баробарии масоҳати квадратро ба сумма нишон*** медиҳад (расми 1)

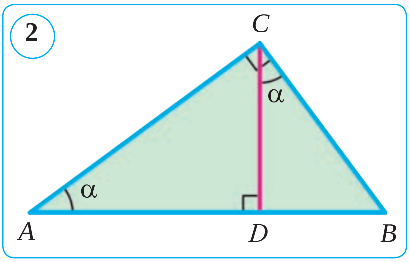
2. Исботи теоремаи Пифагор ба воситаи косинуси кунҷи тез.

Исбот: ABC – секунҷаи росткунҷаи додашуда буда, кунҷи C-и он рост бошад. Баландии CD-ро аз қуллаи C-и секунҷаи росткунҷа мегузаронем (расми 2).

1



2



Аз секунҷаҳои росткунҷаи ACD ва ABC мувофиқи таърифи косинуси кунҷ:

$$\cos A=\frac{AD}{AC}=\frac{AC}{AB}\,.$$

Аз ин $AD\cdot AB=AC^2$ (2).

Аз секунҷаҳои росткунҷаи BCD ва ABC ва мувофиқи таърифи косинуси кунҷ:

$$\cos B=\frac{BD}{BC}=\frac{BC}{AB}\,.$$

Аз ин $BD\cdot AB=BC^2$ (3).

Баробарии (2) ва (3) - ро аъзо ба аъзо ҷамъ карда $AD+DB=AB$ буданашро ба ҳисоб гирифта баробарии

$$AC^2+BC^2=AB\cdot D+BD\cdot AB=AB\cdot(AD+BD)\cdot AB=AB^2\text{-ро}$$

ҳосил мекунем. Теорема исбот шуд.

Тарафҳои секунҷаи росткунҷаи ABC ($\angle C=90°$))-ро мувофиқан бо: $a=BC;$ $b=AC;$ $c=AB$ ишора намуда, формулаи Пифагорро ҳосил менамоем.

$$\boldsymbol{c^2=a^2+b^2.}$$

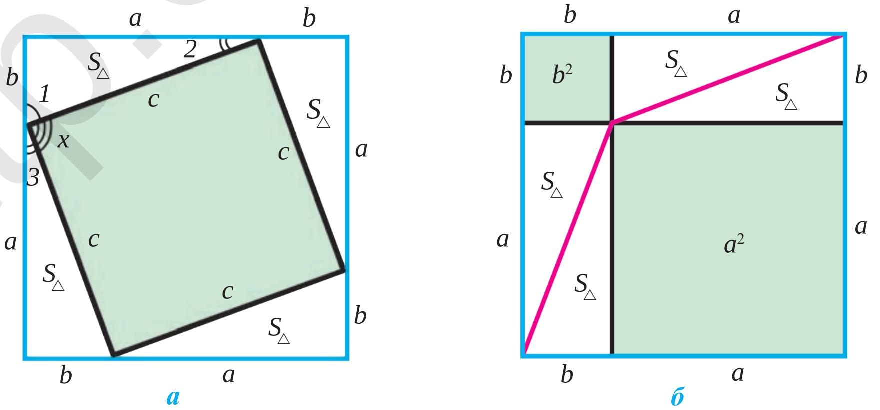
3. Исботи теоремаи пифагор ба воситаи масоҳатҳо.

Секунҷаи росткунҷаи катетҳояш a, b ва гипотенузааш ба c баробар дода шудааст. Исбот мекунем, ки барои ин секунҷа теоремаи Пифагор мавқеъ дорад, яъне исбот мекунем, ки

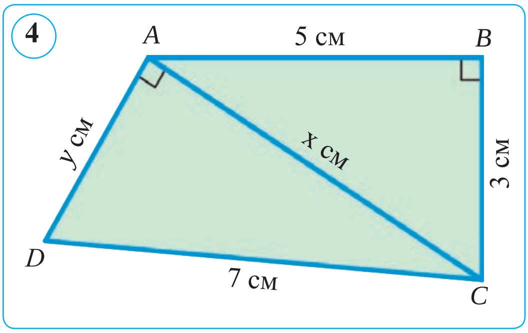
$$\boldsymbol{a^2+b^2=c^2}$$

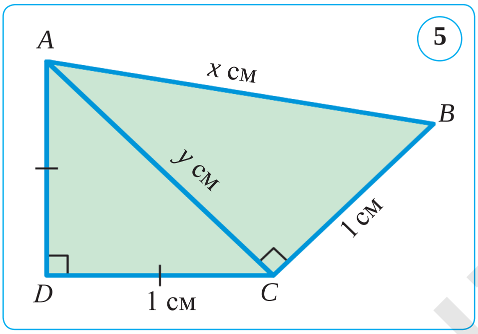
Исбот. Барои ин, ду квадрате месозем, ки тарафҳояш ба $(a+b)$ баробар мебошад. Квадратро бо усули дар расми 3 нишондодашуда, ба секунҷаҳои росткунҷа ва квадратҳо ҷудо мекунем. Нишон медиҳем, ки чоркунҷаи дар расми 3, *а* овардашуда, квадрат аст. Дар ҳақиқат, пеш аз ҳама ин чоркунҷа ромб аст, чунки гипотенузаи секунҷаи росткунҷаи катетҳои тарафҳои он a ва b ба c баробар аст. Барои ёфтани бузургии

3



а *б*





кунҷи x-и нақша $\angle x + \angle 1 + \angle 3 = 180°$, $\angle 3 = \angle 2$ ва $\angle 1 = 90° - \angle 2$-ро ба эътибор гирифта, меёбем: $\angle x = 90°$. Барои ин яке аз кунҷҳои ин чоркунҷа ба 90° баробар буда ромб, яъне квадрат аст.

Ҳарду квадрати мушоҳидашаванда баробарандоза аст. Ҳамчунин, масоҳати квадрати якум ба $4S_\triangle + c^2$ баробар, масоҳати квадрати дуюм ба $4S_\triangle + a^2 + b^2$ (расми 3, *б*).

Бинобар ин,

$$4S_\triangle + c^2 = 4S_\triangle + a^2 + b^2.$$

Пас, $c^2 = a^2 + b^2$. Теорема исбот шуд.

Масъала. Аз расми 4 дарозии порчаҳои номаълумро ёбед.

Ҳал. 1) ΔABC секунҷаи росткунҷа $\angle B = 90°$ (расми 4) мувофиқи теоремаи Пифагор: $x^2 = 5^2 + 3^2$, аз ин $x^2 = 34 \Rightarrow x = \sqrt{34}$ $(x > 0)$.

2) ΔACD -секунҷаи росткунҷа $\angle CAD$ =90. (расми 4) мувофиқи теоремаи Пифагор: $y^2 + (\sqrt{34})^2 = 7^2$, аз ин $y^2 + 34 = 49$, $y^2 = 15$, $y = \sqrt{15}$ $(y > 0)$.

Ҷавоб: $x = \sqrt{34}$ см; $y = \sqrt{15}$ см.

Савол, масъала ва супоришҳо

1. 1) Чӣ гуна исботҳои теоремаи Пифагорро медонед?

? 2) Ибораи «квадрати гипотенуза», «квадрати катет»-ро чӣ хел мефаҳмед?

2. Катетҳои секунҷаи росткунҷаи a ва b дода шудааст. Агар: 1) $a = 5$, $b = 12$; 2) $a = 4\sqrt{2}$, $b = 7$; 3) $a = 0{,}7$, $b = 2{,}4$; 4) $a = 5$, $b = 6$; 5) $a = \frac{5}{13}$, $b = \frac{12}{13}$ бошад, гипотенузаи C-ро ёбед.

3. Диагоналҳои ромб: 1) 12 см ва 16 см 2) 14 см ва 48 см; периметри ромбро ёбед.

4. Дарозии порчаҳои номаълумро ёбед (расми 5).

5. Дар секунҷаи росткунҷа a ва b- катетҳо, c-гипотенуза. Агар 1) $a = 1{,}2$, $c = 1{,}3$; 2) $a = 7$, $c = 9$; 3) $a = 1{,}5$, $c = 1{,}7$; 4) $a = 2$, $c = 2{,}5$ бошад, катети b-ро ёбед.

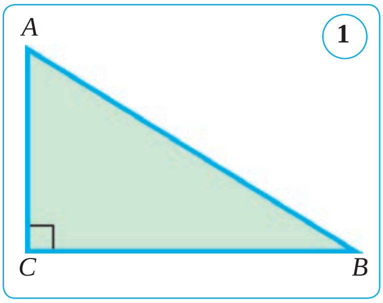
6. Тарафҳои росткунҷа: 1) 2,4 дм ва 7 см; 2) 50 см ва 12 дм; 3) 8 дм ва 1,5 м. Диагонали онро ёбед.

18. ТЕОРЕМАИ БА ТЕОРЕМАИ ПИФАГОР ЧАППА

1. Баъзе натиҷаҳои теоремаи Пифагор.

Аз байни натиҷаҳои теоремаи Пифагор дутояшро дида мебароем.

Натиҷа. Дар секунҷаи росткунҷа катети дилхоҳ аз гипотенуза хурд аст.



Исбот. Бигзор ABC – росткунҷа ва $\angle C = 90°$ бошад (расми 1). Катети дилхоҳи секунҷаи росткунҷа аз гипотенуза хурд буданашро исбот мекунем.

Дар ҳақиқат, аз рӯи теоремаи Пифагор барои катетҳо чунин муносибат мавҷеъ дорад:

$$AC^2 = AB^2 - BC^2 \text{ ва } BC^2 = AB^2 - AC^2$$

Аз ин ҷо

$$AC^2 < AB^2 \text{ ва } BC^2 < AB^2$$

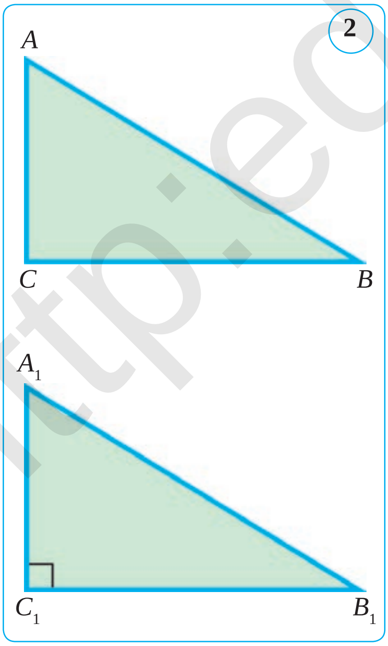
буданаш бармеояд.

Пас, $AC < AB$ va $BC < AB$. Натиҷа исбот карда шуд.

2. Теоремаи чаппа ба теоремаи Пифагор.

Теорема.

Агар квадрати яке аз тарафҳои секунҷа ба суммаи квадратҳои ду тарафи боқимондаи он баробар бошад, он гоҳ ин секунҷа, секунҷаи росткунҷа мешавад.



Исбот. Дар секунҷаи ΔABC бигзор $AB^2 = AC^2 + BC^2$ бошад. Исбот мекунем, ки $\angle C = 90°$ аст (расми 2).

Секунҷаи росткунҷаи $A_1B_1C_1$-и ёридиҳандаро, ки кунҷи C_1-и он рост аст аз назар мегузаронем. Дар он $A_1C_1 = AC$ ва $B_1C_1 = BC$. Аз рӯи теоремаи Пифагор $A_1B_1^2 = A_1C_1^2 + B_1C_1^2$ аст, пас,

$$A_1B_1^2 = AC^2 + BC^2.$$

Аммо, аз рӯи шарти теорема $AB^2 = AC^2 + BC^2$ ва пас $A_1B_1^2 = AB^2$.

Аз ин ҷо: $A_1B_1 = AB$ пайдо мекунем. Ҳаминтавр, секунҷаи ABC ва $A_1B_1C_1$ нисбат ба се тараф баробар аст. Бинобар ин, $\angle C = \angle C_1$, яъне баробар будани кунҷи қуллаи C-и секунҷаи ABC бармеояд.

Теорема исбот шуд.

Масъалаи 1. Агар тарафҳои секунҷа. 1) $a=5$; $b=11$, $c=12$; 2) $a=\sqrt{85}$, $b=7$, $c=6$ бошад, оё он секунҷаи росткунҷа шуда метавонад?

Ҳал. Квадрати секунҷаи ду тарафи хурди b-ро меёбем:

$$5^2+11^2=25+121=146.$$

Квадрати тарафи калонро ҳисоб мекунем: $12^2=144$.

Натиҷаҳои ҳосилшударо муқоиса кунем, муносибати зерин: $a^2+b^2\neq c^2$ бармеояд. Ва пас, секунҷа росткунҷа набудааст.

Ҷавоб: $a=5$, $b=11$ ва $c=12$ бошад, секунҷа, секунҷаи росткунҷа намешавад.

2) Суммаи квадратҳои ду тарафи хурдро ҳисоб мекунем.

$$7^2+6^2=49+36=85.$$

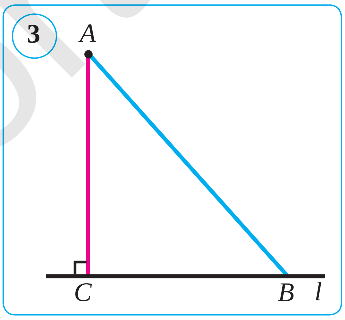
Акнун квадрати тарафи калонро ҳисоб мекунем: $(\sqrt{85})^2=85$. Пас, $85=85$ – бамавқеъ аст. Дар натиҷа ба $b^2+c^2=a^2$ соҳиб мешавем. Аз ин ҷо ин секунҷа, секунҷаи росткунҷа буданаш маълум мешавад.

Ҷавоб: $a=\sqrt{85}$, $b=7$ ва $c=6$ бошад, секунҷа, секунҷаи росткунҷа мешавад.

3. Перпендикуляр ва моил.

Бигзор l – хати рост ва A нуқтаи дар он воқеъ набуда бошад. Мувофиқи таъриф, масофаи аз ҳама хурди нуқтаи A то хати рости l ба дарозии перпендикуляри AC аз A то l фаровwarда шуда баробар мешавад (расми 3). Дарҳақиқат барои ҳар як $B\in l$ секунҷаи ACB – секунҷаи росткунҷа, аз ин ҷо AC ва CB – катетҳо, AB бошад, гипотенуза мешавад. Порчаи CB проексияи моили AB дар хати рости l меноманд.

3



Теоремаи Пифагор, моили AB, перпендикуляри AC ва CB – дарозии проексияҳои онро бо чунин баробарӣ ифода мекунад:

$$AB^2=AC^2+CB^2.$$

Бинобар ин ҳамеша $AB>AC$ ё ки $AB>BC$ ба тарзи дигар гӯем, проексияи перпендикуляр ва моили аз нуқта гузаронидашуда аз моил хурд мешавад.

Ҳаминтавр, моилҳои баробар ба проексияҳои баробар соҳиб аст; аз ду моил проексияи кадомаш калон бошад, ҳамонаш калон мешавад.

Масъалаи 2. Агар диагоналҳо ба 10 см ва 24 см баробар бошад, тарафҳои онро ёбед.

Ҳал. Аз буриши диагоналҳои ромб, ки дар нуқтаи буриш ба ду қисм ҷудо мешавад истифода мебарем. Дар он ҳол катетҳои тарафи ромб ба 5 см ва 12 см баробар буда, гипотенузаи секунҷаи росткунҷа мешавад:

$$5^2+12^2=25+144=169, \text{ яъне } 169=13^2.$$

Яъне, тарафи роб ба 13 см баробар будааст. *Ҷавоб:* 13 см.

Савол, масъала ва супоришҳо

1. 1) Теоремаи ба теоремаи Пифагор чаппаро гӯед.

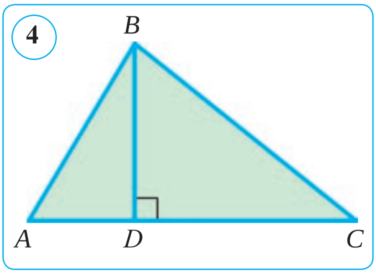
? 2) Проексияи моил ба хати рост гуфта чиро мефаҳмед?

3) Оё катет аз гипотенуза хурд буданаш дуруст аст?

2. Оё тарафҳои секунҷаи росткунҷа ба ададҳои: 1) 11 см, 7 см, 17 см; 2) 3 см, 1,6 см,3,4 см; 3) 3 см, 4 см, 6 см; 4) 2 см, $\sqrt{7}$ см, $\sqrt{11}$ см шуда метавонад? Ҷавобатонро асоснок кунед.

3. Дар $\triangle ABC$ $AB=13$ см, BC $=20$ см, BD – баландии секунҷа ва он ба 12 см баробар аст. Дарозии проексияҳои тарафҳои AB ва BC-и ба тарафи AC фаровардa шуда ва дарозии тарафи AC–ро ёбед (расми 4). Дар ҷойҳои холӣ ҷавобҳои мувофиқро ёбед.

Ҳал. $\triangle ABD$ ва $\triangle BCD$ секунҷаи росткунҷа аст, чунки $ADB=\angle BDC=90°$. Проексияи ба тарафи AC будаи тарафҳои AB ва BC мувофиқан аз порчаҳои AD ва CD иборат аст.



Мувофиқи теоремаи Пифагор аз ΔABD: AD^2 $=AB^2–BD^2$ $=13^2-\ldots^2$ $=\ldots-\ldots=\ldots$(см). Аз ин AD $=\ldots$ см мувофиқи теоремаи Пифагор аз $\triangle BCD$, $CD^2=BC^2–BD^2=\ldots^2-12^2$ $=\ldots-\ldots=\ldots$ (см). Аз ин $CD=$ $\ldots$ см AC $=\ldots+DC=..+\ldots=\ldots$(см).

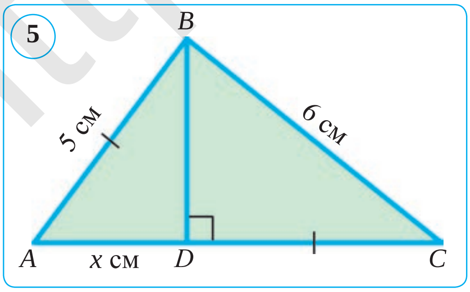
Ҷавоб: AD $=\ldots$см, CD $=\ldots$см, $AC=\ldots$ см.

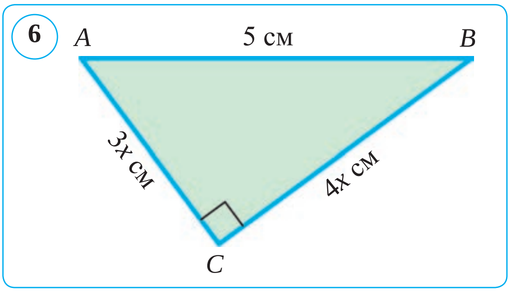
4. Дарозиҳои номаълумро ёбед (расми 5, 6).

5. Дарозии ду тарафи секунҷаи росткунҷа ба 6 см ва 8 см баробар аст. Дарозии тарафи сеюмро ёбед. Масъала чандхо ҳал дорад?

6. Оё тарафҳои секунҷаи росткунҷа ба ададҳои зерин баробар шуда метавонад:

1) $a=12$, $b=35$, $c=37$;
2) $a=11$, $b=20$, $c=25$;
3) $a=18$, $b=24$, $c=30$;
4) $a=9$, $b=12$, $c=15$?





19. БАЪЗЕ ТАТБИҚҲОИ ТЕОРЕМАИ ПИФАГОР

Бигзор, тарафҳои секунҷаи додашудаи ABC a, b ва c бошад.

Аз қуллаи C ба тарафи AB-и он баландии $CD=h_C$ гузаронидашударо меёбем (расми 1, *а*).

Аз рӯи ҷӣ гуна ҷойгир шудани нуқтаи D, ки асоси баландӣ аст, нисбат ба порчаи BA ҷӣ гуна ҷойгиршавиашон се ҳолатро мушоҳида кардан мумкин аст.

Ҳолати 1. Бигзор нуқтаи D, нуқтаи дохилии порчаи AB бошад. Агар $AD=x$ бошад, дар он ҳолат $DB=c-x$ мешавад (расми 1, *а*). Аз рӯи теоремаи Пифагор $\triangle ADC$ ва $\triangle BDC$ росткунҷаанд:

$$h_c^2 = b^2 - x^2 \quad (1) \quad \text{ва} \quad h_c^2 = a^2 - (c-x)^2 \quad (2).$$

Аз ин ҷо баробарии зерин ҳосил мекунем: $b^2 - x^2 = a^2 - (c-x)^2$.

Аз ин

$$b^2 - x^2 = a^2 - c^2 + 2cx - x^2, \text{ яъне } \quad b^2 = a^2 - c^2 + 2cx.$$

Аз муодилаи охирин x-ро меёбем:

$$x = \frac{b^2+c^2-a^2}{2c} \quad \text{ё ки} \quad x^2 = \frac{\left(b^2+c^2-a^2\right)^2}{4c^2}.$$

ин қимати (1) x^2-ро ба баробарӣ гузошта, ҳосил мекунем:

$$h_c^2 = b^2 - \frac{\left(b^2+c^2-a^2\right)^2}{4c^2} = \frac{4b^2c^2 - \left(b^2+c^2-a^2\right)^2}{4c^2}.$$

Сурати ин касрро ба зарбкунанда ҷудо карда, ҳосил мекунем:

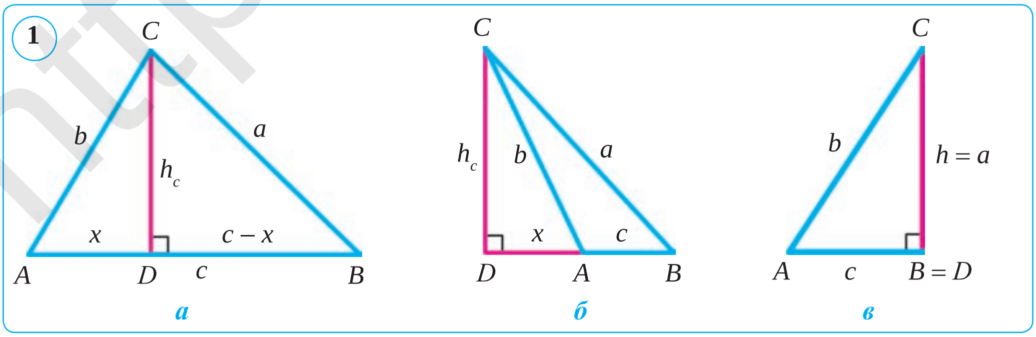
$$h_c^2 = \frac{\left(2bc-\left(b^2+c^2-a^2\right)\right)\left(2bc+\left(b^2+c^2-a^2\right)\right)}{4c^2} = \frac{\left(2bc-b^2-c^2+a^2\right)\left(2bc+b^2+c^2-a^2\right)}{4c^2}.$$

Шакли ҳарду зарбкунандаи сурати ифодаро тағйир медиҳем:

$$2bc - b^2 - c^2 + a^2 = a^2 - (b-c)^2 = (a-b+c)(a+b-c) \text{ ва}$$
$$2bc + b^2 + c^2 - a^2 = (b+c)^2 - a^2 = (b+c-a)(b+c+a).$$

Дар ин ҳол:

$$h_c^2 = \frac{(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)(b+c+a)}{4c^2},$$



Аз ин $h_c = \frac{1}{2c}\sqrt{(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)}$.

Нимпериметри секунҷаро бо p ишора мекунем, дар он ҳол,

$$a+b+c=2p,$$
$$a-b+c=a+b+c-2b=2p-2b=2(p-b),$$
$$a+b-c=a+b+c-2c=2p-2c=2(p-c),$$
$$b+c-a=a+b+c-2a=2p-2a=2(p-a).$$

Ифодаи ҳосилшударо ба ҷои ифодаи зери реша гузошта, натиҷаи зеринро ҳосил мекунем:

$$h_c = \frac{1}{2c}\sqrt{16p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{1}{2c}\cdot 4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$$

$$= \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Айнан ҳаминтавр,

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{ва} \quad h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Ҳолати 2. Нуқтаи D дар давоми AB мехобад, яъне $DB=c+x$.. Дар ин ҷо низ натиҷаи қайдшуда ҳосил мешавад (расми 1, *б*).

Ҳолати 3. Нуқтаи D бо нуқтаи B, яъне бо катети баландии $h=a$ болои ҳам меояд. Секунҷа росткунҷа аст (расми 1, *в*).

Савол, масъала ва супоришҳо

1. Баландии секунҷаи тарафҳояш: 1) 10 см, 10 см, 12 см; 2) 17 дм, 17 дм, 16 см; 3) 4 дм, 13 дм, 15 см-ро ёбед.

2. Тарафҳои секунҷаи баробарпаҳлӯи баландиаш ба h баробарро ёбед. Агар 1) $h=6$ см; 2) $h=1{,}5$ дм бошад, тарафашро ёбед.

3. Тарафҳои секунҷа: 1) $a=5$ см-, $b=7$ см-, $c=6$ см-; 2) $a=13$ дм, $b=14$ дм, $c=15$ дм; 3) $a=24$ см, $b=25$ см, $c=7$ см Баландии ба тарафи калон фаровардашударо ёбед.

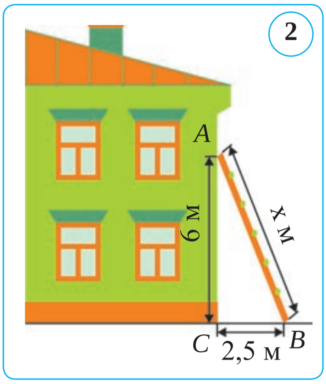
4. Агар тарафи секунҷаи баробартараф ба 12 см баробар бошад, баландии онро ёбед.

5. Тарафҳои секунҷа $a=8$ см, $b=10$ см ва $c=12$ см. Баландии калонтарин ва хурдтарини ин секунҷаро ёбед.

6. Баландии хурдтарини секунҷаи тарафҳояш ба: 1) 17, 65, 80; 2) 8, 6, 4; 3) 24, 25, 7; 4) 30, 34, 16; 5) 15, 17, 8 баробарро ёбед.

7. Тарафҳои секунҷа $a=16$ см, $b=12$ см ва $c=8$. Баландии хурдтарини ин секунҷаро ёбед.

8. Баландии норвонро ёбед (расми 2).



§ 5. АЙНИЯТҲОИ ТРИГОНОМЕТРӢ

20–21. АЙНИЯТҲОИ АСОСИИ ТРИГОНОМЕТРӢ ВА НАТИҶАҲОИ ОН

1. Айниятҳои асосии тригонометрӣ.

Айнияти вобастагии байни функсияҳои тригонометрии як кунҷро ҳосил мекунем.

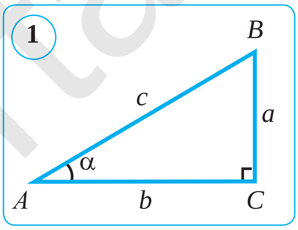
Теорема.

Барои ҳаргуна кунҷи тези α баробарии

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

ҷой дорад.

Исбот. Бигзор дар секунҷаи дилхоҳи ABC кунҷи назди куллаи A ба α баробар бошад (расми 1). Мувофиқи теоремаи Пифагор: $BC^2+AC^2=AB^2$. Ҳар ду тарафи баробариро ба AB^2 тақсим намуда, баробарии зеринро ҳосил мекунем:



$$\left(\frac{BC}{AB}\right)^2+\left(\frac{AC}{AB}\right)^2=1.$$

Аммо $\frac{BC}{AB}=\sin\alpha$, $\frac{AC}{AB}=\cos\alpha$. Ҳаминтавр,

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1. \qquad (1)$$

баробарии (1) – ро айнияти **асосии тригонометрӣ** меноманд. Ба мо вобастагии байни муносибати функсияҳои тригонометрии як кунҷ маълум аст:

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\ (2),\quad \mathrm{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\ (3),\quad \mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha=1\ (4).$$

(1)-ро ба cosα тақсим намуда, айнияти (5)-ро ҳосил мекунем

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}\quad \text{ё ки}\quad 1+\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}. \qquad (5)$$

ҳарду қисми баробарии (1)-ро ба $\sin^2\alpha$ тақсим намуда, айнияти (6)-ро ҳосил мекунем:

$$1+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha}\quad \text{ё ки}\quad 1+\mathrm{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}. \qquad (6)$$

2. Натиҷаҳои айниятҳои асосии тригонометрӣ.

Барои ҳаргуна кунҷи тез, баробарии зерин ҷой дорад:

$$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha\Rightarrow\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}. \qquad (7)$$

$$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha\Rightarrow\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}. \qquad (8)$$

Масъалаи 1. Агар $\cos\alpha = \frac{2}{3}$ бошад, қиматҳои sinα, cosα ва ctgα-ро ҳисоб кунед.

Ҳал. 1) $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

2) $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{5}}{3} : \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{5}}{2}$; 3) $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2}{3} : \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Ҷавоб: $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Масъалаи 2. Ифодаро содда кунед:

$$1)\ 1+\frac{1-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}; \qquad 2)\ 1-\frac{\cos^2\alpha-1}{\cos^2\alpha}.$$

Ҳал. Ҷамъшавандаҳоро ба махраҷи умумӣ меоварем ва аъзоҳои монандро ислоҳ намуда, аз айнияти (6) истифода бурда меёбем:

$$1+\frac{1-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha+1-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha} = 1+\mathrm{ctg}^2\alpha.$$

Ҷавоб: $1+\mathrm{ctg}^2\alpha$.

2) Фаркро ба махраҷи умумӣ оварда, аъзоҳои монанди суратро ислоҳ намуда, аз айнияти (5) истифода намуда ҳосил мекунем:

$$1 - \frac{\cos^2\alpha-1}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha-(\cos^2\alpha-1)}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha-\cos^2\alpha+1}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} = 1+\mathrm{tg}^2\alpha.$$

Ҷавоб: $1+\mathrm{tg}^2\alpha$.

Масъалаи 3. Ифодаро содда кунед: $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

Ҳал. Аз формулаҳои квадратӣ суммаи ду адад ва айниятҳои асосӣ истифода бурда, ифодаро содда мекунем.

$$\sin^4\alpha + \cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 = 1.$$

Ҷавоб: 1.

Савол, масъала ва супоришҳо

1. 1) Кадом баробариро айнияти асосии тригонометрӣ меноманд?
   2) Кадом баробариҳои функсияи тригонометриро ифодакунандаро медонед?
   3) Аз айниятҳои асосии тригонометрӣ чӣ натиҷа бармеояд?

2. Агар: 1) $\sin\alpha = \frac{12}{13}$ бошад, cosα, tgα ва ctgα-ро; 2) cosα = 0,8 бошад, sinα, tgα ва ctgα-ро; 3) cosα = 0,28 бошад, sinα, tgα ва ctgα-ро ёбед.

3. Агар $\mathrm{tg}\alpha = \frac{5}{12}$ бошад, sinα ва cosα-ро ёбед.

Намуна: Агар $\mathrm{tg}\alpha = \frac{4}{3}$ бошад, sinα ва cosα-ро ёбед.

Ҳал. $\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1+\mathrm{tg}^2\alpha = 1+\left(\frac{4}{3}\right)^2 = 1+\frac{16}{9} = \frac{25}{9}$. Пас, $\cos^2\alpha = \frac{9}{25}$.

Аз он $\cos\alpha = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$.

Акнун sinα-ро ҳисоб мекунем: $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \sin\alpha = \mathrm{tg}\alpha \cdot \cos\alpha = \dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{3}{5} = \dfrac{4}{5}$.

Ҷавоб: $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$; $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$.

4. Ифодаро содда кунед: 1) $1+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$; 2) $\dfrac{\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}$; 3) $\dfrac{1-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$.

Намуна: Ифодаро содда кунед: $1+\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$.

Ҳал. Барои содда намудан ҷамъшавандаҳоро ба гурӯҳҳо ҳосил мекунем:

$$1+\sin^2\alpha-\cos^2\alpha = \underbrace{1-\cos^2\alpha}_{\sin^2\alpha}+\sin^2\alpha = \sin^2\alpha+\sin^2\alpha = 2\sin^2\alpha.$$

Ҷавоб: $2\sin^2\alpha$.

5. Ифодаро содда намоед:

$$1)\ \frac{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}{\sin^2\alpha};\quad 2)\ \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha};\quad 3)\ \frac{\mathrm{tg}\alpha}{\sin\alpha}.$$

6. Катетҳои секунҷаи росткунҷа 7 см ва 24 см баробар аст. Қиматҳои кунҷи аз ҳама хурди функсияҳои тригонометриро ёбед.

7. Агар: 1) $\mathrm{tg}A=2$; 2) $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\cos\alpha = \dfrac{15}{17}$ бошад, A қиматҳои кунҷи тези функсияҳои тригонометриро ёбед.

8. Ифодаро содда кунед: $\dfrac{1-\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{tg}^4\alpha}{\cos^2\alpha}$.

Ҳал:

$$\frac{1-\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{tg}^4\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}\left(1-\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{tg}^4\alpha\right) = \left(1+\mathrm{tg}^2\alpha\right)\left(1-\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{tg}^4\alpha\right) = 1+\mathrm{tg}^6\alpha.$$

Барои содда намудан аз айнияти (5) ва формулаи $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ истифода кардем.

Ҷавоб: $1+\mathrm{tg}^6\alpha$.

9. Агар: 1) $\sin\alpha = \dfrac{8}{17}$ бошад, cosα, tgα ва ctgα; 2) $\cos\alpha=0{,}6$ sinα, tgα ва ctgα-ро ёбед.

10. Муайян намоед, ки синус ва косинуси як кунҷ мувофиқан ба ададҳои зерин баробар аст ё не: 1) $\dfrac{1}{2}$ ва $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\dfrac{1}{3}$ ва $\dfrac{3}{4}$.

11. Муайян намоед, ки тангенс ва котангенси як кунҷ мувофиқан ба ададҳои зерин баробар аст ё не:
1) 0,4 ва 2,5; 2) 1,1 ва 0,9; 3) $\sqrt{5}+2$ ва $\sqrt{5}-2$.

12. Ифодаро содда кунед: 1) $\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha-\cos^2\alpha$; 2) $\cos\alpha-\cos\alpha\cdot\sin^2\alpha$.

13. Катетҳои секунчаи росткунҷа ба 8 см ва 15 см баробар аст. Қимати аз ҳама хурди кунҷи функсияи тригонометрии секунҷаро ёбед.

14. Ифодаро содда кунед: 1) $(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)$; 2) $\sin\alpha-\sin\alpha\cos^2\alpha$.

22. ФОРМУЛАҲО БАРОИ ФУНКСИЯҲОИ ТРИГОНОМЕТРИИ КУНҶИ ПУРКУНАНДА

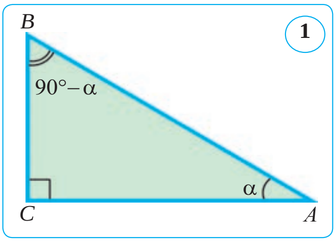
Формулаҳо барои функсияҳои тригонометрии кунҷи пуркунанда.

Кунҷи пуркунанда *гуфта, ду кунҷи суммааш ба 90° баробар бударо кунҷҳои пуркунанда меноманд.* Кунҷҳои тези секунҷаи росткунҷа ба кунҷҳои пуркунанда мисол шуда метавонад, чунки суммаи онҳо ба 90° баробар аст.

Айниятҳои асосие, ки мо дида баромадем барои омӯхтани муносабатҳои байни функсияҳои гуногуни тригонометрии як кунҷ имкон медиҳад. Акнун муносибатҳои байни ду кунҷи секунҷаи росткунҷаро дида мебароем.

Теорема.

Барои ҳар гуна кунҷи тези α $\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha$; $\cos(90°-\alpha)=\sin\alpha$–и секунҷаи росткунҷа баробарии зерин ҷой дорад.



Исбот. Секунҷаи росткунҷаи гипотенузааш *AB*-ро дида мебароем (расми 1). Агар $\angle A=\alpha$ бошад, дар он ҳол ба $\angle B=90°-\alpha$ баробар мешавад. Кунҷҳои тези секунҷаро бо синус ва косинус ифода мекунем.

Мувофиқи таъриф:

$$\sin B=\frac{AC}{AB} \quad \text{ва} \quad \cos A=\frac{AC}{AB},$$

яъне $\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha$;

$$\sin A=\frac{BC}{AB} \quad \text{ва} \quad \cos B=\frac{BC}{AB}, \quad \text{яъне}$$

$$\cos(90°-\alpha)=\sin\alpha.$$

Теорема исбот шуд. Аз теоремаи исботшуда чунин натиҷа мебарояд.

Натиҷа. Барои ҳар гуна кунҷи тези *d* баробарии зерин ҷой дорад: $\mathrm{tg}(90°-\alpha)=\mathrm{ctg}\alpha$; $\mathrm{ctg}(90°-\alpha)=\mathrm{tg}\alpha$.

Исбот нашудани ин баробариҳоро аз формулаҳои болоӣ истифода бурда, ба худатон ҳавола мекунем.

Кунҷҳои *A* ва *B* тез – якдигарро то 90° пур мекунад. Онҳо кунҷҳои пуркунандаи якдигаранд. Ҳаминро ба эътибор гирифта, формулаҳои дар боло ҳосил шуда чунин хонда мешавад:

– Синуси кунҷи додашуда, ба косинуси кунҷи пуркунанда баробар аст;

– Косинуси кунҷи додашуда, ба синуси кунҷи пуркунанда баробар аст;

– Тангенси кунҷи додашуда, ба котангенси кунҷи пуркунанда баробар аст;

– Котангенси кунҷи додашуда, ба тангенси кунҷи пуркунанда баробар аст.

Масъалаи 1. Бигзор кунҷҳои A ва B – кунҷҳои рости секунҷаи росткунҷа бошад. Агар $\sin B = \frac{1}{\sqrt{5}}$ бошад, tgA-ро ёбед.

Ҳал. $\sin B = \cos A$, пас, $\cos A = \sin B = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Акнун синуси кунҷи α –ро аз натиҷаи айнияти асосии тригонометрӣ истифода бурда меёбем:

$$\sin A = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Тангенси кунҷро бо ёрии синус ва косинус меёбем:

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{2}{\sqrt{5}} : \frac{1}{\sqrt{5}} = 2.$$

Ҷавоб: 2.

Масъалаи 2. Агар $\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg} 20°$ бошад, кунҷи тезро ёбед.

Ҳал. $\operatorname{tg}20° = \operatorname{ctg}(90° - 20°) = \operatorname{ctg}70°$, пас, $\operatorname{ctg}x = \operatorname{ctg}70°$.

Аз ин $x = 70°$. *Ҷавоб:* $x = 70°$.

Савол, масъала ва супоришҳо

1. 1) Кунҷҳои пуркунанда чист?

2) Кадом муносибатҳои пуркунандаи байни ду кунҷи тези секунҷаи росткунҷаро медонед? Формулаҳои мувофиқро ёбед.

2. Агар: 1) $\sin x = \cos 40°$; 2) $\cos x = \sin 76°$; 3) $\operatorname{tg}x = \operatorname{ctg}56°$; 4) $\operatorname{ctg}x = \operatorname{tg}16°$ бошад, кунҷи тези x-ро ёбед.

3. Кунҷҳои A ва B кунҷи тези секунҷаи росткунҷа бошад. Агар $\cos A = 0{,}6$ бошад, $\sin B$ ва $\cos B$-ро ёбед.

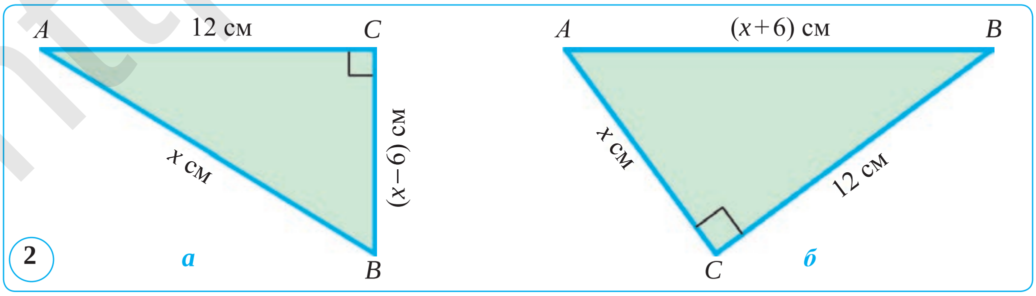
4. Синус ва косинуси як кунҷ мувофиқан ба ададҳои зерин баробар аст ё не муайян кунед: 1) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ва $\frac{2}{\sqrt{5}}$; 2) 0,3 ва 0,4.

5. A ва B – кунҷҳои тези секунҷаи росткунҷа. Агар $\sin B = 0{,}5$ бошад, $\cos A$ ва $\operatorname{tg} A$-ро ёбед.

6. Дарозиҳои номаълумро ёбед (расми 2). Инчунин синус, косинус, тангенс ва котангенси кунҷҳои тезро ёбед.

7. Агар $\sin(90° - \alpha) = 0{,}8$ бошад, $\cos\alpha$ ва $\sin\alpha$-ро ёбед.

8. Ифодаро содда кунед: 1) $\frac{\cos\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}$; 2) $\operatorname{ctg}^2\alpha(2\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 1)$.

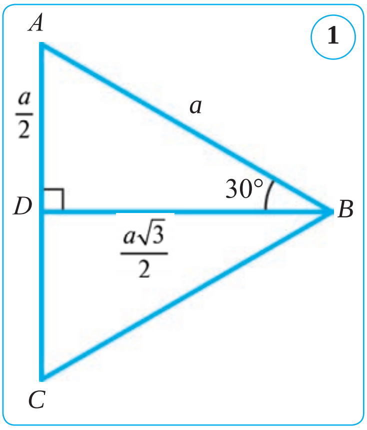


2

23. ҲИСОБ НАМУДАНИ СИНУС, КОСИНУС, ТАНГЕНС ВА КОТАНГЕНСИ КУНҶҲОИ 30°, 45°, 60°.

1. Ҳисоб намудани синус, косинус, тангенс ва котангенси кунҷҳои 30°.

Секунҷаи баробартарафи *ABC*-ро мегирем (расми 1). Агар дар он баландии *BD* гузаронем, он биссектриса ва баландӣ мешавад. Аз ҳамин сабаб кунҷи назди куллаи *B*-и секунҷаи кунҷи тезаш ба 30° баробар будаи росткунҷаи *ABD* $(\angle D = 90°)$ аст. Тарафи секунҷаи баробартараф ба *a* баробар бошад. Дар он ҳолат $AD = \frac{a}{2}$ мешавад. Аз рӯи теоремаи Пифагор



$$BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Мувофиқи таъриф:

$$\sin 30° = \frac{AD}{AB} = \frac{a}{2} : a = \frac{1}{2};$$

$$\cos 30° = \frac{BD}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2} : a = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\text{tg}\, 30° = \frac{AD}{BD} = \frac{a}{2} : \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\text{ctg}\, 30° = \frac{BD}{AD} = \frac{a\sqrt{3}}{2} : \frac{a}{2} = \sqrt{3}.$$

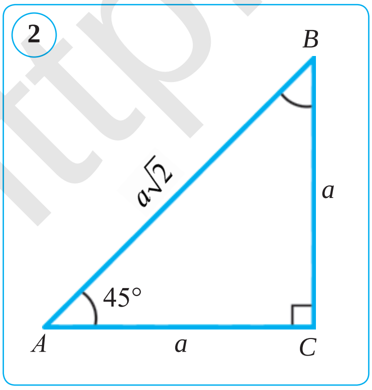
Бо ёрии формулаҳои функсияҳои тригонометрии кунҷҳои пуркунанда **қиматҳои функсияҳои тригонометрии 60°** -ро меёбем.

$$\sin 60° = \sin(90° - 30°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \text{tg}\, 60° = \text{tg}(90° - 30°) = \text{ctg}\, 30° = \sqrt{3};$$

$$\cos 60° = \cos(90° - 30°) = \sin 30° = \frac{1}{2}; \quad \text{ctg}\, 60° = \text{ctg}(90° - 30°) = \text{tg}\, 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

2. Ҳисоб намудани синус, косинус тангенс ва котангенси кунҷҳои 45°.

Барои ҳисоб намудани кунҷи (45°) функсияи тригонометрии синус, косинус, тангенс ва котангенс секунҷаи баробарпаҳлӯи *ABC*-ро дида мебароем (расми 2). Бигзор дар ин секунҷа *ABC*. Мувофиқи теоремаи Пифагор гипотенузаи $AC = BC = a$, $\angle A = \angle B = 45°$, $AB = a\sqrt{2}$ баробар бошад. Мувофиқи таърифи функсияи тригонометрии кунҷи тез:



$$\sin 45° = \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos 45° = \cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\mathrm{tg}45° = \mathrm{tg}A = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a} = 1;$$

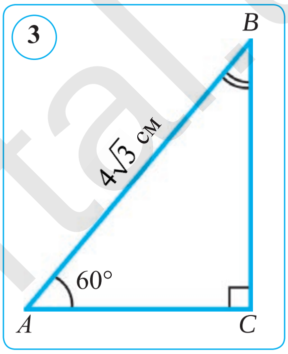
$$\mathrm{ctg}45° = \mathrm{ctg}A = \frac{AC}{BC} = \frac{a}{a} = 1.$$

α	30°	45°	60°
sinα	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosα	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tgα	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
ctgα	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Ҷадвали қиматҳои синус, косинус, тангенс ва котангенси 30°, 45° ва 60°-ро тартиб медиҳем. Бо ёрии калкулятор ва ҷадвал қиматҳои функсияҳои тригонометрии кунҷи тез, квадрати ададҳо, ва қимати решаҳои квадратӣ ҳисоб карда мешавад.

Масъала. Гипотенузаи секунҷаи росткунҷаи *ABC* (*AB*) ба $4\sqrt{3}$ см ва $\angle A = 60°$ аст (расми 3). Катетҳои ҳамин секунҷаро ёбед.

3



Ҳал. Ба мо маълум аст, ки катети муқобили кунҷи α ба ҳосили зарби гипотенуза ва синуси кунҷи α баробар аст. Мувофиқи он:

$$BC = AB\sin A = 4\sqrt{3}\cdot\sin 60° = 4\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 6 \text{ (см).}$$

Ба мо маълум аст, ки катети ба кунҷи α часпида ба ҳосили зарби гипотенуза ва косинуси кунҷи α баробар аст. Мувофиқи он:

$$AC = AB\cos A = 4\sqrt{3}\cdot\cos 60° = 4\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} = 2\sqrt{3} \text{ (см).}$$

Ҷавоб: $BC = 6$ см, $AC = 2\sqrt{3}$ см.

Савол, масъала ва супоришҳо

1. Ҳисоб намоед: 1) $\sin 30° + \mathrm{tg}45°$; 2) $\cos 30°\cdot\mathrm{tg}60°$; 3) $\sqrt{2}\sin 45° - \cos 60°$.
2. Секунҷаи баробартараф созед ва ба он баландӣ гузаронед. Ченкуниҳои зарурировро ичро намуда, функсияи тригонометрии кунҷҳои 30° ва 60°-ро ҳисоб кунед. Натиҷаро бо ҷадвал муқоиса кунед.
3. Диагонали *BD* – и параллелограмми *ABCD* ба тарафи *AB* перпендикуляр ва ба 16 см баробар аст. Агар кунҷи *BDA* ба 30° баробар бошад, тарафҳои параллелограммро ёбед.
4. Як катети секунҷаи росткунҷа ба $6\sqrt{3}$ кунҷи муқобили ин катет ба 60° баробар аст. Гипотенуза ва катети 2 – юмро ёбед.
5. Ифодаро содда намоед:
   1) $\mathrm{tg}^2\alpha(2\cos^2\alpha + \sin^2\alpha - 1)$; 2) $\mathrm{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha\,\mathrm{tg}^2\alpha$.
6. Як катети росткунҷа ба 2, катети муқобили ин кунҷ ба 60° баробар аст. Гипотенуза ва катети дуюмро ёбед.
7. Ифодаро содда кунед: $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$.
8. Ҳисоб кунед: 1) $\cos 45°\cdot\sin 45°$;
   2) $\sin 60°\cdot\mathrm{tg}30°$;
   3) $\sqrt{3}\cos 30° - \cos 60°$.

§ 6. ҲАЛЛИ СЕКУНҶАҲОИ РОСТКУНҶА

24. ҶАДВАЛИ ҚИМАТҲОИ ФУНКСИЯҲОИ ТРИГОНОМЕТРӢ

Дар охири китоби дарсӣ ҷадвали функсияҳои тригонометрии ченаки градусиаш аз 1° то 89° доир ба ададҳои бутун (то саҳеҳии даҳҳазорякӣ) дода шудааст. Ин ҷадвал чунин сохта шудааст. Аз тарафи чап сутуни якум (дар болояш градусҳо навишта шудааст). Шумораи градусҳо аз 1°, 2°, 3°, …. 45° – ҷойгир карда шудааст. Дар сутуни дуюм дар болояш синусҳо навишта шуда, дар сутуни якум ба кунҷҳои додашуда қиматҳои мувофиқи онҳо нишон дода шудааст. Дар сутуни 3-юм тангенсҳо, баъд котангенсхо ва баъди он қиматҳои косинусҳо ҷойгир шудааст. Дар сутуни охирини 6-ум боз градусҳо; яъне 45°, 46°, 47°, …. ва ҳоказо дода шудааст то 89° (барои нигоҳ доштани) ин ҷой: барои функсияҳои тригонометрии пуркунанда мувофиқи формулаҳо: $\sin\alpha=\cos(90°-\alpha)$, $\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$ ва ҳоказо. Пас, $\sin 1° = \cos 89°$, $\sin 2° = \cos 88°$ ва ҳоказо. Бинобар ин дар таги сутуни «синусҳо», «косинусҳо» ва дар таги сутуни «тангенсҳо» (аз чап – 3) котангенсҳо навишта шудааст ва ба он монанданд.

Ҳаминтавр, барои градуси кунҷҳои аз 1 то 45° дар тарафи чапи сутуни якум ва номҳои функсияҳои тригонометриро аз боло хондан мумкин. Барои градуси кунҷҳои аз 45 то 89 аз тарафи рост сутуни охирии ва номҳои функсияҳои тригонометриро аз таги он хонда мешавад. Масалан, аз ҷадвал қимати тангенсҳоро мехонем: $\mathrm{tg}35°=0{,}7002$.

1. Аз рӯи кунҷи додашуда ёфтани функсияи тригонометрии он.

Масъалаи 1. sin20°-ро ёбед.

Ҳал. $1°\le 20°\le 45°$ Барои буданаш аз устуни тарафи *чап «градусҳо»* навиштаи 20-ро мегирем ва сатри мувофиқи он («sinα»)-ро меёбем. Ана ҳамин адад қимати sin20°. Пас, $\sin 20°\approx 0{,}3420$.

Масъалаи 2. sin75°-ро ёбед.

Ҳал. Аз $45°\le 75°\le 89°$ буданаш сутуни тарафи градусҳо навишта шуда, хонаи «градусҳо» навишта шуда 75°-ро мегирем аз сатри ба он мувофиқ аз ступи (*пастии* «sinα») чорум қимати 0,9659-ро меёбем. Ана ҳамин адад, қимати адади 75° аст. Пас, $\sin 75° \approx 0{,}9659$.

Масъалаи 3. cos33°-ро ёбед.

Ҳал. Аз байни $1°\le 33°\le 45°$. Аз сутуни тарафи *чап* (хонаи градусҳо) адади 33-ро мегирем ва аз сатри мувофиқи сутуни чоруми («cosα») қимати 0,8387-ро меёбем Ана ҳамин адад қимати cos33° аст.

Пас, $\cos 33° \approx 0{,}8387$.

Қимати тангенс ва котангенсҳо низ чун қиматҳои синус ва косинусҳо аз ҷадвал ёфта мешавад.

2. Ёфтани кунҷ аз рӯи функсияи тригонометрии он.

Масъалаи 4. Агар $\sin x = 0{,}9848$ бошад, кунҷи тези x-ро ёбед.

Ҳал. Барои ёфтани кунҷи синусаш 0,9848 қимати функсияи тригонометриро аз сутуни якум ва чорум ин қиматро меёбем. Ин қимат дар сутуни чорум ($\sin\alpha$) аз 45° калон ва аз 89° хурд. Ба ин сатрҳо мувофиқ аз тарафи рост аз сутуни градусҳо 80-ро меёбем. Пас, кунҷи мо ҷуста ба 80° баробар мебошад.

Ҷавоб: $x \approx 80°$.

Масъалаи 5. Агар $\mathrm{tg}\,x = 0{,}7002$ бошад, кунҷи тези x-ро ёбед.

Ҳал. Барои ёфтани кунҷи тези 0,7002 сутуни дуюм ва сеюм дар тарафи чап будаи ин қиматро меёбем. Ин қимат дар сутуни дуюм ($\mathrm{tg}\alpha$) аст, яъне кунҷи мо ҷуста аз 45° хурд. Ба ин сатр мувофиқ аз сутуни чапи *«градусҳо»* адади 35-ро меёбем. Пас, кунҷи мо ҷуста тахминан ба 35° баробар аст.

Ҷавоб: $x \approx 35°$.

Савол, масъала ва супоришҳо

1. Аз ҷадвал истифода бурда ёбед:

а) 1) sin3°; 2) sin21°; 3) sin50°; 4) sin82°; 5) sin40°;
б) 1) cos9°; 2) cos12°; 3) cos41°; 4) cos67°; 5) cos4°;
в) 1) tg5°; 2) tg89°; 3) tg15°; 4) tg60°; 5) tg50°;
г) 1) ctg10°; 2) ctg30°; 3) ctg75°; 4) ctg52°; 5) ctg5°.

2. Кунҷи тези x – ро аз ҷадвал истифода бурда ёбед

а) 1) $\sin x \approx 0{,}1392$; 2) $\sin x \approx 0{,}8590$; 3) $\sin x \approx 0{,}5150$;
б) 1) $\cos x \approx 0{,}7431$; 2) $\cos x \approx 0{,}6428$; 3) $\cos x \approx 0{,}0523$;
в) 1) $\mathrm{tg}x \approx 0{,}4663$; 2) $\mathrm{tg}x \approx 11{,}430$; 3) $\mathrm{tg}x \approx 0{,}1763$;
г) 1) $\mathrm{ctg}x \approx 0{,}9004$; 2) $\mathrm{ctg}x \approx 1{,}192$; 3) $\mathrm{ctg}x \approx 0{,}3640$.

3. (*Кори амалӣ*). Бо ёрии транспортир секунҷаи росткунҷаи кунҷи тези 40°-ро ёбед. Тарафҳои онро чен кунед, инчунин синус, косинус, тангенс ва котангенси ҳамаи кунҷро ёбед.

4. Қимати ифодаро ёбед: $\mathrm{tg}15° \cdot \mathrm{tg}30° \cdot \mathrm{tg}60° \cdot \mathrm{tg}75°$.

Ҳал. Аз формулаи $\mathrm{tg}(90° - \alpha) = \mathrm{ctg}\alpha$ ва $\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\alpha = 1$ истифода бурда қимати ифодаро меёбем (ба ҷойҳои холӣ ҷавобҳои мувофиқро нависед).

$$\mathrm{tg}15° \cdot \mathrm{tg}30° \cdot \mathrm{tg}60° \cdot \mathrm{tg}75° = \mathrm{tg}15° \cdot \mathrm{tg}30° \cdot \mathrm{tg}(90° - 30°) \cdot \mathrm{tg}(90° - 15°) =$$
$$= (\mathrm{tg}15° \cdot \mathrm{ctg}...°) \cdot (\mathrm{tg}30° \cdot \mathrm{ctg}...°) = ... \cdot ... = ...$$

5. Исбот кунед: $\mathrm{tg}1° \cdot \mathrm{tg}2° \cdot ... \cdot \mathrm{tg}88° \cdot \mathrm{tg}89° = 1$.

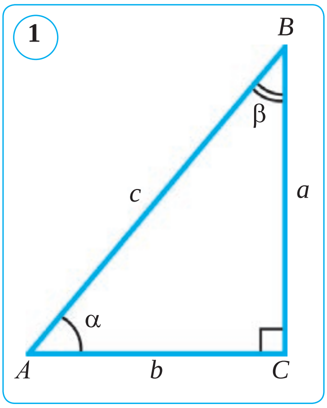
6. Ифодаро содда кунед: 1) $\cos^2\alpha + \cos^2(90° - \alpha)$; 2) $\sin^2\alpha - \cos^2(90° - \alpha)$.

7. Аз ҷадвал истифода бурда, ёбед:
1) sin70°; 2) cos55°; 3) tg10°; 4) ctg18°.

8. Аз ҷадвал истифода бурда, кунҷи тези x-ро ёбед: $\sin x \approx 0{,}1392$.

25. ҲАЛЛИ СЕКУНҶАҲОИ РОСТКУНҶА

Ҳалли секунҷаҳо аз рӯи тарафҳои маълум ва кунҷҳои маълуми он ёфтани тарафҳои номаълум ва кунҷҳои номаълуми он мебошад. Секунҷаи росткунҷаро аз руӣ тараф ва кунҷи тезаш ё ки ду тарафаш ҳал кардан мумкин. Барои ҳалли секунҷаҳои росткунҷа аз ишораҳои (расми 1) истифода мебарем мувофиқи моҳияти масъала, қиматҳои функсияҳои тригонометриро аз хонаи даҳ ҳазорякӣ то хонаи воҳидҳо (илова охири китоби дарсӣ бошад) ё ки зарур бошад, аз хонаи ҳазориҳо то хонаи воҳидҳо, дарозии тарафҳоро аз сад то воҳидҳо, ченаки градусии кунҷҳоро то воҳидҳо яклухт мекунем.



Аз рӯи ду элементи маълуми секунҷаи росткунҷа 4-то ҳолати онро дида мебароем.

Ҳолати 1. Ҳалли секунҷа аз рӯи гипотенуза ва кунҷи тези он.

Масъалаи 1. Суммаи кунҷҳои секунҷаи росткунҷа $c = 10$ см ва кунҷи тези $\alpha = 50°$ дода шудааст. Катетҳои a ва b ва кунҷи тези β-ро ёбед.

Ҳал. 1) Суммаи кунҷҳои тези секунҷаи росткунҷа ба 90° баробар аст. Онгоҳ $\beta = 90° - \alpha = 90° - 50° = 40°$.

Усули 1. 2) Катети муқобили кунҷи α ба ҳосили зарби гипотенуза ва синуси кунҷи a баробар аст, яъне $a = c\sin\alpha$.

Пас, $a = 10\sin 50° = 10 \cdot 0,7660 \approx 7,66$ (см).

3) Катети ба кунҷи α – часпида ба ҳосили зарби гипотенуза ва косинуси кунҷи α баробар аст, пас, $b = c\cos\alpha$.

Яъне, $b = 10\cos 50° = 10 \cdot 0,6428 \approx 6,43$ (см).

Усули 2. 2) $a = c\cos\beta$; $a = 10\cos 40° = 10 \cdot 0,7660 \approx 7,66$ (см).

3) $b = c\sin\beta$; $b = 10\sin 40° = 10 \cdot 0,6428 \approx 6,43$ (см).

Ҷавоб: $a \approx 7,66$ см; $b \approx 6,43$ см; $\beta = 40°$.

Ҳолати 2. Ҳалли секунҷа аз рӯи катет ва кунҷи тези он.

Масъалаи 2. Агар дар секунҷаи росткунҷа катеташ $a = 6$ см ва кунҷи тезаш $\beta = 22°$ бошад. Катети b-и гипотенузаи c ва кунҷи тези α-ро ёбед.

Ҳал. 1) Суммаи кунҷҳои тези секунҷаи росткунҷа ба 90° баробар бошад, онгоҳ $\alpha = 90° - \beta = 90° - 22° = 68°$.

Усули 1. 2) Нисбати катети ба кунҷи тези β часпида, ба косинуси кунҷи β ба гипотенуза баробар аст, яъне $c = \dfrac{a}{\cos\beta}$.

Пас, $c = \dfrac{a}{\cos\beta} = \dfrac{6}{\cos 22°} = \dfrac{6}{0,9272} \approx 6,47$ (см).

3) Мувофиқи таъриф $\operatorname{tg}\beta=\frac{b}{a}$. Аз ин $b=a\,tg\beta$, яъне

$$b=6\operatorname{tg}22^\circ=6\cdot0{,}4040\approx2{,}42\ (\text{см}).$$

Усули 2. 2) Гипотенуза ба нисбати катети муқобили кунҷи тез α ба синуси кунҷи α баробар аст, яъне $c=\frac{a}{\sin\alpha}$.

Пас, $c=\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{6}{\sin68^\circ}=\frac{6}{0{,}9272}\approx6{,}47$ (см).

3) Мувофиқи тариф: $\operatorname{tg}\beta=\frac{b}{a}$. аз ин ҷо $b=a\operatorname{tg}\beta$, яъне

$b=6\operatorname{tg}22^\circ=6\cdot0{,}4040\approx$ 2,42 (см).

Ҷавоб: с ≈ 6,47 см, b ≈ 2,42 см, $\alpha=68^\circ$.

Савол масъала ва супоришҳо

1. Дарозии катети секунҷаи росткунҷа 7 см – a ба кунҷи 60° часпида аст. Гипотенузаи ин секунҷаро ёбед.

2. Гипотенузаии секунҷаи росткунҷа ба 12 см яке аз катетҳояш бошад, ба $6\sqrt{2}$ см баробар аст. Кунҷи тези ин секунҷаро ёбед.

3. Гипотенузаи секунҷаи росткунҷа c=10 см ва кунҷи тезаш $\alpha=42^\circ$ дода шудааст. Катетҳои a ва b ва кунҷи тези β-ро ёбед. Масъаларо бо ду усул (ба матни машқи 1 ниг.) ҳал кунед.

4. Катети секунҷаи росткунҷа b=4 см ва кунҷи тезаш $\beta=18^\circ$ дода шудааст. Катети b, гипотенузаи c ва кунҷи тези α-ро ёбед. Бо ду усул ҳал кунед (ба масъалаи 2 ниг.)

5. Ифодаро содда кунед: $\frac{\cos^2\alpha}{(1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha)}-\sin\alpha\cos(90^\circ-\alpha)$.

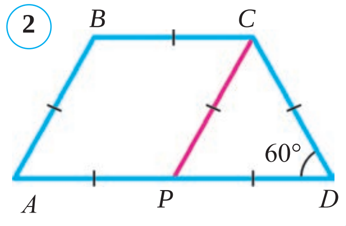
6. Кунҷи назди асосҳои трапетсияи баробарпаҳлӯ ба 60°, тарафи паҳлӯи ба асоси хурд баробар буда, ба $2\sqrt{2}$ см баробар аст. Асоси калони ин трапетсияро ёбед. Ба ҷойҳои холӣ ҷавоби мувофиқро гузоред.

Ҳал. *ABCD* трапетсияи баробарпаҳлӯ,

$$\angle A=\angle D=60^\circ,\ AB=DC==BC=2\sqrt{2}\ \text{см}.$$

$CP\parallel BA$-ро мегузаронем (расми 2). Онгоҳ $\angle A=\angle CPD=60^\circ$ $(CP\parallel BA)$ инчунин кунҷи бурандаи *AD* ҳосил карда ... аз кунҷҳои ... секунҷаи *CPD*, пас, ... тарафҳо. Ҳаминтавр, $CP=PD=\ldots=2\sqrt{2}$ см. Онгоҳ $AD=2\ \cdot\ 2\sqrt{2}=\ldots$ (см).

Ҷавоб: $4\sqrt{2}$ см.

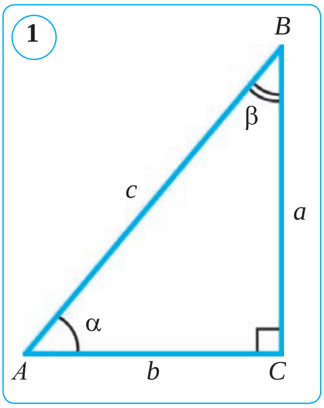

2

7. Гипотенузаи секунҷаи росткунҷа c = 8 см ва кунҷи тезаш $\alpha=30^\circ$ аст. Катетҳои a, b ва кунҷи тези β-ро ёбед. Масъаларо бо ду усул (ба масъалаи 1 нигаред) ҳал кунед.

26. ҲАЛЛИ СЕКУНЧАИ РОСТКУНЧА (ДАВОМАШ)

Ҳолати 3. Ҳалли секунча аз рӯи гипотенуза ва катет.

Масъалаи 1. Дар секунчаи росткунча гипотенузаи $c=13$ см ва катети $a=5$ см дода шудааст. Катети b ва кунҷи тези α ва β-ро ёбед.



Ҳал. 1) Мувофиқи теоремаи Пифагор:

$$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{13^2-5^2}=\sqrt{169-25}=\sqrt{144}=12\,(\text{см}).$$

Усули 1. 2) Мувофиқи таърифи синуси кунҷи тези α:

$$\sin\alpha=\frac{a}{c}=\frac{5}{13}\approx 0,3846.$$

Аз инҷо $\alpha\approx 23°$.

3) Суммаи кунҷҳои тези секунчаи росткунча ба 90° баробар аст. Дар ин ҳол:

$$\beta=90°-\alpha\approx 90°-23°=67°.$$

Ҷавоб: $b=12$ см, $\alpha\approx 23°$, $\beta\approx 67°$.

Усули 2. 2) Мувофиқи таърифи синуси кунҷи тези β:

$$\sin\beta=\frac{b}{c}=\frac{12}{13}\approx 0,9231.$$

Аз инҷо $\beta\approx 67°$.

3) Суммаи кунҷҳои тези секунчаи росткунча ба 90° баробар аст, онгоҳ:

$$\alpha=90°-\beta\approx 90°-67°=23°.$$

Ҷавоб: $b=12$ см, $\alpha\approx 23°$, $\beta\approx 67°$.

Ҳолати 4. Ҳалли секунча аз рӯи ду катет.

Масъалаи 2. Катетҳои секунчаи росткунча $a=8$ ва $b=15$ дода шудааст. Гипотенузаи c ва кунҷҳои тези α ва β-ро ёбед.

Ҳал. 1) Мувофиқи теоремаи Пифагор:

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{8^2+15^2}=\sqrt{64+225}=\sqrt{289}=17\ (\text{см}).$$

Усули 1. 2) Мувофиқи таърифи тангенси кунҷи тези α:

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{a}{b}=\frac{8}{15}\approx 0,5333.$$

Аз инҷо $\alpha\approx 28°$.

3) Суммаи кунҷҳои тези секунчаи росткунча ба 90° баробар аст. Онгоҳ:

$$\beta=90°-\alpha\approx 90°-28°=62°.$$

Ҷавоб: $c=17$ см, $\alpha\approx 28°$, $\beta\approx 62°$.

Усули 2. 2) Мувофиқи таърифи тангенси кунҷи тези β:

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{b}{a} = \frac{15}{8} = 1,875\cdot$$

Аз инҷо $\beta \approx 62°$.

3) Сумма кунҷҳои тези секунҷаи росткунҷа ба 90° баробар аст. Дар ин ҳол

$$\alpha = 90° - \beta \approx 90° - 62° = 28°\,.$$

Ҷавоб: $c=17$ см, $\alpha \approx 28°$, $\beta \approx 62°$.

Усули 3. 1) Мувофиқи таърифи котангенси кунҷи тези α:

$$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{b}{a} = \frac{15}{8} = 1,875\cdot$$

Аз инҷо $\alpha \approx 28°$.

2) Суммаи кунҷҳои тези секунҷаи росткунҷа ба 90° баробар аст. Дар ин ҳол

$$\beta = 90° - \alpha \approx 90° - 28° = 62°\,.$$

3) Мувофиқи теоремаи Пифагор:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{64 + 225} = \sqrt{289} = 17 \text{ (см)}.$$

Ҷавоб: $c=17$ см, $\alpha \approx 28°$, $\beta \approx 62°$.

Савол, масъала ва супоришҳо

1. Дар секунҷаи росткунҷаи ABC, $\angle C=90°$, гипотенуза $c = 9\sqrt{2}$ см, катет $a=9$ см. Катети b ва кунҷҳои тези α ва β – и секунҷаи дода шударо бо ду усул ёбед.

2. Дар секунҷаи росткунҷаи ABC, $\angle C=90°$, катетҳо $a = 6\sqrt{3}$ см ва $b=6$ см. Гипотенузаи c ва кунҷҳои тези α ва β – и ин секунҷаро ёбед. Бо ду усул ҳал кунед.

3. Дар секунҷаи росткунҷаи ABC, $\angle C=90°$, катетҳояш $a = \sqrt{11}$ см ва $b=5$ см. Гипотенузаи c ва кунҷҳои тези α ва β – и ин секунҷаро ёбед. Бо ду усул ҳал кунед.

4. Дар секунҷаи росткунҷаи ABC $(\angle C=90°)$ баландии CD – и ба гипотенуза фаровarда шударо итбот кунед:

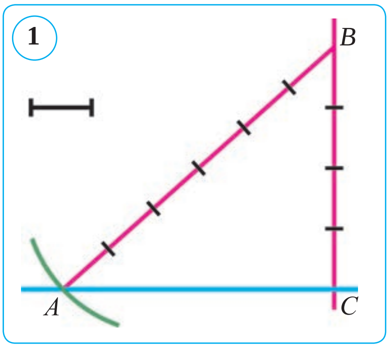
1) $\dfrac{CD}{\sin A} = AB\cos A$; 2) $AD\,\mathrm{tg}A = BD\,\mathrm{tg}B$.

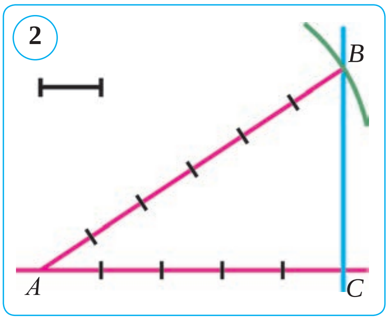
5. Ҳисоб кунед: $2\sin 60° + 4\cos 60° - \mathrm{ctg}30° - 2\mathrm{tg}45°$.

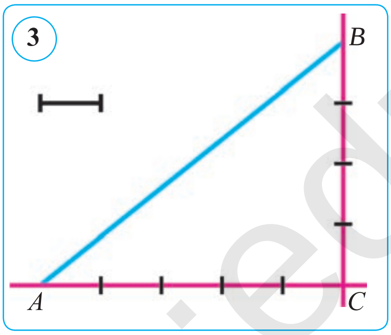
6. Дар секунҷаи росткунҷаи ABC, $\angle C=90°$ гипотенуза $c=25$ см, катет $b=24$ см. Катети a ва кунҷҳои тези α ва β – и секунҷаи росткунҷа ёфта шавад. Бо ду усул ҳал кунед.

7. Дар секунҷаи росткунҷаи ABC, $\angle C=90°$ катетҳояш $a=10$ см ва $b=24$ см. Гипотенузаи c ва кунҷҳои тези α ва β-и ин секунҷаро ёбед. Бо ду усул ҳал кунед.

27. СОХТАНИ СЕКУНҶАИ РОСТКУНҶА







Масъалаи 1. Синуси кунҷи $\frac{4}{5}$-ро созед.

Барои он кунҷи *C*-ро месозем. Ба яке аз тарафҳои аз қуллаи секунҷа сар карда порчаи *CB*-и ба 4-то масштаби ба як дигар баробарро мегузаронем (расми 1). Камони маркази дар нуқтаи *B* ва радиусаш ба 5-то масштаб баробарро то буридани тарафи дуюм месозем. Буриши онҳоро бо нуқтаи *A* ишорат мекунем. Нуқтаҳои *A* ва *B*-ро пайваст намуда, секунҷаи росткунҷаи *ABC*-ро ҳосил мекунем. *A* кунҷи ба мо даркорӣ синуси он ба $\frac{4}{5}$ баробар аст, яъне $\sin A=\frac{4}{5}$ аст.

Масъалаи 2. Косинуси кунҷи $\frac{5}{6}$-ро созед.

Барои он кунҷи рости *C*-ро месозем ва ба яке аз тарафҳои он аз қуллаи кунҷ порчаи *AC* – и аз 5-то масштаби ба якдигар баробар мегузаронем (расми 2). Камони марказаш дар нуқтаи *A* ва радиусаш ба 6 масштаб баробарро то буридани тарафи дуюм давом медиҳем (месозем). Кунҷи буриши онҳоро бо нуқтаи *B* ишорат мекунем. Нуқтаҳои *A* ва *B* – ро пайваст намуда, секунҷаи росткунҷаи *ABC* – ро ҳосил мекунем. *A* – кунҷи ба мо даркорӣ косинуси он ба $\frac{5}{6}$ баробар аст, яъне $\cos A=\frac{5}{6}$.

Масъалаи 3. Тангенси кунҷи $\frac{4}{5}$-ро созед.

Барои он кунҷи рости *C*-ро месозем ва дар яке аз тарафҳояш аз қуллаи кунҷ саркарда порчаи *CA*-и ба 5-то масштаби ба якдигар баробарро мегузаронем, ба дуюмаш порчаи *CB*-и аз 4-масштаби ба якдигар баробар мегузаронем (расми 3). Нуқтаи *A* ва *B*-ро пайваст намуда, секунҷаи росткунҷаи *ABC* ҳосил мекунем.

A – кунҷи мо ҷустуҷӯ карда, тангенси он ба $\frac{4}{5}$ баробар мешавад, яъне $\operatorname{tg} A=\frac{4}{5}$.

Сохтани кунҷ ба котангенси додашуда низ ҳаминтавр сохта мешавад. Фақат дар ин ҳолат барои кунҷи даркорӣ катети ба AC – часпидаро гирифтан лозим аст.

Катети секунҷаи росткунҷа ҳама вақт аз гипотенуза хурд аст. Бинобар ин синус ва косинуси кунҷи тез доимо аз 1 хурд мешавад.

Муқоисаи дарозии катет ҳаминро нишон медиҳад, ки онҳо байни ҳам баробар, яке аз дигаре калон ё баробар шуданаш мумкин Ҳаминтавр кунҷҳои тези тангенс ва котангенс, адади дилхоҳи мусбат шуданаш мумкин. Пас, ҳар яки онҳо ба катетҳо вобаста буда, ба 1 баробар аз 1 хурд ва аз 1 калон шуда метавонад.

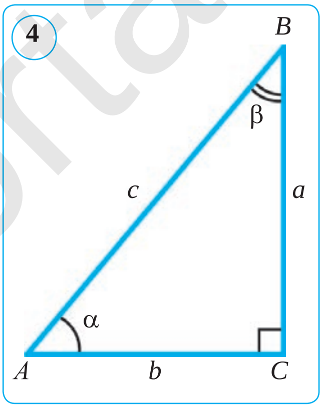
Савол, масъала ва супоришҳо

1. 1) Ба tg$A=\frac{3}{5}$; 2) sin$A=\frac{2}{3}$ баробар дода шудааст. Секунҷаи росткунҷаи ABC – ($\angle C=90°$)-ро созед.

2. Секунҷаи росткунҷаи ABC ($\angle C=90°$)-и ба 1) sin$A=\frac{5}{8}$; 2) cos$A=\frac{3}{4}$ баробарро созед.

3. Дар секунҷаи росткунҷаи ABC $\angle C=90°$, гипотенуза $c=7\sqrt{2}$ см ва катети $b=7$ см аст. Катети a ва кунҷи тези α ва β-и ин секунҷаро ёбед (расми 4).

4. Дар секунҷаи росткунҷаи ABC, $\angle C=90°$, гипотенуза $c=12$ см, $\alpha=60°$ Катетҳои a ва b ва кунҷи тези β-ро ёбед (расми 4). Масъаларо бо ду роҳ ҳал кунед.

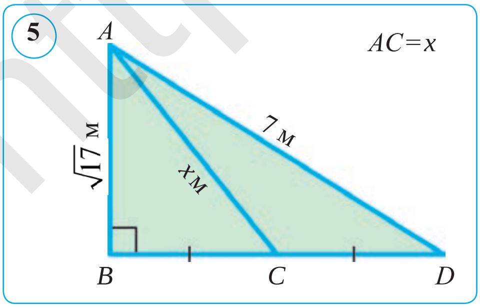


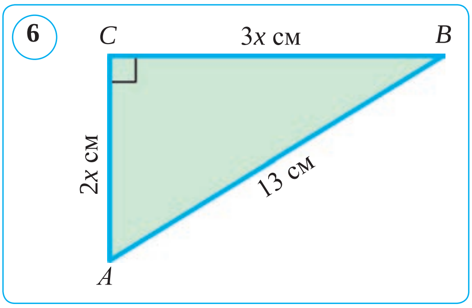
5. Дарозии номаълумро ёбед (расмҳои 5 – 6).

6. Дар секунҷаи росткунҷаи ABC $\angle C=90°$, гипотенуза $c=74$ см, sin$\alpha=\frac{12}{37}$.

Периметри ҳамин секунҷаро ёбед (расми 4).

7. 1) Sin$A=\frac{4}{7}$ 2) cos$A=\frac{3}{5}$ 3) tg$A=\frac{2}{5}$ дода шудааст. Секунҷаи росткунҷаи ABC ($\angle C=90°$)-ро созед.





28. МАШҚИ АМАЛӢ ВА ТАТБИҚ

1. Масъалаҳо доир ба татбиқи амалии теоремаи Пифагор.

Масъалаи 1. Гули нилуфар аз сатҳи об 10 см дар боло намоён мешавад. Агар гулро аз ҳолати аввалаш 1 м ғеҷонем ба сатҳи об мерасад. Чуқурии кӯлро дар ҳамин нуқта ёбед.

Ҳал. Чуқурии CD-и кӯлро бо x – ишорат мекунем (расми 1), онгоҳ ба $BD = AD = AC + CD = 0{,}1 + CD = 0{,}1 + x$ (м) баробар мешавад. Дар он мувофиқи теоремаи Пифагор ба секунҷаи BCD соҳиб мешавем:

$$BD^2 - CD^2 = BC^2, \quad (0{,}1 + x)^2 - x^2 = 1,$$

аз ин ҷо:

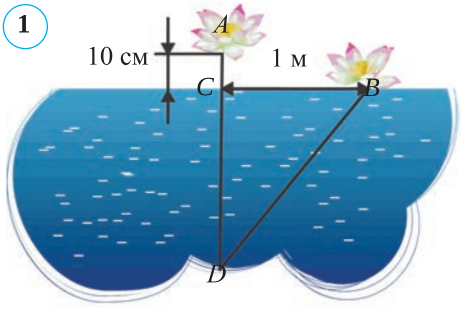
$$0{,}01 + 0{,}2x + x^2 - x^2 = 1;$$

$$0{,}2x = 0{,}99; \quad x = 0{,}99 : 0{,}2;$$

$$x = 9{,}9 : 2; \quad x = 4{,}95 \text{ (м)}.$$

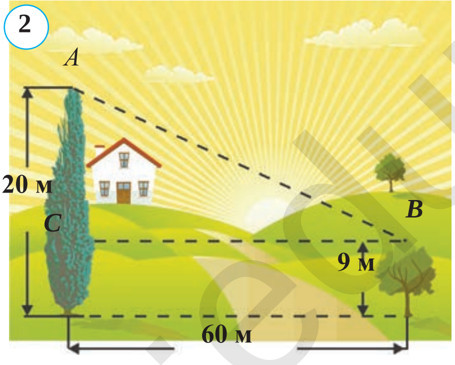
Ҷавоб: чуқурии кӯл 4,95 м.

1



Масъалаи 2. Баландии як дарахт 20 м, дуюмаш бошад, 9 м. Масофаи байни ин дарахтҳо 60 м-ро ташкил медиҳад. Масофаи байни қуллаҳои ин ду дарахтро ёбед (расми 2) мустақил ҳал кунед.

2

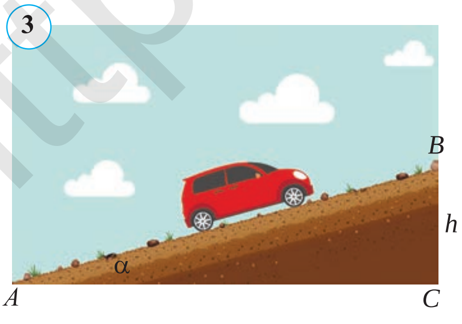


Масъалаи 3. Баландии ду дарахти сафедор мувофиқан 21 м ва 28 м, масофаи байни ин дарахтҳо бошад, 24 м-ро ташкил мекунад. Масофаи байни қуллаҳои ду дарахтро ёбед (ба расми 2 ниг.). Мустақил ҳал кунед.

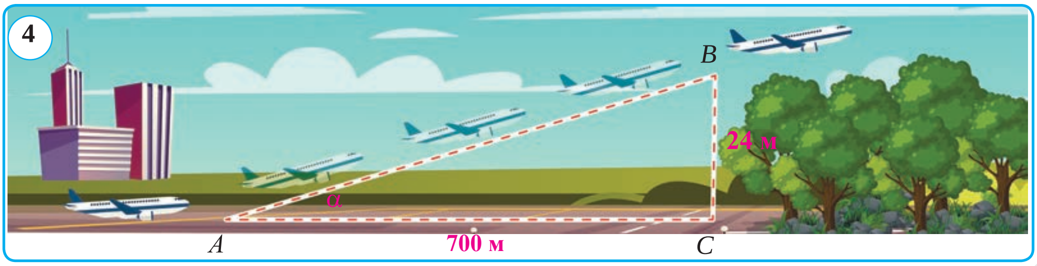
2. Масъала доир ба татбиқи амалии синуси кунҷи тез.

Бо ёрии кунҷҳои нисбат ба горизонт роҳҳои ҳамворро бо роҳҳои баланд (моил) тадбил додан мумкин (расми 3). Дар бисёр мавридҳои нисбат аз баланд бардоштани кунҷи бардошташуда баланд бардоштани нуқтаи баланди кунҷи роҳи тайшуда қулай аст. Масалан, ҳангоми 100 м масофаро тай намудан 2 м ба баландӣ бардошта шуда бошад, дар ин ҳолат рост бардошда шудани ҷой нисбати баландӣ ба роҳи тай шуда

3



4



муайян карда мешавад. Бардошташавии баландӣ ба $\frac{2\,м}{100\,м}$ 0,02 баробар аст. Ин нисбат ба роҳи тай шуда вобаста нест. Барои фаромадан аз роҳи нишеб ҳамин тавр мулоҳиза кардан мумкин.

Масъалаи 4. Машинаи сабукрав аз роҳи нишеб таҳти кунҷи 15° рӯ ба боло бардошта шуда истодааст (ниг. ба расми 3). Он аз нуқтаи бардошта шуда 300 м роҳ тай намуда, нисбат ба горизонтӣ чанд метр ба баландӣ мешавад?

Нишондод. Таърифи синуси кунҷи тезро татбиқ намуда, нуқтаи бардошташавиро ёбед.

2. Масъала доир ба татбиқи амалии тангенси кунҷи тез.

Масъалаи 5. Самолёт аз роҳрави мепаридааш аз нуқтаи ба ҳаво бардошташавӣ 700 м дар ҷангалзор воқеъ буда, баландии дарахтҳо тахминан ба 24 м баробар. Барои ба ин дарахтҳо самолёт нарасида парвоз намуданаш дар кадом таҳти кунҷ бардошта шуданаш лозим.

Ҳал. Дар секуҷаи росткунҷаи ABC ($\angle C=90°$) дар секунҷа $AC=700$ м, $BC=24$ м (расми 4). Аз таърифи тангенси кунҷи тез меёбем:

$$\text{tg}\alpha=\frac{BC}{AC}=\frac{24}{700}\approx 0,0343 \Rightarrow \alpha\approx 2°\,.$$

Ҷавоб: Самолёт барои ба дарахтҳо нарасида парвоз намудан нуқтаи бардошташавии он аз 2° кам нашуданаш лозим.

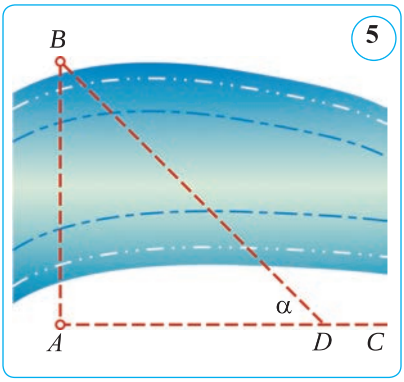
Масъалаи 6. Масофаи аз нуқтаи A дарё ва дар паси он нуқтаи B ки дар он рафтан имконпазир аст ёбед (расми 5).

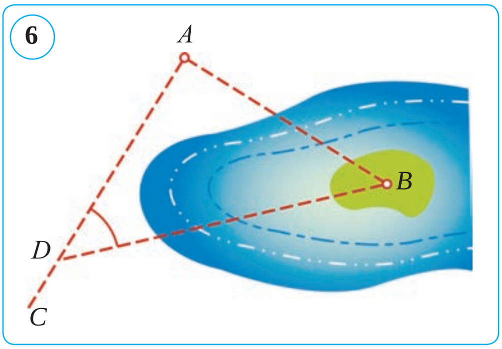
Ҳал. Устурлоб (астролабия; асбобест, ки барои чен кардани кунҷҳои дар ҳамвории горизонтал буда истифода мешавад, яъне ченкунандаи кунҷҳо) ё ки бо ёрии эккер дар нуқтаи A кунҷи рости BAC-ро месозем. Дар хати рости AC, нуқтаи ихтиёрии D гирифта, бо ёрии устурлоб кунҷи ADB-ро чен мекунем. Гӯем, он ба 44° баробар бошад. Баъд масофаи AD-ро чен мекунем, он 120 м бошад масофаи AB-ро аз кунҷи тези тангенсҳо меёбем:

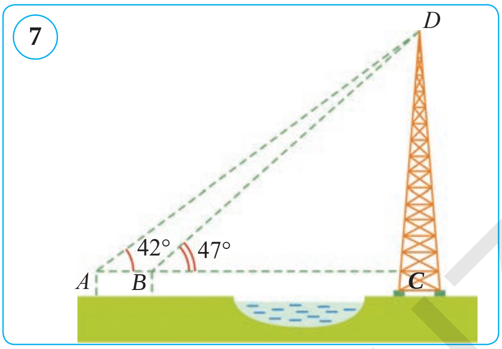
$$\frac{AB}{120}=\text{tg}44° \Rightarrow AB=120\cdot\text{tg}44°\approx$$

$\approx 120\cdot 0,9657\approx 116$ (м). *Ҷавоб:* ≈ 116 м.

5







Масъалаи 7. Масофаи ҷазираи аз нуқтаи A то нуқтаи B-и рафтанаш мушкил бударо ёбед (расми 6).

Нишондод. Бо масалаи 5 монанд муҳокима намуда, $\angle ADB = 48°$ ва $AD = 200$ м гуфта, масъаларо ҳал кунед.

Масъалаи 8. Объекти ба асосаш рафтан мушкил масалан чен кардани баландии электргузаронанда талаб карда бошад (расми 7).

Ҳал. Секунҷаи ростккунҷаи ACD-ро дида мебароем. Қуллаи A-и ин секунҷаро бо ёрии устурлоб чен мекунем он ба 42° баробар бошад.

Дар секунҷаи рости BCA кунҷи DBC-ро чен мекунем, он ба 47° баробар бошад.

Мувофиқи таърифи тангенси кунҷи тез аз ACD меёбем:

$$\frac{CD}{AC} = \text{tg}42° \Rightarrow AC = \frac{CD}{\text{tg}42°} \quad . \qquad (1)$$

Мувофиқи таърифи тангенси кунҷи тез аз BCD меёбем:

$$\frac{CD}{BC} = \text{tg}47° \Rightarrow BC = \frac{CD}{\text{tg}47°} \, . \qquad (2)$$

Нуқтаҳои A,B ва C дар як хати рост мехобад. Аз (1) (2)-ро тарҳ мекунем:

$$AC - BC = \frac{CD}{\text{tg}42°} - \frac{CD}{\text{tg}47°} \Rightarrow AC - BC = CD\left(\frac{1}{\text{tg}42°} - \frac{1}{\text{tg}47°}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC \text{ - } BC = CD\left(\frac{1}{0{,}9004} - \frac{1}{1{,}0724}\right) \Rightarrow AC - BC = CD(1{,}1106 - 0{,}9325) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC - BC = CD \cdot 0{,}1781 \Rightarrow CD = \frac{AC - BC}{0{,}1781} \, .$$

$AC–BC$ яъне, масофаи AB-ро бевосита чен карданамон мумкин, гӯем, он ба 12 м баробар бошад.

Онгоҳ $CD = \dfrac{AC - BC}{0{,}1781} = \dfrac{AB}{0{,}1781} = \dfrac{12}{0{,}1781} \approx 67{,}4$ (м).

Ҷавоб: ≈67,4 м.

Масъалаҳои ба масъалаҳои ҳозираи дар атрофамон мавҷуд будаи ба он монандро гирифта ҳал намоед.

29 – 30. КОРИ НАЗОРАТӢ. ИСЛОҲ НАМУДАНИ ХАТОГИҲО

1. Гипотенузаи секунчаи росткунча ба 20 см синуси яке аз кунҷҳои тезаш ба 0,5 баробар. Катетҳои секунчаро ёбед.
2. Гипотенузаи секунчаи росткунча ба 13 см яке аз косинуси кунҷи тезаш ба $\frac{5}{13}$ баробар. Катетҳои секунчаро ёбед.
3. Ифодаро содда кунед: $(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)^2+2\sin\alpha\cos\alpha$.
4. Секунчаи баландии тарафҳояш 1) $a=c=17$ см, $b=16$ см; 2) $a=30$ см, $b=34$ см, $c=16$ см бударо ёбед.

ТЕСТИ 2

Худро санчида бинед!

1. Яке аз катетҳои секунчаи росткунчаи 12 см, гипотенузааш бошад, аз катети дуюм 6 см дароз. Дарозии гипотенузаро ёбед.
   A) 15 см; B) 25 см; D) 26 см; E) 18 см.
2. Яке аз катетҳои секунчаи росткунча 12 см, дуюмаш аз гипотенуза 8 см кӯтоҳ. Гипотенузаи ҳамин секунчаро ёбед.
   A) 15 см; B) 16 см; D) 13 см; E) 25 см.
3. Гипотенузаи секунчаи росткунча 25 см, катетҳояш байни худ ба нисбати 3 : 4. Катети хурди ин секунчаро ёбед.
   A) 10 см; B) 15 см; D) 9 см; E) 20 см.
4. Аз ҳама баландии хурди секунчаи тарафҳояш 13 см, 14 см ва 15 см буда чанд сантиметр аст.
   A) 11,5 см; B) 11,1 см; D) 11 см; E) 11,2 см.
5. Диагоналҳои ромб ба 14 см ва 48 см баробар. Периметри ҳамин ромбро ёбед.
   A) 60 см; B) 100 см; D) 80 см; E) 120 см.
6. Периметри ромб 68 см, яке аз диагоналҳояш ба 30 см баробар. Диагонали дуюми ромбро ёбед.
   A) 12 см; B) 8 см; D) 16 см; E) 20 см.
7. Яке аз катетҳои секунчаи росткунча ба $5\sqrt{3}$ баробар. Кунҷи муқобили он бошад, ба 60° баробар. Гипотенузаи секунчаро ёбед.
   A) $5\sqrt{3}$ см; B) $2\sqrt{15}$ см; D) 5 см; E) 10 см.
8. Яке аз катетҳои секунчаи росткунча $5\sqrt{3}$ см, кунҷи ба он часпида бошад, ба 30° баробар. Катети дуюми ҳамин секунчаро ёбед.
   A) $5\sqrt{3}$ см; B) $2\sqrt{15}$ см; D) 5 см; E) 10 см.
9. Гипотенузаи секунчаи росткунча $ABC(\angle C=90°)$ ба 17 см, катетҳояш бошад, ба 15 см ва 8 см баробар аст. Синуси кунҷи А – ро ёбед.
   A) $\frac{8}{15}$; B) $\frac{8}{17}$; D) $\frac{17}{15}$; E) $\frac{15}{17}$.

10. Гипотенузаи секунҷаи росткунҷа ABC ($\angle C=90°$) ба 37 см, катетҳояш ба 12 см ва 35 см баробар аст. Косинуси кунҷи B-ро ёбед.

A) $\frac{12}{37}$; B) $\frac{35}{37}$; D) $\frac{12}{35}$; E) $\frac{35}{12}$.

Забони англисиро меомӯзем!

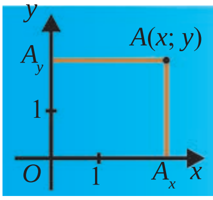
Теоремаи Пифагор	Pythagorean theorem	**Синус**	sine
Теоремаи чаппа	inverse function theorem	**Косинус**	cosine
Тригонометрия	trigonometry	**Тангенс**	tangent
Гипотенуза	hypotenuse	**Котангенс**	cotangent

Маълумотҳои таърихӣ

Пифагор
(пеш аз милод, солҳои 570–500 у.).

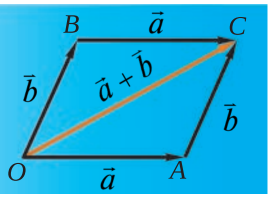
Математик ва файласуфи юнони қадим **Пифагор** дар нимаи дуюми асри VI пеш аз милод (солҳои 570 – 500 пеш аз милод) дар ҷазираи самоси баҳра Эгей таваллуд шудааст ва дар Тареит вафот кардааст. Пифагор тахминан дар (соли 530 пеш аз милод) ба ҷануби Италия шаҳри Кротон, ки мустамликаи Юнониҳо буд, кӯчида меояд ва дар ҳаминҷо бо мактаби худ асос мегузорад. Мо доир ба геометрия ба натиҷаҳои санҷиши корҳои геометрии Пифагор дар асарҳои математикони баъд гузаштаи юнониҳо мебинем. Корҳои дар соҳаи геометрия кардаи Пифагор то ба мо омада нарасидааст.

Пифагор бори аввал ададҳоро бо ҷуфт ва тоқ, содда ва мураккаб ҷудо кардааст. Дар мактаби он «Ададҳои Пифагор» ададҳои сегонаи натуралии Пифагор пурра омӯхта шудааст. Асоси бисёр ҳисобкуниҳои геометриро теоремаи Пифагор ташкил медиҳад. Дар рӯзҳои ҳозира аз сад зиёд исботи теоремаҳои Пифагор мавҷуд аст. Баъзеи онҳо квадратро ба қисмҳо ҷудо намудан асоснок карда шуда аз он қисмҳои квадрат, ин ба катетҳо сохта шудааст, бо гипотенуза квадрат сохта шудааст – бо шаклҳои баробар асоснок намудаанд; сеюмаш бошад, аз баландии аз қуллаи кунҷи рост гузаронида шуда секунҷаро ба ду секунҷаи монанд тақсим намудан асос гузоштааст. Дар Бобули қадим тараф ва асоси секунҷаи баробарпаҳлӯ аз рӯи дарозӣ баландии онро ёфтаанд. Аз рӯи баъзе манбаъҳо, дар мактаби Пифагор шаклҳои хати ростро ба шаклҳои баробар ҷудо намуданро аз усулҳои геометрӣ теоремаҳоро исбот намудан ва ҳалли масъалаҳо истифода бурдаанд. Чунки геометрикӣ иваз кардани масалаи шаклҳои хати рост аз корҳои амалӣ омада баромадааст.



БОБИ III

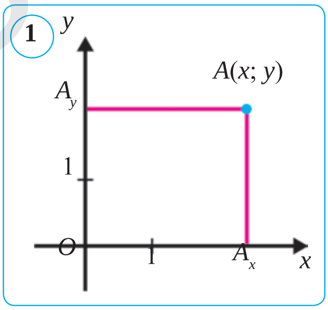
УСУЛИ КООРДИНАТАҲО. ВЕКТОРҲО



§ 7. СИСТЕМАИ КООРДИНАТАҲО ДАР ҲАМВОРӢ

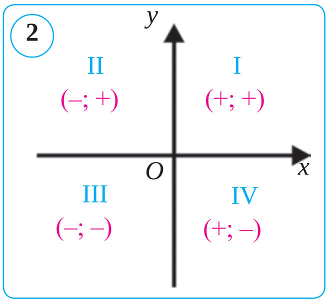
31. КООРДИНАТҲОИ НУҚТА ДАР ҲАМВОРӢ. КООРДИНАТҲОИ МИЁНАЧОИ ПОРЧА

1. Координатҳои нуқта дар ҳамворӣ. Дар ҳамворӣ хатҳои рости бо ҳам перпендикуляри *x* ва *y* мегузаронем, нуқтаи буриши онҳоро бо ҳарфи *O* ишорат мекунем. Равиши тири *Ox «аз чап ба рост»*, равиши тири *Oy* аз *«паст ба боло»* мешавад (расми 1). Дар ин ҳолат дар ҳамворӣи *xOy* системаи координатии росткунчаро муайяи карда шудааст мегӯянд. Ин системаро дар фан олими Франсуз **Рене Декарт** дохил кардааст бинобарин онро **системаи координатии Декартӣ** ҳам меноманд. Тири *Ox* **тири абсссисаҳо** (ё ки тири *x*), тири *Oy* бошад, **тири ординатаҳо** (ё ки тири *y*) мегӯянд. Тири абссисаҳо горизанталӣ ординатаҳо бошад, вертикалинад.



Ҳамворие, ки дар системаи Декартӣ воқеъ аст **ҳамвории координатӣ** меноманд.

Бигзор *A* нуқтаи дилхоҳи ҳамворӣ бошад. Аз нуқтаи *A* ба тирҳои *Ox* ва *Oy* параллел хатҳои рост мегузаронем. Онҳо мувофиқан ба тирҳои *Ox* ва *Oy* дар нуқтаҳои дарозии порчаи A_x ва A_y мебуранд, гӯем (ниг ба расми 1). AA_x ва дарозии порчаи AA_y бошад, *x* **абссисаи** нуқтаи *A* адади *y* **ординатаи** нуқтаи *A* гӯем.



Ҷуфти ададҳои *x* ва *y* **координатаи** нуқтаи *A* номида мешавад ва бо ***A*(*x*; *y*)** ишорат карда мешавад. Барои ифода кардани координатаҳо аввал абссиса, баъд ординатаҳо навишта мешавад.

Ҳаминтавр: 1) дар ҳамвории координатӣ ба ҳар як нуқтаи *A* ҷуфти ададҳои *(x; y)* мувофиқ меояд. 2) ҷуфти дилхоҳи *(x; y)* – ро дар ҳамвории координатӣ, координатаи ягон нуқтаи *A* гуфтан мумкин. 3) агар $x \neq y$ бошад, онгоҳ ҷуфти *(x; y)* ва *(y; x)* дар ҳамворӣ нуқтаҳои гуногунро ифода мекунад. Сари координатаҳо – нуқтаи координатаи *O* аз *O*(0:0) иборат аст.

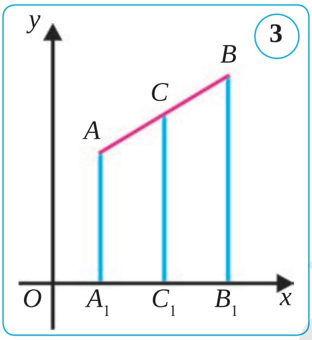
Координаташ нуқтаи *B*-и ихтиёрии дар тири *Ox* буда *B(x; 0)*, координатаи нуқтаи *C*-и ихтиёрии дар тири *Oy* буда дар координатаи *C(0; y)* мешавад.

Тирҳои *Ox* ва *Oy* ҳамвориро ба чор тақсим мекунад, онҳоро **чорякҳои координатаҳо** ё ки **кунҷҳои координатаҳо** меноманд. Чорякҳои координатаҳо бо рақамҳои римӣ ифода карда мешавад. Ҳамчунин бо самти ақрабаки соат муқобил номеронида мешавад. Аломатҳои ишора намудани координатаҳои нуқтаро дар ҳамворӣ дар расми 2 нишон дода шудааст. Шаклҳои геометрӣ ва хосиятҳои онҳоро дар координатаҳо татбиқ намуда, онро дида мебароем.

2. Координатаҳои миёнаҷои порча.

Теорема.

Координатаҳои миёнаҷои порчаҳоро бо формулаҳои зерин ҳисоб карда мешавад $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ дар ин ҷо $A(x_1; y_1)$ ва $B(x_2; y_2)$ қуллаҳои порча, $C(x; y)$ миёнаҷои порча.



Исбот: Координатаҳои *x* ва *y*-и нуқтаи *c*-ро меёбем. Бигзор порчаи *AB* тири *Ox*-ро набурад, яъне $x_1<x_2$-ро дида мебароем (расми 3). Дар тири *Ox* перпендикуляри AA_1, BB_1 ва CC_1-ро мегузаронем. $AA_1 \| BB_1 \| CC_1$ – асоси перпендикулярҳо нуқтаи $A_1(x_1;\ 0)$, $B_1(x_2;\ 0)$ ва $C_1(x;\ 0)$. Нуқтаҳои ба координатаҳо соҳиб аст. Азбаски нуқтаи *C* миёнаҷои порчаи *AB* мебошад. Мувофиқи теоремаи Фалес нуқтаи C_1, миёнаҷои порчаи A_1B_1 мебошад ва $A_1C_1=C_1B_1$, яъне $x_2-x=x-x_1$., аз ин ҷо чунин формуларо меёбем: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

$x_1=x_2$, агар порчаи *AB* ба тири *Oy* параллел бошад сенуқта A_1, B_1 ва C_1 ба як хел абссиса соҳиб мешавад, пас, формула дар ин ҳолат ҳам ҷой дорад.

Дар ҳолати $x_1>x_2$ низ ҳам ба натиҷаи болоӣ соҳиб мешавем (инро мустақилона санҷед). Ординатаи нуқтаи *C* ҳам мисли болоӣ ёфта мешавад. Бо воистаи нуқтаҳои *A, B* ва *C* ба тири *Oy* хатҳои рости перпендикуляр гузаронида мешавад. Формулаи зерин ҳосил мешавад: $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

Масъала. Параллелограмм будани чоркунҷаи қуллааш дар нуқтаҳои *A*(−2; 1), *B*(0; 4), *C*(4; 1) ва *D*(2; −2) бударо исбот кунед.

Ҳал: Мувофиқи аломати параллелограмм диагоналҳои чоркунҷа дар нуқтаи буриш ба ду қисми баробар тақсим шавад параллелограмм будани ин чоркунҷа маълум. Координатаҳои диагоналҳои миёнаҷои AC ва BD-и чоркунҷаи $ABCD$ дода шударо меёбем. Миёнаҷои порчаи AC ба координатаҳои зерин соҳиб аст:

$$x=\frac{-2+4}{2}=1,\quad y=\frac{1+1}{2}=1.$$

Миёнаҷои порчаи BD ба координатаҳои зерин соҳиб аст:

$$x=\frac{0+2}{2}=1,\quad y=\frac{4+(-2)}{2}=1.$$

Ҳаминтавр координатаҳои нуқтаи диагоналҳои AC ва BD (1;1) будааст. Пас, мувофиқи аломатҳои параллелограмм чоркунҷаи $ABCD$ параллелограмм аст. Исботи ин талаб карда нашуда буд.

Савол, масъала ва супоришҳо

1. 1) Тири координатаҳо ва нуқтаи буриши онҳо чӣ ном дорад? 2) Ҳамвории координатӣ чист? Координатаҳои нуқта дар ҳамворӣ гуфта чиро мефаҳмед?

2. Аз нуқтаи A (4: −5) ба тири координатаҳо перпендикуляр гузаронида шудааст. Координатаҳои асосии ин перпендикулярро ёбед.

3. 1) $x=-4$, $y=-6$; 2) $x=-3$, $y=5$; 3) $x>0$, $y<0$; 4) $x>0$ $y>0$ бошад, нуқтаи A $(x,\ y)$ дар кадом чоряк мехобад. Муайян кунед.

4. Агар, 1) $A(-12;\ -3)$, $B(-8;\ 1)$; 2) $A(4;\ -11)$, $B(-4;\ 0)$ бошад, координатаҳои миёнаҷои порчаи AB – ро ёбед.

5. Нуқтаи C – миёнаҷои порчаи AB. Агар: 1) $A(2;-3)$, $C(0{,}5;\ 1)$ бошад, координатаҳои нуқтаи B – ро ёбед.

6. Нуқтаи $A(-4;\ 0)$, $B(-2;\ -2)$, $C(0;\ -6)$ ва $D(-2;\ -4)$ дода шудааст. Исбот кунед, ки $ABCD$ параллелограмм аст.

7. Агар 1) $A(-6;\ 2)$, $B(4;\ 4)$; 2) $A(-8;\ -4)$, $B(-1;\ 3)$ бошад, координатаҳои миёнаҷои порчаи AB-ро ёбед.

8. Нуқтаи C – миёнаҷои порчаи AB, нуқтаи D бошад, миёнаҷои порчаи BC. Агар 1) 1) $A(-3;\ 3)$, $B(5;\ -1)$; 2) $A(-2;\ -1)$, $C(2;3)$ бошад, координатаҳои нуқтаи D-ро ёбед.

Донистан фоиданок аст!

Дарозӣ ва васеъгии нуқтаи географиро ***координатаҳои географӣ*** меноманд. Ҳар як нуқтаи сатҳи замин ду миқдор –дарозии географӣ ва васеъгии он мувофиқ гузошта мешавад ва баръакс, ду миқдор – бароиі дарозӣ ва васеъгии географӣ нуқтаи муайян ёфт мешавад. Дар он меридиан ва паралел вазифаи ордината ва абссисаи системаи координатаи росткунҷаро иҷро мекунад.

Масалан, Шаҳри Тошканд (≈69°) бо дарозии шарқӣ 069,20 ва (≈ 41°) бо васеъгии шимолӣ 041,26 шаҳри Самарқанд бошад, 066,93 бо дарозии шарқӣ (≈ 67°) ва 039,65 бо васеъгии шимолӣ (≈ 40°) ҷой гирифтааст.

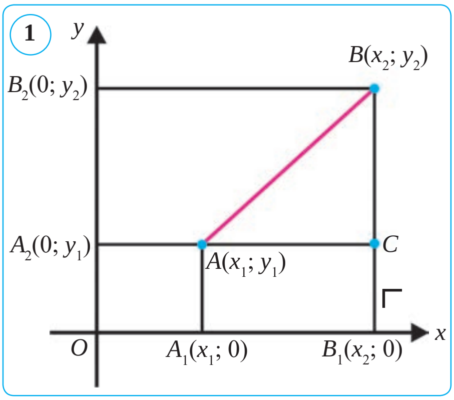
32–33. МАСОФАИ БАЙНИ ДУ НУҚТА. МУОДИЛАИ ДАВРА

1. Масофаи байни ду нуқта.

Теорема.

Масофаи байни нуқтаҳои $A(x_1; y_1)$ ва $B(x_2; y_2)$ бо формулаи зерин ҳисоб карда мешавад.

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,.$$



Исбот. Аввал ҳолати $x_1 \neq x_2$ ва $y_1 \neq y_2$ – ро дида мебароем. Бо воситаи нуқтаҳои A ва B ба тири координатаҳо перпендикуляр мегузаронем ва нуқтаи буриши онҳоро бо C ишорат мекунем (расми 1). Масофаи байни нуқтаҳои A ва C ба $|x_1 = x_2|$ ва масофаи байни нуқтаҳои B ва C бошад ба баробар аст. Ба секунҷаи росткунҷаи ABC теоремаи Пифагорро татбиқ намуда меёбем:

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \quad \text{ё ки} \quad AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,. \quad (1)$$

Формулаи масофаи байни нуқтаҳои $x_1 \neq x_2$ ва $y_1 \neq y_2$ барои ҳолат дида, бароем, он барои дигар ҳолат низ қувваи худро нигоҳ медорад. Дар ҳақиқат, $x_2 = x_1$ ва $y_1 \neq y_2$ бошад, формулаи $AB = |y_2 - y_1|$ (1) низ ҳамин натиҷаро медиҳад. Ҳолати $x_1 \neq x_2$ ва $y_1 = y_2$ ҳам ба ҳамин монанд дида мешавад. Дар ҳолати A ва B нуқтаҳои A ва B болои ҳам мехобад ва формулаи (1) нуқтаи $AB = 0$ медиҳад.

Масъала-1. Агар қуллаҳои чоркунҷаи $ABCD$ дар нуқтаи $A(-2; 1)$, $B(0; 4)$, $C(4; 1)$ ва $D(2; -2)$ бошад, параллелограмм будани онро исбот кунед.

Ҳал. Мувофиқи аломати 2-юми параллелограмм, агар тарафҳои муқобилхобидаи чоркунҷа байни худ баробар бошад, ин чоркунҷа параллелограмм буданаш маълум. Дарозии тарафҳои чоркунҷаи $ABCD$-ро меёбем:

$$AB = \sqrt{(0 - (-2))^2 + (4 - 1)^2} = \sqrt{13}\,; \qquad BC = \sqrt{(4 - 0)^2 + (1 - 4)^2} = \sqrt{25} = 5\,;$$

$$CD = \sqrt{(2 - 4)^2 + (-2 - 1)^2} = \sqrt{13}\,; \qquad AD = \sqrt{(2 - (-2))^2 + (-2 - 1)^2} = \sqrt{25} = 5\,.$$

Ҳаминтавр, $AB = CD$ ва $BC = AD$, яъне аз рӯи аломати параллелограмм чоркунҷаи $ABCD$ параллелограмм аст.

2. Муодилаи шакл дар ҳамворӣ. Муодилаи *шакл* дар системаи координатии Декартӣ гуфта, *муодилаи* ду номаълумаи x, y-ро меноманд, ки он ҳар гуна координатаҳои нуқтаҳои шаклро қоноат мекунанд. Баръакс, ду адади дилхоҳи муодиларо қоноат кунонида, координатаҳои дуюм нуқтаи шакл шуда метавонад.

3. Муодилаи давра.

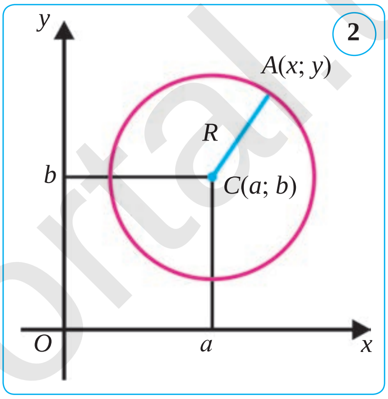
Теорема.

Дар системаи координатии росткунҷа муодилаи давраи марказаш дар нуқтаи $C(a;\ b)$ радиусаш R ба намуди зерин соҳиб аст:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$$

Исбот: Бигзор дар системаи координатии росткунҷа марказаш дар нуқтаи $C(a;\ b)$ дода шуда бошад R $(R>0)$ (расми 2). Ба давра нуқтаи дилхоҳӣ $A(x;\ y)$ мегирем. Мувофиқи таърифи давра, масофа аз маркази давра то нуқтаи дилхоҳӣ он ба R баробар, яъне $CA=R$ пас $CA^2=R^2$ аст. Ин муодиларо ба намуди координатаҳо навишта муодилаи зеринро ҳосил мекунем:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2. \qquad (2)$$



Дар ин ҷо A – нуқтаи дилхоҳи давра. Бинобар ин муодилаи (2) – ро координатаҳои нуқтаҳои дилхоҳи давра қаноат мекунонанд.

Баръакс, ҳар гуна нуқтаҳои A, ки координатаҳояш муодилаи (2) – ро қаноат мекунонад ба давра тааллуқ дорад, чунки аз он масофа то нуқтаи C ба R баробар аст. Аз ин ҷо баробарии (2) муодилаи давраи марказаш нуқтаи C ва радиусаш R буданаш бармеояд. Ҳамин тавр ду шарти таърифи шакл иҷро гардид. Теорема исбот шуд.

Натиҷа. Муодилаи давраи марказаш дар ибтидои координатаҳо ва радиусаш R ба намуди зерин соҳиб аст:

$$x^2+y^2=R^2.$$

Масъала 2. Радиус ва координатаҳои маркази муодилаи $x^2-4x+y^2+2y-11=0$ – ро муайяи кунед.

Ҳал. Муодилаи дода шударо ба намуди $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ меоварем. x^2-4x – ро ба намуди $(x-2)^2-4$ бошад? y^2+2y – ро ба намуди $(y+1)^2-1$ ифода мекунем. Ин ифодаҳоро ба муодилаи додашуда гузошта? ҳосил мекунем.

$$(x-2)^2-\ 4+(y+1)^2-1-11=0 \quad \text{ё ки} \quad (x-2)^2+(y\ +1)^2=4^2.$$

Ин муодила, муодилаи марказаш дар нуқтаи $C(2;\ -1)$ ва радиусаш 4-ро медиҳад.

Ҷавоб: $(2;-1)$, $R=4$.

Савол, масъала ва супоришҳо.

1. 1) Масофаи байни нуқтаҳо бо ёрии координатаҳояш чӣ хел ифода карда мешавад?
2) Муодилаи шакл дар системаи координатии Декартӣ чист? Муодилаи давра дар ҳамвории координатаҳо дар кадом намуд дода мешавад?

2. Агар: 1) $A(-3;\ 8)$, $B(5;\ 2)$; 2) $A(8;\ -1)$, $B(-7;\ 7)$; 3) $A(5;\ 0)$, $B(0;\ -12)$ бошад, дарозии порчаи AB-ро ёбед.

3. Агар масофаи байни нуқтаҳои: 1) $A(2;1)$ ва $B(x;-2)$ ба 5; 2) $A(x;\ 0)$ ва $B(2;\ -1)$ ба 1 баробар бошад, x-ро ёбед.

4. Агар: $A(-1;\ 2)$, $B(2;\ 6)$ ва $C(5;\ 2)$ бошад, периметри секунҷаи ABC-ро ёбед.

5. Агар: 1) $C(7;\ 11)$, $R=5$; 2) $C(-2;\ 3)$, $R=1$ бошад, муодилаи давраи марказаш дар нуқтаи C ва радиусаш R-ро тартиб диҳед.

6. Радиус ва координатаҳои маркази муодилаҳои давраи зеринро муайян кунед. 1) $(x-2)^2+(y-5)^2=7^2$; 2) $(x+1)^2+(y-5)^2=4$.

7. Радиус ва координатаҳои маркази муодилаи 1) $x^2-6x+y^2+2y-6=0$; 2) $x^2+y^2+10y+24=0$-ро ёбед.

8. Агар қуллаҳои секунҷа: 1) $A(0;\ 0)$, $B(0;\ 2)$ ва $C(2;\ 0)$; 2) $(1;\ 0)$, $B(2;\ \sqrt{3})$ ва $C(8;\ 0)$, намуди секунҷаи ABC-ро муайян кунед.

9. Агар: 1) $C(9;\ 4)$, $R=7$; 2) $C(-3;\ -4)$, $R=2$ бошад, муодилаи давраи марказаш дар нуқтаи C ва радиусаш R-ро тартиб диҳед.

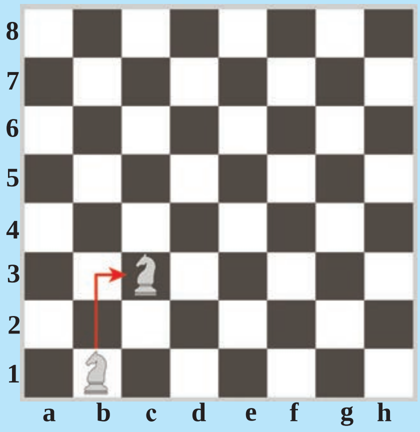
10. Радиус ва координатаҳои маркази муодилаи давраро ёбед:
1) $(x-7)^2+(y+2)^2=25$; 2) $(x-4)^2+y^2=1$.

11. Дар давраи ба муодилаи $x^2+y^2=100$ 1) абссисаашон ба 8, 2) ординатаашон бо – 6 баробар буда, нуқтаҳоро ёбед.

Донистан фоиданок аст!

Шахмат (ба забони форсӣ шоҳмот – шоҳ мағлуб шуд) намуди варзиш (спорт) буда, мақсади бозӣ мот намудани шоҳи рақиб мебошад. Бо ду ранг (сафед ва сиёҳ) бо тахтаи 64-то катакчадор бо 16 донаи духел рангдор (яктоаш шоҳ ва фарзин, 2-тоаш рух, фил ва асп, 8 тоаш пиёда) бозӣ мекунанд.

Дар қайдномаи партияи шахмат шумо гашти донаҳои шахмат аз тарафи бозингаронро дар давоми бозӣ бевосита дида метавонед. Масалан, навишти асп в1 – с3 ҳаракати аспро аз катаки в1 ба с3 мефаҳмонад. Ҳамаи инҳо системаи координатии тахтаи шахмат мебошад.



b1-c3

34. МУОДИЛАИ ХАТИ РОСТ: УСУЛИ КООРДИНАТАҲОИ ҲАЛЛИ МАСЪАЛАҲОИ ГЕОМЕТРӢ

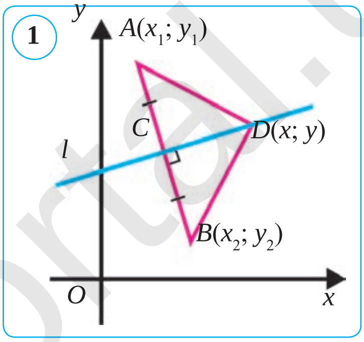
1. Муодилаи хати рост.

Теорема.

Муодилаи хати рост дар системаи координатҳои росткунҷа ба намуди зерин соҳиб аст:

$$ax+by+c=0, \qquad (1)$$

дар ин ҷо a, $в$, c – ададҳои дилхоҳ, яке аз ададҳои a ва b ғайринулист.


1

Исбот: Бигзор хати рости l дар системаи координатии росткунҷа хати рости дилхоҳ бошад. Ягон перпендикуляр ба хати рости l мегузаронем ва аз нуқтаи буриши онҳо C сар карда, порчаҳои баробари CA ва CB-ро мегузаронем (расми 1). Бигзор x_1, y_1, – координатаи нуқтаи A ва x_2, y_2 – координатаи нуқтаи B бошад. Перпендикуляри миёнаи l дар нуқтаи хати рости хобидан $D(x;\ y)$, ки аз нуқтаи A ва B баробар дур шуда, яъне $DA=DB$, аз ин ҷо $DA^2=DB^2$. Ин баробариро бо координатаҳо навишта, ба муодилаи зерин соҳиб мешавем: $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2$. (2)

Баъд аз ба квадрат бардоштани ифодаҳои дохили қавс ва ислоҳ намудани аъзоҳои монанд муодилаи (2) ба намуди зерин меояд:

$$2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y + (x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 + y_2^2) = 0. \qquad (3)$$

x_1, y_1, x_2, y_2 – ададҳои дилхоҳ, аз ҳамин $2(x_2 - x_1)=a$, $2(y_2 - y_1)=b$ ва $x_1^2+y_1^2-x_2^2+y_2^2 = c$ ишорат намуда, онҳоро ба муодилаи (3) гузошта: муодилаи $ax+by+c = 0$-ро ҳосил мекунем, дар ин a, b ва c – ягон ададҳо аст.

D – l нуқтаи дилхоҳи хати рост, барои ҳамин координатаи нуқтаи дилхлҳи хати рост муодилаи додашуда (1) қаноат мекунонад. Бигзор ягон координатаҳои D_0 нуқтаи x_0 ва y_0 муодилаи (1)-ро қаноат кунонад, онгоҳ $D_0A=D_0B$, яъне нуқтаи D_0 аз нуқтаҳои A ва B дар як хел масофа дур мешавад, пас перпендикуляри миёнаи порчаи AB ба хати рости l тааллуқ дорад. Барои ду нуқтаи гуногун будани A ва B яке аз фарқҳои $(x_2 - x_1)$ ё ки $(y_2 - y_1)$, яъне ғайринулӣ будани ададҳои a ва b-ро таъкид менамоем.

Масъалаи 1. Муодилаи хати рости аз нуқтаҳои $A(1;\ -1)$ ва $B(-3;\ 2)$ гузарандаро тартиб диҳед.

Ҳал. Дар муодилаи $ax+by+c = 0$ нуқтаҳои A ва B ба хати рости AB мехобад, пас, координатаҳои онро ба муодилаи хати рост гузошта, муодилаи зеринро ҳосил мекунем:

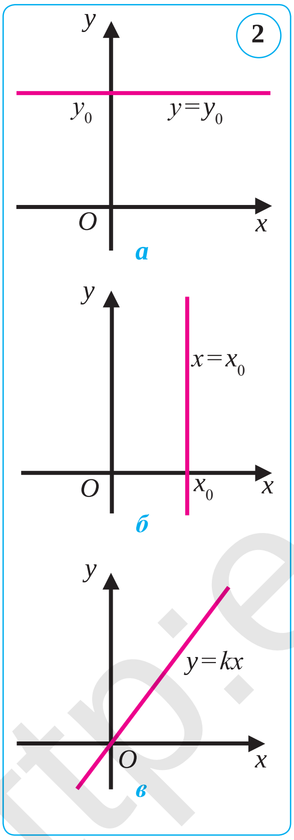
$$a\cdot 1 + b\cdot(-1) + c=0, \qquad a\cdot(-3)+b\cdot 2+c= 0 \quad \text{ё ки}$$

$$a-b+c=0, \quad -3a+2b+c=0.$$

Коэффисиентҳои a ва b – и ин муодилаҳоро бо ёрии c ифода мекунем: $a=3c$, $b=4c$. Ин қиматҳои a ва b-ро ба муодилаи хати рост гузошта меёбем $3cx+4cy+c=0$, ин ҷо $c\neq 0$.

Ин муодала, муодилаи хати рости AB мебошад. Муодилаи болоиро бо c ихтисор намуда, ба намуди зерин меоварем $3x+4y+1=0$. Ин муодилаи хати рост мебошад.

2. Ҷойгиршавии хати рост нисбат ба системаи координатаҳо. Акнун се ҳолати хусусии муодилаҳои хати рости $ax+by+c=0$ – ро дида мебароем. Дар ҳар як ҳолат тарзи ҷойгиршавии хати рост нисбат ба тири координатаҳоро дида мебароем.

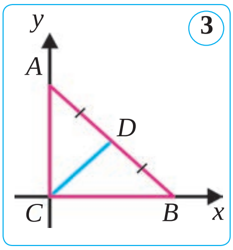


Ҳолати 1. Агар $a=0$, $b\neq 0$. бошад, онгоҳ муодилаи хати ростро дар намуди $by+c=0$ ё ки $y=y_0$ навиштан мумкин, дар ин ҷо $y_0=-\frac{c}{b}$ ягон адад, ҳамаи нуқтаҳои хати рости $y=y_0$ ба як хел ордината соҳиб аст, пас, он ба тири абсцисса параллел (расми 2, *а*). Агар $c=0$ бошад, бо он болои ҳам меафтад $y=0$ – муодилаи тири абсцисса.

Ҳолати 2. Агар $a\neq 0$, $b=0$ бошад, дар ин ҳолат муодилаи хати рост ба намуди $ax+c=0$ ё ки $x=x_0$ навишта шуда, аз инҷо $x_0=-\frac{c}{a}$ – ягон адад $x=x_0$ ҳамаи нуқтаҳои ба якхел абсцисса соҳиб аст, пас он ба тири ординатҳо (расми 2, *б*). Агар $c=0$ бошад, болои ҳам мефарояд $x=0$ – муодилаи тири ординатаҳо мебошад.

Ҳолати 3. Агар $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c=0$ бошад, дар ин ҳолат муодилаи хати ростро ба намуди $ax+by=0$ ё ки ба намуда $y=kx$ навиштан мумкин, дар инҷо ягон адад $k=-\frac{a}{b}$ Хати рости $y=kx$ аз ибтидои координатаҳо мегузаронад (расми 2, *в*).

3. Усули координати масъалаҳои геометрӣ. Бисёр масъалаҳои геометриро бо ёрии формулаҳои миёнаҷои координатҳои порча ва масофаи байни нуқтаҳо ҳал кардан мумкин. Бо ҳамин мақсад системаи координатаҳои росткунҷаро дохил намудан ва шарти масъалаҳоро бо координатҳо навишта гирифтан лозим. Баъд аз он масъала бо ёрии ҳисобкуниҳои алгебра ҳал карда мишавад.



Масъалаи 2. Исбот кунед, ки миёнаҷои гипотенуза дар секунҷаи росткунҷа аз ҳамаи қуллаҳо бо яксел масофа ҷойгир шудааст.

Ҳал. Секунҷаи росткунҷаи ABC $(\angle C=90°)$-ро дида мебароем. Миёнаҷои порчаи AB-ро бо ҳарфи A ишорат мекунем. Чун расми 3, системаи координатҳои росткунҷаро дохил мекунем. Агар $BC=a$, $AC = b$ бошад, онгоҳ қуллаҳои секунҷа ба координатҳои $C(0;\ 0)$, $B(a;\ 0)$ ва $A(0;\ b)$ соҳиб мешавад. Мувофиқи формулаи координатҳои миёнаҷои порча координатҳои нуқтаи D – ро меёбем: $D(0{,}5a;\ 0{,}5b)$.

Аз формулаи ёфтани масофаи байни нуқтаҳо истифода бурда, дарозии порчаҳои DC ва DA – ро меёбем:

$$DC=\sqrt{(0,5a)^2+(0,5b)^2}=\sqrt{0,25\left(a^2+b^2\right)}=0,5\sqrt{a^2+b^2};$$

$$DA=\sqrt{(0,5a)^2+(0,5b-b)^2}=\sqrt{0,25a^2+0,25b^2}=\sqrt{0,25\left(a^2+b^2\right)}=0,5\sqrt{a^2+b^2}.$$

Ҳаминтавр, $DA=DB=DC$ будааст. Исботи ин талаб карда шудабуд.

Савол, масъала ва супоришҳо

1. 1) Исбот кунед, ки хати рост дар системаи координатаҳои росткунҷа ба муодилаи зерин соҳиб аст: $ax+by+c=0$.
2) Агар дар муодилаи хати рост $ax+by+c=0$ $a=0$ $(b=0;\ c=0)$ бошад хати рост чӣ хел воқеъ мешавад?

2. Кадоме аз нуқтаҳои $A(3;\ -1)$, $B(-3;\ 0)$, $C(12;\ 5)$, $D(3;\ 0)$ ва $E(-9;\ -2)$ ба муодилаи хати рости додашуда $x-3y+3=0$ тааллуқ дорад, кадоме тааллуқ надорад?

3. Муодилаи хати рости аз нуқтаҳои 1) $A(1;\ 7)$ ва $B(-3;\ -1)$; 2) $A(2;\ 5)$ ва $B(5;\ 2)$; 3) $A(0;\ 1)$ ва $B(-4;\ -5)$ гузарандаро нависед.

4. Хати рости $x+y+c=0$ аз нуқтаи $(1;\ 2)$ гузарад, коэффисиенти с – и муодилаи он ба чӣ баробар аст.

5. Агар гузаштани хати рости $ax+by-1=0$ аз нуқтаҳои $(1;\ 2)$ ва $(2;\ 1)$ маълум бошад, a ва b-и дар муодилаи он буда, ба чӣ баробар аст?

6. Нуқтаи буриши тирҳои координата ва хати рост бо муодилаи 1) $x+2y+3=0$; 2) $3x+4y = 12$; 3) $4x-2y-10=0$ – ро ёбед.

7. Агар: 1) $A(3;\ -1)$, $B(5;\ 5)$; 2) $A(3;\ 6)$, $B(-5;\ -2)$ бошад, миёнаҷои порчаи AB будан ё набудани нуқтаи $C(4;\ 2)$ – ро санҷед.

8. Кадоме аз нуқтаҳои $A(0;-2)$, $B(4;2)$, $C(-4;\ -5)$ ба муодилаи $8x-4y-8=0$ ва хати рост кадомаш тааллуқ надорад?

9. Агар $A(-1;\ -1)$, $B(-1;\ 3)$ ва $C(2;\ 2)$ бошад. муодилаи хати рости тарафҳои секунҷаи ABC-и дарбаргирандаро тартиб диҳед.

§ 8. ВЕКТОРҲО ДАР ҲАМВОРӢ

35. МАФҲУМИ ВЕКТОР. ДАРОЗИИ ВЕКТОР ВА САМТИ ОН

1. Бузургии вектор. Вектор. Бузургиҳои ба шумо маълум дорои ду намуд мебошанд. Чунин бузургиҳое маълуманд, ки бо қимати ададии худ (бо воҳиди ченаки додашуда) пурра муайян карда мешаванд. Масалан, дарозӣ, масоҳат, вазн аз ҷумлаи онҳоянд.

Таърифи 1. *Бузургиҳое, ки танҳо бо қимати ададии худ муайян карда мешаванд,* ***бузургиҳои скалярӣ*** *ном доранд.*

Боз чунин бузургиҳое вуҷуд доранд, ки барои пурра фаҳмидани онҳо ғайр аз қимати ададии ин бузургиҳоро ифодакунанда самти онҳоро низ донистан зарур аст. Масалан, суръат, қувва ва фишор аз ҷумлаи онҳост.

Вектор – яке аз мафҳумҳои асосии геометрия буда, он бо адад (дарозӣ) ва самт пурра муайян карда мешавад. Барои хубтар дарк кардан, онро дар шакли порчаи самтнок тасаввур кардан мумкин аст. Дар асл ҳангоми дар бораи векторҳо сухан рондан, дарозии якхелаи байни худ параллел ва як синфи пурраи порчаҳои самтноки дорои самти якхела дар назар дошта мешавад.

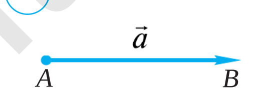
Таърифи 2. *Қимати ададӣ ва бузургиҳои бо самти худ муайяншаванда (тавсифшаванда)* ***бузургиҳои векторӣ*** *ва ё* ***векторҳо*** *ном доранд.*

Масъалаҳои гуногуни санҷиши миқдор, ки физика, механика ва математикаро на бо адад, балки аз рӯи самташ муайян мекунад, ба мафҳуми вектор меорад. Масалан, қувва, суръат – векторҳоянд.

Бузургиҳои векториро мо дар ҳолатҳои гуногун вомехӯрем. Масалан: ҳангоми дар нақлиёт ҳаракат кардан бузургиҳои вектории бо суръати ҳаракат, гардиш ё ист вобастаро дида метавонед. Дар фанҳои табиатро омӯзанда – суръат, қувваи инерсия, қувваи марказгурез ва бо номҳои ба ин монанд номбар мекунанд. Мо маънии табиии бузургиҳои векториро ба ҳисоб нагирифта, маънии табиати математикии онро меомӯзем. Албатта, хосиятҳои математикии бузургиҳои векторӣ дорои маънои табиии худ аст.

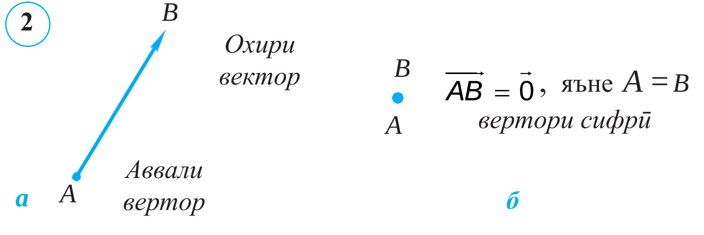
Миқдори ададии бузургии векториро бо ёрии порча ифода мекунем.

1



Вектор дар нуқтаи A гузошта шудааст

2



Маълум аст, ки ҳар гуна порча ду нӯг дорад. Яке аз онҳоро ***аввали*** вектор гуфта, нӯги дуюмро дар самти бузургии вектор мувофиқан идома медиҳем ва бо стрелка (ақрабак) ишора мекунем. Онро ***қуллаи*** вектор мегӯем.

Таърифи 3. ***Вектор*** *(бузургии вектор) гуфта, порчаи дорои самтдоштаро меноманд.*

Порчае, ки самти бузургии вектириро баҳо медиҳад, чун порча тавсиф карда мешавад. Агар куллаҳои ифодакунандаи вектор нуқтаҳои A ва B бошад, вектори аз нуқтаи $\overrightarrow{AB}$ самтдошта чунин ишора мешавад. Ҳамчунин, векторҳоро дар шакли (ҳарфҳои хурди алифбои лотинӣ) $\vec{a}$, $\vec{b}$ низ ишора кардан мумкин аст (расми 1).

Хонда мешавад: Вектори $\vec{a}$ ё вектори $\overrightarrow{AB}$.

1) Самти вектор бо нишон додани аввал ва охири он муайян карда мешавад. Дар ин ҷо аввали вектор дар мавқеи аввал гузошта мешавад (расми 2, *а*).

Самти нури AB-ро муайянкунанда *самти векторӣ* $\overrightarrow{AB}$ ном дорад. Вектори аввал ва охираш болоиҳам хобида, *вектори сифрӣ* ном дорад $\overrightarrow{AB}=\vec{0}$, баробар ин болоиҳам афтидани нуқтаҳои A ва B-ро ифода мекунад (расми 2, *б*).

2) Бузургии мутлақ *модул* ё *дарозии вектор* дарозии порчаест, ки векторро тасвир менамояд.

Модули вектор чун $|\overrightarrow{AB}|$ ё $|\vec{a}|$ ишора карда мешавад (расми 3).

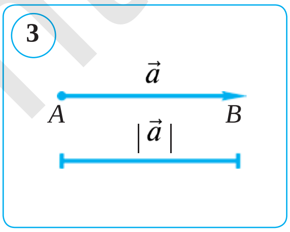
Модули вектори $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ дарозии порчаи AB ба ҳисоб меравад: $|\vec{a}|=|\overrightarrow{AB}|$ Бинобар ин дар геометрия модул ё қимати мутлақи вектор дарозии он аст мегӯянд. Модули вектори сифрӣ ба сифр баробар аст: $|\vec{0}|=0$.

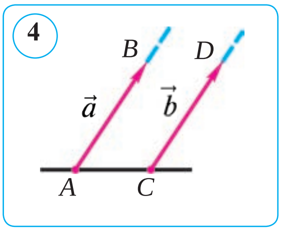
2. Векторҳои баробар.

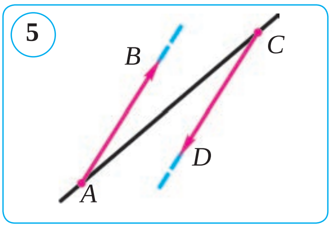
Таърифи 4. *Векторҳое, ки дар як хати рост ё ки дар хатҳои рости параллел мехобанд,* ***векторҳои коллинеарӣ*** *номида мешавад.*

Векторҳои коллинеарии $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ ба намуди $\vec{a}\,||\,\vec{b}$ ишорат карда мешавад.

Агар ду вектори дар хатҳои рости параллел хобида, аз хати рости аз аввали он гузашта дар як тараф хобанд, онҳо векторҳои ҳамсамт ном доранд (расми 4); нисбат ба хати рост дар тарафҳои гуногун хобанд, онҳо *векторҳои муқобилсамт* ном доранд (расми 5).







Векторҳои $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{CD}$: 1) ***ҳамсамт*** бошанд, онҳо ба мисли $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$;

2) ***муқобилсамт*** бошанд, чун $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$ ишора карда мешаванд.

Вектори сифр дар вектори дилхоҳ коллинеарӣ ҳисоб меёбад.

Таърифи 5. *Агар дарозии векторҳои $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ баробар ва ҳамсамт бошанд, векторҳои баробар номида мешаванд.*

Ҳаминтавр, агар $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ва $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ бошад, векторҳои $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ баробар мешавад. Векторҳои баробар чун $\vec{a} = \vec{b}$ навишта мешаванд.

Векторҳои баробар нишон медиҳад, ки аввали он дар нуқтаи ихтиёрии ҳамворӣ буда метавонад (расми 6), яъне модули векторро тағйир надода, самташро нигоҳ дошта, аввали онро ба нуқтаи дилхоҳи ҳамворӣ кӯчонидан мумкин аст. Инро *хосияти параллелкӯчонии вектор* меноманд.

Савол, масъала ва супоришҳо

1. 1) Вектор чист? Вектор чӣ гуна ишора карда мешавад?
2) Чӣ гуна векторҳоро, векторҳои ҳамсамт (муқобилсамт) меноманд? Модули вектор чист?

2. Дар параллелограмми $ABCD$ (расми 7): 1) бо вектори $\overrightarrow{DC}$ ҳамсамт 2) бо вектори $\overrightarrow{AO}$ ҳамсамт 3) бо вектори $\overrightarrow{AD}$ муқобилсамт 4) бо вектори $\overrightarrow{BD}$ муқобилсамт 5) бо вектори $\overrightarrow{AB}$ баробар 6) бо вектори $\overrightarrow{OC}$ баробар 7) бо вектори $\overrightarrow{OB}$ баробар векторҳоро нависед.

3. Диагоналҳои параллелограмми $ABCD$ дар нуқати O бурида мешавад. Векторҳои бо нуқтаи буриши қулла ва диагоналҳои он ишорашударо нависед. Кадоме аз векторҳои зерин: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ ва $\overrightarrow{BO}$ коллинеаранд?

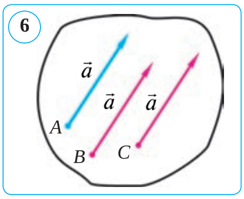
4. Агар: 1) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ ва $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{DC}|$; 2) $\overrightarrow{AD} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{DC}$ векторҳо ноколлениар бошад, шакли чоркунҳои $ABCD$-ро муайян намоед.

5. Маълум ки, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ аст. Оё тасдиқи зерин дуруст аст:
1) $AB \parallel CD$; 2) $|AB| = |CD|$?

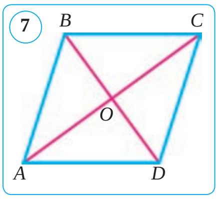
6. $ABCD$ параллелограмм аст. Аз байни векторҳои дар расми 8 тасвиршуда чуфти векторҳои: 1) коллинеарӣ; 2) ҳамсамт; 3) муқобилсамт; 4) дарозиашон баробарро нишон диҳед.

7. Дар бораи самти векторҳои $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{BA}$ чӣ гуфтан мумкин аст?

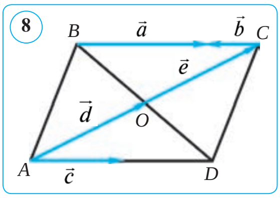
6



7



8



36-37. ҶАМЪ ВА ТАРҲИ ВЕКТОРҲО

1. Ҷамъи векторҳо. Бигзор векторҳои $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ додашуда бошад (расми 1, *a*). Нуқтаи дилхоҳи *A*-ро ишора мекунем ва аз ин нуқта вектори $\vec{a}$-ба вектори $\overrightarrow{AB}$ баробарро мегузаронем. Баъд аз нуқтаи *B* ба вектори $\overrightarrow{BC}$-и ба вектори $\vec{b}$ баробаро мегузаронем.Акнун аввали вектори $\vec{a}$ дар нуқтаи *A* ва куллаи вектори $\vec{b}$-ро ба нуқтаи *C* мегузорем (расми – 1,б). Вектори $\overrightarrow{AC}$ *суммаи векторҳои* $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ номида мешавад. Ин қоидаи ҷамъи векторҳоро *қоидаи «секунҷа» (сенуқта)* меноманд. Суммаи векторҳои $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ бо $\vec{a}+\vec{b}$ ишора карда мешавад.

Қоидаи секунҷаро чунин ифода кардан ҳам мумкин аст:

агар A, B ва C– нуқтаҳои дилхоҳ бошанд, онгоҳ баробарии зерин дуруст аст.

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

Қоидаи секунҷа барои нуқтаҳои дилхоҳи *A, B* ва *C* дар ҳолати болоӣ ҳам афтидан, бомавқеъ аст (расми 1, *в*).

2. Қонунҳои ҷамъи векторҳо. Ба мо маълум аст, ки тарафҳои муқобилхобидаи параллелограмм байни худ баробар ва параллеланд. Агар равишаш як хела бошад, тарафҳои муқобили параллелограмм векторҳои баробарро ифода мекунад.

Бигзор векторҳои $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ коллинеар набошад ба нуқтаи дилхоҳи A векторҳои $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ ва $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$-ро гузошта параллелограмми *ABCD*-и тарафҳояш аз ин векторҳо табдил ёфтаро месозем (расми 2). Аз рӯи қоидаи секунҷа:

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{a}+\vec{b} \text{ ва } \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\vec{b}+\vec{a}.$$

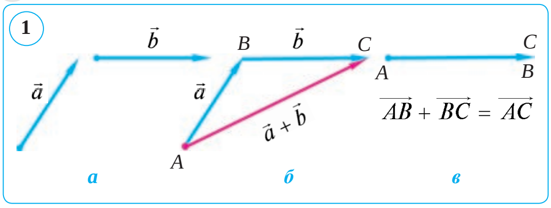
Аз инҳо $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ бармеояд.

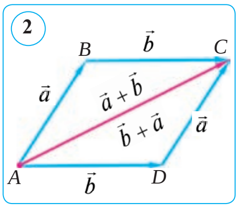
Пас, суммаи векторҳо бо тартиби пайдарпай ҷойгиршавии онҳо вобастагӣ надорад. Яъне, *барои векторҳои дилхоҳи a ва b баробарии зерин ҷой дорад*:

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}.$$

Инро қонуни *ҷойивазкунии ҷамъ* меноманд.

Параллелограмми *ABCD–* и аз векторҳои $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ табдилёфта, суммаи вектори $\overrightarrow{AC}$ аз диагонали векторҳои ҷаъмшаванда, ки аз аввали ин





векторҳо баромада аст. Одатан чунин ҷамъи векторҳоро *«қоидаи (усули) параллелограмм»* мегӯянд (расми 2).

Акнун суммаи сето векторҳои $\vec{a}$, $\vec{b}$ ва $\vec{c}$-ро дида мебароем. Аз нуқтаи дилхоҳи *A* вектори $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, аз нуқтаи *B* вектори $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ ва аз нуқтаи *C* бошад, вектори $\overrightarrow{CD}=\vec{c}$ мегузаронем (расми 3). Қоидаи секунҷаро татбиқ намуда, ҳосил мекунем:

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=(\underbrace{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}})+\overrightarrow{CD}=\underbrace{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}}=\overrightarrow{AD};$$

$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{AB}+(\underbrace{\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}})=\underbrace{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}}=\overrightarrow{AD}.$$

Аз ин, *барои векторҳои дилхоҳи* $\vec{a}$, $\vec{b}$ ва $\vec{c}$ *баробарии зерин ҷой доштанаш бармеояд.*

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}).$$

Ин векторҳоро *қонуни гурӯҳбандии (хосияти)* ҷамъ меноманд.

Агар ҳар як вектор аз сифр фарқ кунад, суммаи онҳо вектори сифрӣ шуданаш мумкин.

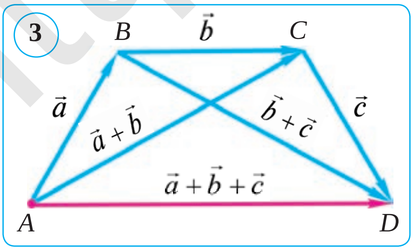
Масалан, секунҷаи *ABC*-ро (расми 4) дида мебароем. Дар он суммаи векторҳои $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ ва $\overrightarrow{CA}$ мешавад, яъне $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$. Чунки агар аввали вектори якум ва кулаи (нӯги тири оҳири) вектори 3 болоиҳам афтад, суммаи вектор, вектори сифрӣ мешавад.

Таърифи 1. *Агар суммаи ду вектор вектори сифрӣ бошад, онҳоро* ***векторҳои муқобил*** *меноманд.*

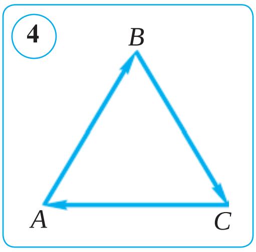
Пас, агар $\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$ бошад, онгоҳ $\vec{b}=\overrightarrow{BA}$, $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ ва баракс векторҳои муқобил меноманд. $\vec{b}=-\vec{a}$, $\vec{a}=-\vec{b}$ (расми 5). Агар векторҳои муқобилро аз рӯи қоидаи секунҷа ҷамъ кунем, онгоҳ вектори сифрӣ ҳосил мешавад, дар он $|\vec{a}|=|\vec{b}|$, $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторҳои *a* ва *b* параллел шуда, ба тарафҳои гуногун равона мешавад. Пас, ба ҳар як вектори $\vec{a}$ вектори ба он муқобили $-\vec{a}$ мавҷуд аст (яъне $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$) аз мулоҳизаҳои болоӣ ба чунин хулоса меоем.

Агар ду вектори аз сифр фарқкунанда дарозии баробар ва самти муқобил дошта бошад, ***векторҳои муқобил*** *ном дорад. Вектори сифрӣ худаш ба худаш вектори муқобил ҳисоб мешавад.*

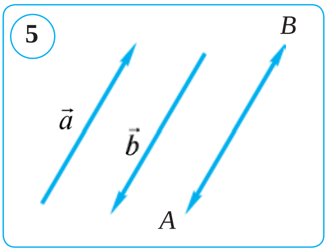
③



④



⑤



3. Тарҳи векторҳо. Фарқи векторҳо ба мисли тарҳи ададҳо амали ба ҷамъ чаппа аст.

Таърифи 2. *Фарқи вектори* $\vec{a}$ *ва* $\vec{b}$ *гуфта, чунин вектори* $\vec{c}$ *-ро меноманд, ки суммаи он ба вектори* $\vec{b}$ *вектори* $\vec{a}$ *-ро медиҳад:* $\vec{c}+\vec{b}=\vec{a}$.

Фарқи векторҳои $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ чун фарқи ададҳо ишора карда мешавад. $\vec{a}-\vec{b}$ фарқи (тарҳи) вектор ҳангоми ба вектори якум вектори ба вектори дуюм муқобилро ҷамъ намудан, муайян мегардад ва он ба $\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$ баробар мешавад (расми 6, *б*).

Бигзор ба мо векторҳои $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ додашуда бошад (расми 6, *а*).

Ба вектори $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ суммаи вектори муқобили $-\vec{b}$-ро дида мебароем.

Барои векторҳои дилхоҳи $\vec{a}$ *ва* $\vec{b}$ *баробарии* $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$ *ҷой дорад.*

Дарҳақиқат, $\left(\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)\right)+\vec{b}=\vec{a}+\left(\left(-\vec{b}\right)+\vec{b}\right)=\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$

Агар барои векторҳои $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ танҳо як нуқтаи O гузошта шуда бошад, онгоҳ барои ёфтани фарқи $\vec{a}$ – $\vec{b}$ аз қоидаи зерин истифода бурдан лозим аст (расми 6, *в*).

$$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}.$$

Аз боло маълум аст, ки *охири* вектори *тарҳкунанда ҳосили тарҳ, ибтидои* вектор *охири* вектори *тарҳшаванда* бошад, вазифаи *охири* вектори *ҳосили тарҳро* ичро мекардааст. Бо мақсади таъмин намудани қуллай будани ба ёд овардани қоида, он ба тарзи схематикӣ нишон дода шуд.

Ҳангоми ҷамъ кардани векторҳо аз усули параллелограмм истифода мебарем (расми 7). Фарқи вектор аз диагонали дуюми параллелограмм иборат мебошад.

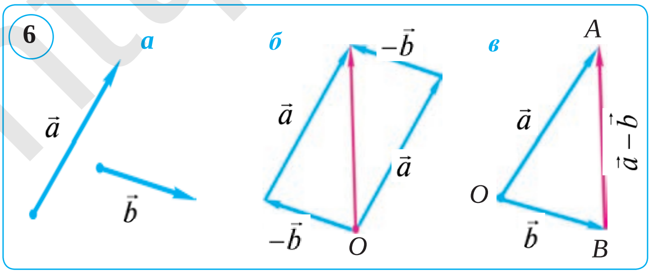
Масъала. Секунҷаи *ABC* дода шудааст. Векторҳои 1) $\overrightarrow{BA}$; 2) $\overrightarrow{CB}$; 3) $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}$-ро бо векторҳои $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ ва $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$ ифода кунед.

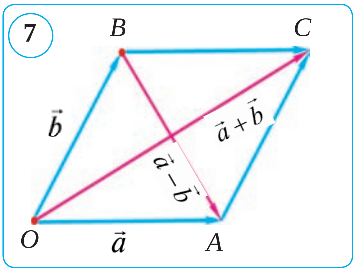
*Ҳал.*1) $\overrightarrow{BA}$ ва $\overrightarrow{AB}$ – векторҳои муқобил, барои ҳамин

$\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$ ё ки $\overrightarrow{BA}=-\vec{a}$.

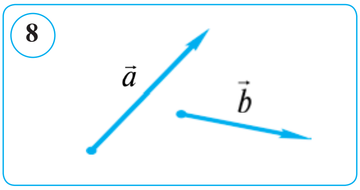
2) Аз рӯи қоидаи секунҷа: $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}$. Барои ҳамин $\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AC}$, ҳаминтавр

$$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}+\left(-\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\vec{a}-\vec{b}.$$

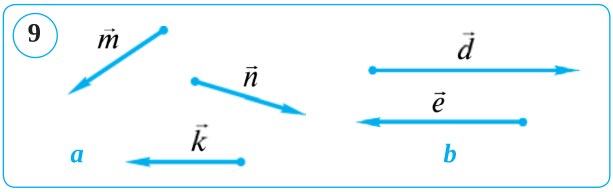




8



9



Савол, масъала ва супоришҳо

1. 1) Аз рӯи қоидаи секунҷа ва параллелограмм суммаи векторҳо чӣ гуна ёфта мешавад?

2) Вектори муқобил ба вектори додашуда гуфта чиро мегӯянд? Фарқи ду вектор чист?

2. Дар расми 8, векторҳои $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ тасвир ёфтаанд. Вектори $\vec{a}+\vec{b}$-ро бо ду усул созед.

3. Дар расми 9, векторҳои, $\vec{m}$, $\vec{n}$ ва $\vec{k}$, инчунин $\vec{d}$ ва $\vec{e}$ тасвир ёфтааст. Векторҳоро созед: 1) $\vec{m}+\vec{n}+\vec{k}$; 2) $\vec{d}+\vec{e}$.

4. Дар расми 10, векторҳои $\vec{a}$, $\vec{b}$ ва $\vec{c}$, инчунин .$\vec{d}$ ва $\vec{e}$ тасвир ёфтаанд. Векторҳоро созед: 1) $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$; 2) $\vec{e}-\vec{d}$.

5. Параллелограмми $ABCD$ дода шудааст. Баробарии

$(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}$ оё иҷро мешавад? Санҷида бинед.

6. Дар ромби $ABCD$: $AD=$ 20 см, $BD=$ 24 см, O – нуқтаи буриши диагоналҳо аст. – $|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{OB}|$-ро ёбед.

7. $ABCD$ – чоркунҷаи дилхоҳ аст. Исбот кунед, ки $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$ аст.

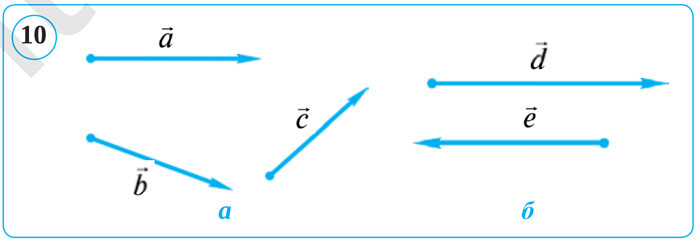
8. $ABCD$ – параллелограмм. Баробарии векторҳои $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$-ро исбот кунед. (Ҷамъи векторҳо «*қоидаи параллелограмм*»).

9. Дар параллелограмми $ABCD$ векторҳои: $\overrightarrow{CA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CD}=\vec{b}$. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DA}$-ро бо ёрии векторҳои $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ ифода кунед.

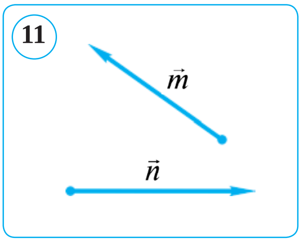
10. E ва F – миёнаҷои тарафҳои AB ва AC-и секунҷаи ABC мебошад. Векторҳои, $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{EF}$ ва $\overrightarrow{BC}$–ро бо ёрии векторҳои $\vec{a}=\overrightarrow{AE}$ ва $\vec{b}=\overrightarrow{AF}$ ифода кунед.

11. Дар расми 11, векторҳои $\vec{m}$ ва $\vec{n}$ тасвир ёфтаанд. Вектори $\vec{m}+\vec{n}$-ро бо ду усул созед.

10



11



38-39. ЗАРБИ ВЕКТОР БА АДАД. КООРДИНАТАҲОИ ВЕКТОР

1. Зарби вектор ба адад. Ягон вектори $\vec a$-ро гирифта, суммаи $\vec a+\vec a+\vec a$-ро меёбем (расми 1). Ин суммаро чун $3\cdot\vec a$ ишора карда, табиист, ки вектори $\vec a$-ро ба 3 зарб мекунем

Таърифи 1. *Ҳосили зарби вектори $\vec a$ ғайрисифрии ба адади k гуфта, ба ҳамон вектори $\vec b = k\cdot\vec a$ номида мешавад, ки дар он k ба модули вектори $|k|\cdot|\vec a|$ баробар буда, ҳангоми самташ $k>0$ будан, бо самти вектори $\vec a$ ва $\vec b$ як хел, ҳангоми $k<0$ будан, ба самти вектори муқобил мешавад. Ҳосили зарби вектори сифр ба адади ихтиёрӣ, вектори сифр ҳисоб меёбад.*

Ҳосили зарби вектори $\vec a$ ба адади k чун $k\vec a$ ишора мешавад (зарбкунандаи адад дар тарафи чап навишта мешавад). Аз рӯи таъриф:

$$|k\vec a| = |k|\cdot|\vec a|\ .$$

Аз таърифи зарби вектор ба адад бармеояд, ки: 1) *ҳосили зарби вектори ихтиёрӣ ба сифр вектори сифр мебошад;* 2) *барои адади ихтиёрӣ ва вектори ихтиёрии $\vec a$ векторҳои $\vec a$ ва $k\vec a$ коллинеарианд.*

Акнун хосиятҳои асосии зарби векторро ба адад номбар мекунем.

Барои векторҳои дилхоҳи $\vec a$, $\vec b$ ва ададҳои дилхоҳи k, l баробариҳои зерин мавқеъ доранд:

1°. $(k\cdot l)\vec a = k\cdot(l\vec a)$ – *қонуни гурӯҳбандӣ.*

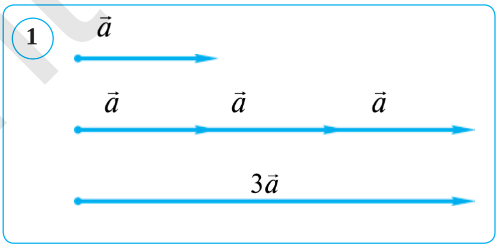
2°. $(k+l)\vec a = k\vec a + l\vec a$ – *қонуни якуми тақсимот.*

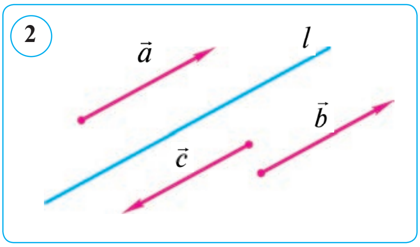
3°. $k(\vec a+\vec b) = k\vec a + k\vec b$ – *қонуни дуюми тақсимот.*

4°. $k\cdot\vec 0 = 0\cdot\vec a = \vec 0$.

Векторҳои ба як хати рост параллел, ***векторҳои коллинеарӣ*** *ном доранд.*

Бигзор хати рости l ва векторҳои ба он параллели $\vec a$, $\vec b$ ва $\vec c$ додашуда бошад (расми 2). Мувофиқи таъриф, векторҳои $\vec a$, $\vec b$ ва $\vec c$ векторҳои коллинеарӣ мебошанд. Дар ин ҷо векторҳои $\vec a$ ва $\vec b$ самти якхела доранд, вектори $\vec c$ бошад, нисбат ба векторҳои $\vec a$ ва $\vec b$ муқобил равона карда шудаанд.

1


2


Маълум аст, ки ҳангоми ба адад зарб кардани вектор самти вектори ҳосили зарб ба вектори додашуда параллел мебошад. Аз инҷо хулосаи маълуми зеринро ҳосил мекунем:

ҳосили зарби вектор ба адад ба ҳамин вектор коллинеарӣ аст.

Теорема.

Агар вектор худро ба адади ба модулаш баробар тақсим кунад, ба ҳамин вектор воҳиди коллинеарии вектор ҳосил мешавад.

Исбот. Бигзор модули вектори $\vec{a}$ чунин бошад: $k = \frac{1}{|\vec{a}|}$. Ба адади ҳосили зарби вектори:

$$|k\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}| = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot |\vec{a}| = 1 .$$

Пас, модули вектори зарб ба як ба воҳид баробар аст.

Вектори модулаш ба як баробарро *вектори воҳидӣ* меномем. Агар бо самти вектори $\vec{a}$ вектори воҳидиро ба $\vec{e}$ ишора кунем, аз рӯи теорема ба баробарии $\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ меоем, ин баробариро ба $|\vec{a}|$ зарб кунем: $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{e}$ ҳосил мешавад.

Дар ҷараёни омӯзиши векторҳо баробарии дорои аҳамияти калонро ҳосил кардем. Яъне, *ҳар гуна вектор – бо модули ҳамин вектор ба ҳосили зарби воҳиди вектори коллинеарӣ баробар аст.*

Масалаи 1. Барои кадом қиматҳои k мулоҳизаҳои зерин дурустанд:

1) $|k\vec{a}| < |\vec{a}|$; 2) $|k\vec{a}| > \vec{a}$; 3) $|k\vec{a}| = |\vec{a}|$, аз инҷо $\vec{a} \neq \vec{0}$?

Ҳал. 1) дар $\vec{a} \neq \vec{0}$ $|k\vec{a}| < |\vec{a}| \Leftrightarrow |k| \cdot |\vec{a}| < |\vec{a}| \Leftrightarrow |k| < 1 \Leftrightarrow -1 < k < 1$;

2) дар $\vec{a} \neq \vec{0}$ $|k\vec{a}| > |\vec{a}| \Leftrightarrow |k| \cdot |\vec{a}| > |\vec{a}| \Leftrightarrow |k| > 1 \Leftrightarrow k < -1$ ё ки $k > 1$;

3) дар $\vec{a} \neq \vec{0}$ $|k\vec{a}| = |\vec{a}| \Leftrightarrow |k| \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}| \Leftrightarrow |k| = 1 \Leftrightarrow k = -1$ ё ки $k = 1$.

Ба $\vec{a} \neq \vec{0}$, $|\vec{a}| > 0$. Ба мо маълум аст, ки агар муодила ва нобаробариро ба ягон адади мусбат тақсим кунем, қиммати он тағйир намеёбад. *Ҷавоб:* ба 1) $-1 < k < 1$; 2) $k < -1$ ё ки $k > 1$; 3) $k = -1$ ё ки $k = 1$ мулоҳизаҳо дуруст аст.

2. Координатаҳои вектор. Дар ҳамворӣ системаи координатаҳои Декарт xOy дода шудааст, яъне аввали координатаҳо нуқтаи O, самти тирҳои координата ва воҳиди масштаб – порчаи воҳидӣ аст (расми 3).

Дар ин нуқтаи ихтиёрии A, абсциссаи худ x ва ординатааш y соҳиб мешавад: $A(x;\ y)$. Воҳиди вектори самташ ба тири Ox равона шудаи модулаш дорои як воҳид бударо бо $\vec{i}$ ҳаминтавр, воҳиди вектори бо тири Oy равонашударо бо $\vec{j}$ ишора мекунем (расми 3, *a*).

Бигзор дар ҳамворӣ нуқтаи A-и координатаҳояш $(x;\ y)$ додашуда бошад. Секунчаи OA_xA-ро аз назар мегузаронем. Дар ин секунча $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_x} + \overrightarrow{A_xA}$. Аммо $OA_x = x$, $A_xA = OA_y = y$ буданаш $\overrightarrow{OA_x} = x \cdot \vec{i}$, $\overrightarrow{A_xA} = y \cdot \vec{j}$ y мешавад. Аз ин муодилаи

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} \qquad (1)$$

-ро ҳосил мекунем. Ин нобаробарӣ (1) *ифодаи координатаи* вектор номида мешавад.

Пас, вектори аввалаш дар аввали координата, қуллааш дар нуқтаи A(x; y) бударо бо ёрии векторҳои самташон ба сӯи тирҳои координатии $\vec{i}$ ва $\vec{j}$ (1) равонашуда навиштан мумкин аст.

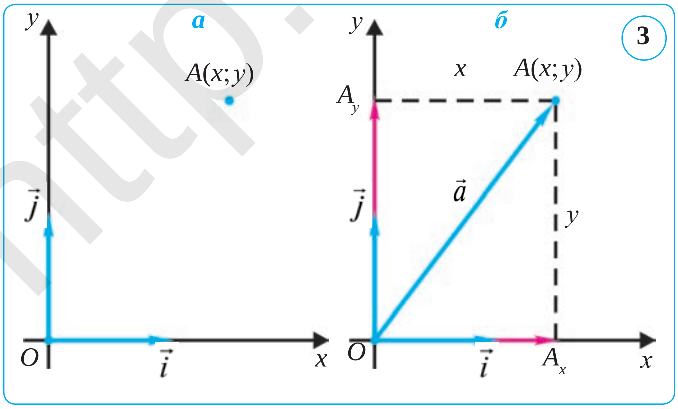
Дар ин чо чуфти векторҳои $(\vec{i}, \vec{j})$ векторҳои базис, ададҳои x ва y бошад, координатаҳои векторӣ $\vec{a}$ ном дорад. Агар ифода бо координатаи (1) вектор маълум бошад, вектор бо координатаҳояш дода шудааст мегӯянд ва кӯтоҳ дар шакли $\vec{a}(x;\ y)$ менависанд:

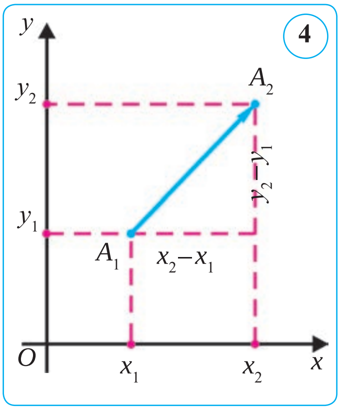
$$\vec{a}(x;\ y) = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}\,. \qquad (2)$$

Таъриф. *Агар $A_1(x_1;\ y_1)$ ва $A_2(x_2;\ y_2)$ бошад, ададҳои $x_2 - x_1$ ва $y_2 - y_1$ координатаи векторҳои $\overrightarrow{A_1A_2}$ меноманд* (расми 4).

Координатаҳои векторро бо ҳарфҳо ишорат намуда, ба дохили қавс навишта мешавад: $\overrightarrow{A_1A_2}\left(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1\right)$ дар баъзе координатаҳои векторҳо бо $\overline{(x_2 - x_1; y_2 - y_1)}$ низ ифода карда мешавад. Координатаҳои вектори сифри ба сифр баробар аст: $\vec{0}(0;0)$. Мувофиқи формулаи ёфтани масофаи нуқтаҳо, дарозии вектори $\vec{a}\left(a_1;\ a_2\right)$ бо формулаи $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ ҳисоб карда мешавад.

Қоида. *Барои ёфтани координатаҳои вектор кифоя аст, ки аз координатаҳои охири он мувофиқан координатаҳои аввали он тарҳ карда шавад.*


3


4

Масалан, координатаҳои вектори $\overrightarrow{OA}$ бо координатаҳои охири вектор А пурра муайян карда мешавад. Яъне охири вектор ба координатаҳо баробар мешавад.

Агар $A\ (x;\ y)$ бошад, $\overrightarrow{OA}(x; y) = \overline{(x; y)}$ мешавад.

Хосият ва аломатҳои векторҳои координатаҳояшон баробарро беисбот меоварем.

Теорема.

Векторҳои баробар мувофиқан координатаҳои баробар доранд ва баракс агар координатаҳои мувофиқи векторҳо баробар бошанд, векторҳо баробар мешаванд.

Хулосаи 1. Агар координатаҳои охири вектор бо координатаҳои вектор баробар бошад, дар он ҳолат аввали вектори додашуда дар аввали координатаҳо мешавад (расми 3, *б*).

Хулосаи 2. Агар якҷоя бо вектор $\vec{a}\left(a_1;\ a_2\right)$ координатаи нуқтаи охири он $B\,(x_2;\ y_2)$ додашуда бошад, дар он ҳолат барои ёфтани нуқтаи аввали вектор $A\,(x_1;\ y_1)$ аз координатаҳои нуқтаи B $\vec{a}\left(a_1;\ a_2\right)$ тарҳ кардани координатаҳои вектори a кифоя аст:

$$x_1 = x_2 - a_1;\quad y_1 = y_2 - a_2. \tag{1}$$

Хулосаи 3. Агар бо вектори $\vec{a}\left(a_1;\ a_2\right)$ координатаҳои нуқтаи аввали он $A\,(x_1;\ y_1)$ дода шуда бошад, дар он ҳолат барои ёфтани координатаи нуқтаи аввал-охири вектор $B\,(x_2;\ y_2)$ кифоя аст, ки ба координатаҳои нуқтаи A мувофиқан координатаҳои вектори $\vec{a}\left(a_1;\ a_2\right)$-ро ҷамъ кунем:

$$x_2 = x_1 + a_1;\quad y_2 = y_1 + a_2. \tag{2}$$

Масъалаи 2. Агар $A(-2; 1)$ ва $B(0; 4)$ ва $C(4; 1)$ бошад координати қуллаи чоруми параллелограмми $ABCD$-ро ёбед.

Ҳал. Агар чоркунҷаи $ABCD$ параллелограмм бошад, онгоҳ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC}$ мешавад. Бигзор $(x; y)$ координатаи нуқтаи D бошад. Координатаҳои векторҳои $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{DC}$-ро меёбем.

$$\overrightarrow{AB} = \overline{(0-(-2); 4-1)} = \overline{(2; 3)},\quad \overrightarrow{DC} = \overline{(4-x; 1-y)}.$$

Ҳаминтавр $4-x=2$ ва $1-y=3$, аз ин ҷо $x=2$ ва $y=-2$.

Ҷавоб: $D\,(2;\ -2)$.

Масъалаи 3. Агар нуқтаи $A\,(-1;\ 5)$ аввали вектори $\vec{a}(2; -3)$ бошад, координатаҳои B-и охири векторро ёбед.

Ҳал. Маълумотҳои додашударо ба таносуби охирин (2) гузошта, координатаҳои заруриро меёбем:

$$x_2 = -1 + 2 = 1,\quad y_2 = 5 + (-3) = 2.$$

Ҷавоб: $B\ (1;\ 2)$.

Масъалаи 4. Нуқтаҳои $A\,(-3;\ 0)$ ва $B\ (5;\ -4)$ дода шудааст. Координатаҳои вектори $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{BA}$-ро ёбед.

Ҳал. 1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}(5-(-3); -4-0) = \overrightarrow{AB}(8; -4) = \overline{(8; -4)}$;

2) $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = -\overline{(8; -4)} = \overline{(-8; -(-4))} = \overline{(-8;\ 4)}$. *Ҷавоб*: (8; −4); (−8; 4).

Дар хотир доред! *Агар координатаҳои ягон вектор маълум бошад, онгоҳ вектори ба он муқобилро ҳисоб накарда, аломати вектори додашударо ба муқобилаш иваз намудан кифоя аст.*

Савол, масъала ва супоришҳо

1. 1) Чаро зарби адад ба вектори додашуда меноманд?
2) Хосияти зарби ададро ба вектор гӯед.
3) Вектори воҳидӣ чист?

2. Вектори $\vec{a}$-ро кашед, ки дарозиаш ба 2 см баробар аст. Векторҳои 4$\vec{a}$, $-2\vec{a}$, $3\vec{a}$, $1{,}5\vec{a}$, $-1{,}5\vec{a}$-ро ёбед.

3. Дар кадом қимати k вектори $\vec{a}$ $(\vec{a} \neq \vec{0})$ ва $k\vec{a}$ аз сифр фарқ мекунад: 1) ҳамсамт; 2) муқобилсамт; 3) баробар?

4. Дар параллелограмми $ABCD$ O – нуқтаи буриши диагонал, K – миёнаҷои тарафи CD мебошад. Векторҳои $\overrightarrow{OA}$ ва $\overrightarrow{AK}$-ро бо ёрии векторҳои $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ва $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ ифода кунед.

5. Нуқтаи C – миёнаҷои тарафи AB:
1) Вектори $\overrightarrow{AC}$-ро бо вектори $\overrightarrow{CB}$-ро; 2) вектори $\overrightarrow{AB}$-ро бо вектори $\overrightarrow{CB}$; 3) вектори $\overrightarrow{AC}$-ро бо вектори $\overrightarrow{BA}$ ифода кунед.

6. Ифодаҳоро содда кунед:
1) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB})$; 2) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DA}$.

7. Нуқтаҳои 1) $A(-1;\ 4)$ ва $B(3;\ 9)$; 2) $A(2;\ -5)$ ва $B(1; -1)$; 3) $A(3;\ 2)$ ва $B(3; 2)$ дода шудааст. Координатаи вектори $\overrightarrow{AB}$-ро ёбед.

8. Агар: 1) $\overrightarrow{AB}(7;\ 24)$; 2) $A(0; -1)$ ва $B(3; -5)$; 3) $A(2; -4)$ ва $B(2; -1)$ бошад. Дарозии вектори $\overrightarrow{AB}$-ро ёбед.

9. Агар: 1) $A(-2;\ -3)$, $B(-3;\ -1)$; 2) $A(m;\ n)$, $B(-m;\ -n)$ бошад, координатоҳои вектори $\overrightarrow{BA}$ ба чӣ баробар мешавад?

10. Нуқтаҳои $A(-1;\ -3)$, $B(2;\ -4)$, $C(-3;\ -1)$ ва $D(5;\ 2)$ дода шудааст, векторҳои $\overrightarrow{AC}$ ва $\overrightarrow{DB}$ оё баробаранд?

11. Дарозии вектори $\vec{a}\,(m; 24)$ ба 25 баробар. M-ро ёбед.

12. Агар нуқтаи A (5; −3) аввали вектори $\vec{a}(-7;\ -8)$ бошад, координатаҳои охири ин вектор (B)-ро ёбед.

13. Агар: $A(-3; 1)$ ва $B(5; -5)$; 2) $A(12; 0)$ ва $B(0; -5)$ бошад, дарозии вектори $\overrightarrow{AB}$-ро ёбед.

40. АМАЛҲО ОИДИ ВЕКТОРҲОИ БО КООРДИНАТАҲО ДОДАШУДА

Бо амалҳои ҷамъ, тарҳ ва зарб векторҳои бо координатаҳо додашударо дида мебароем.

1. Ҷамъи вектор бо координатаҳои додашуда.

Таъриф. *Суммаи векторҳои* $\vec{a}(a_1;\ a_2)$ *ва* $\vec{b}(b_1;\ b_2)$ *ҷуфта, чунин вектори* $c_1=a_1+b_1$, $c_2=a_2+b_2$*-ро меноманд, ки координатаҳояш* $\vec{c}(c_1;c_2)$ *мебошад.*

Ҳаминтавр,

$\vec{a}(a_1;\ a_2)+\vec{b}(b_1;\ b_2)=\vec{c}(a_1+b_1;\ a_2+b_2)$ ё ки $\overline{(a_1;\ a_2)}+\overline{(b_1;\ b_2)}=\overline{(a_1+b_1;\ a_2+b_2)}$.

Барои ҳар гуна векторҳои $\vec{a}(x_1;\ y_1)$, $\vec{b}(x_2;\ y_2)$ *баробарии зерин ҷой дорад* $\vec{c}$ $(c_1;c_2)$.

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$; 2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$; 3) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.

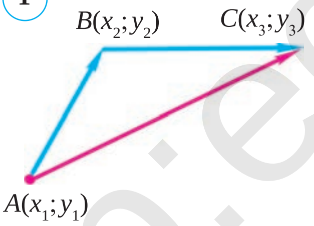
Барои исбот муқоисаи координатаҳои мувофиқи векторҳои қисми чап ва рости баробарӣ кифоя аст.

Теорема.

Нуқтаҳои *A, B, C* чӣ хеле, ки набошад, баробарии векторҳои $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ ҷой дорад.

Исбот. $A(x_1;x_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$ – нуқтаҳои додашуда (расми 1) векторҳои ҷамъшавандаро бо координатаҳояш ифода карда меёбем:

1



$$\overrightarrow{AB}(x_2-x_1;\ y_2-y_1),\ \ \overrightarrow{BC}(x_3-x_2;\ y_3-y_2).$$

Мувофиқи таъриф, барои муайяи кардани координатаҳои векторҳои ҷамъшаванда координатаҳои мувофиқи векторҳои $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{BC}$-ро ҷамъ мекунем:

$$x_2-x_1+x_3-x_2=x_3-x_1,\ \ y_2-y_1+y_3-y_2=y_3-y_1.$$

Ин координатаҳои вектори $\overrightarrow{AC}$ мебошад:

$$\overrightarrow{AC}(x_3-x_1;\ y_3-y_1).$$

Мувофиқи теоремаи векторҳои баробар: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

Теорема исбот шуд.

Аз расми 2 истифода бурда исботи дурусти баробарии болоиро ба худатон ҳавола менамоем.

Ҳаминтавр, *барои ҷамъи векторҳо координатҳои мувофиқи онҳоро ҷамъ кардан кифоя аст.*

2. Тарҳи векторҳои бо координатаҳо додашуда.

Таъриф. *Тарҳи вектори $\vec{a}(a_1;\ a_2)$ ва $\vec{b}(b_1; b_2)$ гуфта чунин вектори $\vec{c}$ $(c_1; c_2)$ -ро меноманд, ки суммаи он бо вектори $\vec{b}$ ба вектори а баробар аст: $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$ ·*

Аз ин ҷо координатаҳои вектори $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ -ро меёбем

$$c_1 = a_1 - b_1,\ c_2 = a_2 - b_2.$$

Барои тарҳи векторҳои бо координатҳояш додашуда координатҳои мувофиқи онҳоро тарҳ кардан кифоя,

яъне $\vec{a}(a_1;\ a_2) - \vec{b}(b_1;\ b_2) = \vec{c}(a_1 - b_1;\ \ a_2 - b_2)$ ё ки

$$\overline{(a_1; a_2)} - \overline{(b_1; b_2)} = \overline{(a_1 - b_1; a_2 - b_2)}.$$

3. Зарби векторҳои бо координатаҳо додашуда ба адад.

Таъриф. *Зарби вектори $\vec{a}(a_1,\ a_2)$ ба адади k гуфта вектори $\overline{(ka_1;\ ka_2)}$ -ро меноманд, яъне $k\vec{a} = \overline{(ka_1;\ ka_2)}$.*

Мувофиқи таъриф, $\overline{(a_1;\ a_2)} \cdot k = k\overline{(a_1;\ a_2)}$.

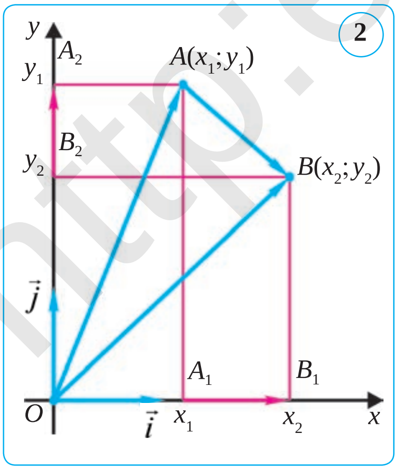
Пас, *барои зарб намудани вектор ба адад (ё ки адади к -ро ба вектор $\vec{a}$ зарб намудан) координатаҳои онро ба адад зарб кардан кифоя аст.*

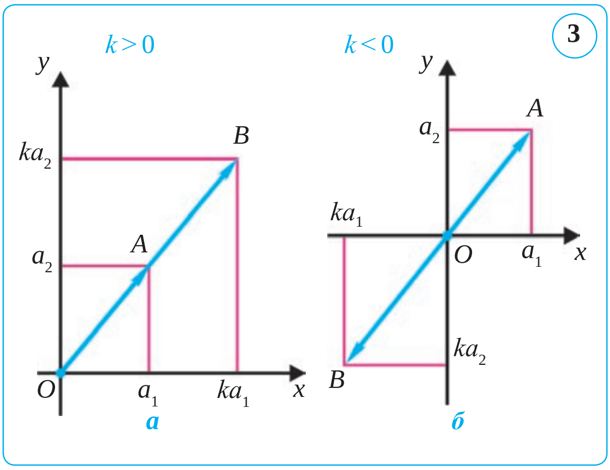
Аз расми 3 истифода бурда таърифи зарби вектор ба ададро санҷида бинед. Хосиятҳои он ба координатаҳо ҳам ҷой дорад.

Масъалаи 1. Суммаи векторҳои $\vec{a}(3;\ 5)$ ва $\vec{b}(2;\ 7)$ -ро ёбед.

Ҳал. $\vec{a}(3;\ 5) + \vec{b}(2;\ 7) = \overline{(3;\ 5)} + \overline{(2;\ 7)} = \overline{(3+2;\ 5+7)} = \overline{(5;\ 12)}$.

Пас, координатаҳои $\vec{a} + \vec{b}$ ба (5; 12) баробар аст.





Масъалаи 2. Фарқи векторҳои $\vec{a}(-3;\ 5)$ ва $\vec{b}(3;\ -3)$-ро ёбед.

Ҳал: $\vec{a}(-3;\ 5)-\vec{b}(3;\ -3)=\overline{(-3;\ 5)}-\overline{(3;-3)}=\overline{(-3-3;\ 5-(-3))}=\overline{(-6;\ 8)}$.

Ҷавоб: $\overline{(-6;\ 8)}$.

Масъалаи 3. Вектори ба вектори $\vec{a}(-3;\ 5)$ муқобил $\vec{b}$-ро ёбед.

Ҳал. $\vec{a}$ Вектори ба вектори муқобил $\vec{b}$ мешавад.

$$\vec{b}=-\vec{a}=-1\cdot\vec{a}=-1\cdot\overline{(3;\ 5)}=\overline{(-3;\ -5)}.$$

Ҷавоб: $\vec{b}(-3;\ -5)$ ё ки $\overline{(-3;-5)}$.

Масъалаи 4. Агар $\vec{a}(-3;\ 4)$, $\vec{b}=4\vec{a}$ бошад, координатаҳои вектори 4-ро ёбед.

Ҳал. $\vec{b}=4\vec{a}=4\cdot\overline{(-3;\ 4)}=\overline{(4\cdot(-3);\ 4\cdot 4)}=\overline{(-12;\ 16)}$.

Ҷавоб: $\vec{b}(-12;16)$ ё ки $(-12;16)$.

Савол, масъала ва супоришҳо

1. 1) Координатаҳои ду вектор чӣ хел ҷамъ карда мешавад?
2) Координатаҳои ду вектор чӣ хел тарҳ карда мешавад?
3) Ду вектори координатаҳояш додашуда чӣ хел зарб карда мешавад?

2. Агар $\vec{a}(-4;\ 8)$ ва $\vec{b}(1;\ -4)$ бошад: 1) сумма; 2) фарқи координатаҳои векторҳоро ёбед.

3. Векторҳои $\vec{a}(-2;\ 6)$ ва $\vec{b}(-2;\ 4)$ дода шудааст. Координатаи векторҳои 1) $\vec{a}+\vec{b}$; 2) $\vec{a}-\vec{b}$; 3) $\vec{b}-\vec{a}$; 4) $-\vec{a}-\vec{b}$-ро ёбед.

4. Векторҳои $\vec{a}(2;\ 3)$ ва $\vec{b}(-1;\ 0)$ дода шудааст. Координатаи векторҳои 1) $2\vec{a}+\vec{b}$; 2) $\vec{a}-3\vec{b}$; 3) $2\vec{b}-\vec{a}$-ро ёбед.

5. Векторҳои $\vec{a}(2;-3)$ ва $\vec{b}(-2;-3)$ дода шудааст. Координатаи векторҳои зеринро: 1) $\vec{c}=\vec{a}-2\vec{b}$; 2) $\vec{c}=-2\vec{a}+\vec{b}$; 3) $\vec{c}=-3\vec{a}-2\vec{b}$-ро ёбед.

6. Векторҳои $\vec{a}=-2\vec{i}-3\vec{j}$ ва $\vec{b}=-2\vec{j}$ дода шудааст. Координатаи векторҳои 1) $\vec{c}=2\vec{a}-\vec{b}$; 2) $\vec{c}=-4\vec{a}+3\vec{b}$; 3) $\vec{c}=-3\vec{a}+4\vec{b}$-ро ёбед.

7. Векторҳои $\vec{a}=-2\vec{i}+2\vec{j}$ ва $\vec{b}=3\vec{i}$ дода шудааст. Координатаи векторҳои: 1) $\vec{c}=-3\vec{a}-2\vec{b}$; 2) $\vec{c}=4\vec{a}-\vec{b}$-ро ёбед.

8. Векторҳои $\vec{a}=-2\vec{i}-3\vec{j}$ ва $\vec{b}=2\vec{j}$ дода шудааст. Координатаи векторҳои: 1) $\vec{c}=\vec{a}-2\vec{b}$; 2) $\vec{c}=\vec{a}-5\vec{b}$-ро ёбед.

9. Векторҳои $\vec{a}=-3\vec{i}$ ва $\vec{b}=-\vec{i}+2\vec{j}$ дода шудааст координатаҳои векторҳои: 1) $\vec{c}=-2\vec{a}+\vec{b}$; 2) $\vec{c}=-\vec{a}-\vec{b}$-ро ёбед.

41. ТАЛҚИНИ ФИЗИКӢ ВА ГЕОМЕТРИИ ВЕКТОР, ҲАЛЛИ МАСЪАЛАҲОИ ГЕОМЕТРӢ БО УСУЛИ ВЕКТОР

1. Талқини физикӣ ва геометрии вектор.

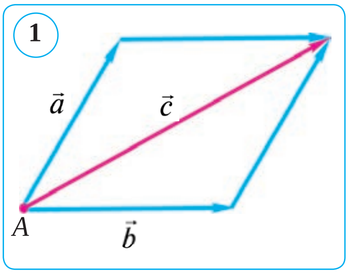
1. Қувваи ба ҷисм таъсиркунанда бо векторе тасвир мешавад, ки самти он бо самти қувваи ҳаракат, модулаш ба бузургии мутлақи қувва баробар аст. Аз таҷриба маълум аст, ки амали ду ва ё якчанд қувваҳои ба ҷисм гузоштаშудаpo, чун амали қувваи баробар таъсири ба суммаи ҳамаи қувваҳои ба ҷисм таъсиркунанда баробар тасаввур кардан мумкин аст. Дар расми 1 ду қувваи дар нуқтаи A бо векторҳои $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ ба ҷисм таъсиркунанда тасвир ёфтааст. Таъсиркунандаи баробарии ин қувваҳо бо вектори

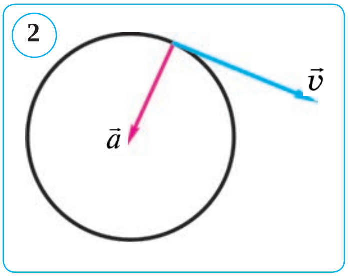
$$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b} \quad \text{тасвир меёбад.}$$

Тасвир кардани қувва дар шакли суммаи қувваҳои дар ду самти додашуда таъсиркунанда, *паҳн кардани қувва аз рӯи самтҳо* номида мешавад.

2. Дар физика *ҳаракати пешхаттаи* ҷисм гуфта ҳаракатеро меноманд, ки дар он ҳамаи нуқтаҳои ҷисм дар фосилаи вақти якхела дар самти якхела ба як масофа мегузарад. Ҳамин тавр, *вектори гузариш* дар физика ба маънои вектори ба китоби дарсии мо қабул карда будааст. Фарқ ҳамин, ки дар дарсҳои геометрия фақат дар бораи векторҳои ҳамворӣ сухан меравад, физикҳо бошанд аз ибтидо оид ба векторҳои фазовӣ ҳам мулоҳиза меронанд.

3. Дар физика калимаи «вектор» дар маънои васеъ истифода мешавад. Масалан, суръатро вектор мегӯянд. Аммо, дарозии вектори геометрӣ бо метр, қимати мутлақи суръат бошад, бо м/с (метр тақсими сония) чен карда мешавад, ки аз ин ҷо вектор набудани қимати дар геометрия қабул шудаи суръат бармеояд. Дар геометрия мо суръатро на вектор, балки бузургии векторӣ меномем.





Дар ин ҷо, ба ҷамъ кардани бузургиҳои вектор, векторҳои геометрии онҳоро тасвиркунандаро ҷамъ, зарби бузургиҳои вектор ба адад бошад, векторҳои геометрии онҳоро тасвиркунандаро зарб бояд кард.

Як мисол меорем. Дар расми 2 вектори $\vec{v}$ суръати ҳаракати даврзании вектори a бошад, мумкин суръатнокиро ифода кунад. Аммо, ин векторҳоро аз нуқтаи назари физикӣ ҷамъ кардан маъно надорад. Бо вуҷуди ҳамин, дар физика суръат ё суръатнокиро вектор меноманд. Агар гап дар бораи чӣ буданаш дақиқ тасаввур карда шавад, чунин озодии сухан ба умумият зарар намерасонад. Ба монанди ҳамин, мо ҳам дарозии тарафи секунҷаро барои мухтасарӣ, ба таври оддӣ тарафи он номидем ва ҳоказо.

2. Ҳалли масъалаҳои геометрӣ бо усули вектор.

Ҳангоми ҳалли масъалаҳои геометрӣ ва исботи теоремаҳо аз векторҳо васеъ истифода бурда мешавад.

Масъалаи 1. Нуқтаи *C* миёнаҷои порчаи *AB* нуқта *O* – бошад, нуқтаи дилхоҳи ҳамворист, исбот кунед, ки $\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$ аст (расми 3, *а*).

Ҳал. Усули 1. Мувофиқи қоидаи секунҷа:

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC} \quad \text{ва} \quad \overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}\,.$$

ин ду баробариро ҷамъ намуда, ҳосил мекунем:

$$2\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}).$$

Аз барои нуқтаи *C* миёнаҷои порчаи *AB* буданаш, $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}$ чунки суммаи векторҳои муқобил ба нул сифр баробар аст.

Ҳаминтавр ба инҳо соҳиб мешавем:

$$2\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB} \quad \text{ё ки} \quad \overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\,.$$

Усули 2. Секунҷаи *OAB*-ро то параллелограмм пур мекунем (расми 3, *б*). $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}$ (мувофиқи қоидаи параллелограмм диагонали параллелограмм дар нуқтаи буриш ба ду қисми баробар тақсим мешавад, бинобар $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CD}$ ва $\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OC}$.

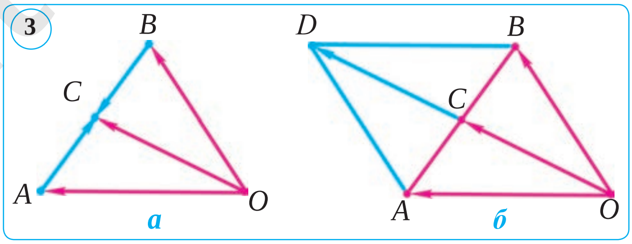
Пас, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OC}$, аз ин ҷо:

$$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\,.$$

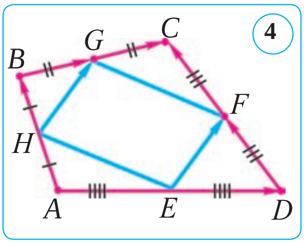
Масъалаи 2. Исбот кунед, ки миёнаҷои тарафҳои чоркунҷаи ихтиёрии *ABCD* қуллаҳои параллелограмм мебошад.

Ҳал. E, F, G, H – мувофиқи миёнаҷои тарафҳои *AB*, *BC, CD* ва *DA* бошад (расми 4). Мувофиқи аломати 3-юми параллелограмм, масъалаи исботи параллелӣ, баробарӣ ва дарозии парчаҳои *EF* ва *HG* кифоя аст. Дар забони векторӣ, ин $\overrightarrow{EF}$ ва $\overrightarrow{HG}$ аз исбот намудани баробараии векторҳо иборат аст.

3



4



Дар ҳақиқат,

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right),\ \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DG} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}\right).$$

Ба ғайр аз ин, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$ буданаш маълум. Бинобар ин, $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$. Аз ин ҷо, EF ва HG доир ба дарозӣ параллел ва баробарии парчаҳо бармеояд.

Пас, миёнаҷои тарафҳои чоркунҷаи дилхоҳи $ABCD$ қуллаҳои параллелограмм мебошад. Исботи ҳамин талаб карда шуда буд.

Аз исботи болоӣ маълум мешавад, ки ҳалли масъала ва теоремаҳо бо усули вектор ба ҳалли масъалаҳои алгебравӣ монанд мебошад. Ин як намуди ҳалли масъала буд, ки он аз се зина иборат аст.

Зинаи 1. Шарти масъаларо ба намуди вектор навиштан ва векторҳои қулайро (монанди – номаълумро дохил намуда, муодилаи алгебравӣ тартиб додан).

Зинаи 2. Бо ёрии воситаҳои алгебравии вектор, шарти масъала чунон иваз карда мешавад, ки масъаларо бо намуди вектор ҳал намудан имкон шавад (монанди – ҳалли муодилаи алгебравӣ).

Зинаи 3. Муносибатҳои гирифта шудан вектор аввал бо амалҳо талқин гардид (монандӣ – ҷавоброро баъд аз ҳалли муодилаи алгебравӣ нависед).

Савол, масъала ва супоришҳо

1. Дарозии медианаи CC_1 – и секунҷаи қуллааш дар нуқтаҳои $A(3;1)$, $B(1;3)$ ва $C(0;2)$ воқеъ бударо ёбед.

2. Нуқтаи K миёнаҷои тарафи AD параллелограмми $ABCD$. Вектори $\overrightarrow{KC}$ -ро бо ёрии векторҳои $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{AD}$ ифода кунед.

3. Нуқтаҳои $A(2;\ 4)$, $B(3;\ 6)$ ва $C(6;\ 14)$ дода шудааст. Координатаи векторҳои $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ -ро ёбед.

4. Координатаҳои ду қуллаи муқобили квадрати $ABCD$ дода шудааст $A(0;4)$ ва $C(6;0)$. Координатаи ду қуллаи боқимондаи онро ёбед.

5. Агар нуқтаи $A(-2;\ 3)$ аввали вектори $\vec{a}\,(-3;\ 8)$ бошад, координатаи $(B(x;y))$ охири векторро ёбед.

6. Исбот кунед, ки хати миёнаи трапетсия ба асосҳои он параллел буда, ба нисфи дарозии онҳо баробар аст.

7. Векторҳои $\vec{a}\,(1;\ 3)$, $\vec{b}\,(-2;4)$, $\vec{c}\,(-1;\ -3)$, $\vec{d}\,(-4;\ 4)$, $\vec{p}\,(3;\ 9)$, $\vec{q}\,(-1;\ 2)$ дода шудааст. Аз байни онҳо: 1) векторҳои ҳамсамт; 2) якҷуфт векторҳои муқобилсамтро ёбед.

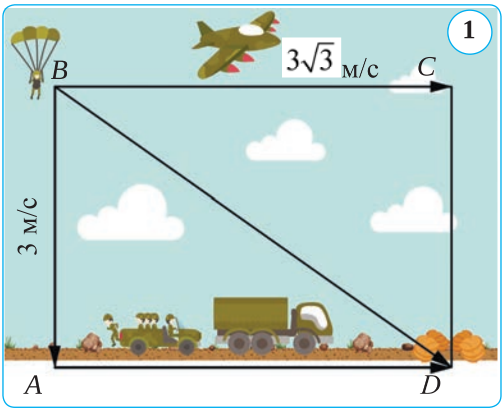
8. $ABCD$ ромб нуқтаи N миёнаҷои тарафи CD. Вектори $\overrightarrow{AN}$ -ро бо воситаи векторҳои $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{AD}$ ифода кунед.

9. Параллелограмми $ABCD$ ва нуқтаи O-и дар он воқеъ набуда дода шудааст. Вектори $\overrightarrow{OD}$ -ро бо векторҳои $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ ва $\overrightarrow{OC}$ ифода кунед.

42. МАШҚИ АМАЛӢ ВА ТАТБИҚ

МАТЕРИАЛҲОИ ИЛОВАГИИ КОМПЕТЕНСИЯИ АМАЛИИ РИВОҶДИҲАНДА

1. Масъалаҳо доир ба татбиқи амалии векторҳо.



Масъалаи 1. Парашютчӣ ба замин бо суръати 3 м/с фаромада истодааст. Шамол онро бо суръати $3\sqrt{3}$ м/с тела медиҳад Дар ин ҳолат парашютчӣ ба замин дар таҳти кадом кунҷ мефарояд (расми 1).

Ҳал. Бигзор парашютчӣ дар нуқтаи B бошад ба ӯ қувваи вазинии $\overrightarrow{BA}$ ва қувваи шамоли $\overrightarrow{BC}$ баробар таъсиркунанда $\overrightarrow{BD}$ мебошад ва $ABCD$– росткунҷа, AB – вертикал, пас, қимати кунҷи $\angle ADB$ – ро ёфтан лозим.

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ ва $BC = AD$ ($ABCD$ – росткунҷа $\angle A = 90°$). Мувофиқи теоремаи Пифагор: $BD^2 = AD^2 + AB^2$, Пас:

$$BD = \sqrt{AD^2 + AB^2} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 3^2} = \sqrt{27+9} = \sqrt{36} = 6 \text{ (см)}.$$

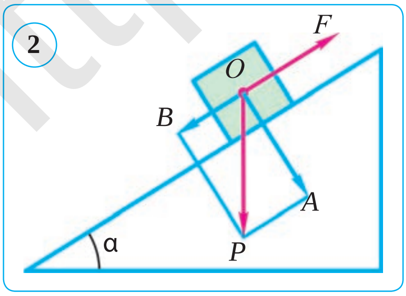
Ҳаминтавр, дар секунҷаи ABD 3 см-*а* гипотенузаи BD аз катети AB ду маротиба калон будааст, пас, $AB = 0{,}5BD$ мувофиқи хосияти катети муқобили кунҷи бузургии $\angle AOB$ 30° ё ки $\sin\angle ADB = 30°$ аз ин ҷо $\sin\angle ADB = \frac{AB}{BD} = 0,5$, аз ин $\angle ADB = 30°$ ҳосил мешавад.

Ҷавоб: $\angle ADB = 30°$.

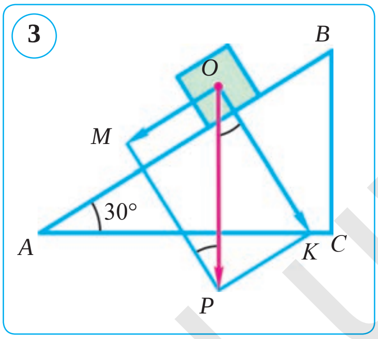
Масъалаи 2. Парашютчӣ ба замин бо суръати 4 м/с фаромада истодааст, шамол бошад, онро бо суръати $4\sqrt{3}$ м/с тела дода истодааст. Дар ин ҳолат парашютчӣ бо замин дар таҳти кадом кунҷ мефарояд (ба расми 1 ниг.). Масъаларо мустақил ҳал кунед.

Масъалаи 3. Бори вазнаш P аз нишебӣ барои ба пасти наафтиданаш онро бо кадом қувваи F нигоҳ дошта истоданаш лозим (расми 2).

Ҳал. Ба маркази вазнинӣ бар нуқтаи O ба қувваи $\overrightarrow{P}$ гузашта шудааст. Вектори $\overrightarrow{P}$-ро байни ҳам перпендикуляр бо ду равиш чун дар расми 2 нишондодашуда мегузаронем. Қувваи $\overrightarrow{OA}$, ки ба нишебии моил перпендикуляр аст, аз ғеҷидани бор роҳ намедиҳад. Қувваи $\overrightarrow{F}$ -и борро нигоҳ доранда ба қувваи ба он муқобил равона шудаи $\overrightarrow{OB}$ аз ҷиҳати миқдор баробар буданаш мумкин. Аз он ба чунин хулоса меоем: $F = P\sin\alpha$.



Масъалаи 4. $P = 50$ N бори ба ҳамворӣ моил хобидааст. Агар кунҷи моили ҳамворӣ нисбат ба горизонт ба 30° баробар бошад, қувваи фишор ва ғечишро ёбед.


3

Дода шудааст: $P = 50$ N, $\angle A = 30°$.

Ёфтан лозим: $F_{\text{ғечиш}}, F_{\text{фишор.}}$

Ҳал. 1) Қувваи $\vec{P}$-ро ба дуто: бо равиши қувваи ғечиш параллел инчунин қувваи фишорӣ ба ҳамворӣ моил паҳн мекунем.

2) Параллелограмм месозем $\overrightarrow{OP}$ вектор диагонали он $OM \| AB$, $OK \perp AB$, $PK \| AB$, $PM \perp AB$, $\overrightarrow{OM} = \vec{F}_{\text{ғечиш}}$, $\overrightarrow{OK} = \vec{F}_{\text{фишор}}$-ро мегузаронем (расми 3).

3) $\angle OPM = \angle A = 30°$ ($OP \perp AC$, $PM \perp AB$).

4) Аз секунҷаи росткунҷаи OPM:

$OM = 0{,}5OP = 0{,}5 \cdot 50 = 25$; $F_{\text{ғечиш.}} = 25$ N.

5) Аз секунҷаи росткунҷаи OPK мувофиқи теоремаи Пифагор он

$$OK = \sqrt{OP^2 - PK^2} = \sqrt{OP^2 - OM^2} = \sqrt{50^2 - 25^2} = \sqrt{25^2 \cdot (4-1)} = 25\sqrt{3} \approx 43,$$

яъне $F_{\text{ғечиш}} \approx 43$ N. *Ҷавоб*: $F_{\text{ғечиш}} = 25$ N, $F_{\text{фишор}} \approx 43$ N.

Масъалаи 5. Таҷриба нишон медиҳад, ки агар ба ҷисми A дуто қувва a ва b таъсир расонида истода бошад, онгоҳ таъсири онҳо ба якто c таъсири қувва баробар шуда, ки c – қувва ба диагоналҳои параллелограмм, ки аз порчаҳои a ва b сохта шудааст, тасвир карда мешавад: қувваҳои баробар таъсир кунанда мувофиқи „*қоидаи параллелограмм*“ ёфта мешавад.

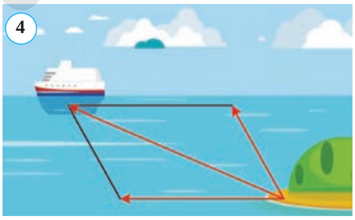
Масъалаи ба киштӣ шино карда истода (расми 4) ё ки ба воситаи қайиқ бурида гузаштан (расми 5) ба адади буриши кӯндаланг ва ба равиши ҷараёни дарё равона шуда ду қувва таъсир мекунад. Ҳамон қувваро дар расм ишора кунед.

Масъалаи ба ҳамин масъала монанд тартиб диҳед ва бо расмҳои мувофиқ ифода кунед.

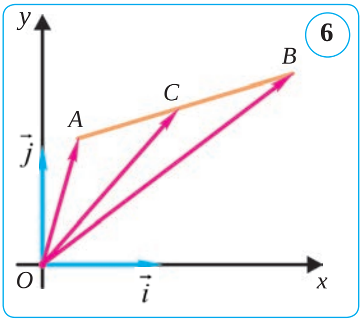
2. Ёфтани координатҳои системаи маркази вазнинӣ.

Масъалаи 6. Ба нисбати додашуда тақсим кардани порча.

Агар $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$ бошад, нуқтаи C порчаи AB-ро ба нисбати λ тақсим мекунад (расми 6). Агар кординатаҳои охири порча ($A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$) маълум бошад, координатаҳои нуқтаи C x, y-ро ёбед.


4


5

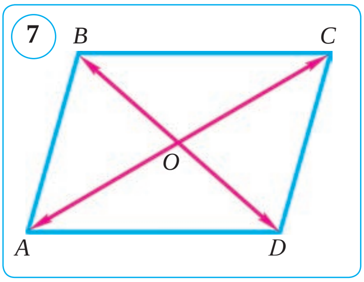


Ҳал. Векторҳои $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}$ ва $\overrightarrow{OB}$-ро месозем. $\overrightarrow{OA}(x_1;\ y_1)$, $\overrightarrow{OC}(x;\ y)$, $\overrightarrow{OB}(x_2;\ y_2)$, $\overrightarrow{AC}$ $(x-x_1;\ y-y_1)$, $\overrightarrow{CB}(x_2-x;\ y_2-y)$ ва векторро ба адади λ зарб намудан ва координатаҳои онро ба адади λ зарб намуда, ба баробариҳои зерин соҳиб мешавем:

$$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}\left(x-x_1;\ y-y_1\right)=$$

$$=\lambda\overrightarrow{CB}\left(x_2-x;\ y_2-y\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x-x_1=\lambda(x_2-x); \\ y-y_1=\lambda(y_2-y). \end{cases}$$

Пас, $x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$, $y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$.



Масъалаи 7. Ба нуқтаҳои $M_1(x_1;\ y_1)$ ва $M_2(x_2;\ y_2)$ мувофиқан борҳои ба m_1 ва m_2 баробар гузоштаанд. Координатаҳои маркази системаи вазнинии ин массаҳо (нуқтаи C)-ро ёбед.

Ҳал. Маркази вазнинии C – дар порчаи M_1M_2 инчунин ба нуқтаҳои M_1 ва M_2 гузашта аз массаҳои m_1 *ва* m_2 дар масофаи таносуби муқобил мехобад, яъне дар нуқтаи маркази система ду нуқтаи моддии C порчаи M_1M_2-ро ба нисбати $\lambda=\dfrac{m_2}{m_1}$ ҷудо мекунад.

Қимати λ-ро ба формулаҳои масъалаи 5 гузошта баъд аз табдилдиҳиҳо координатаи нуқтаи C-ро меёбем:

$$x_C=\frac{x_1m_1+x_2m_2}{m_1+m_2}, \quad y_C=\frac{y_1m_1+y_2m_2}{m_1+m_2}.$$

3. Доир ба исботи муносибатҳои векторӣ.

Масъалаи 8. Параллелограмми *ABCD* ва нуқтаи буриши диагоналҳо – O дода шудааст. Исбот кунед, ки $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$ аст.

Дода шудааст: *ABCD* – параллелограмм, *O* – *AC* ва *BD* нуқтаи буриши диагоналҳои, $AO=OC$, $BO=OD$ (расми 7).

Исбот кардан лозим: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$.

Исбот: Якчанд усули исбати ин баробарии векториро меоварем.

Ба вектори сифрӣ баробар будани фарқро дида мебароем:

1) $\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)-\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\right)=\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right)+\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}\right)=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BB}=\vec{0}.$

Ҳангоми иваз кардани шаклҳо аз қоидаҳои аз сумма тарҳ кардани сумма, қонуни гурӯҳбандӣ, қоидаи секунча $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$. Мувофиқи таърифи вектори сифрӣ (тарафҳои муқобил ва ҳамсамти паралелограмм) истифода мешавад.

2) $\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)-\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\right)=\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD}\right)+\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\right)=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DD}=\vec{0}.$

Тарафҳои муқобилхобидан параллелограмм ва векторҳои ҳамсамт ва қонуни гуруҳбандӣ: $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$ аз таърифи векторҳои сифрӣ истифода шуд.

43 – 44. 3-КОРИ НАЗОРАТӢ. ИСЛОҲ НАМУДАНИ ХАТОГИҲО

1. Муодилаи аз нуқтаҳои $A(-2;3)$ ва $B(4;0)$ гузарандаро тартиб диҳед.
2. Агар: $C(4;9)$ ва $R=5$ бошад, муодилаи давраи марказаш нуқтаи C ва радиусаш R-ро созед.
3. Векторҳои $\overset{\sqcup}{a}(1;0)$, $\vec{b}(1;2)$ ва $\overset{\sqcup}{c}(1;3)$ дода шудааст. Координатаҳои векторҳои $\vec{a}-\vec{b}$ ва $\vec{b}+\vec{c}$-ро ёбед.
4. Векторҳои $\overset{\sqcup}{c}(-1;0)$ ва $\vec{d}(1;2)$ дода шудааст. Координатаҳои векторҳои $2\vec{c}+3\vec{d}$-ро ёбед.

ТЕСТИ 3

Худро санҷида бинед!

1. Хати рости аз нуқтаҳои $A(0;\ -1)$, $B(1;\ 0)$ гузаронда ба кадом тараф воқеъ аст?
   A) III, IV, I; B) I, II, III; D) II, III, IV; E) II, IV.
2. Хати рости аз нуқтаҳои $A(-2;\ 0)$, $B(-2;\ 2)$ гузаранда, ба кадом чоряк воқеъ аст.
   A) I, II, III; B) II, III; D) II, IV; E) III, IV, I.
3. Координатҳои миёнаҷои порчаи AB-ро ёбед, ки нӯгҳояш дар нуқтаҳои $A(-4;\ 0)$, $B(-4;\ 4)$ воқеъ аст.
   A) $(-2;\ 0)$; B) $(0;\ 2)$; D) $(2;\ -4)$; E) $(-4;\ 2)$.
4. Координатаҳои миёнаҷои тарафи AC-и секунҷа, ки нӯгҳояш дар нуқтаҳои $A(-2;\ 0)$, $B(0;\ 2)$, ва $C(2;\ 0)$ воқеъ аст, ёбед.
   A) $(-1;\ 1)$; B) $(1;\ 0)$; D) $(0;\ 0)$; E) $(0;\ 1)$.
5. Векторҳои $\vec{a}(-3;\ 1)$ ва $\vec{b}(5;-6)$ дода шудааст. Координатаҳои вектори $\vec{c}=\vec{b}-3\vec{a}$ -ро ёбед.
   A) $(14;\ -9)$; B) $(4;\ -3)$; D) $(14;\ -3)$; E) $(9;\ 3)$.
6. Нуқтаҳои $A(-3;\ 0)$ ва $B(-5;\ 4)$ дода шудааст. Координатаҳои вектори $\overline{BA}$-ро ёбед.
   A) $(-8;\ -4)$; B) $(-8;\ 4)$; D) $(2;\ -4)$; E) $(8;\ -4)$.

Забони англисиро меомӯзем!

Муодилаи давра– circle equation
Муодилаи хати рост – straight-line equation
Векторҳои коллинеарӣ – collinear vectors
Дарозии вектор– vector length

Векторҳои баробар – equal vectors
Скаляр – scalar
Векторҳои муқобил – opposite vectors
Вектори воҳидӣ – unit vector
Ҳамсамт – equivalent

Маълумотҳои таърихӣ

Рено Декарт
(1596–1650)

1. Системаи координатаҳои росткунҷаро олими франсуз Рене Декарт ба фан дохил кардааст. Системаи координатии росткунҷаро баъзан системаи координатии Декартӣ низ мегӯянд.

Рене Декарт (1596 – 1650) – файласуф, математик, физик ва физиологи франсуз дар коллеҷи La-Flesh иеруит таълим гирифта, забонҳои юнонӣ ва лотинро омӯхтааст. Философияи Декарт бо математика, космогония ва физика вобаста аст. Математика, асосҳои геометрияи аналитикӣ, намудҳои системаи координатии росткунҷа бо номи ӯ гуфта мешавад. Декарт дар тараққиёти фалсафа ва фани асри XVII-XVIII саҳми босазое гузоштааст.

Дар асри XVII бо шарафи кори Декарт дар соҳаи математика инчунин дар соҳаи геометрии давраи такмилсозии координатаҳо, яъне методи координатаҳо ба вуҷуд омад. Номаълумҳо бо *x, y, z*. То имрӯз барои ишорати кунҷҳо ва коеффисиентҳо, дараҷаҳо ҳарфи лотинии *a, b, c* ва дараҷаҳои x^2, y^2, z^2 хизмати Декарт калон аст.

Ба математика, аз он ҷумла ба геометрия низ мафҳуми вектор ба қарибӣ дохил гардидааст. 2. Дар миёнаҳои асри XIX дар як вақт дар як қатор асарҳои математикҳо мафҳуми вектор дучор меояд. Истифодаи векторҳоро дар ҳамворӣ бори аввал соли 1835 олими италиягӣ **Белливитис** (1803-1880) оғоз кардааст. Ғайр аз ин, **К. Гаусс** (1777–1855) соли 1831 дар асари «Назарияи муқоисаи биквадратӣ», **Ю. Арган** (1768–1822) ва **К. Вессел** (1745–1818) доир ба тасвири геометрии ададҳои комплексӣ мафҳуми векторро истифода кардааст. Ниҳоят, **В. Гамилтон** (1805–1865) ва **Р. Грассман** (1854–1901) амалҳои бо векторҳо иҷро кардаи худро дар асарҳояшон овардаанд. Бори аввал, Гамилтон фарқи бузургиҳои векторӣ ва скаляриро баён кардааст. Дар ҳамон кори Гамилтон мафҳумҳои «*скаляр*» ва «*вектор*» ба вуҷуд оварда шудааст. Мафҳуми «*вектор*»-ро Гамилтон аз калимаи vehere – «*партофтан*», «*гузаронидан*» гирифтааст (1845), вектор – «*самт*» аст.

Бори аввал Арган соли 1806 векторҳоро бо ҳарфҳои дар болояш ақрабакдор ишора кардааст. Барои аввал ва охири векторро нишон додан онро дар шакли *AB* **А. Муобилис** (1790–1868) ишора кардааст. Грассман векторҳоро «порча» ном дода, онро векторҳои воҳидии e_1, e_2 нишон дода, дар шакли $x_1e_1+x_2e_2$ тасвир кардани векторҳоро тавсия кардааст.

БОБИ IV
МАСОҲАТ

§ 9. МАСОҲАТИ БИСЁРКУНҶА

45. МАФҲУМ ДАР БАРОИ МАСОҲАТ

1. Мафҳум дар барои масоҳат.

Масъалаи муайян кардани масоҳати шаклҳо таърихӣ дерина дорад. Ин масъаларо фаъолияти амалии инсонҳо тақозо кардааст. Хар яки мо дар зиндагии рӯзмарра дар бораи масоҳат андаке тасаввурот дорем. Акнун ба муайян кардани мафҳум дар бораи сатҳ шакл ва ёфтани усулҳои ченкунии он машғул мешавем.

Агар шакли геометриро ба секунҷаҳои ҳамвори шумораашон охирнок ҷудо кардан мумкин бошад, ин шаклро, *шакли содда* меноманд.

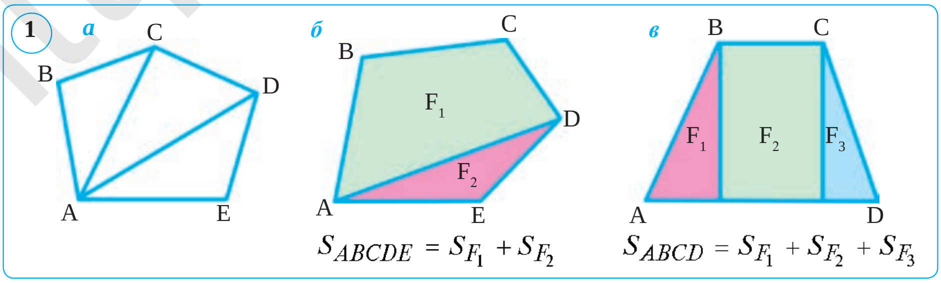
Мо секунҷаи ҳамвор гуфта, қисми бо секунҷа иҳоташудаи ҳамвориро меномем. Бисёркунҷаи барҷаста мисоли ин гуна фигураҳо мебошад. Бо ёрии ҳамаи диагоналҳои аз қуллаи дилхоҳи он баромада, онро ба секунҷаҳои бешумор тақсим кардан мумкин аст (расми 1, *а*).

Масоҳат – миқдори мусбат (бузургӣ) буда, қимати ададии он дорои чунин хосиятҳост (аксиомаҳост):

Хосияти 1. *Секунҷаҳои баробар дорои масоҳати баробаранд.*

Хосияти 2. *Агар бисёркунҷаи содда аз якчанд бисёркунҷаҳо ташкил ёфта бошад, он гоҳ масоҳати он ба суммаи масоҳатҳои ин бисёркунҷаҳо баробар мешавад.*

Бисёркунҷаи *F* ҳамдигарро аз бисёркунҷаҳои иҳотанашаванда ташкил додааст гуфтан аст: 1) *F* ин аз суммаи бисёркунҷаҳо иборат аст ва 2) аз ин бисёркунҷаҳо ҳеҷ кадом дутоаш ба нуқтаҳои умумии дохилӣ соҳиб нест. Масалан, дар расми 1, -*б* ва 1, *в* бисёркунҷаҳои аз бисёркунҷаҳои ҳамдигарро иҳотанакунанда сохта шуда тасвир ёфтааст.



$S_{ABCDE} = S_{F_1} + S_{F_2}$

$S_{ABCD} = S_{F_1} + S_{F_2} + S_{F_3}$

Хосиятҳои 1 ва 2 масоҳати *асосии хосиятҳо* ном дорад.

2. Чен кардани масоҳат.

Чеи кардани масоҳат ҳамчун мисли чен кардани порчаҳо барои воҳиди ченкунӣ қабул шуда ба муқоиса ва масоҳати шакл асоснок гардидааст. Қимати *ададии масоҳати* шакли дода шударо мегирем.

Масоҳат – яке аз миқдорҳои асосии математикии тавсифи шаклҳои ҳамвор мебошад. Дар ҳолати оддӣ масоҳат пуркунандаи шаклҳои ҳамвор воҳиди квадратҳо бо тарафҳо ба воҳиди дарозӣ баробар буда, шумораи квадратҳо чен карда мешавад.

Хосияти 3. *Масоҳати квадрате, ки тарафаш ба воҳиди ченаки як дарозӣ баробар аст, ба як баробар аст. Ҳамин тавр теоремаи зерин ҷой дорад.*

Теорема.

Масоҳати квадрати дарозии тарафаш *a* ба a^2 баробар аст.

Одатан, масоҳат бо ҳарфи лотинии *S* ифода карда мешавад. Пас барои квадрати

$S = a^2$ буда, воҳиди ченаки дарозӣ дар квадрат номида мешавад.

3. Шаклҳои баробарандоза.

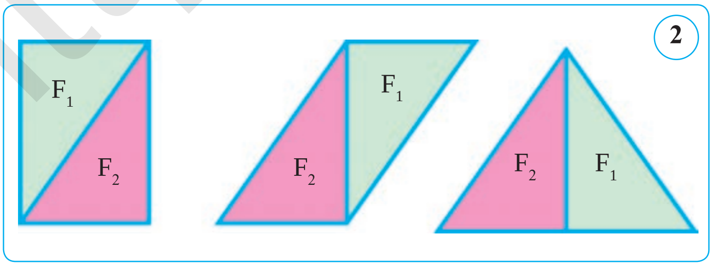
Таъриф. *Агар яке аз ду бисёркунҷаҳо аз фигураҳои мутаносибан ба он, ки бисёркунҷаи дигар таркиб ёфтааст, монанд сохта шуда бошад, пас ин бисёркунҷаҳо **баробартаркиб** ном доранд.*

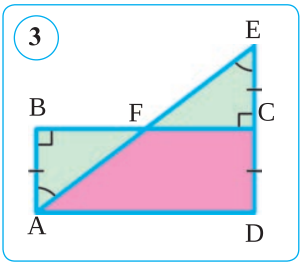
Агар ду бисёркунҷа масоҳати баробар дошта бошанд, онҳо ***баробарандоза*** ном доранд. Бисёркунҷаҳои дар расми 2 тасвирёфта баробарандозаанд.

Бисёркунҷаҳои баробар, баробарандозаанд (хосияти 1), аммо тасдиқи чаппаи он, дуруст нест: агар ду шакл баробарандоза бошанд, аз ин баробарии онҳо омада намебарояд.

Масъала. Дар давоми *DC*-и росткунҷаи *ABCD* ба қуллаи *C* нисбат ба нуқтаи *D* нуқтаи симметрии *E*-ро интихоб мекунем (расми 3). Баробарии масоҳати секунҷаи *ADE* ва росткунҷаи *ABCD*-ро исбот кунед.

Исбот. Бигзор *F* нуқтаи буриши тарафҳои *AE* ва *BC* бошад, секунҷаҳои *ABF* ва *ECF* баробаранд (аз рӯи катет ва кунҷи тез: $AB = EC$, $\angle BAF = \angle E$).


2


3

Дар натиҷа секунҷаи *ADE* ва трапетсияи *AFCD* аз секунҷаи *ECF*, сохта шудааст росткунҷаи *ABCD* бошад, бо ҳамон трапетсияи *AFCD* бо *ECF* баробар буда, аз *ABF* сохта шудааст. Пас, секунҷаи *ADE* ва росткунҷаи *ABCD* баробар сохта шудааст (яъне баробарандоза аст). Исбот кардани ин талаб карда шуда буд.

Аз сабаби бузургӣ буданаш, ба ҳам хосиятҳои бузургӣ соҳиб мешавад. онҳоро мисли бузургиҳои якнамуда ҷамъ ва ба адади мусбӣ зарб задан мумкин. Барои дуто масоҳатро ҷамъ кардан ва ба адад зарб задан масоҳат ҳосил мешавад.

Дар амалиёт масоҳат ҳар гуна шакли мавҷуд бударо чен кардан ё ки ҳисоб намудан мумкин. Бештар барои муайян кардани масоҳатҳои гуногун аз формулаҳо истифода мебаранд. Масоҳати баъзе шаклҳоро барои баровардани формулаҳои масоҳатҳои баъзе шаклҳоро дар мавзӯъҳои оянда машғул мешавед.

Савол, масъала ва супоришҳо

1. 1) Шакли содда чист?
2) Масоҳати шакл гуфта чиро мефаҳмед?
3) Хосиятҳои масоҳатро ифода кунед.
4) Чӣ гуна ду бисёркунҷаро баробарсохт мегӯянд?
5) Шаклҳои баробарандоза чист?

2. Тарафҳои квадрат: 1) 1,3 см; 2) 0,15 дм; 3) 2,5 см; 4) 18 дм; 5) 2,5 дм. Масоҳати квадратро ёбед.

3. Масоҳати квадрат: 1) 16 дм^2; 2) 144 см^2; 3) 121 см^2; 4) 49 мм^2; 5) 196 см^2; 6) 0,64 дм^2; 7) 6,25 м^2. Тарафҳои квадратро ёбед.

4. Масоҳати квадратеро ёбед, ки ба периметри росткунҷаи тарафҳояш 54 см ва 42 см баробар бошад.

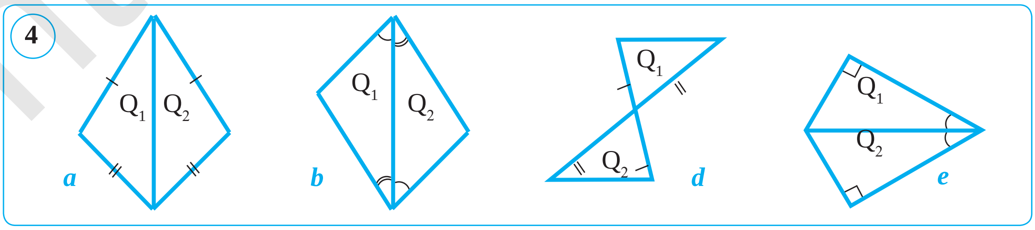
5. Секунҷаҳои Q_1 ва Q_2 дар расми 4 буда, баробарандоза аст онро исбот кунед.

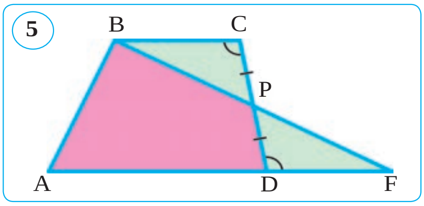
6. Масоҳати квадрат 36 см^2. Агар ҳамаи тарафҳои онро: 1) ду баробар дароз; 2) се маротиба кам; 3) 2 см дароз кунем, масоҳати он чӣ хел тағйир меёбад?

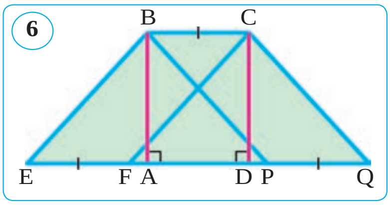
Намуна. Тарафи квадрати масоҳаташ 81 см^2 ба 1 см кӯтоҳ карда шавад, масоҳати он чӣ хел тағйир меёбад?

Ҳал. Тарафи квадрат $a = 9$ см. Тарафи квадрати нав $a_1 = a - 1 = 9 - 1 = 8$ (см). Онгоҳ $S_y = 8^2 = 64$ (см^2). Тарафи квадрати додашуда 1 см кӯтоҳ карда шавад, масоҳати он $S - S_{ya.} = 81 - 64 = 17$ (см^2) кам мешавад.

Ҷавоб: 17 см^2 кам мешавад.







7. Аз ду росткунчаи баробартаркиб оё: 1) баробарии ин росткунҷаҳо; 2) баробарандозагии онҳо бармеояд?

8. 1) Агар ҳамаи тарафҳои квадратро *n* маротиба дароз кунем, масоҳати он чӣ гуна тағйир меёбад? 2) Ҳама тарафҳояшро *k* маротиба кӯтоҳ кунем-чӣ?

9. (*Кори амалӣ*) Ягон квадрат созед. Квадрати дуюми тарафаш аз он 2 маротиба калон бударо созед. Масоҳати квадрати дуюм аз якумаш чанд маротиба калон аст.

10. Бигзор *AD* – асоси калони трапетсияи *ABCD* бошад. Аз миёначаи тарафи *CD* нуқтаи *P* ва аз қуллаи *B* хати рости нури *AD*-ро дар нуқтаи *F* буранда гузаронида шудааст (расми 5). Исбот кунед, ки $\mathrm{S}_{ABCD}=S_{ABF}$ аст.

Исбот. 1) $\triangle BCP=\triangle FDP$ – тарафҳо ва ду кунчи ба он часпида ($CP=\ldots$ – ..., $\angle BCP=\angle\ldots$ – ... ва ... тарафҳо ва ду кунчи ба он часпида $\angle BPC=\angle\ldots$ – ... ва хатҳои рости параллелро буридани буранда ҳосилшуда кунҷҳо шуданаш) баробар, яъне $S_{BCP}=\ldots$.

2) $S_{ABCD}=S_{ABPD}+\ldots$, $S_{ADP}=S_{ABPD}+\ldots$, бинобар ин $S_{ABCD}=\ldots$.

Ба ҷои нуқтаҳо ҷавобҳои мувофиқро нависед.

11. Периметри квадратеро ёбед, ки масоҳаташ ба:1) 2,25 см^2; 2) 0,81 дм^2; 3) 289 мм^2; 4) 5,76 м^2; 5) 400 дм^2 баробар бошад.

12. Аз байни бисёркунҷаҳои дар расми 6 тасвирёфта баробарандозаашонро ёбед.

13. Майдони Ўзбекистон 448,9 ҳазор км^2. Тақрибан 80 % онро ҳамворӣ ташкил медиҳад. Қисми ҳамворӣ аз чанд ҳазор километри квартатӣ иборат аст?

Донистан фоиданок аст!

- **S** – аз калимаи лотини «***superficies***» гирифта шуда, маънои он «***сатҳ***» мебошад.
- Қитъаҳо ҳудудҳои давлатҳо бо квадрат километри квадратӣ, масоҳати майдонҳо бо гектарҳо, масоҳати майдонҳои хурди замин ба (сотих) чен карда мешавад.

46 – 47. МАСОҲАТИ РОСТКУНҶА ВА ПАРАЛЛЕЛОГРАММ

1. Масоҳати росткунҷа.

Шумо дар бораи баробар будани масоҳати росткунҷа ба ҳосили зарби дарозии тарафҳои он масъалаҳо ҳал кардед.

Акнун аз ҷиҳати назариявӣ дуруст будани ин амали иҷрошударо дида мебароем.

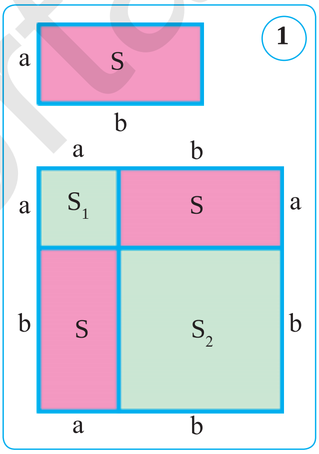
Теорема.

Масоҳати росткунҷаи тарафҳояш *a* ва *b* бо формулаи

$$S = a \cdot b$$

ҳисоб карда мешавад.

Исбот. Росткунҷаи тарафҳояш a ва b-ро мегирем, ки дар он a ва b – ададҳои ихтиёрии мусбат мебошанд. Исбот мекунем, ки $S = a \cdot b$ аст.



Барои исботи теорема квадрати тарафҳояш (a + b) месозем. Ин квадратро чун дар расми 1, a ба ҳиссаҳо ҷудо мекунем. Дар он дидан мумкин аст, ки масоҳати квадрат аз ду квадрати тарафҳояш a ва b, ҳамчунин ду росткунҷаи тарафҳояш a ва b ташкил ёфтааст.

Пас, масоҳати квадрати тарафҳояш (a + b) ба $S_1 + 2S + S_2$ баробар аст. Аз тарафи дигар аз рӯи аксиома дар бораи масоҳат ин масоҳат ба $(a + b)^2$ баробар аст,

$$S_1 + 2S + S_2 = (a + b)^2, \text{ яъне}$$

$$S_1 + 2S + S_2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Бармояд, ки $S_1 = a^2$, $S_2 = b^2$ аст.

$$S = a \cdot b$$

Теорема исбот шуд.

Масъалаи 1. Нисбати тарафҳои росткунҷа ба нисбати 3:2 баробар буда, масоҳати он ба 150 см² аст. Периметри ин росткунҷаро ёбед.

Ҳал. Тарафи хурди росткунҷа b=2x см бошад. Онгоҳ дарозии тарафи калони он ба a=3x см баробар мешавад. Аз формулаи ҳисоб кардани масоҳати секунҷа истифода бурда, муодила тартиб дода, онро ҳал мекунем: $S = 3x \cdot 2x$, яъне $S = 6x^2$.

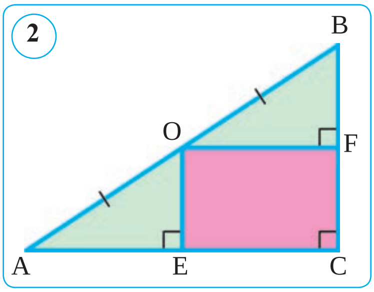
Аз ин ҷо $x^2 = S : 6$, $x^2 = 150 : 6$, $x^2 = 25$, $x = 5$ (см).

Ва пас, тарафи хурди росткунҷа ба b=2·5=10(см) ва тарафи калони он ба a=3·5=15(см) баробар аст.

Акнун периметрро ҳисоб мекунем.

$P=2\cdot(a+b)=2\cdot(15+10)=2\cdot25=50$ (см). *Ҷавоб*: $P=50$ см.

Масъалаи 2. Катетҳои секунҷаи росткунҷа ба 12 см ва 24 см баробар аст. Аз миёнаҷои гипотенуза ба катетҳои секунҷа перпендикуляр гузаронида шудааст. Масоҳати росткунҷаи ҳосил шударо ёбед.



Дода шудааст: Дар секунҷаи росткунҷаи $\triangle ABC$: $AO=OB$, $OE\perp AC$, $OF\perp CB$, $AC=24$ см, $BC=12$ см (расми 2).

Ёфтан лозим: S_{CEOF}.

Ҳал. Ба мо маълум аст, ки ду перпендикуляри ба як хати рост гузаронида шуда байни худ параллел мешавад.

Мувофиқи теоремаи Фалес:

$$AE=EC=0,5AC=0,5\cdot24=12 \text{ (см)},$$
$$CF=FB=0,5BC=0,5\cdot12=6 \text{ (см)}.$$

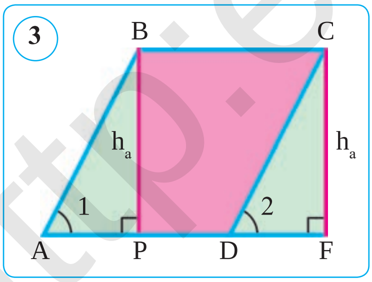
Пас, $S_{CEOF}=CE\cdot CF=12\cdot6=72$ (см^2). *Ҷавоб:* 72 см^2.

2. Масоҳати параллелограмм. Тарафи дилхоҳи параллелограммро ҳамчун асоси он гирифтан мумкин аст, дар он ҳолат масофа аз ҳамин тараф то тарафи муқобил баландии он мешавад. Баландӣ ба тараф ё ки давоми тараф фаровarda мешавад. Дар расми 3-юм BP ва *CF* – баландии параллелограмми *ABCD* аст.

Теорема.

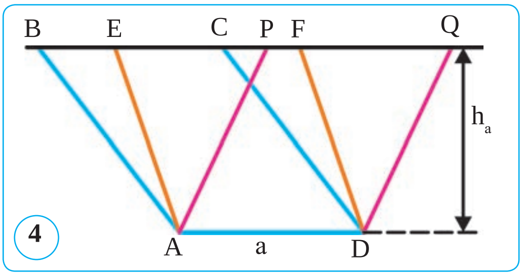
Масоҳати параллелограмм ба ҳосили зарби асос ва баландӣ баробар аст: $\boldsymbol{S=a\cdot h_a}$.

Параллелограмми *ABCD*-ро дида мебароем. Барои асоси ин параллелограмм тарафи *AD* = *a* -ро мегирем, баландӣ ба h_a баробар аст (расми 3).

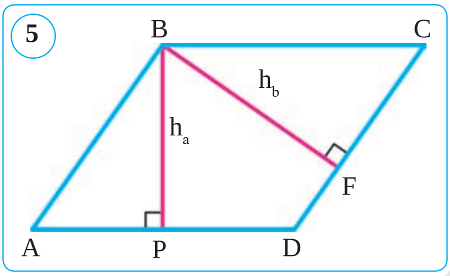


Исботи. $S=a\cdot h_a$ талаб карда мешавад. Исбот. Росткунҷаи *PBCF* месозем, ки асоси параллелограмми он дар асоси *BC* ва баландиаш аз h_a иборат бошад.

ABP ва *DCF* (аз рӯи гипотенуза ва кунҷи тез: *AB*=*DC*-гипотенуза, $\angle1=\angle2$- кунҷҳои мувофиқ). Параллелограмми *ABCD* аз трапетсияи *PBCD* ва секунҷаи *ABP* ва росткунҷаи *PBCD* бошад, аз секунҷаи *DCF*-и ба ҳамон трапетсияи *PBCD* ва *ABP* баробар таркиб ёфтааст. Пас, параллелограмми *ABCD* ва росткунҷаи PBCF баробар андозаанд. Аз ин чунин натиҷа мебарояд. Масоҳати параллелограмми *ABCD* ба масоҳати росткунҷаи *PBCF,* яъне ah_a баробар аст.



4



5

Ҳаминтавр, масоҳати *S*-и параллелограмми асосаш *a* ва баландии h_a ба он фароварда шуда, аз рӯи формулаи:

$$S=a\cdot h_a.$$

ҳисоб карда мешавад. Исбот ҳаминро талаб карда буд.

Натиҷаи 1. Агар ду параллелограмм дорои як асос ва баландиҳои баробар бошад, онҳо баробартаркибанд.

Дода шудааст: Параллелограммҳои *ABCD, AEFD* ва *APQD* ба як асоси *AD=a* ва баландии (h_a) баробар (расми 4).

Исбот намудан лозим: параллелограммҳои *ABCD, AEFD* ва *APQD* баробар сохта шудаанд.

Исбот: Баробар таркиб ёфтани параллелограммҳои *ABCD* ва *AEFD*-ро исбот менамоем. Секунҷаҳои *BAE* ва *CDF* баробар чунки *BA=CD* ва *AE=DF* инчунин $\angle BAE=\angle CDF$ (тарафҳои мувофиқаш барои кунҷҳои параллел буданаш). Пас, параллелограмми *ABCD* бо трапетсияи *AECD* аз секунҷаи *BAE,* параллелограмми *AEFD бошад, бо трапетсияи AECD ба секун*ҷаи *BAE* баробар буда, аз секунҷаи *CDF* сохта шудааст. Пас, *ABCD* ва *AEFD* параллелограммҳо баробар сохта шудааст. Ба ҳамин монанд, баробар таркиб ёфтани параллелограммҳо исбот карда мешавад.

Масъалаи 3: Тарафҳои параллелограмм ба 25 см ва 20 см, баландии ба тарафи якум фароварда шуда 8 см аст. Баландии ба тарафи дуюми ин параллелограмм фароварда шударо ёбед.

Дода шудааст: Параллелограммҳои *ABCD*

$$AD=a=25 \text{ см},\ DC=b=20 \text{ см},\ h_a=8 \text{ см (расм 5)}.$$

Ёфтан лозим: h_b.

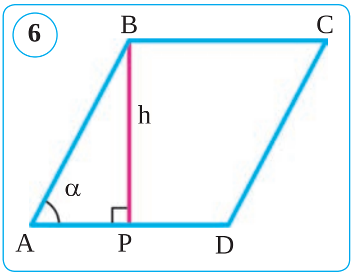
Ҳал. Дар параллелограмми 1) $S=ah_a=25\cdot 8=200$ (см^2).

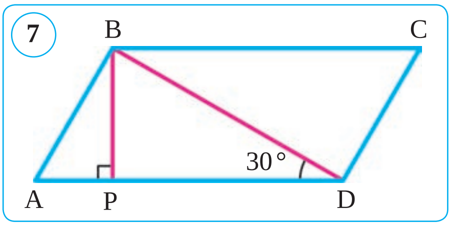
2) $S=bh_b$, яъне $200=20\cdot h_b$. Аз ин ҷо $h_b=200:20=10$ (см).

Ҷавоб: 10 см.

Натиҷаи 2. Масоҳати параллелограмм ба ҳосили зарби ду тараф ва синуси кунҷи байни онҳо баробар аст. Инро исбот кунед.

Ҳал. Дар параллелограмми *ABCD*, $AD=a$, $AB=b$ ва $\angle BAD=\alpha$ бошад. Онгоҳ масоҳати параллелограмм бо формулаи $\boldsymbol{S=ab\sin}\alpha$ ҳисоб карда мешавад. Ҳаминро исбот мекунем. Дар параллелограмми





ABCD баландии *BP* мегузаронем ва онро бо $BP = h_a = h$ ишорат мекунем (расми 6), онгоҳ баландии *h* кунҷи рости *ABP* секунҷаи дар муқобили кунҷи тези α хобида катет мешавад. *h*-ро бо ҳосили зарби тарафи *b* ва синуси кунҷи α ифода мекунем:

$$h = b\sin\alpha.$$

Дар формулаи ҳисоб кардани масоҳати параллелограмм $S = ah$ қимати *h*-ро гузашта ҳосил мекунем:

$$S = ab\sin\alpha.$$

Масъалаи 4. *Дода шудааст:* *ABCD* параллелограмми $AD = 20$ см, $BD = 16$ см, $\angle BDA = 30°$.

Ёфтан лозим: S_{ABCD}.

Ҳал. Усули 1. 1) Дар параллелограмми додашуда баландии *BP*-ро мегузаронем ва секунҷаи *BDP*-ро дида мебароем (расми 7). Он росткунҷа аст, чунки $BP \perp AD$. Баландии *BP*-ро меёбем. Катети муқобили кунҷи 30° буда, ба нисфи гипотенуза баробар аст. Бинобар ин $BP = 0{,}5BD = 0{,}5 \cdot 16 = 8$ (см).

2) Ҳаминтавр, масоҳати параллелограмми *ABCD* ба

$$S = AD \cdot BP = 20 \cdot 8 = 160 \ (\text{см}^2)$$

Усули 2. Аз секунҷи росткунҷаи *BDP* *BP*-ро *BD* (гипотенуза) ва $\angle BDP = 30°$ ифода мекунем ва бо формулаи пареллелограмм гузошта тарафи мо ҷустаро меёбем:

$$S = AD \cdot BP = AD \cdot BD. \ \sin\angle BDP = 20 \cdot 16 \cdot \sin 30° = 20 \cdot 16 \cdot 0{,}5 = 160 \ (\text{см}^2).$$

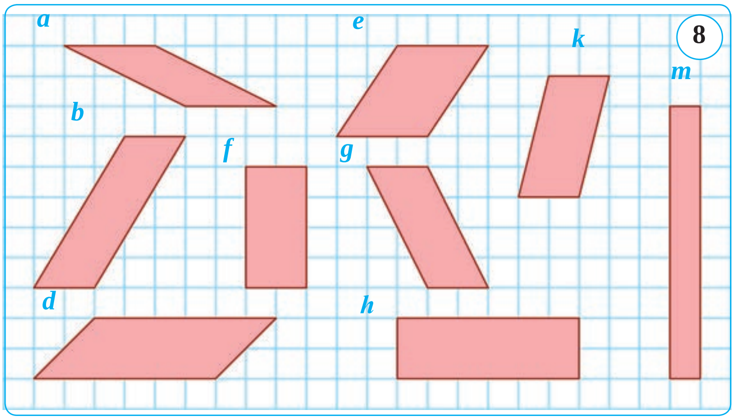
Ҷавоб: $S = 160$ см^2.

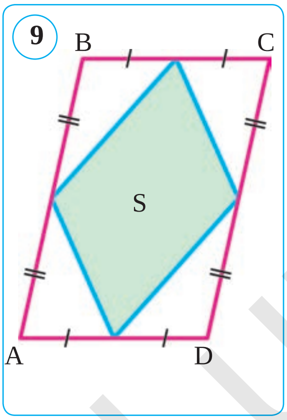
Савол, масъала ва супоришҳо

1. 1) Масоҳати росткунҷа ба чӣ баробар аст?
   2) Асос ва баландии параллелограмм гуфта чиро мефаҳмед?
   3) Масоҳати параллелограмм ду тарафи ҳамсояи он ва оиди кунҷи байни онҳо чӣ хел ёфта мешавад?

2 Ду тарафи росткунҷа: 1) 30 см ва 2,9 см; 2) 34 дм ва 0,6 дм; 3) 2,5 дм ва 12 см. Масоҳати онро ёбед.

3. Як тарафи росткунҷа 15 дм, тарафи дуюмаш бошад, аз он 5 маротиба калон. Периметр ва масоҳати ҳамин росткунҷаро ёбед.





4. Майдони баскетбол, ки масоҳаташ 240 м^2 мебошад. 15 %-и майдони спортро ташкил медиҳад. Майдони спорт 32 % ҳамаи майдони мактабро ташкил медиҳад. Масоҳати майдони мактабро ёбед.

5. Як тарафи росткунҷа 23 см. Тарафи дуюмаш аз он 17 см дароз аст. Масоҳат ва периметри росткунҷаро ёбед.

6. Агар масоҳати росткунҷа 20 см^2 ва 1) дарозиаш ба 5 см, 2) дарозиаш 125 % – и бараш, 3) яке аз тарафҳояш ба x баробар бошад, периметри он ба чӣ баробар мешавад?

7. Агар дар росткунҷаи $ABCD$: 1) $AB = 9$ см, $BC = 4$ см; 2) $AB : BC = 5 : 7$, $P_{ABCD} = 48$ см бошад, масоҳати онро ёбед.

8. Тарафи параллелограмм ба 16 см, баландии он ба фаровардашуда ба 9 см баробар. Тарафи квадрати ба ҳамин параллелограмм баробарандозаро ёбед.

9. a – асоси параллелограмм, h – баландӣ, S – масоҳат. Агар:
1) $a = 10$ см, $h_a = 0{,}5$ м бошад, S-ро; 2) $h_a = 4$ см, $S = 48$ см^2 бошад, a -ро 3) $a = 24$ см, $S = 120$ см^2 бошад, h_a -ро ёбед.

10. Параллелограмми баробарандозаи (расми 8)-ро ёбед.

11. Агар дар росткунҷа 1) асосаш 5 маротиба кам карда, баландиаш 8 маротиба дароз карда; 2) Асос ва баландиаш 2,5 маротиба кам карда шавад, масоҳати он чӣ хел тағйир меёбад.

12. Масоҳати шакли дар расми 9 буда, S кадом қисми масоҳати параллелограммро ташкил медиҳад.

13. Ду тарафи росткунҷа: 1) 24 см ва 20 см; 2) 3,5 дм ва 8 см; 3) 8 м ва 4,5 м; 4) 3,2 дм ва 1,5 дм. Масоҳати онро ёбед.

14. 1) Масоҳати параллелограмм 36 см^2, баландии он 3 см ва 4 см. Периметри параллелограммро ёбед.

15. Тарафҳои параллелограмм 20 см ва 28 см, кунҷи байни онҳо ба 30° баробар. Масоҳати параллелограммро бо ду усул ёбед.

48. МАСОҲАТИ СЕКУНҶА

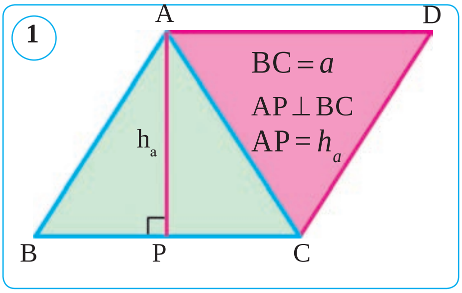
Барои ёфтани формулаи ҳисоб кардани масоҳати секунҷа аз усули ба шакли параллелограмоварӣ истифода мебарем.

Теорема.

Масоҳати секунҷа ба нисфи ҳосили зарби асос ва баландии он баробар аст, яъне:

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h_a ,$$

дар ин ҷо *a* – асоси сукунҷа, h_a – баландии ба асос фаровардашуда.



Исбот. *ABC*-секунҷаи дода шуда бошад (расми 1). Ин секунҷаи △*ABC*-и дар расм бударо мо ба параллелограмм *ABCD* (асосаш *BC*) табдил медиҳем. Секунҷаҳои △*BAC* ва △*DCA* баробаранд, чунки диагоналҳои параллелограмм онҳоро ба ду секунҷаи баробар ҷудо мекунад. Ва пас, масоҳатҳои ин секунҷаҳо баробаранд. Бинобар ин масоҳати параллелограмми *ABCD* ба масоҳати дучандаи секунҷаи *ABC* баробар аст, яъне $2S = a \cdot h_a$.

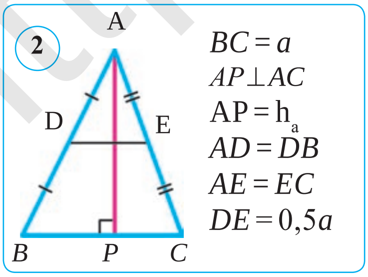
Аз ин, $S = \frac{ah_a}{2}$ теорема исбот шуд.

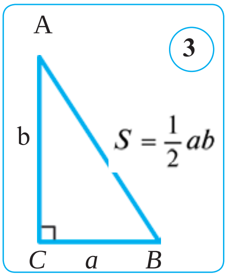
Формулаи чен кардани масоҳати секунҷаро бо тарзи дигар низ хондан мумкин аст: ***масоҳати секунҷа ба ҳосили зарби хати миёна ва баландии он баробар аст*** (расми 2):

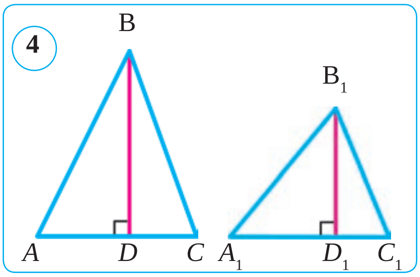
$$S = \frac{a}{2} \cdot h_a$$

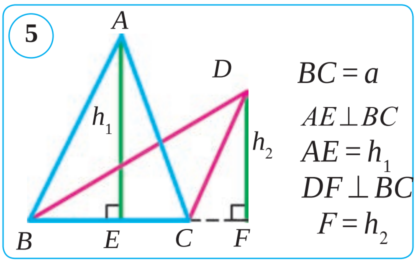
Натиҷаи 1. *Масоҳати секунҷаи росткунҷа ба нисфи ҳосили зарби катетҳо баробар аст***.** Чунки як катетро асос ва дуюмашро баландӣ карда гирифтан мумкин (расми 3).

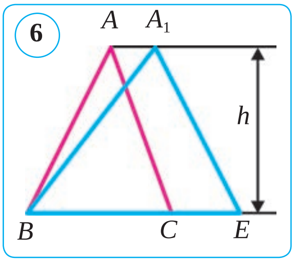
Натиҷаи 2. *Нисбати масоҳати ду секунҷа ба нисбати асос ва баландии онҳо баробар аст* (расми 4).

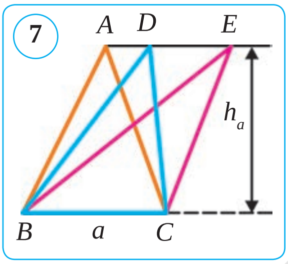












Исбот. $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{0,5AC \cdot BD}{0,5A_1C_1 \cdot B_1D_1} = \frac{AC \cdot BD}{A_1C_1 \cdot B_1D_1}$.

Натиҷаи 3. *Нисбати масоҳати ду секунҷаи асосҳояш баробар ба нисбати баландии онҳо монанд аст* (расми 5).

Исбот. $\frac{S_{ABC}}{S_{DBC}} = \frac{0,5a \cdot h_1}{0,5a \cdot h_2} = \frac{h_1}{h_2}$.

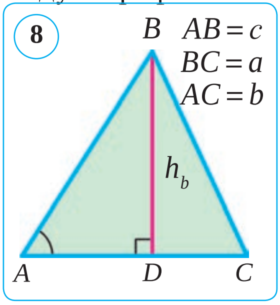
Натиҷаи 4. *Нисбати масоҳати ду секунҷаи баландиҳояшон баробар ба нисбати асосҳои онҳо монанд аст* (расми 6).

Исбот. $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1BE}} = \frac{0,5 \cdot BC \cdot h}{0,5 \cdot BE \cdot h} = \frac{BC}{BE} = \frac{a}{a_1}$, аз ин $BC = a$, $BE = a_1$.

Натиҷаи 5. *Секунҷаҳои асосҳо ва баландиҳояшон баробар, баробарандоза мебошанд* (расми 7).

Исбот. $S_{BAC} = S_{BDC} = S_{BEC} = 0,5ah_a$.

Натиҷаи 6. Масоҳати секунҷа ба ҳосили зарби ду тараф ва синуси кунҷи байни онҳо баробар аст (расми 8).



Исбот. Бигзор ABC тарафи секунҷаҳо бошад, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ бошад, онгоҳ $S = \frac{1}{2}bc\sin A$ -ро исбот мекунем. Барои он ба секунҷаи ABC баландии $BD = h_b$ мегузаронем (расми 8). h_b-ро бо тарафи c ва синуси кунҷи A ифода мекунем: $h_b = c\sin A$. Ба формулаи масоҳати секунҷа $S = \frac{1}{2}bh_b$ қимати h_b-ро гузошта ҳосил мекунем:

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A.$$

Формулаҳои масоҳати секунҷаро аз тарафҳои a ва b ва синуси кунҷи C, тарафҳои a, c ва синуси кунҷи B низ ба ҳамин монанд ҳосил мекунанд.

Ҳамintaвр, масоҳати секунҷа аз рӯи ду тараф ва синуси кунҷи байни онҳо бо ёрии формулаи зерин ҳисоб карда мешавад:

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}bc\sin A.$$

Формулаи масоҳати секунҷаро бо воситаи тарафҳо аз тарафи олими юнон Герон, ки дар асри I зиндагӣ кардааст, дохил карда шуда, он формулаи **Герон** ном дорад.

Ҳангоми маълум будани сетарафи секунҷа аз формулаи Герон истифода бурда, масоҳати секунҷа ёфта мешавад. Масоҳати секунҷа ба нисфи ҳосили зарби асос ва баландӣ баробар аст.

$$S = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}b \cdot h_b = \frac{1}{2}c \cdot h_c .$$

Ба ҷои баландӣ бо воситаи тарафҳои секунҷаи он ифодаи:

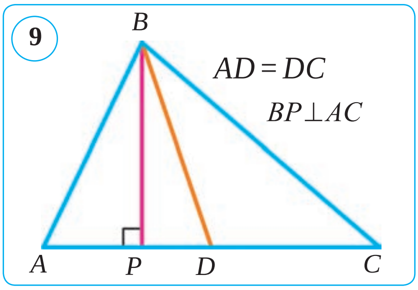
$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\ \beta=90°,\ h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ ва}$$

$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

гузошта, онро содда карда формулаи зерини Геронро ҳосил мекунем:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\text{, аз ин } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

9

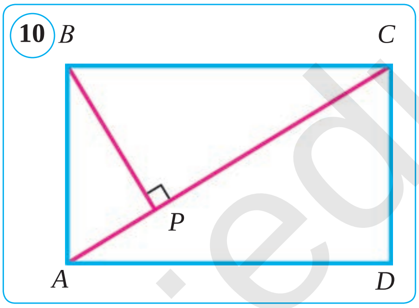


Масъалаи 1. Медианаи секунҷа ба дуто секунҷаи барбарандоза ҷудо кардани онро исбот кунед.

Исбот. BD-медианаи секунҷаи ABC бошад (расми 9). Секунҷаҳои ABD ва CBD баробар буда, ба тарафҳои AD ва DC, инчунин ба баландии умумии BP соҳиб аст, яъне секунҷаҳо аз рӯи натиҷаи 5 баробарандозаанд:

$S_{ABD} = S_{CBD}$.

10



Масъалаи 2. Дода шудааст секунҷаи $ABCD$, $AC=20$ см, $BP=12$ см, $BP \perp AC$ (расми 10).

Ёфтан лозим: S_{ABCD}.

Ҳал. 1) $S_{ABC} = 0{,}5AC \cdot BP =$

$= 0{,}5 \cdot 20 \cdot 12 = 120$ (см^2).

2) $S_{ABCD} = 2 \cdot S_{ABC} = 2 \cdot 120 = 240$ (см^2).

Ҷавоб: $S_{ABCD} = 240$ см^2.

Савол, масъала ва супоришҳо

1. 1) Масоҳати секунҷа ба чӣ баробар аст?

2) Масоҳати секунҷаи росткунҷа чӣ хел ҳисоб карда мешавад?

3) Вобаста ба тарафҳо масоҳати секунҷа чӣ хел ҳисоб карда мешавад.

2. Катетҳои секунҷаи росткунҷа: 1) 4 см ва 7 см; 2) 1,2 дм ва 25 см. Масоҳати секунҷаи росткунҷаро ёбед.

3. Асоси як секунҷа 20 см, баландиаш 8 см. Асоси секунҷаи дуюм 40 см. Барои баробар шудани секунҷаҳо, баландии секунҷаҳо чӣ гуна бояд бошад?

4. Дар секунчаи ABC $AB = 5AC$. Нисбати баландии аз қуллаҳои B ва C гузаронидашуда ба чанд баробар?

5. a – асоси секунча, h – баландии ба асос гузаронидашуда, S – масоҳати секунча. Миқдори номаълумро ёбед.

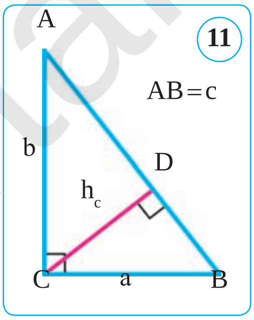
	1	2	3	4	5	6
a	69 см	0,8 дм	?	0,25 м	?	0,9 м
h_a	0,5 м	?	20 дм	100 см	4,8 см	?
S	?	4 см^2	2000 см^2	?	9,6 мм^2	36 дм^2

6. Ҳосили зарби катетҳо (a ва b) бо гипотенуза (c) ба ҳосили зарби баландии (h_c) аз қуллаи кунҷи рост ба гипотенуза фаровардашуда баробар аст (расми 11).

Ҳал. Агар яке аз катетҳоро ҳамчун асос қабул кунем, онгоҳ дуюми баландӣ мешавад ҳаминтавр, масоҳати секунчаи росткунча ба нисфи ҳосили зарб баробар аст:

$S=\frac{1}{2}ab$, аз ин $ab=2S$; $S=\frac{1}{2}ch_c$, аз ин $ch_c=2S$.

Пас, $ab=ch_c$ аст, исботи он талаб карда шуда буд. Катетҳои секунча: 1) 12 см ва 16 см; 2) 5 см ва 12 см баробар аст (мувофиқи теоремаи Пифагор) c ва h_c $(ab=ch_c)$-ро ёбед.



11

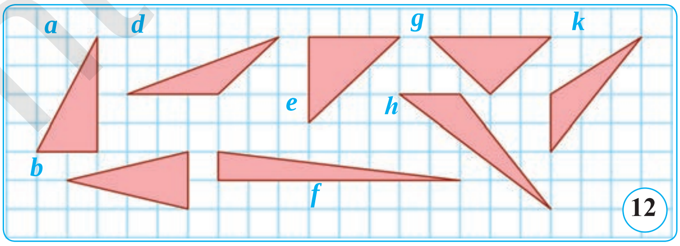
7. Секунчаҳои баробарандозаро аз расми 12 нишон дихед ҷавобашро асоснок кунед.

8. Масоҳати секунчаи тарафҳояш баробарро ёбед: 1) 39 см, 42 см, 45 см; 2) 35 см, 29 см, 8 см; 3) 20 см, 20 см, 32 см.

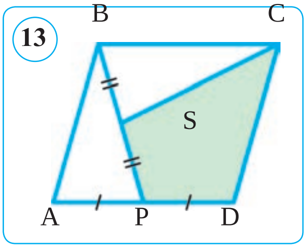
9. Масоҳати шакли дар расми 13 буда S, кадом қисми масоҳати параллелограммро ташкил медихад.

10. Масоҳати секунча ба 150 см^2 баробар аст. Баландии секунчаҳо ба 15 см, 12 см ва 20 см баробар бошад, периметри онро ёбед.

11. Ду тарафи секунча 5 дм ва 6 дм, кунҷи байни онҳо 30°. Масоҳати секунчаро ёбед. Масъаларо бо ду усул ҳал кунед.



12



13

49–50. МАСОҲАТИ РОМБ ВА ТРАПЕТСИЯ

1. Масоҳати ромб. Ромб – параллелограмми тарафҳояш баробар мебошад. Масоҳати ромби тарафаш a ва баландиаш h_a бо формулаи

$$S = ah_a$$

ҳисоб карда мешавад.

Ба мо малум аст, ки ҳамаи баландиҳои ромб байни худ баробаранд. Ба ғайр аз ин масоҳати ромбро бо ёрии диагоналҳо низ ҳисоб кардан мумкин.

Теорема.

Масоҳати ромб ба нисфи ҳосили зарби диагоналҳо баробар аст:

$$S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 ,$$

дар ин d_1 ва d_2 — диоагонали ромб аст.

Исбот. Ба мо маълум аст, ки диагонали AC-и ромб онро ба ду секунҷаи баробарпаҳлӯи баробар ҷудо мекунад (расми 1). Диагонали дуюм бошад, ба диагонали якум перпендикуляр буда, ба суммаи баландиҳои секунҷаҳои ҳосилшуда баробар мешавад. Барои ҳамин ҳам масоҳати ромб:

$$S = S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC} = \frac{1}{2}AC \cdot BO + \frac{1}{2}AC \cdot DO = \frac{1}{2}AC \cdot (BO + DO) =$$

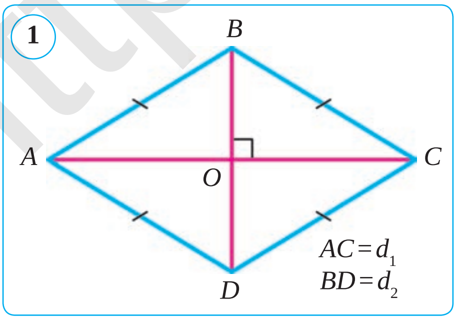
$$= \frac{1}{2}\underline{AC} \cdot \underline{\underline{BD}} = \frac{1}{2}\underline{d_1} \cdot \underline{\underline{d_2}}.$$

Яъне, $S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$. Теорема исбот шуд.

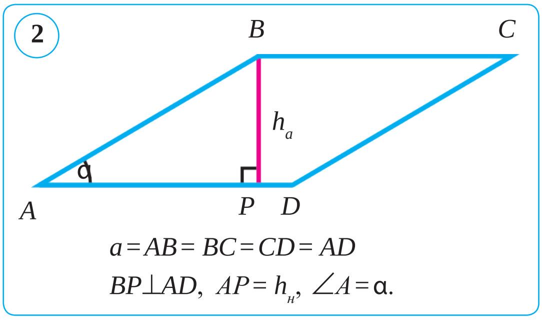
Масъалаи 1. Тарафи ромби $ABCD$ ба a баробар аст, кунҷи тезаш ба α. Масоҳати ҳамин ромбро ёбед. Ҳангоми α=30° масоҳати онро ёбед.

Ҳал. 1) Дар ромби $ABCD$ $AB = BC = CD = AD = a$, $\angle A = \alpha$ бошад. $BP \perp AD$-ро (расми 2) мегузаронем. Онгоҳ баландии h_a катети муқобили кунҷи тези секунҷаи ABP мебошад. h_a-ро бо синуси кунҷи α ифода мекунем $h_a = a \sin \alpha$. Ба формулаи ҳисоб кардани масоҳати ромб ба $S=ah_a$ ин ифодаи h_a α-ро гузошта ин формуларо ҳосил мекунем $S = a^2 \sin\alpha$.

1



2



2) Масоҳати ромбро аз формулаи $S = a^2 \sin\alpha$ истифода бурда меёбем:
$S = a^2 \sin 30° = a^2 \cdot 0{,}5 = 0{,}5a^2$ (воҳ кв). *Ҷавоб:* $S = 0{,}5a^2$ (кв).

Масъалаи 2. Яке аз диагоналҳои ромб аз дуюмаш 1,5 маротиба калон, масоҳати ромб ба 27см^2 баробар аст. Диагоналҳои ин ромбро ёбед.

Дода шудааст: $ABCD$ – ромб; $S_{ABCD} = 27$ см^2; $AC = 1{,}5BD$ (ба расми 1 ниг.). *Ёфтан лозим:* AC, BD.

Ҳал. Бигзор $BD = x$ см бошад, онгоҳ $AC = 1{,}5x$ мешавад.

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$, ба ин аломатҳоро мегузорем: $27 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}5x \cdot x$. Дар он ҳолат $x^2 = 36$ см мешавад., аз ин $x = 6$ (см). Ҳаминтавр $BD = 6$ см ва $AC = 1{,}5 \cdot 6 = 9$ (см) баробар аст. *Ҷавоб:* 9 см, 6 см.

2. Масоҳати трапетсия. Маълум аст, ки бо роҳи гузаронидани диагоналҳо ҳар гуна бисёркунҷаро ба секунҷаҳо ҷудо кардан мумкин аст. Барои ҳисоб кардани масоҳати бисёркунҷаи ихтиёрӣ онро аввал ба секунҷаҳо ҷудо мекунем. Сипас, масоҳати секунҷаҳо ҳисоб карда мешавад. Масоҳати секунҷаҳо ба суммаи масоҳати секунҷаҳои онро ташкилдодаи ҳамдигарро напӯшонанда баробар мешавад. Дар ҳисоб кардани масоҳати параллелограмм ва трапетсия аз ҳамин усулҳо истифода мебарем.

Теорема.

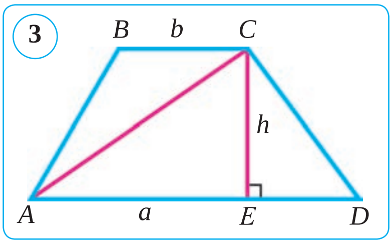
Масоҳати трапетсия ба нисфи суммаи асосҳои он ва ҳосили зарби баландӣ баробар аст, яъне:

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h,$$

дар ин a ва b – асосҳои трапетсия, h – баландии трапетсия.

Исбот. Асосаш $AD = a$, $BC = b$ ва баландиаш $CE = h$ $(CE \perp AD)$ буда, трапетсияи $ABCD$-ро дида мебароем (расми 3). Дар трапетсия диагонали AC-ро мегузаронем. Трапетсияи $ABCD$ ба секунҷаҳои ABC ва ACD ҷудо мешавад. Масоҳати трапетсия ба суммаи масоҳати ин секунҷаҳо баробар аст.

Аз он сабаб, ки масофаи байни хатҳои рости параллел тағйирнаёбанда аст, баландии секунҷаҳои ABC ва ACD баробаранд.



Аз ин, $S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot CE = \frac{1}{2} b \cdot h$ ва $S_{ACD} = \frac{1}{2} AD \cdot CE = \frac{1}{2} a \cdot h$.

Масоҳати трапетсия $S = S_{ABC} + S_{ACD}$, яъне

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h + \frac{1}{2} b \cdot h \quad \text{ё ки} \quad S = \frac{a+b}{2} \cdot h.$$

Теорема исбот шуд.

Натиҷа: *Масоҳати трапетсия ба ҳосили зарби хати миёна ва баландии он баробар аст.*

Ин натиҷа аз баробарии хати миёнаи секунҷа аз ним суммаи асосҳои трапетсия бармеояд.

Масъалаи-3. Асосҳои трапетсия ба 15 см ва 30 см баробар аст, масоҳаташ бошад, ба 225 см² баробар аст. Баландии ин трапетсияро ёбед.

Ҳал. Хати миёнаи трапетсия ба:

$$\frac{a+b}{2}=\frac{15+30}{2}=\frac{45}{2}=22,5 \text{ (см).}$$

барорбар аст. Пас, баландии трапетсия ба:

$$h = S_{mp.} : \frac{a+b}{2} = 225 : 22,5 = 10 \text{ (см).}$$

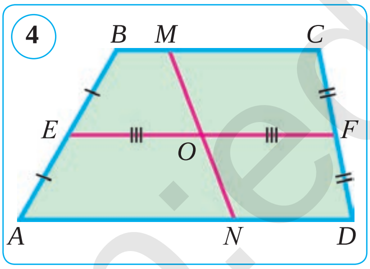
баробар аст. *Ҷавоб:* $h=10$ см.

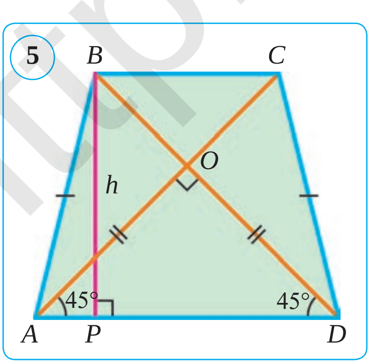
Масъалаи 4. Исбот кунед, ки хати рости аз миёнаҷои миёнаи хати миёнаи трапетсия гузашта асосҳои онро бурида ин трапетсияро ба дуто ҳиссаи баробарандоза ҷудо мекунад.

Исбот. *ABCD*-трапетсияи додашуда $(AD \parallel BC)$. *EF*-хати миёна *MN*-хати рости аз миёнаҷои нуқтаи *O*-и хати миёна гузашта асосҳоро дар нуқтаи *M* ва *N* мебурад (расми 4).

Трапетсияҳои *ABMN* ва *MNDC* байни худ баробар буда, ба хати миёнаи *EO* ва *OF* инчунин ба баландии ба трапетсияи додашудаи баландӣ баробар аст. Пас, масоҳати ин трапетсияҳо баробар, яъне онҳо баробарандозаанд: $S_{ABMN}=S_{MNDC}$. Ҳаминро исбот кардан талаб карда шуда буд.

Масъалаи 5. Агар диагоналҳои трапетсияи баробарпаҳлӯ байни худ перпендикуляр бошад, онгоҳ баландии трапетсия ба хати миёнаи он, масоҳаташ бошад, ба квадрати баландӣ баробар мешавад. Инро исбот кунед.





Дода шудааст: *ABCD*-трапетсияи баробарпаҳлӯ $(AB=DC)$, $AC \perp BD$, $AD=a$, $BC=b$ бошад (расми 5).

Исбот кардан лозим:

$$1)\ h=\frac{a+b}{2};\qquad 2)\ S_{mp.}=h^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

Ҳал. 1) $\triangle AOD$ – баробарпаҳлӯ ва секунҷаи росткунҷаи, инро $\angle ADO=45°$.

2) Аз қуллаи В $BP \perp AD$-ро мегузаронем. Секунҷаи ҳосилшудаи *BPD* ҳам баробарпаҳлӯ ва росткунҷа аст. Чунки $\angle ADO=45°$ ва пас $\angle PBD=45°$.

Аз ин ҷо: $DP=BP$. Ба мо маълумки аз рӯи хосияти баландии аз қуллаи асоси хурди трапетсияи баробарпаҳлӯ гузаронида шуда:

$$BP = DP = \frac{a+b}{2}$$

3) $S_{тр.} = \frac{a+b}{2} \cdot h = h \cdot h = h^2$ ё ки $S_{тр.} = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a+b}{2} = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.

Ҳаминтавр диагоналҳои трапетсия байни ҳам перпендикуляр бошад, баландии он ба хати миёна масоҳаташ ба квадрати баланандӣ баробар аст: Пурра исбот шуд.

Савол, масъала ва супоришҳо

1. 1) Масоҳати ромб аз рӯи тараф ва баландиаш чӣ хел ёфта мешавад?

2) Масоҳати ромб бо ёрии диагоналҳо чӣ хел ёфта мешавад. Онро ифода кунед.

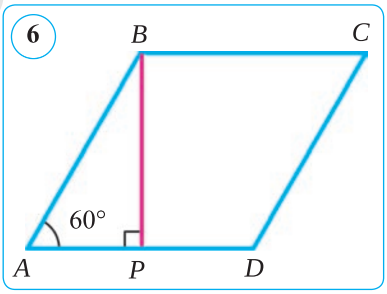
3) Масоҳати трапетсия чист?

2. Масоҳати ромб 40 см^2, баландиаш бошад, ба 5 см баробар аст. Периметри ин ромбро ёбед.

3. Агар баландии ромб: 1) 16 см, кунҷи тезаш бошад, ба 30°; 2) тарафаш 1,8 дм, кунҷи тезаш ба 30° баробар бошад, масоҳати онро ёбед.

4. Масоҳати ромб 60 см^2, яке аз диагоналҳояш ба 10 см баробар аст. Диагонали ҳамин ромбро ёбед.

5. Масоҳати ромб 30 см^2, периметраш бошад, ба 24 см баробар аст. Баландии ин ромбро ёбед.


6

6. *Дода шудааст:* $ABCD$ – ромб $\angle BAD = 60°$, $BP \perp AD$, $BP = 12$ см (расми 6).

Ёфтан лозим: S.

Ҳал. Секунҷаи росткунҷаи BPA-ро дида мебароем. Мувофиқи таърифи синуси кунҷи тез: $\sin A = \frac{BP}{AB}$ дар он дода шудаҳоро гузошта, AB-ро меёбем:

$$\sin A = \frac{BP}{AB} \Rightarrow AB = \frac{BP}{\sin A} = \frac{12}{\sin 60°} = 12 : \frac{\sqrt{3}}{2} = 12 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{24}{\sqrt{3}} \text{ (см)}.$$

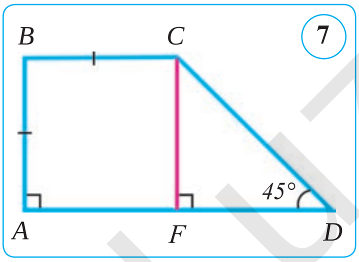
Мувофиқи формулаи ёфтани масоҳати ромб аз рӯи тараф ва кунҷаи тезаш $AB = a = \frac{24}{\sqrt{3}}$, $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ қимматҳояшро гузошта, ҳосил мекунем:

$$S = a^2 \cdot \sin 60° = \left(\frac{24}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{576}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 96\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}.$$ *Ҷавоб:* $96\sqrt{3}$ см^2.

7. Масоҳати ромби диагоналҳояш ба: 1) 1,5 дм ва 1,8 дм; 2) 24 см ва 15 см; 3) 3,2 см ва 0,5 дм баробарро ёбед.

8. 1) Асосҳои трапетсия ба 11 ва 18 см баробар, баландиаш ба 6 см. Масоҳати ин трапетсияро ёбед.

2) Асоси трапетсия 26 см, баландиаш 10 см, масоҳаташ бошад, 200 см². Асоси дуюми ҳамин трапетсияро ёбед.



9. Дар трапетсияи росткунҷаи *ABCD* *AB=BC=18 см,* $\angle D=45°$ (расми 7). Масоҳати трапетсияро ёбед. Ба ҷойҳои холӣ ҷавобҳои мувофиқро нависед.

Ҳал. $CF \perp AD$-ро мегузаронем. 1) *ABCF* -квадрат, чунки *ABCF* тарафҳои ҳамсояи чоркунҷа *AB* ба ... , барои ҳамин $AF = CF = \ldots$ (см).

2) $\angle CFD$ – росткунҷа, аз рӯи сохт $\angle F=90°$ ва аз рӯи шарт $\angle D=45°$, барои ҳамин $\angle DCF = \ldots °$ ва пас, $\angle CFD$ – ... ва $DF=\ldots=\ldots$ (см).

3) $AD=AF+\ldots=\ldots+\ldots=\ldots$ (см) ва $S_{ABCD}=\ldots\cdot\ldots=\ldots\cdot\ldots=\ldots$ (см²).

Ҷавоб: ... см².

10. Нисбати кунҷҳои ромб ба 1:5, аст, тарафаш бошад, ба *a* баробар аст. Масоҳати ин ромбро ёбед.

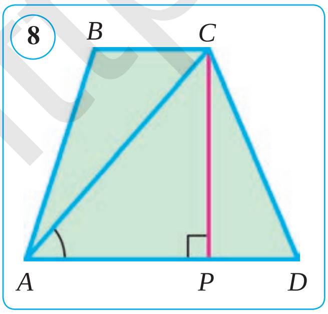
11. Дар трапетсияи *ABCD*: $AD = 20\sqrt{2}$ см, $BC = 10\sqrt{2}$ см, $AC=24$ см, $\angle CAD=45°$ (расми 8). Масоҳати трапетсияро ёбед.

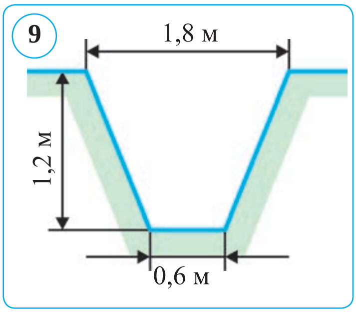
12. Ромби диагоналҳояш ба: 1) 3,5 дм ва 1,4 дм; 2) 28 см ва 17 см; 3) 4,2 см ва 1,5 дм баробар аст. Масоҳати ин ромбро ёбед.

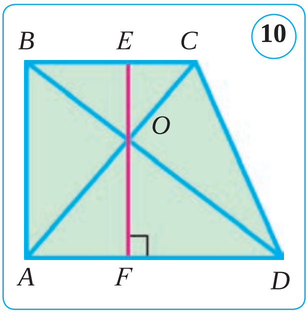
13. Диагоналҳои трапетсияи баробарпаҳлӯ байни худ перпендикуляр ва баландиаш ба 5 см баробар. Масоҳати трапетсияро ёбед.

14. Чуқурии шакли трапетсияи баробарпаҳлӯ дода шудааст. Масоҳати буриши кӯндалангии чуқуриро ёбед (расми 9).

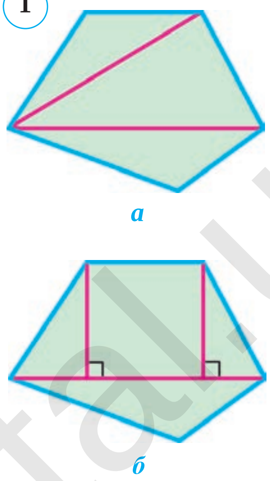
15. Асосҳои трапетсия 16 см ва 12 см. Масофаи аз буриши нуқтаҳои диагонал то асосаш буда, 6 см ва 4 см баробар аст (расми 10). Масоҳати ҳамин трапетсияро ёбед.







51. МАСОҲАТИ БИСЁРКУНҶА



а

б

Барои ҳисоб кардани масоҳати бисёркунҷа онҳоро ба секунҷаҳои байни худ буриданашаванда, яъне дорои нуқтаҳои умумии дохилӣ набуда тақсим кардан ва суммаи масоҳати онҳоро ёфтан мумкин аст. Барои ба секунҷаҳо ҷудо кардани бисёркунҷаҳои барҷаста, масалан аз як қуллаи он диагоналҳо гузаронидан мумкин аст (расми 1, *а*). Баъзан аз ҷудокуниҳои дигар низ истифода кардан қулай аст (расми 1, *б*).

Масъалаи 1. Дар бисёркунҷаи $ABCDE$ маълум аст, ки $BD \parallel AE$, $CP \perp AE$ (расми 2). Исбот кунед, ки $S_{ABCDE} = 0{,}5(BD\cdot CP + AE\cdot OP)$ аст.

Исбот. Аз трапетсия ва секунҷаҳо ташкил ёфтани шакли додашударо муайян кардан мумкин нест. Аз хосияти масоҳат бармеояд, ки:

$$S_{ABCDE}=S_{BCD}+S_{ABDE}=0{,}5BD\cdot CO+0{,}5(AE+BD)\cdot OP=$$

$$=0{,}5(\underline{BD}\cdot\underline{CO}+AE\cdot OP+\underline{BD}\cdot\underline{OP})=0{,}5(BD\cdot(CO+P)+$$

$$+AE\cdot OP)=0{,}5(BD\cdot CP+AE\cdot OP).$$

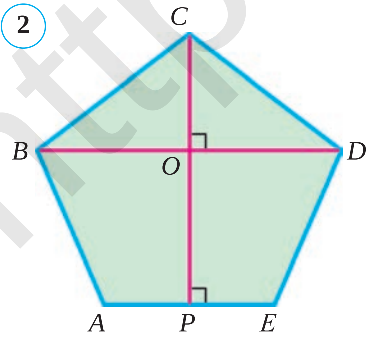
$$S_{ABCDE}=0{,}5(BD\cdot CP+AE\cdot OP).$$

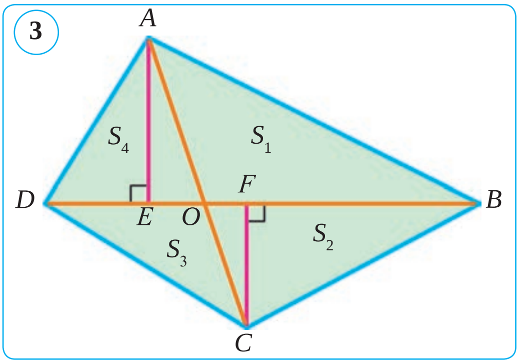
Масъалаи 2. AC ва BD диагоналҳои чоркунҷаи $ABCD$, O – нуқтаи буриши диагоналҳо (расми 3). Агар $S_{AOB}=S_1$, $S_{BOC}=S_2$, $S_{COD}=S_3$ ва $S_{AOD}=S_4$ бошад, $S_1\cdot S_3=S_2\cdot S_4$ буданашро исбот кунед.

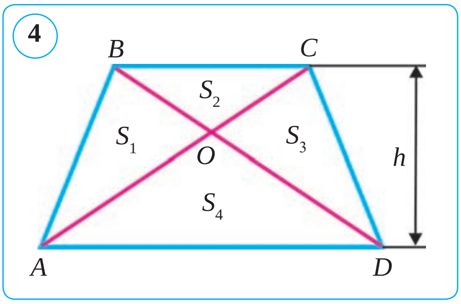
Исбот. 1) $AE\perp BD$ ва $CF\perp BD$-ро мегузаронем.

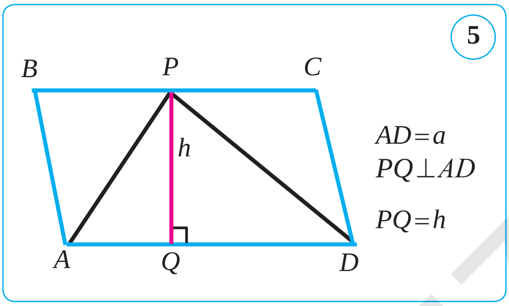
2) $\frac{S_1}{S_4}=\frac{0{,}5OB\cdot AE}{0{,}5OD\cdot AE}=\frac{OB}{OD}$ (1) ва $\frac{S_2}{S_3}=\frac{0{,}5OB\cdot CF}{0{,}5OD\cdot CF}=\frac{OB}{OD}$ (2).

3) (1) ва (2) аз меёбем: $\frac{S_1}{S_4}=\frac{S_2}{S_3}\Rightarrow S_1\cdot S_3=S_2\cdot S_4$.









Масъалаи 3. BC ва AD – $ABCD$ асосҳои трапетсияи, O –AC ва BD нуқтаи буриши диагоналҳои (расми 4). $AD = a$, $BC = b$ зеринро исбот кунед.

$S_{AOB}=S_1$, $S_{BOC}=S_2$, $S_{COD}=S_3$ ва $S_{AOD}=S_4$ бошад, баробариҳои зеринро исбот кунед:

1) $S_1 = S_3 = \sqrt{S_2 \cdot S_4}$; 2) $S_{\text{tr.}} = \left(\sqrt{S_2} + \sqrt{S_4}\right)^2$.

Исбот. 1) $S_{ABC} = S_{DBC} = \frac{1}{2}bh \Rightarrow S_1 + \underline{S_2} = S_3 + \underline{S_2} \Rightarrow S_1 = S_3$.

2) Ба мо $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$ маълум. $S_1 = S_3$-ро ба назар гирем, $S_1 = S_3 = \sqrt{S_2 \cdot S_4}$ ҳосил мешавад. Қисим якуми масъала исбот шуд.

3) Масоҳати трапетсия ба ҳосили ҷамъи чорто масоҳати натиҷаҳои баландро ба эътибор гирифта ба ин соҳиб мешавем.

$$S_{\text{tr.}} = \underline{S_1} + S_2 + \underline{S_3} + S_4 = S_2 + 2S_1 + S_4 =$$

$$= \left(\sqrt{S_2}\right)^2 + 2\sqrt{S_2 \cdot S_4} + \left(\sqrt{S_4}\right)^2 = \left(\sqrt{S_2} + \sqrt{S_4}\right)^2.$$

Пас, $S_{\text{tr.}} = \left(\sqrt{S_2} + \sqrt{S_4}\right)^2$. Қисми дуюми масъала низ исбот шуд.

Масъалаи 4. Масоҳати секунҷаи бо параллелограмм бо асос ва баландии умумӣ соҳиб буда ба нисфи масоҳати параллелограмм баробар аст.

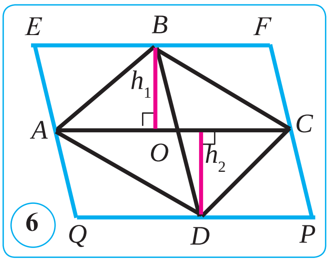
Исбот. AD асос ва h баландӣ $ABCD$ параллелограмм бо секунҷаи APD низ умумӣ (расми 5). $S_{APD}=0{,}5S_{ABCD}$ буданашро исбот мекунем.

$S_{ABCD}=ah$ (1) ва $S_{APD}=0{,}5ah$ (2) буданаш маълум (2) ба ҷойи баробарии (2) ah S_{ABCD}-ро гузошта меёбем: $S_{APD}=0{,}5ah=0{,}5S_{ABCD}$.

Дар хотир доред! Масъалаи болоиро чунин низ хондан мумкин: *масоҳати параллелограмм бо секунҷа асос ва баландии умумӣ дошта, аз масоҳати параллелограмм ва масоҳати секунҷа ду маротиба калон аст.*

Масъалаи 5. Бо воситаи қуллаҳои чоркунҷаи барҷаста ба диагоналҳои он хатҳои рости параллел гузаронанд, онгоҳ масоҳати параллелограмми ҳосилшуда ва масоҳати чоркунҷа ду маротиба калон мешавад. Онро исбот кунед.

Исбот. $ABCD$ – чоркунҷаи барҷаста, O – нуқтаи буриши диагоналҳои AC ва BP, h_1 ва h_2 бошад аз қуллаҳои B ва D – и чоркунҷа ба қуллаи AC – диагонали гузаронида шуда, мебошад.

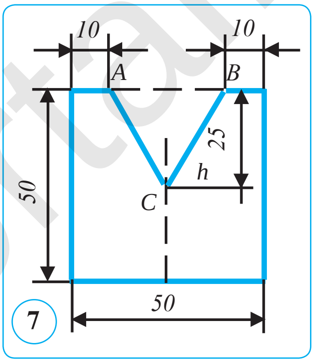


EFPQ ба воситаи параллелограмми дар натиҷаи буриши хати рост ва диагоналҳои аз қуллаҳои параллелограми ҳосилшуда (расми 6). $S_{EFPQ}=2S_{ABCD}$ буданашро исбот мекунем. Мувофиқи сохтани тарафҳои, параллелограмм тарафҳои *EF* ва *QP* ба диагонали *AC* параллел ва баробар аст. Бинобар ин, диагонали *AC* параллелограми ҳосил шудаи *EFPQ*-ро ба дуто – *AEFC* ва *ACPQ* ҷудо мекунад. Аз хулосоҳои болоӣ истифода бурда, баробарии $S_{EFPQ}=2S_{ABCD}$ -ро исбот мекунем:

$$S_{EFPQ}=S_{AEFC}+S_{ACPQ}=2S_{ABC}+2S_{ADC}=2(S_{ABC}+S_{ADC})=2S_{ABCD},\ \text{яъне} S_{EFPQ}=2S_{AB\text{-}}$$

CD:

Савол, масъала ва супоришҳо



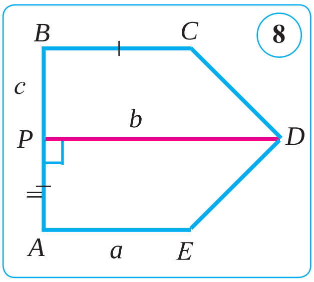
1. Масоҳати шакли дар расми 7 бударо ёбед.

Ҳал: Масоҳати шакли дар расм тасвир шударо бо нуқтаҳои *A* ва *B* пайваст намуда, онро то квадрат пурра намуда ёфтан кулай аст. Масоҳати шакли ҳосилшуда ба фарқи масоҳатҳои квадрати ҳосилшуда ва секунҷаи *ABC* баробар аст:

$S=S_{\text{кв.}}-S_{ABC}=...^2-0{,}5\cdot(50-2\cdot10)\cdot...=$
$=...-375=...$ (воҳ. кв).

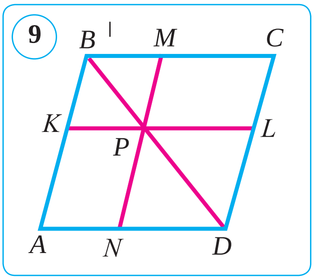
Ба ҷои нуқтаҳо ҷавобҳои мувофиқро гузоред.

Ҷавоб: ... (воҳ.кв).



2. Барои ҳисоб кардани масоҳати шакли дар расми 8 тасвирёфта формула оред. Дар ин $AE\|BC\|PD$, $AE=BC$, $AP=PB$, $PD\perp AB$.

3. *Дода шудааст:* Дар росткунҷаи *ABCD*, *AB* = 12 см, *AD*=16 см; *E*, *F*, *P* ва *Q* нуқтаҳои миёнаи тарафҳои мувофиқ. *Ёфтан лозим:* S_{EFCPQA}-ро ёбед.



4. *Дода шудааст:* параллелограмми *ABCD, P* $\in BD$, $KL \parallel BC$, $MN \parallel AB$ (расми 9). Бояд исбот кард, ки: $S_{AKPN}=S_{PMCL}$.

5. *AC* ва *BD* диагоналҳои чоркунҷаи *ABCD*. *O* –нуктаи буриши онҳо. $S_{AOD}=12$, $S_{BOC}=8$, $S_{AOB}=6$. S_{COD} -ро ёбед.

6. Масоҳати майдони замини росткунҷашакл 400 *ha*. Агар: 1) қади майдон 10 км бошад; 2) майдон дар шакли квадрат бошад, периметри он чӣ хел мешавад?

52. ТАТБИҚ ВА МАШҚИ АМАЛӢ

I. Масъалаҳо барои тадкикот.

Масъалаи 1. Масъалаи росткунҷаи тарафҳояш адади натуралӣ ва периметраш ба 4 каратиро дида мебароем. Масоҳати аз ҳама калондоштаи, периметраш ба 72 см баробар ва тарафҳояш ба адади натуралӣ баробар бударо ёбед. Он чӣ хел шакл аст? Хулоса бароред.

Ҳал. Дар росткунҷа: $P=2\cdot(a+b)=72$ см – периметр, $p=a+b=$ 36 см ним – периметр, яъне суммаи тарафҳои ҳамсоя. Баъди маълум гардидани қиматҳои a ва b пас аз маълум шудан $S=a\cdot b$-ро ҳисоб мекунем. Барои ба шарти масъала ҷавоб додан тарафҳои ҳамсояи росткунҷаро меёбем.

Барои он 36 – ро ба намуди ҳосили ҷамъи ду адади натуралӣ ифода менамоем:

$$a+b=36=1+35=2+34=3+33=...=33+3=34+2=35+1.$$

Аз ин ҷо маълум мешавад, ки 35-то росткунҷаи суммаи тарафҳояш ба 36 см баробар буда мавҷуд аст. Маълумотҳоро ба ҷадвал гузошта, онро таҳлил намуда, хулоса менамоем: Аз ҷадвал маълум аст, ки ба масоҳати аз ҳама хурд:

a см	**1**	2	...	**17**	**18**	**19**	20	...	**34**	**35**
b см	**35**	34	...	**19**	**18**	**17**	16	...	**2**	**1**
$(a+b)$ см	**36**	**36**		**36**	**36**	**36**	**36**	...	**36**	**36**
$S=a\cdot b$ см^2	**35**	68	...	**323**	**324**	**323**	320	...	**68**	**35**

$a=1$ см ва $b=35$ см ё ки $a=35$ см ё ки $b=1$ см бошад, масоҳати аз ҳама калон $a=b=18$ см квадрати тарафаш 18 см буда мувофиқ аст периметри росткунҷаҳои боқимонда 72 см бошад, аммо масоҳаташ аз $18\cdot18=324$ (см^2) хурд аст аз рӯи таҳлили ҷадвал ба хулосаи зерин меоем.

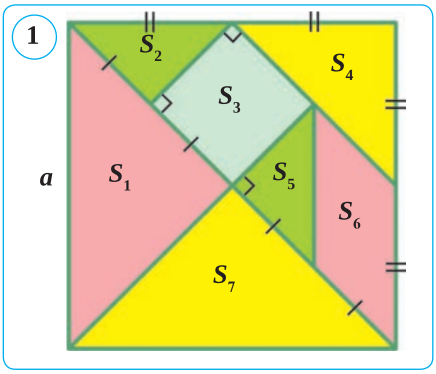
Ҳулосаи 1. Агар тарафҳои росткунҷа ададҳои натуралӣ ва периметраш ба 4 каратӣ бошад, масоҳати аз ҳама калон аз рӯи формулаи зерин ёфта мешавад:

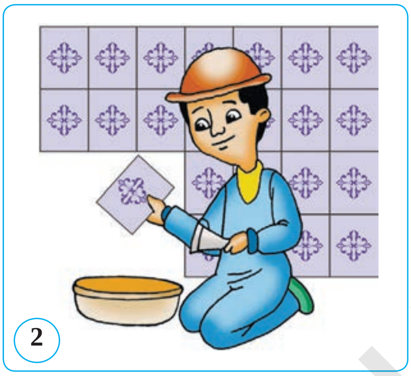
$$S_{\max}=\left(\frac{P}{4}\right)^2 \text{ воҳ. кв.}$$

Хулосаи 2. Агар тарафҳои росткунҷа, ададҳои натуралӣ ва периметраш ба 2 каратӣ бошад, онгоҳ аз байни ҳамаи росткунҷаҳои периметрҳояшон баробар яке аз тарафҳояш ба 1 тарафи дуюмаш бошад, дар ҳолати 1 – ро ба ним периметр пуркунанда адад буданаш ба қимати аз ҳама хурди масоҳат соҳиб мешавад.

Ҳулосаи 3. Дарозии тарафҳои ҳамсояи росткунҷа ба якдигар чӣ қадар наздик шавад, масоҳати он зиёд мешавад.

Масъалаи 2. Дар бозии «тангам»- и хитойиҳо квадрат (ниг. ба расми 1) ба секунҷа ва чоркунҷаҳо ҷудо карда шудаанд аз онҳо ҳар гуна шаклҳо сохтан мумкин. Агар тарафи квадрат ба 8 см баробар бошад, масоҳати шаклҳои ҷудо карда шударо ёбед.





Ҳал. $a=8$ см – тарафи квадрат. $S=a^2=8^2=64$ (см^2) – масоҳати квадрати додашуда. Акнун масоҳати қисмҳои дар шакл бударо меёбем.

1) S_1 va S_7 – ба аз чор як қисми масоҳати квадрат баробар аст, пас,

$$S_1=S_7=S:4=64:4=16 \text{ (см}^2\text{)}.$$

2) Масоҳати секунҷаи росткунҷаи баробарпаҳлӯ ба аз чор як ҳиссаи квадрати гипотенуза баробар аст, пас,

$$S_2=S_5=0{,}25\cdot(a:2)^2=0{,}25\cdot4^2=0{,}25\cdot16=4 \text{ (см}^2\text{)}.$$

3) S_3 масоҳати квадрати S_2 ба ҳосили ҷамъи ду секунҷа баробар аст. Пас, $S_3=2S_2=2\cdot4=8$ (см^2).

4) S_4 Катети секунҷаи $a:2=8:2=4$ (см). ба нисфи тарафи квадрати додашуда баробар. Масоҳати секунҷаи баробарпаҳлӯ ба нисфи квадрати катети он баробар аст, яъне $S_4=0{,}5\cdot4^2=0{,}5\cdot16=8$ (см^2).

5) Асосҳо ва баландиҳои квадрат ва параллелограмм баробар бошад, он баробарандоза аст, бинобар ин $S_6=S_3=2\cdot4=8$ (см^2) мешавад.

Ҷавоб: $S_1=S_7=16$ см^2; $S_2=S_5=4$ см^2; $S_3=S_4=S_6=8$ см^2.

Масъалаи 3. Усто қадаш 2,25 м ва бараш 1,8 м деворро кафел кардаанист. Девор шакли росткунҷаро дорад. Барои ин кафели квадратшакли тарафаш 15 см-а чандто лозим мешавад (расми 2)?

Ҳал. 1) Масоҳати девори кафел мекардаро меёбем ва онро бо сантиметри квадратӣ ифода мекунем?

$$2{,}25\cdot1{,}8=4{,}05 \text{ (м}^2\text{)}=4{,}05\cdot10000 \text{ см}^2=40500 \text{ см}^2.$$

2) Масоҳати 1 дона кафелро меёбем: $a^2=15^2=225$ (см^2).

3) Девори росткунҷаро барои бо кафел пӯшонидан чанто кафел лозим аст, меёбем:

$$40500:225=180 \text{ (то)}.$$

Ҷавоб: 180 та кафел.

Ҳалли масъалаи зеринро ба худатон ҳавола мекунем.

Масъалаи 4. Роҳрави квадратшакли тарафаш ба 4 м баробар бударо барои бо кафел пӯшонидан чандто кафели тарафаш 20 см – а лозим мешавад?

МАТЕРИАЛИ ИЛОВАГИИ КОМПЕТЕНСИЯИ АМАЛИРО РИВОҶДИҲАНДА

ҲИСОБ КАРДАНИ МАСОҲАТ БО КОҒАЗИ КАТАКДОР

Дар коғази катакдор барои ҳисоб кардани бисёркунҷаи барҷаста ва ғайрибарҷаста «формулаи Пик» ном формуларо ҳосил мекунем. Дарозии тарафи ҳар як катак 1 см бошад, нуқтаҳои буриши хатҳои рости коғази катакдор – нӯгҳои квадратчаҳои воҳидиро, нуқтаҳои гиреҳ меномем, онгоҳ масоҳати бисёркунҷа аз рӯи формулаи зерин ҳисоб карда мешавад:

$$S = \frac{M}{2} + N - 1.$$

Дар ин формула M – шумораи нуқтаҳои гиреҳи дар ҳудуди бисёркунҷа буда N – шумораи нуқтаҳои гиреҳи дар дохили бисёркунҷа буда. Ин формуларо барои қуллаҳои бисёркунҷаи дар нуқтаҳои гиреҳ буда татбиқ карда мешавад.

Масъалаи 1. Масоҳати шакли дар расми 1 будаpo ёбед.

Ҳал. *Усули.* 1) Ҳамаи шумораи квадратҳои пурра 59-то буда масоҳати он 59 см^2, шумораи секунҷаҳои ба нисфи квадрат баробар буда 16-то буда, масоҳати он $16:2=8$ (см^2); якто асосаш 2 см, секунҷаи баландиаш ба 3 см баробар ҳаст масоҳати он ба 3 см^2 баробар.

Ҳаминтавр, масоҳати бисёркунҷаи додашуда:

$$S=59+8+3=71 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Усули 2. Ҳамин ҷавобро бо ёрии формулаи Пик ҷӣ хел ёфтан мумкин дида мебароем. Нуқтаҳои гиреҳро ишорат менамоем.

1) Нуқтаҳои гиреҳи дар дохили шакл хобидаро (бо ранги сиёҳ ишорат карда шудааст) мешуморем: онҳо 50-то, яъне $N=50$.

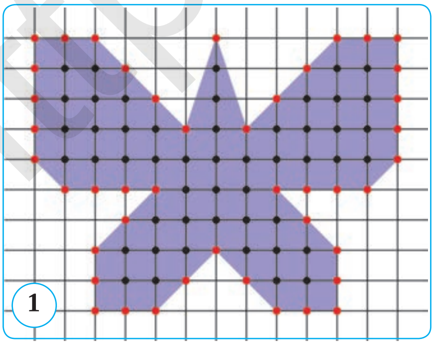
2) Гиреҳҳои дар тарафи шакл хобидаро (бо ранги сурх ишора менамоем) мешуморем: онҳо 44-то, яъне $M=44$. ба формулаи Пик мегузорем:

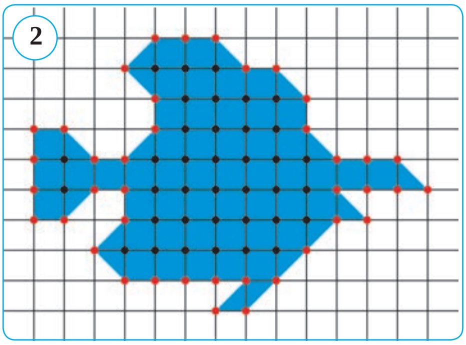
$$S = \frac{44}{2} + 50 - 1 = 22 + 49 = 71 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Пас, бо ду усул ҳам натиҷаи якхела ҳосил мешавад. *Ҷавоб:* 71 см^2.

Масъалаи 2. Масоҳати бисёркунҷаи дар расми 2 будаpo ёбед.

Ҳал. 1) Нуқтаҳои гиреҳи дар тарафҳои бисёркунҷа хобидаро бо (ранги сурх ишора мекунем) мешуморем: онҳо 40-то, яъне $M=40$.



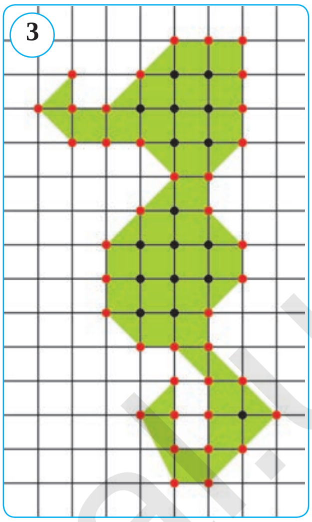


2) Нуқтаҳои гиреҳи дар дохили бисёркунча бударо бо (ранги сиёҳ ишора мекунем) мешуморем: онҳо ба 37-то, яъне мувофиқи формулаи Пик $N = 37$.

$$S = \frac{40}{2} + 37 - 1 = 20 + 36 = 56 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ҷавоб: 56 см^2.

Масъалаи 3. Масоҳати бисёркунчаи (расми 3) – ро ҳисоб кунед.


3

Ҳал. Усули 1) нуқтаҳои гиреҳи дар тарафҳои бисёркунча хобидаро (бо ранги сурх ишора кардаанд) мешуморем: онҳо 39-то, яъне $M = 39$.

2) Нуқтаҳои гиреҳи дар дохили бисёркунча хобидаро (бо ранги сиёҳ ифода шудаанд) мешуморем: онҳо 17-то, яъне мувофиқи формулаи Пик $N = 17$.

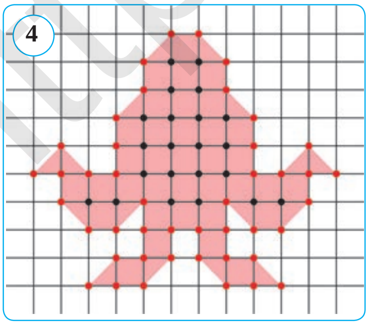
$$S = \frac{39}{2} + 17 - 1 = 19,5 + 16 = 35,5 \text{ (см}^2\text{)}.$$

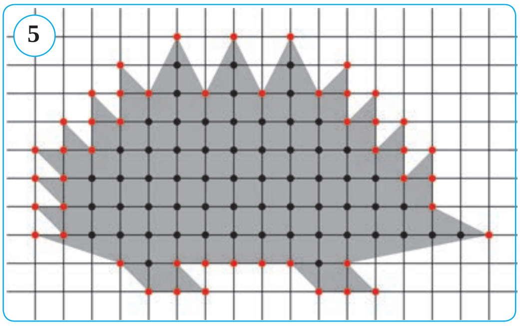
Усули 2. Агар бо ҷавобҳои гирифта шуда боварӣ ҳосил кардани бошед, аввал бисёркунчаи додашударо бо усулҳои гуногун ба бисёркунчаҳои омӯхташудаи барчаста тақсим намоед баъд масоҳати шаклҳои ҳосилшударо ба формулаҳои алоқананд ҳисоб кунед. Натиҷаи ҳосилшударо ҷамъ намуда, бо натиҷаи усули 1 муқоиса кунед. Агар ҳисобкуниҳо иҷро карда шуда бошад, ҳарду натиҷа як хел хоҳад дуруст шуд. Бисёркунчаи додашуда дар натиҷа ба қисмҳои гуногун ҷудо карда нишон надиҳад ҳам мешавад. Ҳисобкуниҳоро даҳонӣ ҳам иҷро кунад мешавад, он ба худатои вобаста аст. Ҳамаи шумораи квадратҳо 26-то, масоҳати онҳо 26 см^2; миқдори секунҷаҳои ба нисфи квадрат баробар 17-то, масоҳати онҳо $17:2 = 8,5$ (см^2); Як асосаш 2 см баландиаш ба 1 см баробар секунҷа ҳаст, масоҳати он ба 1 см^2 баробар аст. Ҳаминтавр, масоҳати бисёркунчаи додашуда: $26 + 8,5 + 1 = 35,5$ (см^2).

Пас ҳарду натиҷа як хел.

Ҷавоб: 35,5 см^2.

Масъалаи 4. Бо ёрии формулаи Пик масоҳати бисёркунчаҳои дар расми 4 ва 5 бударо ҳисоб кунед.


4


5

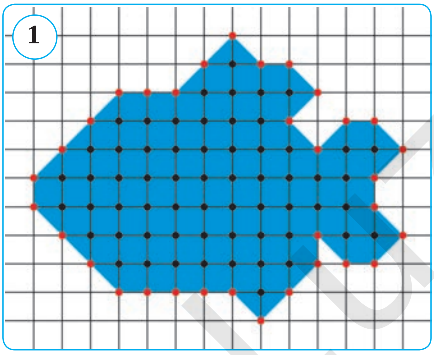
53–54. 4-КОРИ НАЗОРАТӢ. ИСЛОҲ НАМУДАНИ ХАТОГИҲО

1. Масоҳати квадрати ба перимети росткунҷаи тарафҳояш 27 см ва 21 см – баробарро ёбед.

2. Масоҳати росткунҷа 540 см^2, нисбати ду тараф ҷун 3:5 масоҳати ин квадратро ёбед.

3. Масоҳати параллелограмм 24 см^2. Агар баландии онҳо 3 см ва 4 см бошад, периметри онро ёбед.

4. Масоҳати шаклҳои дар расми 1 тасвиршударо бо қисмҳо ҷудо карда инчунин аз формулаи Пик истифода бурда ёбед.



ТЕСТИ 4

Худро санҷида бинед!

1. Агар тарафҳои росткунҷа 4 маротиба зиёд карда шавад, масоҳати он чанд маротиба зиёд мешавад?

A) 4; B) 8; D) 16; E) 32.

2. Масоҳати секунҷа 400 h_a нисбати тарафҳо ба 4:1 баробар аст. Периметри росткунҷаро ёбед.

A) 10 км; B) 5 км; D) 2 км; E) 8 км.

3. Дарозии росткунҷа 25% зиёд карда шуд, барои тағйир наёфтани масоҳати он бари онро чӣ қадар фоиз, кам намудан лозим?

A) 20%; B) 16%; D) 25%; E) 18%.

4. Агар тарафи квадрат чанд маротиба кам карда шавад масоҳаташ 4 маротиба кам мешавад?

A) 1,5 маротиба; B) 2 маротиба; D) 3 маротиба; E) 3,5 маротиба.

5. Периметри параллелограмми масоҳаташ 144 см^2, баландиаш 8 см ва 12 см бударо ёбед.

A) 40 см; B) 30 см; D) 80 см; E) 60 см.

6. Ба диагонали *AC*-и параллелограмми *ABCD* перпендикуляри *BO* фароварда шудааст. Агар $AO=8$ см, $OC=6$ см ва $BO=4$ см бошад масоҳати параллелограммро ёбед.

A) 50 см^2; B) 28 см^2; D) 52 см^2; E) 56 см^2.

7. Масоҳати ромб ба 40 см^2, периметри он ба 20 см баробар аст. Баландии ҳамин ромбро ёбед.

A) 2 см; B) 8 см; D) 4 см; E) 16 см.

8. Масоҳати трапетсияи асосҳояш ба 5 см ва 9 см баробар буда, ба 35 см^2 баробар аст. Баландии ҳамин трапетсияро ёбед.

A) 9 см; B) 8 см; D) 5 см; E) 10 см.

9. Диагоналҳои трапетсияи асосҳояш ба 8 ва 12 см баробар байни худ перпендикуляранд. Масоҳати трапетсияро ёбед.

A) 100; B) 64; D) 144; E) 76.

10. Агар масоҳати трапетсия ба 30 см^2 баландиаш ба 6 см баробар бошад, хати миёнаи он ба чанд баробар мешавад?

A) 2,5 см; B) 5 см; D) 7,5 см; E) 4,5 см.

Забони англисиро меомӯзем!

Решаи квадратӣ – square root
Хати миёна – midline
Масоҳат – area

Секунча – triangle
Формулаи Герон – formula of Heron

Маълумотҳои таърихӣ

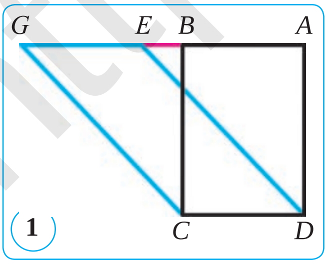
Абӯалӣ Ибни Сино
(980–1037)

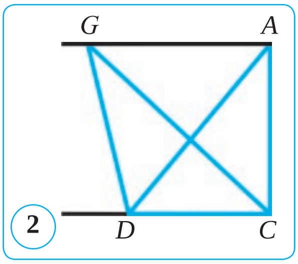
Боби панчуми асари «Донишнома»-и Ибни Сино ба «Масъалаҳои асосии геометрӣ доир ба чоркунҷаҳо, секунҷаҳои дар он ҷойгиршуда ва муносибатҳои онҳо» бахшида шудааст.

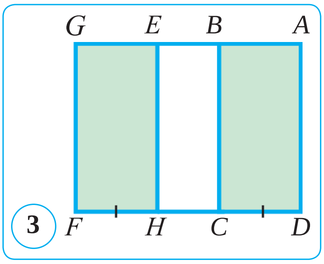
Теоремаи 1. Шаклҳои ба ҳам параллел ва байни ду хат ҷойгиршуда, дорои асоси умумӣ ва тарафҳои муқобилаш параллел ва баробарандозаанд (яъне масоҳаташон баробар). Масалан: шаклҳои ҳамвори *ABCD* ва *EGCD*-и асосҳояшон *CD* ба ҳам баробарандоза мебошанд (расми 1).

Теоремаи 2. Секунҷаҳои дар байни хатҳои умумӣ параллел ҷойгиршуда ва дорои асоси умумӣ баробарандозаанд. Масалан, секунҷаҳои *ACD* ва *GCD*-и дорои асоси *CD* баробарандоза мебошанд (расми 2).

Теоремаи 3. Чоркунҷаҳои дар байни хатҳои ба ҳам параллел ҷойгиршуда ва асосҳояшон баробар баробарандозаанд. Масалан, чоркунҷаҳои *ABCD* ва *GEHF* баробарандозаанд (расми 3).







БОБИ V
ДАВРА

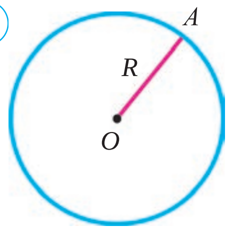
§ 10. КУНҶҲОИ ДАВРА

55. ВАЗЪИЯТИ БАЙНИҲАМ ҶОЙГИРШАВИИ ДАВРА ВА ХАТИ РОСТ. РАСАНДА БА ДАВРА ВА ХОСИЯТҲОИ ОН

1. Маълумоти ибтидоӣ доир ба давра.

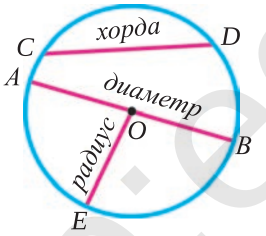
Таъриф. *Ҷои геометрии нуқтаҳои ҳамворӣ, ки аз нуқтаи додашудаи ҳамин ҳамворӣ дар як хел масофа воқеъанд,* ***давра*** *номида мешавад.*

1



Давраи *O* марказнок, *R* радиуснок, яъне (*O*, *R*)

а



CD – хорда, *OE* – радиус, *AB* – диаметр

б

Нуқтаи *O* ***маркази давра*** ном дорад.

Порчаи нуқтаи ихтиёрии давраро бо марказаш пайвасткунанда ***радиуси давра*** ном дорад. Ҳар гуна порчаи нуқтаи давраро бо маркази он пайвасткунанда ҳам *радиус* мебошад. Ҳаминтавр, нуқтаи марказаш O ва давраи радиусаш *R* буда аз нуқтаи додашудаи O дар масофаи ба *R* баробар ҷойгиршудаи шакли геометрии аз ҳама нуқтаҳои ҳамворӣ сохташуда мебошад. Одатан, давраи марказаш *O* ва радиусаш *R* чунин ишора мешавад: (*O, R*) (расми 1, *а*).

Порчаи ду нуқтаи ихтиёрии давраро пайвасткунанда ***хорда*** ном дорад. Хордаи аз маркази, давра гузаранда ***диаметр*** аст. Дар расми 1, *б* радиус ва ду хордаи давра тасвир карда шудааст, яъне яке аз хордаҳо диаметри давра аст: *OE* – радиус, *CD* – хорда, *AB* – диаметр. Диаметр бо ҳарфи *d* ишорат карда шуда, он ба ду радиус баробар аст. Яъне, d=2R аст.

2. Байниҳам ҷойгиршавии давра ва хати рост.

Дар ин банд ҷойгиршавии хати рост ва давраро дар ҳамворӣ дида мебароем. Агар хати рост аз маркази давра гузарад, дар он ҳолат он давраро дар ду нуқта, яъне дар қуллаҳои диаметри дар ҳамин хати рост хобида мебурад.

Хати рости додашудаи *l* ва давраи *(O, R)* дорои чанд нуқтаи умумӣ аст? Барои ҷавоб ёфтан ба ин савол масофаи *d*-ро аз маркази *O*-и давра *O* то хати рости *l* бо радиуси *R*-и ҳамин давра муқоиса бояд кард.

Перпендикуляри аз маркази давра ба хати рост гузаронидашуда, *масофаи аз маркази давра то хати рост* номида мешавад.

Се ҳолат вуҷуд доштанаш мумкин: 1) $d > R$; 2) $d = R$; 3) $d < R$. Акнун ин ҳолатҳоро дида мебароем

Ҳолати 1. *Агар масофа аз маркази давра то хати рост аз радиуси давра калон бошад, давра ва хати рост дорои нуқтаи умумӣ нест, яъне намебурад.*

Дарҳақиқат, агар $d > R$ бошад, (ниг. ба расми 2, *а*), нуқтаи наздиктарини хати рости l ба маркази O (пас, нуқтаи дилхоҳи ин хати рост низ) ба давраи (O, R) тааллуқ надорад, чунки он аз марказ аз радиуси давра дар масофаи калон мешавад.

Ҳолати 2. *Агар аз маркази давра то хати рост масофа ба радиуси давра баробар бошад, дар он ҳолат хати рост ба давра якта ва фақат ба якта нуқтаи умумӣ соҳиб мешавад.*

Дарҳақиқат, агар $d = R$ бошад, (ниг. ба расми 2, *б*) нуқтаи наздиктарин ба нуқтаи O-и хати рости l радиуси давра дар масофаи баробар мешавад. Пас, ин нуқта ба давра низ тааллуқ дорад. Ҳамаи нуқтаҳои боқимондаи хати рости l аз маркази O ва радиуси давра дар масофаи калон мешавад. Пас, ба давра тааллуқ надорад.

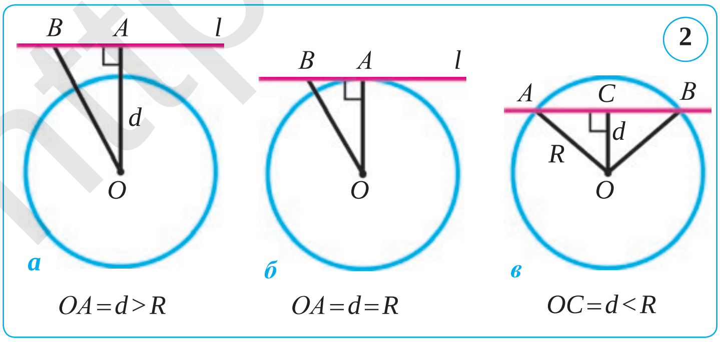
Ҳолати 3. *Агар масофа аз маркази давра то хати рост аз радиуси давра хурд бошад ($d < R$), дар он ҳолат давра ва хати рост дорои ду нуқтаи умумӣ мебошад.*

Қисми дар дохили давра будаи хати рост хорда аст (расми 2, *в*). Дар ин ҳолат хати рост нисбат ба давра *буранда* ном дорад.

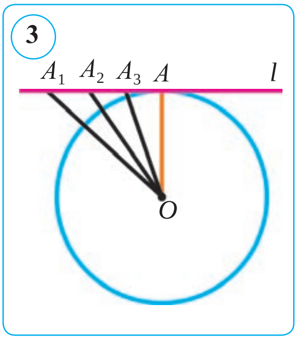
Радиуси давраи AB-и дарозии хорда ва масофаро аз марказ то хати рост ба воситаи d ифода кардан мумкин аст: $AB = 2\sqrt{R^2 - d^2}$.

Ин баробариро худатон исбот кунед.

Хулоса. *Давра ва хати рост метавонад дорои нуқтаи умумӣ набошад, як ва ё ду нуқтаи умумӣ дошта бошад.*



а $OA = d > R$ *б* $OA = d = R$ *в* $OC = d < R$



2. Расанда ба давра.

Таъриф. *Хати рости бо давра дорои танҳо якто нуқтаи умумӣ, расанда ба давра номида мешавад. Нуқтаи умумии онҳо* ***нуқтаи расанда*** *аст.*

Дар расми 2, *б* l хати рост – расанда ба давраи марказаш O, A – нуқтаи расиш. Давра ба хати рости l мерасад ҳам гуфтан мумкин аст.

Теоремаро дар бораи хосияти расанда исбот мекунем.

Теоремаи 1.

Расанда ба давра ба радиуси ба нуқтаи расиши ҳамин давра гузаронидашуда перпендикуляр аст.

Исбот. Бигзор хати рости l ба давра расандаи ба нуқтаи A гузаронидашуда бошад (расми 3). Исбот мекунем, ки $R = OA$ ба l перпендикуляр аст. Мувофиқи шарт ғайр аз нуқтаи l-и хати рост дигар ҳамаи нуқтаҳо берун аз давра мехобанд. Бинобар ин, ғайр аз A барои ҳар гуна нуқтаи A_1, $OA_1 > OA$ аст. Пас, масофаи OA аз масофаҳои нуқтаи O то нуқтаҳои хати рости l кӯтоҳтарин аст. Масофаи кӯтоҳтарин аз нуқта то хати рост бошад, перпендикуляри ба ҳамин хати рост фаровардашуда мебошад. Аз ин ҷо $OA \perp l$ бармеояд. Теорема исбот шуд.

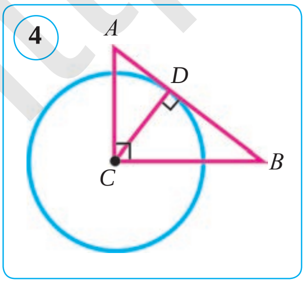
Акнун теоремаи ба хосияти расандаҳо чаппаро исбот мекунем (аломати расанда).

Теоремаи 2.

Хати рости ба радиус перпендикуляр ва аз нӯги (қуллаи) ба давра хобидаи он гузаронда, расанда ба ин давра номида мешавад.

Исбот. Агар масофа аз маркази давра то хати рост ба радиуси давра баробар бошад ($d = R$) (ниг. ба расми 2, *б*), нуқтаи наздиктарин ба маркази O-и хати рости l ба радиуси давра баробар мешавад. Дигар ҳамаи нуқтаҳои хати рости l аз маркази O радиуси давра дар масофаи калонтар мешавад, пас ба давра таaллуқ надорад. Аз рӯи таърифи хати рост l ба ҳамин давра расанда аст. Теорема исбот шуд.

Масъала. Катетҳои $AC=3$ см ва $BC=4$ см. секунчаи росткунчаи $ACB(\angle C=90^\circ)$. Давраи марказаш дар нуқтаи C ва радиусаш ба 2,4 см баробар буда гузаронида шудааст. Давра ва хати рости AB байни худ чӣ хел ҷойгир шудааст?



4

Ҳал. Дар $\angle ACB$ ($\angle C=90^\circ$): $AC=3$ см, $BC=4$ см мувофиқи теоремаи Пифагор:

$$AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ (см)}.$$

$CD \perp AB$-ро мегузаронем (расми 4) Масоҳати секунчаро ду хел ҳисоб кардан мумкин, яъне баробарии $CA \cdot CB = AB \cdot CD$ бамавқеъ аст. Аз ин .C

$D = CA \cdot CB : AB = 3 \cdot 4 : 5 = 2{,}4$ (см). Пас, аз нуқтаи C-то хати рости AB масофаи буда, барои ба дарозии радиус баробар буданаш хати рости AB ба давра бармехӯрад *Ҷавоб:* AB – расанда.

Савол, масъала ва супоришҳо

1. 1) Давра чист? Радиус, маркази он чист? Хордаи давра чист? Чӣ гуна хати рост ба давра расанда номида мешавад?

2) Кадом ҳосият ва аломати расандаро медонед?

2. $d - R$ масофа аз маркази давраи радиусаш то хати рости l. Агар: *1)* $R = 8$ *см,* $d = 6$ *см; 2)* $R = 10$ *см,* $d = 8{,}4$ *см; 3)* $R = 14{,}4$ *дм,* $d = 7{,}4$ *дм; 4)* $R = 1{,}6$ *дм,* $d = 24$ *см; 5)* $R = 4$ *см,* $d = 40$ *мм* бошад, хати рости l ва давра нисбат ба ҳамдигар чӣ гуна ҷойгир мешаванд?

3. Тарафҳои квадрати $ABCD$ ба 8 см ва радиуси давраи марказаш дар нуқтаи A буда, ба 7 см баробар аст. Кадоме аз хатҳои рости AB, BC, CD ва BD нисбат ба ҳамин давра буранда мешавад?

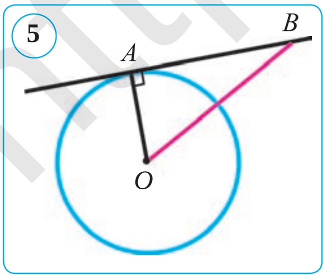
4. Хати рости AB ба нуқтаи A-и давраи марказаш O расанда мебошад. Агар $AB = 24$ см, радиуси давра ба 7 см баробар бошад. Дарозии порчаи OB – ро ёбед (расми 5).

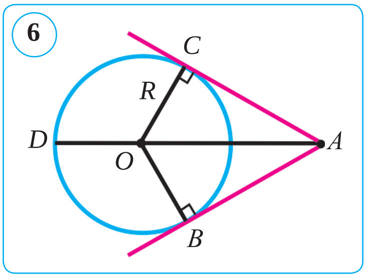
5. Росткунҷаи ACB ба секунҷаи ($\angle C = 90°$) $AB = 10$ см, $\angle ABC = 30°$. Давраи марказаш нуқтаи A гузаронида шудааст. Дар кадом ҳолати радиуси ин давра: 1) давра ба хати рости BC расанда аст; 2) бо хати рости BC дорои нуқтаи умумӣ нест; 3) бо хати рости BC ба ду нуқтаи умумӣ доро аст?

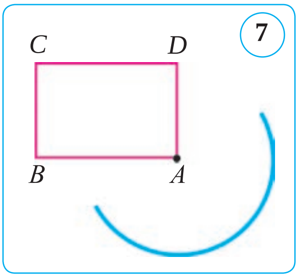
6. Агар аз нуқтаи беруни давра ба он ду расанда гузашта шуда бошад, масофаи аз он нуқта то нуқтаи расиш баробар аст. Инро исбот кунед (расми 6).

7. Агар радиуси давра ба 5 см баробар. Масофа аз маркази давра то хати рост: 1) 6 см, 2) 5 см, 3) 4 см бошад, хати рост бо давра бо чӣ хел хати рост ба давра байни ҳам чӣ гуна ҷойгир мешавад?

8. Росткунҷаи $ABCD$ дода шудааст, дар он $AB = 16$ см, $AD = 12$ см (расми 7). Радиуси кадоме аз хатҳои рости AC, BC, CD ва BD ба давраи 12 см марказаш A расанда аст?





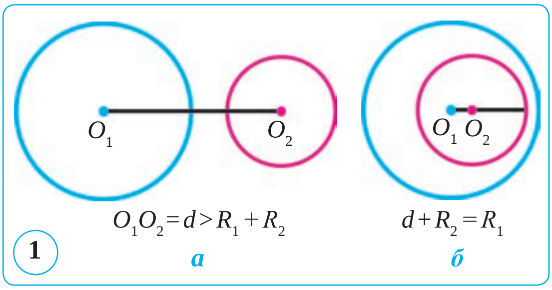


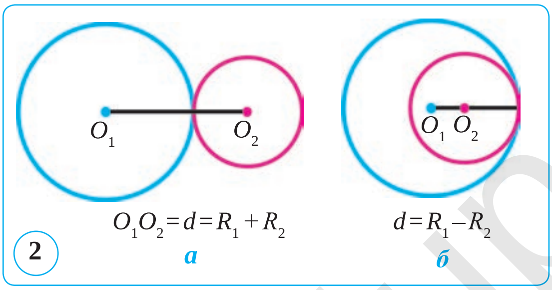
56. ВАЗЪИЯТИ БАЙНИҲАМ ҶОЙГИРШАВИИ ДУ ДАВРА. КУНҶИ МАРКАЗӢ ВА ЧЕНАКИ ГРАДУСИИ КАМОН

1. Вазъияти байниҳам ҷойгиршавии ду давра.

Ҳолатҳои байниҳам ҷойгиршавии ду давраро дида мебароем.

1) Ду давра ба нуқтаи умумӣ соҳиб нест. Дар ин ҳолат аз давра берун (расми 1, *а*) ё ки якумаш ба дохили дуюмаш мебошад (расми 1, *б*).





2) Ду давра ба як нуқтаи умумӣ соҳиб аст (расми 2). Дар ин ҳолат, давраҳо ба як дигар *расанда* мегӯянд. Аммо ин ҳолат давраҳо аз тарафи беруни (расми 2, *а*) ё ки аз тарафи дохили расанда шуданаш мумкин (расми 2, *б*).

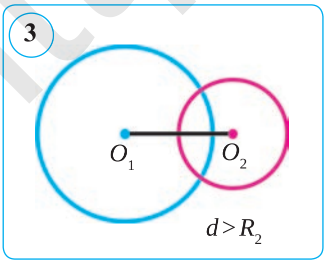
3) Ду давра бо ду нуқтаи умумӣ соҳиб шуданаш мумкин (расми 3). Дар ин ҳолат давраҳо якдигарро *мебуранд* мегӯянд.

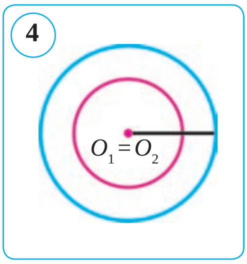
Давраҳое, ки ба маркази умумӣ соҳиб аст, *давраи концентрикӣ* номида мешавад (расми 4) Вазъияти ҷойгиршавии ду давра ба радиус ва масофаи байни марказҳои онҳо вобаста аст.

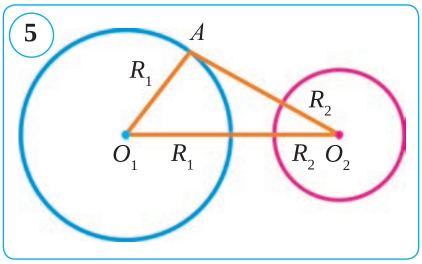
Теорема.

Агар масофаи байни ду марказҳои давра аз суммаи радиусҳои онҳо калон ё ки аз фарқи онҳо хурд бошад, ин давраҳо ба нуқтаи умумӣ соҳиб намешавад.

Исбот. Бигзор ду давраи марказҳояш R_1, R_2 ($d=R_1+ R_2< O_1O_2$) ва радиусҳояш мувофиқан O_1, O_2 додашуда бошад (расми 5). Нуқтаи А – и давраро дида мебароем: $O_1A=R_1$, онгоҳ $O_2A \geq O_1O_2-O_1A>R_1+ R_2- R_1= R_2$ ва пас нуқтаи *A* ба давраи дуюм тааллуқ надорад. Пас, ин давраҳо ба нуқтаи умумӣ соҳиб нестанд.







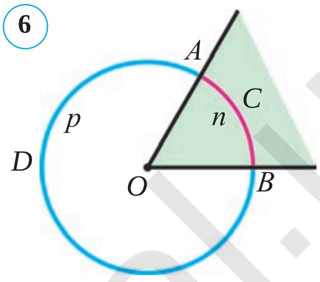
Ҳолатҳои ду давра дорои якто нуқтаи умумӣ доштан ва надоштан, инчунин ду давра дорои ду нуқтаи умумӣ буданро мустақилона дида бароед.

2. Кунҷи марказӣ.

Таъриф. *Кунҷи қуллааш дар маркази давра буда, **кунҷи марказӣ** ном дорад.*

Ду нури OA ва OB, ки қуллаи умумиашон дар маркази O аст, ду кунҷи марказиро ишора мекунанд. Ду нуқтаи давраи A ва B дар он ду паҳлӯро ишора мекунанд. Барои ин камонҳоро аз ҳамдигар фарқ карда, дар ҳар яки он яктогӣ нуқтаи фосилавӣ гузошта мешавад (аз қуллаҳои камон фарққунанда) ва ё бо ҳарфи хурди лотинӣ ишора шуда, ҳамчунин дар бораи камонҳои ACB (ва ё AnB) ва ADB (ва ё ApB) сухан меравад (расми 6). Чунин ишора кардани камонҳо қабул шудааст: $\cup ACB$ (ва ё $\cup AnB$) ва $\cup ADB$ (ва ё $\cup ApB$). Дар баъзе ҳолатҳо камонро бидуни нуқтаи фосилавӣ ишорат мекунанд: $\cup AB$ (дар бораи кадоме аз ду камон сухан рафтанаш маълум бошад).

6



$\angle AOB$ – кунҷи марказӣ

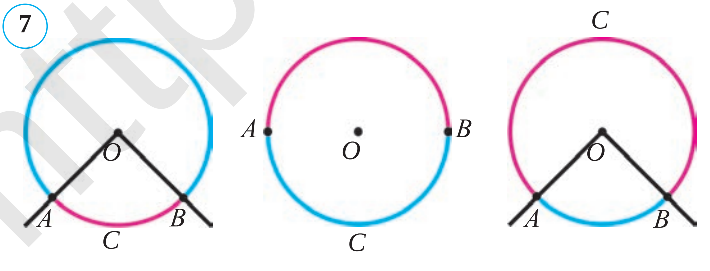
Агар порчаи қуллаҳои камонро пайвасткунанда диаметри давра бошад, камон нимдавра ном дорад. Дар расми 7, *б* ду нимдавра тасвир ёфта, яке аз онҳо алоҳида нишон дода шудааст.

3. Ченаки градусии камон.

Таъриф. ***Бузургии кунҷии камони давра** гуфта, бузургии кунҷи марказии ба ҳамин камон мувофиқро мегӯянд.*

Камони давраро бо градусҳо чен кардан мумкин аст. Агар камони ACB-и марказаш O аз нимдавра хурд ё ба нимдавра баробар бошад, дар он ҳолат ченаки градусии он ба ченаки градусии кунҷи марказии AOB баробар ҳисобида мешавад (расмҳои 7, *а, б*). Агар камони ACB аз нимдавра калон бошад, дар он ҳолат ченаки градусии он ба $360° - \angle AOB$ баробар ҳисобида мешавад (расми 7, *в*).

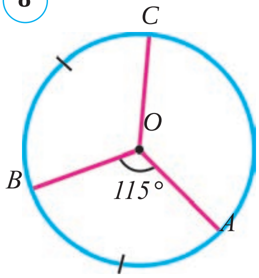
7



$\cup ACB = \cup AOB$ $\quad$ $\cup ACB = 180°$ $\quad$ $\cup ACB = 360° - \angle AOB$

а **б** **в**

8



Аз ин ҷо, суммаи ченаки дараҷагии ду камони давраи нӯгҳояш умумӣ ба 360° баробар буданаш бармеояд. Маълум аст, ки дар ҳолати баробар будани бузургии ду камони давра ва (яъне ба онҳо кунҷҳои марказии мувофиқ) танҳо дар ин ҳолат ин камонҳо баробаранд.

Масъала. Нуқтаи – O марказӣ давра, $\angle AOB=115^\circ$, $\cup BC=\cup AB$ (расми 8). Кунҷи AOC-ро ёбед.

Ҳал. Бигзор кунҷи AOB маркази доира буда, камони AB аз нимдавра хурд, барои ҳамин $\cup AB=\angle AOB=115^\circ$. Мувофиқи шарти масъала, $\cup BC=\cup AB$, яъне, аз ин ҷо камони BC *ба* 115° баробар аст.

$\cup ABC=\cup AB+\cup BC=230^\circ>180^\circ$, яъне камони ABC аз нимдоира калон аст, бинобар ин $\angle AOC=360^\circ-ABC=360^\circ-230^\circ=130^\circ$. *Ҷавоб:* $\angle$ AOC=130°.

Савол, масъала ва супоришҳо

1. 1) Расанда ба нуқтаи додашуда гуфта, чиро мефаҳмед? 2) Давраи консентрикӣ чист? 3) Кунҷи марказӣ чист? Камони давра чӣ хел ишорат карда мешавад? 4) Бузургии кунҷи камони давра чист?

2. Агар масофаи байни ду марказҳои давра 2 см радиусҳояш мувофиқи 1) 3 см ва 5 см, 2) 2 см ва 5 см бошад, онҳо нисбат ба якдигар чӣ хел ҷойгир шудаанд?

3. Агар давраҳои радиусаш ба 4 см ва 6 см баробар: 1) аз тарафи берунӣ расанда бошад, 2) аз тарафи дохилӣ расад, масофаи байни марказҳои онҳо ба чӣ баробар аст?

4. Ду хати рости аз маркази давраи додашуда гузаранда, дар ин давра чанд камон ва чанд кунҷҳои марказиро муайян мекунанд?

5. Аз нуқтаи давраи додашуда бо радиус баробар дуто карда гузаронида шудааст. Кунҷи байни онҳоро ёбед.

6. Ҷисмҳои калони давраи ба кунҷи марказӣ мувофиқоянда ба қисми: 1) $\frac{2}{5}$; 2) $\frac{4}{15}$; 3) $\frac{7}{12}$; 4) $\frac{5}{9}$; 5) $\frac{13}{18}$; 6) $\frac{17}{20}$; 7) $\frac{23}{30}$ баробар аст. Ҳамин кунҷи марказиро ёбед.

7. Давра бо ду нуқта ба ду камон ҷудо мешавад. Агар: 1) бузургии кунҷии яке аз онҳо аз бузургии кунҷии дигараш 40° зиёд бошад, ҳар яке аз бузургиҳои кунҷӣ чӣ гуна мешаванд? 2) Агар бузургии кунҷии ин камонҳо ба ададҳои 2 : 7 мутаносиб бошанд-чӣ.

8. Нуқтаҳои A, B, C дар давраи марказаш нуқтаи O мехобад. Агар $\cup ABC=70^\circ$ бошад, кунҷи AOC-ро ёбед.

9. Кунҷҳои марказии: 1) $\frac{1}{5}$; 2) $\frac{1}{6}$; 3) $\frac{1}{9}$; 4) $\frac{1}{10}$; 5) $\frac{1}{12}$ қисмии давраро ташкилкунанда ва ба камони AB мувофиқоянда чанд дараҷагӣ мешаванд? Дар ҳар якеи ҳолатҳо бузургии кунҷии камони AB-ро бо ёрии аломатҳо нависед.

10. Радиуси давра: 1) 7,8 см; 2) 10,5 см; 3) 0,8 дм аст, диаметри давраро ёбед.

57. КУНҶИ БА ДАВРА ДАРУНКАШИДАШУДА

Таъриф. *Кунҷе, ки қуллааш ба давра мехобад ва тарафҳояш онро мебурад, **кунҷи ба давра дарункашидашуда** ном дорад.*

Дар расми 1 кунҷи ABC ба давра дарункашидашуда аст, камони AnC дар дохили ҳамин кунҷ ҷойгир аст. Дар ин гуна ҳолат, кунҷи ABC-и дарункашидашуда дар камони AnC такя мекунад низ мегӯянд.

Теорема.

Кунҷи ба давра дарункашидашуда бо нисфи камоне, ки ба он такя мекунад, чен карда мешавад:

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC.$$

Исбот. Бигузор $\angle ABC$ – давраи маркази O кунҷи дарункашидашудаи ба камони AC такякунанда бошад (расми 2). Се ҳолати нисбат ба ҳамин кунҷ ҷойгиршавии маркази давраро дида мебароем.

Ҳолати 1. Яке аз тарафҳои кунҷи маркази дарункашидашудаи давра, масалан дар тарафи BC мехобад (расми 2, *а*). Радиуси OA мегузаронем ва ба кунҷи марказии AOC назар меафканем. Он кунҷи берунаи секунҷаи BOA мебошад. Аз рӯи хосияти кунҷи берунаи секунҷа: $\angle AOC = = \angle OBA + \angle OAB$. Аммо $\angle OBA = \angle OAB$, чунки секунҷаи AOB баробарпаҳлӯ аст $(OA = OB = R)$. Пас, $\angle AOC = 2\angle ABC$ (1). Шумо медонед, ки бузургии кунҷи марказӣ ба бузургии кунҷи камон мувофиқан баробар аст (мавзӯи 56). Дар ин ҳолат камони AC аз нимдоира хурд аст, бинобар ин аз рӯи хосияти кунҷи марказӣ:

$\angle AOC = \cup AC$ (2).

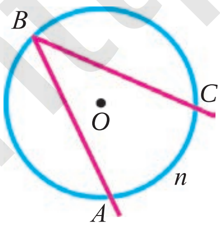
Аз баробарии (1) ва (2): $2\angle ABC = \cup AC$, яъне $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$.

Теорема барои ҳолати 1 исбот шуд.

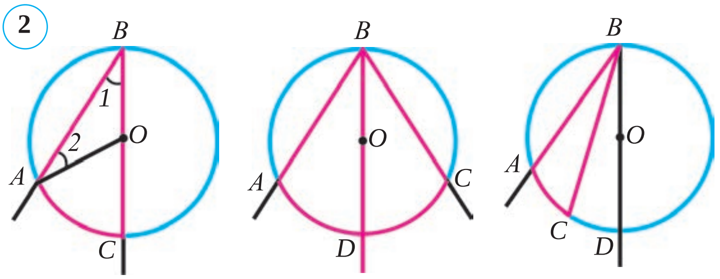
Ҳолати 2. Маркази давраи O дар байни тарафҳои кунҷи дарункашидашуда мехобад. Нури BO-ро мегузаронем, ки камони AC-ро дар ягон нуқтаи D мебурад (расми 2, *б*).

Нуқтаи D камони AC-ро ба ду камон $\cup AD$ ва $\cup DC$ мебурад. Пас, аз рӯи

1



2



а *б* *в*

исбот (ҳолати 1): $\angle ABD = \frac{1}{2} \cup AD$ ва $\angle DBC = \frac{1}{2} \cup DC$. Ин баробариҳоро ҷамъ карда, ҳосил мекунем:

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC = \frac{1}{2} \cup AD + \frac{1}{2} \cup DC = \frac{1}{2}(\cup AD + \cup DC) = \frac{1}{2} \cup AC.$$

Ҳолати 3. Маркази давра O аз кунҷи дарункашидашуда берун мехобад. Исботи ин ҳолро аз расми 2, *в* истифода бурда, худатон мустақилона иҷро кунед.

Натиҷаи 1. Ҳамаи кунҷҳои дарункашидашудаи ба як камон такякунанда баробаранд (расми 3, *а*):

$$\angle B = \angle B_1 = \angle B_2 = \ldots = \frac{1}{2} \cup AC.$$

Натиҷаи 2. Ҳамаи кунҷҳои ба диаметр (нимдоира) пайвастшуда кунҷҳои ростанд (расми 3, *б*):

$$\angle B = \angle B_1 = \angle B_2 = \ldots = 90°.$$

Масъала. Хордаи бо радиуси давра баробар гузаронида шудааст. Ин хорда: 1) аз маркази давра; 2) аз нуқтаи дилхоҳи давра аз қуллаҳои хордаи додашуда фарқ карда дар тахти кадом кунҷ намоён мешавад?

Ҳал: Бигзор AB хордаи ба радиуси давраи марказаш O баробар бошад (расми 4). Онгоҳ AOB секунҷаи баробартараф ва пас кунҷи марказӣ (кунҷе, ки аз маркази давра хордаи AB намоён мешавад) ба $60°$ баробар аст.

Ғайр аз нуқтаҳои A ва B нуқтаи дилхоҳи C секунҷаи дарункашидашудаи ACB кунҷе, ки аз нуқтаи C хордаи AB намоён мешавад. Ба нисфи кунҷи марказӣ баробар аст, яъне ба 30° баробар аст.

Ҷавоб: 1) 60°, 2) 30°

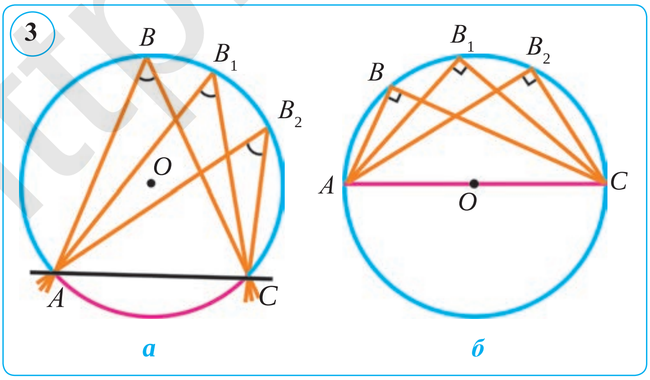
Савол, масъала ва супоришҳо

1. 1) Чӣ гуна кунҷ ба давра дарункашидашуда ном дорад?

2) Кунҷи дарункашидашуда чӣ гуна чен карда мешавад?

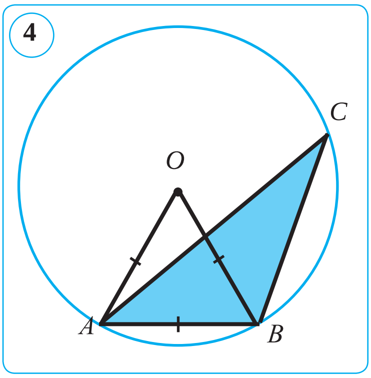
3) Кунҷи ба нимдоира пайвастшудаи кунҷи дарункашидашуда ба чӣ баробар аст?

3



а *б*

4



2. *(Даҳонӣ)* Кунҷи дарункашидашуда ба 25° баробар. Бузургии камони ба кунҷи дарунӣ такя карда шударо ёбед.

3. AB ва BC – хордаҳои марказаш нуқтаи O мебошад, $\angle ABC = 30°$. Агар радиуси давра ба 10 см баробар бошад, дарозии хордаи AC-ро ёбед.

4. 1) Дар расми 5 нуқтаи O – маркази давра, $\angle AOB = 88°$. $\angle ACB$-ро ёбед.

Ҳал. Кунҷи AOB кунҷи давраи додашуда ... мебошад. Пас, $\cup ADB = ...°$. Кунҷи ACB ... кунҷи ... кашидашуда аст ва ба камони ... пайваст аст, чунки $\angle ACB = \frac{1}{2} \cup ... = ...°$. *Ҷавоб.* $\angle ACB = ...°$.

2) Дар расми 6 $\cup CAB = 130°$. $<CAB$-ро ёбед. Ҷойҳои холиро пур кунед.

Ҳал. CAB ба давра дарункашидашуда ва ба камони $\cup CDB$ васл шудааст. $\cup CDB = 360° - \cup CAB = 360° - 130° = 230°$, $\angle CAB = \frac{1}{2} \cup CDB = \frac{1}{2} \cdot 230° = 115°$. *Ҷавоб.* $\angle CAB = 115°$.

3) Дар расми 7 $\angle APE = 46°$, $\angle BCE = 34°$. $\angle AEP$-ро ёбед.

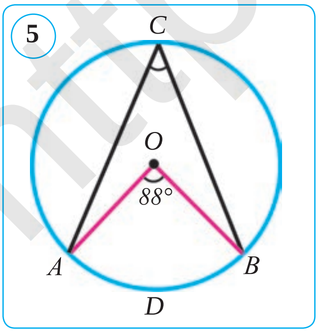
Ҳал. Кунҷҳои дарункашидашудаи PAB ва BCP якто BP ..., пас, $\angle PAB = \angle ... = ...$. Аз секунҷаи AEP доро мешавем $\angle AEP = 180° - (\angle ... + \angle ...) = 180° - (... + ...) = ...$. *Ҷавоб.* $\angle AEP = ...$.

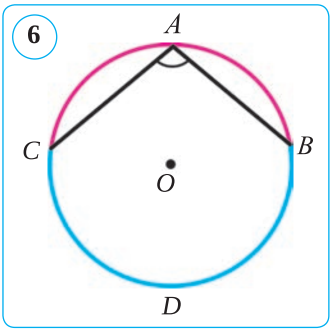
5. Нуқтаҳои A, B, C-и давра онро ба се камон тақсим намуда нисбати ченаки градусии онҳо чуи $3:5:7$. Кунҷҳои секунҷаи ABC-ро ёбед.

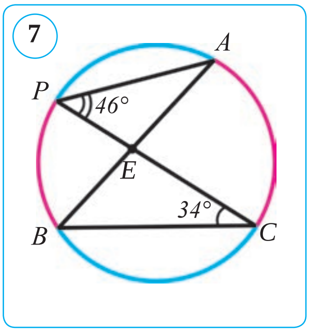
6. Хорда давраро ба ду камон ҷудо мекунад. Агар нисбати кунҷҳои ин камонҳо 1) $5:4$; 2) $7:3$ бошад, хорда аз нуқтаҳои давра дар таҳти кадом кунҷ менамояд?

7. Ба давра диаметри AB ва хордаи AC гузаронида шудааст. Агар нисбати ченаки градусии $7:2$ камонҳои AC ва CB бошад, кунҷи BAC-ро ёбед.

8. AB ва AC – хордаҳои давра, $\angle BAC = 70°$, $\cup AB = 120°$. Миқдори дараҷагии камони AC-ро ёбед.







58. КУНҶҲОЕ, КИ БУРАНДАИ ДАВРА ҲОСИЛ КАРДААСТ

1. Кунҷи аз хорда ва расанда сохташуда.

Теоремаи 1.

Кунҷи аз расанда ва хорда ҳосил шуда. ба нисфи камони ба он такякунанда баробар аст.

Исбот. Бигзор AB расанда ва BC хорда бошад, исбот мекунем, ки $\angle ABC = \frac{1}{2}\cup BmC$ аст (расми 1). Барои ин аз қуллаи C, $CD\|AB$ гузаронем, $\angle ABC=\angle BCD$, чунки онҳо кунҷи дарунии ивазшаванда мебошанд. Аммо $\angle C = \frac{1}{2}\cup BnD$ ва $CD\|AB$ $\cup BnD=\cup Bmc$ ва $\angle B = \angle C = \frac{1}{2}\cup BnD = \frac{1}{2}\cup BmC$.

Теорема исбот шуд.

Масалаи 1. Хордаи AB камони 56°-ро кашида меистад. Бо расандаҳои аз нӯгҳои хордан ба давра гузаронида шуда ва хорда кунҷҳои ҳосил шударо ёбед.

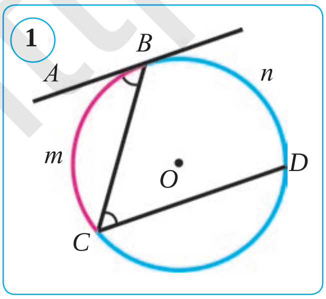
Дода шудааст: $(O,\ R)$, AB – хорда, $\angle AOB=56°-AB$ кунҷи марказии хордаро кашида истода, $AC\perp OA$, $BC\perp OB$ (расми 2).

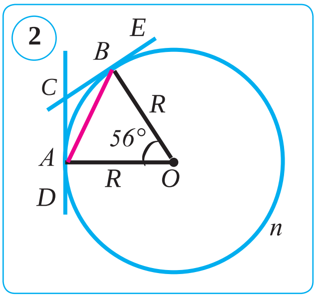
Ёфтан лозим: $\angle CAB$, $\angle CAB$, $\angle BAD$, $\angle ABE$.

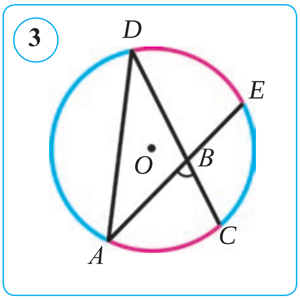
Ҳал. Камони байни хорда ва расанда $\cup AB=56°$ (ҳолати 1), ё ки $\cup AnB=360°-56°=304°$ (ҳолати 2) мешавад.

Ҳаминтавр дар ҳолати 1 $\angle CAD = \frac{1}{2}\cup AB = \frac{1}{2}\cdot 56^{0} = 28°$, дар ҳолати 2 бошад, бо $\angle BAD = \frac{1}{2}\cup AnB = \frac{1}{2}\cdot 304° = 152°$ соҳиб мешавем. Бо мо маълум аст, ки аз нуқтаи берунии давра расанда ба давра гузаронида шуда ва то нуқтаи расми порчаҳо баробар мешавад. Бинобар ин ΔACB баробарпаҳлӯ. Пас, $\angle CAB=\angle CBA=28°$ ва $\angle BAD=\angle ABE=152°$.

Ҷавоб: $\angle CAB=\angle CBA=28°$, $\angle BAD=\angle ABE=152°$.


1


2


3

2. Кунҷҳои дар натиҷаи буриши ду хорда ҳосилшуда.

Теоремаи 2.

Ҳар гуна кунҷи вертикалие, ки дар натиҷаи буриши ду хордаи дилхоҳ ҳосил шудааст, ба нисфи суммаи камонҳои тарафҳои васлшуда баробар аст.

Исбот. Бигзор $\angle ABC$ – яке аз кунҷҳои дар натиҷаи буриши хордаҳои CD ва AE ҳосилшуда бошад (расми 3). Исбот мекунем, ки $\angle ABC = \frac{1}{2}(\cup AC + \cup DE)$ аст. Барои ин нуқтаҳои A ва D-ро пайваст мекунем, дар он ҳолат $\angle ABC$ ΔABD – нисбат ба $\frac{1}{2}ABD$ кунҷи беруна мешавад. Пас, $\angle ABC = \angle ADC + \angle DAE$. Аммо $\angle ADC = \cup AC$ ва $\angle DAE = \frac{1}{2} \cup DE$ ва $\angle ADC = \frac{1}{2} \cup AC$. Бинобар ин, $\angle ABC = \frac{1}{2}\cup AC + \frac{1}{2}\cup DE = \frac{1}{2}(\cup AC + \cup DE)$. Ба таври болой исбот мешавад.

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC + \frac{1}{2} \cup DE = \frac{1}{2}\left(\cup AC + \cup DE\right)$$

Мустақилона исбот кунед.

Масъалаи 2. AB ва CD – хордаҳои як давра. P – нуқтаи буриши онҳо. Агар кунҷи BPD аз кунҷи BPC, 4 маротиба калон, кунҷи CDA бошад, аз BPC $26°$ калон бошад, кунҷи CBP-ро ёбед.

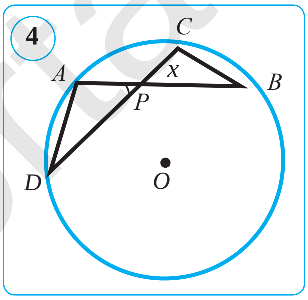
Дода шудааст:

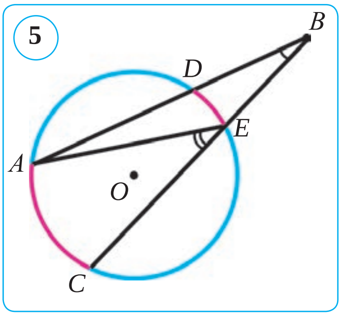
$\angle BPD = 4\angle BPC$, $\angle CDA = \angle BPC + 26°$ (расми 4).

Ёфтан лозим: $\angle CBP$.

Ҳал. $\angle BPD + \angle BPC = 180°$, аз инҷо $4\angle BPC + \angle BPC = 180°$, аз ин, $5\angle BPC = 180°$ ва ниҳоят, $\angle BPC = 36°$. $\angle CDA = \angle BPC + 26° = 36° + 26° = 62°$. $\angle CBA = \angle CDA = 62°$ чунки онҳо якто ба камони $\cup AC$ васл (такя) шудааст кунҷҳои дарункашидашуда мебошад. Аз ин $\angle CBP = \angle CBA = 62°$.

Ҷавоб: $\angle CBP = 62°$.





3. Кунҷи байни ду бурандае, ки аз як нуқтаи берун аз давра ба он гузаронида шудааст.

Теоремаи 3.

Кунҷи байни ду бурандаи аз як нуқтаи берун аз давра ба он гузаронидашуда, ба нисфи фарқи камонҳои (AC ва DE)-и байни бурандаҳои (ABC) баробар аст.

Исбот. B – нуқтаи берун аз давра, BA ва BC – бурандаҳоянд. Исбот мекунем, ки $\angle B = \frac{1}{2}(\cup AC - \cup DE)$ аст. Барои ин, нуқтаҳои A ва E-ро пайваст мекунем (расми 5).

$\angle AEC$ $\angle AEB$ кунҷи берунӣ аст. Пас, $\angle AEC=\angle B+\angle DAE$, инчунин $\angle B=\angle AEC-DAE$ аст. Аммо $\angle AEC=0{,}5\cup AC$ ва $\angle DAE=0{,}5\cup DE$. Агар ба ҷои он гузорем:

$$\angle B=\frac{1}{2}\cup AC-\frac{1}{2}\cup DE=\frac{1}{2}(\cup AC-\cup DE).$$

Пас, $\angle B=\frac{1}{2}(\cup AC-\cup DE)$. Теорема исбот шуд.

4. Кунҷи байни ду расандаи аз як нуқтаи берунии аз давра ба он гузаронида шудааст.

Теоремаи 4.

Кунҷи байни ду расандаи аз як нуқтаи берун аз давра ба он гузаронида шуда ба фарқи ин кунҷ бо 180° ва камони расандаҳо васлшуда (такя шуда) баробар аст.

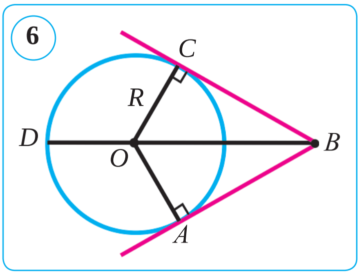
Исбот. Хатҳои рости BC ва BA расандаҳои аз нуқтаҳои C ва A гузарандаи давра, BD бошад, биссектрисаи секунҷаи ABC бошад. Нишон медиҳем, ки $AB=CB$ ва маркази O ба BD мехобад, инчунин $\angle B=180°-\cup AC$ (расми 6) аст.

Барои радиусҳои OA ва OC $OA\perp BA$ ва $OC\perp BC$ буданаш: ΔAOB ва ΔCOB – росткунҷа $\Delta AOB=\Delta COB$, чунки гипотенуза BO умумӣ $OA=OC=R$ аз баробарии секунҷаҳо: $AB=BC$ акнун $OC=OA=R$ ва $OA\perp BA$, $AB=BC$ ва $OC\perp BC$ буданаш маркази O ба биссектрисаи BD мехобад. Мувофиқи теоремаи кунҷи байни ду расандаи аз як нуқтаи берун аз давра ба он гузаронида шуда:

$$\angle B=0{,}5(\cup ADC-\cup AC)=$$
$$=0{,}5(360°-\cup AC-\cup CA)\ =\ 180°-\cup AC.$$

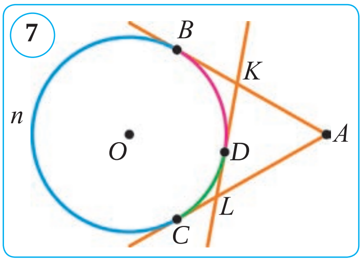
Пас, $\angle B\ =180°-\cup AC$ мешавад.

Теорема исбот шуд


6

Масъалаи 3. Нуқтаҳои A, B, C-и давраи онро ба камонҳои нисбати 11:3:4 ҷудо мекунад. Аз нуқтаҳои A, B ва C расандаҳо гузаронида то буридани якдигар давом додаанд. Кунҷҳои секунҷаи ҳосил шударо ёбед.

Ҳал. 1) $\cup BnC:\cup CD:\cup DB=11:3:4$, секунҷаи AKL ҳангоми гузаронидани расандаҳои дар нуқтаи расиш ҳосилшуда бошад (расми 7). Кунҷҳои A, AKL ва ALK-ро меёбем:


7

$$\cup BnC=\frac{360°}{11+3+4}\cdot 11=220°;\quad \cup CD=\frac{360°}{11+3+4}\cdot 3=60°;$$

$$\cup DB=\frac{360°}{11+3+4}\cdot 4=80°^{;}$$

$\cup CDB = \cup CD + \cup DB = 60^\circ + 80^\circ = 140^\circ$;

$\angle A = 180^\circ - \cup CDB = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$,

$\angle BKD = 180^\circ - \cup DB = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$,

$\angle AKL = 180^\circ - \angle BKD = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$,

$\angle ALK = 180^\circ - (\angle A + \angle AKL) = 180^\circ - (40^\circ + 80^\circ) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

Ҷавоб: $\angle A = 40^\circ$, $\angle AKL = 80^\circ$, $\angle ALK = 60^\circ$.

Савол, масъала ва супоришҳо

1. 1) Кунҷи аз расанда ва хорда сохташуда чӣ гуна чен карда мешавад? Кунҷҳои аз буридашавии ду хорда ҳосилшуда-чӣ?
2) Кунҷи байни ду буранда ҳосилшуда ба чӣ баробар аст?
3) Ду расандаи аз як нуқта гузаронидашуда ба чӣ хел хосият соҳиб аст?

2. Хордаи *AB*-и ба радиуси давра баробар бо расандаи аз нуқтаи A гузаронидашуда чӣ гуна кунҷҳо ҳосил мекунад?

3. Яке аз кунҷҳои давраро бурандаи байни ду хорда ба 70° баробар аст. Суммаи кунҷҳои ба ҳамин кунҷ ҳамсояро ёбед.

4. Кунҷи тағйирёбанда *x*-и дар расми 8 тасвирёфтаро ёбед.

5. Кунҷи байни ду радиус ба 150° баробар, кунҷи байни расандаҳои аз охирҳои радиус ба давра гузаронида шударо ёбед.

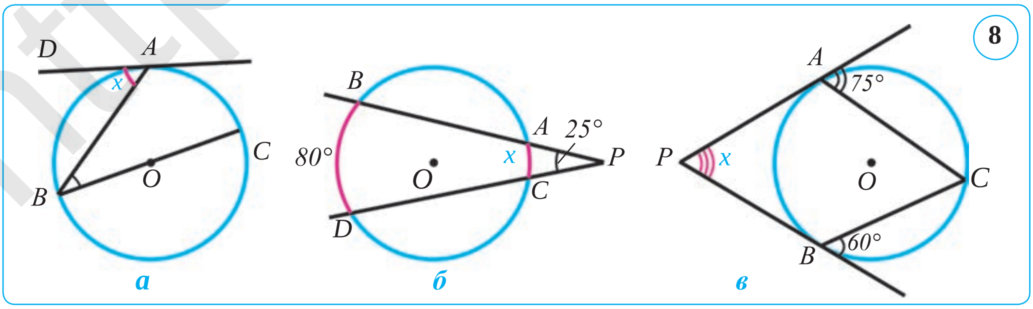
6. Расандаҳои *BA* ва *BC*, ки аз нуқтаи *B* ба давра гузаронида шудаанд давраро, дар нуқтаҳои расиш дар нисбати: 1) 5 : 4; 2) 12 : 6; 3) 9 : 6; 4) 13 : 7; 5) 2 : 3 ба ду камон тақсим мекунанд. Кунҷи *ABC* чанд аст?

7. Аз қуллаҳои хордаҳои давраро дар нисбати: 1) 2 : 7; 2) 4: 5 тақсимкунанда ду расанда гузаронида шудааст. Кунҷҳои секунҷаи ҳосилшударо ёбед.

8. Нуқтаҳои расиши ду расандаи аз нуқтаи берунаи давра гузаронидашуда давраро ба ду камони нисбаташ: 1) 1 : 9; 2) 3 : 15; 3) 7 : 11; 4) 3 : 7 ҷудо мекунад. Кунҷҳои байни расандаҳоро ёбед.

9. Кунҷи байни расандаҳои ба ду қуллаи радиусҳо гузаронидашудаи кунҷи марказии аз: 1) 52°; 2) 74°; 3) 104° ташкилёфтаро ёбед.

10. Радиуси давра аз диаметри он 40 мм кӯтоҳ. Диаметри давраро ёбед.



8

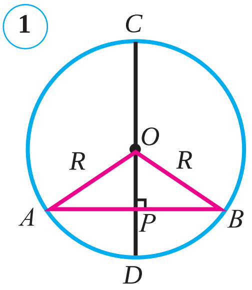
а б в

59. ХОРДАИ ДАВРА ВА ХОСИЯТИ ДИАМЕТР

Теоремаи 1.

Диаметри ба хорда перпендикуляр ин хорда ва камони ба он такякунандаро ба ду ҳиссаи баробар ҷудо мекунад.

1



Исбот. Давраи марказаш дар нуқтаи O ва радиусаш R дода шудааст. Бигзор AB – хордаи давра ва CD – диаметр нуқтаи буриши CD ва AB, P дода шуда бошад (расми 1). Исбот мекунем, ки $AP = PB$ ва $\cup AD = \cup DB$ аст. Агар AB диаметри хорда бошад, нуқтаи P бо нуқтаи O болоиҳои афтида, дар ҳамин нуқтаи AB хорда инчунин камони ADB-и нимдавраи онро кашида истида ба ду қисми баробар ҷудо мешавад. Хордаи AB диаметр набошад. Барои ин радиусҳои OA ва OB-ро мегузаронем. AOB-и ҳосилшуда – секунҷаи баробарпаҳлӯ аст, чунки $OA = OB = R$. Пас, OP – баландии аз қуллаи секунҷаи баробарпаҳлӯ ба асоси AB фаровардашуда мебошад. Ҳаминтавр, он медиана ва биссектриссаи кунҷи қуллаи O мебошад. Диаметри аз байни хорда гузашта хордаи AB-ро ба ду қисми баробар ҷудо мекунад, яъне $AP = PB$. $OP - AOB$ Аз биссектриса будани он $\angle AOP = \angle BOP$ ҳосил мекунем. Ин кунҷҳо аз барои камонҳои такякунанда буданашон ∪AD = ∪DB аст. Теорема исбот шуд.

Теоремаи 2.

Хордаи давра аз диаметри он калон намешавад.

Исбот. Секунҷаи OPB – росткунҷа аст (ба расми 1 ниг.). Дар ин секунҷа OB – гипотенуза, PB – катет. Маълум аст, ки катет аз гипотенуза калон нест, яъне $PB \le OB$. Аз ин ҷо $2PB \le 2 \bullet OB$ ва аз $2PB = AB$ ва $2OB = 2R = d$ буданаш $AB \le d$ бармеояд.

Натиҷаи 1. *Диаметри аз миёнаҷои хорда гузаранда, ба ҳамин хорда перпендикуляр аст.*

Натиҷаи 2. *Перпендикуляри миёнаи хорда диаметри давра аст.*

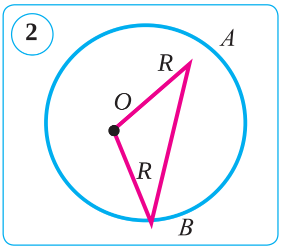
Исботи ин натиҷаҳоро ба худатон ҳавола мекунем.

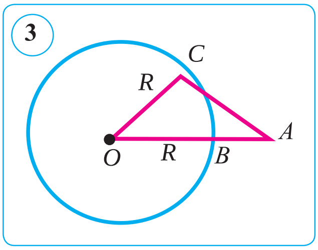
Масъалаи 1. Хордаи калон будани диаметрро исбот кунед.

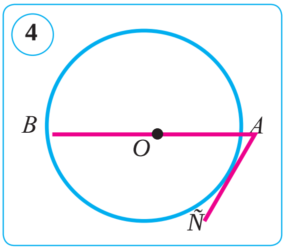
Ҳал. Бигзор давраи марказаш O ва радиусаш R инчунин хордаи дилхоҳи AB – и аз диаметр фарқкунанда додашуда бошад (расми 2). Парчаҳои OA ва OB мегузаронем. Порчаи AB дар секунҷаи AOB аз ду суммаи тарафи боқимода хурд аст, яъне $AB < OA + OB = R + R = 2R$. Пас, AB хорда аз диаметри хурд мешавад.

Масъалаи 2. Нуқтаи A аз давраи радиусаш R берун гирифта шуда он аз маркази давра O дар масофаи d воқеъ аст. Масофаи аз ҳама хурди аз нуқтаи A то нуқтаи давра ба чӣ баробар аст?

Ҳал. Бигзор B – нуқтаи буриши давра бо порчаи OA бошад (расми 3). Масофаи AB аз масофаҳои нуқтаи A то давра аз ҳама







хурд буданашро нишон медиҳем. Дарҳақиқат барои нуқтаи дилхоҳи C-и давра нобаробарии $AB<AC$-ро $AB+BO<AC+CO$ ичро шавандааст $BO=CO=R$-ро ба эътибор гирифта, аз набаробарии охирин набаробарии $AB<AC$-ро ҳосил мекунем. $AO=d$ ва $BO=R$-ро ба ҳисоб гирем масофаи аз ҳама хурд ба дарозии порчаи AB, яъне ба $d-R$ баробар аст.

Савол, масъала ва супоришҳо

1. 1) Диаметри ба хорда перпендикуляр чӣ гуна хосиятҳо дорад?
   2) Исбот кунед, ки хордаи давра аз диаметраш калон нест.
   3) Оё перпендикуляри миёначои хорда диаметр намешавад?

2. Давра кашед ва дар он ду диаметри ба як дигар перпендикуляри AB ва CD гузаронед. Ченаки градусии камони давраи нуқтаҳои A, B, C ва D чудо кардаро ёбед.

3. Хордаи 8 см буда, аз давра камони 90° чудо мекунад. Масофаи аз маркази давра то хордаро ёбед.

4. Аз нуқтаҳои додашудаи давра ду хордаи ба радиус баробар гузаронида шудааст. Кунчи байни онҳоро ёбед.

5. Аз нуқтаҳои додашудаи давра хордаи ба диаметр ва радиус баробар гузаронида шудааст. Кунчи байни диаметр ва хордаро ёбед (расми 4).

6. Дар давра ду хордаи параллели аз он кунчи 90° чудокунанда гузаронида шудааст. Дарозии яке аз онҳо 8 см. Масофаи байни хордаҳоро ёбед.

7. Исбот кунед, ки ба ғайр аз маркази давра дар нуқтаҳои дигар хордаҳои якдигарро бурранда дар нуқтаи буриш ба ду ҳиссаи баробар чудо намешавад.

8. Аз нуқтаи A-и давра ду хордаи AB ва AC-и ба радиуси давра баробар гузаронида шудааст. Нуқтаҳои B ва C бо хати рост пайваст шудаанд. Радиуси давра 12 см. Масофаи аз маркази давра то хордаи BC-ро ёбед.

9. Дар давра ду хордаи параллел гузаронида шудааст, ки аз он камони дорои 90° чудо мекунад. Дарозии яке аз онҳо 10 см. Масофаи байни хордаҳоро ёбед.

10. Радиуси давра ба 13 см баробар. Ба ин давра хордаи ба 10 см баробар гузаронида шудааст. Масофаи аз хорда то маркази давраро ёбед.

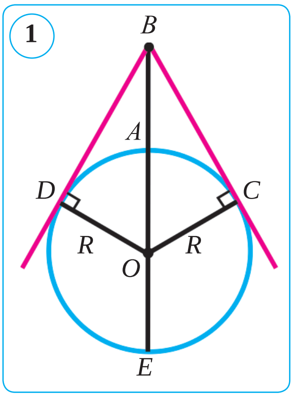
11. Порчаи AB – диаметри давраи марказаш дар нуқтаи O – буда мешавад. AC ва CB – хордаҳои баробари хордаи давра, кунчи COB-ро ёбед.

60. ТАТБИҚ ВА МАШҚИ АМАЛӢ

МАТЕРИАЛҲОИ ИЛОВАГИИ КОМПЕТЕНСИЯИ АМАЛИРО РИВОҶДИҲАНДА

МАСОФАИ ГОРИЗОНТ

Масъалаи 1. Квадрати расанда ба ҳосили зарби буранда ва қисми берунии он баробар аст. Инро исбот кунед.


1

Ҳал. Бигзор дар давраи марказаш O нуқтаи беруни B буранда BE ва BC ва BD расандаҳо гузаронида шуда бошад (расми 1).

$BC^2 = BE \cdot BA$-ро исбот мекунем. Барои он секунҷаи росткунҷаи BOC ($\angle C = 90°$) дида мебароем. Аз рӯи теоремаи Пифагор:

$$BC^2 = BO^2 - OC^2.$$

Ба ин баробариҳо $BO = BA + AO = BA + R$ ва $OC = R$-ро гузошта ҳосил мекунем.

$$BC^2 = (BA + R)^2 - R^2 \Rightarrow BC^2 = BA^2 + 2BA \cdot R + R^2 - R^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BC^2 = BA^2 + 2BA \cdot R \Rightarrow BC^2 = BA \cdot (BA + 2R) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BC^2 = BA \cdot BE$$

Исботи ҳамин талаб карда шуда буд.

1. Мафҳум дар бораи горизонт.

Барои дидани масофаҳои дуртарин дар ҷойи кушод нишаста ба сӯи дуриҳо нигоҳ кунед шумо худро дар сатҳи замин (сатҳи баҳр) гӯё ки осмон хеле наздику ғайр аз он ҳеҷ чиз нест ва худро дар маркази давра истодагӣ барин ҳис мекунед. Ин горизонт аст. Шумо чӣ хел ба он наздик шавед, вай ҳамон қадар аз шумо дур мешавад. Ба он рафтан намешавад, аммо он дар ҳақиқат мавҷуд. Барои фаҳмидани вобастагии нисбатҳои геометрӣ бо горизонт қисми маълуми кураи заминро тасвиркунанда дар (расми 1) ё ки дар (расми 2) муроҷиат мекунем. Аз ҳамин дар баландии BA нуқтаи B чашми мушоҳидакунанда гузашта шудааст. Ҳамон мушоҳидакунанда аз ҷойи худ гирду атрофро то чӣ қадар дурӣ мушоҳида карда метавонад. Нури биниш ба сатҳи замин то нуқтаҳои C ва D (расми 1) ё ки C (расми 2) мебошад. Аз ин нуқтаҳо дуртар аз нури биниши замин пастар мебошад ин нуқтаҳо (аз нуқтаҳои камони DAC) дигар нуқтаҳо ҳам горизонтро ҳосил мекунад. Ба мушоҳидакунанда ҳамин нуқта, ҳамин ҷое, ки осмон ба замин наздик шуда барин менамояд, чунки мушоҳида кунанда дар ин нуқтаҳо дар як вакт чизҳои ба осмон ва замин бударо мебинад.

2. Дурии (масофаи) горизонт.

Хати горизонт аз мушоҳидакунанда ба кадом масофа меистад ба таври дигар гӯем дар ҷои ҳамвор дарозии радиуси доирае, ки мо худро дар маркази он мебинем чӣ қадар аст?

Агар баландии аз сатҳи замин бардоштаи мушоҳидачӣ маълум бошад, дурии горизонт чӣ хел ҳисоб карда мешавад. Масъала аз чашми мушоҳидакунанда расандан ба сатҳи замин гузаронида шуда (расми 2) ҳисоб кардани дарозии порчаи BC бармеояд. Аз масъалаи 1 маълум, ки квадрати расанда ба ҳосили зарби порчаи беруни буранда, $BA=h$ дарозии ҳамаи бурандаҳо, яъне $BE=h+2R$ баробар аст: $d^2 = (h+2R)\cdot h$, Дар инҷо R – радиуси замин, $BC=d$ – масофаи аз мушоҳидакунанда то нуқтаи аз ҳама дур. Аз замин бардоштани бошед мушоҳидакор ба диаметри кураи замин (ба $2R$) нисбатан ҷудо хурд, масалан нуқтаи аз ҳама болои бардошташавии самолёт аз замин 0,001 ҳиссаи диаметри кураи заминро ташкил медиҳад, онгоҳ $2R+h\approx 2R$ аз ин ҷо: $d^2 \approx 2Rh$.

Пас, дурии горизонтро бо формулаи хеле оддӣ низ ҳисоб кардан мумкин:

$$d \approx \sqrt{2Rh},$$

дар ин ҷо: R – радиуси замин (тахминан 6400 км ё ки аниқтараш 6371 км) h – аз сатҳи замин баландии мушоҳида бардошта, $\sqrt{6400} = 80$ онгоҳ формула намуди зеринро мегирад.

$$d \approx 80\sqrt{2h} \approx 113\sqrt{h}$$

h-ро бо қисмҳои километр ифода кардан мумкин.

Масъалаи 2. Аз самолёти аз замин дар масофаи 10 км ба баланди парида истода, чӣ қадар масофаи дуриро дидан мумкин? (радиуси замин тахминан 6370 км).

Ҳал. $OA=R\approx 6370$ км, $AB=h=10$ км. $BC=d$-ро меёбем (расми 2). Мо медонем, ки квадрати расанда ба ҳосили зарби буранда ва қисми берунии он ба ҳосили зарби буранда ва қисми берунии он $d^2 = (h+2R)\cdot h$ ё ки

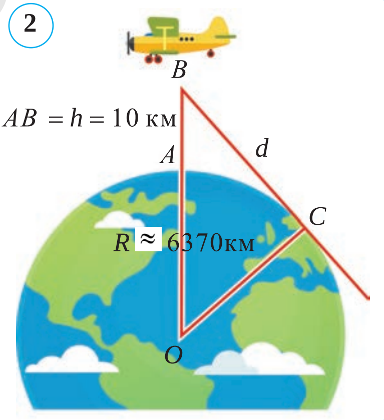
$$d^2 = (10+2\cdot 6370)\cdot 10 = 127\,500,$$

аз ин ҷо:

$$d = \sqrt{127500} = \sqrt{51\cdot 2500} = 50\sqrt{51} \approx$$
$$\approx 50\cdot 7{,}141 = 357{,}05 \approx 360 \text{ (км)}.$$

Ҷавоб: ≈ 360 км.

2



Масъалаи 3. Аз замин 4 км ба боло баромадан аз ҳаво чӣ қадар масофа маълум мешавад? Радиуси замин тахминан 6370 км. *Ҷавоб*: ≈ 225,8 км.

Масъалаи 4. Қуллаи Элбурси кавказ аз сатҳи баҳр ≈5600 м (аниқаш 5642 м) ба баландӣ ҷойгир шудааст аз ҳамон баландӣ чӣ қадар дуриро дидан мумкин? Радиуси замин тахминан 6370 км. *Ҷавоб:* ≈ 270 км.

Дар хотир доред! *Дар масъалаҳои дар боло ҳалшуда омилҳои физикиро ба ҳисоб нагирифтем. Дурии горизонт дар бисёр омилҳо вобаста буда, каме зиёдтар ё ки камтар шуданаш мумкин.*

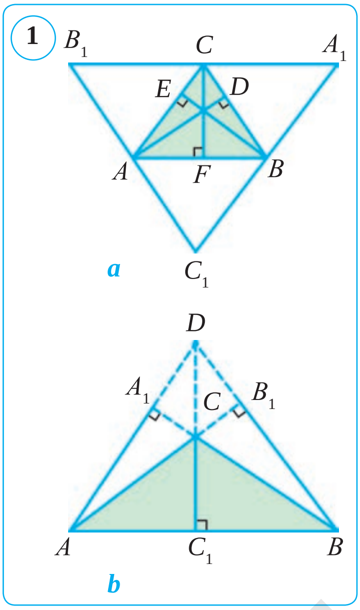
НУҚТАҲОИ АҶОИБИ СЕКУНҶА

Чорто нуқтаҳои аҷоиби секунҷаро дида мебароем.

1. Нуқтаи буриши баландиҳои секунҷа.

Теоремаи 1.

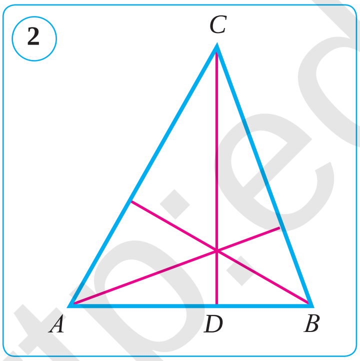
Баландиҳои секунҷа (ё ки давоми онҳо) дар як нуқта бурида мешавад.



Исбот. AD, BF ва CE – ABC баландиҳои секунҷаи (расми 1, *а*). Аз қуллаи секунҷа ба тарафҳои муқобилаш хатҳои рости параллел мегузаронем. Дар натиҷа тарафҳояш ба баландии секунҷаи ABC перпендикуляр секунҷаи $A_1B_1C_1$ – ро ҳосил мекунем. Аз рӯи сохт, C, BCA ва B_2ABC чоркунҷаҳо – параллелограмм, аз ин $C_1A=BC$ ва $BC=AB_1$ буданаш бармеояд. Пас, нуқтаи A миёнаҷои порчаи, B_1C_1. Ҳаминтавр нуқтаи B миёнаи A_1C_1 ва C бошад, миёнаҷои A_1B_1 буданаш исбот карда мешавад.

Ҳаминтавр баландиҳои, AD, BF ва CE ба перпендикуляри миёнаи секунҷаи $A_1B_1C_1$ мехобад. Пас, онҳо дар як нуқта бурида мешавад. Қайд мекунем, ки баландиҳои секунҷа якдигарро намебурад. Баландии кунҷи кунди секунҷаҳо фақат дар як нуқта мебурад аммо худи баландиҳо намебурад (расми 1, *б*).

Баландиҳои секунҷа (ё ки давоми онҳо)-ро ортомарказ меноманд.



Масъала. Кадоме аз тарафҳои секунҷа ба ортомарказ наздик ҷойгир шудааст?

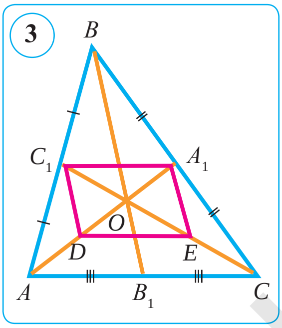
Ҳал. ABC дар секунҷаи $AC>BC$ бошад (расми 2). Барои баландии CD – секунҷа аз нобаробариҳо истифода мебарем $AD>BD$ нобаробарӣ ва пас, $\angle ACD>\angle BCD$ аз иҷрои нобаробарӣ истифода мебарем. Ин нуқтаҳои баландӣ наздик будан ба тарафи хурди аз ин қулла тарафҳои барояндаро мефаҳмонад. Пас, ортомаркази секунҷа ба тарафи хурд наздик воқеъ аст.

2. Нуқтаҳои буриши медианаҳои секунҷа.

Теоремаи 2.

Медианаҳои секунҷа дар як нуқта бурида мешавад ва дар ин нуқта аз қулла саркарда ҳисобкунаки ба нисбати $2:1$ тақсим мешавад.

Исбот. Бигзор дар секунҷаи ABC медианаҳои AA_1, BB_1 ва CC_1 гузаронида шуда бошад (расми 3) дар ягон нуқтаи O буридашавӣ ва ба $AO:OA_1=BO:OB_1=CO:OC_1=2:1$ тақсимшавиашро исбот мекунем.



O – AA_1 ва CC_1 нуқтаҳои буриши медианаҳо, D ва E мувофиқан миёнаҷои порчаҳои AO ва CO бошад. C_1A_1 хати миёнаи секунҷаи ABC ва мувофиқи хосияти хати миёнаи секунҷа: $C_1A_1\|AC$, $C_1A_1=0{,}5AC$. Ғайр аз он DE – хати миёнаи DE-и AOC ва мувофиқи ҳамин хосият: $DE\|AC, DE=0{,}5AC$. Пас, чоркунҷаи DC_1A_1E ду тарафаш параллел ва баробар. Ҳаминтавр DC_1A_1E – параллелограмм, диагоналҳои DA_1 ва C_1E-и он онро ба ду ҳиссаи баробар тақсим мекунад. Пас, $AD=DO=OA_1, CE=EO=OC_1$, яъне AA_1 ва CC_1 ва медианаҳо дар нуқтаи О ба 2 : 1 нисбат тақсим мешавад.

Ба мисли ҳамин BB_1 медианаи сеюм AA_1 ба медианаҳои CC_1 дар нуқтаи буриш ба 2:1 нисбат ҷудо мешавад. Барои ҳар як медиана ин тақсимшавӣ ягона ва пас, се медиана он дар як нуқта бурида мешавад.

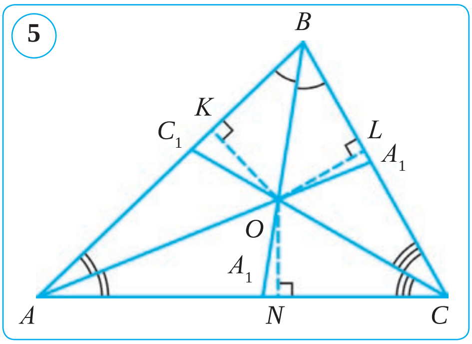
Нуқтаҳои буриши медианаҳои секунҷаро *сентроид* ё ки *маркази вазнинӣ* ҳам меноманд. Ин хел номгузориро дар таҷрибаи зерин санҷед: аз коғази картон секунҷаи дилхоҳ бурида гиред ва медианаҳои онро гузаронед баъд бо сӯзан ё ки қалами нӯгтез ба болои нуқтаи буриши медианаҳо гузоред бо мувозинат доштан ҳаракат кунед (расми 4).

3. Нуқтаҳои буриши биссектрисаҳои секунҷа.

Теоремаи 3.

Се биссектрисаҳои секунҷа дар як нуқта бурида мешаванд.

Исбот. AA_1 ва BB_1 биссектрисаҳои секунҷаи ABC-ро бо O – ишорат мекунем. Аз он нуқта мувофиқаи ба хатҳои рости AB, BC ва CA перпендикулярҳои OK, OL ва OM-ро мегузаронем (расми 5). Ба мо маълум аст, ки масофаи нуқтаи дилхоҳи биссектрисаи кунҷ то масофаи тарафҳои он баробар аст $OK=OK$ ва $OK=OL$. Барои ҳамин $ON=OL$), яъне нуқтаи O аз кунҷи ACB дар тарафҳои якхел дурӣ баробар мехобад ва пас дар биссектрисаи CC_1 мехобад. Аз ин ҷо се биссектрисаи ABC-и буриш бармеояд.



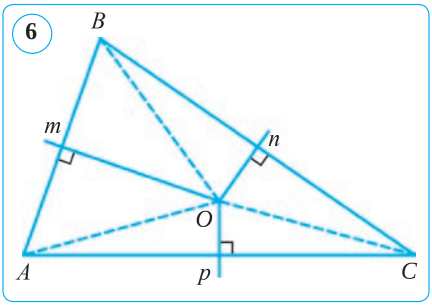
Теорема исбот шуд.

4. Нуқтаи буриши перпендикуляри миёнаи секунча.

Теоремаи 4.

Перпендикуляри миёнаи тарафҳои секунча дар як нуқта бурида мешавад.

Исбот. Бигзор секунчаи ΔABC дода шуда бошад (расми 6). Ба тарафҳои m ва n-и он перпендикуляри AB ва BC мегузаронем. Онҳо дар ягон нуқтаи O – бурида мешавад. Буриши хатҳои рости ба хатҳои рости буранда перпендикуляр. Ба мо маълум аст, ки масофа аз нуқтаи дилхоҳи перпендикуляри миёнаи порча то нӯгҳои он баробар аст. Мувофиқи он $OA=OB$ (1) ва $OB=OC$ (2) мешавад. Аз баробариҳои (1) ва (2) меёбем: $OA=OC$. Пас, перпендикуляри миёнаи AC – P ҳам аз нуқтаи – О мегузарад. Ҳамчунин нуқтаи О – аз қуллаи секунчаи ΔABC дар як хел дури воқеъ аст: $OA=OB=OC$..
Аз ин ҷо се перпендикуляри ΔABC ва m, n ва p -и ба тарафҳои секунчаи ΔABC гузаронида шуда, дар нуқтаи O якдигарро мебурад. Теорема исбот шуд.

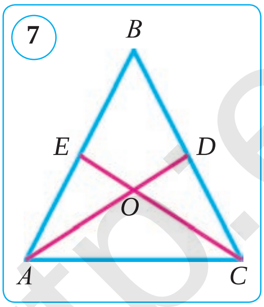


Савол, масъала ва супоишҳо

? 1) Оё ҳамеша баландиҳои секунча якдигарро мебуранд?
2) Шумо чанд нуқтаи аҷоиби секунчаро медонед? Онҳоро гӯед.

2. Нуқтаҳои аҷоиби секунчаи баробартараф чӣ хел ҷойгиранд?

3. Агар ба секунча 2 – то медиана баробар бошад, онгоҳ он баробарпаҳлӯ мешавад. Инро исбот кунед.



Ҳал. Дар секунчаи ABC медианаҳои AD ва CE баробар ва дар нуқтаи О бурида мешанад (расми 7). Секунчаҳои AOE ва COD-ро дида мебароем нуқтаи O медианаҳои AD ва CE-ро ба нисбати $2:1$ тақсим мекунад. Бинобарии $AO=CO$, $EO=DO$ мешавад. Ғайр аз ин барои кунҷи вертикал буданаш $\angle AOE=\angle COD$. Пас, мувофиқи аломати 1-уми баробарии секунчаҳо $\Delta AOE=\Delta COD$. Аз ин ҷо $AE=CD$ бармеояд, мувофиқи таърифи медиана ин порчаҳо ба нисфи тарафи AB ва CB баробар. Пас, ин порчаҳо аз рӯи таърифи медиана $AB=CB$, яъне секунчаи ABC баробарпаҳлӯ будааст, инро исбот кардан лозим буд.

4. Исбот кунед, ки чорто нуқтаи аҷоиби секунчаи баробарпаҳлӯ дар як хати рост мехобад. Он кадом хати рост мебошад?

5. Нуқтаи буриши медианаҳои секунча бо ортомарказ болои ҳам меафтад. Баробартараф будани секунчаи дода шударо исбот кунед.

6. Оё қуллаи секунчаи нуқтаи буриш, баландиҳо шуда метавонад?

7. Нуқтаи буриши медианаҳо фарқи яке аз медианаҳо 3 см ба қисмҳои баробар ҷудо мекунад. Дарозии ин медианаҳоро ёбед.

61–62. 5- КОРИ НАЗОРАТӢ. ИСЛОҲ НАМУДАНИ ХАТОГИҲО

1. *AB* – диаметри давраи марказаш – *O*. Агар $OA=OC=AC$ бошад, кунҷи *BCO*-ро ёбед

2. 1) Масофаи аз ҳама калон ва аз ҳама хурди аз нуқтаи берунии давраро то нуқтаи давра мувофиқан 50 см ва 20 см мебошад. Радиуси давраи дода шударо ёбед. 2) Аз маркази давра то нуқтаи B масофа ба 3 см, радиус ба 10 см баробар аст. Масофаи аз ҳама калон ва аз ҳама хурди то нуқтаи *B*-ро ёбед.

3. Хатҳои рости *AB* ва *AC* дар давраи марказаш – *O* дар нуқтаҳои *B* ва *C* мерасад. Агар $\angle OAB = 30°$ ва $AB = 5$ см бошад, *BC*-ро ёбед.

4. Давра ба нисбати 11:16 : 9 ба се камон ҷудо шудааст ва нуқтаҳои, ҷудошавӣ пайваст карда шудааст. Бузургии кунҷи ҷудокунии секунҷаи ҳосил шударо ёбед.

ТЕСТИ 5

Худро санҷида бинед!

1. Масофа аз маркази давра то нуқтаи *B* ба 5 см, радиус ба 12 см баробар аст. Масофаи аз ҳама хурд ва калони то нуқтаи *B* – бударо ёбед.

A) 7 см, 17 см; B) 7 см, 12 см; D) 5 см, 7 см; E) 7 см, 24 см.

2. Масофаи аз ҳама калон ва аз ҳама хурди нуқтаи берунии давра то нуқтаи он мувофиқан ба 30 см ва 10 см баробар, радиуси давраи додашударо ёбед.

A) 20 см; B) 10 см; D) 15 см; E) 5 см.

3. AB – диаметри давраи марказаш – *O*. Агар $OA=OC=BC$ бошад, кунҷи CAO – ро ёбед,

A) 60°; B) 30°; D) 90°; E) 120°.

4. Аз нуқтаи давраи радиусаш *R* ду хордаи дарозиаш ба *R* баробар гузаронида шуд. Кунҷи байни хордаҳоро ёбед.

A) 120°; B) 110°; D) 135°; E) 40°.

5. Яке аз кунҷҳои байни ду хордаи давраро буранда ба 80° баробар аст. Суммаи кунҷҳои ба ин кунҷ ҳамсояро ёбед.

A) 200°; B) 90°; D) 100°; E) 160°.

6. Аз нуқтаи берунии давра ба он ду расанда гузаронида шудааст. Агар кунҷи байни онҳо 72° бошад, камони калони нуқтаҳои байни расиши давраро ёбед.

A) 248°; B) 240°; D) 252°; E) 236°.

Забони англисиро меомӯзем!

Давра – circle
Хорда – chord
Радиус – radius
Камон – arc

Диаметр – diameter
Кунҷи марказӣ – central angle
Расанда ба давра – tangent to the circle
Перпендикуляр – perpendicular

Малумотҳои таърихӣ

Абулвафо Бузҷонӣ
(940–998)

Абулвафо Бузҷонӣ соли 940 дар шаҳри Бузҷони байни шаҳрҳои Ҳирот ва Нишопури вилояти Хуросон (шаҳри Кушкаи Туркманистони имрӯза) таваллуд ёфтааст. Ӯ дар Бағдод таҳсил гирифта, эҷод кардааст.

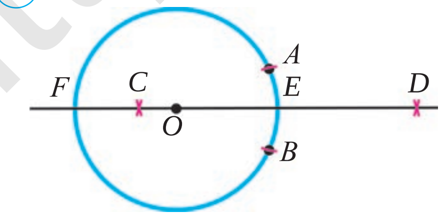
Бобҳои якум ва дуюми китоби «Ҳунармандон аз сохтаниҳои геометрӣ чиҳоро бояд донанд?» Ба сохтаниҳо бо ёрии хаткашак ва паргор (сиркул) бахшида шудааст. Мо ба шумоён масъаларо дар бораи ёфтани маркази давра, ки ба Абулвафо мансуб аст, меорем.

«Агар «маркази давра чӣ гуна ёфта мешавад?» гӯён пурсанд, дар давра нуқтаҳои A ва B-ро ишора карда, дар масофаи AB нуқтаҳои A ва B-ро марказ интихоб карда, ду давраи баробар мекашем, онҳо дар нуқтаҳои C ва D бурида мешаванд (расми 1). Хати рости CD мегузаронем ва онро ба давра то буриш дар нуқтаҳои E ва F давом медиҳем, сонӣ хати рости EF-ро дар нуқтаи O ба ду ҳисса ҷудо мекунем. Дар он ҳол нуқтаи O маркази давра мешавад».

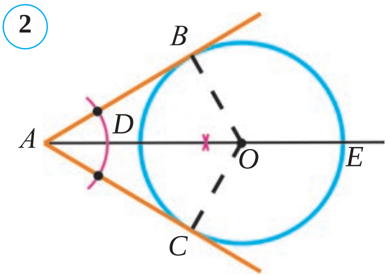
Ин усул ба он асос ёфтааст, ки камонҳои аз марказҳои *A* ва *B* сохташуда, дар нуктаҳои *CD* бурида мешаванд ва ба хордаи *AB* перпендикуляр буда, аз маркази давра мегузарад. Ҳоло ин масъала чунин ҳал мешавад: фараз мекунем, ба мо давраи марказаш ишоранагашта дода шудааст ва талаб карда мешавад, ки маркази он муайян карда шавад (расми 2). Аз нуктаи *A* ба ин давра расандаҳои *AB* ва *AC*-ро гузаронида биссектрисаи кунҷи *BAC*-ро месозем. Биссектриса кунҷро дар нуктаҳои *D* ва *E* мебурад. Агар *DE* ба ду ҳиссаи баробар ҷудо карда шавад, нуктаи тақсим *O* маркази давра мешавад. Чаро? Ва ё агар дар нуктаи *B* ба расандаи *AB* перпендикуляр гузаронем, он биссектрисаро дар нуктаи *O* мебурад. Нуктаи *O* маркази давра мешавад. Чаро?

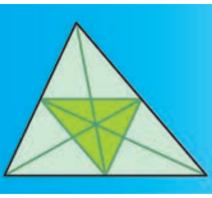
Дар баробари ин, Абулвафо масъалаҳоро, аз қабили барқарор намудани давра аз рӯи камони додашуда, дар бораи сохтани расанда ба давра аз нуктаи додашуда ва берун аз он, дар бораи сохтани расанда дар нуктаи додашудаи давра ҳал мекунад.

1



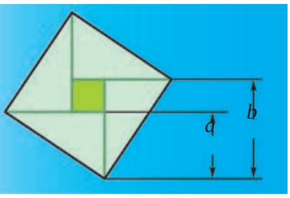
2





БОБИ VI

ТАКРОРӢ



Машқҳо барои такрори маводҳои омӯхташудаи синфи 8

1. Сето кунҷи берунии чоркунҷа ба тарви мувофиқ ба 142°, 22° ва 136° баробар аст. Кунҷҳои ҳамин чоркунҷаро ёбед.

2. Тарафи хурди чоркунҷа ба 7 см баробар, ҳар яки тарафҳои боқимонда аз пешина 4 см-и калон аст. Периметри ин чоркунҷаро ёбед.

3. Кунҷи тези трапетсияи росткунҷа ба 45° баробар. Тарафи хурди паҳлӯ, инчунин асоси хурдаш ба 24 см баробар аст. Асоси калони трапетсияро ёбед.

4. Тарафҳои секунҷаи баробарпаҳлӯ: 1) 6 см, 5 см ва 5 см, 2) 24 см, 15 см ва 5 см, 3) 3,2 дм, 20 см ва 20 см, 4) 22 см, 60 см ва 60 см. Масоҳати ин секунҷа ва баландии ба тарафи паҳлӯи гузаронида шударо ёбед.

5. $ABCD$ дар чоркунҷаи $AB=CD$, $AD=BC$, аз кунҷи A аз кунҷи B 3 маротиба калон. Кунҷҳои чоркунҷаро ёбед.

6. $ABCD$ агар дар трапетсияи баробарпаҳлӯ $BC=20$ см, $AB=24$ см ва $\angle D=60°$ бошад, асоси AD-ро ёбед.

7. Дар секунҷаи $\triangle ABC$ AE ва BD – баландиҳо. $AC=20$ см, $BD=16$ см ва $BC=32$ см. AE-ро ёбед.

8. Масоҳати секунҷаи росткунҷа ба 168 см^2 баробар аст. Агар яке аз катетҳо ба. $\frac{7}{12}$ қисми дуюмаш баробар бошад, катетҳои секунҷаро ёбед.

9. Масоҳати секунҷа 24 см^2. Баландии ба тарафи 16 см баробари секунҷа гузаронида шударо ёбед.

10. Ромби $ABCD$ дода шудааст. Диагоналҳои AC ва BD мувофиқан ба 30 см ва 12 см баробар. Масоҳати ромбро ёбед.

11. Масоҳати секунҷаро аз рӯи се тарафаш ёбед:
1) 15, 15, 18; 2) 39, 42, 45; 3) 4, 13, 15; 4) 29, 25, 6.

12. Дар секунҷаи ABC $BC=34$ см. EF перпендикуляри аз миёнаи порчаи BC ба хати рости AC гузаронида, тарафи AC, $AF=25$ см ва $FC=15$ см ба порчаҳо ҷудо мекунад. Масоҳати секунҷаи ABC-ро ёбед.

13. Диагоналҳои ромб 18 дм ва 24 дм. Периметр ва масофаи байни тарафҳои параллелро ёбед.

14. Баландии трапетсияи баробарпаҳлӯ аз тарафи паҳлӯи ду маротиба хурд. Кунҷҳои трапетсияро ёбед.

15. Масофаи нуқтаи дилхоҳи секунҷаи баробартараф то тарафҳои он тағирнаёбанда якхел ва ба баландии ин секунҷа баробар. Инро исбот кунед.

16. Нуқтаҳои *A, B, C*-и, – давра онро ба нисбати: 1) $14:6:4$; 2) $13:12:5$; 3) $17:10:9$ ба камонҳо ҷудо мекунад. Аз нуқтаҳои *A, B* ва *C* расандаҳо гузаронида то буридани якдигар давом дода шудааст. Кунҷҳои секунҷаи ҳосил шударо ёбед.

17. Агар қади росткунҷа 30% зиёд карда шавад ва бараш 30 % кам карда шавад, масоҳати он чӣ қадар тағйир меёбад?

18. Агар асоси секунҷа 20% дароз карда шавад, баландии он 20 % кӯтоҳ карда шавад, масоҳати он чӣ хел тағйир меёбад?

19. Масоҳати росткунҷа ба 540 см^2 баробар. Нисбати ду тарафаш ба $3:5$ периметри ин росткунҷаро ёбед.

20. Масоҳати параллелограмм ба 24 см^2 баробар. Агар баландиҳояш ба 3 см ва 4 см баробар бошад. Периметри онро ёбед:

1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$; 3) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$; 4) $\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA}$.

21. Ягон параллелограмми *ABCD*-ро созед. Векторҳояшро созед.

22. Агар: 1) $A(0;\ 1)$, $B(1;\ 0)$; 2) $A(-2;\ 1)$, $B(-4;\ 3)$, $\overrightarrow{AB}$ бошад, координатҳои вектори AB ба чӣ баробар аст?

23. Дар секунҷаи *ABC* AA_1 – медиана, O – AA_1 – ро миёнаҷояш. $\overrightarrow{BO}$ вектор бо векторҳои $\vec{a}=\overrightarrow{BA}$ ва $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$ ифода кунед.

24. Диагонали параллелограмми *ABCD* дар нуқтаи *O* бурида мешавад. Нуқтаи *P* миёнаи *OB* аст. $\overrightarrow{AP}$ -ро бо ёрии векторҳои $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ ва $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$ ифода кунед.

25. Расандаҳои аз нӯгҳои камони 240°-нок то буридани якдигарӣ давом дода шудаанд. Кунҷи байни онҳоро ёбед.

26. Яке аз кунҷҳои параллелограмм аз дигараш 4 маротиба калон. Кунҷи калони ҳамин параллелограммро ёбед.

27. Масоҳати росткунҷа 288 см^2. Нисбати ду тарафаш ба $1:2$ баробар аст. Масоҳати ин росткунҷаро ёбед.

28. Баландии ба яке аз тарафҳои параллелограмм гузаронида шуда аз ҳамон тараф се баробар хурд. Масоҳати параллелограмм 48 см^2. Баландӣ ва ҳамин тарафро ёбед.

29. Масоҳати квадрат 16 см^2. Агар 1) ҳамаи тарафашро ду маротиба кӯтоҳ кунем; 2) ҳамаи тарафи онро 3 маротиба дароз кунем, масоҳати квадрат чӣ хел тағйир меёбад?

30. Агар: 1) 1) $A(7;\ -5)$, $B(-9;\ -3)$; 2) $A(-8;\ 2)$, $B(-12;\ -4)$; 2) $A(8;\ -1)$, $B(-16;\ -11)$ бошад, миёнаи порчаи *AB* – координатаҳои нуқтаи *C*-ро ёбед.

КОРИ НАЗОРАТИИ ҶАМЪБАСТӢ. ИСЛОҲ НАМУДАНИ ХАТОГИҲО

1. Тарафи хурди росткунҷа ба 10 см баробар, диагоналҳояш бошад, дар таҳти кунҷи 60° мебурад. Диагоналҳои росткунҷаро ёбед.
2. Тарафҳои секунҷа ба 11 см, 7 см ва 10 см баробар аст. Периметри секунҷа ва хатҳои миёнаи секунҷаи ҳосилшударо ёбед.
3. Тарафҳои секунҷа ба 21 см, 72 см ва 75 см баробар аст. Масоҳати ин секунҷаро ёбед.
4. Кунҷи байни ду расандаи аз берун ба давра гузаронида шуда ба 75° баробар аст. Камонҳои тарафҳои расандаро дар дохили худ гирифтаро ёбед.
5. $\vec{a}(2;-3)$ ва $\vec{b}(-2;-3)$ векторҳо дода шудааст. Координатҳои вектори $\vec{m}=\vec{a}-2\vec{b}$ -ро ёбед.

ТЕСТИ 6

Худатонро санҷида бинед!

1. Кунҷҳои чоркунҷа байни худ ба нисбати 3 : 5 : 4 : 6 дода шудааст. Кунҷи хурди росткунҷаро ёбед.
   A) 80°; B) 30°; D) 60°; E) 40°.
2. Диагоналҳои чоркунҷаи барҷаста онро ба чанд секунҷа ҷудо мекунад?
   A) 4; B) 5; D) 6; E) 8.
3. Бари росткунҷа ба 5 см баробар, дарозии он аз 7 см зиёд. Периметри росткунҷаро ёбед.
   A) 32 см; B) 34 см; D) 24 см; E) 26 см.
4. Ҳар як кунҷи дарунии чоркунҷаи барҷаста ба 162 баробар бошад, он чанд тараф дорад?
   A) 18-то; B) 20-то; D) 15-то; E) 12 -то.
5. Нисбати ду тарафи параллелограмм ба 3 : 7 периметраш бошад, ба 18 см баробар аст. Тарафи хурди ҳамин параллелограммро ёбед.
   A) 2,7 см; B) 3,4 см; D) 5,4 см; E) 4,5 см.
6. Бари майдони росткунҷашакл 32 м. Агар масоҳати майдон 2 гектар бошад, дарозии он чанд метр мешавад?
   A) 610 м; B) 615 м; D) 625 м; E) 630 м.
7. Баландии ромб ба 5 см, ҳосили зарби диагоналҳо ба 80 см^2 баробар аст. Периметри онро ёбед.
   A) 32 см; B) 16 см; D) 24 см; E) 28 см.
8. Векторҳои $\vec{a}(2;\ -3)$ ва $\vec{b}(-2;\ -3)$ дода шудааст. Координатаҳои вектори. $\vec{m}=-\vec{a}+2\vec{b}$ -ро ёбед.
   A) (−6; −3); B) (−3; 6); D) (−2; –9); E) (2; −3).
9. Вектори $\vec{a}(3;\ 2)$ ва $\vec{b}(0;\ -1)$ дода шудааст. Модули вектори. $2\vec{a}-4\vec{b}$ -ро ёбед.
   A) 10; B) 6; C) 8; D) 3.

Ҷадвали қимматҳои функсияҳои тригонометрии кунҷи тез. Илова.

Градусҳо	sinα 1° ≤α≤45°	tgα 1° ≤α≤45°	ctgα 1° ≤α≤45°	cosα 1° ≤α≤45°	Градусҳо
1	≈ 0,0175	≈ 0,0175	≈ 57,290	≈ 0,9998	89
2	≈ 0,0349	≈ 0,0349	≈ 28,636	≈ 0,9994	88
3	≈ 0,0523	≈ 0,0524	≈ 19,081	≈ 0,9986	87
4	≈ 0,0698	≈ 0,0699	≈ 14,301	≈ 0,9976	86
5	≈ 0,0872	≈ 0,0875	≈ 11,430	≈ 0,9962	85
6	≈ 0,1045	≈ 0,1051	≈ 9,514	≈ 0,9945	84
7	≈ 0,1219	≈ 0,1228	≈ 8,144	≈ 0,9925	83
8	≈ 0,1392	≈ 0,1405	≈ 7,115	≈ 0,9903	82
9	≈ 0,1564	≈ 0,1584	≈ 6,314	≈ 0,9877	81
10	≈ 0,1736	≈ 0,1763	≈ 5,671	≈ 0,9848	80
11	≈ 0,1908	≈ 0,1944	≈ 5,145	≈ 0,9816	79
12	≈ 0,2079	≈ 0,2126	≈ 4,705	≈ 0,9781	78
13	≈ 0,2250	≈ 0,2309	≈ 4,331	≈ 0,9744	77
14	≈ 0,2419	≈ 0,2493	≈ 4,011	≈ 0,9703	76
15	≈ 0,2588	≈ 0,2679	≈ 3,732	≈ 0,9659	75
16	≈ 0,2756	≈ 0,2867	≈ 3,487	≈ 0,9613	74
17	≈ 0,2924	≈ 0,3057	≈ 3,271	≈ 0,9563	73
18	≈ 0,3090	≈ 0,3249	≈ 3,078	≈ 0,9511	72
19	≈ 0,3256	≈ 0,3443	≈ 2,904	≈ 0,9455	71
20	≈ 0,3420	≈ 0,3640	≈ 2,747	≈ 0,9397	70
21	≈ 0,3584	≈ 0,3839	≈ 2,605	≈ 0,9336	69
22	≈ 0,3746	≈ 0,4040	≈ 2,475	≈ 0,9272	68
23	≈ 0,3907	≈ 0,4245	≈ 2,356	≈ 0,9205	67
24	≈ 0,4067	≈ 0,4452	≈ 2,246	≈ 0,9135	66
25	≈ 0,4226	≈ 0,4663	≈ 2,145	≈ 0,9063	65
26	≈ 0,4384	≈ 0,4877	≈ 2,050	≈ 0,8988	64
27	≈ 0,4540	≈ 0,5095	≈ 1,963	≈ 0,8910	63
28	≈ 0,4695	≈ 0,5317	≈ 1,881	≈ 0,8829	62
29	≈ 0,4848	≈ 0,5543	≈ 1,804	≈ 0,8746	61
30	0,5000	≈ 0,5774	≈ 1,732	≈ 0,8660	60
31	≈ 0,5150	≈ 0,6009	≈ 1,664	≈ 0,8572	59
32	≈ 0,5299	≈ 0,6249	≈ 1,600	≈ 0,8480	58
33	≈ 0,5446	≈ 0,6494	≈ 1,540	≈ 0,8387	57
34	≈ 0,5592	≈ 0,6745	≈ 1,483	≈ 0,8290	56
35	≈ 0,5736	≈ 0,7002	≈ 1,428	≈ 0,8192	55
36	≈ 0,5878	≈ 0,7265	≈ 1,376	≈ 0,8090	54
37	≈ 0,6018	≈ 0,7536	≈ 1,327	≈ 0,7986	53
38	≈ 0,6157	≈ 0,7813	≈ 1,280	≈ 0,7880	52
39	≈ 0,6293	≈ 0,8098	≈ 1,235	≈ 0,7771	51
40	≈ 0,6428	≈ 0,8391	≈ 1,192	≈ 0,7660	50
41	≈ 0,6561	≈ 0,8693	≈ 1,150	≈ 0,7547	49
42	≈ 0,6691	≈ 0,9004	≈ 1,111	≈ 0,7431	48
43	≈ 0,6820	≈ 0,9325	≈ 1,072	≈ 0,7314	47
44	≈ 0,6947	≈ 0,9657	≈ 1,036	≈ 0,7193	46
45	≈ 0,7071	1,0000	1,000	≈ 0,7071	45
Градусҳо	cosα 45° ≤α≤89°	ctgα 45° ≤α≤ 89°	tgα 45° ≤α≤89°	sinα 45° ≤α≤89°	Градусҳо

Ҷавобҳо

Такрори маводҳои синфи 7-ум. **5.** 9 дм. **7.** 3 см. **9.** Ҳа, баробар. **10.** 52°, 63°, 65°. **11.** 60°. **13.** 24°, 72°, 84°. **14.** Не, намешавад. **18.** 58°.

Боби-I. **Мавзӯи 1.** **2.** 1) $n=8$; 2) $n=11$; 3) $n=24$. **4.** 60°. **5.** 1) $n=12$; 2) $n=36$; 3) $n=40$. **6.** $n=8$ ta. **7.** 1) $n=20$ то; 2) $n=15$-то; 3) $n=6$ ta. **9.** 1) $n=24$-то; 2) $n=8$-то; 3) $n=5$ ta. **10.** 36°, 72°, 108°, 144°. **Мавзӯи 2.** **2.** 25,5 см, 50,5 см. **3.** 1) 35°, 145°, 35°, 145°; 3) 85°, 105°, 85°, 105°. **4.** $P_{ABO}=20$ см; $P_{BOC}=24$ см. **5.** $AB=DC=16$ см, $AD=BC=4$ см. **Мавзӯи 3.** **2.** 1) Ҳа, дуруст. **3.** 32 см. **7.** 26 см ё ки 28 см. **8.** 45°, 135°, 135°, 45°. **9.** 26 см. **Мавзӯи 4.** **2.** 1) 9 см; 2) 7 см. **3.** 12 см. **4.** $AB=DC=4$ см, $BC=AD=8$ см. **6.** 1) $4+7<12$ – на бо секунча ичро нашуд; не шуданаш мумкин нест. **7.** 7 см, 14 см, 7 см, 14 см. **Мавзӯъҳои 5–6 .** **2.** 10 см. **3.** $BP=12$ см. **5.** 7 см. **6.** 40°, 140°, 40°, 140°. **9.** 12 см, 24 см, 30 см, 42 см. **10.** 64 см. **12.** 30 см. **13.** 32 см. **Мавзӯъҳои 7–8.** **3.** 150°. **4.** 23 см. **6.** 27 см, 11 см. **7.** 20 см, 14 см. **10.** 90°, 90°, 100°, 80°. **12.** 70 см. **Мавзӯи 9.** **3.** $AC=5$ см. **4.** $OB_1=3{,}2$ см, $OB_2=4{,}8$ см, $OB_3=6{,}4$ см. **6.** 2) 19 см. **8.** $x=4$. **9.** $OB_1=9$ см, $OB_2=13{,}5$ см, $OB_3=18$ см. **Мавзӯъҳои 10–11.** **2.** 2,5 см, 3,5 см, 5,5 см. **4.** 22 см, 10 см. **6.** 2) 15 см. **9.** 24 см, 12 см. **10.** 3 см. **11.** 30 см, 10 см. **12.** 12 см.

Боби-II. **Мавзӯи 15.** **2.** a) cosα; b) tgα; d) sinα; e) ctgα. **4.** a) Ҳа, чунки $0{,}98<1$; b) не, чунки $\sqrt{2}>1$; d) ҳа, чунки $\sqrt{5}-2<1$. **5.** $ML=24$, $MN=25$. **6.** $\sin M=\frac{5}{13}$, $\cos M=\frac{12}{13}$, $\mathrm{tg}M=\frac{5}{12}$, $\mathrm{ctg}M=\frac{12}{5}$. **Мавзӯи 16.** **2.** a) Дуруст, чунки $a=c\sin\alpha$; d) нодуруст, чунки $a=C\sin\alpha$; d) $c=\frac{a}{\sin\alpha}$. **3.** Ҳа, чунки қимати муодила адади дилхоҳи мусбат мешавад. **4.** 1) 16 см; 2) 50 см. **6.** 16 см. **7.** 5 см. **8.** 50 см. **Мавзӯи 17.** **2.** 1) 13; 2) 9; 3) 2,5. **3.** 1) 40 см; 2) 100 см. **4.** $x=\sqrt{3}$; $y=\sqrt{2}$. **5.** 1) 0,5; 2) $4\sqrt{2}$; 3) 0,8; 4) 1,5. **Мавзӯи 18.** **2.** 1) Не, чунки $121+49\neq289$; 2) ҳа, чунки $3^2+1{,}6^2=3{,}4^2$, $11{,}56=11{,}56$. **5.** Ба 2-то ҳал соҳиб аст. **6.** 1) Ҳа, чунки $12^2+35^2=37^2$; 2) не чунки $11^2+20^2\neq25^2$. **Мавзӯи 19.** **1.** 1) 9,6 см, 9,6 см, 8 см. **2.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}h$. **3.** 1) $h_b=\frac{12}{7}\sqrt{6}$ см; 2) $h_c=11{,}2$ дм; 3) $h_b=6{,}72$ см. **4.** $h=6\sqrt{3}$ см. **5.** $h_a=\frac{15}{4}\sqrt{7}$ см; $h_c=\frac{5}{2}\sqrt{7}$ см. **7.** $h_a=\frac{3}{2}\sqrt{15}$ см. **Мавзӯъҳои 20–21.** **2.** 1) $\frac{5}{13}$; 2,4; $\frac{5}{12}$. **4.** 1) 2; 2) 1; 3) 1. **5.** 1) ctg²α; 2) tgα. **7.** 1) $\frac{2}{\sqrt{5}}$; $\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\frac{1}{2}$. **9.** 1) $\cos\alpha=\frac{15}{17}$; $\mathrm{tg}\alpha=\frac{8}{15}$; $\mathrm{ctg}\alpha=\frac{15}{8}$. **12.** 1) sin²α; 2) cos³α. **14.** 1) sin²α; 2) sin³α. **Мавзӯи 22.** **2.** 1) $x\approx50°$; 2) $x\approx14°$; 3) $x\approx34°$; 4) $x\approx74°$. **3.** 1) $\sin B=0{,}6$; $\cos B=0{,}8$. **5.** $\cos A=0{,}5$; $\mathrm{tg}A=\sqrt{3}$. **7.** 1) $\sin\alpha=0{,}6$; $\cos\alpha=0{,}8$. **8.** 1) sinα; 2) cos²α. **Мавзӯи 23.** **1.** 1) 1,5; 3) 0,5. **3.** $\frac{32\sqrt{3}}{3}$; $\frac{16\sqrt{3}}{3}$. **4.** 12; 6. **5.** 1) sin²α; 2) sin²α. **7.** 2. **8.** 1) 0,5; 2) 0,5; 3) 1. **Мавзӯи 24.** **1.** a) 1) $\approx0{,}0523$; 2) $\approx0{,}3584$; 3) $\approx0{,}7660$; 4) $\approx0{,}6428$; e) 1) $\approx5{,}671$; 2) $\approx1{,}732$; 3) $\approx0{,}2679$; 4) $\approx11{,}430$. **2.** b) 1) $\approx42°$; 2) $\approx50°$; 3) $\approx87°$; d) 1) $\approx25°$; 2) $\approx85°$; 3) $\approx10°$. **4.** 1. **6.** 1) 1; 2) 0. **7.** 1) $\approx0{,}9397$; 4) $\approx23{,}078$. **8.** $x\approx8°$. **Мавзӯи 25.** **1.** 14 см. **2.** 45°, 45°. **3.** $a\approx6{,}691$; $b\approx7{,}431$; $\beta\approx48°$. **5.** cos²α. **7.** $a=4$ см; $b=4\sqrt{3}$ см, $\beta=60°$. **Мавзӯи 26.** **1.** $b=9$ см, $\alpha=\beta=45°$. **2.** $c=12$ см, $\alpha=60°$, $\beta=30°$. **5.** 0. **7.** $c=26$ см. **Мавзӯи 27.** **3.** $a=7$ см, $\alpha=\beta=45°$. **4.** $a=6\sqrt{3}$ см, $b=6$ см, $\beta=30°$. **5.** $a=5$ см (расми 5); $AC=2\sqrt{13}$ см, $BC=3\sqrt{13}$ см (расми 6). **6.** 168 см.

Боби III. **Мавзӯи 31.** **3.** 1) Чоряки-III; 2) Чоряки-II; 3) Чоряки-IV; 4) Чоряки-I. **4.** 1) $(-10;-1)$; 2) $(0;-5{,}5)$; 3) $(-2;1)$. **5.** 1) $B(-1;5)$. **8.** 1) $D(3;0)$; 2) $D(4;5)$. **Мавзӯъҳои-32–33.** **2.** 1) 10; 2) 17; 3) 13. **3.** 1) $x_1=-2$; $x_2=6$. **4.** $P=16$. **5.** 1) $(x-7)^2+(y-11)^2=25$; 2) $(x+2)^2+(y-3)^2=1$. **6.** 1) $(2;5)$, $R=7$; 2) $(-1;5)$, $R=2$. **7.** 1) $C(3;-1)$, $R=4$; 2) $C(0;-5)$, $R=1$. **8.** 1) Баробарпаҳлӯ. **9.** 1) $(x-9)^2+(y-4)^2=49$; 2) $(x+3)^2+(y+4)^2=4$. **10.** 1) $C(7;-2)$, $R=5$; 2) $C(4;0)$, $R=1$. **11.** 1) $(5;-12)$ ва $(5;12)$; 2) $(-5;-12)$ ва $(5;-12)$. **Мавзӯи 34.**

3. 1) $2x-y+5=0$; 2) $x+y-7=0$; 3) $3x-2y+2=0$. **4.** $c=-3$. **5.** $a=b=\frac{1}{3}$. **6.** 1) (0; –1,5) ва (–3; 0); 2) (0; 3) ва (4; 0); 3) (0; –5) ва (2,5; 0). **9.** $x+1=0, x-3y-8=0, x-y=0$. **Мавзӯи 35.** **2.** 1) $\overrightarrow{DC}\uparrow\uparrow\overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{AO}\uparrow\uparrow\overrightarrow{OC}$; 3) $\overrightarrow{CB}\uparrow\downarrow\overrightarrow{AD}$ ва $\overrightarrow{DA}\uparrow\downarrow\overrightarrow{AD}$; 5) $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$; 6) $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}$; 7) $\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{OB}$. **Мавзӯъҳои 36–37.** **5.** Ҳа, иро шуд. **6.** $|\overrightarrow{AO}|=16$ см. **7.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}\Rightarrow\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}$. **9.** $\overrightarrow{AB}=-\vec{b}$; $\overrightarrow{BC}=-\vec{a}+\vec{b}$; $\overrightarrow{DA}=\vec{a}-\vec{b}$. **10.** $\overrightarrow{BF}=-2\vec{a}+\vec{b}$; $\overrightarrow{EC}=-\vec{a}+2\vec{b}$; $\overrightarrow{EF}=-\vec{a}+\vec{b}$; $\overrightarrow{BC}=-2\vec{a}+2\vec{b}$. **Мавзӯъҳои 38–39.** **4.** $\overrightarrow{OA}=-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$; $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$. **5.** 1) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$; 2) $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{CB}$; 3) $\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$. **7.** 1) (4; 5); 2) (–1; 4); 3) (0; 0). **8.** 1) 25; 2) 5; 3) 3. **9.** 1) (1; –2); 2) (2*m*; 2*n*). **11.** $m=7$. **12.** *B*(–2; –11). **Мавзӯи 40.** **2.** 1) (–3; 4); 2) (–5; 12). **3.** 1) (–4; 10); 2) (0; 2); 4) (4; –10). **4.** 1) (3; 6); 2) (5; 3); 3) (–4; –3). **5.** 1) (6; 3); 2) (–6; 3); 3) (–2; 15). **6.** 1) $\vec{c}(-4;-4)$; 2) $\vec{c}(8;6)$. **7.** 1) $\vec{c}(-12;6)$; 2) $\vec{c}(-11;8)$. **8.** 1) $\vec{c}(-2;-1)$; 2) $\vec{c}(2;-13)$. **Мавзӯи 41.** **1.** $CC_1=2$. **2.** $\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$. **3.** (5; 12). **4.** *B*(5; 5), *D*(1; –1). **5.** *B*(–5; 11). **8.** $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

Боби IV. **Мавзӯи 45.** **2.** 2) 0,0225 дм^2; 5) 6,25 м^2. **6.** 1) 4 баробар зиёд мешавад; 2) 9 баробар кам мешавад; 3) 28 см^2 зиёд мешавад. **11.** 2) 3,6 дм; 3) 68 мм; 5) 80 дм. **13.** 359,12 ҳазор км^2. **Мавзӯъҳои 46–47.** **2.** 1) $P=65{,}8$ см, $S=87$ см^2; 3) $P=7{,}4$ дм, $S=3$ дм^2. **4.** $S=5000$ м^2. **5.** 1) $P=126$ см, $S=920$ см^2. **8.** 12 см. **9.** 1) $S=500$ см^2; 2) $a=12$ см; 3) $h_a=5$ см. **11.** 1) 1,6 баробар зиёд мешавад; 2) 6,25 баробар кам мешавад. **13.** 2) 280 см^2; 4) 4,8 дм^2. **14.** $P=42$ см. **15.** $S=280$ см^2. **Мавзӯи 48.** **2.** 1) 14 см^2; 2) 150 см^2. **3.** 4 см. **4.** 5 : 1. **8.** 1) 756 см^2; 2) 84 см^2; 3) 192 см^2. **10.** 60 см. **11.** 7,5 дм^2. **Мавзӯъҳои 49–50.** **2.** 1) 32 см. **3.** 1) 512 см^2; 2) 1,62 дм^2. **4.** 12 см. **5.** 5 см. **7.** 1) 1,35 дм^2; 2) 180 см^2; 3) 8 см^2. **8.** 1) 87 см^2; 2) 14 см. **10.** 1) $0{,}5a^2$ воҳ.кв. **11.** 360 см^2. **12.** 1) 2,45 дм^2; 2) 238 см^2; 3) 31,5 см^2. **14.** 1) 1,44 м^2. **15.** 1) 140 см^2. **Мавзӯи 51.** **1.** 2125 воҳ. кв. **2.** $(a+b)\cdot c$. **3.** 144 см^2. **5.** 16 воҳ. кв. **6.** 1) 20,8 км; 2) 8 км.

Боби V. **Мавзӯи 55.** **3.** *AB* ва *BD* буранда. **4.** 25 см. **5.** 1) $R=5$ см; 2) $R<5$ см; 3) $R>5$ см. **8.** *CD*. **Мавзӯи 56.** **2.** 1) Давроҳо аз тарафи дарун ба якдигар мерасад; 2)Ба нуқтаи умумӣ соҳиб нест яке ба даруни дигаре мехобад. **3.** 1) 10 см; 2) 2 см. **6.** 1) 144°; 2) 96°; 3) 210°; 4) 200°; 5) 260°; 6) 306°; 7) 276°. **7.** 1) 160°, 200°; 2) 80°, 280°. **8.** 70°. **9.** 1) 72°; 2) 60°; 3) 40°; 4) 36°; 5) 30°. **10.** 1) 15,6 см; 2) 21 см; 3) 1,6 дм. **Мавзӯи 57.** **3.** $AC=10$ см. **4.** 1) $\angle ACB=44°$; 3) $\angle AEP=100°$. **5.** 36°, 60°, 84°. **6.** 1) 100° ё ки 80°; 2) 126° ё ки 54°. **7.** $\angle BAC=20°$. **8.** 100°. **Мавзӯи 58.** **3.** 220°. **4.** *a*) $x=45°$; *b*) $x=30°$; *d*) $x=90°$. **5.** 30°. **6.** 1) $\angle ABC=20°$; 2) $\angle ABC=60°$; 3) $\angle ABC=36°$; 4) $\angle ABC=54°$; 5) $\angle ABC=36°$. **7.** 1) 100°, 40°, 40°. **8.** 1) 144°; 2) 120°; 3) 40°; 4) 72°. **9.** 1) 128°; 3) 76°. **Мавзӯи 59.** **3.** 4 см. **6.** 8 см. **9.** 10 см. **11.** 90°.

Боби VI. **1.** 38°, 158°, 44°, 120°. **2.** 52 см. **3.** 48 см. **4.** 1) 12 см^2; 4,8 см; 2) 108 см^2; 14,4 см. **6.** 44 см. **7.** 10 см. **9.** 3 см. **10.** 180 см^2. **13.** 60 дм, 14,4 дм. **14.** 30°, 150°, 150°, 30°. **17.** 9% кам мешавад. **19.** 96 см. **20.** 28 см. **22.** 1) (1; –1); 2) (–2; 2). **23.** $\overrightarrow{BO}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$ **25.** 60°. **26.** 144°. **27.** 72 см. **28.** 12 см, 4 см. **29.** 1) 4 см^2 кам медавад; 2) 128 см^2 зиёд медавад.

Мундаририча

Рахимкориев А.Р. Геометрия 8: Китоби дарсӣ барои донишо-
Р-45 мўзони синфи 8-уми мактабҳои таълими миёнаи умумӣ
/А.Р. Рахимкориев, М.А.Тӯхтаходжаевва, нашри 4-ум .
-Т.: ХЭТН «O‘zbekiston», 2019. — 160 с.

I. 1,2. Ҳаммуаллиф.

УЎК: 154-222.8(075)
ISBN 978–9943–25–816–7 КВК 22.151.(5Тож)я721

ABDUVAHOB ABDURAHMONOVICH RAHIMQORIYEV,
TOXTAXODJAYEVA MUYASSAR ABDUVAHOBOVNA

GEOMETRIYA

Umumiy o‘rta ta’lim maktablarining 8- sinfi uchun darslik
(tojik tilida)

Qayta ishlangan va to‘ldirilgan 4- nashr

ТОШКЕНТ — «MITTI YULDUZ» — 2019

Мутарҷим	А.Эшонкулов
Муҳаррир	Ҷ.Эшонкулов
Мусаввир-дизайнер	Ш.Раҳимқориев, Х.Абдуллаев
Муҳаррири техникӣ	У. Ким
Саҳифабанд	Ҳ.Ходжаева

Литсензия нашриёт AI №185 от 10.05.2011.
Ба чопаш 23.08.2019 иҷозат дода шуд. Андозаи 70x90 $^{1}/_{16}$ Кегли 11.
Гарнитураи “Times New Roman”. Бо усули офсетӣ чоп шудааст.
Ҷузъи чопии шартӣ 11,5. Ҷузъи нашрию ҳисобӣ 10.0.
Адади нашр 6 431 нусха.
Супориши № 19-130.

Макети оригиналии китоби дарсӣ дар ҶММ «Mitti Yulduz» тайёр карда шудааст.
Тошканд, кӯчаи Навоӣ 30.

Дар хонаи эҷодии табъу нашри «O‘zbekiston»-и Оҷонсии иттилоот ва комуникатсияҳои
оммавии назди Маъмурияти Президенти Республики Ўзбекистон чоп карда шуд.
100011, Тошканд, кӯчаи Навоӣ 30.

Ҷадвали нишондиҳандаи ҳолати китоби ба иҷора дода шуда

Р/т	Ному насаби донишмӯз	Соли хониш	Ҳолати китоб ҳангоми гирифтан	Имзои раҳбари синф	Ҳолати китоб ҳангоми супоридан	Имзои раҳбари синф
1.						
2.						
3.						
4.						

Китоби дарсии ба иҷора додашуда, дар охири соли хониш ҷадвали боло аз тарафи раҳбари синф дар асоси меъёрҳои зерини баҳо пур карда мешавад:

Нав	Ҳолати китоби дарсӣ ҳангоми бори аввал супоридан.
Хуб	Муқоваաш бутун,аз қисми асосии китоби дарсӣ ҷудо нашудааст. Ҳамаи варақҳояш ҳаст. нодарида, ҷудо нашида, дар саҳифаҳо навишт ва хатҳо нест.
Қаноатбахш	Муқова каҷ шудааст, канорҳояш коҳида, якчанд хатҳо кашида шудаанд, ҳолати аз қисми асосӣ ҷудошавӣ дорад, аз тарафи истифодабаранда қаноатбахш таъмир шудааст. Варақҳои ҷудо шудааш аз нав таъмир шудааст, дар баъзе саҳифаҳо хат кашида шудаанд.
Ғайри-қаноатбахш	Муқова хат кашида шудааст, даридааст, аз қисми асосӣ ҷудо шудааст ё ки умуан нест, ғайриқаноатбахш таъмир шудааст. Саҳифаҳо дарида, варақҳо намерасанд, хат кашида, ранг карда партофта шудааст, китоб барқарор карда намешавад.

Р-45 Рахимкориев А.Р. Геометрия 8: Китоби дарсӣ барои донишомӯзони синфи 8-уми мактабҳои таълими миёнаи умумӣ
/А.Р. Рахимкориев, М.А.Тӯхтаходжаевва, нашри 4-ум .
-Т.: ХЭТН «O‘zbekiston», 2019. — 160 с.

I. 1,2. Ҳаммуаллиф.

УЎК: 154-222.8(075)
ISBN 978–9943–25–816–7
КВК 22.151.(5Тож)я721

ABDUVAHOB ABDURAHMONOVICH RAHIMQORIYEV,
TOXTAXODJAYEVA MUYASSAR ABDUVAHOBOVNA

GEOMETRIYA

Umumiy o‘rta ta’lim maktablarining 8- sinfi uchun darslik
(tojik tilida)

Qayta ishlangan va to‘ldirilgan 4- nashr

ТОШКЕНТ — «MITTI YULDUZ» — 2019

Мутарҷим А.Эшонкулов
Муҳаррир Ҷ.Эшонкулов
Мусаввир-дизайнер Ш.Раҳимқориев, Х.Абдуллаев
Муҳаррири техникӣ У. Ким
Саҳифабанд Ҳ.Ходжаева

Литсензия нашриёт AI №185 от 10.05.2011.
Ба чопаш 23.08.2019 иҷозат дода шуд. Андозаи 70х90 $^1/_{16}$ Кегли 11.
Гарнитураи “Times New Roman”. Бо усули офсетӣ чоп шудааст.
Ҷузъи чопии шартӣ 11,5. Ҷузъи нашрию ҳисобӣ 10.0.
Адади нашр 914 нусха.
Супориши № 19-131.

Макети оригиналии китоби дарсӣ дар ҶММ «Mitti Yulduz» тайёр карда шудааст.
Тошканд, кўчаи Навоӣ 30.

Дар хонаи эҷодии табъу нашри «O‘zbekiston»-и Оҷонсии иттилоот ва комуникатсияҳои оммавии назди Маъмурияти Президенти Республики Ўзбекистон чоп карда шуд.
100011, Тошканд, кўчаи Навоӣ 30.