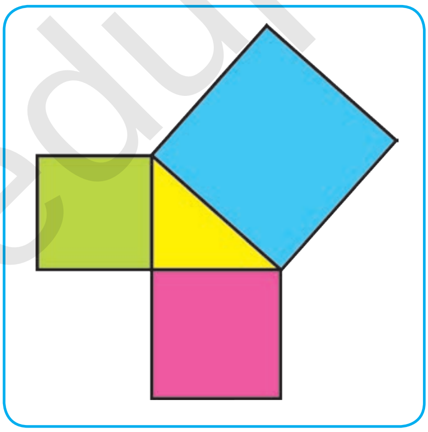
А. А. Рахимкориев, И. А.Тохтаходжаева

ГЕОМЕТРИЯ 8

Жалпы орто билим берүүчү мектептердин 8-классы үчүн окуу китеби

Кайра иштелген жана толукталган 4-басылышы

Өзбекстан Республикасынын Элге билим берүү министрлиги сунуш кылган



ТАШКЕНТ
«O‘ZBEKISTON»
2019

УЎК 514(075)
КBК 22.151
Р 24

Рецензенттер:

Н. А. Умарова – Ташкент облусу ЭББКБӨ жана КДИ нун ага окутуучусу;
Г. А. Фазилова – Юнусабад районундагы 274-мектептин математика мугалими.

Окуу китеби Республикалык билим берүү борбору тарабынан 2018-жылдын 25-ноябрында берилген «Анык предметтердин блок модулу боюнча жалпы орто билимдин окуу программасы (VIII класс)» негизинде жазылган. Анда белгиленген жалпы орто билим берүүдө математика предметин окутуунун максат жана милдеттери, окуучуларга окуунун натыйжасында коюлуучу талаптар чагылдырылган. Китеп өзүндө окуучуларда калыптандырыла турган таяныч компетенциялардын элементтерин камтыган.

Кайра иштөө жараянында эксперттер менен рецензенттердин пикирлери этибар алынды. Ар бир главанын аягында жазма көзөмөл иштеринен үлгүлөр жана тесттер берилген болуп, окуучулардын көзөмөл иштерине жакшы даярдык көрүшүнө жардам берет.

Тарыхый маалыматтар түркүмүндө энциклопедист окумуштууларыбыздын илимге кошкон салымдары жана тарыхый-илимий иштери менен таанышасың.

«Англис тилин үйрөнөбүз» түркүмүндө темаларда кездешкен маанилүү геометриялык түшүнүктөрдүн англис тилиндеги котормосу берилген.

Кайталоого берилген маселелерден жыл бою пайдаланууга болот.

Темаларда берилген билимдерди өздөштүрүүдө сага кажыбас кайрат жана ийгиликтерди каалайбыз!

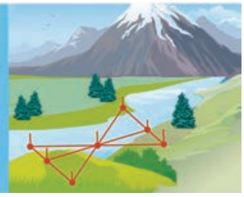
КИТЕПТЕГИ ШАРТТУ БЕЛГИЛЕР:

– эреже, касиет, аныктамалар;
? – активдештирүүчү суроо жана тапшырмалар;
– класста аткарылуучу көнүгүүлөр;
– өркүндөтүүчү көнүгүүлөр;
– маселе чыгаруунун үлгүсү;
– үй тапшырмасы үчүн көнүгүүлөр

Республикалык максаттуу китеп фондунун каражаттары эсебинен ижара үчүн басылды.

ISBN 978-9943-25-815-0

7-КЛАССТА ӨТҮЛГӨНДӨРДҮ КАЙТАЛОО



1. Үч бурчтуктун периметри, биссектрисасы жана бийиктиги боюнча маселелер

Суроо, маселе жана тапшырмалар

1. Үч бурчтуктун периметри, медианасы, бийиктиги жана биссектрисасы деп эмнеге айтылат?

2. Периметри 18 см ге барабар болгон үч бурчтуктун биссектрисасы аны периметри 12 см жана 15 см ге барабар болгон үч бурчтуктарга бөлөт. Үч бурчтуктун биссектрисасын тап (1-сүрөт).

3. Үч бурчтуктун негизине түшүрүлгөн медианасы аны периметри 18 см жана 24 см ге барабар эки үч бурчтукка бөлөт. Берилген үч бурчтуктун кичине каптал жагы 6 см ге барабар. Анын чоң каптал жагын тап (2-сүрөт).

4. ABC үч бурчтугунда AB = BC жана BD медиана 6 см ге барабар. ABD үч бурчтугунун периметри 24 см ге барабар. Берилген үч бурчтуктун периметрин тап (3-сүрөт).

Берилген: $\triangle ABC$ да: $AB=BC, BD=6$ см – медиана, $P_{ABD}=24$ см.

Табуу керек: $P_{ABC}=?$

Чыгаруу: 1) $P_{ABD}=AB+BD+AD$, мындан:

$$24=AB+AD+6,\ AB+AD=24-6,\ AB+AD=18 \text{ (см)}.$$

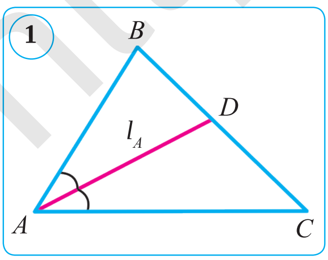
2) $AB=BC$ жана $AC=2AD$, анда

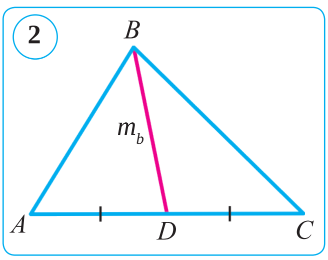
$$P_{ABC}=AB+BC+AC = 2(AB+AD)=2\cdot 18=36 \text{ (см)}.$$

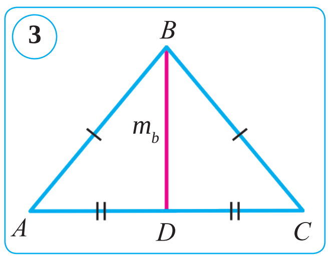
Жообу: $P_{ABC}=36$ см.

5. Үч бурчтуктун эки жагы 0,5 дм жана 8,7 дм ге барабар. Үчүнчү жагынын узундугу натуралдык сан экендигин билген түрдө ошол жагын тап.

6. Периметри 30 см ге барабар болгон үч бурчтуктун биссектрисасы аны периметрлери 16 см жана 24 см ге барабар болгон үч бурчтуктарга бөлөт. Үч бурчтуктун биссектрисасын тап.







7. Периметри 36 см ге барабар болгон үч бурчтуктун бийиктиги аны периметрлери 18 см жана 24 см ге барабар болгон үч бурчтуктарга бөлөт. Үч бурчтуктун бийиктигин тап.

8. Тең капталдуу үч бурчтуктун периметри 22,5 см, каптал жагы болсо 0,6 дм. Ошол үч бурчтуктун негизин тап.

2. Үч бурчтуктар барабардыгынын белгилери, үч бурчтуктун бурчтарынын суммасы жана тышкы бурчтарынын касиети боюнча маселелер

9. ABC жана DEF үч бурчтуктарында: $AB=DE$, $AC=DF$, $\angle A = \angle D$. Бул үч бурчтуктар барабарбы?

10. Үч бурчтуктун 117° туу тышкы бурчтарына кошуна болбогон ички бурчтарынын катышы 5:4 сыяктуу. Үч бурчтуктун ички бурчтарын тап.

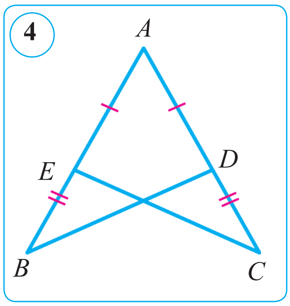
11. Тең жактуу ABC үч бурчтугунун AD жана BE биссектрисалары O чекитинде кесилишет. Биссектрисалардын ортосундагы AOE бурчун тап.

12. Тең капталдуу үч бурчтуктун негизиндеги бурчу кең боло алабы?
Чыгаруу. Бизге белгилүү болгондой, тең капталдуу үч бурчтуктун негизиндеги бурчтары барабар. Бирок эки кең бурчунун суммасы 180° тан чоң болот. Бул үч бурчтуктун ички бурчтарынын суммасы жөнүндөгү теоремага каршы. *Жообу:* жок, боло албайт.

13. Үч бурчтуктун 108° туу тышкы бурчтарына кошуна болбогон ички бурчтарынын катышы 2 : 7 сыяктуу. Үч бурчтуктун ички бурчтарын тап.

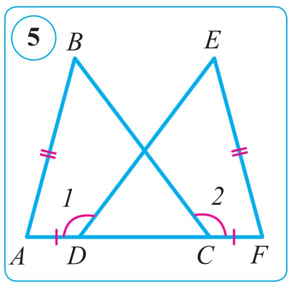
14. Бир үч бурчтуктун эки жагы жана бурчу тиешелүү түрдө экинчи үч бурчтуктун эки жагы жана бурчуна барабар. Мындан ошол үч бурчтуктардын барабардыгы келип чыгабы?

15. ABC жана $A_1B_1C_1$ үч бурчтуктарында AB жана A_1B_1, BC жана B_1C_1 жактар барабар жана тиешелүү түрдө AB жана A_1B_1 жактарга жүргүзүлгөн CD жана C_1D_1 медианалар да барабар. Үч бурчтуктардын барабардыгын далилде.



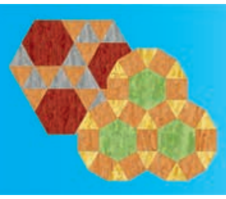
16. 4-сүрөттө $AB = AC$ жана $AE = AD$. $BD = CE$ экендигин далилде.

17. 5-сүрөттө $AD=CF$, $AB=FE$ жана $CB=DE$. $\angle 1=\angle 2$ экендигин далилде.

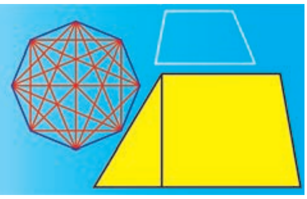


18. ABC үч бурчтугунун B бурчу 42° ка, А чокусундагы тышкы бурчтары болсо 100° ка барабар. ACB бурчун тап.

19. Тик бурчтуу ABC үч бурчтугунун C бурчу тик, А чокусундагы тышкы бурчтары болсо 136° ка барабар. В бурчун тап.



I ГЛАВА
ТӨРТ БУРЧТУКТАР

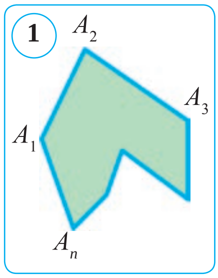


1-§. НЕГИЗГИ ТӨРТ БУРЧТУКТАР ЖАНА АЛАРДЫН КАСИЕТТЕРИ

1. КӨП БУРЧТУКТУН ИЧКИ ЖАНА ТЫШКЫ БУРЧТАРЫНЫН КАСИЕТИ

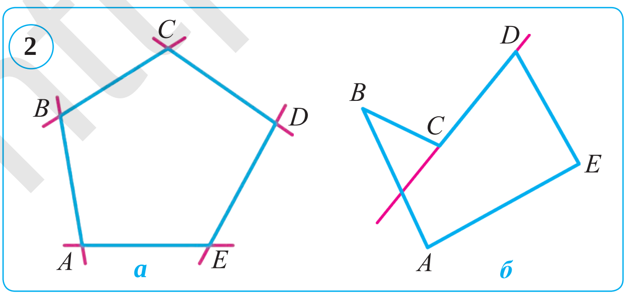
1. Көп бурчтуктар. A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 кесиндилерден түзүлгөн фигураны карап көрөбүз. Кесиндилердин жайлашуусунда, эч кайсы эки кошуна кесинди (алар жалпы чокуга ээ) бир түз сызыкта жатпайт, кошуна болбогон кесиндилер болсо жалпы чекитке ээ эмес (1-сүрөт). Мындай фигурага ***көп бурчтук*** дейилет. A_1, A_2, ..., A_n чекиттери *(чокулар)* ***көп бурчтуктун чокулары***, A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 кесиндилер болсо көп бурчтуктун ***жактары*** деп аталат.

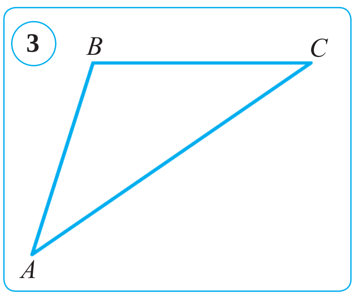
Көп бурчтуктун жактарынын саны анын чокуларынын санына, б. а. бурчтарынын санына барабар. Көп бурчтуктар чокулары (жактары)нын санына карай ***үч бурчтуктар, төрт бурчтуктар, беш бурчтуктар*** жана башкаларга бөлүнөт.



Эгерде туюк сынык сызык өзү-өзү менен кесилишпесе, мындай сынык сызыкка жөнөкөй туюк сынык сызык дейилет. Ал тегиздиктин ошол сынык сызыкка тиешелүү болбогон чекиттерин n эки зонага – ички жана тышкы зонага бөлөт жана жалпы чек аранын милдетин аткарат. 1-сүрөттө ички зона боёп көрсөтүлгөн.

1-аныктама. *Эгерде көп бурчтук анын каалагандай жагын өз ичине алган түз сызык менен бир жарым тегиздикте жатса, ага* ***томпок*** *көп бурчтук дейилет. Мында түз сызыктын өзү да ошол жарым тегиздикке таандык саналат.*





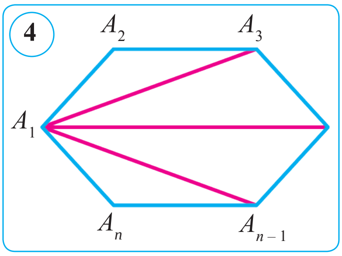
2- *а* жана 3-сүрөттө томпок көп бурчтук, 2- *б* сүрөттө болсо томпок эмес көп бурчтук берилген. Каалагандай үч бурчтук – томпок көп бурчтук болот (3-сүрөт).

2. Көп бурчтуктун ички жана тышкы бурчтарынын касиети.

2-аныктама. ***Көп бурчтуктун берилген чокусундагы ички бурчу*** *деп, анын ошол чокусунда жолугушкан жактары түзгөн бурчка айтылат.*

1 - теорема.

Томпок *n* бурчтуктуктун ички бурчтарынын суммасы 180° (*n* - 2) ге барабар, мында *n* – жактарынын саны.

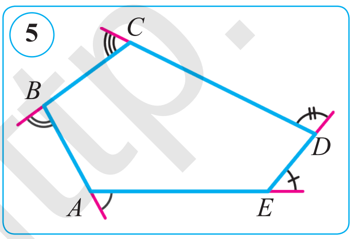


Далил. $A_1A_2A_3...A_n$ – берилген томпок n бурчтук жана $n>3$ болсун (4-сүрөт). Кандайдыр чокусунан, маселен A_1 ден, көп бурчтуктун бардык диагоналдарын жүргүзөбүз. Бул диагоналдар аны $(n-2)$ үч бурчтукка бөлөт. Чындыгында да, эки четки үч бурчтук ($\Delta A_1A_2A_3$ жана $\Delta A_1A_{n-1}A_n$) көп бурчтуктун эки жагы жана бир диагоналынан, калган үч бурчтуктар болсо көп бурчтуктун бир жагы менен эки диагоналынан түзүлгөн. Ошондуктан үч бурчтуктардын саны $(n-2)$, б. а. көп бурчтуктун жактарынын санынан экиге аз болот. Көп бурчтуктун бурчтарынын суммасы аны түзгөн үч бурчтуктун бурчтарынын суммасына, б. а. $S_n=180°(n-2)$ ге барабар болот. Теорема далилденди.

3-аныктама. ***Көп бурчтуктун берилген чокусундагы тышкы бурчтары деп, анын ошол чокусундагы ички бурчуна кошуна бурчка айтылат.***

2 - теорема.

Томпок *n* бурчтуктун ар бир чокусунан бирден алынган тышкы бурчтарынын суммасы 360° ка барабар.



Далил. Көп бурчтуктун ар кайсы чокусунда бирден тышкы бурчту түзөбүз. Көп бурчтуктун ички бурчу жана аны менен кошуна болгон тышкы бурчунун суммасы 180° ка барабар (5-сүрөт). Ошол себептүү бардык ички жана ар бир чокусунан бирден алынган тышкы бурчтарынын суммасы 180° *n* ге барабар. Бирок көп бурчтуктун бардык ички бурчтарынын суммасы 180° (*n* – 2) ге барабар. Анда ар кайсы чокусунан бирден алынган тышкы бурчтардын суммасы:

$$180°n-180°(n-2)=180°n-180°n+360°=360°$$

ка барабар болот. Теорема далилденди.

1-маселе. Жактары барабар болгон (туура) n бурчтуктун ар бир ички бурчу (a_n) эмнеге барабар?

Чыгаруу. Бизге белгилүү болгондой, каалагандай томпок n бурчтуктун бурчтарынын суммасы $180°(n-2)$ ге барабар. Туура көп бурчтуктун бурчтары барабар болгондуктан, алардын ар бири төмөнкүгө барабар: $\alpha_n = \frac{180°(n-2)}{n}$.

2-маселе. Жактары барабар болгон (туура) n бурчтуктун ар бир тышкы бурчтары (β_n) эмнеге барабар?

Чыгаруу. Бизге белгилүү болгондой, каалагандай томпок n бурчтуктун ар бир чокусунан бирден алынган тышкы бурчтарынын суммасы 360° ка барабар. Ошентип, жактары барабар болгон n бурчтуктун ар бир тышкы бурчу төмөнкүгө барабар $\beta_n = \frac{360°}{n}$.

Суроо, маселе жана тапшырмалар

1. 1) Көп бурчтуктун берилген чокусундагы ички бурчу деп кандай бурчка айтылат? Тышкы бурчу депчи?
2) Томпок n бурчтуктун ички бурчтарынын суммасы эмнеге барабар?

2. Көп бурчтуктун бурчтарынын суммасы: 1) 1080° ка; 2) 1620° ка; 3) 3960° ка барабар. Көп бурчтуктун канча жагы бар?

3. 1) Төрт бурчтук; 2) он эки бурчтук; 3) отуз бурчтук; 4) элүү бурчтуктун ички бурчтарынын суммасын тап. Үлгү:
1) $S_{13} = 180° \cdot (13-2) = 180° \cdot 11 = 1980°$.

4. Эгерде төрт бурчтуктун үчтөн алынган бурчтарынын суммасы тиешелүү түрдө 240°, 260° жана 280° болсо, анда анын эң кичине бурчун тап.

5. Ар бир ички бурчу: 1) 150° ка; 2) 170° ка; 3) 171° ка барабар болгон томпок көп бурчтуктун канча жагы бар?

6. Көп бурчтуктун ички бурчтарынын суммасы ар бир чокусунан бирден алынган тышкы бурчтарынын суммасынан үч эсе чоң. Ошол көп бурчтуктун жактарынын саны канча? Бош жерлерге тиешелүү сандарды кой.
Чыгаруу. Маселенин шарты боюнча, $180°(n-2) = ... \cdot 360°$. Мындан
$$180°(n-2) = ... \cdot 2 \cdot 180°,\ n-2=6,\ n= ... .$$

Жообу: n= ... .

7. Тышкы бурчунун ар бири: 1) 18° ка; 2) 24° ка; 3) 60° ка барабар болгон томпок көп бурчтуктун канча жагы бар?

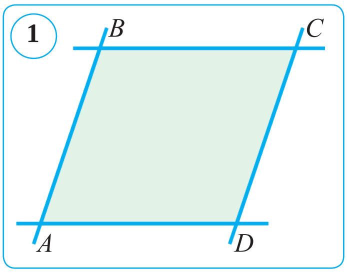
8. Эгерде төрт бурчтуктун үч бурчу кең болсо, анда төртүнчү бурчу тар болот. Ошону далилде.

9. Тышкы бурчунун ар бири: 1) 15° ка; 2) 45° ка; 3) 72° ка барабар болгон томпок көп бурчтуктун канча жагы бар?

10. Томпок төрт бурчтуктун бурчтары 1, 2, 3 жана 4 сандарына пропорциялаш. Ошол бурчтарды тап.

2. ПАРАЛЛЕЛОГРАММ ЖАНА АНЫН КАСИЕТТЕРИ

1. Параллелограмм. Тегиздикте эки параллель түз сызыктын башка эки параллель түз сызык менен кесилишинен алынган төрт бурчтукту карап көрөбүз (1-сүрөт). Бул төрт бурчтук атайын аталышка ээ болуп, аны ***параллелограмм*** деп атайбыз.



Аныктама. *Карама-каршы жактары өз ара параллель болгон төрт бурчтук параллелограмм деп аталат.*

Эгерде $ABCD$ параллелограмм болсо, анда, $AB \parallel DC$ жана $AD \parallel BC$ болот (1-сүрөт).

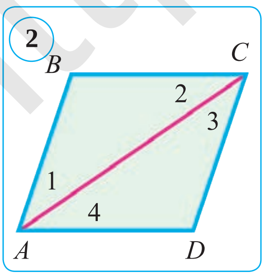
1-маселе. 2-сүрөттө $\triangle ABC = \triangle CDA$. $ABCD$ төрт бурчтугунун параллелограмм экендигин далилде.

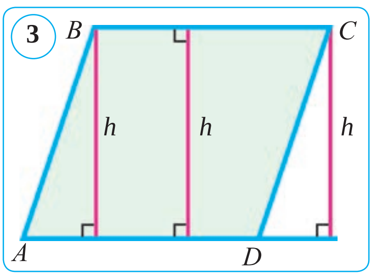
Чыгаруу. ABC жана CDA үч бурчтуктарынын барабардыгынан төмөнкү келип чыгат: $\angle 1 = \angle 3$ жана $\angle 2 = \angle 4$. 1 жана 3 бурчтар – AB жана CD параллель түз сызыктары менен AC кесүүчү түзгөн ички кайчылаш бурчтар болгондуктан барабар. Куду ушундай, 2 жана 4 бурчтар BC жана AD параллель түз сызыктар менен AC кесүүчү түзгөн ички кайчылаш бурчтар болгондуктан барабар. Параллель түз сызыктардын белгиси боюнча төмөнкүгө ээ болобуз: $AB \parallel DC$ жана $BC \parallel AD$. Демек, $ABCD$ төрт бурчтугунда карама-каршы жактар жуп-жубу менен параллель, б. а. аныктама боюнча, $ABCD$ – параллелограмм.

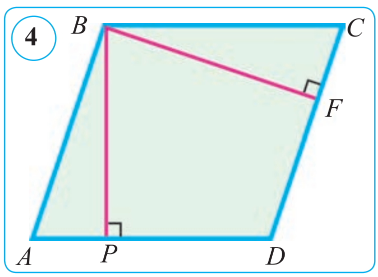
Параллелограммдын бир жагында жаткан чекиттен карама-каршы жакты өзүндө камтыган түз сызыкка түшүрүлгөн перпендикулярга параллелограммдын ***бийиктиги*** дейилет. Параллелограммдын бир жагына чексиз көп бийиктиктерди жүргүзүүгө болору анык (3-сүрөт), алар параллель түз сызыктардын ортосундагы аралыктар болгондуктан өз ара барабар. Параллелограммдын бир чокусунан анын түрдүү жактарына бири-биринен айырмаланган эки бийиктик жүргүзүүгө болот. Мисалы, 4-сүрөттө BP жана BF – бийиктиктер.

2. Параллелограммдын касиеттери.

1 - теорема. **(1-касиет.) Параллелограммдын бир жагына кыналган бурчтарынын суммасы 180° ка барабар.**







Далил. Параллелограммдын бир жагына кыналган бурчтар ички бир жактуу бурчтар болот. Ошондуктан алардын суммасы 180° ка барабар. Теорема далилденди.

2-теорема.

(2-касиет.) Параллелограммдын карама-каршы жактары жана карама-каршы бурчтары өз ара барабар.

Далил. $ABCD$ – берилген параллелограмм болсун, б. а. $AB \parallel CD$ жана $BC \parallel AD$. Параллелограммдын AC диагоналын жүргүзөбүз (2-сүрөткө к.) жана ABC менен CDA үч бурчтуктарын карап көрөбүз. Аларда AC жак – жалпы, 1 жана 3 бурчтар – AB жана CD параллель түз сызыктар жана AC кесүүчү түзгөн ички кайчылаш бурчтар болгондуктан барабар, 2 жана 4 бурчтар болсо AD жана BC параллель түз сызыктар жана AC кесүүчү түзгөн ички кайчылаш бурчтар болгондуктан барабар. Демек, үч бурчтуктардын барабардыгынын экинчи белгиси боюнча, ABC жана CDA үч бурчтуктар барабар. Мындан $AB=CD$, $AD=BC$ жана $\angle B=\angle D$, ошондой эле $\angle 1+\angle 4=\angle 2+\angle 3$, б.а. $\angle A=\angle C$ экендиги келип чыгат.

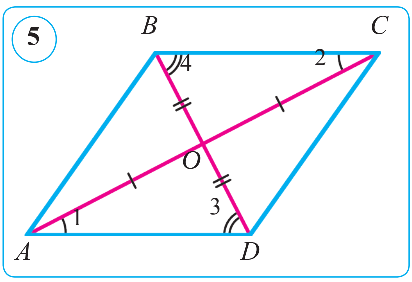
2-маселе. Параллелограммдын бурчтарынан экөөсүнүн суммасы 172° ка барабар. Анын бурчтарын тап.

Чыгаруу. $ABCD$ параллелограммы берилген болсун. Параллелограммдын кошуна бурчтарынын суммасы 180° ка барабар болгондуктан, берилген бурчтар кошуна бурчтар боло албайт, демек, алар карама-каршы бурчтар экен. $\angle A+\angle C=172°$ болсун. Параллелограммдын карама-каршы бурчтары барабар болгондуктан, бурчтардын ар бири $\angle A=\angle C=172°:2=86°$ ка барабар болот. Параллелограммдын бардык бурчтарынын суммасы 360° ка барабар, ошондуктан калган эки бурчу $\angle B=\angle D=(360°-172°):2=94°$ тан болот. *Жообу*: 86°, 94°, 86°, 94°.

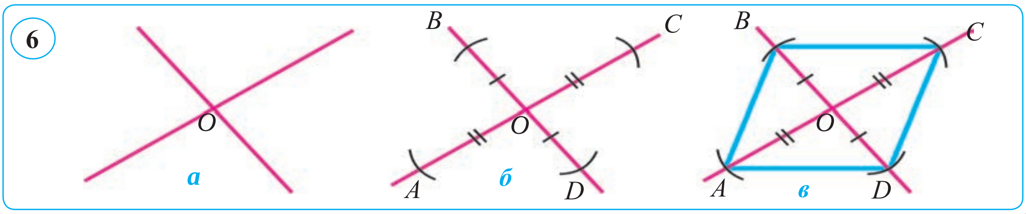
3-теорема.

(3-касиет) Параллелограммдын диагоналдары кесилишет жана кесилишүү чекитинде барабар экиге бөлүнөт.

Далил. $ABCD$ берилген параллелограмм жана O – AC жана BD диагоналдардын кесилишүү чекити болсун (5-сүрөт). $AO = OC$ жана $DO = OB$ экендигин далилдейбиз.



AOD жана COB үч бурчтуктарын карап көрөбүз. Бул үч бурчтуктарда $AD = BC$ (параллелограммдын 2-касиети боюнча анын карама-каршы жактары барабар), $\angle 1=\angle 2$ жана $\angle 3=\angle 4$ (AD жана BC параллель түз сызыктардын, тиешелүү түрдө, AC жана BD кесүүчүлөр менен кесилишинен түзүлгөн ички кайчылаш бурчтар болгондуктан). Демек, үч бурчтуктардын



барабардыгынын экинчи белгиси боюнча: $\triangle AOD=\triangle COB$. Мындан $AO=CO$ жана $DO=OB$, б. а. AC жана BD диагоналдардын ар бири кесилишүү чекити O до барабар экиге бөлүнүшү келип чыгат. Теорема далилденди.

3-маселе. 3-касиеттен пайдаланып, параллелограмм түз.

1-кадам. Эки кесилишүүчү түз сызык жүргүзөбүз жана алардын кесилишүү чекитин O тамгасы менен белгилейбиз (6- *а* сүрөт).

2-кадам. Циркуль жардамында түз сызыктардын бирине барабар OA жана OC кесиндилерин, экинчисине болсо барабар OB жана OD кесиндилерин коёбуз (6-б сүрөт).

3-кадам. A, B, C жана D чекиттерин удаалаш туташтырып, изделген $ABCD$ параллелограммын алабыз (6- *в* сүрөт).

Суроо, маселе жана тапшырмалар

1. 1) Кандай төрт бурчтукка параллелограмм дейилет? Параллелограммдын бир жагына кыналган бурчтарынын суммасы эмнеге барабар?
2) Параллелограммдын диагоналдары жөнүндө эмне айтууга болот?

2. Параллелограммдын периметри 152 см, жактарынан бири экинчисинен 25 см ге чоң. Параллелограммдын жактарын тап.

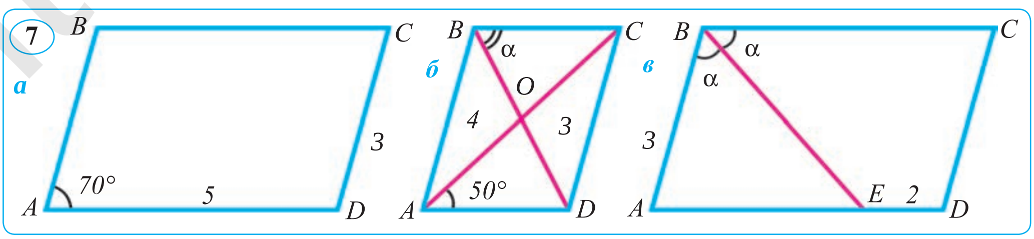
3. Параллелограммдын бурчтарынан экөөсүнүн суммасы: 1) 70° ка; 2) 110° ка; 3) 170° ка барабар болсо, анда анын бардык бурчтарын тап.

4. $ABCD$ параллелограммында: AB = 7 см, BC = 11 см, AC = 14 см, BD = 12 см; O – диагоналдардын кесилишүү чекити экендиги белгилүү. ABO жана BOC үч бурчтуктарынын периметрлерин тап.

5. Параллелограммдын кошуна жактарынын суммасы 20 см ге, айырмасы болсо 12 см ге барабар. Ошол параллелограммдын жактарын тап.

6. Параллелограммдын эки жагынын катышы 5 : 3 кө, периметри болсо 6,4 дм ге барабар. Параллелограммдын жактарын тап.

7. 7-сүрөттө параллелограммдын айрым элементтеринин чоңдугу көрсөтүлгөн. Дагы кайсы чоңдуктарды табууга болот?



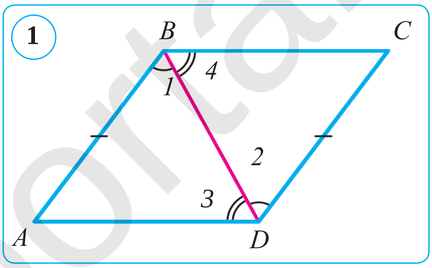
3. ПАРАЛЛЕЛОГРАММДЫН БЕЛГИЛЕРИ

Мурдагы темада көргөнүбүздөн белгилүү болгондой, параллелограммдын касиеттерин колдонуу үчүн көптөгөн учурларда берилген төрт бурчтуктун чындыгында да параллелограмм экендигине ишеним пайда кылуу керек. Муну аныктама боюнча (2-темадагы 1-маселеге к.) же берилген төрт бурчтуктун параллелограмм экендигин тастыктоочу шарттар – белгилер аркылуу далилдөө керек болот. Көбүнесе иш жүзүндө колдонулган параллелограммдын белгилерин далилдейбиз. Эми параллелограммдын белгилери менен таанышабыз.

1-теорема.

(1-белги.) Эгерде төрт бурчтуктун эки жагы барабар жана параллель болсо, анда бул төрт бурчтук параллелограмм болот.

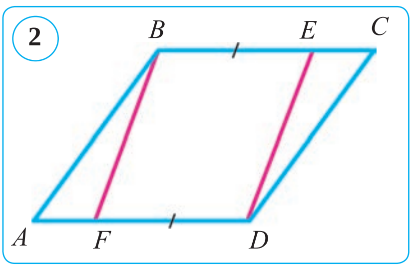
Далил. $ABCD$ төрт бурчтугунда $AB \parallel CD$ жана $AB = CD$ болсун (1-сүрөт). Анын BD диагоналын жүргүзөбүз. Натыйжада эки барабар ABD жана CDB үч бурчтуктарын алабыз (эки жагы жана алардын ортосундагы бурчу боюнча), анткени аларда $AB = CD$ (шарт боюнча), BD жак – жалпы $\angle 1 = \angle 2$ (AB жана CD параллель түз сызыктар менен BD кесүүчүнүн кесилишинен алынган ички кайчылаш бурчтар болгондуктан). Үч бурчтуктардын барабардыгынан, $\angle 3 = \angle 4$ экендиги келип чыгат. Бул бурчтар AD жана BC түз сызыктары менен BD кесүүчүнүн кесилишинен алынган ички кайчылаш бурчтар, демек, $AD \parallel BC$. Ошентип, $ABCD$ төрт бурчтугунун карама-каршы жактары жуп-жубу менен параллель. Ошондуктан, параллелограммдын аныктамасы боюнча, ABCD төрт бурчтугу – параллелограмм. Теорема далилденди.



1-маселе. $ABCD$ параллелограммдын BC жана AD жактарына барабар кесиндилер коюлган: $BE = DF$ (2-сүрөт). BEDF төрт бурчтугу параллелограмм болобу?

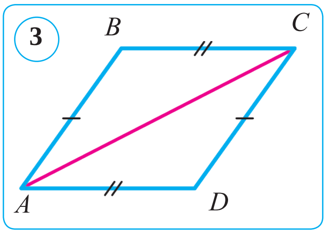
Чыгаруу. $BEDF$ төрт бурчтугунун BE жана DF карама-каршы жактары барабар жана параллель. Ошондуктан, параллелограммдын 1-белгиси боюнча, $BEDF$ төрт бурчтугу – параллелограмм.

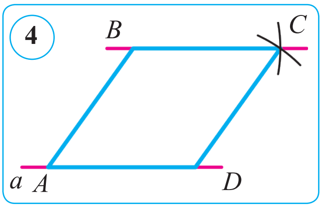
Жообу: ооба, болот.



2-теорема.

(2-белги.) Эгерде төрт бурчтуктун карама-каршы жактары жуп-жубу менен барабар болсо, анда бул төрт бурчтук параллелограмм болот.





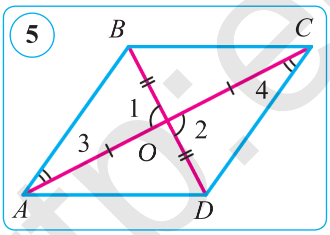
Далил. *ABCD* төрт бурчтугунда *AB* = *CD* жана *BC* = *DA* болсун. Анын *AC* диагоналын жүргүзөбүз (3-сүрөт). Натыйжада *ABC* жана *CDA* үч бурчтуктары алынат. Үч бурчтуктар барабардыгынын 3-белгиси боюнча, бул үч бурчтуктар барабар *(AC* жак – жалпы, теореманын шарты боюнча болсо *AB* = *CD* жана *BC* = *DA).* Үч бурчтуктардын барабардыгынан *CAB* жана *ACD* бурчтардын барабардыгы келип чыгат. Бул бурчтар болсо *AB* жана *DC* түз сызыктары менен *AC* кесүүчү түзгөн ички кайчылаш бурчтар. Түз сызыктардын параллелдик белгиси боюнча, *AB* || *CD*. Ошентип, *ABCD* төрт бурчтугунда *AB* жана *CD* жактар барабар жана параллель, демек, параллелограммдын 1- белгиси боюнча, *ABCD* төрт бурчтугу – параллелограмм. Теорема далилденди.

2-маселе. Берилген чекиттен өткөн жана берилген түз сызыкка параллель түз сызыкты түз.

Чыгаруу. a – түз сызык, *B* – анда жатпаган чекит болсун. *a* түз сызыгында *A* жана *D* чекиттерин белгилейбиз (4-сүрөт). *B, D* чекиттеринен радиустары тиешелүү түрдө *AD* жана *AB* болгон айланалар жүргүзөбүз. Алардын кесилишүү чекитин *C* менен белгилейбиз. *BC* түз сызыгын жүргүзөбүз, ал изделген түз сызык болот. Чындыгында да, *ABCD* төрт бурчтугунун карама-каршы жактары барабар. Параллелограммдын 2- белгиси боюнча, *ABCD* төрт бурчтугу – параллелограмм. Ошондуктан, *BC* || *AD*.

3-теорема.

(3-белги.) Эгерде төрт бурчтуктун диагоналдары кесилишүү чекитинде барабар экиге бөлүнсө, бул төрт бурчтук параллелограмм болот.



Далил. *O–ABCD* төрт бурчтугунун диагоналдары кесилишкен чекит болсун. Шарт боюнча, *AO* = *OC* жана *BO* = *DO* (5-сүрөт). *AOB* жана *COD* үч бурчтуктарын карап көрөбүз. Бул үч бурчтуктарда $\angle 1 = \angle 2$ (вертикалдуу бурчтар), *AO* = *CO* жана *BO* = *DO* (шарт боюнча). Демек, үч бурчтуктардын барабардыгынын биринчи белгиси боюнча, *AOB* жана *COD* үч бурчтуктар барабар. Бул үч бурчтуктардын барабардыгынан алардын тиешелүү жактары жана бурчтарынын барабардыгы келип чыгат: AB $= \angle 3 = \angle 4$. Түз сызыктардын параллелдик белгиси боюнча, AB||CD, анткени 3 жана 4 бурчтар AB жана CD түз сызыктары менен AC кесүүчү түзгөн ички кайчылаш бурчтар саналат. *ABCD* төрт бурчтугунда *AB* = *CD* жана *AB* || *CD* болгондуктан, параллелограммдын 1-белгиси боюнча, *ABCD* төрт бурчтугу параллелограмм болот. Теорема далилденди.

Суроо, маселе жана тапшырмалар

1. 1) Эгерде төрт бурчтуктун эки жагы барабар жана параллель болсо, анда бул төрт бурчтуктун параллелограмм болушун далилдей аласыңбы?
2) Параллелограммдын 2–3-белгилерин туюнт.

2. *(Активдештирүүчү маселе.)* 1) Эки барабар жана параллель кесиндилер берилген. Алардын аягы өз ара кесилишпеген кесиндилер менен туташтырылган. Алынган төрт бурчтук параллелограмм болобу? 2) Эгерде төрт бурчтуктун эки карама-каршы бурчу барабар болсо, анда ал параллелограмм болобу?

3. *ABCD* төрт бурчтугунда *AB* жана *CD* жактар параллель, *AB* = *CD* = 11 см, *AD* = 5 см. Ошол төрт бурчтуктун периметрин тап.

4. Эгерде 1) $\angle 1=70°$, $\angle 3=110°$, $\angle 2\neq\angle 4$; 2) $\angle 1=\angle 2=60°$, $\angle 3=\angle 115°$ болсо (6-сүрөт), анда ABCD төрт бурчтугу параллелограмм болобу?
Чыгаруу. 1) *ABCD* төрт бурчтугунда эки *AB* жана *CD* жактар параллель, анткени $\angle 1+\angle 3=70°+110°=180°$. Бул бурчтар – *AB* жана *DC* түз сызыктары менен *AD* кесүүчү түзгөн ички бир жактуу бурчтар. *AB* || *DC* болгондугу себептүү, $\angle 1=\angle 4$ болот (тиешелүү бурчтар). *ABCD* төрт бурчтугунун калган эки *AD* жана *BC* жактары параллель эмес, анткени ички кайчылаш 1 жана 2 бурчтар барабар эмес ($\angle 1=\angle 4\neq\angle 2$). Демек, ABCD төрт бурчтугу параллелограмм боло албайт. *Жообу:* жок, ABCD төрт бурчтугу параллелограмм боло албайт.
2) 1-пунктка окшош чыгарылат.

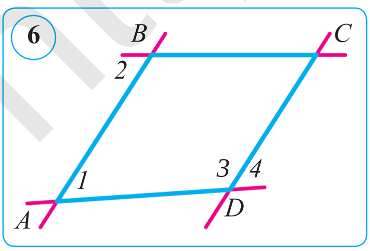
5. *ABCD* параллелограммынын *AB* жагынын ортосу *E* чекитинен, ал эми *CD* жагынын ортосу *F* чекитинен турат. *EBFD* төрт бурчтугунун параллелограмм экендигин далилде (7-сүрөт).

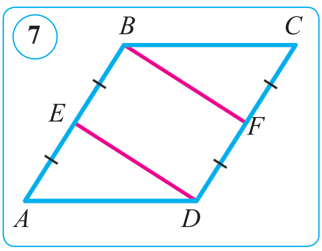
6. *ABCD* төрт бурчтугунда: *AD*=*BC*, $\angle 1=\angle 2$ (8-сүрөт). *ABCD* төрт бурчтугунун параллелограмм экендигин далилде.

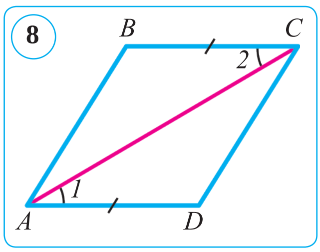
7. *ABCD* төрт бурчтугунда *AB* жана *CD* жактары параллель, *AB* = *CD* = *9* см, *AD* = *4* см. Ошол төрт бурчтуктун периметрин тап.

8. *ABCD* төрт бурчтугунда: *AB* = *CD, AD* = *BC, A* бурчу *B* бурчунан үч эсе чоң. Ошол төрт бурчтуктун бурчтарын тап.

9. Параллелограммдын бурчтарынан биринин биссектрисасы өзү кесип өткөн жакты 4 см жана 5 см лүү кесиндилерге бөлөт. Параллелограммдын рериметрин тап.

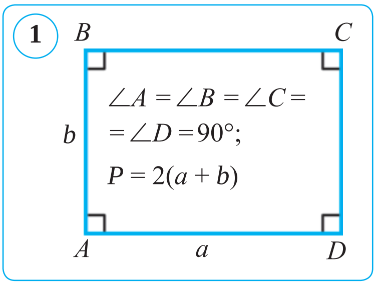






4. ТУУРА ТӨРТ БУРЧТУК ЖАНА АНЫН КАСИЕТТЕРИ

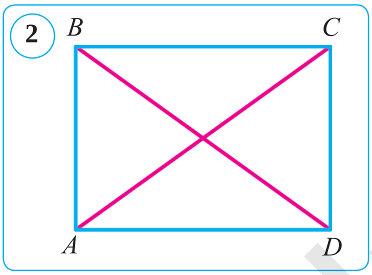
Аныктама. *Бардык бурчтары туура болгон параллелограмм* **тик бурчтук** *деп аталат (1-сүрөт).*



Тик бурчтук параллелограммдын өзгөчө учуру болгондуктан, ал параллелограммдын бардык касиеттерине ээ болот: тик бурчтуктун карама-каршы жактары барабар, диагоналдары кесилишүү чекитинде барабар экиге бөлүнөт, тик бурчтуктун диагоналы аны эки барабар тик бурчтуу үч бурчтукка бөлөт. Тик бурчтуктун өзүнө мүнөздүү касиетин карап көрөбүз.

Теорема.

Тик бурчтуктун диагоналдары өз ара барабар.



Далил. ABCD тик бурчтугунда *AC* жана *BD* диагоналдар берилген болсун. *AC=BD* болушун далилдейбиз (2-сүрөт).

Тик бурчтуу *ACD* жана *DBA* үч бурчтуктар эки катети (*AD* – жалпы жак, *CD* = =*BA)* боюнча барабар. Мындан бул үч бурчтуктардын гипотенузаларынын барабардыгы, б. а. *AC* = *BD* келип чыгат.

Бул теоремадан төмөнкү тескери теорема келип чыгат (тик бурчтуктун белгиси).

Тескери теорема.

Эгерде параллелограммдын диагоналдары барабар болсо, анда ал тик бурчтук болот.

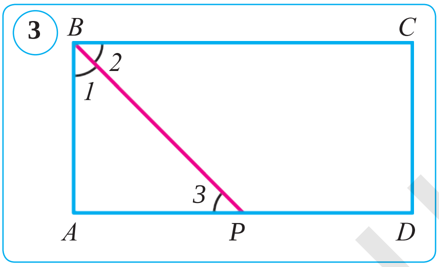
Далил. ABCD параллелограммында *AC* жана *BD* диагоналдар барабар болсун (2-сүрөт). *ABD* жана *DCA* үч бурчтуктары үч жагы боюнча барабар *(AB = DC, BD = CA, AD* – жалпы жак). Мындан $\angle A = \angle D$ келип чыгат. Параллелограммдын карама-каршы бурчтары барабар, ошондуктан $\angle A = \angle C$ жана $\angle B = \angle D$. Ошентип, $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D$. Параллелограмм – томпок төрт бурчтук, ошондуктан: $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$. Мындан $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$, б. а. *ABCD* параллелограммдын тик бурчтук экендиги келип чыгат. Теорема далилденди.

1-маселе. ABCD тик бурчтугунун периметри 24 см ге, BD диагоналы болсо 9 см ге барабар. ABD үч бурчтугунун периметрин тап.

Чыгаруу. $AB+AD=P_{ABCD}:2=24:2=12$ (см) – кошуна жактарынын суммасы (2-сүрөткө к.). $P_{ABD}=AB+AD+BD=12+9=21$ (см).

Жообу: $P_{ABD}=21$ см.

2-маселе. $ABCD$ тик бурчтугу бурчунун B биссектрисасы AD жагын P чекитте кесип өтөт жана аны $AP=17$ см жана $PD=21$ см лүү кесиндилерге бөлөт (3-сүрөт). Ошол тик бурчтуктун периметрин тап.



Чыгаруу. 1) $ABCD$ – тик бурчтук болгондуктан AD || BC жана ошондуктан $\angle 2=\angle 3$ (ички кайчылаш бурчтар). Бирок, шарт боюнча, $\angle 2=\angle 1$, демек, $\angle 1=\angle 3$ жана $\triangle ABP$ – негизи BP болгон тең капталдуу үч бурчтук. Ошентип, $AB=AP=17$ см.

2) $AD=AP+PD=17+21=38$ (см);

$P_{ABCD}=2(AB+AD)=2\cdot(17+38)=2\cdot 55=110$ (см). *Жообу:* $P_{ABCD}=110$ см.

Суроо, маселе жана тапшырмалар

1. 1) Кандай параллелограмм тик бурчтук деп аталат?

? 2) Тик бурчтуктун кандай өзүнө мүнөздүү касиети бар?

3) Тик бурчтуктун белгисин туюнт.

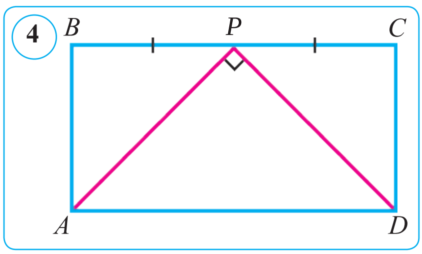
2. $ABCD$ тик бурчтугунда: $AB=9$ см, $BC=7$ см.

1) C чекитинен AD жагына чейин болгон аралыкты тап.

2) AB жана CD түз сызыктарынын ортосундагы аралыкты тап.

3. Тик бурчтуктун периметри 24 см. Тик бурчтуктун каалагандай ички чекитинен анын жактарына чейин болгон аралыктардын суммасын тап.

4. $ABCD$ тик бурчтугунун периметри 24 см ге барабар. P чекит BC жагынын ортосу, $\angle APD=90°$ (4-сүрөт). Тик бурчтуктун жактарын тап.



5. Эгерде төрт бурчтукта диагоналдары барабар жана алар кесилишүү чекитинде тең экиге бөлүнсө, анда бул төрт бурчтуктун тик бурчтук болушун далилде.

6. Параллелограммдын жактары 4 см жана 7 см. Бул параллелограммдын диагоналдары: 1) 12 см жана 5 см; 2) 10 см жана 3 см болушу мүмкүнбү?

7. Тик бурчтуктун периметри 42 см, жактарынан бири болсо экинчисинен эки эсе чоң. Тик бурчтуктун жактарын тап.

5–6. РОМБ ЖАНА КВАДРАТТЫН КАСИЕТТЕРИ

1. Ромб жана анын касиеттери.

Аныктама. *Жактары барабар болгон параллелограммга* ***ромб*** *дейилет (1-сүрөт).*

Ромб параллелограммдын жалпы касиеттерине ээ болгон түрдө дагы төмөнкү касиетке да ээ.

Теорема.

Ромбдун диагоналдары өз ара перпендикуляр жана ромбдун бурчтарын тең экиге бөлөт.

Далил. $ABCD$ – берилген ромб (2-сүрөт), O – анын диагоналдары кесилишкен чекит болсун. $AC \perp BD$ жана ар бир диагонал ромбдун тиешелүү бурчтарын тең экиге бөлүшүн (мисалы, $\angle BAC = \angle DAC$) далилдейбиз.

Ромбдун аныктамасы боюнча, $AB = AD$, ошондуктан BAD – BD негиздүү тең капталдуу үч бурчтук болот. Ромб параллелограмм болгондуктан, анын диагоналдарынын кесилишүү чекитинде тең экиге бөлүнөт, б. а. $BO = OD$. Демек, AO – тең капталдуу BAD үч бурчтугунун медианасы. Тең капталдуу үч бурчтуктун касиети боюнча, анын негизине жүргүзүлгөн медиана бийиктик да, биссектриса да болот. Ошондуктан, $AC \perp BD$ жана $\angle BAC = \angle DAC$. Ушуну далилдөө талап кылынган эле.

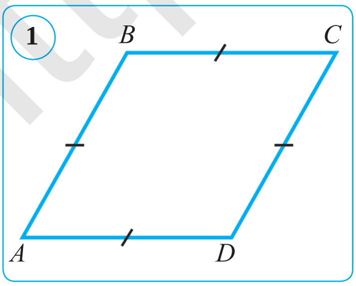
1-маселе. ABCD ромбдун BD диагоналы жагы менен 35° туу бурчту түзөт. Анын бурчтарын тап.

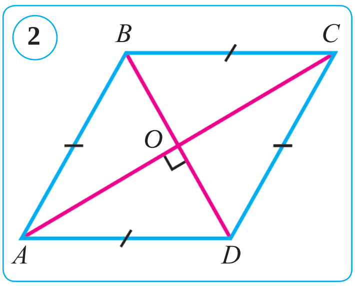
Чыгаруу. $\angle ABD = 35°$, дейли (3-сүрөт). Анда $\angle CBD = 35°$ (ромбдун касиети боюнча). $\angle ABC = 2\angle ABD = 2 \cdot 35° = 70°$, $\angle ADC = \angle ABC = 70°$ (параллелограммдын 2-касиети боюнча), $\angle DAB = 180° - \angle ABC$ (параллелограммдын 1-касиети боюнча). Демек, $\angle DAB = 180° - 70° = 110°$, $\angle BCD = \angle DAB = 110°$ (параллелограммдын 2-касиети боюнча).

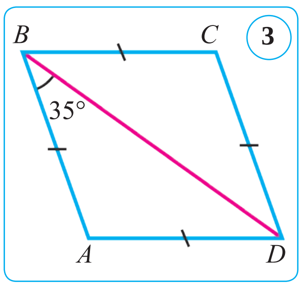
Жообу: 70°, 110°, 70°, 110°.

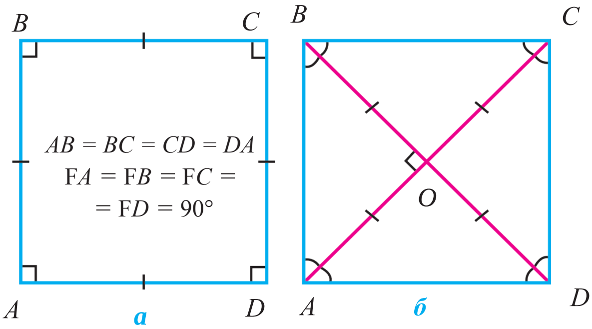
2-маселе. Ар түрдүү ромбдордун периметрлери барабар болушу мүмкүнбү?

Чыгаруу. Периметрлери барабар болгон ромбдор бири-биринен бурчтары менен айырмаланат. Эгерде ромбдун тар бурчу: 1) 40° ка барабар болсо, анда калган бурчтары тиешелүү түрдө 140°, 40°, 140° болот; 2) 15°

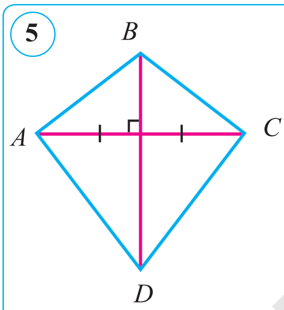






4


а *б*

5


$AC=BD,\ AC\perp BD$

ка барабар болсо, анда калган бурчтары тиешелүү түрдө 165°, 15°, 165° болот жана у. с. Ошондой эле, тар бурчтун ордуна түрдүүчө кең бурчтарды алууга болот. *Жообу:* ооба, мүмкүн.

2. Квадрат жана анын касиеттери.

Аныктама. *Жактары барабар болгон тик бурчтук* ***квадрат*** *деп аталат.*

Квадрат жана ромбдун аныктамаларынан квадраттын бурчтары тик болгон ромб экендиги келип чыгат (4-*а* сүрөт). Квадрат параллелограмм да, тик бурчтук да, ромб да болгондуктан, алардын бардык касиеттерине ээ. Квадраттын негизги касиеттерин келтиребиз.

1. Квадраттын бардык бурчтары тик.

2. Квадраттын диагоналдары өз ара барабар.

3. Квадраттын диагоналдары өз ара перпендикуляр жана кесилишүү чекитинде тең экиге бөлүнөт, ошондой эле квадраттын бурчтарын тең экиге бөлөт (4-сүрөт).

Ошол касиеттерди өз алдынча далилде.

3-маселе. Эгерде ромбдун диагоналдары барабар болсо, анда мындай ромб квадрат экендигин далилде.

Далил. Ромб параллелограмм болгондуктан, тик бурчтуктун белгисинен диагоналдары барабар болгон ромбдун тик бурчтук экендиги келип чыгат жана демек, ал квадрат болот.

4-маселе. Төрт бурчтуктун диагоналдары перпендикуляр жана өз ара бири-бирине барабар. Ошол төрт бурчтук квадрат болобу?

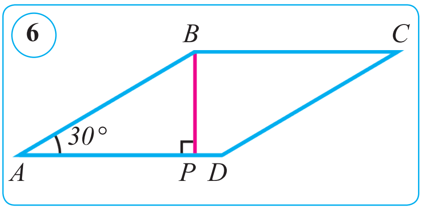
Чыгаруу. Маселенин шартын канааттандырган төрт бурчтуктардан бири 5-сүрөттө берилген. Бул жагдайда диагоналдардан бири тең экиге бөлүнгөн. Бирок бул болгону квадраттын 2-касиетин жана 3-касиетте келтирилген шарттын бир бөлүгүн, б. а. өз ара перпендикулярдык шартын канааттандырат. Келтирилген жагдайда диагоналдарынан бири гана тең экиге бөлүнгөн, ошол себептүү бул төрт бурчтук квадрат боло албайт. Белгилүү бир жагдайда төрт бурчтуктун эки диагоналы тең кесилишүү чекитинде барабар экиге бөлүнүшү мүмкүн. Ошол жагдайда гана төрт бурчтук квадрат боло алат. Жообу: төрт бурчтук квадрат болууга тийиш эмес.

Суроо, маселе жана тапшырмалар

1. 1) Ромб деп эмнеге айтылат? Ромбдун касиетин айт.
?
2) Квадрат деп эмнеге айтылат? Анын касиеттерин айт.
3) Квадратка: а) «параллелограмм»; б) «ромб»; в) «тик бурчтук» түшүнүктөрү жардамында аныктама бер.

2. Квадраттын жагы 20 см ге барабар. Диагоналдарынын кесилишүү чекитинен жактарынан бирине чейин болгон аралыкты тап.

3. *ABCD* ромбдун жагы 24 см ге, А бурчу болсо 30° ка барабар. В чокусунан ага карама-каршы AD жагына чейин болгон аралыкты тап (6-сүрөт). Бош жерлерге тиешелүү сандарды кой.



Чыгаруу. В чекитинен AD түз сызыгына чейин болгон аралык В чекитинен ошол түз сызыкка түшүрүлгөн перпендикулярдын, б. а. BP кесиндинин узундугуна барабар. ABP үч бурчтугун карап көрөбүз. Анда $\angle APB = ...°$, $\angle A = ...°$, $AB = ...$. Анда $BP = 0{,}5 \cdot ... = 0{,}5 \cdot ... = ...$ (см) (...°туу бурчтун каршысында жаткан катеттин касиети боюнча). *Жообу*: $BP =$ ... см.

4. 1) (Практикалык тапшырма.) 1) Эки барабар үч бурчтуктан; 2) төрт барабар үч бурчтуктан кантип ромб жана квадрат түзүүгө болот? Мүмкүн болгон бардык чыгарылыштарды көрсөт.

5. Тең капталдуу тик бурчтуу үч бурчтуктун ичине квадрат чийилген болуп, анын эки чокусу гипотенузада, калган эки чокусу болсо катеттерде жатат. Гипотенуза 21 см ге барабар экендиги белгилүү болсо, анда квадраттын жагын тап.

6. Ромбдун диагоналдары менен жактарынын ортосунда алынган бурчтардын катышы 2 : 7 сыяктуу. Ромбдун бурчтарын тап.

7. Квадрат жактарынын ортолору биринин артынан бири бириктирилген. Натыйжада кандай фигура алынат?

8. Ромбдун бардык бийиктиктери өз ара барабар экендигин далилде.

9. Төрт бурчтуктун жактары 2 : 4 : 5 : 7 сыяктуу катышта, ал эми периметри болсо 108 см ге барабар. Ошол төрт бурчтуктун жактарын тап.

10. Бурчтарынан бири 60°, кичине диагоналынын узундугу 16 см болгон ромбдун периметрин тап.

11. Ромбдун диагоналдары менен жактарынын ортосунда алынган бурчтарынын катышы 5 : 4 сыяктуу. Ромбдун бурчтарын тап.

12. Тик бурчтуктун узуну 32 см, туурасы болсо 28 см ге барабар. Ошол тик бурчтуктун периметрине барабар болгон квадраттын жагын тап.

13. Төрт бурчтуктун эң кичине жагы 5 см ге барабар, калган жактарынын ар бири мурдагысынан тиешелүү түрдө 2 см ге чоң. Ошол төрт бурчтуктун периметрин тап.

7–8. ТРАПЕЦИЯ ЖАНА АНЫН КАСИЕТТЕРИ

1. Трапециянын аныктамасы. Бизге белгилүү болгондой, ар кандай параллелограммда эки жуп параллель жактар болот. Эми биз бир жуп параллель жактарга гана ээ болгон төрт бурчтуктарды карап көрөбүз.

1-аныктама. *Эки жагы параллель, калган эки жагы параллель болбогон төрт бурчтук* **трапеция** *деп аталат.*

Трапециянын параллель жактары анын негиздери, параллель болбогон жактары болсо каптал жактары деп аталат. 1-сүрөттөгү *ABCD* трапециясында *AD* жана *BC* жактары негиздер, *AB* жана *CD* жактар болсо каптал жактары болот.

2-аныктама. *Жактарынан бири негизине перпендикуляр болгон трапецияга* **тик бурчтуу трапеция** *дейилет (2-сүрөт).*

3-аныктама. *Каптал жактары барабар болгон трапецияга* **тең капталдуу трапеция** *дейилет.*

3-сүрөттө тең капталдуу ABCD трапециясы берилген: AB = CD.

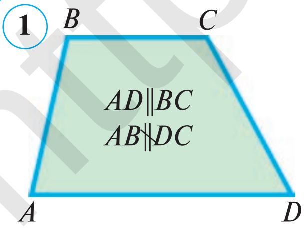
2. Трапециянын белгиси. Эми ABCD төрт бурчтугунун трапеция болушу үчүн кандай шартты канааттандырышын карап көрөбүз.

Теорема

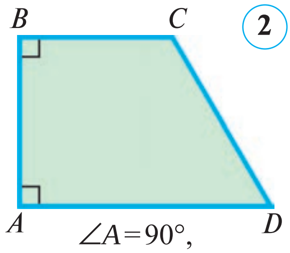
Эгерде төрт бурчтуктун бир жагына кыналган эки бурчунун суммасы 180° ка барабар жана ага кошуна жактарга кыналган эки бурчунун суммасы 180° тан айырмалуу болсо, анда мындай төрт бурчтук трапеция болот.

Далил. *ABCD* төрт бурчтугунда: $\angle A+\angle B=180°$, $\angle A+\angle D\neq 180°$ болсун. *ABCD* төрт бурчтугунун трапеция экендигин далилдейбиз.

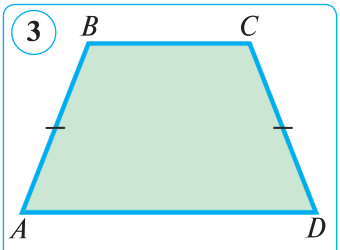
Биринчиден, бир жуп карама-каршы жактар параллель экендигин көрсөтөбүз. *AB, BC* (l_1) жана AD (l_2) түз сызыктарын жүргүзөбүз (4-сүрөт). Шарт боюнча $\angle A+\angle B=180°$, анда *AD* жана *BC* кесиндилеринин параллелдик белгиси боюнча параллель болот. (Эки *a* жана *b* түз сызыктарды үчүнчү *c* түз сызык кескенде, ички бир жактуу бурчтардын суммасы 180° ка барабар болсо, анда *a* жана *b* түз сызыктар параллель болот.)



AD жана *BC*– негиздер, *AB* жана *DC* – каптал жактар



$\angle A=90°$, тик бурчтуу трапеция



AB=DC, тең капталдуу трапеция

Экинчиден, *ABCD* төрт бурчтугунун калган эки жагы параллель эместигин көрсөтөбүз. Шарт боюнча, $\angle A + \angle D \neq 180°$, мындай жагдайда *AB* жана *DC* кесиндилер параллель боло албайт (Евклиддин параллель түз сызыктар жөнүндөгү 5-аксиомасы боюнча, б. а. түз сызыктар параллель болушунун зарыл шарты аткарылбады). Демек, *ABCD* төрт бурчтугу трапеция экен. Ушуну далилдөө талап кылынган эле.

Бул теоремадан төмөнкү натыйжа келип чыгат.

Натыйжа. Трапециянын бир бурчу 90° болсо, анда анын дагы бир 90° туу бурчу болот.

4-аныктама. *Трапециянын негиздеринен биринде жаткан чекиттен экинчи негизди өзүндө камтыган түз сызыкка түшүрүлгөн перпендикуляр* ***трапециянын бийиктиги*** *деп аталат.*

Трапециянын негиздерине перпендикуляр болгон ар кандай кесиндини анын бийиктиги иретинде кароого болот. Ар кандай трапецияда каалаганча бийиктик жүргүзсө болот (5-сүрөт).

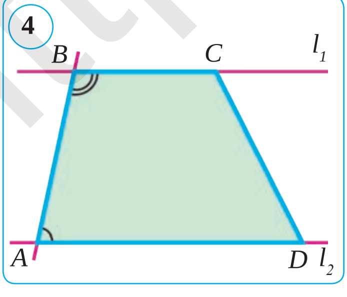
3. Тең капталдуу трапециянын касиети.

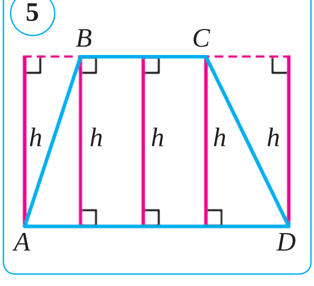
ABCD тең капталдуу трапециясын карап көрөбүз. Мында $AD = a$ – чоң негиз, $BC = b$ – кичине негиз болсун. Кичине негиздин *B* чокусунан *BP* бийиктигин жүргүзөбүз (6-сүрөт). Бийиктиктин *P* негизи *AD* негизин *AP* жана PD кесиндилерге бөлсүн.

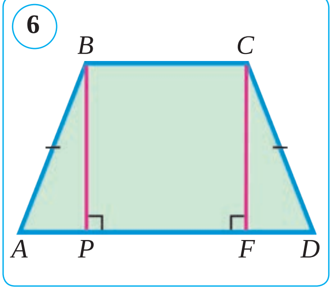
Теорема

Тең капталдуу трапециянын кең бурчунун чокусунан жүргүзүлгөн бийиктик чоң негизинин узундуктарын негиздери айырмасынын жарымына жана негиздери суммасынын жарымына барабар бөлүктөргө бөлот, б. а.: $AP = \frac{a-b}{2}$, $PD = \frac{a+b}{2}$.

Далил. *C* чокусунан $CF \perp AD$ ны жүргүзөбүз. Тик бурчтуу ABP жана DCF үч бурчтуктары барабар $AB = DC$ ны жүргүзөбүз. Тик бурчтуу ABP жана DCF үч бурчтуктары барабар: $AB = DC$ – шарт боюнча, $BP = CF$ болсо *BC* жана *AD* параллель түз сызыктардын ортосундагы аралык болгондуктан. Үч бурчтуктардын барабардыгынан $AP = FD$ келип чыгат. Түз сызыктардын параллелдик белгиси боюнча, $BP \parallel CF$, анткени $BP \perp AD$, $CF \perp AD$. Параллель түз сызыктардын ортосундагы аралык барабар болгондуктан, $BC = PF = b$. Демек,

4


5


6


$$AP = FD = \frac{AD - PF}{2} = \frac{a-b}{2}, \ PD = AD - AP = a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

Ошентип $AP = \frac{a-b}{2}$ жана $PD = \frac{a+b}{2}$ экен. Теорема далилденди.

1-маселе. Тең капталдуу трапециянын негизиндеги бурчтары барабар экендигин далилде.

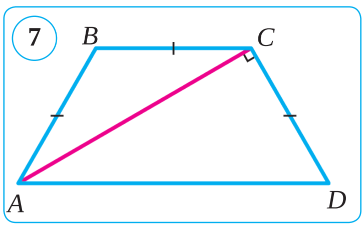
Чыгаруу. $ABCD$ – тең капталдуу трапеция, б. а. $AB = DC$ жана $AD \parallel BC$. Тең капталдуу трапециянын AD жана BC негиздерине кыналган бурчтары барабардыгын далилдейбиз ($\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle C$).

Трапециянын кең бурчтарынын (B жана C) чокуларынан AD негизине перпендикуляр жүргүзөбүз: $BP \perp AD$, $CF \perp AD$ (6-сүрөткө к.). Тик бурчтуу ABP жана DCF үч бурчтуктар (гипотенуза жана катети боюнча) барабар: $AB = DC$ – шарт боюнча, $BP = CF$ болсо BC жана AD параллель түз сызыктардын ортосундагы аралык болгондуктан. Үч бурчтуктардын барабардыгынан $\angle A = \angle D$ келип чыгат.

A жана B, C жана D бурчтар AD жана BC параллель түз сызыктардын, тиешелүү түрдө, AB жана CD кесүүчүлөр менен кесилишинен алынган ички бир жактуу бурчтар, ошондуктан $\angle A + \angle B = 180°$ жана $\angle C + \angle D = 180°$. Мындан $\angle B = \angle C$ экендиги келип чыгат. Ошентип, тең капталдуу трапециянын негизиндеги бурчтары барабар экен $\angle A = \angle D$ жана $\angle B = \angle C$. Ушуну далилдөө талап кылынган эле.

2-маселе. Тең капталдуу трапециянын кичине негизи каптал жагына барабар, диагоналы болсо каптал жагына перпендикуляр. Трапециянын бурчтарын тап.

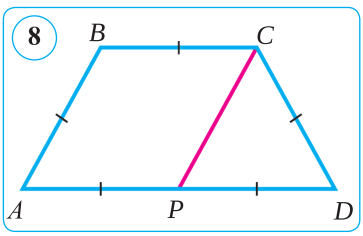
Чыгаруу. Тең капталдуу $ABCD$ трапециясы берилген, анда $AD \parallel BC$, $AB = BC = CD$, $AC \perp CD$ болсун (7-сүрөт). Маселенин шарты боюнча, AC – тең капталдуу ABC үч бурчтугунун негизи, демек, $\angle BCA = \angle CAB$. Бирок $\angle A = \angle D$, анткени тең капталдуу трапециянын негизиндеги бурчтары барабар, CAD жана BCA бурчтар болсо $AD \parallel BC$ жана AC кесүүчү түзгөн ички кайчылаш бурчтар болгондуктан барабар, б. а $\angle CAD = \angle BCA$.



Демек, $\angle A = 2\angle CAD$. Шарт боюнча, ACD – тик бурчтуу, ошондуктан $\angle CAD + \angle D = 90°$, бирок $\angle D = \angle A$, анда $90° = 3\angle CAD$, демек, $\angle CAD = 30°$ жана анда $\angle D = \angle A = 60°$, $\angle C = \angle B = 120°$.

Жообу: $\angle A = \angle D = 60°$, $\angle B = \angle C = 120°$.

3-маселе. Тең капталдуу трапециянын жактарынын катышы 1 : 1 : 1 : 2 сыяктуу. Ошол трапециянын бурчтарын тап.



Чыгаруу. $ABCD$ трапецияда $AB = BC = CD = 1$ жана $AD = 2$ болсун. AD жактын ортосун P менен белгилейбиз (8-сүрөт). $ABCP$ төрт бурчтугунун AP жана BC жактары барабар жана параллель.

Демек, параллелограммдын белгиси боюнча, бул төрт бурчтук параллелограмм болот. Ал боюнча, $PC = AB = 1$. PCD үч бурчтугунун бардык жактары 1 ге барабар, ошондуктан $\angle PDC = 60°$. Ошентип, $ABCD$ трапецияда $\angle A = \angle D = 60°$ жана $\angle B = \angle C = 120°$.

Жообу: $\angle A = \angle D = 60°$, $\angle B = \angle C = 120°$.

Суроо, маселе жана тапшырмалар

1. 1) Кандай төрт бурчтукка трапеция дейилет?
2) Кандай трапеция: а) тең капталдуу трапеция; б) тик бурчтуу трапеция деп аталат?

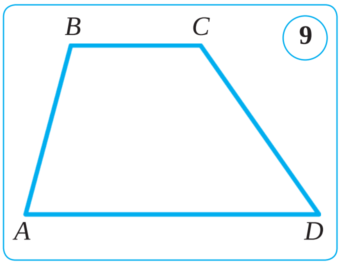
2. Трапециянын чокусунан өтпөгөн бийиктиги аны эки тик бурчтуу трапецияга бөлөт. Фигураны чийип көрсөт.

3. Тик бурчтуу трапециянын каптал жактарынын катышы 1 : 2 сыяктуу. Трапециянын эң чоң бурчун тап.

4. Трапециянын негиздери 12 см жана 20 см, каптал жактары болсо 4 см жана 11 см. Кичине негизинин чокусунан кичине жагына параллель түз сызык жүргүзүлгөн. Ошол параллель түз сызык бөлгөн үч бурчтуктун периметрин тап.

5. AD жана BC негиздүү $ABCD$ трапециянын B жана C бурчтарын тап, мында $\angle A = 75°$ жана $\angle D = 55°$ (9-сүрөт). Бош жерлерге тиешелүү сандарды кой.

Чыгаруу. A жана B, C жана D бурчтар AD жана BC параллель түз сызыктарды ... жана кесүүчүлөр менен кесилишинен алынган ..., ошондуктан $\angle A + \angle B = ...°$ жана $\angle C + \angle D = ...°$. Шарт боюнча, $\angle A = 75°$ жана $\angle D = 55°$, анда $\angle B = ...° - \angle A = = ...° - ...° = ...°$ жана $\angle C = ...° - \angle D = ...° - ...° = ...°$.



Жообу: $\angle B = ...°$, $\angle C = ...°$.

6. Тең капталдуу трапециянын тар бурчтарынан бири 60° ка, каптал жагы болсо 16 см ге барабар. Эгерде трапециянын негиздеринин суммасы 38 см ге барабар болсо, анда анын негиздерин тап.

7. Тең капталдуу трапециянын кең бурчунун чокусунан жүргүзүлгөн бийиктик чоң негизин 3 см жана 17 см лүү кесиндилерге бөлөт. Анын негиздерин тап.

8. Тең капталдуу трапециянын диагоналдары барабар экендигин далилде.

9. Трапецияда: 1) үч тик бурчтун; 2) үч тар бурчтун; 3) үч бурчтун суммасы 180° ка барабар боло алабы? Жообуңду негизде.

10. Тик бурчтуу трапециянын эң чоң жана эң кичине бурчтарынын катышы 5 : 4 кө барабар. Ошол трапециянын бурчтарын тап.

11. $ABCD$ трапециянын кичине негизи 6 см ге, ABE үч бурчтугунун $(BE \parallel CD)$ периметри 36 см ге барабар. Ошол трапециянын периметрин тап.

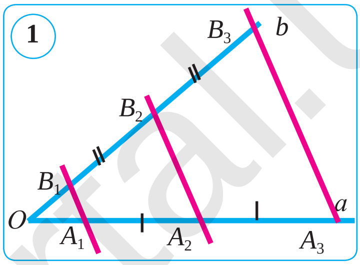
12. Тең капталдуу трапециянын диагоналы кең бурчун барабар экиге бөлөт. Трапециянын негиздери 10 см жана 20 см. Анын периметрин тап.

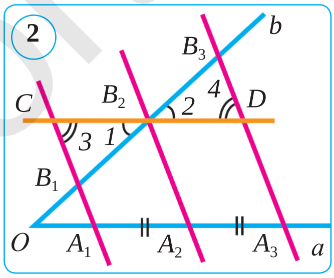
2-§. ФАЛЕСТИН ТЕОРЕМАСЫ ЖАНА АНЫН КОЛДОНУЛУШУ

9. ФАЛЕСТИН ТЕОРЕМАСЫ

Теорема.

Эгерде бурчтун жактарын кесүүчү параллель түз сызыктар анын бир жагынан барабар кесиндилерди бөлсө, алар экинчи жагынан да барабар кесиндилерди бөлөт.





Далил. O бурчтун бир жагында (a шоолада) өз ара барабар A_1A_2 жана A_2A_3 кесиндилер коюлган жана алардын акыры (A_1, A_2, A_3) аркылуу экинчи жакты (b шооланы) B_1, B_2, B_3 чекиттерде кесүүчү өз ара параллель A_1B_1, A_2B_2 жана A_3B_3 түз сызыктар жүргүзүлгөн болсун (1-сүрөт).

Эми алынган B_1B_2 жана B_2B_3 кесиндилердин өз ара барабардыгын, б.а. эгерде $A_1A_2=A_2A_3$ болсо, анда $B_1B_2=B_2B_3$ болушун далилдейбиз

Ал үчүн B_2 чекитинен a шоолага параллель CD түз сызыгын жүргүзөбүз (2-сүрөт). Бул түз сызык A_1B_1 жана A_3B_3 тиешелүү түрдө C жана D чекиттерде кесилишсин. $A_1CB_2A_2$ жана $A_2B_2DA_3$ төрт бурчтуктар – параллелограмм (аныктама боюнча), анткени алардын карама-каршы жактары шарт жана түзүлүшү боюнча параллель. Шарт боюнча, $A_1A_2=A_2A_3$ жана параллелограммдын карама-каршы жактары болгондуктан $A_1A_2=CB_2$ жана $A_2A_3=B_2D$ лардан $CB_2=B_2D$ га ээ болобуз..

B_1B_2C жана B_3B_2D үч бурчтуктарында $CB_2=B_2D$ (далил боюнча), ошондуктан, $\angle 1=\angle 2$ (вертикалдуу бурчтар), $\angle 3=\angle 4$ (A_1B_1 жана A_3B_3 параллель түз сызыктар жана CD кесүүчүнүн кесилишинен алынган ички кайчылаш бурчтар болгондуктан).

Үч бурчтуктар барабардыгынын экинчи белгиси боюнча, бул үч бурчтуктар өз ара барабар: $\angle B_1B_2C=\angle B_3B_2D$. Мындан $B_1B_2=B_2B_3$ келип чыгат.

Ошентип, эгерде $A_1A_2=A_2A_3$ болсо, анда $B_1B_2=B_2B_3$ болушу далилденди. Ушуну далилдөө талап кылынган эле.

Эскертме! *Фалес теоремасынын шартында бурчтун ордуна ар кандай эки түз сызыкты алууга болот, мында теореманын корутундусу өзгөрбөйт.*

Натыйжа. Берилген эки түз сызыкты кесүүчү жана түз сызыктардын биринен барабар кесиндилерди бөлүүчү параллель түз сызыктар экинчи түз сызыктан да барабар кесиндилерди бөлөт.

1-маселе. (Кесиндини барабар бөлүктөргө бөлүү.) Берилген AB кесиндини n барабар бөлүккө бөл.

Чыгаруу. AB кесинди берилген болсун. Аны n барабар бөлүккө бөлүүнү көрсөтөбүз. A чекитинен AB түз сызыкта жатпаган AC шооланы жүргүзөбүз жана анда A чекитинен баштап n AA_1, A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$ барабар кесиндилерин, б. а. берилген AB кесиндини маселенин шартынан келип чыгып канча бөлүккө бөлүү зарыл болсо, анда ошончо барабар кесиндини коёбуз (3-сүрөт, $n = 6$). Андан кийин A_nB түз сызыгын (A_n чекит – акыркы кесиндинин акыры) жана A_1, A_2, A_3, ..., A_{n-1} чекиттер аркылуу A_nB түз сызыкка параллель түз сызыктарды жүргүзөбүз. Бул түз сызыктар AB кесиндини B_1, B_2, B_3, ..., B_{n-1} чекиттерде кесет жана аны Фалестин теоремасы боюнча n барабар бөлүккө бөлөт:

$$AB_1 = B_1B_2 = ... = B_{n-1}B.$$

Демек, ар кандай кесиндини каалаганча барабар бөлүккө бөлүүгө болот.

2-маселе. ABC үч бурчтугунун BC жагы төрт барабар кесиндиге бөлүнүп, бөлүнүү чекиттери аркылуу узундугу 18 см ге барабар болгон AB жагына параллель түрдө түз сызыктар жүргүзүлгөн. Ошол түз сызыктардын үч бурчтуктун ичинде калган кесиндилеринин узундуктарын тап.

Берилген $\angle ABC$ да:

$BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3C$, $AB = 18$ см; $B_1C_3 \parallel B_2C_2 \parallel B_3C_1 \parallel AB$.

Табуу керек: B_1C_3, B_2C_2, B_3C_1 (4-сүрөт).

Чыгаруу. 1) $A_1B_3 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_1 \parallel AC$ жүргүзөбүз.

2) Фалестин теоремасы боюнча:

$$AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3B = AB : 4 = 18 : 4 = 4{,}5 \text{ (см)}.$$

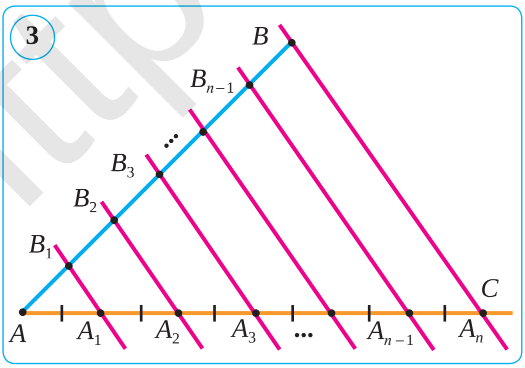
2) Аныктама боюнча, $AA_1B_3C_1$ төрт бурчтугу – параллелограмм, анткени $AA_1 \parallel C_1B_3$ (шарт боюнча) жана $A_1B_3 \parallel AC_1$ (түзүү боюнча).

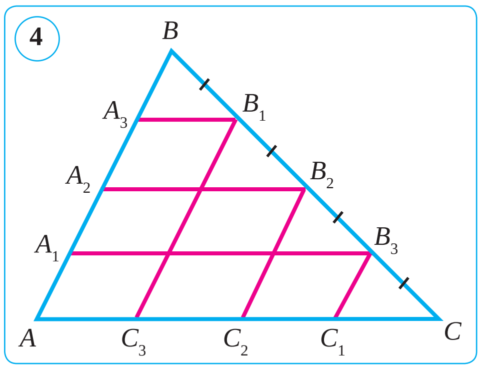
Демек, $AA_1 = C_1B_3 = 4{,}5$ (см).

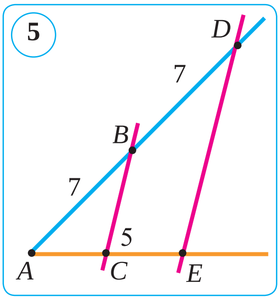
3) Аныктама боюнча, $AA_2B_2C_2$ төрт бурчтугу – параллелограмм, анткени $AA_2 \parallel C_2B_2$ (шарт боюнча) жана $A_2B_2 \parallel AC_2$ (түзүү боюнча). Демек,

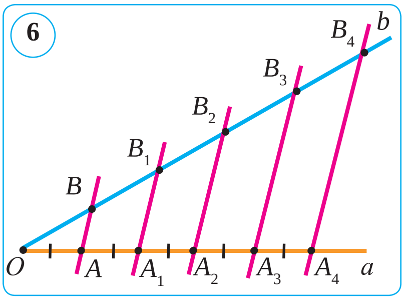
$$AA_2 = C_2B_2 = 2AA_1 = 2 \cdot 4{,}5 = 9 \text{ (см)}.$$

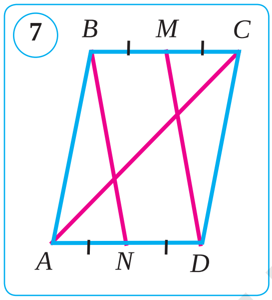
4) Аныктама боюнча, $AA_3B_1C_3$ төрт бурчтугу – параллелограмм,











анткени $AA_3 \| C_3B_1$ (шарт боюнча) жана $A_3B_1 \| AC_3$ (түзүү боюнча). Демек,

$$AA_3 = C_3B_1 = 3AA_1 = 3 \cdot 4{,}5 = 13{,}5 \text{ (см)}.$$

Жообу: $C_1B_3 = 4{,}5$ см, $C_2B_2 = 9$ см, $C_3B_1 = 13{,}5$ см.

Суроо, маселе жана тапшырмалар

1. 1) Фалестин теоремасын айт.
2) Фалестин теоремасы бурч үчүн гана орундуубу?
3) Берилген кесинди кантип n барабар бөлүккө бөлүнөт?

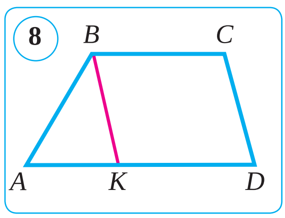
2. (Практикалык тапшырма.) Циркуль жана сызгычтын жардамында берилген AB кесиндини:
1) эки; 2) үч; 3) алты; 4) жети барабар бөлүккө бөл.

3. *Берилген:* $\angle A$, $AB = BD = 7$ см, $BC \| DE$, $CE = 5$ см (5-сүрөт).
Табуу керек: AC.

4. Берилген $\angle aOb$, $OA = AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$, $AB \| A_1B_1 \| A_2B_2 \| A_3B_3 \| A_4B_4$, $OB_4 = 8$ см (6-сүрөт).
Табуу керек: OB_1, OB_2, OB_3.

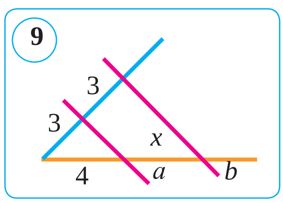
5. *ABCD* параллелограммында *M* чекит *BC* жагынын ортосу, *N* чекит *AD* жагынын ортосу. *BN* жана *MD* түз сызыктар параллелограммдын *AC* диагоналын барабар үч бөлүккө бөлүшүн далилде (7-сүрөт).

6. *ABCD* трапецияда *B* чокусу аркылуу *CD* жагына параллель *BK* түз сызык жүргүзүлгөн (8-сүрөт).
1) *KBCD* – параллелограмм экендигин далилде.
2) Эгерде $BC = 4$ см, $P_{ABK} = 11$ см болсо, анда трапециянын периметрин тап.



7. Циркуль жана сызгычтын жардамында берилген AB кесиндини: 1) төрт; 2) беш барабар бөлүккө бөл.

8. $a \| b$ экендиги белгилүү. 9-сүрөттө берилген маалыматтардан пайдаланып, x ти тап.



9. Берилген: $\angle aOb$, $OA = AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$, $AB \| A_1B_1 \| A_2B_2 \| A_3B_3 \| A_4B_4$, $OB_4 - B_3B_4 = 18$ см (6-сүрөткө к.). Табуу керек: OB_1, OB_2, OB_3.

10–11. ҮЧ БУРЧТУКТУН ОРТО СЫЗЫГЫНЫН КАСИЕТИ. ТРАПЕЦИЯНЫН ОРТО СЫЗЫГЫНЫН КАСИЕТИ

1. Үч бурчтуктун орто сызыгынын касиети.

Аныктама. *Үч бурчтуктун* ***орто сызыгы*** *деп, анын эки жагынын ортолорун туташтырган кесиндиге айтылат.*

ABC үч бурчтугунда *AD* = *DB* жана *CE* = *EB* болсун, анда *DE* орто сызык болот (аныктама боюнча). *DE* орто сызыкка салыштырмалуу *AC* ***жак негиз*** деп аталат (1-сүрөт). Ар кандай үч бурчтуктун үч орто сызыгы болот (2-сүрөт).

1-теорема.

Үч бурчтуктун орто сызыгы анын үчүнчү жагына параллель болуп, узундугу ошол жак узундугунун жарымына барабар.

Берилген: $\angle ABC$ да: $AD=DB$, $CE=EB$, *DE* – орто сызык (3-сүрөт).

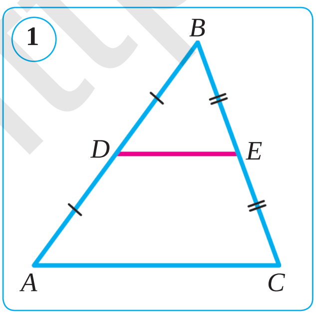
Далилдөө керек: 1) $DE \parallel AC$; 2) $DE = \frac{1}{2}AC$.

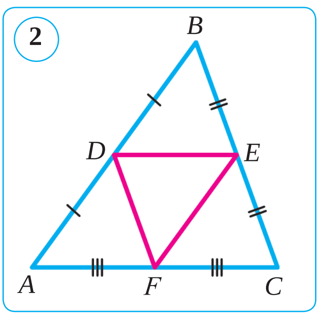
Далил. 1) DE кесинди *ABC* үч бурчтугунун орто сызыгы болсун. *D* чекит аркылуу *AC* жагына параллель түз сызык жүргүзөбүз. Бул түз сызык Фалестин теоремасы боюнча *BC* кесиндини ортосунан кесип өтөт, б. а. *DE* орто сызыгын өзүндө камтыйт. Түзүлүшү боюнча, $DE \parallel AC$. 2) Эми *EF* орто сызыгын жүргүзөбүз. 1-пунктта далилденгени боюнча, ал *AB* жагына параллель болот: $EF \parallel AB$, мындан $EF \parallel AD$. *ADEF* төрт бурчтугунун карама-каршы жактары өз ара параллель болгондуктан, аныктама боюнча параллелограмм болот. Параллелограммдын касиети боюнча $DE = AF$, Фалестин теоремасы боюнча $AF = FC$ болгондуктан $DE = \frac{1}{2}AC$.

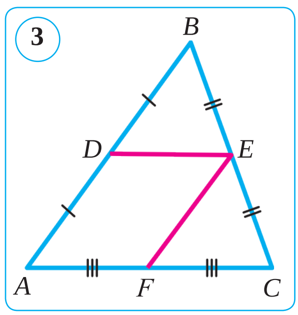
Теорема далилденди

1-маселе. Үч бурчтуктун периметри *p* га барабар. Чокулары берилген үч бурчтук жактарынын ортолорунда болгон үч бурчтуктун периметрин тап.

Чыгаруу. Алынган үч бурчтуктун жактары берилген үч бурчтуктун орто сызыктары болот (2-сүрөт). Демек, алар тиешелүү жактарынын







жарымына барабар. Ошол себептүү изделген периметр берилген үч бурчтук периметринин жарымына барабар болот:

$P_{DEF}=DE+EF+FD=0,5(AC++AB+BC)=0,5\ n.$ *Жообу:* 0,5 *п*.

2. Трапеция орто сызыгынын касиети.

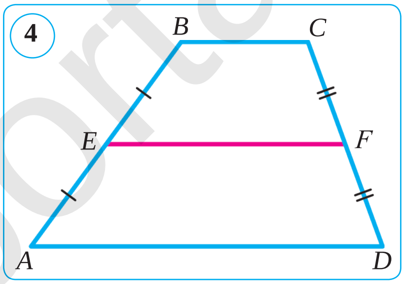
Аныктама. *Трапециянын каптал жактарынын ортосун туташтырган кесиндиге **трапециянын орто сызыгы** дейилет.*

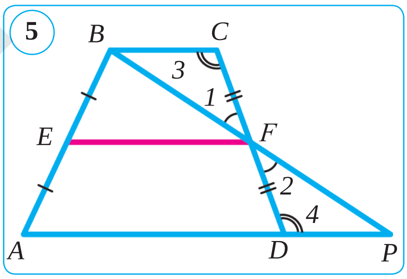
ABCD трапеция берилген болуп, *AD* жана *BC* – трапециянын негиздери; *AB* жана *DC* анын каптал жактары, *E* жана *F* чекиттер каптал жактарынын ортолору болсун (4-сүрөт). Мында *EF* – трапециянын орто сызыгы болот.

2-теорема

Трапециянын орто сызыгы анын негиздерине параллель жана анын узундугу трапеция негиздеринин узундуктары суммасынын жарымына барабар.

Далил. EF – негиздери *AD* жана *BC* болгон *ABCD* трапециянын орто сызыгы болсун *(AD || BC). BF* түз сызыгын жүргүзөбүз жана анын *AD* түз сызык менен кесилишүү чекитин *P* деп белгилейбиз (5-сүрөт). Үч бурчтуктар барабардыгынын экинчи белгиси боюнча, *BCF* жана *PDF* үч бурчтуктары барабар *(CF = DF* шарт боюнча, $\angle 1=\angle 2$– параллель түз сызыктар жана $\angle 3=\angle 4$ – *BC* жана *AD* кесүүчү түзгөн ички кайчылаш бурчтар болгондуктан). Бул үч бурчтуктардын барабардыгынан жактар барабар деген корутунду чыгат: *BF = PF* жана *BC = DP*. Демек, трапециянын *EF* орто сызыгы *ABP* үч бурчтугунун орто сызыгы экен. Үч бурчтуктун орто сызыгынын касиети боюнча:





$$EF \parallel AP \text{ жана } EF=\frac{1}{2}AP.$$

$AD \parallel BC$ болгондуктан, *EF* эки негизге тең параллель болот жана төмөнкүдөй туюнтулушу мүмкүн:

$$EF=\frac{1}{2}AP=\frac{1}{2}(AD+DP)=\frac{1}{2}(AD+BC).$$

Демек, $EF \parallel AD \parallel BC$ жана $EF=\frac{1}{2}(AD+BC)$. Теорема далилденди..

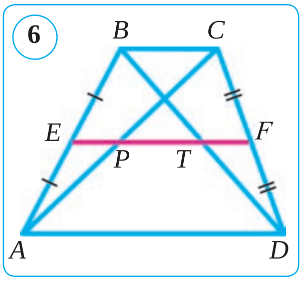
Натыйжа. Трапециянын каптал жагынын ортосунан өткөн жана негиздерине параллель түз сызык экинчи каптал жагын тең экиге бөлөт. Өз алдынча далилде.

Суроо, маселе жана тапшырмалар

1. 1) Үч бурчтуктун орто сызыгы деп эмнеге айтылат?
? 2) Үч бурчтукта канча орто сызык түзүүгө болот?

2. Үч бурчтуктун жактары 5 см, 7 см жана 11 см ге барабар. Чокулары ошол үч бурчтук жактарынын ортолорунда жаткан үч бурчтуктун жактарын тап.

3. Үч бурчтуктун орто сызыктары 6 см, 7 см жана 9 см ге барабар болгон үч бурчтуктун жактарын тап.



4. Трапециянын диагоналдары анын орто сызыгы *EF* ти *E* чокусунан баштап 5 см, 7 см жана 4 см лүү кесиндилерге бөлөт (6-сүрөт). Трапециянын негиздерин тап. Бош жерлерге тиешелүү жоопторду жаз.

5. *ABC* үч бурчтугу жактарынын ар бири үч барабар кесиндиге бөлүнгөн жана бөлүнүү чекиттери кесиндилер менен туташтырылган. *ABC* үч бурчтугунун периметри *p* га барабар болсо, анда 7-сүрөттө алынган фигуранын периметрин тап.

6. Трапециянын негиздери: 1) 4,5 дм жана 8,2 дм; 2) 9 см жана 21 см ге барабар. Анын орто сызыгынын узундугу канча?

7. *ABCD* трапецияда (8-сүрөт) *EF* кесинди *CD* жагына параллель, *E* чекити болсо *AB* нын ортосу. $EF = 0,5CD$ экендигин далилде.

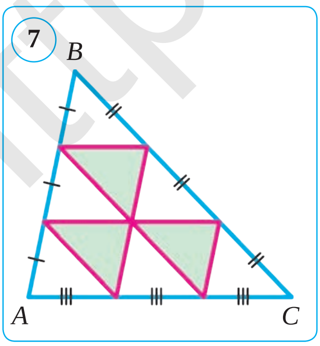
8. 9-сүрөттөгү белгисиз узундуктарды эсепте.

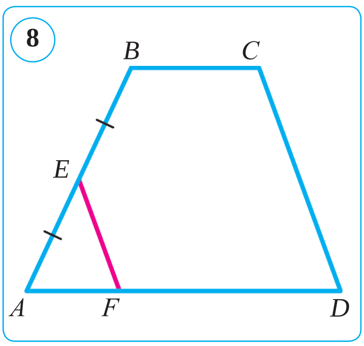
9. Трапециянын диагоналдары анын орто сызыгын ар бири 6 см лүү кесиндилерге бөлөт. Ошол трапециянын негиздерин тап.

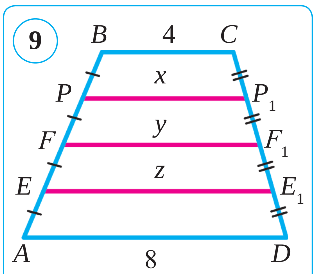
10. Тең капталдуу трапецияда узундугу 6 см ге барабар диагоналы негизи менен 60° туу бурчту түзөт. Трапециянын орто сызыгын тап.

11. Трапециянын чоң негизи кичине негизинен 3 эсе чоң жана анын орто сызыгы 20 см ге барабар. Трапециянын негиздерин тап.

12. Трапециянын периметри 40 см ге, параллель болбогон жактарынын суммасы болсо 16 см ге барабар. Ошол трапециянын орто сызыгын тап.







ABCD – трапеция.
Табуу керек: *x*, *y*, *z*.

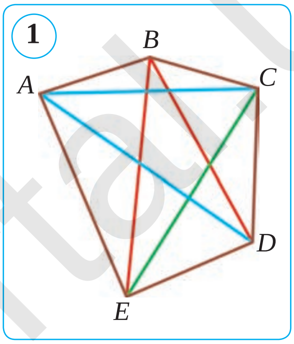
12. ПРАКТИКАЛЫК КӨНҮГҮҮ ЖАНА КОЛДОНУУ

Изилдөө үчүн маселелер.

1-маселе. Жактарынын саны n болгон көп бурчтукту түз жана анын диагоналдарын жүргүз, мында: 1) $n = 5$; 2) $n = 7$; 3) $n = 8$. Көп бурчтуктун түрдүү диагоналдарынын санын (d_n) эсептөө формуласын ой жүгүртүп тап.

Чыгаруу. 1) $n = 5$. А чокусунан *2 AC* жана *AD, B* чокусунан *2 BD* жана *BE* диагоналдар чыгат жана у. с. Беш чокунун ар биринен *2* ден диагонал чыгат (1-сүрөт). Мындан томпок беш бурчтуктун ар бир чокусунан чыккан диагоналдарынын саны жактары (чокулары)нын санынан 3 кө аздыгы, б. а. 5 – 3 = 2 ге барабар экендиги келип чыгат. Бардык чокуларынан чыккан диагоналдарынын санын табуу үчүн жактарынын санын 2 ге көбөйтөбүз:

$$5 \cdot (5-3) = 5 \cdot 2 = 10.$$



Бул көбөйтүндүдө ар бир диагонал эки жолудан эсепке алынган. Бирок *AC* жана *CA, BD* жана *DB* жана у. с. бир диагоналдын эки түрдүү белгилениши, б. а. алар жаңы диагоналдар эмес. Ошол себептүү алынган көбөйтүндүнү 2 ге бөлүп, бардык диагоналдардын санын табабыз: $5 \cdot 2 : 2 = 5$.

Ошентип, бардык диагоналдардын санын төмөнкүдөй табабыз:

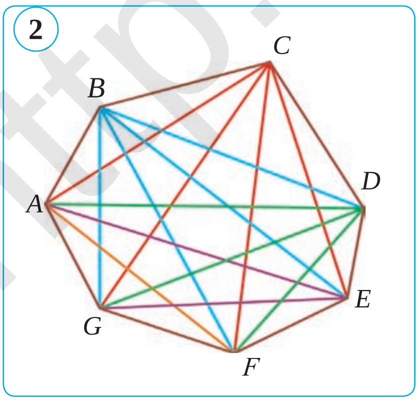
$$d_5 = \frac{5 \cdot (5-3)}{2} = \frac{5 \cdot \cancel{2}^{1}}{{}_{1}\cancel{2}} = \mathbf{5}.$$

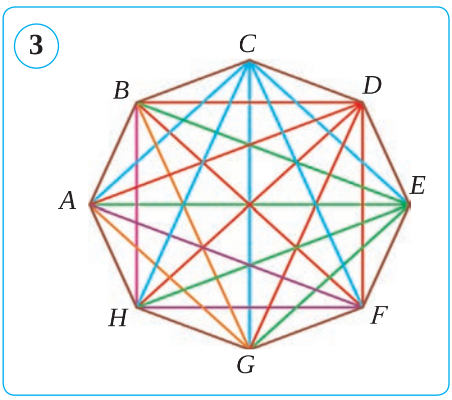
Жообу: 5.

2) $n = 7$. Томпок жети бурчтуктун бардык диагоналдарынын саны жогоруда көрсөтүп өтүлгөн маселенин чыгарылышына окшоп табылат. Ой жүгүртүүлөрдө аныкталган мыйзамченемдүүлүккө негизденип, томпок жети бурчтуктун диагоналдары санын төмөнкүдөй табабыз (2-сүрөт):

$$d_7 = \frac{7 \cdot (7-3)}{2} = \frac{7 \cdot \cancel{4}^{2}}{{}_{1}\cancel{2}} = \mathbf{14}.$$

Жообу: 14.





3) $n=8$. Томпок сегиз бурчтуктун бардык диагоналдары саны жогоруда көрсөтүп өтүлгөн маселенин чыгарылышына окшоп табылат. Ой жүгүртүүлөрдө аныкталган мыйзамченемдүүлүккө негизденип, томпок сегиз бурчтуктун диагоналдары санын табабыз (3-сүрөт):

$$d_8=\frac{8\cdot(8-3)}{2}=\frac{\overset{4}{\cancel{8}}\cdot 5}{\underset{1}{\cancel{2}}}=\mathbf{20}.$$

Жообу: 20.

Демек, томпок көп бурчтуктун түрдүү диагоналдарынын саны төмөнкү формула боюнча табылат: $\boldsymbol{d_n=\frac{n(n-3)}{2}}$.

Эскертме! *Томпок n бурчтуктун бир чокусунан чыккан диагоналдары аны (n – 2) үч бурчтукка бөлөт.*

2-маселе. Көп бурчтуктун 25 диагоналы болушу мүмкүнбү?

Чыгаруу. n бурчтуктун бардык диагоналдарынын саны $d_n=\frac{n(n-3)}{2}$ ге барабар. Демек, $\frac{n(n-3)}{2}=25$. Анда $n(n-3)=50$ же $n(n-3)=2\cdot5\cdot5$. Мындан көрүнүп тургандай, 50 нү бири-биринен 3 кө айырмаланган эки натуралдык сандын көбөйтүндүсү көрүнүшүндө туюнтууга болбойт. Ошондуктан бардык диагоналдарынын саны 25 өө болгон көп бурчтук жок. *Жообу:* жок.

3-маселе. Математика бөлмөсүндөгү сүрөттөрдө берилген үч бурчтук жана төрт бурчтуктардын саны 15. Алардын жактарынын саны 53. Сүрөттөрдө канча үч бурчтук жана канча төрт бурчтук берилген?

Чыгаруу. Төрт бурчтуктун жактарынын саны натуралдык сандын каалагандай маанисинде төрткө эселүү, б. а. жуп сан болот. Үч бурчтуктардын саны так сан болгондо гана, сумма так болот.

Маселенин шарты боюнча теңдеме түзөбүз: $3x+4y=53$.

Төмөндө мүмкүн болгон учурларды карап көрөбүз. Теңдемедеги белгисиздердин ордуна тиешелүү маанилерди коюп, аны канааттандырган чыгарылышты табабыз.

1-учур. $x=1$ жана $y=14$ болсун. Анда $3\cdot1+4\cdot14=53$, б.а. $59\neq53$.

2-учур. $x=3$, $y=13$; $3\cdot3+4\cdot12=53$, б. а. $57\neq53$.

3-учур. $x=5$, $y=10$; $3\cdot5+4\cdot10=53$, б. а. $55\neq53$.

4-учур. $x=7$, $y=8$; $3\cdot7+4\cdot8=53$, б. а. $53=53$.

4-учур маселенин шартын канааттандырды, Ошол себептүү башка учурлар каралбайт. *Жообу:* 7 үч бурчтук, 8 төрт бурчтук.

Бышыктоо үчүн кошумча көнүгүүлөр.

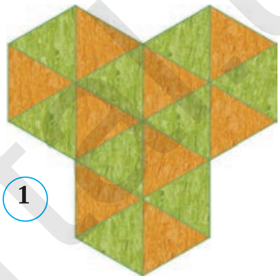
1. Томпок көп бурчтуктун бир чокусунан чыккан диагоналдарынын саны 13. Ошол көп бурчтуктун жактарынын саны канча? Бардык диагоналдарынын саны чы?
2. Диагоналдарынын саны: 1) жактарынын санына барабар; 2) жактарынын санынан аз болгон; 2) жактарынын санынан көп болгон көп бурчтук барбы?

ПРАКТИКАЛЫК КОМПЕТЕНЦИЯНЫ ӨРКҮНДӨТҮҮЧҮ КОШУМЧА МАТЕРИАЛДАР

ТУУРА КӨП БУРЧТУКТУУ ПАРКЕТТЕР

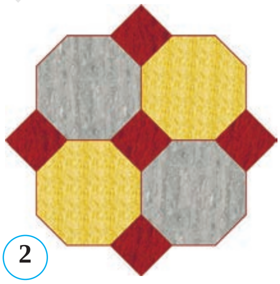
Сен, албетте, паркет жөнүндө белгилүү бир түшүнүккө ээсиң. Көбүнесе үйлөрдүн, түрдүү имараттардын полдору тик бурчтук, квадрат жана туура алты бурчтуктан турган паркеттер менен кооздолот.

Математикалык көз караштан алганда, паркет – бул тегиздикти геометриялык фигуралар менен бирин-бирине тыгыз жана кесилишпегендей кылып жайлаштыруу дегени. Баштап туура көп бурчтуктар – квадрат, төрт бурчтук жана алты бурчуктан турган паркеттерди карап көрөбүз. Бирдей квадраттардан турган чакмак дептериң эң жөнөкөй паркетке мисал болот. 1-сүрөттө туура үч бурчтуктардан; 2-сүрөттө квадрат менен туура алты бурчтуктан; 3-сүрөттө болсо туура алты бурчтуктар, квадраттар жана тең жактуу үч бурчтуктардан; 4-сүрөттө туура алты бурчтуктар жана үч бурчтуктардан түзүлгөн кооз паркеттер берилген.



1

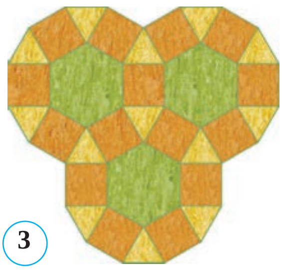
Паркет деп, тегиздикти көп бурчтуктар менен каптоого айтылат, мында каалагандай эки көп бурчтук жалпы жакка же жалпы чокуга ээ болот, же болбосо жалпы чокуларга ээ болбойт.



2

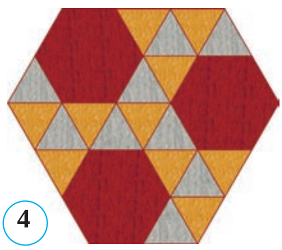
Эгерде паркет туура көп бурчтуктардан турса жана ар бир чокунун айланасында көп бурчтуктар бирдей усулда жайлашкан болсо, анда мындай паркетке *туура* дейилет.

Тең жактуу үч бурчтуктар, квадраттар жана туура алты бурчтуктар тегиздикти каптаган паркеттерге мисал болот. Булардан башка туура көп бурчтуктар менен тегиздикти каптоого болбостугун далилдейбиз. Ал үчүн паркеттин бир чокусунан чыккан көп бурчтуктардын бурчтарынын суммасы 360° ка барабар болушунан пайдаланабыз.

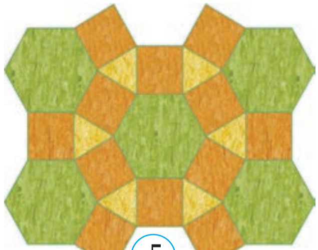


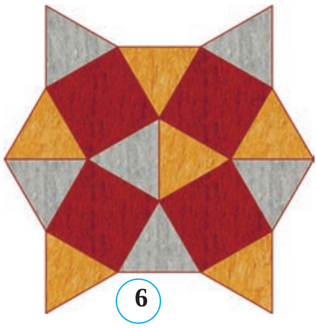
3

Ал үчүн туура беш бурчтукту карап көрөбүз. Бизге белгилүү болгондой, туура беш бурчтуктун ички бурчтары 108° ка барабар. Паркеттин бир чокусуна үч туура беш бурчтукту жайлаштырууга



4


5


6

болбойт, анткени мындай учурда бурчтардын суммасы 324° < 360° болот. Эгерде туура беш бурчтуктардын саны 4 кө барабар же андан чоң болсо, анда бурчтардын суммасы 432° > 360° болот. Ошондуктан туура беш бурчтуктардан турган паркеттер болбойт. Куду ушуга окшош, паркеттин бир чокусуна үч же андан көп болгон туура жети бурчтук, туура сегиз бурчтук жана у. с. турган паркеттин бөлүгүн жайлаштырууга болбойт, анткени алардын ар бир бурчу 120° тан чоң жана алардын суммасы 360° тан чоң болот. Ошол себептүү туура жети бурчтук, туура сегиз бурчтук жана у. с. турган паркеттер болбойт.

5-сүрөттөгү туура алты бурчтуктар, квадраттар жана тең жактуу үч бурчтуктардан түзүлгөн паркеттер 3-сүрөттөгү паркеттерден жайлашуусу менен айырмаланат. 6-сүрөттө болсо тең жактуу үч бурчтуктар жана квадраттардан турган паркет берилген.

Берилген эки паркетте тең жалпы мыйзамченемдүүлүктүн сакталганын көрүүгө болот, б. а. ар бир чокунун айланасында жайлашкан фигуралардын ички бурчтарынын суммасы 360° ка барабардыгы өзү-өзүнөн белгилүү. Мисалы, 5-сүрөттө 60° + 90° + 90° + 120° = 360°, б. а. бир чокунун айланасында бир тең жактуу үч бурчтук, 2 квадрат жана бир туура алты бурчтук жайлашкан; 6-сүрөттө болсо бир чокунун айланасында 3 тең жактуу үч бурчтук (ар бир ички бурчу 60° тан) жана 2 квадрат (ар бир ички бурчу 90° тан) жайлашкан.

Тегиздикти каптаган туура паркеттердин башка түрлөрүн жадыбалда келтиребиз. 5–6-сүрөттөрдөгү паркеттерди түзүп көр.

α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+...=360°$
60°	60°	60°	60°	60°	60°	Үч бурчтуктардан түзүлгөн паркет
60°	60°	120°	120°			Үч бурчтуктар жана алты бурчтуктардан түзүлгөн паркет
60°	90°	90°	120°			Үч бурчтук, квадраттар жана алты бурчтуктан түзүлгөн паркет
60°	150°	150°				Үч бурчтук жана он эки бурчтуктардан түзүлгөн паркет
90°	90°	90°	90°			Квадраттардан түзүлгөн паркет
120°	120°	120°				Алты бурчтуктардан түзүлгөн паркет

13–14. 1-КӨЗӨМӨЛ ИШИ. КАТАЛАР ҮСТҮНДӨ ИШТӨӨ

1. Тик бурчтуктун периметри 40 см ге, жактарынын катышы 3 : 5 ке барабар. Ошол тик бурчтуктун жактарын тап.

2. Параллелограммдын жактарынан бири экинчисинен 4 эсе чоң, периметри болсо 30 см ге барабар. Параллелограммдын жактарын тап.

3. Тик бурчтуу трапециянын тар бурчу 45° ка барабар. Кичине каптал жагы жана кичине негизи 16 см ге барабар. Трапециянын чоң негизин тап.

4. *ABCD* трапецияда *AD* – чоң негизи. В чокусу аркылуу *CD* жакка параллель жана *AD* жакты Е чекитте кескен түз сызык жүргүзүлгөн, *BC* = 7 см, *AE* = 4 см. 1) Трапециянын орто сызыгын; 2) эгерде *ABE* үч бурчтугунун периметри 17 см ге барабар болсо, анда ошол трапециянын периметрин тап.

1-ТЕСТ Өзүңдү сынап көр!

1. Томпок төрт бурчтуктун бурчтарынан бири тик бурч, калгандары болсо өз ара 3 : 4 : 8 катышта. Төрт бурчтуктун кичине бурчун тап.
A) 72°; B) 54°; D) 144°; E) 90°.

2. Ар бир ички бурчу 156° болгон томпок көп бурчтуктун канча жагы бар?
A) 10 ; B) 15 ; D) 12 ; E) 8 .

3. *ABCD* параллелограммынын периметри 32 см ге, BD диагоналы болсо 9 см ге барабар. ABD үч бурчтугунун периметрин тап.
A) 16 см; B) 25 см; D) 23 см; E) 41 см.

4. Эки бурчунун суммасы 100° ка барабар болгон параллелограммдын чоң бурчун тап.
A) 120°; B) 110°; D) 150°; E) 130°.

5. Ромбдун бурчтарынан бири 150° ка барабар, кичине диагоналы болсо 4,5 см. Ромбдун периметрин тап.
A) 27 см; B) 18 см; D) 13 см; E) 21,5 см.

6. *ABCD* трапециянын орто сызыгы аны орто сызыктары 13 см жана 17 см ге барабар болгон эки трапецияга бөлөт. Трапециянын чоң негизин тап.
A) 19 см; B) 21 см; D) 18 см; E) 30 см.

7. Үч бурчтуктун орто сызыгы анын негизинен 5,4 см ге кыска. Үч бурчтуктун орто сызыгы менен негизинин суммасын тап.
A) 13,5 см; B) 16,2 см; D) 10,8 см; E) 21,6 см.

8. Тең капталдуу трапециянын периметри 36 см, орто сызыгы 10 см. Каптал жагынын узундугун тап.
A) 10 см; B) 8 см; D) 12 см; E) 13 см.

9. Трапециянын орто сызыгы 9 см, негиздеринен бири экинчисинен 6 см ге кыска. Трапециянын чоң негизин тап.
A) 15 см; B) 18 см; D) 12 см; E) 10 см.

Англис тилин үйрөнөбүз!

Көп бурчтук – polygon
Тик бурчтук – rectangle
Ромб – rhombus
Квадрат – square
Бийиктик – height

Периметр – perimeter
Диагонал – diagonal
Параллелограмм – parallelogramm
Трапеция – trapezoid
Бурч – angle

Тарыхый маалыматтар

Абу Райхан Беруний
(973–1048)

Байыркы Египет жана Вавилон математикасында төрт бурчтуктардын төмөнкү түрлөрү кездешет: квадраттар, тик бурчтуктар, тик бурчтуу жана тең капталдуу трапециялар. Ортоазиялык окумуштуулардан ***Абу Райхан Беруний*** да төрт бурчтуктардын түрлөрү боюнча көптөгөн изилдөөлөр жүргүзгөн. Ал өзүнүн «Астрономия өнөрүнөн башталгыч маалымат берүүчү китеп» деп аталган чыгармасында «Төрт бурчтуктардын түрү кандай?» деп суроо берет жана ага төмөнкүдөй жооп берет:

«Алардан **биринчиси – квадрат**, анын бардык жактары барабар, бардык бурчтары тик, диагоналдары, б. а. карама-каршы бурчтарын (чокуларын) туташтырган сызыктары өз ара барабар.

Экинчиси – тик бурчтук, ал квадратка караганда узунураак, бардык бурчтары тик, жактары түрдүүчө, анын карама-каршы жактары жана диагоналдары гана барабар.

Үчүнчүсү – ромб, анын төрт жагы барабар, бирок диагоналдары түрдүүчө, бурчтары болсо тик бурч эмес.

Төртүнчүсү – ромбоид, анын диагоналдары түрдүүчө, экиден карама-каршы жактары гана барабар.

Бул фигуралардан айырмалуу төрт бурчтуктарга ***трапециялар*** дейилет».

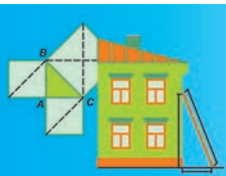
Квадрат латинче сөз болуп, «төрт бурчтуу» деген маанини билдирет. Беруний арабча «мурабба» терминин иштеткен, латинчеге мына ушул термин которулган. Тик бурчтук араб тилинде «мустатил» – «созулганыраак» деген маанини билдирет.

Ромб термининин пайда болушу түрдүүчө түшүндүрүлөт. Ал грекче сөз болуп, ромб «айлануучу нерсе», «чимирик» маанисин берет. Геометрияга бул термин чимириктин кесилишинин ромбго окшоштугу себептүү киргизилген. Арабчада «ромб» үчүн «муайян» термини алынган.

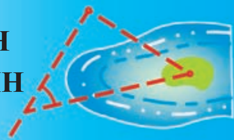
Трапеция грекче сөз болуп, котормосу «столчо» (тамак жейилчу стол) го туура келет, лексикалык мааниси – төрт буттуу. Чындыгында да, грекче «trapedzion» сөзү «столчо», «тамак столу» деген маанини билдирет.

Берунийдин чыгармаларында «трапеция» – «мухарриф» деп аталып, бул термин грекче «trapedzion» сөзүнүн араб тилиндеги котормосу эсептелет.

Параллелограмм грекче сөз болуп, түз сызыктуу бет деген маанини берет. «Параллелограмм» араб тилинде «мутавози ал-азла», б. а. «негиздери параллель» деген маанини билдирет.



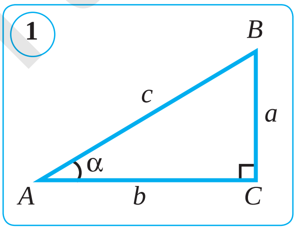
II ГЛАВА
ТИК БУРЧТУУ ҮЧ БУРЧТУКТУН ЖАКТАРЫ ЖАНА БУРЧТАРЫНЫН ОРТОСУНДАГЫ КАТЫШТАР



3-§. ТАР БУРЧТУН ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫК ФУНКЦИЯЛАРЫ

15. ТАР БУРЧТУН СИНУСУ, КОСИНУСУ, ТАНГЕНСИ ЖАНА КОТАНГЕНСИ

Тригонометрия математиканын бөлүмү болуп, үч бурчтуктун жактары менен бурчтары ортосундагы көз карандылыктар, тригонометриялык функциялардын касиеттери жана алардын ортосундагы катыштарды үйрөнөт. **«Тригонометрия»** сөзү грекче **«trigon»** – үч бурчтук жана **«metrezis»** – ченөө деген сөздөрдөн алынган болуп, кыргыз тилинде **«үч бурчтуктарды ченөө»** дегенди билдирет.



Тригонометриянын негизги милдети ***үч бурчтуктарды чыгаруудан*** турат. Үч бурчтук геометриянын эң маанилүү фигураларынан бири эсептелет. Ошондуктан үч бурчтуктарды үйрөнүүнү улантабыз. Главанын негизги максаты үч бурчтуктардын каалагандай элементин (жактарын жана бурчтарын) башка элементтери аркылуу туюнтуудан турат.

Катеттери $BC = a$ жана $AC = b$, гипотенузасы $AB = c$ жана тар бурчу $\angle A=\alpha$ болгон тик бурчтуу ($\angle C = 90°$) ABC үч бурчтугу берилген болсун (1-сүрөт).

Ошол үч бурчтуктун жуп-жубу менен жактарынын катышын көрөлү:

$\frac{a}{c}$ – α бурчтун каршысындагы катеттин гипотенузага катышы;

$\frac{b}{c}$ – α бурчка кыналган катеттин гипотенузага катышы;

$\frac{a}{b}$ – α бурчтун каршысындагы катеттин ошол бурчка кыналган катетке катышы;

$\frac{b}{a}$ – α бурчка кыналган катеттин ошол бурчтун каршысындагы катетке катышы;

$\frac{c}{b}$ – гипотенузанын a бурчка кыналган катетке катышы;

$\frac{c}{a}$ – гипотенузанын a бурчтун каршысындагы катетке катышы.

Ошентип, бардыгы болуп 6 катышты алдык.

Куду ушуга окшош, экинчи тар бурч (B) үчүн да ушул тартипте катыштарды түзсөк болот.

Бул катыштардан алгачкы төртөөсү атайын аталыштар менен аталат

1-аныктама. Тик бурчтуу үч бурчтуктун тар бурчунун ***синусу*** деп, ошол бурчтун каршысындагы катеттин гипотенузага катышына айтылат.

α бурчтун синусу **sin**α сыяктуу белгиленет жана «синус альфа» деп окулат. Аныктама боюнча:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}.$$

2-аныктама. Тик бурчтуу үч бурчтуктун тар бурчунун ***косинусу*** деп, ошол бурчка кыналган катеттин гипотенузага катышына айтылат.

α бурчтун косинусу **cos**α сыяктуу белгиленет жана «косинус альфа» деп окулат. Аныктама боюнча:

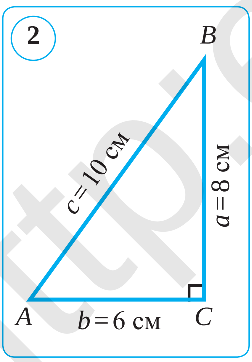
$$\cos\alpha = \frac{b}{c}.$$

3-аныктама. Тик бурчтуу үч бурчтуктун тар бурчунун ***тангенси*** деп, ошол бурчтун каршысындагы катеттин бурчка кыналган катетке катышына айтылат.

α бурчтун тангенси **tg**α сыяктуу белгиленет жана «тангенс альфа» деп окулат. Аныктама боюнча:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{b}.$$

4-аныктама. Тик бурчтуу үч бурчтуктун тар бурчунун ***котангенси*** деп, ошол бурчка кыналган катеттин каршысындагы катетке катышына айтылат.



α бурчтун котангенси **ctg**α сыяктуу белгиленет жана «котангенс альфа» деп окулат. Аныктама боюнча:

$$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{b}{a}.$$

Тик бурчтуу үч бурчтукта катет гипотенузадан кичине болгондуктан, ***тар бурчтун синусу жана косинусу бирден кичине*** болот.

Тик бурчтуу үч бурчтукта катеттер өз ара барабар, бири экинчисинен чоң же кичине болушу мүмкүн. Ошондуктан тангенс жана котангенстин маанилери ***1 ден кичине, 1 ге барабар*** жана ***1 ден чоң*** болушу мүмкүн.

Маселе. ABC үч бурчтугунда $\angle C = 90°$, $AB = 10$ см, $BC = 8$ см, $AC = 6$ см (2-сүрөт). А бурчтун тригонометриялык функцияларынын маанилерин тап.

Чыгаруу. Аныктама боюнча:

$$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{8}{10} = 0{,}8; \qquad \text{tg}A = \frac{{}^{4}\cancel{8}}{\cancel{6}_{3}} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3};$$

$$\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{6}{10} = 0{,}6; \qquad \text{ctg}A = \frac{{}^{3}\cancel{6}}{\cancel{8}_{4}} = \frac{3}{4} = 0{,}75;$$

Жообу: $\sin A=0{,}8$; $\cos A=0{,}6$; $\text{tg}A = 1\frac{1}{3}$; $\text{ctg}A=0{,}75$.

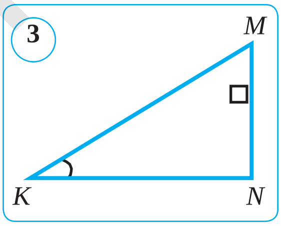
Суроо, маселе жана тапшырмалар

1. 1) Тик бурчтуу үч бурчтуктун жактарынан кандай катыштарды түзүүгө болот жана алар кандайча окулат?
2) Тик бурчтуу үч бурчтукта тар бурчтун синусу, косинусу, тангенси жана котангенси деп эмнеге айтылат жана алар кандайча белгиленет?

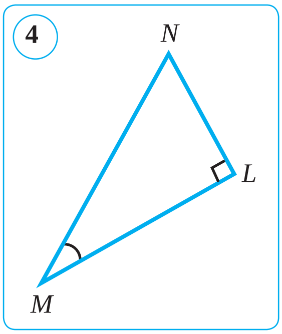
2. Ар бир бөлчөк аныктама боюнча K бурчтун кайсы тригонометриялык функциясын туюнтат (3-сүрөт): а) $\frac{KN}{KM}$; б) $\frac{MN}{KN}$; в) $\frac{MN}{KM}$; г) $\frac{KN}{MN}$?

3. $\angle ABC$ да $\angle C=90°$, $AB=6$ см, $BC = 5$ см, $AC=\sqrt{11}$ см (1-сүрөткө к.). *A* жана *B* бурчтардын синусу, косинусу, тангенси жана котангенстеринин маанилерин тап.

4. Тик бурчтуу үч бурчтукта тар бурчтун синусу: а) 0,98; б) $\sqrt{2}$; в) $\sqrt{5}-2$ ге барабар болушу мүмкүнбү?



5. Тик бурчтуу *MNL* үч бурчтугунда $\sin N = \frac{24}{25}$ ке барабар. Бул барабардыктан үч бурчтуктун кайсы жактарын табууга болот (4-сүрөт)?



6. *MNL* үч бурчтугунда $\angle L=90°$, $MN=13$ см, $ML=12$ см, $NL=5$ см (4-сүрөт). M бурчтун синусу, косинусу, тангенси жана котангенсинин маанилерин тап

. **7.** *ABC* үч бурчтугунда $\angle C=90°$, $AB=17$ см, $BC=8$ см, $AC=15$ см. *A* жана *B* бурчтар синусу, косинусу, тангенси жана котангенсинин маанилерин тап.

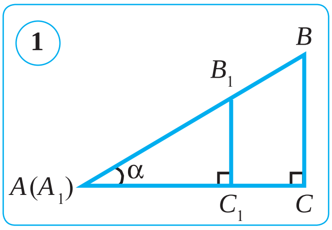
Билип койгон пайдалуу!

- ***«Синус»*** *термини латин тилинен алынган болуп, «ийилүү» деген маанини билдирет.*
- ***«Тангенс»*** *термини латин тилинен которгондо «жаныма» деген маанини билдирет.*
- ***«Косинус»*** *жана* ***«котангенс»*** *терминдери «complementi sinus» жана «complementi tangens» – «толуктоочу синус» жана «толуктоочу тангенс» терминдеринин кыскартмаларынан турат.*

16. ТАР БУРЧТУН СИНУСУ, КОСИНУСУ, ТАНГЕНСИ ЖАНА КОТАНГЕНСИ (УЛАНДЫСЫ)

1. Тар бурчтун тригонометриялык функциялары.

Тик бурчтуу үч бурчтукта тар бурчтун синусу, косинусу, тангенси жана котангенсинин маанилери тар бурчтун чоңдугунан гана көз карандылыгын жана тик бурчтуу үч бурчтуктун тандалышынан көз каранды эместигин көрсөтөбүз.



Тик бурчтуу ABC жана $A_1B_1C_1$ үч бурчтуктарында ($\angle C=\angle C_1=90°$) $\angle A=\angle A_1$ болсун (1-сүрөт).

Пропорциянын негизги касиети боюнча:

$$\frac{BC}{AB}=\frac{B_1C_1}{A_1B_1};\ \frac{AC}{AB}=\frac{A_1C_1}{A_1B_1};\ \frac{BC}{AC}=\frac{B_1C_1}{A_1C_1};\ \frac{AC}{BC}=\frac{A_1C_1}{B_1C_1}.$$

Бул барабардыктардын сол жана оң бөлүктөрү тиешелүү түрдө A жана A_1 тар бурчтардын синустары, косинустары, тангенстери жана котангенстерине барабар. Демек,

$$\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{B_1C_1}{A_1B_1}=\sin A_1,\quad \operatorname{tg}A=\frac{BC}{AC}=\frac{B_1C_1}{A_1C_1}=\operatorname{tg}A_1,$$

$$\cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{A_1C_1}{A_1B_1}=\cos A_1,\quad \operatorname{ctg}A=\frac{AC}{BC}=\frac{A_1C_1}{B_1C_1}=\operatorname{ctg}A_1.$$

Көрүнүп тургандай, A тар бурчтун синусу, косинусу, тангенси жана котангенси үч бурчтуктун тандалышынан көз каранды эмес. Эгерде тар бурчтун мааниси өзгөрсө, бул катыштар, сөзсүз, өзгөрөт.

Ошентип, ***тар бурчтун синусу, косинусу, тангенси жана котангенси тар бурчтун чоңдугунан гана көз каранды.***

Синус, косинус, тангенс жана котангенске ***тар бурчтун тригонометриялык функциялары*** дейилет.

Жогоруда келтирилген барабардыктардан төмөнкүдөй маанилүү тыянак жасоого болот: ***эгерде A жана A_1 тар бурчтар үчүн тригонометриялык функциялардан каалагандай бири барабар болсо, анда A жана A_1 тар бурчтар барабар ($\angle A=\angle A_1$) болот.***

Башкача айтканда, ***тригонометриялык функциянын ар бир маанисине жалгыз тар бурч туура келет.***

2. Тангенс жана котангенстин синус жана косинустар аркылуу туюнтулушу.

Синус жана косинустун аныктамаларынан төмөнкү барабардыктар келип чыгат (15-темага к.):

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{a}{c}:\frac{b}{c}=\frac{a}{c}\cdot\frac{c}{b}=\frac{a}{b}=\operatorname{tg}\alpha,\ \text{б.а.}\ \operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \quad (1)$$

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{b}{c}:\frac{a}{c}=\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}=\frac{b}{a}=\operatorname{ctg}\alpha,\ \text{б.а.}\ \operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \quad (2)$$

Ошентип, тар бурчтун тангенси жана котангенси синус жана косинус аркылуу төмөнкүдөй мүнөздөлөт:

Тар бурчтун синусунун косинусуна катышына ошол бурчтун тангенси дейилет.

Тар бурчтун косинусунун синусуна катышына ошол бурчтун котангенси дейилет.

(1) жана (2) барабардыктарды мүчөлөп көбөйтүп, төмөнкү барабардыкты алабыз:

$$\text{tg}\alpha \cdot \text{ctg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 1 \Leftrightarrow \text{tg}\alpha \cdot \text{ctg}\alpha = 1. \quad (3)$$

Демек, ***α тар бурчтун тангенси жана котангенсинин көбөйтүндүсү 1 ге барабар.*** Мындан, *α* тар бурчтун тангенси жана котангенси өз ара тескери функциялар экендиги келип чыгат.

Ошентип, биз *α* тар бурч үчүн үч жаңы ***барабардыкты (окшоштукту)*** келтирип чыгардык.

3. Тик бурчтуу үч бурчтуктун жактары менен бурчтарынын ортосундагы катыштар.

Тригонометриялык функциялардын аныктамаларынан төмөнкү эрежелер келип чыгат.

1-эреже. α бурчтун каршысындагы катет гипотенуза менен α бурчтун синусунун көбөйтүндүсүнө барабар:

$$a = c\sin\alpha.$$

2-эреже. α бурчтун каршысындагы катет экинчи катет менен α бурчтун тангенсинин көбөйтүндүсүнө барабар:

$$a = b\,\text{tg}\alpha.$$

3-эреже. α **бурчка кыналган катет гипотенуза менен** α **бурчтун косинусунун көбөйтүндүсүнө барабар:**

$$b = c\cos\alpha.$$

4-эреже. α **бурчка кыналган катет каршысындагы катеттин** α **бурчтун тангенсине катышына барабар:**

$$b = \frac{a}{\text{tg}\alpha}.$$

5-эреже. Гипотенуза α **тар бурчтун каршысындагы катеттин** α **бурчтун синусуна катышына барабар:**

$$c = \frac{a}{\sin\alpha}.$$

6-эреже. Гипотенуза α **тар бурчка кыналган катеттин** α **бурчтун косинусуна катышына барабар:**

$$c = \frac{b}{\cos\alpha}.$$

Маселе. ABC үч бурчтугунда C бурч 90° ка барабар. Эгерде:

1) $AB=18$ см жана $\sin A=\frac{1}{3}$ болсо, анда BC катетти; 2) $AC=15$ см жана $\cos A=\frac{5}{6}$ болсо, анда AB гипотенузаны; 3) $BC=26$ см жана $\text{tg}A=\frac{13}{15}$ болсо, AC катетти эсепте.

Чыгаруу. 1) 1-эрежеден пайдаланып, BC катетти табабыз:

$$BC=AB\sin A={}^{6}\cancel{18}\cdot\frac{1}{\cancel{3}_{1}}=6\ (\text{см}).\qquad \textit{Жообу:}\ 6\ \text{см.}$$

2) 6-эрежеден пайдаланып, AB гипотенузаны табабыз:

$$AB=\frac{AC}{\cos A}=15:\frac{5}{6}={}^{3}\cancel{15}\cdot\frac{6}{\cancel{5}_{1}}=3\cdot 6=18\ (\text{см}).\quad \textit{Жообу:}\ 18\ \text{см.}$$

3) 4-эрежеден пайдаланып, AC катетти табабыз:

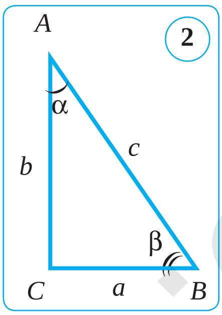
$$AC=\frac{BC}{\text{tg}A}=26:\frac{13}{15}={}^{2}\cancel{26}\cdot\frac{15}{\cancel{13}_{1}}=2\cdot 15=30\ (\text{см}).\quad \textit{Жообу:}\ 30\ \text{см.}$$

Суроо, маселе жана тапшырмалар

1. 1) Тар бурчтун тригонометриялык функциялары деп эмнеге айтылат?

? 2) Тар бурчтун синусу, косинусу, тангенси жана котангенсинин чоңдуктары эмнеден көз каранды?

2. Берилген барабардыктардан кайсы бири туура экендигин аныкта (2-сүрөт). Жообуңду негизде.



а) $c=\frac{a}{\sin\alpha}$; б) $b=c\sin\alpha$; в) $c=a\,\text{tg}\alpha$; е) $a=\frac{b}{\text{ctg}\alpha}$.

3. Тик бурчтуу үч бурчтуктун тар бурчунун тангенси $\sqrt{2}$; 0,001 жана 100 гө барабар болушу мүмкүнбү? Жообуңду негизде.

4. ABC үч бурчтугунда С бурч 90° ка барабар. Эгерде: 1) BC = 10 см жана $\text{tg}A=\frac{5}{8}$ болсо, анда AC катетти; 2) $BC=8$ см жана $\sin A=0{,}16$ болсо, анда AB гипотенузаны эсепте.

5. Тик бурчтуу үч бурчтуктун жактары менен бурчтарынын ортосундагы 6 катышты b бурч үчүн келтирип чыгар (2-сүрөт).

6. ABC үч бурчтугунда С бурч 90° ка барабар. Эгерде BC = 4 см жана $\sin A=0{,}25$ болсо, анда AB гипотенузаны эсепте.

7. ABC үч бурчтугунда С бурч 90° ка барабар. Эгерде AC = 2 см жана $\cos A=0{,}4$ болсо, анда AB гипотенузаны эсепте.

8. ABC үч бурчтугунда C бурч 90° ка барабар. Эгерде BC = 14 см жана $\cos B=\frac{7}{25}$ болсо, анда AB гипотенузаны эсепте.

4-§. ПИФАГОР ТЕОРЕМАСЫ ЖАНА АНЫН КОЛДОНУЛУШУ

17. ПИФАГОР ТЕОРЕМАСЫ ЖАНА АНЫН ТҮРДҮҮ ДАЛИЛДЕРИ

1. Пифагор теоремасы – геометриянын маанилүү теоремаларынан бири.

Кеменгер грек математиги **Пифагордун** өмүрү жөнүндөгү маалыматтар өтө аз. Пифагордун мектеби фигураларды айырмалоо жана түз сызыктуу фигураларды окшош фигураларга алмаштыруунун геометриялык усулунан теоремаларды далилдөөдө жана маселелер чыгарууда пайдаланганы грек математиктеринин чыгармаларынан гана белгилүү. Алсак, геометриянын илим иретинде куралышына Пифагор жана анын мектеби чоң салым кошкон. Төмөнкү теорема Пифагордун аты менен аталат.

Теорема.

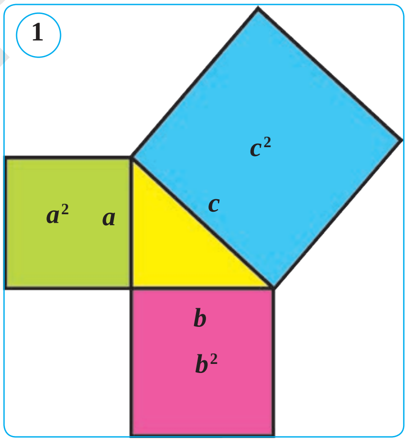
(Пифагор теоремасы.) Тик бурчтуу үч бурчтуктун гипотенузасынын квадраты анын катеттери квадраттарынын суммасына барабар.

Бул теорема тик бурчтуу үч бурчтукка тиешелүү болуп, үч бурчтуктун жактарына барабар квадраттардын аянттары ортосундагы катышты көрсөтөт. Пифагор бул теореманын теориялык далилин келтирген. Пифагор теоремасы менен аныкталган геометриялык катыштын өзгөчө учурлары Пифагордон мурда да түрдүү элдерге белгилүү болгон, бирок теореманын жалпы формасы Пифагордун мектеби тарабынан жаратылган.

Катеттери a жана b, гипотенузасы c болгон тик бурчтуу ABC үч бурчтугу берилген болсун, анда Пифагор теоремасы

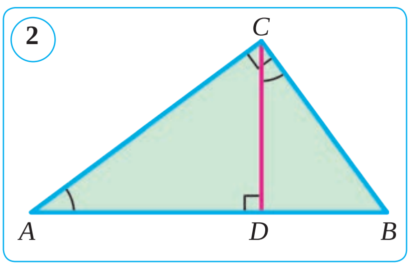
$$c^2 = a^2 + b^2, \quad (1)$$

формула менен туюнтулат, бул жерде a^2, b^2, c^2 – жактары a, b, c болгон квадраттардын аянттарына барабар. Ошондуктан бул барабардык жагы гипотенузанын узундугуна барабар квадраттын аянты жактары катеттерине барабар квадраттардын аянттарынын суммасына барабар экендигин көрсөтөт (1-сүрөт).



2. Пифагор теоремасынын тар бурчтун косинусу аркылуу далилдениши.

Далил. ABC – берилген тик бурчтуу үч бурчтук болуп, анын C бурчу тик бурч болсун. Тик бурчтуу үч бурчтуктун C чокусунан CD бийиктигин жүргүзөбүз (2-сүрөт).



Тик бурчтуу ACD жана ABC үч бурчтуктарынан бурч косинусунун аныктамасы боюнча:

$$\cos A = \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}.$$

Мындан $AD \cdot AB = AC^2$ (2).

Тик бурчтуу BCD жана ABC үч бурчтуктарынан бурч косинусунун аныктамасы боюнча:

$$\cos B = \frac{BD}{BC} = \frac{BC}{AB}.$$

Мындан $BD \cdot AB = BC^2$ (3).

Алынган (2) жана (3) барабардыктарды мүчөлөп кошуп жана $AD+ + DB = AB$ экендигин этибар алып,

$$AC^2 + BC^2 = AB \cdot D + BD \cdot AB = AB \cdot (AD + BD) \cdot AB = AB^2$$

барабардыгын алабыз. Теорема далилденди.

Тик бурчтуу ABC ($\angle C = 90°$) үч бурчтугунун жактарын тиешелүү түрдө $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ деп белгилеп, Пифагор формуласын алабыз:

$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2}.$$

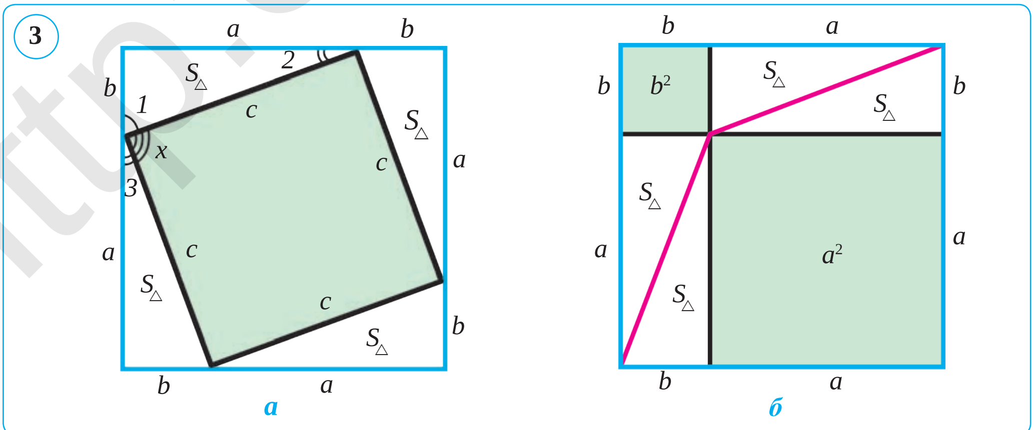
3. Пифагор теоремасынын аянттар аркылуу далилдениши.

Катеттери a, b жана гипотенузасы c га барабар болгон тик бурчтуу үч бурчтук берилген. Бул үч бурчтук үчүн Пифагор теоремасы орундуу экендигин далилдейбиз, б. а.

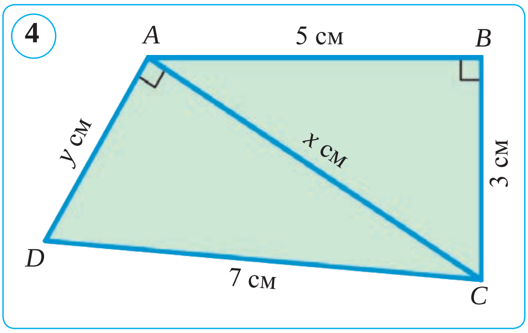
$$\boldsymbol{a^2 + b^2 = c^2}$$

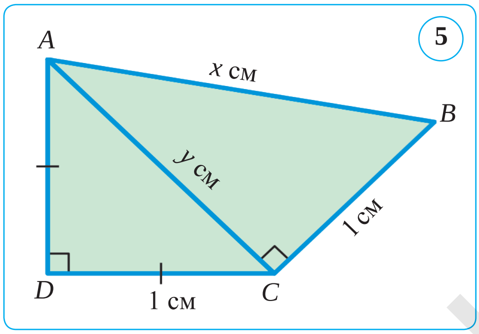
экендигин көрсөтөбүз.

Далил. Жагы ($a + b$) га барабар болгон эки квадрат түзөбүз. Аларды 3-сүрөттө көрсөтүлгөн усул менен тик бурчтуу үч бурчтуктар, квадраттар жана тик бурчтуктарга ажыратып чыгабыз. 3-*а* сүрөттөгү төрт бурчтук жагы c болгон квадрат экендигин көрсөтөбүз. Чындыгында да, эң мурда бул төрт бурчтук ромб, анткени анын жагы катеттери a жана b болгон тик бурчтуу үч бурчтуктун гипотенузасы c га барабар. Эми чиймедеги x бурч



а ***б***





тик экендигин көрсөтөбүз. Чындыгында да, $\angle x+\angle 1+F3=180°$, $\angle 3=\angle 2$ (анткени үч бурчтуктар барабар) жана $\angle 1=90°-\angle 2$ экендигин этибар алып табабыз: $\angle x=90°$. Ошондуктан бул төрт бурчтук бурчтарынан бири 90° ка барабар болгон ромб, б. а. квадрат болот. Каралып жаткан эки чоң квадрат окшош, б. а. алардын аянттары барабар. Ошондой эле, биринчи квадраттын аянты $4S_\Delta+c^2$ ка, ал эми экинчи квадраттын аянты болсо $4S_\Delta+a^2+b^2$ ка барабар (3- *б* сүрөт). Ошондуктан

$$4S_\Delta+c^2=4S_\Delta+a^2+b^2.$$

Демек, $c^2=a^2+b^2$. Теорема далилденди.

Маселе. 4-сүрөттөгү белгисиз кесиндилердин узундугун тап.

Чыгаруу. 1) ΔABC – тик бурчтуу, $\angle B=90°$ (4-сүрөт). Пифагор теоремасы боюнча: $x^2=5^2+3^2$, мындан $x^2=34 \Rightarrow x=\sqrt{34}$ $(x>0)$.

2) ΔACD– тик бурчтуу, $\Delta CAD=90°$ (4-сүрөт). Пифагор теоремасы боюнча, $y^2+(\sqrt{34})^2=7^2$, мындан $y^2+34=49$, $y^2=15$, $y=\sqrt{15}$ $(y>0)$.

Жообу: $x=\sqrt{34}$ см; $y=\sqrt{15}$ см.

Суроо, маселе жана тапшырмалар

1. 1) Пифагор теоремасынын кандай далилдерин билесиң?
2) «Гипотенузанын квадраты», «катеттин квадраты» деген сөздөрдү кандай түшүнөсүң?

2. Тик бурчтуу үч бурчтуктун a жана b катеттери берилген. Эгерде: 1) $a=5$, $b=12$; 2) $a=4\sqrt{2}$, $b=7$; 3) $a=0{,}7$, $b=2{,}4$; 4) $a=5$, $b=6$; 5) $a=\frac{5}{13}$, $b=\frac{12}{13}$ болсо, анда c гипотенузаны тап.

3. Ромбдун диагоналдары: 1) 12 см жана 16 см; 2) 14 см жана 48 см. Ромбдун периметрин тап.

4. Белгисиз кесиндилердин узундугун тап (5-сүрөт).

5. Тик бурчтуу үч бурчтукта a жана b – катеттер, c – гипотенуза. Эгерде: 1) $a=1{,}2$, $c=1{,}3$; 2) $a=7$, $c=9$; 3) $a=1{,}5$, $c=1{,}7$; 4) $a=2$, $c=2{,}5$ болсо, анда b катетти тап.

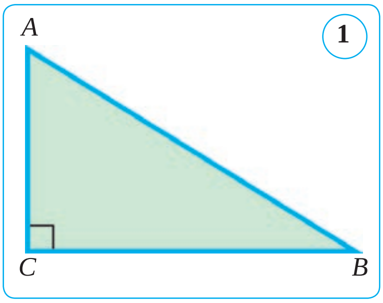
6. Тик бурчтуктун жактары: 1) 2,4 дм жана 7 см; 2) 50 см жана 12 дм; 3) 8 дм жана 1,5 м. Анын диагоналын тап.

18. ПИФАГОР ТЕОРЕМАСЫНА ТЕСКЕРИ ТЕОРЕМА

1. Пифагор теоремасынын кээ бир натыйжалары.

Пифагор теоремасынын натыйжалары ичинен биринин далилин келтирип өтөбүз.

Натыйжа. **Тик бурчтуу үч бурчтуктун каалагандай катети гипотенузадан кичине.**



Далил. ΔABC – тик бурчтуу, $\angle C=90°$ (1-сүрөт). Үч бурчтуктун каалагандай катети гипотенузадан кичине экендигин далилдейбиз.

Чындыгында да, Пифагор теоремасы боюнча катеттер үчүн:

$AC^2=AB^2-BC^2$ жана $BC^2=AB^2-AC^2$

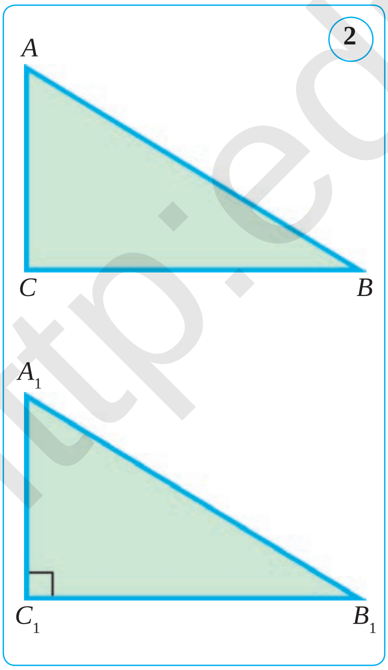
катыштар орундуу. Мындан $AC^2<AB^2$ жана $BC^2<AB^2$ экендиги келип чыгат.

Демек, $AC < AB$ жана $BC < AB$. Натыйжа далилденди.

2. Пифагор теоремасына тескери теорема.

Теорема.

Эгерде үч бурчтуктун жактарынан биринин квадраты анын калган эки жагы квадраттарынын суммасына барабар болсо, анда үч бурчтук тик бурчтуу болот.



Далил. ΔABC-да $AB^2=AC^2+BC^2$ болсун. $\angle C=90°$ экендигин далилдейбиз (2-сүрөт).

C_1 бурчу тик болгон тик бурчтуу $A_1B_1C_1$ үч бурчтугун карап көрөбүз, анда $A_1C_1=AC$ жана $B_1C_1=BC$. Пифагор теоремасы боюнча,

$A_1B_1^2=A_1C_1^2+B_1C_1^2$ жана демек,

$$A_1B_1^2=AC^2+BC^2.$$

Теореманын шарты боюнча,

$AB^2=AC^2+BC^2$, демек, $A_1B_1^2=AB^2$.

Мындан $A_1B_1=AB$ экендигин табабыз. Ошентип, ABC жана $A_1B_1C_1$ үч бурчтуктар үч жагы боюнча барабар. Ошондуктан $\angle C=\angle C_1$, б. а. ABC үч бурчтугунун C чокусундагы бурчу тик бурч экендиги келип чыгат.

Теорема далилденди.

1-маселе. Эгерде үч бурчтуктун жактары: 1) $a=5$, $b=11$, $c=12$; 2) $a=\sqrt{85}$, $b=7$, $c=6$ болсо, анда ал тик бурчтуу үч бурчтук болобу?

Чыгаруу. 1) Эки кичине жагынын квадраттарынын суммасын эсептейбиз: $5^2+11^2=25+121=146$.

Эми чоң жагынын квадратын эсептейбиз: $12^2=144$.

Алынган натыйжаларды салыштырсак, $a^2+b^2\neq c^2$ катышы келип чыгат.

Демек, үч бурчтук тик бурчтуу эмес.

Жообу: $a=5$, $b=11$ жана $c=12$ болгондо, үч бурчтук тик бурчтуу болбойт.

2) Эки кичине жагынын квадраттарынын суммасын эсептейбиз:

$$7^2+6^2=49+36=85.$$

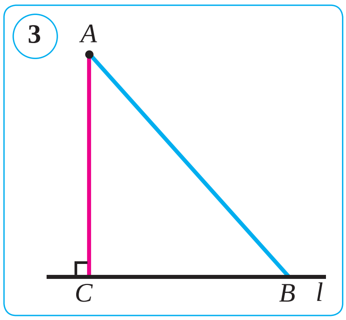
Эми чоң жагынын квадратын эсептейбиз: $\left(\sqrt{85}\right)^2=85$.

Демек, 85 = 85 – орундуу. Натыйжада $b^2+c^2=a^2$ ка ээ болобуз. Мындан үч бурчтуктун тик бурчтуу экендиги келип чыгат.

Жообу: $a=\sqrt{85}$, $b=7$ жана $c=6$ болгондо, үч бурчтук тик бурчтуу болот.

3. Перпендикуляр жана жантык.

l – түз сызык жана анда жатпаган A чекит берилген болсун. Аныктама боюнча, A дан l түз сызыкка чейин эң кыска аралык A дан l ге түшүрүлгөн AC перпендикулярдын узундугуна барабар болот (3-сүрөт).



Чындыгында да, ар бир $B\in l$ үчүн ACB үч бурчтугу – тик бурчтуу, мында AC жана CB – катеттер, AB болсо гипотенуза болот. CB кесиндиге AB жантыктын l түз сызыктагы проекциясы дейилет.

Пифагор теоремасы AB – жантык, AC – перпендикуляр жана CB – проекциясынын узундуктарын төмөнкү барабардык менен байланыштырат: $AB^2=AC^2+CB^2$.

Ошондуктан, ар дайым $AB>AC$ же $AB>BC$, башкача айтканда, бир чекиттен жүргүзүлгөн перпендикуляр менен жантыктын проекциясы жантыктан кичине болот.

Ошондой эле, барабар жантыктар барабар проекцияларга ээ; эки жантыктан кайсы биринин проекциясы чоң болсо, анда ошол жантык чоң болот.

2-маселе. Диагоналдары 10 см жана 24 см ге барабар болгон ромбдун жагын тап.

Чыгаруу. Ромбдун диагоналдары перпендикуляр жана кесилишүү чекитинде барабар экиге бөлүнүшүнөн пайдаланабыз. Анда ромбдун жагы катеттери 5 см жана 12 см ге барабар болгон тик бурчтуу үч бурчтуктун гипотенузасы болот.

$$5^2+12^2=25+144=169, \text{ б.а. } 169=13^2.$$

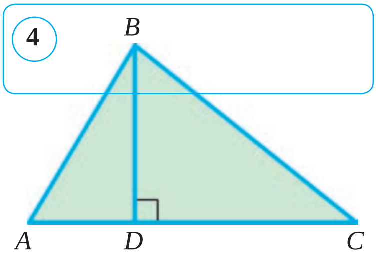
Демек, ромбдун жагы 13 см ге барабар экен.

Жообу: 13 см.

Суроо, маселе жана тапшырмалар

1. 1) Пифагор теоремасына тескери теореманы туюнт.
2) Жантыктын түз сызыктагы проекциясы дегенде эмнени түшүнөсүң?
3) Катеттин гипотенузадан кичине экендиги туурабы?

2. Тик бурчтуу үч бурчтуктун жактары төмөнкү сандарга барабар болушу мүмкүнбү: 1) 11 см, 7 см, 17 см; 2) 3 см, 1,6 см, 3,4 см; 3) 3 см, 4 см, 6 см; 4) 2 см, $\sqrt{7}$ см, $\sqrt{11}$ см? Жообуңду негизде.



3. ΔABC да $AB=13$ см, $BC=20$ см, BD– үч бурчтуктун бийиктиги жана ал 12 см ге барабар. AB, BC жактарынын AC жагына түшүрүлгөн проекцияларынын узундуктарын жана AC жагынын узундугун тап (4-сүрөт). Бош жерлерге тиешелүү жоопторду жаз.

Чыгаруу. ΔABD жана ΔBCD – тик бурчтуу, анткени $\angle ADB=\angle BDC=90°$. AB жана BC жактарынын AC жагындагы проекциялары тиешелүү түрдө AD жана CD кесиндилерден турат.

ΔABD дан Пифагор теоремасы боюнча:

$$AD^2=AB^2-BD^2=13^2-...^2=...-...=...(\text{см}).$$

Мындан $AD=...$ см. ΔBCD дан Пифагор теоремасы боюнча:

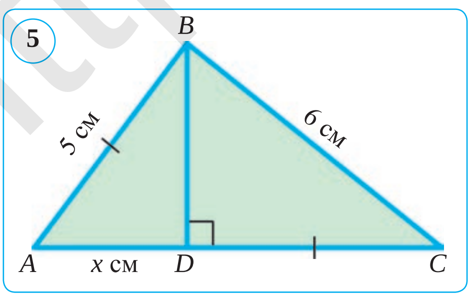
$CD^2=BC^2-BD^2=...^2-12^2=...-...=...$ (см). Мындан $CD=...$ см.

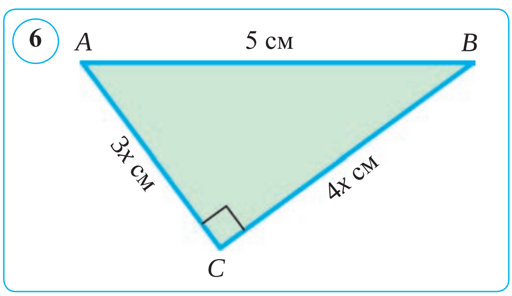
$AC=...+DC=...+...=...$ (см). *Жообу:* $AD=...$ см, $CD=...$ см, $AC=...$ см.

4. Белгисиз узундуктарды тап (5–6-сүрөттөр).

5. Тик бурчтуу үч бурчтуктун эки жагы 6 см жана 8 см ге барабар. Үчүнчү жагынын узундугун тап. Маселе канча чыгарылышка ээ?

6. Тик бурчтуу үч бурчтуктун жактары төмөнкү сандарга барабар болушу мүмкүнбү: 1) $a=12$, $b=35$, $c=37$; 2) $a=11$, $b=20$, $c=25$; 3) $a=18$, $b=24$, $c=30$; 4) $a=9$, $b=12$, $c=15$?





19. ПИФАГОР ТЕОРЕМАСЫНЫН КЭЭ БИР КОЛДОНУЛУШУ

Үч жагы боюнча үч бурчтуктун бийиктигин табуу.

Жактары a, b жана c болгон ABC үч бурчтугун карап көрөбүз. Анын C чокусунан AB жагына түшүрүлгөн $CD=h_c$ бийиктигин табабыз (1-*а* сүрөт).

Бийиктик негизинин D чекити AB кесиндиге салыштырмалуу кандай жайлашышы боюнча үч учур болушу мүмкүн. Ошол учурларды карап көрөбүз.

1-учур. D чекит AB кесиндинин ички чекити болсун. Эгерде $AD=x$ белгилөөнү киргизсек, анда $DB=c-x$ болот (1-*а* сүрөт). ΔADC жана ΔBDC лар тик бурчтуу, Пифагор теоремасы боюнча:

$$h_c^2=b^2-x^2 \ (1) \ \text{жана} \ h_c^2=a^2-(c-x)^2 \ (2).$$

Булардан төмөнкү барабардыкты алабыз: $b^2-x^2=a^2-(c-x)^2$.

Мындан $b^2-x^2=a^2-c^2+2cx-x^2$, б.а. $b^2=a^2-c^2+2cx$.

Акыркы теңдемеден x ти табабыз:

$$x=\frac{b^2+c^2-a^2}{2c} \quad \text{же} \quad x^2=\frac{\left(b^2+c^2-a^2\right)^2}{4c^2}.$$

x^2 тын бул маанисин (1) барабардыкка коюп, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$h_c^2=b^2-\frac{\left(b^2+c^2-a^2\right)^2}{4c^2}=\frac{4b^2c^2-\left(b^2+c^2-a^2\right)^2}{4c^2}.$$

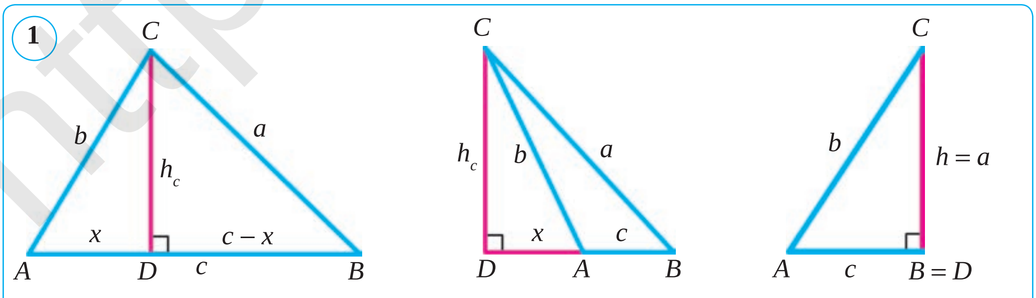
Бул бөлчөктүн алымын көбөйтүүчүлөргө ажыратып, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$h_c^2=\frac{\left(2bc-\left(b^2+c^2-a^2\right)\right)\left(2bc+\left(b^2+c^2-a^2\right)\right)}{4c^2}=\frac{\left(2bc-b^2-c^2+a^2\right)\left(2bc+b^2+c^2-a^2\right)}{4c^2}.$$

Алынган туюнтманын алымындагы эки көбөйтүүчүнү төмөнкүдөй форма алмаштырабыз:

$$2bc-b^2-c^2+a^2=a^2-(b-c)^2=(a-b+c)(a+b-c) \ \text{жана}$$
$$2bc+b^2+c^2-a^2=(b+c)^2-a^2=(b+c-a)(b+c+a).$$

Анда $h_c^2=\dfrac{(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)(b+c+a)}{4c^2}$,



а *б* *в*

мындан

$$h_c = \frac{1}{2c}\sqrt{(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)}\,.$$

Үч бурчтуктун жарым периметрин p менен белгилейбиз, анда:

$$a + b + c = 2p,$$
$$a - b + c = a + b + c - 2b = 2p - 2b = 2(p - b),$$
$$a + b - c = a + b + c - 2c = 2p - 2c = 2(p - c),$$
$$b + c - a = a + b + c - 2a = 2p - 2a = 2(p - a).$$

Алынган туюнтмаларды тамыр астындагы туюнтмалардын ордуна коюп, төмөнкү натыйжаны алабыз:

$$h_c = \frac{1}{2c}\sqrt{16p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{1}{2c}\cdot 4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$$
$$= \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\,.$$

Куду ушундай,

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ жана } h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\,.$$

2-учур. D чекит AB кесиндинин уландысында жатат, б. а. $DB = c + x$. Мында да жогорудагы натыйжа алынат (1- *б* сүрөт).

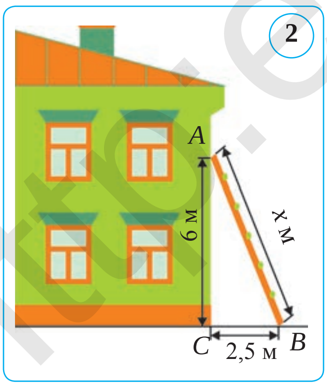
3-учур. D чекит B чекит менен, б. а. $h = a$ – бийиктик катет менен үстү-үстүнөн түшөт. Бул учурда үч бурчтук тик бурчтуу болот (1- *в* сүрөт).

Суроо, маселе жана тапшырмалар

1. Жактары: 1) 10 см, 10 см, 12 см; 2) 17 дм, 17 дм, 16 дм; 3) 4 дм, 13 дм, 15 дм болгон үч бурчтуктардын бийиктиктерин тап.

2. Бийиктиги h ка барабар болгон барабар жактуу үч бурчтуктун жагын тап. Эгерде: 1) h = 6 см; 2) h = 1,5 дм болсо, анда жакты тап.

3. Үч бурчтуктун жактары: 1) $a=5$ см, $b=7$ см, $c=6$ см; 2) $a=13$ дм, $b=14$ дм, $c=15$ дм; 3) $a=24$ см, $b=25$ см, $c=7$ см ге барабар. Үч бурчтуктун чоң жагына түшүрүлгөн бийиктигин тап.



4. Эгерде тең жактуу үч бурчтуктун жагы 12 см ге барабар болсо, анда анын бийиктигин тап.

5. Үч бурчтуктун жактары a=8 см, b=10 см жана c= 12 см. Анын эң чоң жана эң кичине бийиктиктерин тап.

6. Үч бурчтуктун жактары: 1) 17, 65, 80; 2) 8, 6, 4; 3) 24, 25, 7; 4) 30, 34, 16; 5) 15, 17, 8 ге барабар болсо, анда анын эң кичине жагына түшүрүлгөн бийиктигин тап.

7. Үч бурчтуктун жактары $a=16$ см, $b=12$ см жана $c=8$ см ге барабар. Үч бурчтуктун кичине бийиктигин тап

8. Шатынын узундугун тап (2-сүрөт).

5-§. ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫК ОКШОШТУКТАР

20–21. НЕГИЗГИ ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫК ОКШОШТУК ЖАНА АНЫН НАТЫЙЖАЛАРЫ

1. Негизги тригонометриялык окшоштуктар.

Бир бурчтун тригонометриялык функцияларынын ортосундагы байланышты туюнткан окшоштуктарды келтирип чыгарабыз.

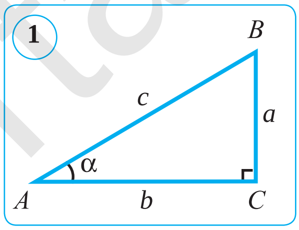
Теорема.

Ар кандай тар α бурч үчүн

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

барабардыгы орундуу.

Далил. A чокусундагы бурчу α га барабар болгон тик бурчтуу каалагандай ABC үч бурчтугун алабыз (1-сүрөт).



Пифагор теоремасы боюнча: $BC^2+AC^2=AB^2$.

Барабардыктын эки бөлүгүн AB^2 ка бөлүп, төмөнкү барабардыкка ээ болобуз:

$$\left(\frac{BC}{AB}\right)^2+\left(\frac{AC}{AB}\right)^2=1.$$

Бирок $\frac{BC}{AB}=\sin\alpha$, $\frac{AC}{AB}=\cos\alpha$. Ошентип,

$$\mathbf{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1}. \qquad (1)$$

(1) барабардыкка тригонометриянын негизги окшоштугу дейилет.

Бизге бир бурчтун тригонометриялык функциялары ортосундагы байланышты туюнткан үч барабардык белгилүү:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \ (2),\quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \ (3),\quad \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1 \ (4).$$

(1) барабардыгынын эки бөлүгүн тең $\cos^2\alpha$ га бөлүп, (5) окшоштугун алабыз:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+1=\frac{1}{\cos^2\alpha} \quad \text{же} \quad 1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}. \qquad (5)$$

(1) барабардыгынын эки бөлүгүн тең $\sin^2\alpha$ га бөлүп, (6) окшоштугун алабыз:

$$1+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha} \quad \text{же} \quad 1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}. \qquad (6)$$

2. Негизги тригонометриялык окшоштуктан келип чыккан натыйжалар.

Ар кандай α тар бурч үчүн төмөнкү барабардыктар орундуу:

$$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha \Rightarrow \sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}. \qquad (7)$$

$$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha \Rightarrow \cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}. \qquad (8)$$

1-маселе. Эгерде $\cos\alpha = \frac{2}{3}$ болсо, анда $\sin\alpha$, $\text{tg}\alpha$ жана $\text{ctg}\alpha$ нын маанилерин эсепте.

Чыгаруу. 1) $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

2) $\text{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{5}}{3} : \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{5}}{2}$;   3) $\text{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2}{3} : \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Жообу: $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\text{tg}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $\text{ctg}\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

2-маселе. Туюнтманы жөнөкөйлөштүр: 1) $1+\frac{1-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}$; 2) $1-\frac{\cos^2\alpha-1}{\cos^2\alpha}$.

Чыгаруу. 1) Кошулуучуларды жалпы бөлүмгө келтиребиз, андан кийин алымдагы окшош мүчөлөрдү тегеректеп жана (6) окшоштуктан пайдаланып табабыз:

$$1+\frac{1-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha+1-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha} = 1+\text{ctg}^2\alpha.$$

Жообу: $1+\text{ctg}^2\alpha$.

2) Айырманы жалпы бөлүмгө келтиребиз, андан кийин алымдагы окшош мүчөлөрдү тегеректеп жана (5) окшоштуктан пайдаланып табабыз:

$$1-\frac{\cos^2\alpha-1}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha-(\cos^2\alpha-1)}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha-\cos^2\alpha+1}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} = 1+\text{tg}^2\alpha.$$

Жообу: $1+\text{tg}^2\alpha$.

3-маселе. Туюнтманы жөнөкөйлөштүр: $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

Чыгаруу. Эки сандын суммасынын квадраты формуласынан жана негизги тригонометриялык окшоштуктан пайдаланып, туюнтманы жөнөкөйлөштүрөбүз: $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha = (\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2 = 1$.   *Жообу:* 1.

Суроо, маселе жана тапшырмалар

1. 1) Кайсы барабардыкка тригонометриянын негизги окшоштугу дейилет?

2) Тригонометриялык окшоштуктарды туюнткан барабардыктардан кайсыларын билесиң?

3) Негизги тригонометриялык окшоштуктан кандай натыйжалар келип чыгат?

2. Эгерде: 1) $\sin\alpha = \frac{12}{13}$ болсо, анда $\cos\alpha$, $\text{tg}\alpha$ жана $\text{ctg}\alpha$ ны; 2) $\cos\alpha = 0{,}8$ болсо, анда $\sin\alpha$, $\text{tg}\alpha$ жана $\text{ctg}\alpha$ ны; 3) $\cos\alpha = 0{,}28$ болсо, анда $\sin\alpha$, $\text{tg}\alpha$ жана $\text{ctg}\alpha$ ны тап.

3. Эгерде $\text{tg}\alpha = \frac{5}{12}$ болсо, анда $\sin\alpha$ жана $\cos\alpha$ ны тап.

Үлгү. Эгерде $\text{tg}\alpha = \frac{4}{3}$ болсо, анда $\sin\alpha$ жана $\cos\alpha$ ны тап.

Чыгаруу. $\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1+\text{tg}^2\alpha = 1+\left(\frac{4}{3}\right)^2 = 1+\frac{16}{9} = \frac{25}{9}$. Демек, $\cos^2\alpha = \frac{9}{25}$.

Мындан $\cos\alpha = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$.

Эми sina ны эсептейбиз: $\text{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \sin\alpha = \text{tg}\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{5} = \frac{4}{5}$.

Жообу: $\sin\alpha = \frac{4}{5}$; $\cos\alpha = \frac{3}{5}$.

4. Туюнтманы жөнөкөйлөштүр:1) $1+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$; 2) $\frac{\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}$; 3) $\frac{1-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$.

Үлгү. Туюнтманы жөнөкөйлөштүр: $1+\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$.

Чыгаруу. Жөнөкөйлөштүрүү үчүн кошулуучуларды топторго ажыратып, төмөнкүнү алабыз:

$$1+\sin^2\alpha-\cos^2\alpha = \underbrace{1-\cos^2\alpha}_{\sin^2\alpha}+\sin^2\alpha = \sin^2\alpha+\sin^2\alpha = 2\sin^2\alpha.$$

Жообу: $2\sin^2\alpha$.

5. Туюнтманы жөнөкөйлөштүр: 1) $\frac{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}{\sin^2\alpha}$; 2) $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha}$; 3) $\frac{\text{tg}\alpha}{\sin\alpha}$.

6. Тик бурчтуу үч бурчтуктун катеттери 7 см жана 24 см ге барабар. Үч бурчтуктун эң кичине бурчунун тригонометриялык функцияларынын маанилерин тап.

7. Эгерде: 1) $\text{tg}A=2$; 2) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\cos\alpha = \frac{15}{17}$ болсо, анда A тар бурчтун тригонометриялык функцияларынын маанилерин тап.

8. Туюнтманы жөнөкөйлөштүр: $\frac{1-\text{tg}^2\alpha+\text{tg}^4\alpha}{\cos^2\alpha}$.

Чыгаруу.

$$\frac{1-\text{tg}^2\alpha+\text{tg}^4\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}(1-\text{tg}^2\alpha+\text{tg}^4\alpha) = (1+\text{tg}^2\alpha)(1-\text{tg}^2\alpha+\text{tg}^4\alpha) = 1+\text{tg}^6\alpha.$$

Жөнөкөйлөштүрүүдө (5) окшоштуктан жана $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ формуладан пайдаланылды. *Жообу:* $1+\text{tg}^6\alpha$.

9. Эгерде: 1) $\sin\alpha = \frac{8}{17}$ болсо, анда cosα, tgα жана ctgα ны; 2) $\cos\alpha=0{,}6$ болсо, анда sinα, tgα жана ctgα ны тап.

10. Бир бурчтун синусу жана косинусу тиешелүү түрдө төмөнкү сандарга барабар болушун же болбостугун аныкта: 1) $\frac{1}{2}$ жана $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{1}{3}$ жана $\frac{3}{4}$.

11. Бир бурчтун тангенси жана котангенси тиешелүү түрдө төмөнкү сандарга барабар болушун же болбостугун аныкта:

1) 0,4 жана 2,5; 2) 1,1 жана 0,9; 3) $\sqrt{5}+2$ жана $\sqrt{5}-2$.

12. Туюнтманы жөнөкөйлөштүр: 1) $\text{tg}\alpha\cdot\text{ctg}\alpha-\cos^2\alpha$; 2) $\cos\alpha-\cos\alpha\cdot\sin^2\alpha$.

13. Тик бурчтуу үч бурчтуктун катеттери 8 см жана 15 см ге барабар. Үч бурчтуктун эң кичине бурчунун тригонометриялык функцияларынын маанилерин тап.

14. Туюнтманы жөнөкөйлөштүр: 1) $(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)$; 2) $\sin\alpha-\sin\alpha\cos^2\alpha$.

22. ТОЛУКТООЧУ БУРЧТУН ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫК ФУНКЦИЯЛАРЫ ҮЧҮН ФОРМУЛАЛАР

Толуктоочу бурчтун тригонометриялык функциялары үчүн формулалар

Толуктоочу бурчтар деп, *суммасы 90° ка барабар болгон эки бурчка айтылат.* Тик бурчтуу үч бурчтуктун тар бурчтары толуктоочу бурчтарга мисал болот, анткени алардын суммасы 90° ка барабар.

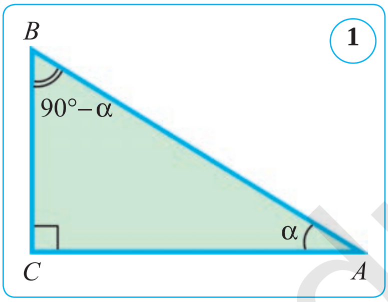
Биз карап чыккан тригонометриялык окшоштуктар бир бурчтун түрдүү тригонометриялык функциялары ортосундагы өз ара катыштарды орнотуу мүмкүнчүлүгүн берет. Эми тик бурчтуу үч бурчтуктун эки тар бурчу ортосундагы катыштарды карап көрөбүз.

Теорема.

Ар кандай тик бурчтуу үч бурчтуктун тар бурчу α үчүн

$$\mathbf{\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha;\ \cos(90°-\alpha)=\sin\alpha}$$

барабардыктар орундуу.



Далил. Гипотенузасы AB болгон тик бурчтуу ABC үч бурчтугун карап көрөбүз (1-сүрөт).

Эгерде $\angle A=\alpha$ болсо, анда $\angle B = 90°-\alpha$ га барабар болот. Үч бурчтуктун тар бурчтарын синус жана косинустар аркылуу туюнтабыз. Аныктама боюнча:

$$\sin B = \frac{AC}{AB} \text{ жана } \cos A = \frac{AC}{AB},$$

б. а. $\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha$; $\sin A = \frac{BC}{AB}$ жана $\cos B = \frac{BC}{AB}$, б.а $\cos(90°-\alpha)=\sin\alpha$.

Теорема далилденди.

Далилденген теоремадан ушул натыйжа келип чыгат.

Натыйжа. Ар кандай тар α бурч үчүн

$$\mathbf{tg(90°-\alpha)=ctg\alpha;\quad ctg(90°-\alpha)=tg\alpha}$$

барабардыктар орундуу.

Бул барабардыктардын тууралыгын жогоруда келтирип чыгарылган формулалардан пайдаланып далилдөөнү өзүңө калтырабыз.

A жана *B* тар бурчтар – бирин-бири 90° толуктоочу бурчтар. Ушуну эске алып, жогоруда келтирип чыгарылган формулалар төмөнкүдөй окулат:

– берилген бурчтун синусу толуктоочу бурчтун косинусуна барабар;

– берилген бурчтун косинусу толуктоочу бурчтун синусуна барабар;

– берилген бурчтун тангенси толуктоочу бурчтун котангенсине барабар;

– берилген бурчтун котангенси толуктоочу бурчтун тангенсине барабар.

1-маселе. A жана B бурчтар – тик бурчтуу үч бурчтуктун тар бурчтары болсун. Эгерде $\sin B = \frac{1}{\sqrt{5}}$ болсо, анда tg$A$ ны тап.

Чыгаруу. $\sin B = \cos A$, демек, $\cos A = \sin B = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Эми A бурчтун синусун негизги тригонометриялык окшоштуктун натыйжасынан пайдаланып табабыз: $\sin A = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Бурчтун тангенсин синус жана косинус аркылуу табабыз:

$$\mathrm{tg}A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{2}{\sqrt{5}} : \frac{1}{\sqrt{5}} = 2.$$

Жообу: 2.

2-маселе. Эгерде $\mathrm{ctg}x = \mathrm{tg}20°$ болсо, анда тар x бурчту тап.

Чыгаруу. $\mathrm{tg}20° = \mathrm{ctg}(90° - 20°) = \mathrm{ctg}70°$, демек, $\mathrm{ctg}x = \mathrm{ctg}70°$. Мындан $x = 70°$. *Жообу:* $x = 70°$.

Суроо, маселе жана тапшырмалар

1. 1) Толуктоочу бурчтар деп эмнеге айтылат?
2) Тик бурчтуу үч бурчтуктун эки тар бурчунун ортосундагы кандай катыштарды билесиң? Тиешелүү формулаларды жаз.

2. Эгерде: 1) $\sin x = \cos 40°$; 2) $\cos x = \sin 76°$; 3) $\mathrm{tg}x = \mathrm{ctg}56°$; 4) $\mathrm{ctg}x = \mathrm{tg}16°$ болсо, анда тар x бурчту тап.

3. A жана B бурчтар – тик бурчтуу үч бурчтуктун тар бурчтары. Эгерде, $\cos A = 0{,}6$ болсо, анда $\sin B$ жана $\cos B$ ларды тап.

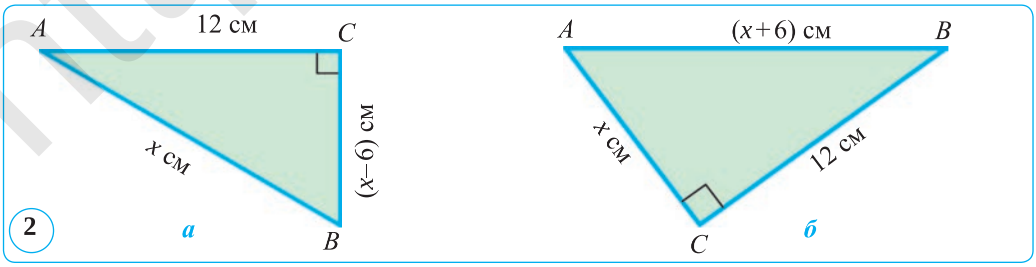
4. Бир бурчтун синусу жана косинусу тиешелүү түрдө төмөнкү сандарга барабар болушун же болбостугун аныкта:
1) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ жана $\frac{2}{\sqrt{5}}$; 2) 0,3 жана 0,4.

5. A жана B бурчтар – тик бурчтуу үч бурчтуктун тар бурчтары. Эгерде $\sin B = 0{,}5$ болсо, анда $\cos A$ жана $\mathrm{tg}A$ ларды тап.

6. Белгисиз узундуктарды тап (2-сүрөт) жана тар бурчтардын синусун, косинусун, тангенсин жана котангенсин эсепте.

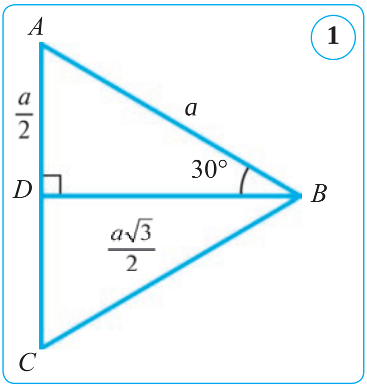
7. Эгерде $\sin(90° - \alpha) = 0{,}8$ болсо, анда $\cos\alpha$ жана $\sin\alpha$ ларды тап.

8. Туюнтманы жөнөкөйлөштүр: 1) $\frac{\cos\alpha}{\mathrm{ctg}\alpha}$; 2) $\mathrm{ctg}^2\alpha(2\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 1)$ $\mathrm{tg}(90° - \alpha) = \frac{1}{3}$.



2

23. 30°, 45°, 60° ТУУ БУРЧТАРДЫН СИНУСУН, КОСИНУСУН, ТАНГЕНСИН ЖАНА КОТАНГЕНСИН ЭСЕПТӨӨ



1. 30° туу бурчтардын синусун, косинусун, тангенсин жана котангенсин эсептөө.

Тең жактуу ABC үч бурчтугун алабыз (1-сүрөт). Ага BD бийиктигин жүргүзсөк, ал биссектриса жана медиананын милдетин аткарат. Ошол себептүү ABD үч бурчтугунун B чокусундагы тар бурчу 30° ка барабар болгон тик бурчтуу ($\angle D=90°$) үч бурчтук болот. Тең жактуу үч бурчтуктун жагы a га барабар болсун. Анда $AD=\frac{a}{2}$. Пифагор теоремасы боюнча:

$$BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}}=\sqrt{\frac{3a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Аныктамалар боюнча:

$$\sin 30°=\frac{AD}{AB}=\frac{a}{2}:a=\frac{1}{2};\qquad \cos 30°=\frac{BD}{AB}=\frac{a\sqrt{3}}{2}:a=\frac{\sqrt{3}}{2};$$

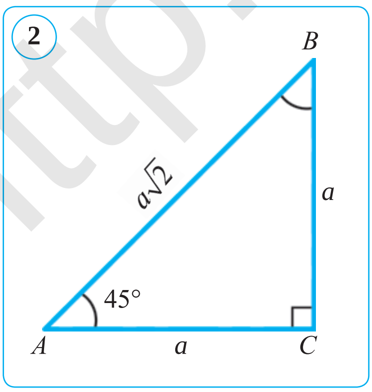
$$\mathrm{tg}30°=\frac{AD}{BD}=\frac{a}{2}:\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3};\qquad \mathrm{ctg}30°=\frac{BD}{AD}=\frac{a\sqrt{3}}{2}:\frac{a}{2}=\sqrt{3}.$$

Толуктоочу бурчтун тригонометриялык функциялары үчүн чыгарылган формулалардын жардамында ***60° туу бурчтун тригонометриялык функцияларынын маанилерин*** табабыз:

$$\sin 60°=\sin(90°-30°)=\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2};\quad \mathrm{tg}60°=\mathrm{tg}(90°-30°)=\mathrm{ctg}30°=\sqrt{3};$$

$$\cos 60°=\cos(90°-30°)=\sin 30°=\frac{1}{2};\quad \mathrm{ctg}60°=\mathrm{ctg}(90°-30°)=\mathrm{tg}30°=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

2. 45° туу бурчтардын синусун, косинусун, тангенсин жана котангенсин эсептөө.



45° туу бурчтун тригонометриялык функцияларын эсептөө үчүн тең капталдуу тик бурчтуу ABC үч бурчтугун карап көрөбүз (2-сүрөт). Бул үч бурчтукта

$AC=BC=a$, $\angle A=\angle B=45°$ болсун. Пифагор теоремасы боюнча, гипотенуза $AB=a\sqrt{2}$ ге барабар болот. Тар бурчтун 45° тригонометриялык функцияларынын аныктамасы боюнча: $\sin 45°=\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{a}{a\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$$\cos 45° = \cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

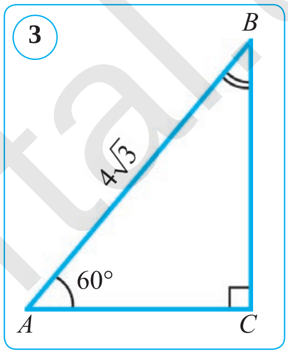
$$\text{tg}45° = \text{tg}A = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a} = 1; \ \text{ctg}45° = \text{ctg}A = \frac{AC}{BC} = \frac{a}{a} = 1.$$

30°, 45° жана 60° туу бурчтардын синусу, косинусу, тангенси жана котангенси маанилеринин жадыбалын түзөбүз.

α	30°	45°	60°
sinα	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosα	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tgα	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
ctgα	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Тар бурчтуу тригонометриялык функциялардын маанилерин, сандардын квадраттарын жана алардан чыгарылган арифметикалык квадрат тамырды атайын жадыбалдардан билүүгө жана калькулятордон пайдаланып эсептөөгө болот.

Маселе. Тик бурчтуу ABC үч бурчтугунун AB гипотенузасы $4\sqrt{3}$ см жана $\angle A = 60°$ (3-сүрөт). Ошол үч бурчтуктун катеттерин тап.



Чыгаруу. Бизге белгилүү болгондой, α бурчтун каршысындагы катет гипотенуза менен α бурчтун синусунун көбөйтүндүсүнө барабар. Ошол боюнча:

$$BC = AB\sin A = 4\sqrt{3}\cdot\sin 60° = 4\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 6 \text{ (см)}.$$

Бизге белгилүү болгондой, α бурчка кыналган катет гипотенуза менен α бурчтун косинусунун көбөйтүндүсүнө барабар. Ошол боюнча:

$$AC = AB\cos A = 4\sqrt{3}\cdot\cos 60° = 4\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} = 2\sqrt{3} \text{ (см)}.$$

Жообу: $BC = 6$ см, $AC = 2\sqrt{3}$ см.

Суроо, маселе жана тапшырмалар

1. Эсепте: 1) $\sin 30° + \text{tg}45°$; 2) $\cos 30°\cdot\text{tg}60°$; 3) $\sqrt{2}\sin 45° - \cos 60°$.

2. Тең жактуу үч бурчтукту чий жана анын бийиктигин жүргүз. Керектүү ченөөлөрдү аткарып, 30° жана 60° туу бурчтардын тригонометриялык функцияларын эсепте, натыйжаларды жадыбалдагылары менен салыштыр.

3. $ABCD$ параллелограммдын BD диагоналы AB жагына перпендикуляр жана 16 см ге барабар. Эгерде BDA бурч 30° ка барабар болсо, анда параллелограммдын жактарын тап.

4. Тик бурчтуу үч бурчтуктун бир катети $6\sqrt{3}$ кө, бул катеттин каршысындагы бурч 60° ка барабар. Гипотенузаны жана экинчи катетти тап.

5. Туюнтманы жөнөкөйлөштүр: 1) $\text{tg}^2\alpha(2\cos^2\alpha + \sin^2\alpha - 1)$;
2) $\text{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha\,\text{tg}^2\alpha$.

6. Тик бурчтуу үч бурчтуктун бир катети 2 ге, бул катеттин каршысындагы бурч 60° ка барабар. Гипотенузаны жана экинчи катетти тап.

7. Туюнтманы жөнөкөйлөштүр: $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$.

8. Эсепте: 1) $\cos 45°\cdot\sin 45°$; 2) $\sin 60°\cdot\text{tg}30°$; 3) $\sqrt{3}\cos 30° - \cos 60°$.

6-§. ТИК БУРЧТУУ ҮЧ БУРЧТУКТАРДЫ ЧЫГАРУУ

24. ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫК ФУНКЦИЯЛАР МААНИЛЕРИНИН ЖАДЫБАЛЫ

Китептин аягында бүтүн сандуу градустар менен 1° тан 89° ка чейин бардык бурчтар үчүн туура келген тригонометриялык функциялар (он миңден бирге чейинки тактыкта) көрсөтүлгөн жадыбал берилген. Бул жадыбал төмөнкүдөй түзүлгөн: сол жактан биринчи мамычага (жогорусунда «градустар» деп жазылганында) градустардын сандары 1°, 2°, 3°, ..., 45° ка чейин жайлаштырылган; экинчи мамычага (жогорусунда «синустар» жазылганына) синустардын биринчи мамычада көрсөтүлгөн бурчтарга туура келген маанилери берилген; 3-мамычага тангенстердин, артынан котангенстердин жана андан кийин косинустардын маанилери жайлаштырылган. Акыркы 6-мамычага кайра градустардын сандары: б. а. 90°, 89°, 88°, ... жана у. с. 45° ка чейин жайлаштырылган. Бул (жерди үнөмдөө үчүн) төмөнкүнүн негизинде жасалган: толуктоочу бурчтун тригонометриялык функциялары үчүн формулалар боюнча $\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$, $\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$ жана у. с., демек, $\sin 1° = \cos 89°$, $\sin 2° = \cos 88°$ жана у. с. Ошондуктан жогорудагы «синустар» жазылган мамычанын астына «косинустар»; жогорудагы «тангенстер» жазылган (солдон 3-) мамычанын астына «котангенстер» жазылган жана ушуга окшош. Ошентип, 1° тан 45° ка чейин бурчтар үчүн градустардын сандарын сол жактагы биринчи мамычадан жана тригонометриялык функциялардын аттарын жогорудан окуу керек, 45° тан 89° ка чейин болгон бурчтар үчүн болсо градустардын сандарын оң жактагы акыркы мамычадан жана функциялардын аттарын мамычалардын астынан окуу керек. Мисалы, жадыбалдан тангенстин маанисин табабыз: $\mathrm{tg}35° = 0{,}7002$.

1. Берилген бурч боюнча тригонеметриялык функцияларын тап.

1-маселе. $\sin 20°$ ты тап.

Чыгаруу. $1° \leq 20° \leq 45°$ болгондуктан, солдогу «градустар» сөзү жазылган мамычадан 20 ны алабыз жана ага тиешелүү саптын экинчи («$\sin\alpha$») мамычасынан 0,3420 маанини табабыз. Мына ошол сан $\sin 20°$ тын мааниси болот. Демек, $\sin 20° \approx 0{,}3420$.

2-маселе. $\sin 75°$ ты тап.

Чыгаруу. $45° \leq 75° \leq 89°$ болгондуктан, оңдогу «градустар» сөзү жазылган мамычадан 75 ти алабыз жана ага тиешелүү саптын төртүнчү (ылдыйдагы «$\sin\alpha$») мамычасынан 0,9659 маанини табабыз. Мына ошол сан $\sin 75°$ тун мааниси болот. Демек, $\sin 75° \approx 0{,}9659$.

3-маселе. $\cos 33°$ ты тап.

Чыгаруу. $1° \leq 33° \leq 45°$ болгондуктан, солдогу «градустар» сөзү жазылган мамычадан 33 тү алабыз жана ага тиешелүү саптын төртүнчү («$\cos\alpha$») мамычасынан 0,8387 маанини табабыз. Мына ошол сан $\cos 33°$ тун мааниси болот. Демек, $\cos 33° \approx 0{,}8387$.

Тангенс жана котангенстердин маанилери тиешелүү түрдө синус жана косинустардын маанилери жадыбалдан кандайча табылган болсо, ошондойчо табылат.

2. Бурчту тригонометриялык функциясы боюнча табуу.

4-маселе. Эгерде $\sin x = 0{,}9848$ болсо, анда x тар бурчту тап.

Чыгаруу. Синусу 0,9848 ге барабар болгон бурчту табуу үчүн тригонометриялык функциялардын маанилери жайлашкан биринчи же төртүнчү мамычадан ошол маанини издейбиз. Бул маани төртүнчү ($\sin\alpha$) мамычада бар, б. а. изделген бурч 45° тан чоң жана 89° тан кичине. Бул сапка тиешелүү ондогу «градустар» мамычасынан 80 санын табабыз. Демек, изделген бурч болжолдуу 80° ка барабар. Жообу: $x \approx 80°$.

Чыгаруу. Тангенси 0,7002 ке барабар болгон бурчту табуу үчүн тригоноиетриялык функциялардын маанилери жайлашкан экинчи же үчүнчү мамычадан ошол маанини издейбиз. Бул маани экинчи ($\mathrm{tg}\alpha$) мамычада бар, б. а. изделген бурч 45° тан кичине. Бул сапка тиешелүү солдогу «градустар» мамычасынан 35 санын табабыз. Демек, изделген бурч болжолдуу 35° ка барабар. *Жообу:* $x \approx 35°$.

Суроо, маселе жана тапшырмалар

1. Жадыбалдан пайдаланып тап:

a) 1) $\sin 3°$; 2) $\sin 21°$; 3) $\sin 50°$; 4) $\sin 82°$; 5) $\sin 40°$;
b) 1) $\cos 9°$; 2) $\cos 12°$; 3) $\cos 41°$; 4) $\cos 67°$; 5) $\cos 4°$;
d) 1) $\mathrm{tg}5°$; 2) $\mathrm{tg}89°$; 3) $\mathrm{tg}15°$; 4) $\mathrm{tg}60°$; 5) $\mathrm{tg}50°$;
e) 1) $\mathrm{ctg}10°$; 2) $\mathrm{ctg}30°$; 3) $\mathrm{ctg}75°$; 4) $\mathrm{ctg}52°$; 5) $\mathrm{ctg}5°$.

2. Жадыбалдан пайдаланып, x тар бурчун тап:

a) 1) $\sin x \approx 0{,}1392$; 2) $\sin x \approx 0{,}8590$; 3) $\sin x \approx 0{,}5150$;
b) 1) $\cos x \approx 0{,}7431$; 2) $\cos x \approx 0{,}6428$; 3) $\cos x \approx 0{,}0523$;
d) 1) $\mathrm{tg}x \approx 0{,}4663$; 2) $\mathrm{tg}x \approx 11{,}430$; 3) $\mathrm{tg}x \approx 0{,}1763$;
e) 1) $\mathrm{ctg}x \approx 0{,}9004$; 2) $\mathrm{ctg}x \approx 1{,}192$; 3) $\mathrm{ctg}x \approx 0{,}3640$.

3. (Практикалык иш.) Транспортир жардамында тар бурчу 40° болгон тик бурчтуу үч бурчтукту түз. Анын жактарын чене жана ошол бурчтун синусун, косинусун, тангенсин жана котангенсин эсепте.

4. Туюнтманын маанисин тап: $\mathrm{tg}15° \cdot \mathrm{tg}30° \cdot \mathrm{tg}60° \cdot \mathrm{tg}75°$.

Чыгаруу. $\mathrm{tg}(90° - \alpha) = \mathrm{ctg}\alpha$ жана $\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\alpha = 1$ формулаларынан пайдаланып, туюнтманын маанисин эсептейбиз (бош жерге тиешелүү жоопту жаз).

$$\mathrm{tg}15° \cdot \mathrm{tg}30° \cdot \mathrm{tg}60° \cdot \mathrm{tg}75° = \mathrm{tg}15° \cdot \mathrm{tg}30° \cdot \mathrm{tg}(90° - 30°) \cdot \mathrm{tg}(90° - 15°) =$$
$$= (\mathrm{tg}15° \cdot \mathrm{ctg}...°) \cdot (\mathrm{tg}30° \cdot \mathrm{ctg}...°) = ... \cdot ... = ...$$

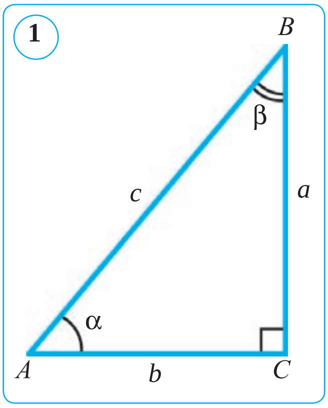
5. Далилдөө: $\mathrm{tg}1° \cdot \mathrm{tg}2° \cdot ... \cdot \mathrm{tg}88° \cdot \mathrm{tg}89° = 1$.

6. Туюнтманы жөнөкөйлөштүр: 1) $\cos^2\alpha + \cos^2(90° - \alpha)$; 2) $\sin^2\alpha - \cos^2(90° - \alpha)$.

7. Жадыбалдан пайдаланып тап: 1) $\sin 70°$; 2) $\cos 55°$; 3) $\mathrm{tg}10°$; 4) $\mathrm{ctg}18°$.

8. Жадыбалдан пайдаланып, x тар бурчту тап: $\sin x \approx 0{,}1392$.

25. ТИК БУРЧТУУ ҮЧ БУРЧТУКТАРДЫ ЧЫГАРУУ



Үч бурчтуктарды чыгаруу үч бурчтуктун белгилүү бурчтары жана жактары боюнча анын белгисиз жактары менен бурчтарын табуудан турат. Тик бурчтуу үч бурчтукту жагы жана тар бурчу же эки жагы боюнча чыгарууга болот. Тик бурчтуу үч бурчтуктарды чыгарууда 1-сүрөттөгү белгилөөлөрдөн пайдаланабыз. Ал үчүн маселенин мазмунунан келип чыккан түрдө, тригонометриялык функциялардын маанилерин он миңден бирдиктер разрядына чейин (китептин аягындагы тиркемеге к.) же зарыл болсо, анда миңден бирдиктер разрядына чейин, жактардын узундуктарын жүздөн бирге чейин, бурчтун градустук өлчөмүн бирге чейин тегеректеп алууга келишип алабыз.

Тик бурчтуу үч бурчтуктун элементтерин анын эки белгилүү элементи боюнча эсептөөнүн 4 учурун карап көрөбүз.

1-учур. Үч бурчтукту гипотенузасы жана тар бурчу боюнча чыгаруу.

1-маселе. Тик бурчтуу үч бурчтуктун гипотенузасы $c=10$ см жана тар $\alpha=50°$ бурчу берилген. a, b катеттери жана β тар бурчун тап.

Чыгаруу. 1) Тик бурчтуу үч бурчтуктун тар бурчтарынын суммасы 90° ка барабар. Анда $\beta=90°-\alpha=90°-50°=40°$.

1-усул. 2) α бурчтун каршысындагы катет гипотенуза менен α бурчтун синусунун көбөйтүндүсүнө барабар, б. а. $a=c\sin\alpha$.

Демек, $a=10\sin 50°=10\cdot 0,7660\approx 7,66$ (см).

3) α бурчка кыналган катет гипотенуза менен α бурчтун косинусунун көбөйтүндүсүнө барабар, б. а. $b=c\cos\alpha$.

Демек, $b=10\cos 50°=10\cdot 0,6428\approx 6,43$ (см).

2--усул. 2) $a=c\cos\beta$; $a=10\cos 40°=10\cdot 0,7660\approx 7,66$ (см).

3) $b=c\sin\beta$; $b=10\sin 40°=10\cdot 0,6428\approx 6,43$ (см).

Жообу: $a\approx 7,66$ см; $b\approx 6,43$ см; $\beta=40°$.

2-учур. Үч бурчтукту катети жана тар бурчу боюнча чыгаруу.

2-маселе. Тик бурчтуу үч бурчтуктун катети $a=6$ см жана тар бурчу $\beta=22°$ берилген. b катет, c гипотенуза жана α тар бурчту тап..

Чыгаруу. 1) Тик бурчтуу үч бурчтуктун тар бурчтарынын суммасы 90° ка барабар. Анда $\alpha=90°-\beta=90°-22°=68°$.

1-усул. 2) Гипотенуза β тар бурчка кыналган катеттин β бурчтун косинусуна катышына барабар б.а. $c=\dfrac{a}{\cos\beta}$.

Демек, $c=\dfrac{a}{\cos\beta}=\dfrac{6}{\cos 22°}=\dfrac{6}{0,9272}\approx 6,47$ (см).

3) Аныктама боюнча $\operatorname{tg}\beta=\dfrac{b}{a}$. Мындан $b=a\operatorname{tg}\beta$, б.а.

$$b=6\operatorname{tg}22^\circ=6\cdot 0{,}4040\approx 2{,}42\ \text{(см)}.$$

2- усул. 2) Гипотенуза α тар бурчтун каршысындагы катеттин α бурчтун синусуна катышына барабар $c=\dfrac{a}{\sin\alpha}$.

Демек, $c=\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{6}{\sin 68^\circ}=\dfrac{6}{0{,}9272}\approx 6{,}47$ (см).

3) Аныктама боюнча $\operatorname{tg}\beta=\dfrac{b}{a}$. Мындан $b=a\operatorname{tg}\beta$, б.а.

$$b=6\operatorname{tg}22^\circ=6\cdot 0{,}4040\approx 2{,}45\ \text{(см)}.$$

Жообу: $c\approx 6{,}47$ см, $b\approx 2{,}42$ см, $\alpha=68^\circ$.

Суроо, маселе жана тапшырмалар

1. Тик бурчтуу үч бурчтукта узундугу 7 см ге барабар болгон катет 60° туу бурчка кыналган. Ошол үч бурчтуктун гипотенузасын тап.

2. Тик бурчтуу үч бурчтуктун гипотенузасы 12 см ге, катеттеринен бири болсо $6\sqrt{2}$ см ге барабар. Үч бурчтуктун тар бурчтарын тап.

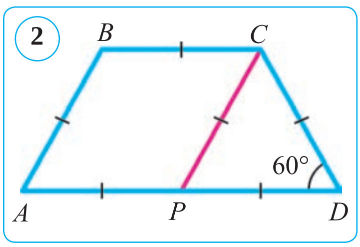
3. Тик бурчтуу үч бурчтуктун гипотенузасы c = 10 см жана тар бурчу $\alpha=42^\circ$ берилген. *a, b* катеттерин жана β тар бурчун тап. Маселени эки усул (тексттеги 1-маселеге к.) менен чыгар.

4. Тик бурчтуу үч бурчтуктун катети b = 4 см жана тар бурчу $\beta=18^\circ$ берилген. b катетин, c гипотенузасын жана α тар бурчун тап. Маселени эки усул (тексттеги 2-маселеге к.) менен чыгар.

5. Туюнтманы жөнөкөйлөштүр: $\dfrac{\cos^2\alpha}{(1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha)}-\sin\alpha\cos(90^\circ-\alpha)$.

6. Тең капталдуу трапециянын негизиндеги бурч 60° ка, каптал жагы болсо кичине негизине барабар болуп $2\sqrt{2}$ см ге барабар. Ошол трапециянын чоң негизин тап. Бош жерлерге тиешелүү жоопту жаз.

Чыгаруу. $ABCD$ трапеция – тең капталдуу $\angle A=\angle D=60^\circ$, $AB=DC=$ $=BC=\quad=2\sqrt{2}$ см. $CP\parallel BA$ жүргүзөбүз (2-сүрөт). Анда $\angle A=\angle CPD=60^\circ$ ($CP\parallel BA$ жана AD жана AD кесүүчүнүн кесилишинен түзүлгөн ... бурчтар). CPD үч бурчтуктун бурчтары ...° тан, демек, ал ... жактуу. Ошондуктан $CP=PD=...=2\sqrt{2}$ см. Анда $AD=2\cdot 2\sqrt{2}=...$ (см). *Жообу:* $4\sqrt{2}$ см.



7. Тик бурчтуу үч бурчтуктун гипотенузасы c = 8 см жана тар бурчу $\alpha=30^\circ$ берилген. *a, b* катеттерин жана β тар бурчун тап. Маселени эки усул (тексттеги 1-маселеге к.) менен чыгар.

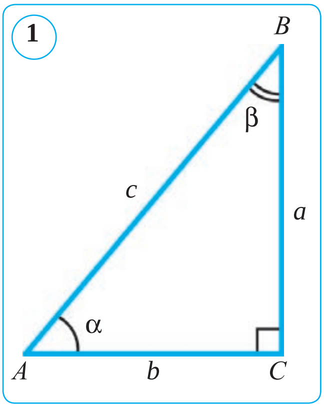
26. ТИК БУРЧТУУ ҮЧ БУРЧТУКТАРДЫ ЧЫГАРУУ (УЛАНДЫСЫ)

3-учур. Үч бурчтукту гипотенузасы жана катети боюнча чыгаруу.

1-маселе. Тик бурчтуу үч бурчтуктун гипотенузасы $c = 13$ см жана катети $a = 5$ см берилген. b катетин, α жана β тар бурчтарын тап.

Чыгаруу. 1) Пифагор теоремасы боюнча:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12 \text{ (см)}.$$



1-усул. 2) α тар бурч синусунун аныктамасы боюнча:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{5}{13} \approx 0,3846.$$

Мындан $\alpha \approx 23°$.

3) Тик бурчтуу үч бурчтуктун тар бурчтарынын суммасы 90° ка барабар. Анда

$$\beta = 90° - \alpha \approx 90° - 23° = 67°.$$

Жообу: $b = 12$ см, $\alpha \approx 23°$, $\beta \approx 67°$.

2--усул. 2) β тар бурч синусунун аныктамасы боюнча $\sin\beta = \frac{b}{c} = \frac{12}{13} \approx 0,9231$.

Мындан $\beta \approx 67°$.

3) Тик бурчтуу үч бурчтуктун тар бурчтарынын суммаси 90° ка барабар. Анда

$$\alpha = 90° - \beta \approx 90° - 67° = 23°.$$

Жообу: $b = 12$ см, $\alpha \approx 23°$, $\beta \approx 67°$.

4-учур. Үч бурчтукту эки катети боюнча чыгаруу.

2-маселе. Тик бурчтуу үч бурчтуктун катеттери $a = 8$ см жана $b = 15$ см берилген. c гипотенузасын, α жана β тар бурчтарын тап.

Чыгаруу. 1) Пифагор теоремасы боюнча:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{64 + 225} = \sqrt{289} = 17 \text{ (см)}.$$

1- усул. 2) *a* тар бурч тангенсинин аныктамасы боюнча:

$$\text{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{8}{15} \approx 0,5333$$

Мындан $\alpha \approx 28°$.

3) Тик бурчтуу үч бурчтуктун тар бурчтарынын суммасы 90° ка барабар. Анда $\beta = 90° - \alpha \approx 90° - 28° = 62°$. *Жообу:* $c = 17$ cm, $\alpha \approx 28°$, $\beta \approx 62°$.

2-усул. 2) β тар бурчтун тангенсинин аныктамасы боюнча:

$$\text{tg}\beta = \frac{b}{a} = \frac{15}{8} = 1,875.$$

Мындан $\beta \approx 62°$.

3) Тик бурчтуу үч бурчтуктун тар бурчтарынын суммасы $90°$ ка барабар. Анда

$$\alpha = 90° - \beta \approx 90° - 62° = 28°.$$

Жообу: $c = 17$ см, $\alpha \approx 28°$, $\beta \approx 62°$.

3- усул. 1) α тар бурчтун котангенсинин аныктамасы боюнча:

$$\text{ctg}\alpha = \frac{b}{a} = \frac{15}{8} = 1,875.$$

Мындан $\alpha \approx 28°$.

2) Тик бурчтуу үч бурчтуктун тар бурчтарынын суммасы $90°$ ка барабар. Анда

$$\beta = 90° - \alpha \approx 90° - 28° = 62°.$$

3) Пифагор теоремасы боюнча:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{64 + 225} = \sqrt{289} = 17 \text{ (см)}.$$

Жообу: $c = 17$ см, $\alpha \approx 28°$, $\beta \approx 62°$.

Суроо, маселе жана тапшырмалар

1. Тик бурчтуу ABC үч бурчтугунда $\angle C = 90°$, гипотенуза $c = 9\sqrt{2}$ см, катет $a = 9$ см. Ошол үч бурчтуктун b катетин, α жана β тар бурчтарын тап. Эки усул менен чыгар.

2. Тик бурчтуу ABC үч бурчтугунда $\angle C = 90°$, катеттери $a = 6\sqrt{3}$ см жана $b = 6$ см. Ошол үч бурчтуктун c гипотенузасын α жана β тар бурчтарын тап. Эки усул менен чыгар.

3. Тик бурчтуу ABC үч бурчтугунда $\angle C = 90°$, катеттери $a = \sqrt{11}$ см жана $b = 5$ см. Ошол үч бурчтуктун с гипотенузасын, α жана β тар бурчтарын тап. Эки усул менен чыгар.

4. CD кесинди – тик бурчтуу ABC ($\angle C = 90°$) үч бурчтуктун гипотенузасына түшүрүлгөн бийиктиги. Далилдөө:

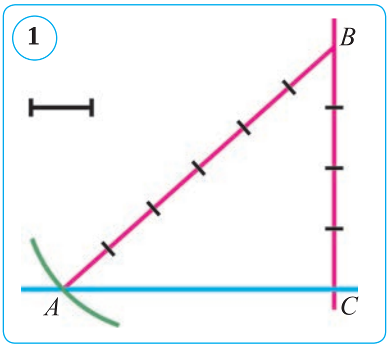
1) $\dfrac{CD}{\sin A} = AB\cos A$; 2) $AD\,\text{tg}A = BD\,\text{tg}B$.

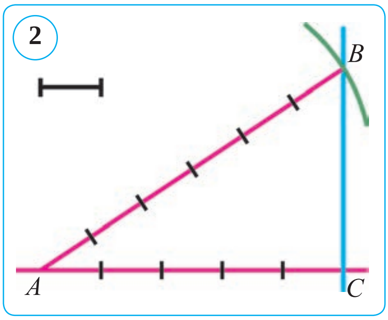
5. Эсепте: $2\sin 60° + 4\cos 60° - \text{ctg}30° - 2\text{tg}45°$.

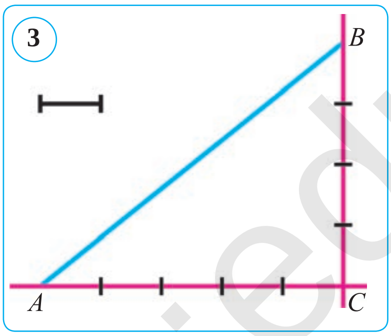
6. Тик бурчтуу ABC үч бурчтугунда $\angle C = 90°$, гипотенуза $c = 25$ см, катет $b = 24$ см. Ошол үч бурчтуктун a катетин, α жана β тар бурчтарын тап. Эки усул менен чыгар.

7. Тик бурчтуу ABC үч бурчтугунда $\angle C = 90°$, катеттери $a = 10$ см жана $b = 24$ см. Ошол үч бурчтуктун c гипотенузасын, α жана β тар бурчтарын тап. Эки усул менен чыгар.

27. ТИК БУРЧТУУ ҮЧ БУРЧТУКТАРДЫ ТҮЗҮҮ







1-маселе. Синусу $\frac{4}{5}$ кө барабар болгон бурчту түзүү.

Ал үчүн C тик бурчту түзөбүз жана анын жактарынан биринде бурчтун чокусунан баштап 4 каалагандай масштаб бирдигине барабар CB кесиндини коёбуз (1-сүрөт). Борбору B чекитинде жана радиусу 5 масштаб бирдигине барабар радиустуу жааны бурчтун экинчи жагы менен кесилишкенге чейин чиебиз.

Алардын кесилишүү чекитин A менен белгилейбиз. A жана B чекиттерин бириктирип, тик B бурчтуу ABC үч бурчтугун алабыз.

A – изделген бурч, анын синусу $\frac{4}{5}$ ке барабар болот, б. а. $\sin A = \frac{4}{5}$.

2-маселе. Косинусу $\frac{5}{6}$ ке барабар болгон бурчту түзүү.

Ал үчүн C тик бурчту түзөбүз жана анын жактарынан биринде бурчтун чокусунан баштап 5 каалагандай масштаб бирдигине барабар AC кесиндини коёбуз (2-сүрөт).

Борбору A чекитинде жана радиусу 6 масштаб бирдигине барабар радиустуу жааны бурчтун экинчи жагы менен кесилишкенге чейин чиебиз. Алардын кесилишүү чекитин B менен белгилейбиз. A жана B чекиттерин бириктирип, тик бурчтуу ABC үч бурчтугун алабыз.

A – изделген бурч, анын косинусу $\frac{5}{6}$ ке барабар болот, б. а. $\cos A = \frac{5}{6}$.

3-маселе. Тангенси $\frac{4}{5}$ кө барабар болгон бурчту түзүү.

Ал үчүн C тик бурчун түзөбүз жана анын жактарынан биринде бурчтун чокусунан баштап 5 каалагандай масштаб бирдигине барабар CA кесиндини, экинчисинде болсо 4 масштаб бирдигине барабар CB кесиндини коёбуз (3-сүрөт). A жана B чекиттерин бириктирип, тик бурчтуу ABC үч бурчтугун алабыз. A – изделген бурч, анын тангенси $\frac{4}{5}$ кө барабар болот, б. а. $\mathrm{tg}A = \frac{4}{5}$.

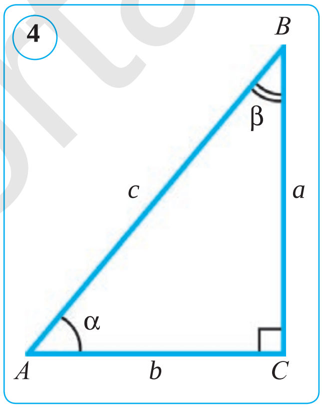
Берилген котангенс боюнча бурчту түзүү талап кылынганда да куду ушундай түзүүгө туура келет, мындай учурда изделген бурч үчүн АС га кыналган катетти гана алуу керек болот. Тик бурчтуу үч бурчтуктун катети ар дайым гипотенузадан кичине. Ошондуктан тар бурчтун синусу жана косинусу дайыма 1 ден кичине болот.

Катеттердин узундуктарын салыштыруунун көрсөтүшүнчө, алар өз ара барабар, бири экинчисинен чоң же кичине болушу мүмкүн. Ошондуктан тар бурчтун тангенси жана котангенстери каалагандай оң сан болушу мүмкүн. Демек, алардын ар бири катеттерден көз каранды түрдө 1 ден кичине, 1 ден чоң жана 1 ге барабар болот.

Суроо, маселе жана тапшырмалар

1. 1) $\operatorname{tg}A=\frac{3}{5}$; 2) $\sin A=\frac{2}{3}$ ге барабар болгон, тик бурчтуу ABC ($\angle C=90°$) үч бурчтугун түз.

2. 1) $\sin A=\frac{5}{8}$; 2) $\cos A=\frac{3}{4}$ кө барабар болгон, тик бурчтуу ABC ($\angle C=90°$) үч бурчтугун түз.



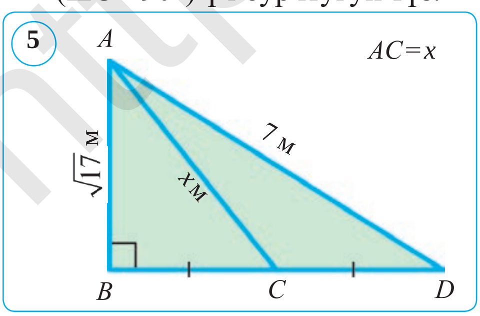
3. Тик бурчтуу ABC үч бурчтугунда $\angle C=90°$, гипотенуза $c=7\sqrt{2}$ см, катет $b=7$ см. Үч бурчтуктун a катетин, α жана β тар бурчтарын (4-сүрөт) тап.

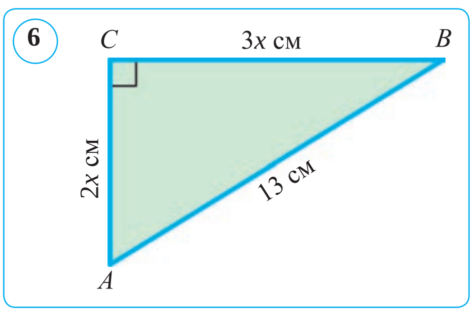
4. Тик бурчтуу ABC үч бурчтугунда $\angle C=90°$, гипотенуза $c=12$ см, $\alpha=60°$. Үч бурчтуктун a, b катеттерин, β тар бурчун (4-сүрөт) тап. Маселени эки усул менен чыгар

5. Белгисиз узундуктарды тап (5–6-сүрөттөр)..

6. Тик бурчтуу ABC үч бурчтугунда $\angle C=90°$, гипотенуза $c=74$ см, $\sin\alpha=\frac{12}{37}$. Ошол үч бурчтуктун периметрин (4-сүрөт) тап.

7. 1) $\sin A=\frac{4}{7}$; 2) $\cos A=\frac{3}{5}$; 3) $\operatorname{tg}A=\frac{2}{5}$ ге барабар болгон, тик бурчтуу ABC ($\angle C=90°$) үч бурчтугун түз.





28. ПРАКТИКАЛЫК КӨНҮГҮҮ ЖАНА КОЛДОНУУ

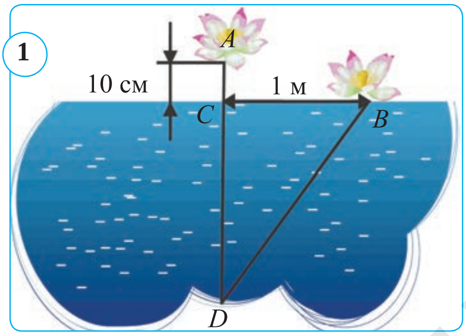
1. Пифагор теоремасынын практикалык колдонулушу боюнча маселелер.

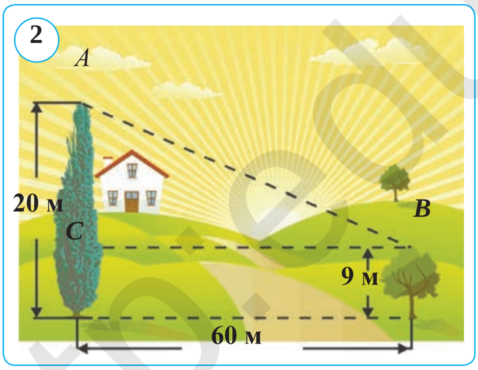
1-маселе. Лотос суу гүлүнүн көлдүн бетинен көрүнгөн бөлүгү 10 см. Эгерде гүл баштапкы абалынан бир жакка 1 м ге тартылса, суунун бетине тиет. Көлдүн ошол жердеги тереңдигин тап.

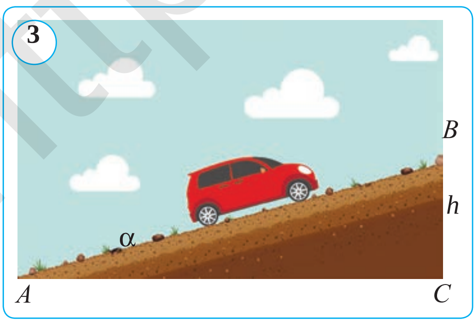
Чыгаруу. Көлдүн изделген CD тереңдигин x менен белгилейбиз (1-сүрөт). Анда $BD=AD=AC+CD=0{,}1+CD=0{,}1+x$ ($м$) ге барабар болот. Анда тик бурчтуу BCD үч бурчтугунан Пифагор теоремасы боюнча төмөнкүлөргө ээ болобуз $BD^2-CD^2=BC^2$, $(0{,}1+x)^2-x^2=1$, мындан:

$0{,}01+0{,}2x+x^2-x^2=1$; $0{,}2x=0{,}99$; $x=0{,}99:0{,}2$;

$x=9{,}9:2$; $x=4{,}95$ (м). *Жообу:* көлдүн тереңдиги 4,95 м.





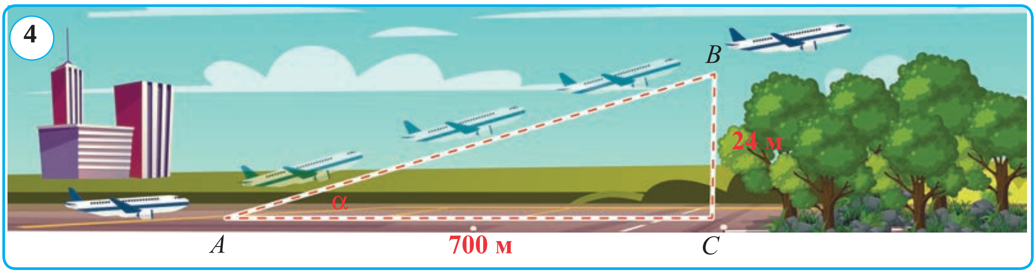


2-маселе. Бир дарактын бийиктиги 20 м, экинчисиники болсо 9 м. Бул дарактардын ортосундагы аралык 60 м ди түзөт. Ошол эки дарактын чокуларынын ортосундагы алаыкты тап (2-сүрөт). Өз алдынча чыгар.

3-маселе. Эки карагай дарагынын бийиктиктери тиешелүү түрдө 21 м жана 28 м, бул дарактардын ортосундагы аралык болсо 24 м ди түзөт. Эки дарактын чокуларынын ортосундагы аралыкты тап (2-сүрөткө кара). Өз алдынча чыгар.

2. Тар бурчтун синусунун практикалык колдонулушу боюнча маселе.

Жантык түз жолдун көтөрүлүш жеринин тикелигин горизонтко салыштырмалуу көтөрүлүү бурчу аркылуу берүүгө болот (3-сүрөт). Көбүнесе көтөрүлүш жеринин тикелигин көтөрүлүү бурчу боюнча басып өтүлгөн жол узундугунун көтөрүлүш бийиктиги аркылуу берген оң. Мисалы, машина 100 м аралыкты басып өткөндө, 2 м бийиктикке көтөрүлгөн болсун. Мындай учурда көтөрүлүш жеринин тикелиги бийиктиктин басып өтүлгөн жолго катышы менен берилет. Көтөрүлүш бийиктиги $\frac{2\ м}{100\ м}=0{,}02$ ге



барабар. Бул катыш басып өтүлгөн жолдон көз каранды эмес. Жантык түз жолдон түшкөндө да куду ушуга окшош ой жүгүртүүгө болот.

4-маселе. Жеңил машина ылдыйышы $15°$ болгон жантык жол менен көтөрүлүүдө (3-сүрөткө к.). Ал жантыкка көтөрүлүш жеринен 300 м жолду басып өткөндөн кийин горизонтко салыштырмалуу канча метр бийиктикте болот?

Көрсөтмө. Тар бурч синусунун аныктамасын колдонуп, көтөрүлүштүн бийиктигин тап.

2. Тар бурч тангенсинин практикалык колдонулушу боюнча маселелер.

5-маселе. Самолёт учуу жолунан абага көтөрүлчү чекитинен 700 м аралыкта токой жайлашкан болуп, дарактардын максималдуу бийиктиги 24 м ге барабар. Самолёт бул дарактарга тийбестиги үчүн кандай бурч менен көтөрүлүүгө тийиш?

Чыгаруу. Тик бурчтуу ABC ($\angle C=90°$) үч бурчтугунда $AC=700$ м, $BC=24$ м (4-сүрөт). Тар бурчтун тангенсинин аныктамасынан табабыз:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{24}{700} \approx 0,0343 \Rightarrow \alpha \approx 2°$$

Жообу: самолёт дарактарга тийбей учушу үчүн учуу чекитинен $2°$ тан аз болбогон бурч менен көтөрүлүүгө тийиш.

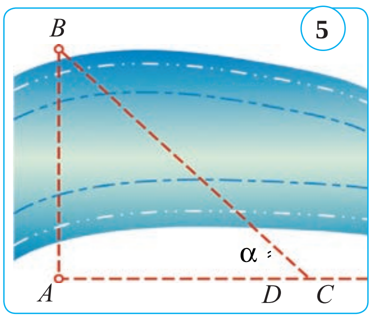
6-маселе. A пунктунан дарыянын ары жагындагы барууга болбой турган B пунктуна чейин болгон аралыкты тап (5-сүрөт).

Чыгаруу. Устурлаб (астролябия, горизонталдуу тегиздикте жайлашкан бурчтарды ченөө үчүн колдонулуучу аспап, б. а. бурч ченегич) же эккер жардамында A чекитинде тик BAC бурчун түзөбүз.

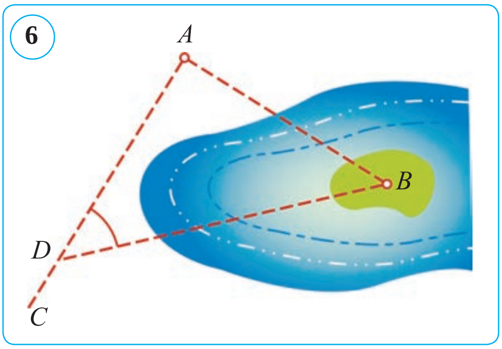
AC түз сызыгында каалагандай D чекиттин алып, устурлаб жардамында ADB бурчун ченейбиз. Алсак, ал $44°$ ка барабар болсун. Андан кийин AD аралыкты ченейбиз, ал 120 м болсун. AB аралыкты тар бурчтун тангенсинен пайдаланып табабыз:

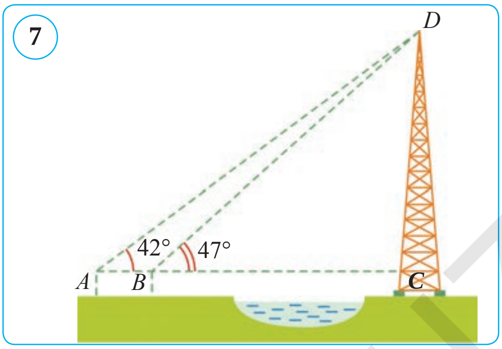
$$\frac{AB}{120} = \operatorname{tg}44° \Rightarrow AB = 120 \cdot \operatorname{tg}44° \approx 120 \cdot 0,9657 \approx 116 \text{(м)}.$$

Жообу: ≈ 116 м.



7-маселе. A пунктунан барууга болбой турган аралчадагы B пунктуна чейин болгон аралыкты тап (6-сүрөт).

6


7


Көрсөтмө. 5-маселеге окшош ой жүгүртүлөт. $\angle ADB = 48°$ жана $AD = 200$ м деп, маселени чыгар.

8-маселе. Негизине барууга болбой турган объекттин, маселен, электр берүү мамысынын бийиктигин ченөө талап кылынган болсун (7-сүрөт).

Чыгаруу. Тик бурчтуу *ACD* үч бурчтугун карап көрөбүз. Бул үч бурчтуктун A бурчун устурлаб жардамында өлчөсөк болот, алсак, ал 42° ка барабар болсун.

Тик бурчтуу *BCD* үч бурчтугунда *DBC* бурчун ченейбиз, ал 47° ка барабар болсун.

Тар бурч тангенсинин аныктамасы негизинде *ACD* дан табабыз:

$$\frac{CD}{AC} = \text{tg}42° \Rightarrow AC = \frac{CD}{\text{tg}42°}. \quad (1)$$

Тар бурч тангенсинин аныктамасы негизинде *BCD* дан табабыз:

$$\frac{CD}{BC} = \text{tg}47° \Rightarrow BC = \frac{CD}{\text{tg}47°}. \quad (2)$$

A, *B* жана *C* чекиттери бир түз сызыкта жатат. (1) ден (2) ни кемитебиз:

$$AC - BC = \frac{CD}{\text{tg}42°} - \frac{CD}{\text{tg}47°} \Rightarrow AC - BC = CD\left(\frac{1}{\text{tg}42°} - \frac{1}{\text{tg}47°}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC - BC = CD\left(\frac{1}{0{,}9004} - \frac{1}{1{,}0724}\right) \Rightarrow AC - BC = CD(1{,}1106 - 0{,}9325) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC - BC = CD \cdot 0{,}1781 \Rightarrow CD = \frac{AC - BC}{0{,}1781}.$$

$AC - BC$, б. а. *AB* аралыкты тикеден-тике өлчөсөк болот, алсак, ал 12 м ге барабар болсун. Анда

$$CD = \frac{AC - BC}{0{,}1781} = \frac{AB}{0{,}1781} = \frac{12}{0{,}1781} \approx 67{,}4 \text{ (м)}.$$

Жообу: ≈ 67,4 м.

Айлананда каралган маселелерге окшош маселелер жетиштүүчө табылат. Өз алдынча маселелер түз жана чыгар.

29–30. 2-КӨЗӨМӨЛ ИШИ. КАТАЛАР ҮСТҮНДӨ ИШТӨӨ

1. Тик бурчтуу үч бурчтуктун гипотенузасы 20 см ге, тар бурчтарынан биринин синусу 0,5 ке барабар. Үч бурчтуктун катеттерин тап.
2. Тик бурчтуу үч бурчтуктун гипотенузасы 13 см ге, тар бурчтарынан биринин косинусу $\frac{5}{13}$ ке барабар. Үч бурчтуктун катеттерин тап.
3. Туюнтманы жөнөкөйлөштүр: $(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)^2 + 2\sin\alpha\cos\alpha$.
4. Жактары 1) $a=c=17$ см, $b=16$ см; 2) $a=30$ см, $b=34$ см, $c=16$ см болгон үч бурчтуктун бийиктиктерин тап.

2-ТЕСТ Өзүңдү сынап көр!

1. Тик бурчтуу үч бурчтуктун катеттеринен бири 12 см, гипотенузасы болсо экинчи катеттен 6 см ге узун. Гипотенузанын узундугун тап.
A) 15 см; B) 25 см; D) 26 см; E) 18 см.
2. Тик бурчтуу үч бурчтуктун катеттеринен бири 12 см, экинчиси болсо гипотенузадан 8 см ге кыска. Ошол үч бурчтуктун гипотенузасын тап.
A) 15 см; B) 16 см; D) 13 см; E) 25 см.
3. Тик бурчтуу үч бурчтуктун гипотенузасы 25 см, катеттери өз ара 3 : 4 катышта. Ошол үч бурчтуктун кичине катетин тап.
A) 10 см; B) 15 см; D) 9 см; E) 20 см.
4. Жактары 13 см, 14 см жана 15 см болгон үч бурчтуктун эң кичине бийиктиги канча сантиметр?
A) 11,5 см; B) 11,1 см; D) 11 см; E) 11,2 см.
5. Ромбдун диагоналдары 14 см жана 48 см ге барабар. Ошол ромбдун периметрин тап.
A) 60 см; B) 100 см; D) 80 см; E) 120 см.
6. Ромбдун периметри 68 см, диагоналдарынан бири 30 см ге барабар. Анын экинчи диагоналын тап.
A) 12 см; B) 8 см; D) 16 см; E) 20 см.
7. Тик бурчтуу үч бурчтуктун катеттеринен бири $5\sqrt{3}$ см ге, анын каршысындагы бурч болсо 60° ка барабар. Үч бурчтуктун гипотенузасын тап.
A) $5\sqrt{3}$ см; B) $2\sqrt{15}$ см; D) 5 см; E) 10 см.
8. Тик бурчтуу үч бурчтуктун катеттеринен бири $5\sqrt{3}$ см, ага кыналган бурч болсо 30° ка барабар. Ошол үч бурчтуктун экинчи катетин тап.
A) $5\sqrt{3}$ см; B) $2\sqrt{15}$ см; D) 5 см; E) 10 см.
9. Тик бурчтуу ABC ($\angle C=90°$) үч бурчтуктун гипотенузасы 17 см ге, катеттери болсо 15 см жана 8 см ге барабар. A бурчтун синусун тап.
A) $\frac{8}{15}$; B) $\frac{8}{17}$; D) $\frac{17}{15}$; E) $\frac{15}{17}$.

10. Тик бурчтуу ABC ($\angle C=90°$) үч бурчтуктун гипотенузасы 37 см ге, катеттери болсо 12 см жана 35 см ге барабар. B бурчтун косинусун тап.

A) $\frac{12}{37}$; B) $\frac{35}{37}$; D) $\frac{12}{35}$; E) $\frac{35}{12}$.

Англис тилин үйрөнөбүз!

Пифагор теоремасы – Pythagorean theorem
Тескери теорема – inverse function theorem
Тригонометрия – trigonometry
Гипотенуза – hypotenuse

Синус – sine   Тескери
Косинус – cosine
Тангенс – tangent
Котангенс – cotangent

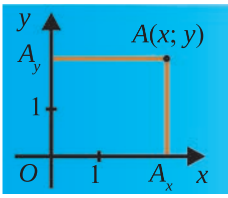
Тарыхый маалыматтар

Пифагор
(б. з. ч.
570–500-ж.)

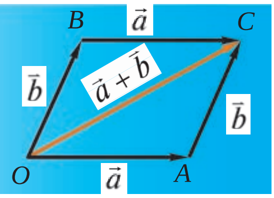
Байыркы грек ойчулу жана математиги **Пифагор** б. з. ч. VI кылымдын экинчи жарымында (б. з. ч. 570–500-жж.) Эгей деңизинин Самос аралында төрөлгөн жана Тарентте кайтыш кылган деп божомолдонот. Пифагор Түштүк Италиянын гректердин колониясы болгон Кротон шаарына (болжолдуу б. з. ч. 530-ж.) көчүп келип, ошол жерде өзүнүн мектебине негиз салган. Бул мектеп жүргүзгөн геометриялык текшерүү иштеринин натыйжалары жөнүндө кийинчерээк өткөн грек математиктеринин чыгармаларынан гана билебиз. Пифагор жасаган геометриялык иштердин өзү бизге чейин жетип келбеген.

Пифагор биринчи болуп сандарды жуп жана так, жөнөкөй жана татаал сандарга ажыраткан. Анын мектебинде «Пифагор сандары» дейилген натуралдык сандардын үчилтиги толук карап чыгылган. Пифагор теоремасы көптөгөн геометриялык эсептөөлөрдүн негизин түзөт. Учурда Пифагор теоремасынын жүздөн ашуун далилдери бар. Алардан кээ бирлери квадраттарды бөлүктөргө бөлүүгө негизделген, мында катеттерге түзүлгөн квадраттардын бөлүктөрүнөн гипотенузага түзүлгөн квадрат алынган; башкалары барабар фигураларга толуктоого негизделген; үчүнчүлөрү болсо тик бурчтун чокусунан гипотенузага түшүрүлгөн бийиктик тик бурчтуу үч бурчтукту эки окшош үч бурчтукка бөлүшүнө негизделген.

Байыркы Вавилондо тең капталдуу үч бурчтуктун каптал жагы менен негизинин узундугу боюнча анын бийиктиги табылган. Кээ бир булактар боюнча, Пифагордун мектебинде түз сызыктуу фигураларды окшош фигураларга бөлүүнүн геометриялык усулдарынан теоремаларды далилдөөдө жана маселелер чыгарууда пайдаланылган. Анткени түз сызыктуу фигураларды геометриялык алмаштыруу маселеси практикалык иштерден келип чыккан.



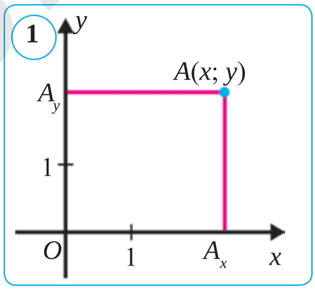
III ГЛАВА
КООРДИНАТАЛАР УСУЛУ. ВЕКТОРЛОР

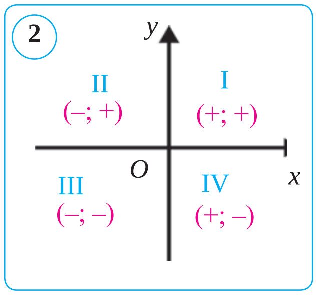


7-§. ТЕГИЗДИКТЕ КООРДИНАТАЛАР СИСТЕМАСЫ

31. ТЕГИЗДИКТЕ ЧЕКИТТИН КООРДИНАТАЛАРЫ. КЕСИНДИ ОРТОСУНУН КООРДИНАТАЛАРЫ

1. Тегиздикте чекиттин координаталары. Тегиздикте өз ара перпендикуляр *x* жана *y* окторун жүргүзөбүз. Алардын кесилишүү чекитин *O* тамгасы менен белгилейли. Бул чекитти ар бир ок үчүн эсептин башы деп, ар бир окто өз ара барабар бирдик кесиндини алабыз. *Ox* огундагы багыт «солдон оңго», *Oy* огундагы багыт болсо «ылдыйдан жогоруга» болот (1-сүрөт). Бул учурга тегиздикте *xOy* тик бурчтуу координаталар системасы аныкталган, дейилет. Бул системаны француз окумуштуусу ***Рене Декарт*** киргизгендиктен, ***Декарт координаталар системасы*** да дейилет. *Ox* огуна ***абсциссалар*** огу (же *x* огу), *Oy* огуна болсо ***ординаталар огу*** (же *y* огу) дейилет. Абсциссалар огу горизонталдуу, ординаталар огу вертикалдуу жайлашкан. Декарт координаталар системасы жаткан тегиздикке ***координаталар тегиздиги*** дейилет.





A – координата тегиздигинде алынган каалагандай чекит болсун. *A* чекитинен *Ox* жана *Oy* окторуна параллель түз сызыктар жүргүзөбүз. Алар *Ox* жана *Oy* октору *A(x; y)* менен, тиешелүү түрдө, *Ax* жана *Ay* чекиттеринде кесилишет, дейли (1-сүрөткө к.). AA_x кесиндинин узундугу *x*, AA_y кесиндинин узундугу *y* болсун. *x* санына *A* чекитинин ***абсциссасы***, *y* санына *A* чекитинин ***ординатасы*** дейилет.

x жана *y* сандар жубуна *A* ***чекитинин координаталары*** дейилет жана ***A(x; y)*** сыяктуу белгиленет. Координаталарды туюнтууда биринчи абсцисса, андан кийин ордината жазылат.

Ошентип: 1) координата тегиздигинде ар бир *A* чекитке сандар жубу (*x; y*) туура келет; 2) каалагандай сандар жубу (*x; y*) на координата тегиздигиндеги каалагандай *A* чекиттин координаталары деп айтууга болот; 3) эгерде $x \neq y$ болсо, анда (*x*; *y*) жана (*y*; *x*) жуптуктар координата тегиздигинде түрдүү чекиттерди туюнтат.

Координатанын башы – *O* чекитинин координаталарынан *O(0; 0)* турат. *Ox* огундагы каалагандай *B* чекитинин координатасы *B(x; 0)*, *Oy* огундагы каалагандай *C* чекитинин координатасы *C(0; y)* көрүнүшүндө болот.

Ox жана *Oy* октору тегиздикти төрт тик бурчка бөлөт, аларга ***координатанын чейректери*** же ***координата бурчтары*** дейилет. Координатанын чейректери рим цифралары менен белгиленет жана алар сааттын жебелерине каршы багыт боюнча номерленет. Чекит координаталарынын чейректердеги белгилери 2-сүрөттө көрсөтүп өтүлгөн.

Геометриялык фигуралар жана алардын касиеттерин координаталарда колдоп үйрөнүүнү карап көрөбүз.

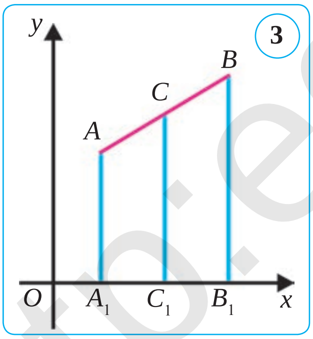
2. Кесинди ортосунун координаталары.

Теорема.

Кесинди ортосунун координаталары төмөнкү формулалар менен эсептелет: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$,

Бул жерде $A(x_1; y_1)$ жана $B(x_2; y_2)$ – кесиндинин чокулары, $C(x; y)$ – кесиндинин ортосу.

Далил. *C* чекитинин *x* жана *y* координаталарын табабыз. *AB* кесинди *Ox* огун кеспеген болсун, б. а. $x_1 < x_2$ учурду карап көрөбүз (3-сүрөт). *Ox* огуна AA_1, BB_1 жана CC_1 перпендикуляр түз сызыктарды жүргүзөбүз. $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$ жана перпендикулярлардын негиздери $A_1(x_1;\ 0)$, $B_1(x_2;\ 0)$ жана $C_1(x;\ 0)$ координаталарга ээ экендиги анык. C чекити AB кесиндинин ортосу болгондуктан, Фалестин теоремасы боюнча, C_1 чекити A_1B_1 кесиндинин ортосу болот жана демек, $A_1C_1 = C_1B_1$, б. а. $x_2 - x = x - x_1$. Мындан төмөнкү формуланы табабыз: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$.



$x_1 = x_2$, б. а. *AB* кесинди *Oy* огуна параллель болсо, анда үч чекит – A_1, B_1 жана C_1 бирдей абсциссага ээ болот. Демек, формула бул учурда да орундуу боло берет.

$x_1 > x_2$ болгон учурда жогорудагы натыйжаны алабыз (муну өз алдынча текшерүүнү өзүңө калтырабыз). *C* чекитинин ординатасы да ушуга окшош табылат. *A*, *B* жана *C* чекиттери аркылуу *Oy* огуна перпендикуляр түз сызыктар жүргүзүлөт. Төмөнкү формула алынат: $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

Маселе. Чокулары $A(-2;\ 1)$, $B(0;\ 4)$, $C(4;\ 1)$ жана $D(2;\ -2)$ чекиттеринде болгон *ABCD* төрт бурчтугунун параллелограмм экендигин далилде.

Чыгаруу. Параллелограммдын белгиси боюнча, төрт бурчтуктун диагоналдары кесилишүү чекитинде барабар экиге бөлүнсө, бул төрт бурчтуктун параллелограмм болушу белгилүү. Берилген *ABCD* төрт бурчтугунун *AC* жана *BD* диагоналдары

$$x = \frac{-2+4}{2} = 1, \quad y = \frac{1+1}{2} = 1.$$

BD кесиндинин ортосу төмөнкү координатага ээ:

$$x = \frac{0+2}{2} = 1, \quad y = \frac{4+(-2)}{2} = 1.$$

Ошентип, *AC* жана *BD* диагоналдарынын кесилишүү чекити жалпы; (1; 1) координатага ээ экен. Демек, параллелограммдын белгиси боюнча, *ABCD* төрт бурчтугу параллелограмм. Ушуну далилдөө талап кылынган эле.

Суроо, маселе жана тапшырмалар

1. 1) Координата октору жана алардын кесилишкен чекити кандай аталат?
2) Координаталар тегиздиги деп эмнеге айтылат? Тегиздиктеги чекиттин координаталары дегенде эмнени түшүнөсүң?

2. *A(4; -5)* чекитинен координаталар окторуна перпендикулярлар жүргүзүлгөн. Ошол перпендикулярлар негизинин координаталарын жаз.

3. Эгерде: 1) $x = -4$, $y = -6$; 2) $x = -3$, $y = 5$; 3) $x > 0$, $y < 0$; 4) $x > 0$, $y > 0$ болсо, $A(x; y)$ чекитинин кайсы чейректе жатышын аныкта.

4. Эгерде: 1) $A(-12; -3)$, $B(-8; 1)$; 2) $A(4; -11)$, $B(-4; 0)$ болсо, анда *AB* кесинди ортосунун координаталарын тап.

5. *C* чекит – *AB* кесиндинин ортосу. Эгерде: $A(2; -3)$, $C(0{,}5; 1)$ болсо, анда *B* чекитинин координаталарын тап.

6. $A(-4; 0)$, $B(-2; -2)$, $C(0; -6)$ жана $D(-2; -4)$ чекиттери берилген. *ABCD* төрт бурчтугунун параллелограмм экендигин далилде.

7. Эгерде: 1) $A(-6; 2)$, $B(4; 4)$; 2) $A(-8; -4)$, $B(-1; 3)$ болсо, анда AB кесинди ортосунун координаталарын тап.

8. *C* чекити – AB кесиндинин ортосу, D чекити болсо BC кесиндинин ортосу. Эгерде: 1) 1) $A(-3; 3)$, $B(5; -1)$; 2) $A(-2; -1)$, $C(2; 3)$ болсо, анда *D* чекитинин координаталарын тап.

Билип койгон пайдалуу!

Жердин бетиндеги чекиттин географиялык узундугу менен кеңдигине ошол чекиттин ***географиялык координаталары*** дейилет. Жердин бетиндеги ар бир чекитке эки сан – анын географиялык узундугу жана кеңдиги коюлат жана тескерисинче, эки сан – географиялык узундук менен кеңдик боюнча жердин бетиндеги белгилүү бир чекит табылат. Мында параллель жана меридиандар тик бурчтуу координаталар системасындагы абсцисса жана ордината окторунун милдетин аткарат.

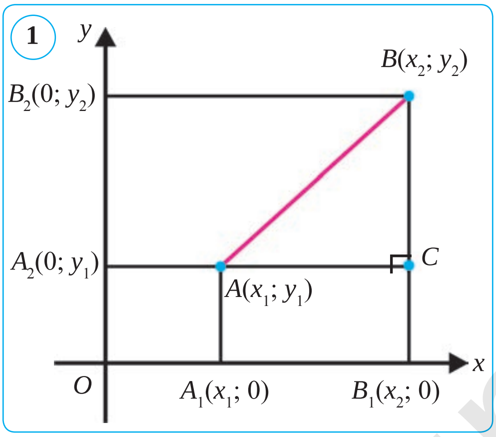
Мисалы, Ташкент шаары 069,20 чыгыш узундукта ≈ 69° жана 041,26 түндүк кеңдикте ≈ 41°, Самарканд шаары болсо 066,93 түштүк узундукта ≈ 67° жана 039,65 түндүк кеңдикте ≈ 40° жайлашкан.

32–33. ЭКИ ЧЕКИТТИН ОРТОСУНДАГЫ АРАЛЫК. АЙЛАНАНЫН ТЕҢДЕМЕСИ

1. Эки чекиттин ортосундагы аралык.

Т еорема.

$A(x_1;\ y_1)$ жана $B(x_2;\ y_2)$ чекиттеринин ортосундагы аралык төмөнкү формулалар боюнча эсептелет: $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.



Далил. Адегенде $x_1 \neq x_2$ жана $y_1 \neq y_2$ учурду карап көрөбүз. Берилген A жана B чекиттер аркылуу координаталар окторуна перпендикуляр жүргүзөбүз жана алардын кесилишүү чекитин C менен белгилейбиз (1-сүрөт). A жана C чекиттеринин ортосундагы аралык $|x_2-x_1|$ ге, B жана C, чекиттерини ортосундагы аралык $|y_2-y_1|$ ге барабар. Тик бурчтуу ABC үч бурчтугуна Пифагор теоремасын колдонуп табабыз: $AB^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$ же $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$. (1)

Чекиттердин ортосундагы аралыктын формуласы $x_1 \neq x_2$ жана $y_1 \neq y_2$ учур үчүн карап чыгылган болсо да, ал башка учурлар үчүн да өзүнүн күчүн сактайт. Чындыгында да, $x_1=x_2$ жана $y_1 \neq y_2$ болсо, анда $AB=|y_2-y_1|$ (1) формула да ошол натыйжаны берет. $x_1 \neq x_2$ жана $y_1=y_2$ учур да ушуга окшош каралат. $x_1=x_2$ жана $y_1=y_2$ учурда A жана B чекиттер үстү-үстүнөн түшөт жана (1) формула $AB=0$ чекитин берет

1-маселе. Чокулары $A(-2;\ 1)$, $B(0;\ 4)$, $C(4;\ 1)$ жана $D(2;\ -2)$ чекиттеринде болгон $ABCD$ төрт бурчтугунун параллелограмм экендигин далилде.

Чыгаруу. Параллелограммдын 2-белгиси боюнча, төрт бурчтуктун карама-каршы жактары өз ара барабар болсо, анда бул төрт бурчтук параллелограмм болушу белгилүү. Берилген $ABCD$ төрт бурчтугунун жактарынын узундуктарын табабыз:

$$AB=\sqrt{(0-(-2))^2+(4-1)^2}=\sqrt{13}\ ;\quad BC=\sqrt{(4-0)^2+(1-4)^2}=\sqrt{25}=5;$$

$$CD=\sqrt{(2-4)^2+(-2-1)^2}=\sqrt{13}\ ;\quad AD=\sqrt{(2-(-2))^2+(-2-1)^2}=\sqrt{25}=5\ .$$

Ошентип, $AB=CD$ жана $BC=AD$, б. а. параллелограмм белгиси боюнча $ABCD$ төрт бурчтугу – параллелограмм.

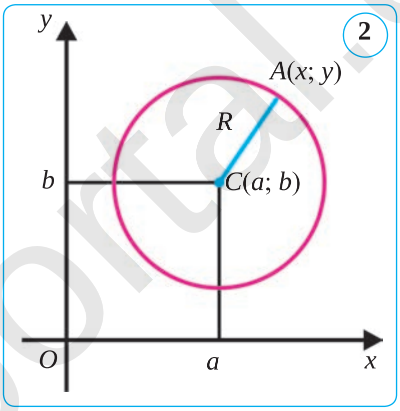
2. Тегиздикте фигуранын теңдемеси. Тегиздикте фигуранын Декарт координаталар системасындагы теңдемеси деп, фигурага тиешелүү ар кандай чекиттин координаталарын канааттандырган эки *x, y* белгисиздүү теңдемеге айтылат. Тескерисинче, бул теңдемени канааттандырган ар кандай эки сан фигуранын каалагандай чекитинин координаталары болот.

3. Айлананын теңдемеси.

Теорема.

Тик бурчтуу координаталар системасында борбору *C(a; b)* чекитинде, радиусу болсо *R* ге барабар айлананын теңдемеси төмөнкү көрүнүшкө ээ: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

Далил. Тик бурчтуу координаталар системасында борбору *C(a; b)* чекитинде болгон *R* ($R > 0$) радиустуу айлана берилген болсун (2-сүрөт). Айланада каалагандай *A(x; y)* чекитин алабыз. Айлананын аныктамасы боюнча, айлананын борборунан айлананын каалагандай чекитине чейин болгон аралык *R* ге, б. а. $CA = R$ ге жана демек, $CA^2 = R^2$ ка барабар. Бул теңдемени координаталар көрүнүшүндө жазып, төмөнкүнү табабыз:



$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2. \qquad (2)$$

A – айлананын каалагандай чекити. Ошондуктан (2) теңдемени айланадагы каалагандай чекиттин координаталары канааттандырат.

Тескерисинче, координаталары (2) теңдемени канааттандырган ар кандай *A* чекит айланага тиешелүү болот, анткени андан *C* чекитке чейинки аралык *R* ге барабар. Мындан (2) теңдеме чындыгында да борбору *C* чекитинде жана радиусу *R* ден турган айлананын теңдемеси экендиги келип чыгат. Ошентип, фигура теңдемесинин аныктамасындагы эки талап да аткарылат. Теорема далилденди.

Натыйжа. Борбору координаталардын башында, радиусу R болгон айлананын теңдемеси төмөнкү көрүнүшкө ээ: $x^2+y^2=R^2$.

2-маселе. $x^2-4x + y^2+2y - 11=0$ теңдеме менен берилген айлана борборунун координаталары менен радиусун аныкта.

Чыгаруу. Берилген теңдемени $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ көрүнүшкө келтиребиз. x^2-4x-i $(x-2)^2-4$ көрүнүштө, y^2+2y ти болсо $(y+1)^2-1$ көрүнүштө жазып алабыз. Бул туюнтмаларды берилген теңдемеге коюп, алабыз:

$$(x-2)^2-4+(y+1)^2-1-11=0 \text{ же } (x-2)^2+(y+1)^2=4^2.$$

Бул теңдеме борбору C(2; -1) чекитинде жана радиусу 4 болгон айлананын теңдемесин берет.

Жообу: (2; 1), $R=4$.

Суроо, маселе жана тапшырмалар

1. 1) Чекиттердин ортосундагы аралык алардын координаталары аркылуу кандайча туюнтулат?

? 2) Фигуранын Декарт координаталар системасындагы теңдемеси эмне? Координаталар тегиздигинде айлананын теңдемеси кандай көрүнүштө берилет?

2. Эгерде: 1) $A(-3;\ 8)$, $B(5;\ 2)$; 2) $A(8;\ -1)$, $B(-7;\ 7)$; 3) $A(5;\ 0)$, $B(0;\ -12)$ болсо, анда AB кесиндинин узундугун тап.

3. Эгерде: 1) $A(2; 1)$ жана $B(x; -2)$ чекиттеринин ортосундагы аралык 5 ке; 2) $A(x;\ 0)$ жана $B(2;\ -1)$ чекиттеринин ортосундагы аралык 1 ге барабар болсо, анда x ти тап.

4. Эгерде $A(-1;\ 2)$, $B(2;\ 6)$ we $C(5;\ 2)$) болсо, анда ABC үч бурчтугунун периметрин тап.

5. Эгерде: 1) $C(7;\ 11)$, $R=5$; 2) $C(-2;\ 3)$, $R=1$ болсо, анда борбору C чекитинде, радиусу R болгон айлананын теңдемесин түз.

6. Төмөнкү теңдеме менен берилген айлана борборунун координаталарын жана радиусун аныкта: 1) $(x-2)^2+(y-5)^2=7^2$; 2) $(x+1)^2+(y-5)^2=4$.

7. 1) $x^2-6x+y^2+2y-6=0$; 2) $x^2+y^2+10y+24=0$ теңдеме менен берилген айлана борборунун координаталарын жана радиусун аныкта.

8. Эгерде үч бурчтуктун чокулары: 1) $A(0;\ 0)$, $B(0;\ 2)$ жана $C(2;\ 0)$; 2) $(1;\ 0)$, $B(2;\ \sqrt{3})$ жана $C(8;\ 0)$ болсо, анда ABC үч бурчтугунун түрүн аныкта.

9. Эгерде: 1) $C(9;\ 4)$, $R=7$; 2) $C(-3;\ -4)$, $R=2$ болсо, анда борбору C чекитинде, радиусу R болгон айлананын теңдемесин түз.

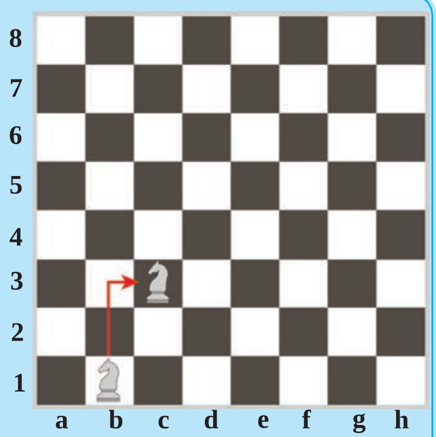
10. Төмөнкү теңдеме менен берилген айлана борборунун координаталарын жана радиусун аныкта: 1) $(x-7)^2+(y+2)^2=25$; 2) $(x-4)^2+y^2=1$.

11. $x^2+y^2=100$ теңдеме менен берилген айланада: 1) абсциссасы 8 ге барабар; 2) ординатасы –6 га барабар чекиттерди тап.

Билип койгон пайдалуу!

Шахмат (фарсча шахмат – шах жеңилди) Спорттун түрү болуп, оюндун максаты душмандын шахын мат кылуудан турат. Эки түстөгү (ак жана кара) 64 чакмактуу тактайда 16 дан (бирден шах жана ферзь; 2 ден офицер, пил жана ат; 8 ден жөө аскер) фигура менен ойнолот.

Шахмат партиясынын жазылышынан сен шахматчылардын оюн учурунда жүргөн бардык фигураларды окуй алсаң болот. Мисалы, ат b1-c3 деген жазуу аттын b1 чакмактан c3 чакмакка жасаган кыймылын билдирет. Булардын бардыгы шахмат тактайындагы координаталар системасын түзөт.



b1-c3

34. ТҮЗ СЫЗЫКТЫН ТЕҢДЕМЕСИ. ГЕОМЕТРИЯЛЫК МАСЕЛЕЛЕР ЧЫГАРУУНУН КООРДИНАТАЛАР УСУЛУ

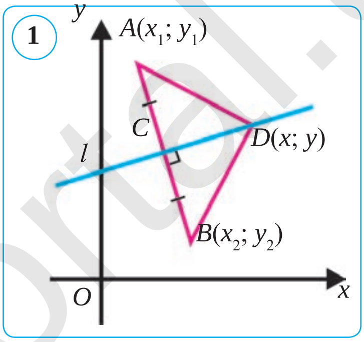
1. Түз сызык теңдемеси.

Теорема.

Түз сызыктын тик бурчтуу координаталар системасындагы теңдемеси төмөнкү көрүнүшкө ээ:

$$ax+by+c=0, \qquad (1)$$

мында *a, b, c* – каалагандай сандар, *a* жана *b* сандарынан бири нөлгө барабар эмес.



Далил. l түз сызык тик бурчтуу координаталар системасындагы каалагандай түз сызык болсун. l ге перпендикуляр каалагандай түз сызыкты жүргүзөбүз жана ага l түз сызык менен кесилишкен чекити C дан баштап барабар CA жана CB кесиндилерин коёбуз (1-сүрөт). x_1, y_1 – A чекитинин координаталары, ал эми x_2, y_2 – B чекитинин координаталары болсун. Ортоңку перпендикуляр l түз сызыгында жаткан каалагандай $D(x;\ y)$ чекит A жана B чекиттеринен барабар алыстыкта болот, б. а. $DA = DB$, мындан $DA^2 = DB^2$. Бул барабардыкты координаталарда жазып, төмөнкүнү алабыз: $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=(x-x_2)^2+(y-y_2)^2$. (2)

Кашаанын ичиндеги туюнтмаларды квадратка көтөрүп жана теңдемедеги окшош мүчөлөрдү тегеректегенден кийин, (2) теңдеме төмөнкү көрүнүшкө келет: $2(x_2-x_1)x+2(y_2-y_1)y+(x_1^2+y_1^2-x_2^2+y_2^2)=0$. (3)

x_1, y_1, x_2, y_2 – каалагандай сандар, Ошол себептүү $2(x_2-x_1)=a$, $2(y_2-y_1)=b$ жана $x_1^2+y_1^2-x_2^2+y_2^2=c$ деп белгилеп, аларды (3) теңдемеге коюп:

$$ax+by+c=0$$

теңдемени алабыз, мында a, b жана c – каалагандай сандар.

D – l түз сызыгындагы каалагандай чекит, ошондуктан (*1*) теңдемени берилген түз сызыктагы каалагандай чекитинин координатасы канааттандырат.

Кандайдыр D_0 чекитинин x_0 жана y_0 координаталары (1) теңдемени канааттандырсын. Анда $D_0A=D_0B$, б.а. D_0 чекити A жана B чекиттеринен бирдей алысташкан болот, демек, AB кесиндинин ортоңку перпендикуляры l түз сызыгына тиешелүү болот. A жана B – түрдүү эки чекит болгондуктан, (x_2-x_1) же (y_2-y_1) айырмалардан бири, б. а. a жана b сандарынан бири нөлгө барабар эместигин эскерте кетебиз.

1-маселе. $A(1;\ -1)$ жана $B(-3;\ 2)$ чекиттеринен өткөн түз сызыктын теңдемесин түз.

Чыгаруу. AB түз сызыгынын теңдемеси $ax+by+c=0$ көрүнүштө туюнтулушун билебиз. A жана B чекиттер AB түз сызыгында жатат, демек, алардын координаталарын түз сызыктын теңдемесине коюп, төмөнкү теңдемелерди алабыз:

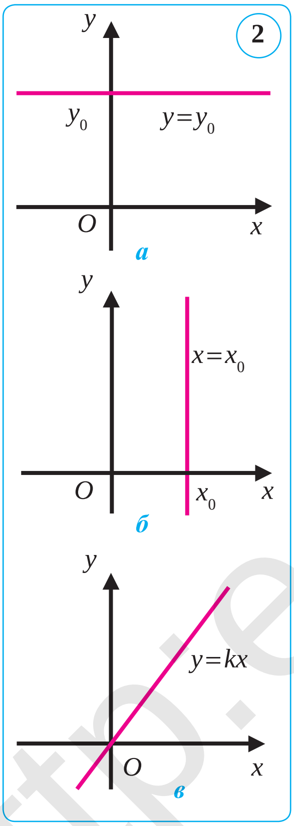
$$a\cdot 1+b\cdot(-1)+c=0,\quad a\cdot(-3)+b\cdot 2+c=0 \text{ же}$$
$$a-b+c=0,\ -3a+2b+c=0.$$

Бул теңдемелерден a жана b коэффициенттерди c аркылуу туюнтабыз: $a = 3c$, $b = 4c$. a жана b нын бул маанилерин түз сызыктын теңдемесине коюп, табабыз: $3cx+4cy+c=0$, мында $c\neq 0$.

Бул теңдеме AB түз сызыгынын теңдемеси болот. Жогорудагы теңдемени c га кыскартып, төмөнкү көрүнүшкө келтиребиз: $3x+4y+1=0$.

Бул теңдеме изделген түз сызыктын теңдемеси болот.

2. Түз сызыктын координаталар системасына салыштырмалуу жайлашуусу.



Эми $ax+by+c=0$ түз сызыгы теңдемесинин үч жеке учурун карап көрөбүз. Ар бир учур үчүн түз сызыктын координаталар octoруна салыштырмалуу кандай жайлашканын аныктайбыз.

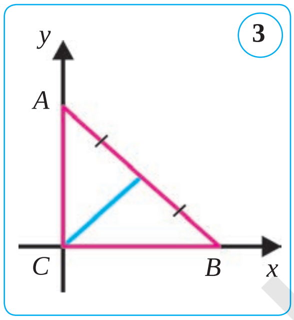
1-учур. $a=0$, $b\neq 0$. Бул учурда түз сызыктын теңдемесин $by+c=0$ же $y=y_0$ көрүнүштө жазууга, болот, мында $y_0=-\frac{c}{b}$ – каалагандай сан. $y=y_0$ түз сызыгынын бардык чекиттери бирдей ординатага ээ, демек, ал абсциссалар огуна параллель (2-*а* сүрөт). Эгерде $c=0$ болсо, анда аны менен үстү-үстүнөн түшөт. $y=0$ – абсциссалар огунун теңдемеси.

2-учур. $a\neq 0$, $b=0$. Бул учурда түз сызыктын теңдемесин $ax+c=0$ же $x=x_0$ көрүнүштө жазууга болот $x_0=-\frac{c}{a}$ – каалагандай сан. $x=x_0$ түз сызыгынын бардык чекиттери бирдей абсциссага ээ, демек, ал ординаталар огуна параллель (2-*б* сүрөт). Эгерде $c=0$ болсо, анда аны менен үстү-үстүнөн түшөт. $x=0$ – абсциссалар огунун теңдемеси.

3-учур. $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c=0$. Бул учурда түз сызыктын теңдемесин $ax+by=0$ же $y=kx$ көрүнүштө жазууга болот, мында $k=-\frac{a}{b}$ – каалагандай сан. $y=kx$ түз сызык координаталардын башталышынан өтөт (2-*в* сүрөт).

3. Геометриялык маселелерди чыгаруунун координаталар усулу. Көптөгөн геометриялык маселелерди кесинди ортосунун координаталары жана эки чекиттин ортосундагы аралыкты эсептөө формулаларынан пайдаланып чыгарууга болот. Ошол максатта тик бурчтуу координаталар системасын киргизүү жана маселенин шартын координаталарда жазып алуу керек. Андан кийин маселе алгебралык эсептөөлөр жардамында чыгарылат.

2-маселе. Тик бурчтуу үч бурчтукта гипотенузанын ортосу бардык чокуларынан барабар алыстап жайгашкан. Ошону далилде.



Чыгаруу. Тик бурчтуу ABC ($\angle C=90°$) бурчтугун карап көрөбүз. AB кесиндинин ортосун D тамгасы менен белгилейбиз. 3-сүрөттө көрсөтүлгөндөй, тик бурчтуу координаталар системасын киргизебиз. Эгерде $BC=a$, $AC = b$ болсо, анда үч бурчтуктун чокулары $C(0;\ 0)$, $B(a;\ 0)$ жана $A(0;\ b)$ координаталарга ээ болот. Кесинди ортосунун координаталары формуласы боюнча, D чекитинин координаталарын табабыз: $D(0,5a;\ 0,5b)$.

Чекиттердин ортосундагы аралыкты табуу формуласынан пайдаланып, DC жана DA кесиндилеринин узундуктарын табабыз:

$$DC = \sqrt{(0,5a)^2 + (0,5b)^2} = \sqrt{0,25\left(a^2 + b^2\right)} = 0,5\sqrt{a^2 + b^2};$$

$$DA = \sqrt{(0,5a)^2 + (0,5b - b)^2} = \sqrt{0,25a^2 + 0,25b^2} = \sqrt{0,25\left(a^2 + b^2\right)} = 0,5\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Ошентип, $DA = DB = DC$ экен. Ушуну далилдөө талап кылынган эле.

Суроо, маселе жана тапшырмалар

1. 1) Түз сызыктын тик бурчтуу координаталар системасында $ax+by+c=0$ көрүнүштөгү теңдемеге ээ болушун далилде.
?
2) Түз сызыктын $ax+by+c=0$ теңдемесинде $a=0$ ($b=0$; $c=0$) болсо, анда түз сызык кандай жайлашат?

2. $A(3;\ -1)$, $B(-3;\ 0)$, $C(12;\ 5)$, $D(3;\ 0)$ жана $E(-9;\ -2)$ чекиттеринин кайсылары $x–3y+3= 0$ теңдеме менен берилген түз сызыкка тиешелүү, кайсылары тиешелүү эмес?

3. 1) $A(1;\ 7)$ жана $B(-3;\ -1)$; 2) $A(2;\ 5)$ жана $B(5;\ 2)$; 3) $A(0;\ 1)$ жана $B(-4;\ -5)$ Чекиттеринен өткөн түз сызыктын теңдемесин түз.

4. $x+y+c=0$ түз сызыгы $(1;\ 2)$ чекитинен өтсө, анын теңдемесиндеги c коэффициент эмнеге барабар?

5. Эгерде $ax+by-1=0$ түз сызыгынын $(1;\ 2)$ жана $(2;\ 1)$ чекиттеринен өтүшү белгилүү болсо, анда анын теңдемесиндеги a жана b коэффициенттер эмнеге барабар?

6. 1) $x+2y+3=0$; 2) $3x+4y = 12$; 3) $4x-2y-10=0$ теңдемеси менен берилген түз сызыктын координаталар октору менен кесилишүү чекиттерин тап.

7. Эгерде: 1) $A(3;\ -1)$, $B(5;\ 5)$; 2) $A(3;\ 6)$, $B(-5;\ -2)$ болсо, анда $C(4;\ 2)$ чекити AB кесиндинин ортосу болуш же болбостугун текшер.

8. $A(0;-2)$, $B(4;2)$, $C(-4;\ -5)$ чекиттеринин кайсылары $8x-4y-8=0$ теңдеме менен берилген түз сызыкка тиешелүү, кайсылары тиешелүү эмес?

9. Эгерде $A(-1;\ -1)$, $B(-1;\ 3)$ жана $C(2;\ 2)$ болсо, анда ABC үч бурчтугунун жактарын өзүндө камтыган түз сызыктардын теңдемесин түз.

8-§. ТЕГИЗДИКТЕ ВЕКТОРЛОР

35. ВЕКТОР ТҮШҮНҮГҮ. ВЕКТОРДУН УЗУНДУГУ ЖАНА БАГЫТЫ

1. Вектордук чоңдуктар. Вектор. Сага белгилүү болгон чоңдуктар эки көрүнүштө болушу мүмкүн. Кээ чоңдуктар да болуп, алар өздөрүнүн сандык маанилери менен (берилген чен бирдигинде) толук аныкталат. Мисалы, узундук, аянт жана оордук ошолордун катарына кирет.

1-аныктама. *Сандык мааниси менен гана аныкталган чоңдуктарга **скалярдык чоңдуктар** дейилет.*

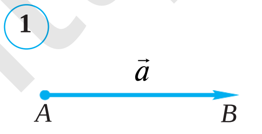
Дагы ушундай чоңдуктар да болуп, аларды толук билүү үчүн ал чоңдуктарды билдирген сандык маанилеринен тышкары, алардын багыттарын да билүү зарыл. Мисалы, ылдамдык, күч, басым ошолордун катарына кирет.

Вектор геометриянын негизги түшүнүктөрүнөн бири болуп, ал сан (узундук) жана багыт менен толук аныкталат. Көргөзмөлүү болсун үчүн аны багытталган кесинди көрүнүшүндө элестетебиз. Векторлор жөнүндө сөз болгондо, бардыгы өз ара параллель бирдей узундук жана бирдей багытка ээ болгон багытталган кесиндилердин бүтүн бир классын элестеткен оң.

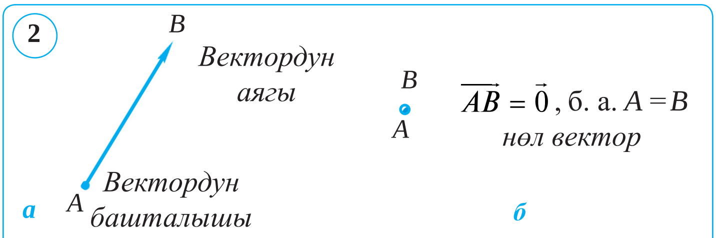
2-аныктама. *Сандык маани жана багыт менен аныкталган (мүнөздөлгөн) чоңдуктар **вектордук чоңдуктар** же **векторлор** деп аталат.*

Физика, механика жана математиканын бир гана сан менен эмес, багыты менен да мүнөздөлгөн өлчөмдөрдү текшерүүчү түрдүү маселелери вектор түшүнүгүнө алып келет. Мисалы, күч, ылдамдык – векторлор.

Вектордук чоңдуктарды биз өтө көп кездештиребиз. Мисалы, транспортто бара жатып, кыймыл ылдамдыгы, бурулуу же токтоо менен байланыштуу вектордук чоңдуктарды көп көрөсүң. Табиятты үйрөнгөн илимдерде алар ылдамдануу, инерция күчү, борбордон четтөөчү күч жана ушуга окшош аттар менен аталат. Биз вектордук чоңдуктардын табигый маанисин эсепке албаган түрдө анын математикалык табиятын үйрөнөбүз. Вектордук чоңдуктун математикалык касиеттери өзүнүн табигый маанисине ээ.



Вектор A чекитинен коюлган



Вектордун аягы

Вектордун башталышы

нөл вектор

а *б*

Вектордук чоңдуктун сандык маанисин кесинди аркылуу туюнтабыз. Ар кандай кесиндинин эки учу болот. Алардан бирин вектордун ***башталышы*** деп, экинчи учун вектордук чоңдуктун багыты боюнча багыттайбыз жана жебе (багыт) менен белгилейбиз. Буга вектордун ***учу*** дейбиз.

3-аныктама. ***Вектор*** *(вектордук чоңдук) деп, багытка ээ болгон кесиндиге айтылат.*

Вектордук чоңдук багыты көрсөтүлгөн кесинди иретинде сүрөттөлөт. Вектор кесиндинин учтары A жана B чекитинде болсо, A чекитинен B чекитине багытталган вектор $\overrightarrow{AB}$ сыяктуу белгиленет. Векторлор $\vec{a}$, $\vec{b}$ (латин алиппесинин кичине тамгасы) түрүндө да белгилениши мүмкүн (1-сүрөт).

Окулушу: $\overrightarrow{AB}$ вектор же $\vec{a}$ вектор.

1) Вектордун багыты анын башталышын жана аягын көрсөтүү менен аныкталат. Мында вектордун башталышы биринчи орунга коюлат (2-*а* сүрөт).

AB нурду аныктаган багытка $\overrightarrow{AB}$ *вектордун багыты* дейилет. Башталышы менен аягы үстү-үстүнөн түшкөн вектор *нөл вектор* деп аталат. $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ барабардык A жана B чекиттердин үстү-үстүнөн түшкөнүн билдирет (2-*б* сүрөт).

2) Векторду туюнткан кесиндинин узундугу вектордун *модулу* же *абсолюттук мааниси* деп аталат.

Вектордун модулу $|\overrightarrow{AB}|$ же $|\vec{a}|$ сыяктуу белгиленет (3-сүрөт).

$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ вектордун модулу AB кесиндинин узундугу эсептелет: $|\vec{a}| = |\overrightarrow{AB}|$. Ошондуктан геометрияда вектордун модулу же абсолюттук мааниси анын *узундугу* деп да аталат.

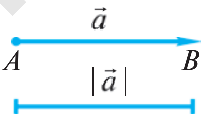
Нөл вектордун узундугу (модулу) нөлгө барабар деп эсептелет: $|\vec{0}| = 0$.

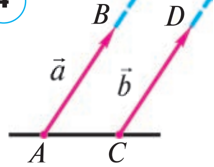
2. Векторлордун барабардыгы.

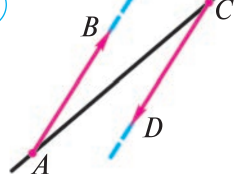
4-аныктама. *Бир түз сызыкта же параллель түз сызыктарда жаткан векторлорго* ***коллинеардуу векторлор*** *дейилет.*

$\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлорунун коллинеардуулугу $\vec{a} \parallel \vec{b}$ өңдүү белгиленет.

Эгерде параллель түз сызыктарда жаткан эки вектор алардын башталышы аркылуу өткөн түз сызыктан бир жакта жатса, *багытташ векторлор* (4-сүрөт); түз сызыкка салыштырмалуу түрдүү жактарда жатса, *карама-каршы багытталган векторлор* дейилет (5-сүрөт).

3


4


5


$\overrightarrow{AB}$ жана $\overrightarrow{CD}$ векторлор: 1) *багытташ* болсо, алар $\overrightarrow{AB}\uparrow\uparrow\overrightarrow{CD}$ сыяктуу; 2) *карама-каршы багытталган* болсо, $\overrightarrow{AB}\uparrow\downarrow\overrightarrow{CD}$ сыяктуу белгиленет.

Нөл вектор ар кандай векторго коллинеардуу эсептелет.

5-аныктама. *Эгерде $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлорунун узундуктары барабар, багыттары бирдей болсо, алар* ***барабар векторлор*** *деп аталат.*

Ошентип, эгерде $|\vec{a} = \vec{b}|$ жана $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$ болсо, $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлор барабар болот. Векторлордун барабардыгы $\vec{a} = \vec{b}$ көрүнүшүндө жазылат.

Векторлордун барабардыгы анын башаты тегиздиктин ар кандай чекитинде боло алышын көрсөтөт (6-сүрөт), б. а. вектордун модулун өзгөртпөй, багытын сактап, башатын тегиздиктин ар кандай чекитине которууга болот. Бул *векторду параллель орун которуу касиети* деп аталат.

Суроо, маселе жана тапшырмалар

1. 1) Вектор деген эмне? Векторлор кандайча белгиленет?
2) Кандай векторлор барабар болот? Кандай векторлорго бирдей (карама-каршы) багытталган векторлор дейилет? Вектордун модулу эмне?

2. *ABCD* параллелограммда (7-сүрөт): 1) $\overrightarrow{DC}$ вектор менен багытташ; 2) $\overrightarrow{AO}$ вектор менен багытташ; 3) $\overrightarrow{AD}$ векторго карама-каршы багытталган; 4) $\overrightarrow{BD}$ векторго карама-каршы багытталган; 5) $\overrightarrow{AB}$ векторго барабар; 6) $\overrightarrow{OC}$ векторго барабар; 7) $\overrightarrow{OB}$ векторго барабар векторлорду жаз.

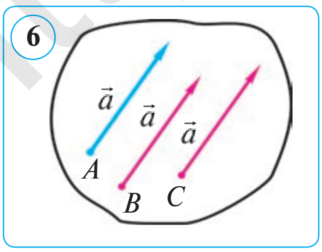
3. *ABCD* параллелограммынын диагоналдары *O* чекитте кесишет. Анын чокулары жана диагоналдары кесилишүү чекити менен белгиленген векторлорду жаз. Кайсылары: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ жана $\overrightarrow{BO}$ векторлорго коллинеардуу?

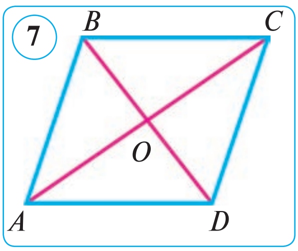
4. Эгерде: 1) $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ жана $|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{DC}|$; 2) $\overrightarrow{AD}\uparrow\uparrow\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}$ жана $\overrightarrow{DC}$ векторлор коллинеардуу эмес болсо, *ABCD* төрт бурчтугунун түрүн аныкта.

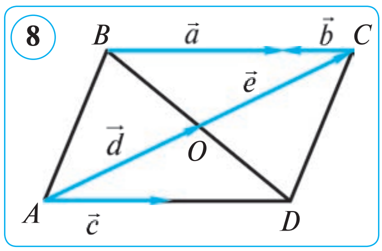
5. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ экендиги белгилүү. Ушул тастыктар туурабы:
1) $AB \parallel CD$; 2) $|AB| = |CD|$?

6. *ABCD* – параллелограмм. 8-сүрөттө берилген векторлордон: 1) коллинеардуу; 2) багытташ; 3) карама-каршы багытталган; 4) барабар узундуктарга ээ болгон векторлордун түгөйлөрүн көрсөт.

7. $\overrightarrow{AB}$ жана $\overrightarrow{BA}$ векторлорунун багыты жөнүндө эмне айтууга болот?







36–37. ВЕКТОРЛОРДУ КОШУУ ЖАНА КЕМИТҮҮ

1. Векторлорду кошуу. Бизге $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлор берилген болсун (1-*а* сүрөт). Каалагандай *A* чекитин белгилейбиз жана андан $\vec{a}$ векторго барабар $\overrightarrow{AB}$ векторун коёбуз. Соң *B* чекитинен $\vec{b}$ векторго барабар $\overrightarrow{BC}$ векторун коёбуз. Эми $\vec{a}$ вектордун башталышы *A* чекитинен $\vec{b}$ вектордун учу *C* га багытталган вектор өткөрөбүз (1-*б* сүрөт). $\overrightarrow{AC}$ *векторго* $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ *векторлорунун суммасы* дейилет. Векторлорду кошуунун бул эрежесине «*үч бурчтук* (*үч чекит*) *эрежеси*» дейилет.

$\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлорунун суммасы $\vec{a}+\vec{b}$ сыяктуу белгиленет.

Үч бурчтук эрежесин төмөнкүдөй туюнтсак да болот:

эгерде A, B, C каалагандай чекит болсо, анда төмөнкү барабардык орундуу:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

Үч бурчтук эрежеси каалагандай *A*, *B* жана *C* чекиттер үчүн, ошону менен бир катарда алардан экөөсү же үчөөсү үстү-үстүнөн түшкөндө да орундуу болушу мүмкүн (1-*в* сүрөт).

2. Векторлорду кошуунун мыйзамдары. Параллелограммдын карама-каршы жактары өз ара барабар жана параллель. Эгерде багыттары бирдей болсо, анын карама-каршы жактары барабар векторлорду туюнтат.

$\vec{a}$ жана $\vec{b}$ – коллинеардуу эмес векторлор. Каалагандай *A* чекитинен $AB=\vec{a}$ жана $AD=\vec{b}$ векторлорун коёбуз жана жактары ошол вектордон өткөн *ABCD* параллелограммын түзөбүз (2-сүрөт). Үч бурчтук эрежеси боюнча:

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{a}+\vec{b} \quad \text{жана} \quad \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\vec{b}+\vec{a}.$$

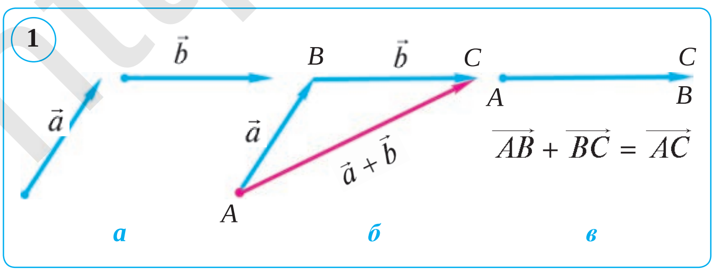
Булардан $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ келип чыгат.

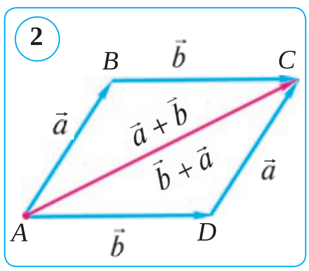
Демек, векторлордун суммасы алардын кандай тартипте удаалаш жайлашуусунан көз каранды эмес, б. а. *каалагандай* $\vec{a}$ *жана* $\vec{b}$ *векторлор үчүн төмөнкү барабардык орундуу:*

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}.$$

Буга векторлорду кошуунун *орун алмаштыруу мыйзамы* дейилет.

$\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлордон турган *ABCD* параллелограммда сумма $\overrightarrow{AC}$ вектор кошулуучу векторлордун жалпы башталышынан чыккан





диагоналдан турат. Адатта, векторлорду мындайча кошууга векторлорду кошуунун «*параллелограмм эрежеси* (*усулу*)» дейилет (2-сүрөт).

Эми үч $\vec{a}$, $\vec{b}$ жана $\vec{c}$ векторлорунун суммасын көрөлү. Каалагандай *A* чекитинен $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ векторун, *B* чекитинен $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ векторун, *C* чекитинен $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$ векторун коёбуз (3-сүрөт). Үч бурчтук эрежесин колдоп, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD};$$

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}.$$

Мындан, *каалагандай* $\vec{a}$, $\vec{b}$ жана $\vec{c}$ *векторлор үчүн*

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

барабардыгынын орундуу экендиги келип чыгат. Бул векторлорду кошуунун *топтоштуруу мыйзамы* (*касиети*) *болот*.

Векторлордун ар бири нөлдөн айырмалуу болгондо, алардын суммасы нөл вектор болушу мүмкүн.

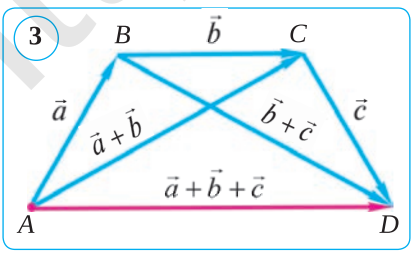
Мисалы, *ABC* үч бурчтугун көрөлү (4-сүрөт). Мында $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ жана $\overrightarrow{CA}$ векторлорунун суммасы нөл вектор болот, б. а.: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$, анткени биринчи вектордун башталышы менен үчүнчү вектордун учу үстү-үстүнөн түштү. Демек, сумма вектор нөл вектор – чекит болду.

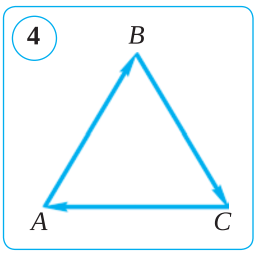
1-аныктама. *Эки вектордун суммасы нөл вектор болсо, алар* ***карама-каршы векторлор*** *деп аталат.*

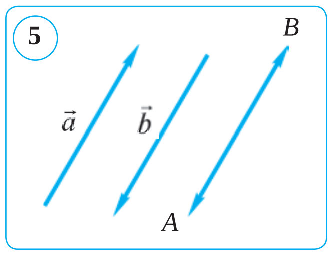
Демек, эгерде $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$ болсо, анда $\vec{b} = \overrightarrow{BA}$ векторуна $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ векторго (жана тескерисинче) *карама-каршы вектор* дейилет жана $\vec{b} = -\vec{a}$, $\vec{a} = -\vec{b}$ өңдүү жазылат (5-сүрөт). Эгерде карама-каршы векторлорду (үч бурчтук эрежеси боюнча) кошсок, анда нөл вектор келип чыгат. Мында $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлор параллель болуп, түрдүү жакка багытталган болот. Демек, *ар бир* $\vec{a}$ *вектор үчүн ага карама-каршы* $-\vec{a}$ *вектор бар* (*б. а.* $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$) *болот*. Жогорудагы пикирден төмөнкү натыйжага келебиз.

Эгерде нөл эмес эки вектордун узундуктары барабар жана алар карама-каршы багытталган болсо, аларга ***карама-каршы векторлор*** *дейилет.*

Нөл вектор өзү-өзүнө карама-каршы вектор эсептелет.







3. Векторлорду кемитүү. Векторлорду кемитүү куду сандарды кемитүү сыяктуу кошуууга тескери амал саналат.

2-аныктама. *$\vec{a}$ жана $\vec{b}$ **векторлорунун айырмасы** деп, $\vec{b}$ вектор менен суммасы $\vec{a}$ векторун берген: $\vec{c}+\vec{b}=\vec{a}$* б. а. *$\vec{c}$ векторго айтылат.*

$\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлорунун айырмасы куду сандардын айырмасы сыяктуу белгиленет: $\vec{a}-\vec{b}$. Эки вектордун айырмасы биринчи векторго экинчи векторго карама-каршы векторду кошуу иретинде аныкталат жана ал $\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$ векторго барабр (6-*б* сүрөт).

Бизге $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлор берилген болсун (6-*а* сүрөт). $\vec{a}$ вектор менен $\vec{b}$ векторго карама-каршы болгон $-\vec{b}$ вектордун суммасын көрөлү.

Ар кандай $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлор үчүн $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$ барабардык орундуу.

Чындыгында да, $\left(\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)\right)+\vec{b}=\vec{a}+\left(\left(-\vec{b}\right)+\vec{b}\right)=\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.

Эгерде $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлор бир O чекитинен коюлган болсо, анда $\vec{a}-\vec{b}$ айырманы табуу үчүн төмөнкү эрежеден пайдаланган оң (6-*в* сүрөт):

$$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}.$$

Жогоруда көрүнгөндөй, *кемитүүчү* вектордун *аягы айырма* вектордун *башталышы*, *кемүүчү* вектордун *аягы* болсо *айырма* вектордун *аягы* милдетин аткарат экен. Эрежени эсте сактоо оңой болушун камсыздоо максатында ал схемалык түрдө көрсөтүлдү.

Векторду кошууда параллелограмм усулунан пайдалансак (7-сүрөт), айырма вектор параллелограммдын экинчи диагоналынан турган болот.

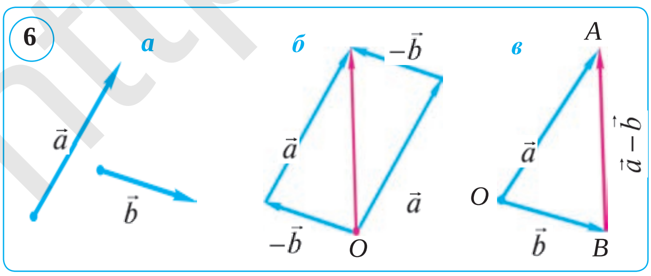
Маселе. ABC үч бурчтугу берилген. 1) $\overrightarrow{BA}$; 2) $\overrightarrow{CB}$; 3) $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}$ векторлорун $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ жана $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$ векторлору аркылуу туюнт.

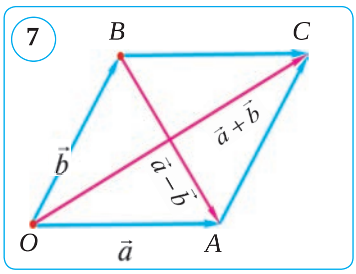
Чыгарылышы. 1) $\overrightarrow{BA}$ жана $\overrightarrow{AB}$ – карама-каршы векторлор, ошондуктан

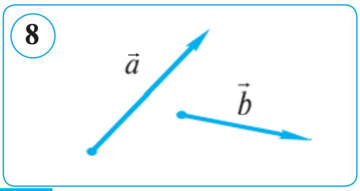
$$\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB} \text{ же } \overrightarrow{BA}=-\vec{a}.$$

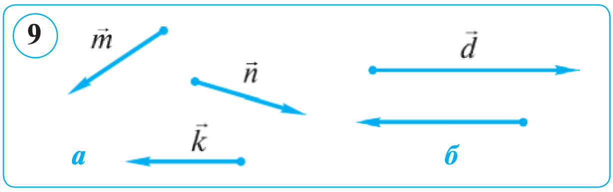
2) Үч бурчтуктун эрежеси боюнча: $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}$. Бирок $\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AC}$, ошондуктан

$$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}+\left(-\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\vec{a}-\vec{b}.$$









Суроо, маселе жана тапшырмалар

1. 1) Үч бурчтук жана параллелограмм эрежеси боюнча векторлордун суммасы кандайча табылат? Эки вектордун айырмасы деп эмнеге айтылат?
2) Берилген векторго карама-каршы вектор деп эмнеге айтылат?

2. 8-сүрөттө $\vec a$ жана $\vec b$ векторлору берилген. $\vec a+\vec b$ векторун эки усул менен түз.

3. 9-сүрөттө $\vec m$, $\vec n$ жана $\vec k$, $\vec d$ жана $\vec e$ векторлору берилген. Векторлорду түз: 1) $\vec m+\vec n+\vec k$; 2) $\vec d+\vec e$.

4. 10-сүрөттө $\vec a$, $\vec b$ жана $\vec c$, $\vec d$ жана $\vec e$ векторлору берилген. Векторлорду түз: 1) $\vec a-\vec b+\vec c$; 2) $\vec e-\vec d$.

5. *ABCD* параллелограммы берилген. $(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}$ барабардыгы аткарылабы? Текшерип көр.

6. *ABCD* ромбдо: $AD=20$ см, $BD=24$ см, O – диагоналдардын кесилишүү чекити. $|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{OB}|$ ун тап.

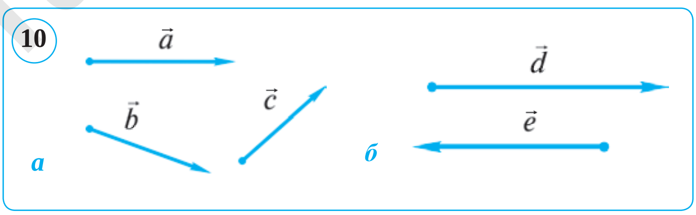
7. *ABCD* – каалагандай төрт бурчтук. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$ экенин далилде.

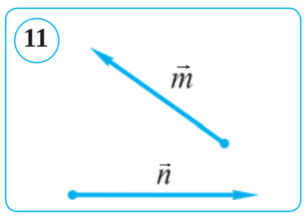
8. *ABCD* – параллелограмм. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ вектордук барабардыкты далилде (векторлорду кошуунун «*параллелограмм эрежеси*»).

9. *ABCD* параллелограммында: $\overrightarrow{CA}=\vec a$, $\overrightarrow{CD}=\vec b$. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DA}$ векторлорун $\vec a$ жана $\vec b$ векторлор аркылуу туюнт.

10. *E* жана *F* – *ABC* үч бурчтугу *AB* жана *AC* жактарынын ортолору. $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{EF}$ жана $\overrightarrow{BC}$ векторлорун $\vec a=\overrightarrow{AE}$ жана $\vec b=\overrightarrow{AF}$ векторлор аркылуу туюнт.

11. 11-сүрөттө $\vec m$ жана $\vec n$ векторлору берилген. $\vec m+\vec n$ векторун эки усул менен түз.





38–39. ВЕКТОРДУ САНГА КӨБӨЙТҮҮ. ВЕКТОРДУН КООРДИНАТАЛАРЫ

1. Векторду санга көбөйтүү. Кандайдыр $\vec{a}$ векторун алабыз жана $\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}$ суммасын табабыз (1-сүрөт). Бул сумманы $3\cdot\vec{a}$ деп белгилеп, бул туюнтманы $\vec{a}$ вектордун 3 санына көбөйтүндүсү деп атаган оң.

Аныктама. *Нөл эмес $\vec{a}$ вектордун k санга көбөйтүндүсү деп, $\vec{b}=k\cdot\vec{a}$ векторго айтылат, б. а. мында анын узундугу $|k|\cdot|\vec{a}|$ санга барабар болуп, багыты $k>0$ болгондо $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлорунун багыты бирдей, $k<0$ болгондо болсо карама-каршы болот.*

Нөл вектордун ар кандай санга көбөйтүндүсү нөл вектор эсептелет.

$\vec{a}$ вектордун k санга көбөйтүндүсү $k\vec{a}$ сыяктуу белгиленет (сан көбөйтүрүү жакка жазылат). Аныктама боюнча:

$$|k\vec{a}|=|k|\cdot|\vec{a}|.$$

Вектордун санга көбөйтүндүсү аныктамасынан төмөнкүлөр алынат: 1) *ар кандай вектордун нөлгө көбөйтүндүсү нөл вектор болот;* 2) *ар кандай сан жана ар кандай $\vec{a}$ вектор үчүн $\vec{a}$ жана $k\vec{a}$ векторлор коллинеардуу.*

Эми векторду санга көбөйтүүнүн негизги касиеттерин санап өтөбүз.

Каалагандай $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторлор жана ар кандай k, l сандар үчүн төмөнкү барабардыктар орундуу:

1°. $(k\cdot l)\vec{a}=k\cdot(l\vec{a})$ – *топтоштуруу мыйзамы.*

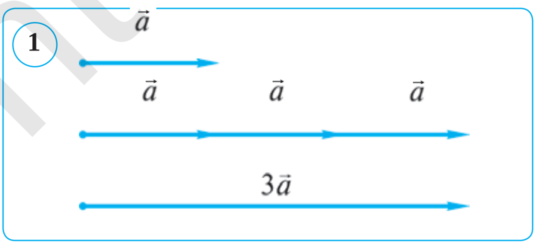
2°. $(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$ – *биринчи бөлүштүрүү мыйзамы.*

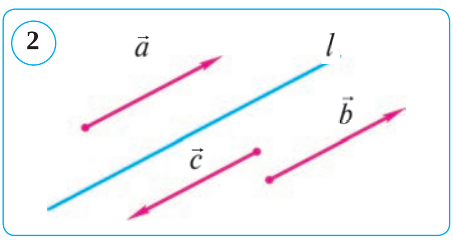
3°. $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$ – *экинчи бөлүштүрүү мыйзамы.*

4°. $k\cdot\vec{0}=0\cdot\vec{a}=\vec{0}$.

*Параллель түз сызыктардын же бир түз сызыкта жаткан эки вектордун **коллинеардуу векторлор** деп аталашын эскерте кетебиз.*

l түз сызыгы жана ага параллель болгон $\vec{a}$, $\vec{b}$ жана $\vec{c}$ векторлор берилген болсун (2-сүрөт). Аныктама боюнча, $\vec{a}$, $\vec{b}$ жана $\vec{c}$ векторлор коллинеардуу векторлор. Бул жерде $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлор бирдей багытталган, $\vec{c}$ вектору болсо $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлорго салыштырмалуу карама-каршы багытталган.





Белгилүү болгондой, векторду санга көбөйткөндө, көбөйтүндүсү вектордун багыты берилген векторго параллель болот. Мындан төмөнкүдөй маанилүү натыйжаны алабыз:

вектордун санга көбөйтүндүсү – ошол векторго коллинеардуу вектор.

Теорема.

Вектор өзүнүн модулуна барабар санга бөлүнсө, ошол векторго коллинеардуу бирдик вектор алынат.

Далил. $\vec{a}$ векторунун модулу $|\vec{a}|$ болсун. $\vec{a}$ векторунун $k = \frac{1}{|\vec{a}|}$ санга көбөйтүндүсүн көрөлү:

$$|k\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}| = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot |\vec{a}| = 1.$$

Демек, көбөйтүндү вектордун модулу бир бирдикке барабар.

Модулу бирге барабар векторду *бирдик вектор* деп атайбыз. Эгерде $\vec{a}$ вектору боюнча багытталган бирдик векторду $\vec{e}$ деп белгилесек, теорема боюнча: $\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ же бул барабардыкты $|\vec{a}|$ санга көбөйтсөк: $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{e}$.

Натыйжада биз векторлорду үйрөнүүдө чоң мааниге ээ болгон барабардыкты алдык, б. а. *ар кандай вектор ошол вектордун модулу менен өзүнө коллинеардуу бирдик вектордун көбөйтүндүсүнө барабар экен.*

1-маселе. k нын кандай маанисинде төмөнкү пикир туура:

1) $|k\vec{a}| < |\vec{a}|$; 2) $|k\vec{a}| > \vec{a}$; 3) $|k\vec{a}| = |\vec{a}|$, бул жерде $\vec{a} \neq \vec{0}$?

Чыгарылышы. 1) $\vec{a} \neq \vec{0}$ дө $|k\vec{a}| < |\vec{a}| \Leftrightarrow |k| \cdot |\vec{a}| < |\vec{a}| \Leftrightarrow |k| < 1 \Leftrightarrow -1 < k < 1$;

2) $\vec{a} \neq \vec{0}$ дө $|k\vec{a}| > |\vec{a}| \Leftrightarrow |k| \cdot |\vec{a}| > |\vec{a}| \Leftrightarrow |k| > 1 \Leftrightarrow k < -1$ же k > 1;

3) $\vec{a} \neq \vec{0}$ дө $|k\vec{a}| = |\vec{a}| \Leftrightarrow |k| \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}| \Leftrightarrow |k| = 1 \Leftrightarrow k = -1$ же k=1.

$\vec{a} \neq \vec{0}$ дө $|\vec{a}| > 0$. Бизге белгилүү болгондой, барабарсыздыктын же теңдеменин эки бөлүгүн тең оң санга бөлсөк, катыш өзгөрбөйт.

Жообу: 1) $-1 < k < 1$; 2) $k < -1$ же $k > 1$; 3) $k = -1$ же $k = 1$ де пикир туура болот.

2. Вектордун координаталары. Тегиздикте xOy Декарттын координаталар системасы, б. а. координата башталышы O чекит, координата окторунун багыты жана масштаб бирдиги – бирдик кесинди берилген. Тегиздиктеги каалагандай A чекит өзүнүн x абсциссасы жана y ординатасына ээ: $A(x;\ y)$. Модулу бир бирдикке ээ болгон жана багыты Ox огу боюнча багытталган бирдик векторун $\vec{i}$ менен, Oy огу боюнча багытталган бирдик векторун $\vec{j}$ менен белгилейбиз (3-*а* сүрөт).

Тегиздикте координаталары (x; y) болгон A чекит берилген болсун. OA_xA үч бурчтугун көрөлү. Бул үч бурчтукта $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_x} + \overrightarrow{A_xA}$. Бирок $OA_x = x$, $A_xA = OA_y = y$ болгондуктан $\overrightarrow{OA_x} = x \cdot \vec{i}$, $\overrightarrow{A_xA} = y \cdot \vec{j}$ болот. Мындан

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} \qquad (1)$$

барабардыгын алабыз. Бул (1) барабардыкка вектордун *координаталык туюнтмасы* дейилет.

Демек, башаты координаталардын башталышында, учу $A(x;\ y)$ чекитинде болгон векторду координата октору боюнча багытталган $\vec{i}$ жана $\vec{j}$ векторлору аркылуу (1) көрүнүштө жазууга болот экен.

Мында $(\vec{i};\ \vec{j})$ векторлор жуптугу *базис векторлор*, x жана y сандар болсо $\vec{a}$ вектордун *координаталары* деп аталат.

Эгерде вектордун (1) координаталык туюнтмасы белгилүү болсо, ал координаталары менен берилген дейилет, кыскача $\vec{a}(x;\ y)$ түрүндө жазылат:

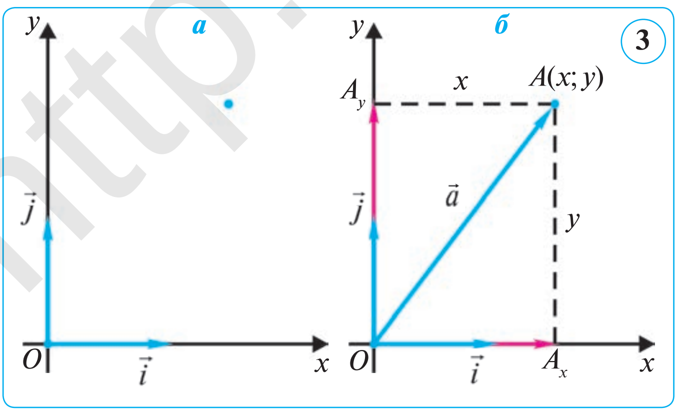
$$\vec{a}(x; y) = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}. \qquad (2)$$

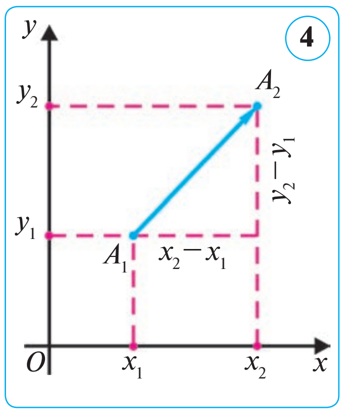
Аныктама. *Эгерде $A_1(x_1;\ y_1)$ жана $A_2(x_2;\ y_2)$ болсо, $x_2 - x_1$ жана $y_2 - y_1$ сандарына $\overrightarrow{A_1A_2}$ вектордун координаталары дейилет* (4-сүрөт).

Вектордун координаталары тамга менен белгиленип, кашаанын ичинде жазылат: $\overrightarrow{A_1A_2}(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1)$. Кээ учурларда координаталары берилген векторлорду белгилегенде $\overline{(x_2 - x_1; y_2 - y_1)}$ жазуусунан да пайдаланылат. Нөл вектор координаталарынын нөлгө барабардыгы анык: $\vec{0}(0; 0)$.

Чекиттердин ортосундагы аралыкты табуунун формуласы боюнча, $\vec{a}(a_1;\ a_2)$ векторунун узундугу $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ формуласы боюнча эсептелет.

Эреже. *Вектордун координаталарын табуу үчүн анын аягынын (учунун) координаталарынан башталышынын тиешелүү координаталарын кемитүү жетиштүү.*





Мисалы, $\overline{OA}$ векторунун координаталары анын аягы (учу) A нын координаталарын түзөт, б. а. вектор аягынын координаталарына барабар болот. Эгерде $A(x; y)$ болсо, $\overrightarrow{OA}(x; y) = \overline{(x; y)}$ болот.

Координаталары барабар болгон векторлордун *касиетин* жана *белгисин* далилсиз келтиребиз.

Теорема.

Барабар векторлор тиешелүү түрдө барабар координаталарга ээ. Тескерисинче, эгерде векторлордун тиешелүү координаталары барабар болсо, векторлор барабар болот.

1-корутунду. Эгерде вектордун аягынын координаталары вектордун координаталары менен барабар болсо, анда берилген вектордун башталышы координаталардын башталышында болот (3-*б* сүрөт).

2-корутунду. Эгерде $\vec{a}(a_1; a_2)$ вектору менен анын аягы $B(x_2; y_2)$ чекитинин координаталары берилген болсо, анда вектордун башталышы $A(x_1; y_1)$ чекитинин координаталарын табуу үчүн B чекитинин координаталарынан $\vec{a}(a_1; a_2)$ вектордун тиешелүү координаталарын кемитүү жетиштүү:

$$x_1 = x_2 - a_1; \quad y_1 = y_2 - a_2. \qquad (1)$$

3-корутунду. Эгерде $\vec{a}(a_1; a_2)$ вектору менен анын башталышы $A(x_1; y_1)$ чекитинин координаталары берилген болсо, анда вектордун аягы $B(x_2; y_2)$ чекитинин координаталарын табуу үчүн A чекитинин координаталарына $\vec{a}(a_1; a_2)$ вектордун тиешелүү координаталарын кошуу жетиштүү:

$$x_2 = x_1 + a_1; \quad y_2 = y_1 + a_2. \qquad (2)$$

2-маселе. Эгерде $A(-2; 1)$, $B(0; 4)$ жана $C(4; 1)$ болсо, $ABCD$ параллелограммдын төртүнчү чокусунун координатасын тап.

Чыгарылышы. Эгерде $ABCD$ төрт бурчтугу параллелограмм болсо, анда $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ болот. $(x; y)$ – изделген D чокусунун координатасы болсун. $\overrightarrow{AB}$ жана $\overrightarrow{DC}$ векторлорунун координаталарын табабыз:

$$\overrightarrow{AB} = \overline{(0-(-2); 4-1)} = \overline{(2; 3)}, \quad \overrightarrow{DC} = \overline{(4-x; 1-y)}.$$

Ошентип, $4-x=2$ жана $1-y=3$, мындан $x=2$ жана $y=-2$.

Жообу: $D(2; -2)$.

3-маселе. $A(-1; 5)$ чекити $\vec{a}(2; -3)$ вектордун башталышы болсо, бул вектордун аягы (учу) B нын координаталарын тап.

Чыгарылышы. Берилген маалыматтарды соңку (2) катыштарга коюп, изделген координаталарды табабыз: $x_2 = -1 + 2 = 1$, $y_2 = 5 + (-3) = 2$.

Жообу: $B(1; 2)$.

4-маселе. $A(-3; 0)$ жана $B(5; -4)$ чекиттери берилген. $\overrightarrow{AB}$ жана $\overrightarrow{BA}$ векторлорунун координаталарын тап.

Чыгарылышы. 1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}(5-(-3);-4-0) = \overrightarrow{AB}(8;-4) = \overline{(8;-4)}$;

2) $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = -\overline{(8;-4)} = \overline{(-8;-(-4))} = \overline{(-8;\ 4)}$. *Жообу:* (8; −4); (−8; 4).

Эскертүү! *Кандайдыр вектордун координаталары белгилүү болсо, анда ага карама-каршы вектордун координаталарын дагы кайрадан эсептебестен, берилген вектор координаталарынын белгисин карама-каршысына өзгөртүү жетиштүү.*

Суроо, маселе жана тапшырмалар

1. 1) Берилген вектордун санга көбөйтүндүсү деп эмнеге айтылат?
2) Векторду санга көбөйтүүнүн касиеттерин айт.
3) Координаталар огундагы бирдик векторлор кандай белгиленет?

2. Узундугу 2 см ге барабар болгон $\vec{a}$ векторун түз. $4\vec{a}$, $-2\vec{a}$, $3\vec{a}$, $1{,}5\vec{a}$, $-1{,}5\vec{a}$ векторлорун түз.

3. k нын кандай маанисинде $\vec{a}$ $(\vec{a} \neq \vec{0})$ жана $k\vec{a}$ векторлор:
1) багытташ; 2) карама-каршы багытталган; 3) барабар болот?

4. $ABCD$ параллелограммында O – диагоналдардын кесилишүү чекити, K чекити – CD жагынын ортосу. $\overrightarrow{OA}$ жана $\overrightarrow{AK}$ векторлорун $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ жана $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ векторлору аркылуу туюнт.

5. C чекити AB жагынын ортосу. 1) $\overrightarrow{AC}$ векторун $\overrightarrow{CB}$ вектору; 2) $\overrightarrow{AB}$ векторун $\overrightarrow{CB}$ вектор; 3) $\overrightarrow{AC}$ векторун $\overrightarrow{BA}$ вектор аркылуу туюнт.

6. Туюнтмаларды жөнөкөйлөштүр:

1) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB})$; 2) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DA}$.

7. 1) $A(-1;\ 4)$ жана $B(3;\ 9)$; 2) $A(2;\ -5)$ жана $B(1;-1)$; 3) $A(3;\ 2)$ жана $B(3;2)$ чекиттери берилген. $\overrightarrow{AB}$ векторунун координаталарын тап.

8. Эгерде: 1) $\overrightarrow{AB}(7;\ 24)$; 2) $A(0;-1)$ жана $B(3;-5)$; 3) $A(2;-4)$ жана $B(2;-1)$ болсо, $\overrightarrow{AB}$ векторунун узундугун тап.

9. Эгерде: 1) $A(-2;\ -3)$, $B(-3;\ -1)$; 2) $A(m;\ n)$, $B(-m;\ -n)$ болсо, $\overrightarrow{BA}$ векторунун координаталары эмнеге барабар болот?

10. $A(-1;\ -3)$, $B(2;\ -4)$, $C(-3;\ -1)$ жана $D(5;\ 2)$ чекиттери берилген. $\overrightarrow{AC}$ жана $\overrightarrow{DB}$ векторлору барабарбы?

11. $\vec{a}(m;24)$ векторунун узундугу 25 ке барабар. m ди тап.

12. $A(5;\ -3)$ чекити $\vec{a}(-7;\ -8)$ векторунун башталышы болсо, ушул вектордун аягы (B) нын координаталарын тап.

13. Эгерде: 1) $A(-3;1)$ жана $B(5;-5)$; 2) $A(12;0)$ жана $B(0;-5)$ болсо, $\overrightarrow{AB}$ векторунун узундугун тап.

40. КООРДИНАТАЛАРЫ МЕНЕН БЕРИЛГЕН ВЕКТОРЛОРДУН ҮСТҮНДӨ АМАЛДАР

Координаталары менен берилген векторлорду кошуу, кемитүү жана санга көбөйтүү амалдары менен таанышабиз.

1. Координаталары менен берилген векторлорду кошуу.

Аныктама. $\vec{a}(a_1;\ a_2)$ жана $\vec{b}(b_1;\ b_2)$ *векторлорунун суммасы* деп, координаталары $c_1=a_1+b_1$, $c_2=a_2+b_2$ болгон $\vec{c}(c_1;c_2)$ векторго айтылат.

Ошентип,

$$\vec{a}(a_1;\ a_2)+\vec{b}(b_1;\ b_2)=\vec{c}(a_1+b_1;\ a_2+b_2) \text{ же } \overline{(a_1;\ a_2)}+\overline{(b_1;\ b_2)}=\overline{(a_1+b_1;\ a_2+b_2)}.$$

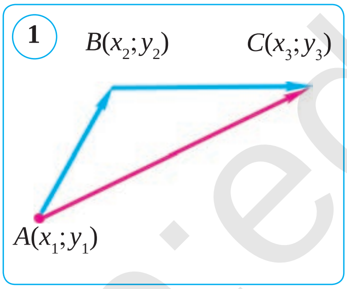
Каалагандай $\vec{a}(x_1;\ y_1)$, $\vec{b}(x_2;\ y_2)$ *жана* $\vec{c}(c_1;c_2)$ *векторлору үчүн төмөнкү барабардыктар орундуу:*

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$; 2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$; 3) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.

Далилдөө үчүн барабардыктын оң жана сол бөлүктөрүндөгү векторлор координаталарынын тиешелүү координаталарын салыштыруу жетиштүү.

Теорема.

***A, B, C* чекиттери кандай болбосун, төмөнкү вектордук барабардык орундуу:** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$



Далилдөө. $A(x_1;x_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$ – берилген чекиттер (1-сүрөт). Кошулуучу векторлорду координаталар аркылуу туюнтуп, табабыз:

$$\overrightarrow{AB}(x_2-x_1;\ y_2-y_1),\ \overrightarrow{BC}(x_3-x_2;\ y_3-y_2).$$

Аныктама боюнча, сумма вектордун координаталарын аныктоо үчүн $\overrightarrow{AB}$ жана $\overrightarrow{BC}$ векторлорунун тиешелүү координаталарын кошобуз:

$$x_2-x_1+x_3-x_2=x_3-x_1,\ y_2-y_1+y_3-y_2=y_3-y_1.$$

Бул болсо $\overrightarrow{AC}$ векторунун координаталары болот: $\overrightarrow{AC}(x_3-x_1;\ y_3-y_1)$.

Барабар векторлор жөнүндөгү теорема боюнча: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.
Теорема далилденди.

2-сүрөттөн пайдаланып, жогорудагы барабардыктын тууралыгын далилдөөнү өзүңө калтырабыз.

Ошентип, *векторлорду кошуу үчүн алардын тиешелүү координаталарын кошуу жетиштүү экен.*

2. Координаталары менен берилген векторлорду кемитүү.

Аныктама. $\vec{a}\,(a_1;\ a_2)$ жана $\vec{b}\,(b_1; b_2)$ *векторлорунун айырмасы* деп, $\vec{c}\,(c_1; c_2)$ векторго айтылат, б. а. анын $\vec{b}$ вектору менен суммасы $\vec{a}$ векторун берет: $\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$.

Мындан $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$ векторунун координаталарын табабыз:

$$c_1=a_1-b_1,\ c_2=a_2-b_2.$$

Координаталары менен берилген векторлорду кемитүү үчүн алардын тиешелүү координаталарын кемитүү жетиштүү, б. а.:

$$\vec{a}\,(a_1;\ a_2)-\vec{b}\,(b_1;\ b_2)=\vec{c}\,(a_1-b_1;\ a_2-b_2)\text{ же}$$

$$\overline{(a_1; a_2)}-\overline{(b_1; b_2)}=\overline{(a_1-b_1; a_2-b_2)}.$$

3. Координаталары менен берилген векторлорду санга көбөйтүү.

Аныктама. $\vec{a}\,(a_1,\ a_2)$ векторунун k санга көбөйтүндүсү деп, $\overline{(ka_1;\ ka_2)}$ векторуна айтылат, б. а.:

$$k\vec{a}=\overline{(ka_1;\ ka_2)}.$$

Аныктама боюнча, $\overline{(a_1;\ a_2)}\cdot k=k\overline{(a_1;\ a_2)}$.

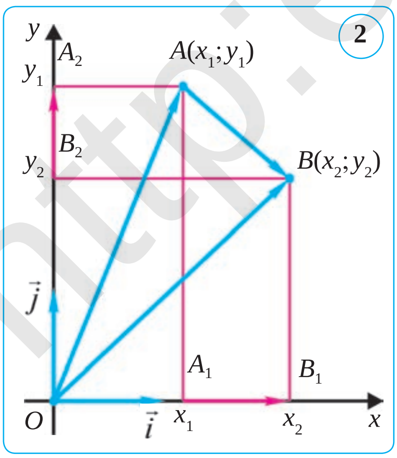
Демек, *векторду санга (же k санын $\vec{a}$ векторго көбөйтүү үчүн) анын координаталарын ошол санга көбөйтүү жетиштүү экен.*

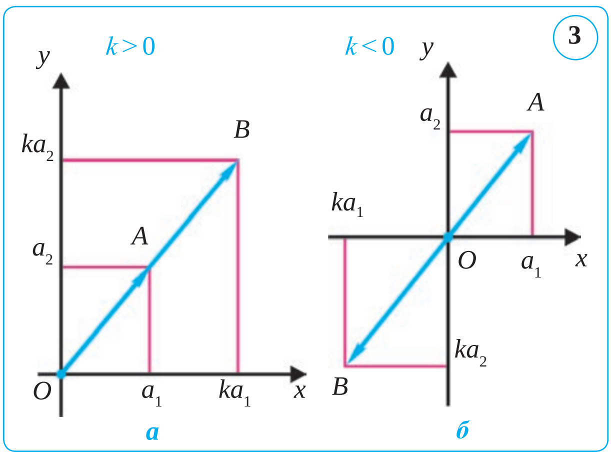
Векторду санга көбөйтүүнүн мурда келтирилген аныктамасын 3-сүрөттөн пайдаланып текшерип көр. Анын касиеттери координаталарда да орундуу болот. Ошол себептүү аларды келтирип отурбадык.

1-маселе. $\vec{a}\,(3;\ 5)$ жана $\vec{b}\,(2;\ 7)$ векторлорунун суммасын тап.

Чыгарылышы. $\vec{a}(3;\ 5)+\vec{b}(2;\ 7)=\overline{(3;\ 5)}+\overline{(2;\ 7)}=\overline{(3+2;\ 5+7)}=\overline{(5;\ 12)}$.

Демек, $\vec{a}+\vec{b}$ векторунун координаталары (5; 12) ге барабар.





2-маселе. $\vec{a}(-3;\ 5)$ жана $\vec{b}(3;\ -3)$ векторлорунун айырмасын тап.

Чыгаруу: $\vec{a}(-3;\ 5)-\vec{b}(3;\ -3)=\overline{(-3;\ 5)}-\overline{(3;-3)}=\overline{(-3-3;\ 5-(-3))}=\overline{(-6;\ 8)}$.

Жообу: $\overline{(-6;\ 8)}$.

3-маселе. $\vec{a}(3;\ 5)$ векторуна карама-каршы $\vec{b}$ векторун тап.

Чыгарылышы. $\vec{a}$ векторуна карама-каршы $\vec{b}$ вектору төмөнкүгө барабар:

$$\vec{b}=-\vec{a}=-1\cdot\vec{a}=-1\cdot\overline{(3;\ 5)}=\overline{(-3;\ -5)}.$$

Жообу: $\vec{b}(-3;\ -5)$ же $\overline{(-3;-5)}$.

4-маселе. Эгерде $\vec{a}(-3;\ 4)$ болсо, $\vec{b}=4\vec{a}$ вектор координаталарын тап.

Чыгарылышы. $\vec{b}=4\vec{a}=4\cdot\overline{(-3;\ 4)}=\overline{(4\cdot(-3);\ 4\cdot 4)}=\overline{(-12;\ 16)}$.

Жообу: $\vec{b}(-12;16)$ же $(-12;16)$.

Суроо, маселе жана тапшырмалар

1. 1) Координаталары берилген эки вектор кандайча кошулат?
2) Координаталары берилген эки вектор кандайча кемитилет?
3) Координаталары берилген вектор санга кандайча көбөйтүлөт?

2. Эгерде $\vec{a}(-4;\ 8)$ жана $\vec{b}(1;\ -4)$ болсо, ушул векторлордун: 1) суммасынын; 2) айырмасынын координаталарын тап.

3. $\vec{a}(-2;6)$ жана $\vec{b}(-2;4)$ векторлору берилген. 1) $\vec{a}+\vec{b}$; 2) $\vec{a}-\vec{b}$; 3) $\vec{b}-\vec{a}$; 4) $-\vec{a}-\vec{b}$ векторунун координаталарын тап.

4. $\vec{a}(2;\ 3)$ жана $\vec{b}(-1;\ 0)$ векторлору берилген. Вектордун координаталарын тап: 1) $2\vec{a}+\vec{b}$; 2) $\vec{a}-3\vec{b}$; 3) $2\vec{b}-\vec{a}$.

5. $\vec{a}(2;-3)$ жана $\vec{b}(-2;-3)$ векторлору берилген. Ошол векторлордун координаталарын тап: 1) $\vec{c}=\vec{a}-2\vec{b}$; 2) $\vec{c}=-2\vec{a}+\vec{b}$; 3) $\vec{c}=-3\vec{a}-2\vec{b}$.

6. $\vec{a}=-2\vec{i}-3\vec{j}$, $\vec{b}=-2\vec{j}$ векторлору берилген. Координаталарын тап:
1) $\vec{c}=2\vec{a}-\vec{b}$; 2) $\vec{c}=-4\vec{a}+3\vec{b}$; 3) $\vec{c}=-3\vec{a}+4\vec{b}$.

7. $\vec{a}=-2\vec{i}+2\vec{j}$ жана $\vec{b}=3\vec{i}$ векторлору берилген. 1) $\vec{c}=3\vec{a}-2\vec{b}$; 2) $\vec{c}=4\vec{a}-\vec{b}$ векторунун координаталарын тап.

8. $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}$ жана $\vec{b}=2\vec{j}$ векторлору берилген. 1) $\vec{c}=2\vec{a}-\vec{b}$; 2) $\vec{c}=\vec{a}-5\vec{b}$ векторунун координаталарын тап.

9. $\vec{a}=-3\vec{i}$ жана $\vec{b}=-\vec{i}+2\vec{j}$ векторлору берилген. 1) $\vec{c}=-2\vec{a}+\vec{b}$; 2) $\vec{c}=-\vec{a}-\vec{b}$ векторунун координаталарын тап.

41. ВЕКТОРДУН ФИЗИКАЛЫК ЖАНА ГЕОМЕТРИЯЛЫК ТҮШҮНДҮРМӨЛӨРҮ. ГЕОМЕТРИЯЛЫК МАСЕЛЕЛЕР ЧЫГАРУУНУН ВЕКТОРДУК УСУЛУ

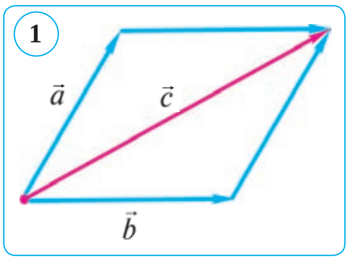
1. Вектордун физикалык жана геометриялык түшүндүрмөлөрү.

1. Телого таасир эткен күчтүн (берилген күчтүн) багыты таасирдин багыты менен бирдей, абсолюттук маанисин болсо күчтүн санына пропорциялаш вектор менен сүрөттөгөн оң. Практиканын көрсөтүшүнчө, күчтөрдү мындай сүрөттөө усулунда телого бир чекитте таасир эткен эки же бир нече күчтүн тең таасир этүүчүсү ошол күчтөргө ылайык векторлордун суммасы менен сүрөттөлөт. 1-сүрөттө телого A чекитинде $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлор менен берилген эки күч таасир этет. Алардын тең таасир этүүчүсү $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ вектору менен сүрөттөлөт.

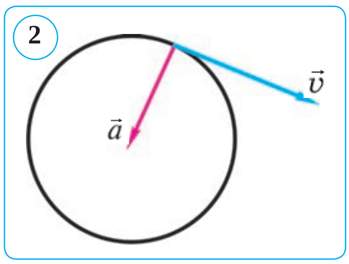
Күчтү берилген эки багытта таасир эткен күчтөрдүн суммасы иретинде сүрөттөөгө *күчтү багыттар боюнча жаюу (бөлүү)* дейилет.

2. Физикада телонун *алга умтулма кыймылы* деп, анын бардык чекиттери бирдей убакыт аралыгында, бирдей багытта бирдей аралыкка которулган кыймылына айтылат. Ошентип, физикадагы *которулуу вектору* биз үйрөнүп жаткан вектор экен. Болгону, геометрия китебинде тегиздиктеги векторлор жөнүндө гана сөз болот, физикада болсо башынан эле мейкиндиктеги векторлор, алардын касиеттери жөнүндө ой жүгүртүлөт.

3. Физикада «вектор» сөзү кыйла кең мааниде колдонулат. Мисалы, ылдамдыкка вектор дейилет. Бирок геометриялык вектордун узундугу метрлерде, ылдамдыктын абсолюттук мааниси болсо секундуна метрлерде (м/с) ченелишинен эле ылдамдыктын геометрияда кабыл алынган маанидеги вектор эместиги көрүнүп турат. Биз геометрияда ылдамдыкты вектор, *вектордук чоңдук* дейбиз. Жалпысынан алганда, вектордук чоңдуктар, өздөрүнүн модулунан тышкары, багыт менен да аныкталат. Белгилүү масштаб тандап алынганда вектордук чоңдуктар геометриялык векторлор менен сүрөттөлөт.



Вектордук чоңдуктарды кошууда аларды сүрөттөгөн геометриялык векторлорду кошууга, сандарга көбөйтүүдө болсо геометриялык векторлорду ошол сандарга көбөйтүүгө туура келет.



Бир мисалды көрөлү. 2-сүрөттө $\vec{v}$ вектору айланма аракет ылдамдыгын, $\vec{a}$ вектору болсо ылдамданууну туюнтушу мүмкүн. Бирок бул векторлорду физикалык көз караштан кошуунун мааниси жок. Ошентсе да, физикада ылдамдык же ылдамдануулар *түздөн-түз векторлор* деп айтылат.

Сөз эмне жөнүндө жүрүп жаткандыгы анык элестетилсе, мындай сөз эркиндиги жалпылыкка эч кандай зыян жеткирбейт. Ошол сыяктуу биз өз учурунда үч бурчтук жагынын узундугун, кыскалык үчүн, жөнөкөй гана анын жагы деп айтууга келишип алган элек жана башкалар.

2. Геометриялык маселелерди чыгаруунун вектордук усулу.

Геометриялык маселелерди чыгарууда жана теоремаларды далилдегенде векторлордон кеңири пайдаланылат.

1-маселе. *C* чекити *AB* кесиндинин ортосу, *O* чекити болсо тегиздиктин каалагандай чекити. $\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$ экенин далилде (3-*а* сүрөт).

Чыгарылышы. 1-усул. Үч бурчтуктун эрежеси боюнча:

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC} \quad \text{жана} \quad \overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}.$$

Бул эки барабардыкты кошуп, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$2\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}).$$

C чекити *AB* кесиндинин ортосу болгондуктан, $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}$, анткени карама-каршы векторлордун суммасы нөл векторго барабар.

Ошентип, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$2\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB} \quad \text{же} \quad \overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}).$$

2-усул. OAB үч бурчтугун параллелограммга толтурабыз (3-*б* сүрөт).

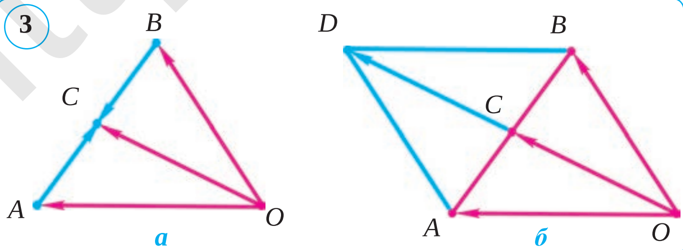
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}$ (параллелограммдын эрежеси боюнча). Параллелограмм диагоналдарынын кесилишүү чекитинде тең экиге бөлүнөт, ошондуктан $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CD}$ жана $\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OC}$.

Демек, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OC}$. Мындан:

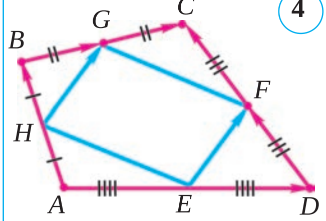
$$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}).$$

2-маселе. Каалагандай *ABCD* төрт бурчтугунун жактарынын ортолору параллелограммдын чокулары экенин далилде.

Чыгарылышы. E, F, G, H – тиешелүү түрдө *AB, BC, CD* жана *DA* жактарынын ортолору болсун (4-сүрөт). Параллелограммдын 3-белгиси боюнча, мисалы, *EF* жана *HG* кесиндилери узундуктарынын барабар жана параллелдигин далилдөө жетиштүү. Вектордун тилинде, бул $\overrightarrow{EF}$ жана $\overrightarrow{HG}$ векторлорунун барабардыгын далилдөөдөн турат.

3


а *б*



4

Чындыгында да,

$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}),\quad \overrightarrow{HG}=\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{DG}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}).$$

Мындан тышкары, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$ экени анык. Ошондуктан, $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{HG}$. Мындан, EF жана HG кесиндилердин узундук боюнча барабардыгы жана параллелдиги келип чыгат. Демек, ар кандай $ABCD$ төрт бурчтугу жактарынын ортолору параллелограммдын чокулары болот. Ушуну далилдөө талап кылынган.

Маселе жана теоремаларды вектор усулу менен чыгаруу алгебралык маселелерди чыгарууга окшойт. Ал үч баскычтан турат.

Биринчи баскыч. Маселенин (теореманын) шартын вектор көрүнүшүндө жазуу жана ыңгайлуу векторлорду киргизүү (окшоштук – белгисиздерди киргизүү жана алгебралык теңдемени түзүү).

Экинчи баскыч. Вектор алгебрасынын каражаттары аркылуу маселенин шартын алмаштырганда, маселени вектор көрүнүшүндө жазуу мүмкүнчүлүгү болсун (окшоштук – алгебралык теңдемени жазуу).

Үчүнчү баскыч. Алынган катыш баштапкы терминдерде түшүндүрүлөт (окшоштук – теңдемени алгебралык чыгаруудан кийин жообун жазуу).

Суроо, маселе жана тапшырмалар

1. Чокулары $A(3;\ 1)$, $B(1;\ 3)$ жана $C(0;\ 2)$ болгон үч бурчтуктун CC_1 медианасынын узундугун тап.

2. K чекити $ABCD$ параллелограммдын AD жагынын ортосу. $\overrightarrow{KC}$ векторун $\overrightarrow{AB}$ жана $\overrightarrow{AD}$ векторлору аркылуу туюнт.

3. $A(2;\ 4)$, $B(3;\ 6)$ жана $C(6;\ 14)$ чекиттери берилген. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ векторунун координаталарын тап.

4. $ABCD$ квадратынын эки карама-каршы чокусунун координаталары берилген: $A(0;4)$ жана $C(6;0)$. Калган эки чокусунун координаталарын тап.

5. $A(-2;3)$ чекити $\vec{a}(-3;8)$ векторунун башталышы болсо, бул вектордун аягы ($B(x;y)$) тин координаталарын тап.

6. Трапециянын орто сызыгы негиздерине параллель жана алар узундугунун жарымына барабар экенин вектордун жардамында далилде.

7. $\vec{a}(1;\ 3)$, $\vec{b}(-2;4)$, $\vec{c}(-1;\ -3)$, $\vec{d}(-4;\ 4)$, $\vec{p}(3;\ 9)$, $\vec{q}(-1;\ 2)$ векторлору берилген. Алардан: 1) багытташ векторлорду; 2) бир жуп карама-каршы багытталган векторлорду тап.

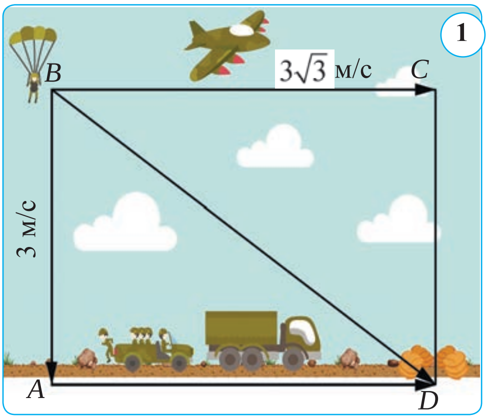
8. $ABCD$ ромбдо N чекити CD жагынын ортосу. $\overrightarrow{AN}$ векторун $\overrightarrow{AB}$ жана $\overrightarrow{AD}$ векторлору аркылуу туюнт.

9. $ABCD$ – параллелограмм жана андан тышта жаткан каалагандай O чекити берилген. $\overrightarrow{OD}$ векторун $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ жана $\overrightarrow{OC}$ векторлору аркылуу туюнт.

42. ПРАКТИКАЛЫК КӨНҮГҮҮ ЖАНА КОЛДОНУУ

ПРАКТИКАЛЫК КОМПЕТЕНЦИЯНЫ ӨНҮКТҮРҮҮЧҮ КОШУМЧА МАТЕРИАЛДАР

1. Векторлорду практикада колдонуу боюнча маселелер.



1-маселе. Парашютчу жерге 3 м/с ылдамдык менен түшүүдө, шамал $3\sqrt{3}$ м/с ылдамдык менен учурууда. Парашютчу жерге кандай бурч менен түшөт (1-сүрөт)?

Чыгарылышы. Парашютчу B чекитинде болсун. Оордук күчү $\overrightarrow{BA}$ жана шамалдын күчү $\overrightarrow{BC}$ нын тең таасир этүүчүсү $\overrightarrow{BD}$ болот жана $ABCD$ – тик бурч, AB – вертикаль. Демек, $\angle ADB$ бурчту табуу керек.

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$ жана $BC=AD$ ($ABCD$ – тик бурч, $\angle A=90°$). Пифагордун теоремасы боюнча: $BD^2=AD^2+AB^2$, демек:

$$BD=\sqrt{AD^2+AB^2}=\sqrt{(3\sqrt{3})^2+3^2}=\sqrt{27+9}=\sqrt{36}=6 \text{ (см)}.$$

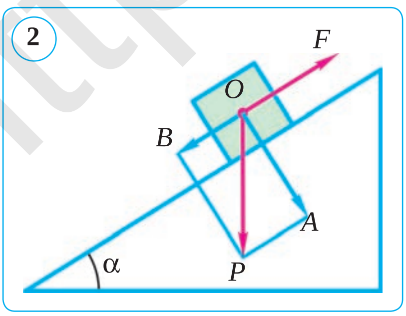
Ошентип, ABD үч бурчтугунда 3 см лүү AB катет 6 см лүү BD гипотенузага караганда эки эсе кичине экен. Демек, $AB=0{,}5BD$ болгондуктан тик бурчтуу үч бурчтукта 30° туу бурчтун тушундагы катеттин касиети боюнча, $\angle ADB=30°$ же $\sin\angle ADB=\dfrac{AB}{BD}=0{,}5$, мындан $\angle ADB=30°$ келип чыгат.

Жообу: $\angle ADB=30°$.

2-маселе. Парашютчу жерге 4 м/с ылдамдык менен түшүүдө, шамал аны $4\sqrt{3}$ м/с ылдамдык менен учурууда. Мындай шартта парашютчу жерге кандай бурч менен түшөт (1-сүрөт)? Маселени өз алдынча чыгар.

3-маселе. Салмагы P болгон жүк жантык тегиздикте сүрүлүп ылдый түшүп кетпестиги үчүн аны кандай F күч менен кармап туруу керек (2-сүрөт)?

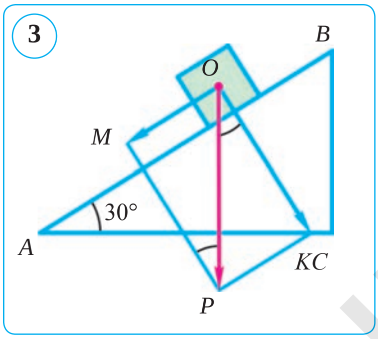
Чыгарылышы. Жүктүн O оордук борбору $\overrightarrow{P}$ га күч коюлган болсун. $\overrightarrow{P}$ вектору өз ара перпендикуляр эки багыт боюнча 2-сүрөттөгүдөй коёбуз. Жантаймага перпендикуляр $\overrightarrow{OA}$ күч жүктүн жылышына жол бербейт. Жүктү кармап турган $\overrightarrow{F}$ күч ага карама-каршы багытталган $\overrightarrow{OB}$ күчкө сан жагынан барабар болууга тийиш. Мындан төмөнкү корутунду алынат: $F=P\sin\alpha$.



4-маселе. $P=50$ Н жүк жантык тегиздикте турат. Эгерде тегиздиктин кыйшаюу бурчу 30° болсо, сүрүлүү жана басым күчүн тап.

Берилген: $P=50$ N, $\angle A = 30°$.

Табуу керек: $F_{\text{сүр}}$, $F_{\text{басым.}}$



Чыгарылышы. 1) $\vec{P}$ күчүн эки: сүрүлүү күчүнүн багытына параллель жана басым күчүн жантык тегиздикке перпендикуляр күчтөр боюнча жаябыз.

2) Параллелограммды түзөбүз; $\overrightarrow{OP}$ вектору анын диагоналу; $OM \| AB$, $OK \perp AB$, $PK \| AB$, $PM \perp AB$, $\overrightarrow{OM} = \vec{F}_{\text{сүр}}$, $\overrightarrow{OK} = \vec{F}_{\text{басым}}$ ти жүргүзөбүз (3-сүрөт).

3) $\angle OPM = \angle A = 30°$ ($OP \perp AC$, $PM \perp AB$).

4) Тик бурчтуу OPM үч бурчтугунан:

$$OM = 0{,}5OP = 0{,}5 \cdot 50 = 25; \quad F_{\text{сүр.}} = 25 \text{ N}.$$

5) Тик бурчтуу OPK үч бурчтугунан Пифагордун теоремасы боюнча:

$$OK = \sqrt{OP^2 - PK^2} = \sqrt{OP^2 - OM^2} = \sqrt{50^2 - 25^2} = \sqrt{25^2 \cdot (4-1)} = 25\sqrt{3} \approx 43,$$

б. а. $F_{\text{басым.}} \approx 43$ N. *Жообу:* $F_{\text{сүр.}} = 25$ N, $F_{\text{басым}} \approx 43$ N.

5-маселе. Эгерде A телого эки a жана b күч таасир этсе, анда алардын таасири бир c күчтүн таасирине барабар болуп, бул c күч a жана b кесиндилерден түзүлгөн параллелограммдын диагоналы менен сүрөттөлөт. Тең таасир этүүчү күч *«параллелограммдын эрежеси»* боюнча табылат.

Мисалы, сүзүп жаткан кемеде (4-сүрөт) болгон же дарыяны кайыкта кесип өткөн (5-сүрөт) кишиге туурасынан кесилиш жана агым боюнча багытталган эки күч таасир этет. Ошол күчтөрдү сүрөттө белгиле.

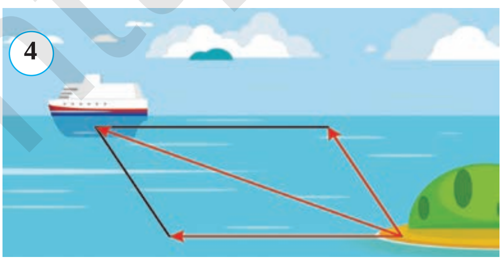
Ушуга окшош маселе түз жана тиешелүү сүрөттөрдө көрсөт.

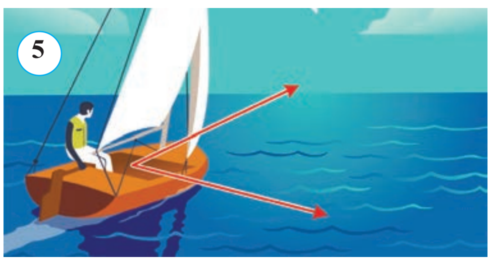
2. Системанын oордук борборунун координаталарын табуу.

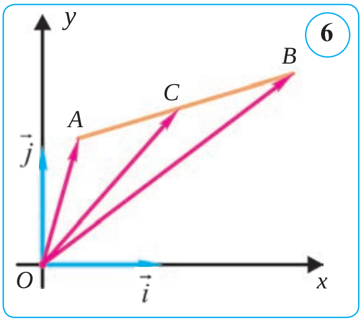
6-маселе. Кесиндини берилген катышта бөлүү (координата көрүнүшүндө).

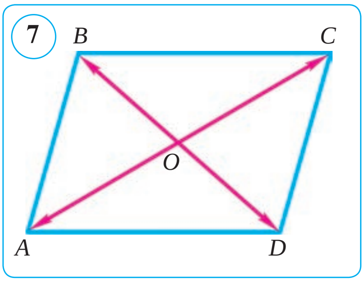
Эгерде $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$ болсо, C чекити AB кесиндини λ катышта бөлөт (6-сүрөт). Эгерде кесинди аяктарынын координаталары $A(x_1;\, y_1)$, $B(x_2;\, y_2)$ белгилүү болсо, C чекитинин x, y координаталарын тап.

Чыгаруу. $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}$ жана $\overrightarrow{OB}$ векторлорун түзөбүз. $\overrightarrow{OA}(x_1;\, y_1)$, $\overrightarrow{OC}(x;\, y)$, $\overrightarrow{OB}\ (x_2;\, y_2)$, $\overrightarrow{AC}(x-x_1;\, y-y_1)$, $\overrightarrow{CB}(x_2-x;\, y_2-y)$ жана векторду λ саны-









на көбөйткөндө анын координаталары λ санына көбөйтүлгөнүн эсепке алып, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}\,(x - x_1;\ y - y_1) =$$

$$= \lambda\overrightarrow{CB}\,(x_2 - x;\ y_2 - y) \Leftrightarrow \begin{cases} x - x_1 = \lambda(x_2 - x); \\ y - y_1 = \lambda(y_2 - y). \end{cases}$$

Демек, $x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$, $y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$.

7-маселе. $M_1(x_1;\ y_1)$ жана $M_2(x_2;\ y_2)$ чекиттерине тиешелүү түрдө m_1 жана m_2 жүктөрү коюлган. Бул массалар системасы оордук борборунун (C чекити) координаталарын тап.

Чыгаруу. Оордук борбору C – M_1M_2 кесиндиде, M_1 жана M_2 чекиттерине коюлган m_1 жана m_2 массалардан тескери пропорциялаш аралыкта жатат, б. а. эки материалдык чекиттер системасынын оордук борбору болгон C чекити M_1M_2 кесиндини $\lambda = \dfrac{m_2}{m_1}$ катышта бөлөт. λ нын маанисин 5-маселедеги формулаларга коюп, форма алмаштыргандан кийин C чекитинин координаталарын табабыз:

$$x_C = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2},\quad y_C = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2}{m_1 + m_2}.$$

3. Вектордук катышты далилдөө боюнча маселе.

8-маселе. $ABCD$ – параллелограмм жана анын диагоналдары кесилишкен O чекити берилген. Далилде: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$.

Берилген: $ABCD$ – паралллелограмм, O – AC жана BD диагоналдарынын кесилишүү чекити, $AO = OC$, $BO = OD$ (7-сүрөт).

Далилдөө керек: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$.

Далилдөө. Бул барабардыкты далилдөөнүн бир нече усулун келтиребиз.

Айырманын нөл векторго барабардыгын көрсөтөбүз:

$$(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) - (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) = (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}) = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}.$$

Форма алмаштыруу жараянында суммадан сумманы кемитүү эрежесинен, топтоштуруу мыйзамынан, үч бурчтук эрежесинен, $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ (параллелограммдын карама-каршы жактары жана багытташ векторлор), нөл вектордун аныктамаларынан пайдаланылды.

$$2\ (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) - (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) = (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD}) + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DD} = \vec{0}.$$

Форма алмаштырууда суммадан сумманы кемитүү жана үч бурчтук эрежеси, топтоштуруу мыйзамы, $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ экени жана нөл вектор аныктамаларынан пайдаланылды.

43–44. 3-КӨЗӨМӨЛ ИШИ. КАТАЛАР ҮСТҮНДӨ ИШТӨӨ

1. $A(-2;3)$ жана $B(4;0)$ чекиттеринен өткөн түз сызыктын теңдемесин түз.
2. Эгерде $C(4;9)$ жана $R=5$ болсо, борбору C чекитинде, радиусу R болгон айлананын теңдемесин түз.
3. $\vec{a}(1;\ 0)$, $\vec{b}(1;\ 2)$ жана $\vec{c}(1;\ 3)$ векторлору берилген. $\vec{a}-\vec{b}$ жана $\vec{b}+\vec{c}$ векторлорунун координаталарын тап.
4. $\vec{c}(-1;\ 0)$ жана $\vec{d}(1;\ 2)$ векторлору берилген. $2\vec{c}\ +\ 3\vec{d}$ векторунун координаталарын тап.

3-тест — Өзүңдү сынап көр!

1. $A(0;\ -1)$, $B(1;\ 0)$ чекиттеринен өткөн түз сызык кайсы чейректерде жайлашкан?
A) III, IV, I; B) I, II, III; D) II, III, IV; E) II, IV.

2. $A(-2;\ 0)$, $B(-2;\ 2)$ чекиттеринен өткөн түз сызык кайсы чейректерде жатат?
A) I, II, III; B) II, III; D) II, IV; E) III, IV, I.

3. Чокулары $A(-4;\ 0)$, $B(-4;\ 4)$ чекиттеринде болгон AB кесинди ортосунун координаталарын тап.
A) $(-2;\ 0)$; B) $(0;\ 2)$; D) $(2;\ -4)$; E) $(-4;\ 2)$.

4. Чокулары $A(-2;\ 0)$, $B(0;\ 2)$, $C(2;\ 0)$ чекиттеринде болгон үч бурчтуктун AC жагы ортосунун координаталарын тап.
A) $(-1;\ 1)$; B) $(1;\ 0)$; D) $(0;\ 0)$; E) $(0;\ 1)$.

5. $\vec{a}(-3;\ 1)$ жана $\vec{b}(5;-6)$ векторлору берилген. $\vec{c}=\vec{b}-3\vec{a}$ векторунун координаталарын тап.
A) $(14;\ -9)$; B) $(4;\ -3)$; D) $(14;\ -3)$; E) $(9;\ 3)$.

6. $A(-3;\ 0)$ жана $B(-5;\ 4)$ чекиттери берилген. $\overrightarrow{BA}$ векторунун координаталарын тап.
A) $(-8;\ -4)$; B) $(-8;\ 4)$; D) $(2;\ -4)$; E) $(8;\ -4)$.

Англис тилин үйрөнөбүз!

Айлананын теңдемеси – circle equation
Түз сызыктын теңдемеси – straight-line equation
Коллинеардуу векторлор – collinear wectors
Вектордун узундугу – wector length
Барабар векторлор – equal wectors
Скалярдык – scalar
Карама-каршы векторлор – opposite wectors
Бирдик вектор – onyt wector
Багытташ – equiwelent

Тарыхый маалыматтар

Рене Декарт
(1596–1650)

1. Тик бурчтуу координаталар системасын француз окумуштуусу Рене Декарт илимге киргизген. Тик бурчтуу координаталар системасына кээде Декарттын координаталар системасы да дейилет.

Рене Декарт (1596–1650) – француз философу, математиги, физиги, физиологу. Ла-Флешь иезуиттик коллежинде окуган, грек жана латин тилдерин, математика жана философияны үйрөнгөн. Философиясы анын математикасы, космогониясы, физикасы менен байланышкан. Математикада аналитикалык геометриянын негиздеринен бири (тик бурчтуу координаталар системасы) анын ысымы менен аталат. Декарт XVII–XVIII кылымдар философиясы жана илим-билиминин өнүгүшүнө чоң салым кошкон.

XVII кылымда Декарттын иштери себептүү бүткүл математика, о. э. геометрияны кайра курган координаталар методу пайда болду. Алгебралык теңдемелерди геометриялык графика аркылуу түшүндүрүү жана тескерисинче, геометриялык маселелердин чыгарылышын аналитикалык формула, теңдемелер системалары жардамында издөө мүмкүнчүлүгү пайда болду.

Азырга чейин сакталып келген оңой белгилердин киргизилишинде, б. а. белгисиздерди белгилөө үчүн x, y, z; коэффициенттерди белгилөө үчүн a, b, c латин тамгаларын киргизүүдө, даражаларды x^2, y^2, z^2 көрүнүштө белгилөөдө да Декарттын кызматтары чоң.

2. Вектор түшүнүгү XIX кылымдын ортолорунда бир мезгилде бир нече математиктин иштеринде кездешет. Тегиздикте векторлор менен иштөөнү алгачкы жолу 1835-жылы итальян окумуштуусу **Белливитис** (1803–1880) баштап берди. Мындан тышкары, **К. Гаусстун** (1777–1855) 1831-жылы «Биквадраттык салыштырмалар теориясы» чыгармасында жана **Й. Арган** (1768–1822) жана **К. Весселинин** (1745–1818) комплекс сандарды геометриялык сүрөттөө боюнча иштеринде вектор түшүнүгү аталган. Акыр-аягында, **В. Гамильтондун** (1805–1865) жана **Р. Грассмандын** (1854–1901) векторлордун үстүндө амалдар аткаруу боюнча иштери пайда болду. Гамильтон 1845-жылы биринчи болуп вектор жана скалярдык чоңдуктардын айырмасын түшүндүрдү. Гамильтондун бул ишинде «скалярдык», «вектор» терминдери пайда болду.

Гамильтон «вектор» терминин латинче *wehere* – «ташуу», «сүйрөө» сөзүнөн алган, *вектор* – «ташуучу», «алып баруучу» дегенди билдирет. 1806-жылы Арган багытталган кесиндилерди тамганын үстүнө сызык тартуу менен белгиледи. Векторлордун башталышын жана аягын көрсөтүү үчүн **А. Мёбиус** (1790–1868) аны AB көрүнүштө белгилеген. Грассман векторлорду «кесиндилер» деп атаган, ал координата октору боюнча багытталган e_1, e_2 бирдик векторлорду жана бирдик векторлорду $x_1e_1+x_2e_2$ көрүнүшүндө сүрөттөөнү сунуштаган. Гамильтон жана **Ж. Гибсс** (1839–1903) векторлорду грекче тамгалар менен белгилеген. Векторлорду кара тамагалар менен белгилөөнү 1891-жылы **А. Хевисайд** (1850–1925) сунуш кылган. Вектордун узундугун $|AB|$ көрүнүштө белгилөөнү болсо 1905-жылы **Р. Ганс** (1880–1954) киргизген.

IV ГЛАВА
АЯНТ

9- §. КӨП БУРЧТУКТУН АЯНТЫ

45. АЯНТ ЖӨНҮНДӨ ТҮШҮНҮК

1. Аянт жөнүндө түшүнүк.

Фигуралардын аянттарын аныктоо маселеси байыркы доорлордон башат алат. Бул маселенин келип чыгышын адамдардын жашоосу талап кылган. Ар бирибиз аянт жөнүндө кандайдыр түшүнүккө ээбиз. Мисалы, сен тик бурчтуктун (алсак, өзүң жашаган бөлмөнүн) жана квадраттын аянтын табууну билесиң. Биз эми фигуралардын аянты жөнүндөгү түшүнүктөрдү аныктоо жана аларды ченөө усулдарын табуу менен алектенебиз.

Эгерде геометриялык фигураны чектүү сандагы үч бурчтуктарга бөлүүгө мүмкүн болсо, анда бул фигурга *жөнөкөй фигура* дейилет.

Биз үч бурчтук деп, тегиздиктин үч бурчтук менен чектелген чектүү бөлүгүнө айтабыз. Томпок көп бурчтук өзүнүн кандайдыр чокусунан чыккан диагоналдары менен үч бурчтуктарга бөлүнөт (1-*а* сүрөт).

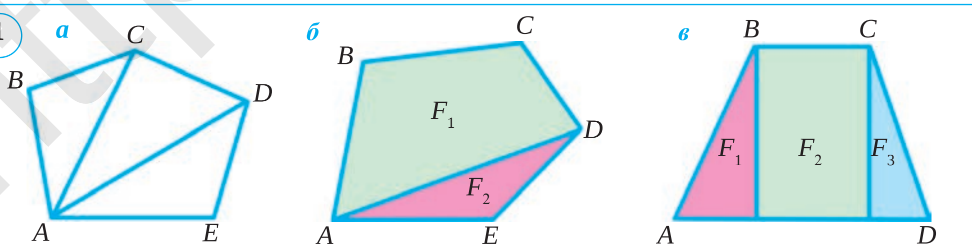
Аянт оң сан (чоңдук) болуп, анын сандык мааниси төмөнкүдөй негизги касиеттерге (аксиомаларга) ээ.

1-касиет. *Барабар фигуралар барабар аянттарга ээ.*

2-касиет. *Эгерде көп бурчтук бир-бирин каптабаган көп бурчтуктардан түзүлгөн болсо, анда анын аянты ошол көп бурчтуктар аянттарынын суммасына барабар болот.*

F көп бурчтугу бир-бирин каптабаган көп бурчтуктардан түзүлгөн дегени бул: 1) *F* көп бурчтуктардын суммасынан турушун жана 2) көп бурчтуктардан эч бир экөөсү жалпы ички чекиттерге ээ эместигин билдирет.

1



$S_{ABCDE} = S_{F_1} + S_{F_2}$ $S_{ABCD} = S_{F_1} + S_{F_2} + S_{F_3}$

Мисалы, 1-*б* жана 1-*в* сүрөттөрдө бир-бирин каптабаган көп бурчтуктардан түзүлгөн көп бурчтуктар берилген.

1- жана 2-касиеттерге аянттардын *негизги касиеттери* дейилет.

2. Аянтты ченөө кесиндини ченөө сыяктуу чен бирдиги үчүн кабыл алынган фигуранын аянты менен берилген фигураны салыштырууга негизделген. Мында берилген фигура *аянтынын сандык маанисин* алабыз.

Аянт – тегиз фигура касиеттеринин негизги математикалык өлчөмдөрүнөн бири. Жөнөкөй учурларда аянт тегиз фигураны толтурган бирдик квадраттар–жагы узундук бирдигине барабар болгон квадраттар саны менен өлчөнөт.

3-касиет. *Жагы бир узундук чен бирдигипе барабар болгон квадраттын аянты бирге барабар.*

Ошентип, төмөнкүдөй теорема орундуу болот.

Теорема.

Жагынын узундугу a га барабар квадраттын аянты a^2 ка барабар.

Аянт латинче чоң тамга S менен белгиленет. Демек, квадрат үчүн $S=a^2$ формула орундуу болуп, узундук чен бирдиги квадраты менен кошо айтылат.

3. Теңдеш фигуралар.

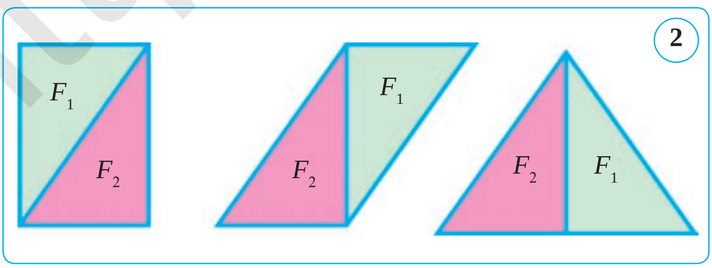
Аныктама. *Эгерде эки көп бурчтуктан бирин бир нече бөлүккө бөлүп, бул бөлүктөрдү башкача жайлаштырганда экинчи көп бурчтук алынса, анда мындай көп бурчтуктарга* ***тең түзүлгөндөр*** *дейилет.*

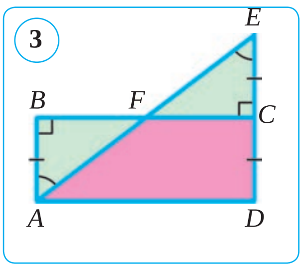
Эгерде эки көп бурчтуктун аянттары барабар болсо, алар ***теңдеш көп бурчтуктар*** деп аталат. 2-сүрөттөгү көп бурчтуктар теңдеш.

Барабар көп бурчтуктар теңдеш (1-касиет), бирок тескери тастык, жалпысынан алганда, туура болбойт: эгерде эки фигура теңдеш болсо, мындан алардын барабардыгы келип чыкпайт.

Маселе. $ABCD$ тик бурчтугу DC жагында C чокусуна салыштырмалуу D чекитинде симметриялуу E чекит белгиленген (3-сүрөт). ADE үч бурчтугу аянтынын $ABCD$ тик бурчтугунун аянтына барабардыгын далилде.

Далилдөө. AE жана BC жактар F чекитте кесишсин. ABF жана ECF үч бурчтуктар барабар (катети жана тар бурчу боюнча: $AB=EC$, $\angle BAF=\angle E$). Натыйжада ADE үч бурчтугу $AFCD$ трапеция менен ECF үч бурчтугунан,





ABCD тик бурчугу болсо ошол *AFCD* трапеция менен *ECF* га барабар болгон *ABF* үч бурчтугунан түзүлгөн, демек, *ADE* үч бурчтугу менен *ABCD* тик бурчтугу тең түзүлгөн (б. а. теңдеш). Ушуну далилдөө талап кылынган эле.

Аянт чоңдук болгондуктан, чоңдуктардын бардык касиеттерине ээ болот. Аларды бир түрдөгү чоңдуктар өңдүү кошууга жана оң санга көбөйтүүгө болот. Эки аянтты кошууда жана санга көбөйтүүдө аянт алынат.

Практикада аянтка ээ ар кандай фигуранын аянтын ченөөгө же эсептөөгө болот. Көбүнесе түрдүү аянттарды аныктоодо формулалардан пайдаланылат. Кандайдыр фигуралардын аянттарын эсептөө формулаларын чыгаруу менен кийинки темаларда алектенебиз.

Суроо, маселе жана тапшырмалар

1. 1) Жөнөкөй фигура деп эмнеге айтылат?
2) Фигуранын аянты дегенде эмнени түшүнөсүң?
3) Аянттын негизги касиеттерин айт.
4) Кандай эки көп бурчтукка тең түзүлгөн дейилет?
5) Теңдеш фигуралар эмне? Теңдеш фигуралар барабарбы?

2. Квадраттын жагы: 1) 1,3 см; 2) 0,15 дм; 3) 2,5 см; 4) 18 дм; 5) 2,5 м. Квадраттын аянтын тап.

3. Квадраттын аянты: 1) 16 дм^2; 2) 144 см^2; 3) 121 см^2; 4) 49 мм^2; 5) 196 см^2; 6) 0,64 дм^2; 7) 6,25 м^2. Квадраттын жагын тап.

4. Периметринин жактары 54 см жана 42 см ге барабар болгон тик бурчтуктун периметрине барабар болгон квадраттын аянтын тап.

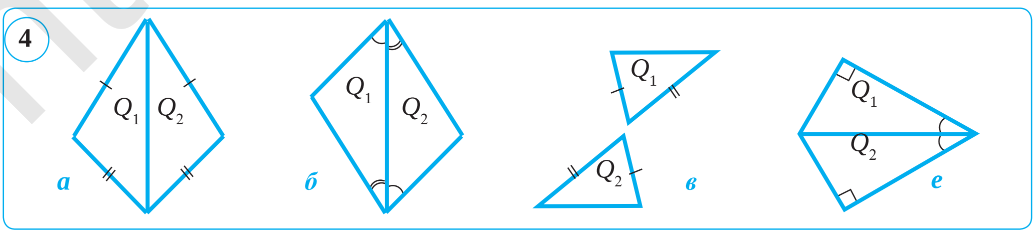
5. 4-сүрөттөгү Q_1 жана Q_2 үч бурчтуктар теңдеш. Ошону далилде.

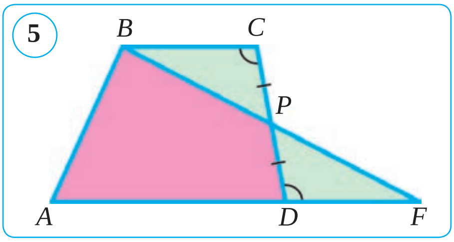
6. Квадраттын аянты 36 см^2. Эгерде анын бардык жагы:
1) эки эсе узайтылса; 2) үч эсе кыскартылса;
3) 2 см ге узайтылса, анын аянты кандайча өзгөрөт?

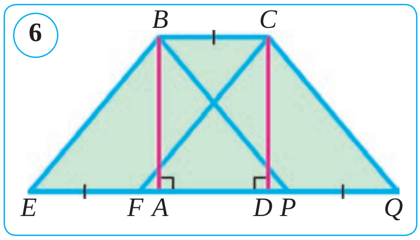
Үлгү. Аянты 81 см^2 ге барабар болгон квадраттын бардык жактары 1 см ге кыскартылса, анын аянты кандайча өзгөрөт?

Чыгарылышы. Берилген квадраттын жагы $a=9$ см. Жаңы квадраттын жагы $a_1=a-1=9-1=8$ (см). Анда $S_ж=8^2=64$ (см^2). Берилген квадраттын жактары 1 см ге азайтылса, анын аянты

$S-S_{ж.}=81-64=17$ (см^2) ге азаят. *Жообу:* 17 см^2 ге азаят.







7. Тең түзүлгөн эки тик бурчтуктан: 1) бул тик бурчтуктардын барабардыгы; 2) алардын теңдештиги келип чыгабы?

8. Эгерде квадраттын бардык жагы: 1) n эсе узайтылса; 2) k эсе азайтылса, анын аянты кандайча өзгөрөт?

9. (*Практикалык иш.*) Кандайдыр квадратты түз. Жагы ошол квадраттын жагынан 2 эсе чоң болгон экинчи квадратты түз. Экинчи квадраттын аянты биринчи квадраттын аянтынан канча эсе чоң?

10. AD – $ABCD$ трапециянын чоң негизи болсун. CD жагынын ортосу P чекитте жана B чокусу аркылуу AD нурун F чекитте кескен түз сызык жүргүзүлгөн (5-сүрөт). $S_{ABCD}=S_{ABF}$ экенин далилде.

Далилдөө. 1) $\triangle BCP=\triangle FDP$ – жагы, ага жанаша эки бурчу боюнча ($CP=...$ – ..., $\angle BCP=\angle...$–... жана ... параллель түз сызыктарды ... кесүүчү кескенде алынган ... бурчтар, $\angle BPC=\angle...$– ... болгондуктан) барабар, б. а. $S_{BCP}=...$. 2) $S_{ABCD}=S_{ABPD}+...$, $S_{ADP}=S_{ABPD}+...$, ошондуктан $S_{ABCD}=...$.

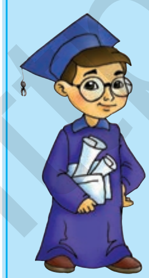
Чекиттердин ордуна тиешелүү жоопторду жаз.

11. Аянты: 1) 2,25 см^2; 2) 0,81 дм^2; 3) 289 мм^2; 4) 5,76 м^2; 5) 400 дм^2 ге барабар болгон квадраттын периметрин тап.

12. 6-сүрөттө берилген көп бурчтуктардан теңдештерин тап.

13. Өзбекстандын аянты 448,9 миң км^2. Анын болжолдуу 80% ын тегиздик түзөт. Аянттын тегиздик бөлүгү канча миң квадрат километр?

Муну билген пайдалуу!



- ***S*** – латинче «***superfacies***» сөзүнөн алынган болуп, «***сырт, бет***» маанилерин билдирет.
- Континент, мамлекеттердин чек аралары квадрат километрлерде, чоң эгин талаалары гектарларда, анчалык чоң эмес жер аянттары ар (сотых) да өлчөнөт.

Өзбекстан Республикасынын аянты – 448 900 км^2

46–47. ТИК БУРЧТУКТУН ЖАНА ПАРАЛЛЕЛОГРАММДЫН АЯНТЫ

1. Тик бурчтуктун аянты.

Тик бурчтуктун аянты жанаша жактары узундуктарынын көбөйтүндүсүн барабардыгын билесиң жана бул боюнча маселелер чыгаргансың.

Азыр бул аткарылган иштин теориялык жактан тууралыгын көрсөтөбүз.

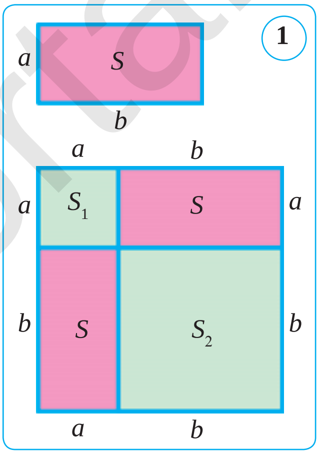
Теорема.

Жактары *a* жана *b* болгон тик бурчтуктун аянты

$$S=a\cdot b$$

формуласы менен эсептелет.

Далилдөө. Жактары a жана b болгон тик бурчтукту алалы, мында a жана b – каалагандай оң сандар. $S=a\cdot b$ экенин далилдейбиз.



Теореманы далилдөө үчүн жагы $(a+b)$ болгон квадратты түзөбүз. Аны 1-сүрөттө көрсөтүлгөн фигура сыяктуу бөлүктөргө бөлөбүз. Мында квадраттын аянты жагы a жана b га барабар эки квадраттан, жактары a жана b болгон эки тик бурчтуктан турганын көрүүгө болот. Ошентип, жагы $(a+b)$ болгон квадраттын аянты S_1+2S+S_2 ге барабар. Экинчи жактан аянттын касиети боюнча, бул аянт $(a+b)^2$ ка барабар, б. а.

$$S_1+2S+S_2=(a+b)^2, \text{ же}$$

$$S_1+2S+S_2=a^2+2ab+b^2.$$

Бул барабардыктан $S_1=a^2$, $S_2=b^2$ экенин эсепке алсак,

$$S=a\cdot b$$

болгондугу келип чыгат. Теорема далилденди.

1-маселе. Тик бурчтуктун аянты 150 см^2 ге барабар, жактарынын катышы болсо $3:2$ сыяктуу. Ошол тик бурчтуктун периметрин тап.

Чыгарылышы. Тик бурчтуктун кичине жагы $b=2x$ см болсун. Чоң жагынын узундугу $a=3x$ см ден пайдаланып, теңдеме түзөбүз жана чыгарабыз:

$$S=3x\cdot 2x, \text{ б. а. } S=6x^2.$$

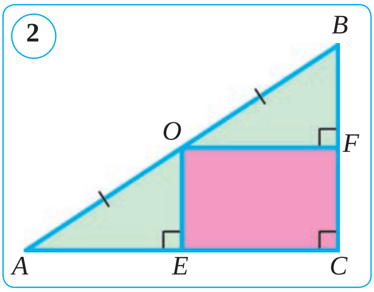
Мындан $x^2=S:6$, $x^2=150:6$, $x^2=25$, $x=5$ (см).

Демек, тик бурчтуктун кичине жагы: $b=2\cdot 5=10$ (см) ге, чоң жагы болсо $a=3\cdot 5=15$ (см) ге барабар.

Эми анын периметрин эсептейбиз:

$$P = 2\cdot(a+b) = 2\cdot(15+10) = 2\cdot 25 = 50\,(\text{см}).$$

Жообу: $P = 50$ см.



2-маселе. Тик бурчтуу үч бурчтуктун катеттери 12 см жана 24 см. Гипотенузанын ортосунан үч бурчтуктун катеттерине перпендикулярлар жүргүзүлгөн. Алынган тик бурчтуктун аянтын тап.

Берилген: тик бурчтуу $\triangle ABC$ да: $AO = OB$, $OE \perp AC$, $OF \perp CB$, $AC = 24$ см, $BC = 12$ см (2-сүрөт).

Табуу керек: S_{CEOF}.

Чыгарылышы. Белгилүү болгондой, бир түз сызыкка жүргүзүлгөн эки перпендикуляр өз ара параллель болот. Фалестин теоремасы боюнча:

$$AE = EC = 0{,}5AC = 0{,}5\cdot 24 = 12\ (\text{см}),$$

$$CF = FB = 0{,}5BC = 0{,}5\cdot 12 = 6\ (\text{см}).$$

Демек, $S_{CEOF} = CE\cdot CF = 12\cdot 6 = 72$ (см^2). *Жообу:* 72 см^2.

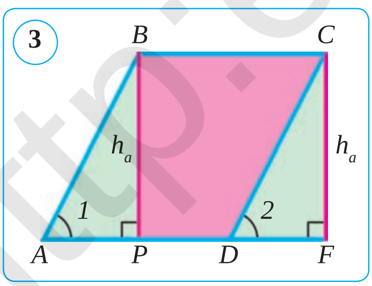
2. Параллелограммдын аянты.

Параллелограммдын ар кандай жагын анын *негизи* деп алууга болот, анда карама-каршы жагынын каалагандай чекитинен негизди өзүндө камтыган түз сызыкка жүргүзүлгөн перпендикулярга параллелограммдын *бийиктиги* дейилет. Бийиктик жакка же анын уландысына түшүшү мүмкүн. 3-сүрөттө *BP* жана *CF* – *ABCD* параллелограммдын бийиктиктери.

Теорема.

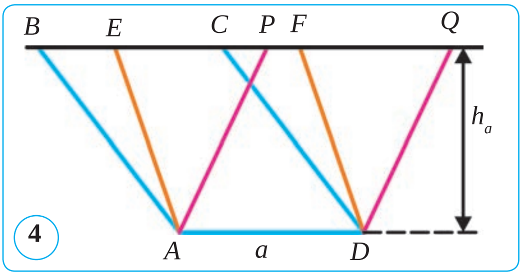
Параллелограммдын аянты негизи менен бийиктигинин көбөйтүндүсүнө барабар: $S = a\cdot h_a$.

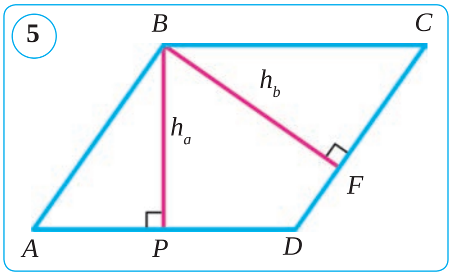
ABCD параллелограммынын негизи үчүн $AD = a$ жак алынган, бийиктиги болсо $h_н$ ка барабар болсун (3-сүрөт).



$S = a\cdot h_н$ экенин далилдөө талап кылынат.

Далилдөө. Негизи параллелограммдын *BC* жагына барабар, бийиктиги болсо $h_н$ тан турган *PBCF* тик бурчугун түзөбүз. *ABP* жана *DCF* үч бурчтуктар барабар (гипотенуза жана тар бурчу боюнча: $AB = DC$ – гипотенузалар, $\angle 1 = \angle 2$ – тиешелүү бурчтар). *ABCD* параллелограмм *PBCD* трапеция менен *ABP* үч бурчтугунан, *PBCF* тик бурчтугу болсо ошол *PBCD* трапеция менен *ABP* га барабар болгон *DCF* үч бурчтуктан түзүлгөн. Демек, *ABCD* параллелограммы менен түзүлгөн *PBCF* тик бурчтугу тең түзүлгөн (б. а., теңдеш).





Мындан, *ABCD* параллелограммынын аянты *PBCF* тик бурчтугунун аянтына, б. а. $ah_н$ барабар, деген натыйжа алынат.

Ошентип, негизи *a* жана ага жүргүзүлгөн бийиктиги $h_н$ болгон параллелограммдын *S* аянты төмөнкүдөй формула боюнча эсептелет:

$$S = a \cdot h_н.$$

Ушул формуланы далилдөө талап кылынган эле.

1-натыйжа. Эгерде эки параллелограмм бир негизге ээ жана бийиктиктери барабар болсо, алар тең түзүлгөн болот.

Берилген: ABCD, *AEFD* жана *APQD* параллелограммдары бир $AD = a$ негизге ээ жана бийиктиктери барабар ($h_н$) (4-сүрөт).

Далилдөө керек: ABCD, *AEFD*, *APQD* параллелограммдары тең түзүлгөн.

Далилдөө. Мисалы, *ABCD* жана *AEFD* параллелограммдарынын тең түзүлгөндүгүн далилдейбиз. *BAE* жана *CDF* үч бурчтуктары барабар (үч бурчтуктар барабардыгынын биринчи белгиси боюнча), анткени $BA = CD$, $AE = DF$ жана $\angle BAE = \angle CDF$ (тиешелүү жактары параллель бурчтар болгондуктан). Демек, *ABCD* параллелограммы *AECD* трапеция менен *BAE* үч бурчтугунан, *AEFD* параллелограммы болсо *AECD* трапеция менен *BAE* үч бурчтугуна барабар болгон *CDF* үч бурчтугунан түзүлгөн. Демек, *ABCD* жана *AEFD* параллелограммдары тең түзүлгөн.

Ушуга окшош, калган параллелограммдардын тең түзүлгөндүгүн далилде.

3-маселе. Параллелограммдын жактары 25 см жана 20 см, биринчи жагына жүргүзүлгөн бийиктик 8 см. Ошол параллелограммдын экинчи жагына жүргүзүлгөн бийиктигин тап.

Берилген: ABCD параллелограммда:

$$AD = a = 25 \text{ см}, \ DC = b = 20 \text{ см}, \ h_н = 8 \text{ см (5-сүрөт).}$$

Табуу керек: $h_б$.

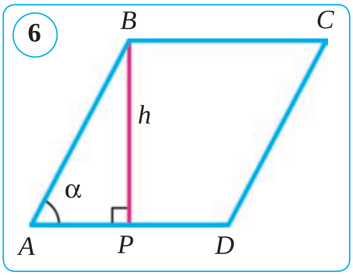
Чыгарылышы. 1) $S = ah_н = 25 \cdot 8 = 200$ (см²).

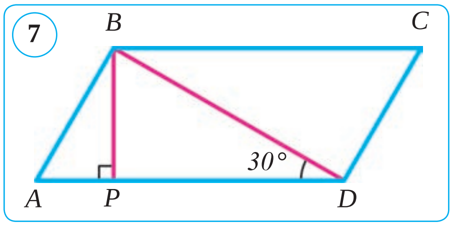
2) $S = bh_б$, б. а. $200 = 20 \cdot h_б$. Мындан $h_б = 200 : 20 = 10$ (см). *Жообу:* 10 см.

2-натыйжа. Параллелограммдын аянты анын эки жагы менен алардын арасындагы бурч синусунун көбөйтүндүсүнө барабар. Ошону далилде.

Чыгарылышы. *ABCD* параллелограммында $AD = a$, $AB = b$ жана $\angle BAD = \alpha$ болсун. Анда параллелограммдын аянты $\boldsymbol{S = ab\sin\alpha}$ формула боюнча эсептелет. Ошону далилдейбиз.

ABCD параллелограммына *BP* бийиктигин жүргүзүп, $BP = h_н = h$ менен белгилейбиз (6-сүрөт). Анда *h* бийиктик тик бурчтуу *ABP* үч бурчтугунун





α тар бурчунун каршысында жаткан катет болот. h ты b жак менен α бурчу синусунун көбөйтүндүсү менен туюнтабыз: $h=b\sin\alpha$.

Параллелограммдын аянтын эсептөө $S=ah$ формуласына h тын бул туюнтмасын коюп, төмөнкү формуланы алабыз: $S=ab\sin\alpha$.

4-маселе. *Берилген:* $ABCD$ – параллелограмм, $AD=20$ см, $BD=16$ см, $\angle BDA=30°$.

Табуу керек: S_{ABCD}.

Чыгарылышы. 1-усул. 1) Берилген параллелограммдын BP бийиктигин жүргүзөбүз жана BDP үч бурчтугун карап көрөбүз (7-сүрөт). Ал тик бурчтуу, анткени $BP\perp AD$. BP бийиктигин табабыз. 30° туу бурчтун каршысындагы катет гипотенузанын жарымына барабар, ошондуктан

$$BP=0{,}5BD=0{,}5\cdot16=8\ (\text{см}).$$

2) Ошентип, $ABCD$ параллелограммдын аянты төмөнкүгө барабар болот:

$$S=AD\cdot BP=20\cdot8=160\ \ (\text{см}^2)$$

2-усул. Тик бурчтуу BDP үч бурчтугунан BP ны BD жак (гипотенуза) жана $\angle BDP=30°$ бурчтун синусу менен туюнтабыз жана параллелограмм аянтынын формуласына коюп, изделген аянтты табабыз:

$$S=AD\cdot BP=AD\cdot BD\cdot\sin\angle DP=20\cdot16\cdot\sin30°=20\cdot16\cdot0{,}5=160\ \ (\text{см}^2).$$

Жообу: $S=160$ см^2.

Суроо, маселе жана тапшырмалар

1. 1) Тик бурчтуктун аянты эмнеге барабар?

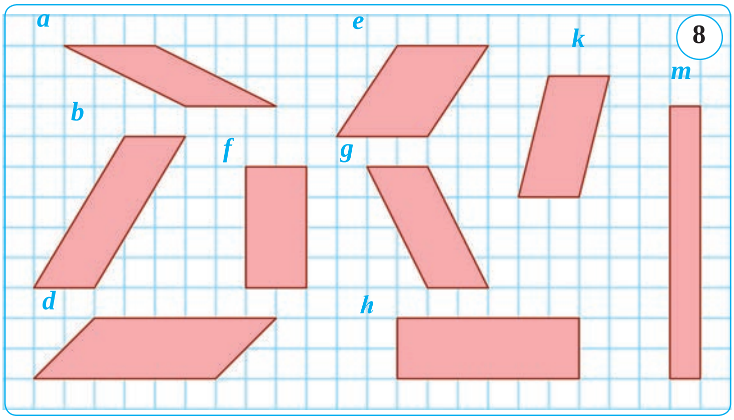
2) Параллелограммдын негизи жана бийиктиги деген эмне?

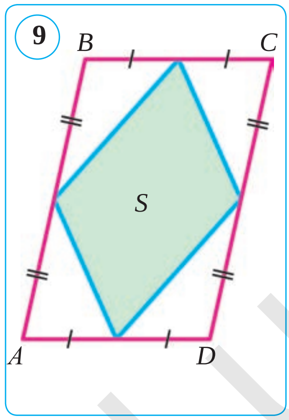
3) Параллелограммдын аянты анын эки жанаша жагы жана алардын арасындагы бурч боюнча кантип табылат?

2. Тик бурчтуктун эки жагы: 1) 30 см жана 2,9 см; 2) 34 дм жана 0,6 дм; 3) 2,5 дм жана 12 см. Анын периметрин жана аянтын тап.

3. Тик бурчтуктун бир жагы 15 дм, экинчи жагы болсо андан 5 эсе чоң. Ошол тик бурчтуктун периметрин жана аянтын тап.

4. Аянты 240 м^2 болгон баскетбол аянты спорт аянтынын 15% ын түзөт. Жалпы спорт аянты мектеп аянтынын 32% ын түзөт. Мектептин аянтын тап.





5. Тик бурчтуктун бир жагы 23 см, экинчи жагы болсо андан 17 см ге узун. Тик бурчтуктун периметрин жана аянтын тап.

6. Эгерде тик бурчтуктун аянты 20 см^2 жана 1) узундугу 5 см ге; 2) узундугу туурасынын 125 % ына; 3) жактарынан бири x ке барабар болсо, периметри эмнеге барабар болот?

7. Эгерде $ABCD$ тик бурчтугунда: 1) $AB=9$ см, $BC=4$ см; 2) $AB:BC=5:7$, $P_{ABCD}=48$ см болсо, анын аянтын тап.

8. Параллелограммдын жагы 16 см ге, ага жүргүзүлгөн бийиктик болсо 9 см ге барабар. Ошол параллелограммга теңдеш квадраттын жагын тап.

9. a – параллелограммдын негизи, h – бийиктиги, S – аянты. Эгерде:

1) $a=10$ см, $h_н=0{,}5$ м болсо, S ти; 2) $h_н=4$ см, $S=48$ см^2 болсо, a ны; 3) $a=24$ см, $S=120$ см^2 болсо, $h_н$ ты тап.

10. 8-сүрөттөгү теңдеш параллелограммдарды тап.

11. Эгерде тик бурчтуктун: 1) негизи 5 эсе азайтылып, бийиктиги 8 эсе узайтылса; 2) негизи да, бийиктиги да 2,5 эсе азайтылса, анын аянты кандайча өзгөрөт?

12. 9-сүрөттөгү S фигуранын аянты параллелограммдын аянтынын кандай бөлүгүн түзөт?

13. Тик бурчтуктун эки жагы: 1) 24 см жана 20 см; 2) 3,5 дм жана 8 см; 3) 8 м жана 4,5 м; 4) 3,2 дм жана 1,5 дм. Анын аянтын тап.

14. Параллелограммдын аянты 36 см^2, бийиктиктери 3 см жана 4 см. Ошол параллелограммдын периметрин тап.

15. Параллелограммдын жактары 20 см жана 28 см, алардын арасындагы бурч 30° ка барабар. Параллелограммдын аянтын эки усул менен тап.

48. ҮЧ БУРЧТУКТУН АЯНТЫ

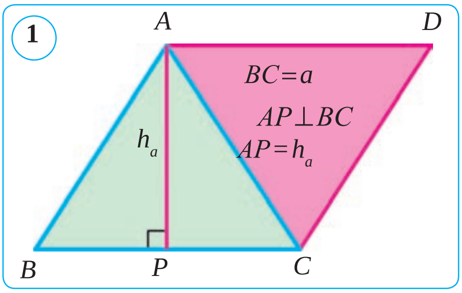
Үч бурчтуктун аянтын эсептөө формуласын табуу үчүн параллелограмм формасына келтирүү усулунан пайдаланабыз.

Теорема.

Үч бурчтуктун аянты анын негизи менен бийиктиги көбөйтүндүсүнүн жарымына барабар:

$$S=\frac{1}{2}a\cdot h_a,$$

мында *a* – үч бурчтуктун негизи, h_a – негизге жүргүзүлгөн бийиктик.



Далилдөө. *ABC* – берилген үч бурчтук (1-сүрөт). $\triangle ABC$ ны сүрөттө көрсөтүлгөндөй *ABCD* (негизи *BC*) параллелограммга толтурабыз. $\triangle BAC=\triangle DCA$ барабар, анткени параллелограммдын диагоналы аны эки барабар үч бурчтукка бөлөт жана алардын аянттары барабар. Демек, *ABCD* параллелограммынын аянты $\triangle ABC$ аянтынын экиленгенине барабар: $2S=a\cdot h_{н}$.

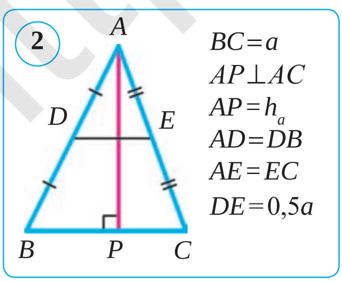
Мындан, $S=\frac{ah_a}{2}$. Теорема далилденди.

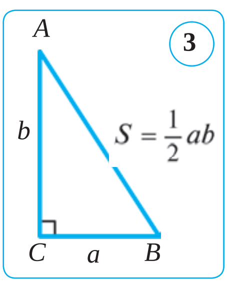
Үч бурчтуктун аянтын эсептөө формуласын башкача окуса да болот: ***үч бурчтуктун аянты анын орто сызыгы менен бийиктигинин көбөйтүндүсүн барабар*** (2-сүрөт):

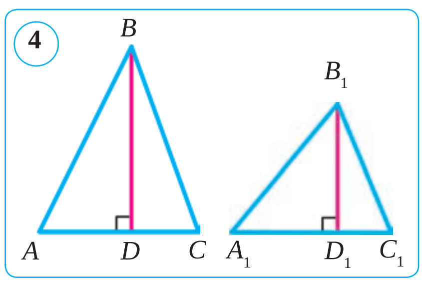
$$S=\frac{a}{2}\cdot h_a\cdot$$

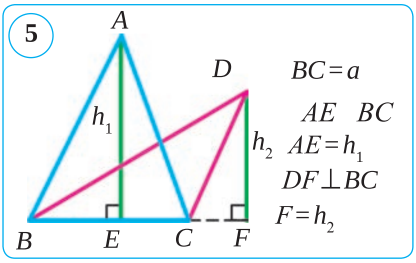
1-натыйжа. *Тик бурчтуу үч бурчтуктун аянты катеттеринин көбөйтүндүсүнүн жарымына барабар,* анткени бир катетин негиз жана экинчисин бийиктик иретинде алууга болот (3-сүрөт).

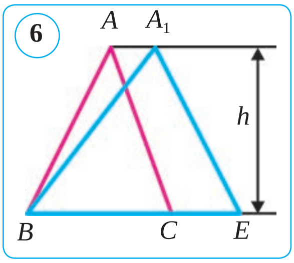
2-натыйжа. *Эки үч бурчтуктун аянттарынын катышы негиздери менен бийиктиктери көбөйтүндүсүнүн катышы сыяктуу болот* (4-сүрөт).

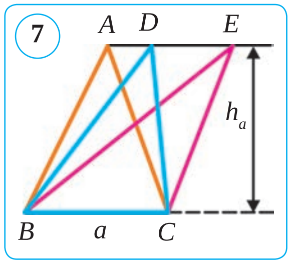












Далилдөө. $\dfrac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}}=\dfrac{0,5AC\cdot BD}{0,5A_1C_1\cdot B_1D_1}=\dfrac{AC\cdot BD}{A_1C_1\cdot B_1D_1}$.

3-натыйжа. *Негиздери барабар болгон эки үч бурчтук аянттарынын катышы бийиктиктеринин катышы сыяктуу болот* (5-сүрөт).

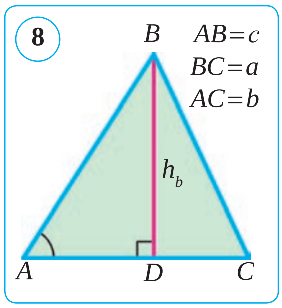
Далилдөө. $\dfrac{S_{ABC}}{S_{DBC}}=\dfrac{0,5a\cdot h_1}{0,5a\cdot h_2}=\dfrac{h_1}{h_2}$.

4-натыйжа. *Бийиктиктери барабар болгон эки үч бурчтук аянттарынын катышы негиздеринин катышы сыяктуу болот* (6-сүрөт).

Далилдөө. $\dfrac{S_{ABC}}{S_{A_1BE}}=\dfrac{0,5\cdot BC\cdot h}{0,5\cdot BE\cdot h}=\dfrac{BC}{BE}=\dfrac{a}{a_1}$, мында $BC=a$, $BE=a_1$.

5-натыйжа. *Негиздери менен бийиктиктери барабар болгон үч бурчтуктар теңдеш болот* (7-сүрөт).

Далилдөө. $S_{BAC}=S_{BDC}=S_{BEC}=0,5ah_н$.



6-натыйжа. *Үч бурчтуктун аянты анын эки жагы менен алардын арасындагы бурч синусунун көбөйтүндүсүнүн жарымына барабар* (8-сүрөт).

Далилдөө. ABC үч бурчтугунун жактары $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$ болсун. Анда $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A$ экенин далилдейбиз. Ал үчүн ABC үч бурчтукка $BD=h_b$ бийиктигин жүргүзөбүз (8-сүрөт). h_b ты c жак жана A бурчунун синусу менен туюнтабыз: $h_b=c\sin A$. Үч бурчтуктун аянтын эсептөө формуласы $S=\dfrac{1}{2}bh_b$ ка h_b тын ошол туюнтмасын коюп, төмөнкү формуланы алабыз:

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A.$$

Үч бурчтуктун аянтын a, b жактары жана C бурчунун синусу, a, c жактары жана B бурчунун синусу аркылуу эсептөө формулалары ушуга окшош келтирип чыгарылат.

Ошентип, үч бурчтуктун аянты эки жагы жана алар арасындагы бурчунун синусу боюнча төмөнкү формулалар боюнча эсептелет:

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A.$$

Үч бурчтуктун аянтын жактары аркылуу эсептөө формуласы I кылымда жашаган байыркы грек окумуштуусу **Герон** тарабынан табылган болуп, ал *Герон формуласы* деп аталат. Бул формула үч бурчтуктун үч жагынын узундугу белгилүү болгондо анын аянтын эсептөө үчүн иштетилет.

Герон формуласынын далилин келтирип чыгарабыз.

Белгилүү болгондой, үч бурчтуктун аянты анын негизи менен бийиктиги көбөйтүндүсүнүн жарымына барабар:

$$S = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}b \cdot h_b = \frac{1}{2}c \cdot h_c .$$

Бийиктиктин ордуна анын үч бурчтук жактары аркылуу туюнтмасы

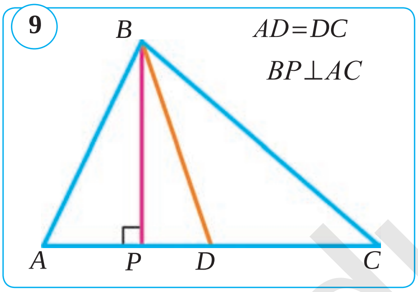
$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\ \beta = 90°,\ h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ жана}$$

$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

ларды коюп, аны жөнөкөйлөштүрүп, ошол Герон формуласын алабыз:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ мында } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

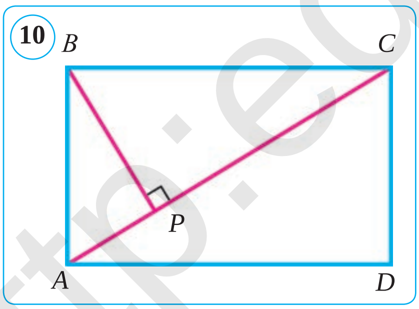
1-маселе. Үч бурчтуктун медианасы аны эки теңдеш үч бурчтукка бөлүшүн далилде.



Далилдөө. $BD - ABC$ үч бурчтуктун медианасы болсун (9-сүрөт). ABD жана CBD үч бурчтуктары барабар, AD жана DC жактарга жана жалпы BP бийиктикке ээ, б. а. үч бурчтуктар 5-натыйжа боюнча теңдеш:

$$S_{ABD} = S_{CBD}.$$

2-маселе. Берилген: $ABCD$ – тик бурчтугу, $AC = 20$ см, $BP = 12$ см, $BP \perp AC$ (10-сүрөт).



Табуу керек: S_{ABCD}.

Чыгарылышы. 1) $S_{ABC} = 0{,}5 AC \cdot BP =$
$= 0{,}5 \cdot 20 \cdot 12 = 120$ (см^2).

2) $S_{ABCD} = 2 \cdot S_{ABC} = 2 \cdot 120 = 240$ (см^2).

Жообу: $S_{ABCD} = 240$ см^2.

Суроо, маселе жана тапшырмалар

1. 1) Үч бурчтуктун аянты эмнеге барабар?
2) Тик бурчтуу үч бурчтуктун аянты кандай эсептелет?
3) Жактары боюнча үч бурчтуктун аянты кандай эсептелет?

2. Тик бурчтуу үч бурчтуктун катеттери: 1) 4 см жана 7 см; 2) 1,2 дм жана 25 см. Ошол тик бурчтуу үч бурчтуктун аянтын тап.

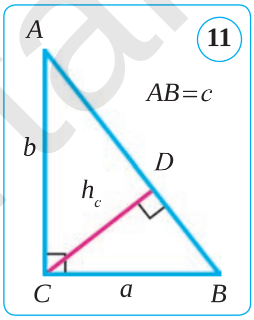
3. Үч бурчтуктун негизи 20 см, бийиктиги 8 см. Экинчи үч бурчтуктун негизи 40 см. Алар теңдеш болсун үчүн экинчи үч бурчтуктун бийиктиги кандай болууга тийиш?

4. ABC үч бурчтугунда $AB=5AC$. Үч бурчтуктун B жана C чокуларынан жүргүзүлгөн бийиктиктеринин катышы эмнеге барабар?

5. Белгисиз өлчөмдөрдү тап. a – үч бурчтуктун негизи, h – негизине жүргүзүлгөн бийиктик, S – үч бурчтуктун аянты.

	1	2	3	4	5	6
a	69 см	0,8 дм	?	0,25 м	?	0,9 м
h_a	0,5 м	?	20 дм	100 см	4,8 см	?
S	?	4 см^2	2000 см^2	?	9,6 мм^2	36 дм^2

6. Катеттеринин (a жана b) көбөйтүндүсү гипотенуза (c) менен тик бурчтуктун чокусунан гипотенуза жүргүзүлгөн бийиктиктин (h_c) көбөйтүндүсүнө барабар (11-сүрөт).



Чыгарылышы. Эгерде катеттерден бирин негиз үчүн кабыл алсак, анда экинчиси бийиктик болот. Ошондуктан, тик бурчтуу үч бурчтуктун аянты катеттери көбөйтүндүсүнүн жарымына барабар болот:

$S=\frac{1}{2}ab$, мындан $ab=2S$; $S=\frac{1}{2}ch_c$, мындан $ç_c=2S$.

Демек, $ab=ç_c$ экен. Ушуну далилдөө талап кылынган эле.

Үч бурчтуктун катеттери: 1) 12 см жана 16 см; 2) 5 см жана 12 см ге барабар. c (Пифагордун теоремасы боюнча) жана h_c ($ab=ç_c$ боюнча) ты тап.

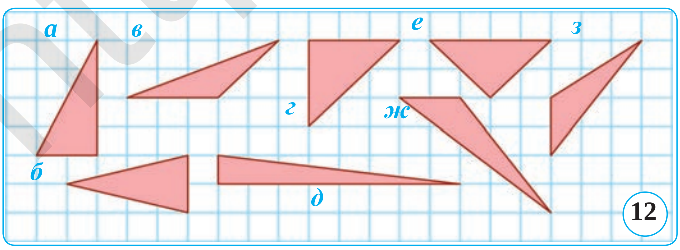
7. 12-сүрөттөгү теңдеш үч бурчтуктарды көрсөт. Жообуңду негизде.

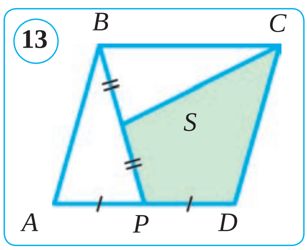
8. Жактары: 1) 39 см, 42 см, 45 см; 2) 35 см, 29 см, 8 см; 3) 20 см, 20 см, 32 см ге барабар болгон үч бурчтуктун аянтын тап.

9. 13-сүрөттөгү S фигуранын аянты параллелограмм аянтынын кандай бөлүгүн түзөт?

10. Үч бурчтуктун аянты 150 см^2 ге барабар. Үч бурчтуктун бийиктиктери 15 см, 12 см жана 20 см ге барабар болсо, анын периметрин тап.

11. Үч бурчтуктун эки жагы 5 дм жана 6 дм, алардын арасындагы бурч 30°. Үч бурчтуктун аянтын тап. Маселени эки усул менен чыгар.





49–50. РОМБДУН ЖАНА ТРАПЕЦИЯНЫН АЯНТЫ

1. Ромбдун аянты. Ромб – жактары барабар болгон параллелограмм. Жагы a жана бийиктиги $h_н$ болгон ромбдун аянты

$$S = ah_н$$

формула боюнча эсептелет.

Белгилүү болгондой, ромбдун бардык бийиктиктери өз ара барабар.

Мындан тышкары, ромбдун аянтын диагоналдары аркылуу да эсептөөгө болот.

Теорема.

Ромбдун аянты диагоналдары көбөйтүндүсүнүн жарымына барабар:

$$S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$$

бул жерде d_1 жана d_2 – ромбдун диагоналдары.

Далилдөө. Белгилүү болгондой, ромбдун AC диагоналы аны эки өз ара тең капталдуу үч бурчтукка бөлөт (1-сүрөт). Экинчи диагонал болсо биринчисине перпендикуляр болуп, алынган үч бурчтуктар бийиктиктеринин суммасына барабар болот. Ошондуктан ромбдун аянты:

$$S = S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC} = \frac{1}{2}AC \cdot BO + \frac{1}{2}AC \cdot DO = \frac{1}{2}AC \cdot (BO + DO) =$$

$$= \frac{1}{2}\underline{AC} \cdot \underline{\underline{BD}} = \frac{1}{2}\underline{d_1} \cdot \underline{\underline{d_2}}.$$

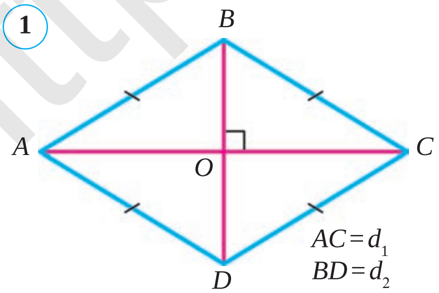
Демек, $S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$. Теорема далилденди.

1-маселе. $ABCD$ ромбдун жагы a га, тар бурчу болсо α га барабар. Ошол ромбдун аянтын тап. $\alpha = 30°$ та анын аянтын эки усул менен тап.

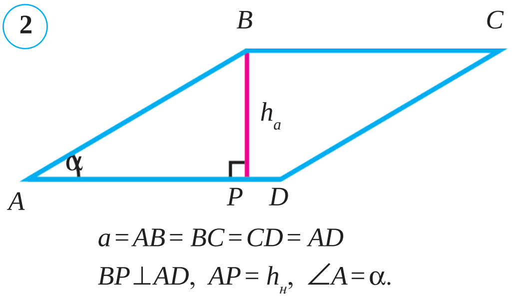
Чыгаруу. 1) $ABCD$ ромбдо $AB = BC = CD = AD = a$, $\angle A = \alpha$ болсун. $BP \perp AD$ *ны* жүргүзөбүз (2-сүрөт). Анда $h_н$ бийиктик тик бурчтуу ABP үч бурчтуктун α тар бурчунун каршысында жаткан катет болот. $h_н$ ты α бурчунун синусу менен туюнтабыз: $h_н = a\sin\alpha$. Ромбдун аянтын эсептөө формуласы $S = ah_н$ ка $h_н$ ын бул туюнтмасын коюп, төмөнкү формуланы алабыз:

$$S = a^2 \sin\alpha.$$

1



2



2) Ромбдун аянтын $S=a^2\sin\alpha$ формуласынан пайдаланып табабыз:

$$S=a^2\sin30°=a^2\cdot0{,}5=0{,}5a^2 \text{ (кв. бирд.)}.$$

Жообу: $S=0{,}5a^2$ кв. бирд.

2-маселе. Ромбдун диагоналдарынан бири экинчисинен 1,5 эсе чоң, аянты болсо 27 см² ге барабар. Ошол ромбдун диагоналдарын тап.

Берилген: $ABCD$ – ромб; $S_{ABCD}=27$ см²; $AC=1{,}5BD$ (1-сүрөткө к.)

Табуу керек: AC, BD.

Чыгаруу. $BD=x$ см болсун, анда $AC=1{,}5x$ см болот.

$S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD$, буга белгилөөлөрдү коёбуз: $27=\frac{1}{2}\cdot1{,}5x\cdot x$. Анда $x^2=36$ болот, мындан $x=6$ (см). Ошентип,

$$BD=6 \text{ см},\quad AC=1{,}5\cdot6=9 \text{ (см)}.$$

Жообу: 9 см, 6 см.

2. Трапециянын аянты. Каалагандай көп бурчтукту диагоналдар жүргүзүү жолу менен үч бурчтуктарга бөлүүгө болот. Ар кандай көп бурчтуктун аянтын эсептөө үчүн ал баштап үч бурчтуктарга бөлүнөт, соң үч бурчтуктардын аянты эсептелет. Көп бурчтуктун аянты болсо аны түзгөн, бири-бирин каптабаган үч бурчтуктар аянттарынын суммасына барабар болот. Трапециянын аянттарын эсептөөдө ушул усулдан пайдаланабыз.

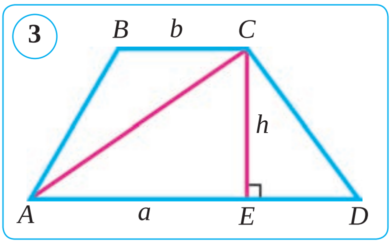
Теорема.

Трапециянын аянты анын негиздери суммасынын жарымы менен бийиктигинин көбөйтүндүсүнө барабар:

$$\boldsymbol{S=\frac{a+b}{2}\cdot h}$$

бул жерде *a* жана *b* – трапециянын негиздери, *h* – бийиктиги.

Далилдөө. Негиздери $AD=a$, $BC=b$ жана бийиктиги $CE=h$ ($CE\perp AD$) болгон $ABCD$ трапецияны көрөлү (3-сүрөт).



Трапецияда AC диагоналын жүргүзөбүз. Мында $ABCD$ трапеция ABC жана ACD үч бурчтуктарга бөлүнөт. Трапециянын аянты болсо ушул үч бурчтуктар аянттарынын суммасына барабар болот.

Параллель түз сызыктардын ортосундагы аралык туруктуу болгондуктан, ABC жана ACD үч бурчтуктарынын бийиктиктери өз ара барабар.

Мындан, $S_{ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot CE=\frac{1}{2}b\cdot h$ жана $S_{ACD}=\frac{1}{2}AD\cdot CE=\frac{1}{2}a\cdot h$.

Трапециянын аянты $S=S_{ABC}+S_{ACD}$, б. а.:

$$S=\frac{1}{2}a\cdot h+\frac{1}{2}b\cdot h \quad \text{же} \quad S=\frac{a+b}{2}\cdot h.$$

Теорема далилденди.

Натыйжа. *Трапециянын аянты орто сызыгы менен бийиктигинин көбөйтүндүсүнө барабар.*

Бул натыйжа трапециянын орто сызыгы негиздери суммасынын жарымына барабардыгынан келип чыгат.

3-маселе. Трапециянын негиздери 15 см жана 30 см ге, аянты 225 см^2 ге барабар. Ошол трапециянын бийиктигин тап.

Чыгаруу. Трапециянын орто сызыгы:

$$\frac{a+b}{2}=\frac{15+30}{2}=\frac{45}{2}=22,5 \text{ (см)}.$$

Демек, трапециянын бийиктиги:

$$h=S_{\text{tr.}}:\frac{a+b}{2}=225:22,5=10 \text{ (см)}.$$

Жообу: $h=10$ см.

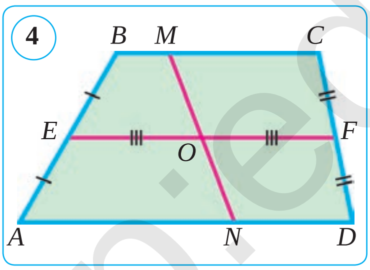
4-маселе. Трапециянын орто сызыгынын ортосунан өтүп, негиздерин кесүүчү түз сызык ушул трапецияны эки теңдеш бөлүккө бөлүшүн далилде.

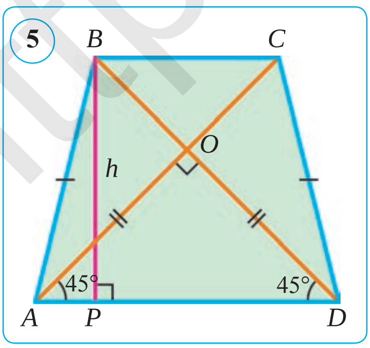
Чыгаруу. $ABCD$ – берилген трапеция ($AD\|BC$), EF – анын орто сызыгы, MN болсо орто сызыгынын ортосу O аркылуу өткөн жана негиздерин M жана N чекиттеринде кесүүчү түз сызык болсун (4-сүрөт). $ABMN$ жана $MNDC$ трапециялар тиешелүү түрдө барабар EO жана OF орто сызыкка жана берилген трапециянын бийиктигине барабар бийиктикке ээ. Демек, бул трапециялардын аянттары барабар, б. а. алар теңдеш:

$$S_{ABMN}=S_{MNDC}.$$

Ушуну далилдөө талап кылынган эле.

5-маселе. Тең капталдуу трапециянын диагоналдары өз ара перпендикуляр болсо, анда трапециянын бийиктиги анын орто сызыгына, аянты болсо бийиктигинин квадратына барабар болот. Ушуну далилде.





Берилген: $ABCD$ трапеция – тең капталдуу ($AB=DC$), $AC\perp BD$, $AD=a$, $BC=b$ болсун (5-сүрөт).

Далилдөө керек:

$$1)\ h=\frac{a+b}{2};\qquad 2)\ S_{тр}=h^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

Чыгаруу. 1) $\triangle AOD$ – тең капталдуу жана тик бурчтуу, ошондуктан $\angle ADO=45°$.

2) B чокусунан $BP\perp AD$ ны жүргүзөбүз. Алынган BPD үч бурчтугу да тең капталдуу жана тик бурчтуу, анткени $\angle ADO=45°$ жана демек, $\angle PBD=45°$. Мындан: $DP=BP$. Белгилүү болгондой, тең капталдуу трапециянын кичине негизинин чокусунан жүргүзүлгөн бийиктиктин касиети боюнча:

$$BP = DP = \frac{a+b}{2}.$$

3) $S_{\text{tr.}} = \frac{a+b}{2} \cdot h = h \cdot h = h^2$ же $S_{\text{tr.}} = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a+b}{2} = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.

Ошентип, тең капталдуу трапециянын диагоналдары өз ара перпендикуляр болгондо, анын бийиктиги орто сызыгына, аянты болсо бийиктигинин квадратына барабардыгы толук далилденди.

Суроо, маселе жана тапшырмалар

1. 1) Ромбдун аянты жагы жана бийиктиги боюнча кандай табылат?
2) Ромбдун аянты диагоналдары аркылуу кандай табылат? Аны туюнт.
3) Трапециянын аянты эмнеге барабар?

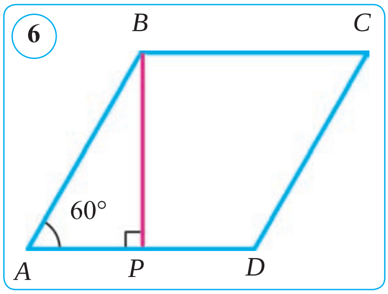
2. Ромбдун аянты 40 см^2, бийиктиги болсо 5 см ге барабар. Ошол ромбдун периметрин тап.

3. Эгерде ромбдун: 1) бийиктиги 16 см, тар бурчу 30°; 2) жагы 1,8 дм, тар бурчу 30°ка барабар болсо, анын аянтын тап.

4. Ромбдун аянты 60 см^2, диагоналдарынан бири 10 см ге барабар. Ошол ромбдун экинчи диагоналын тап.

5. Ромбдун аянты 30 см^2, периметри болсо 24 см ге барабар. Ошол ромбдун бийиктигин тап.

6. *Берилген:* $ABCD$ – ромб. $\angle BAD = 60°$, $BP \perp AD$, $BP = 12$ см (6-сүрөт).



Табуу керек: S.

Чыгаруу. Тик бурчтуу BPA үч бурчтугун көрөбүз. Тар бурчтун синусунун аныктамасы боюнча: $\sin A = \frac{BP}{AB}$. Буга берилгендерди коюп, AB ны табабыз:

$$\sin A = \frac{BP}{AB} \Rightarrow AB = \frac{BP}{\sin A} = \frac{12}{\sin 60°} = 12 : \frac{\sqrt{3}}{2} = 12 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{24}{\sqrt{3}} \text{ (см)}.$$

Жагы менен тар бурчу боюнча ромбдун аянтын табуунун формуласына

$$AB = a = \frac{24}{\sqrt{3}}, \quad \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

маанилерди коюп, төмөнкүнү табабыз:

$$S = a^2 \cdot \sin 60° = \left(\frac{24}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{576}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 96\sqrt{3} \text{ (см}^2).$$

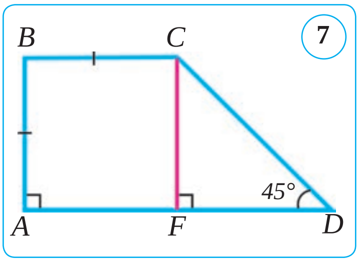
Жообу: $96\sqrt{3}$ см^2.

7. Диагоналдары: 1) 1,5 дм жана 1,8 дм; 2) 24 см жана 15 см; 3) 3,2 см жана 0,5 дм болгон ромбдун аянтын тап.

8. 1) Трапециянын негиздери 11 см жана 18 см ге, бийиктиги болсо 6 см ге барабар. Ошол трапециянын аянтын тап.

2) Трапециянын негизи 26 см, бийиктиги 10 см, аянты болсо 200 см². Ошол трапециянын экинчи негизин тап.

9. $ABCD$ тик бурчтуу трапецияда $AB=BC=18$ см, $\angle D=45°$ (7-сүрөт). Анын аянтын тап. Бош жерлерге тиешелүү жоопторду жаз.



Чыгаруу. $CF\perp AD$ ны жүргүзөбүз. 1) $ABCF$ – квадрат, анткени $ABCF$ төрт бурчтугунун жанаша жактары AB жана ..., ошондуктан $AF=CF=$... (см).

2) $\angle CFD$ – тик бурчтуу, түзүү боюнча $\angle F=90°$ жана шарт боюнча $\angle D=45°$, андыктан $\angle DCF=$...° жана демек, $\angle CFD$ – ... жана $DF=$...=... (см).

3) $AD=AF+$...=... + ...=... (см) жана $S_{ABCD}=$... · ... =... · ... =... (см²).

Жообу: ... см².

10. Ромбдун бурчтарынын катышы 1 : 5 ге, жагы болсо a га барабар. Ошол ромбдун аянтын тап.

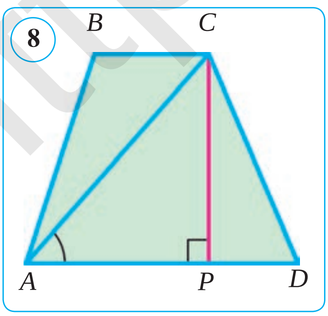
11. $ABCD$ трапецияда: $AD=20\sqrt{2}$ см, $BC=10\sqrt{2}$ см, $AC=24$ см, $\angle CAD=45°$ (8-сүрөт). Трапециянын аянтын тап.

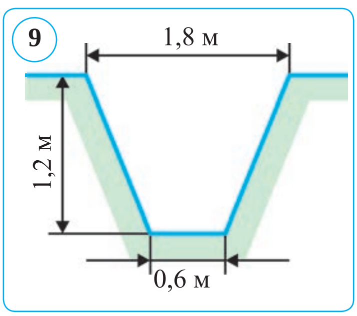
12. Диагоналдары: 1) 3,5 дм жана 1,4 дм; 2) 28 см жана 17 см; 3) 4,2 см жана 1,5 дм болгон ромбдун аянтын тап.

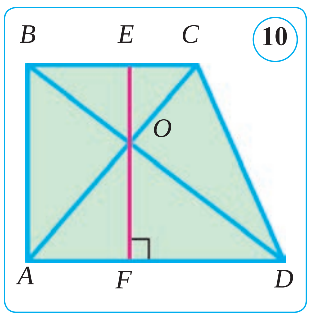
13. Тең капталдуу трапециянын диагоналдары өз ара перпендикуляр жана бийиктиги 5 см ге барабар. Ошол трапециянын аянтын тап.

14. Тең капталдуу трапеция формасындагы чуңкурдун туурасынан кесилиш аянтын тап (9-сүрөт).

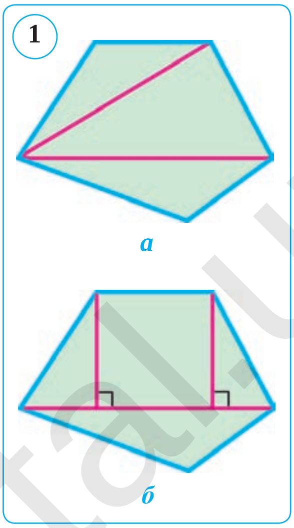
15. Трапециянын негиздери 16 см жана 12 см. Диагоналдарынын кесилишүү чекитинен негиздерине чейин болгон аралыктар 6 см жана 4 см ге барабар (10-сүрөт). Ошол трапециянын аянтын тап.







51. КӨП БУРЧТУКТУН АЯНТЫ



Көп бурчтуктун аянтын эсептөө үчүн аны өз ара кесишпеген, б. а. жалпы ички чекиттери болбогон үч бурчтуктарга бөлүүгө жана алар аянттарынын суммасын табууга болот. Томпок көп бурчтукту үч бурчтуктарга бөлүү үчүн, мисалы, анын бир чокусунан диагоналдар жүргүзүү жетиштүү (1-*а* сүрөт). Кээде башкача бөлүүлөрдөн пайдаланган оң (1-*б* сүрөт).

1-маселе. *ABCDE* көп бурчтугунда $BD \parallel AE$, $CP \perp AE$ болгондугу белгилүү (2-сүрөт)

$S_{ABCDE} = 0{,}5(BD \cdot CP + AE \cdot OP)$ экенин далилде.

Далилдөө. Берилген фигуранын трапеция жана үч бурчтуктан түзүлгөнүн көрүү кыйын эмес. Ошол себептүү аянттын касиети боюнча:

$$S_{ABCDE} = S_{BCD} + S_{ABDE} = 0{,}5BD \cdot CO + 0{,}5(AE + BD) \cdot OP =$$
$$= 0{,}5(\underline{BD} \cdot \underline{CO} + AE \cdot OP + \underline{BD} \cdot \underline{OP}) = 0{,}5(BD \cdot (CO + OP) +$$
$$+ AE \cdot OP) = 0{,}5(BD \cdot CP + AE \cdot OP).$$

Демек, $S_{ABCDE} = 0{,}5(BD \cdot CP + AE \cdot OP)$.

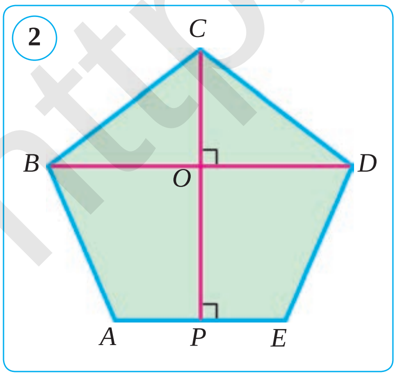
2-маселе. *AC* жана *BD* – *ABCD* төрт бурчтугунун диагоналдары, *O* – диагоналдардын кесилишүү чекити (3-сүрөт). Эгерде $S_{AOB} = S_1$, $S_{BOC} = S_2$, $S_{COD} = S_3$ жана $S_{AOD} = S_4$ болсо, $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$ экенин далилде.

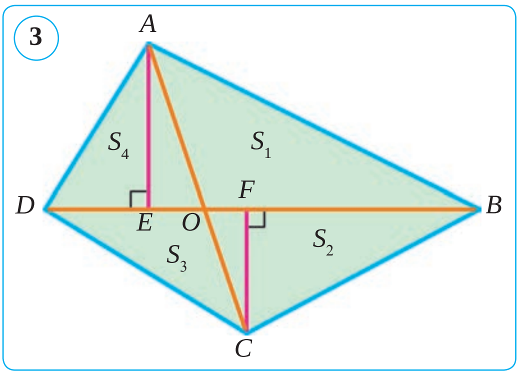
Далилдөө. 1) $AE \perp BD$ жана $CF \perp BD$ ларды жүргүзөбүз.

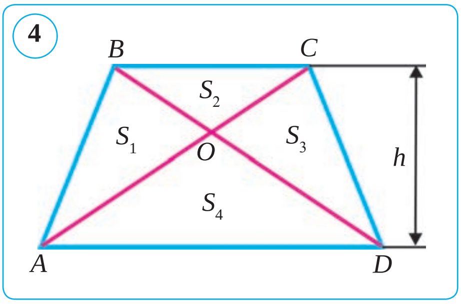
2) $\frac{S_1}{S_4} = \frac{0{,}5OB \cdot AE}{0{,}5OD \cdot AE} = \frac{OB}{OD}$ (1) жана $\frac{S_2}{S_3} = \frac{0{,}5OB \cdot CF}{0{,}5OD \cdot CF} = \frac{OB}{OD}$ (2).

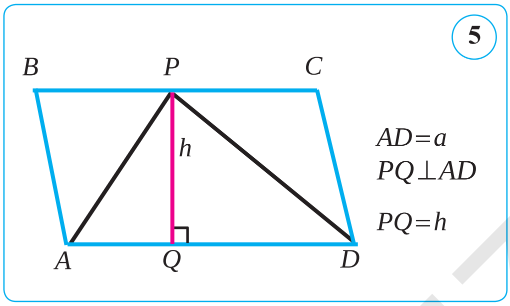
3) (1) жана (2) ден табабыз:

$$\frac{S_1}{S_4} = \frac{S_2}{S_3} \Rightarrow S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4.$$









3-маселе. *BC* жана *AD* – *ABCD* трапециянын негиздери, *O* –*AC* жана *BD* диагоналдарынын кесилишүү чекити (4-сүрөт). $AD = a$, $BC = b$.

$S_{AOB}=S_1$, $S_{BOC}=S_2$, $S_{COD}=S_3$ жана $S_{AOD}=S_4$ болсо, төмөнкүнү далилде:

1) $S_1 = S_3 = \sqrt{S_2 \cdot S_4}$; 2) $S_{\text{tr.}} = \left(\sqrt{S_2}+\sqrt{S_4}\right)^2$.

Далилдөө. 1) $S_{ABC} = S_{DBC} = \frac{1}{2}bh \Rightarrow S_1 + \underline{S_2} = S_3 + \underline{S_2} \Rightarrow S_1 = S_3$.

2) Бизге $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$ экендиги белгилүү. $S_1 = S_3$ этибар алсак, $S_1 = S_3 = \sqrt{S_2 \cdot S_4}$ келип чыгат. Маселенин биринчи бөлүгү далилденди.

3) Трапециянын аянты төрт үч бурчтук аянттарынын суммасына барабардыгын, жогорудагы натыйжаларды эсепке алып, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$S_{\text{tr.}} = \underline{S_1} + S_2 + \underline{S_3} + S_4 = S_2 + 2S_1 + S_4 =$$
$$= \left(\sqrt{S_2}\right)^2 + 2\sqrt{S_2 \cdot S_4} + \left(\sqrt{S_4}\right)^2 = \left(\sqrt{S_2}+\sqrt{S_4}\right)^2.$$

Демек, $S_{\text{tr.}} = \left(\sqrt{S_2}+\sqrt{S_4}\right)^2$. Маселенин экинчи бөлүгү далилденди.

4-маселе. Параллелограмм менен жалпы негиз, жалпы бийиктикке ээ үч бурчтуктун аянты параллелограмм аянтынын жарымына барабар.

Далилдөө. *AD* негиз жана *h* бийиктик *ABCD* параллелограмм жана *APD* үч бурчтук үчүн жалпы (5-сүрөт). $S_{APD}=0{,}5S_{ABCD}$ экенин далилдейбиз.

$S_{ABCD}=ah$ (1) жана $S_{APD}=0{,}5ah$ (2) болгондугу белгилүү. (2) барабардыгындагы *ah* тын ордуна S_{ABCD} ти коюп, табабыз:

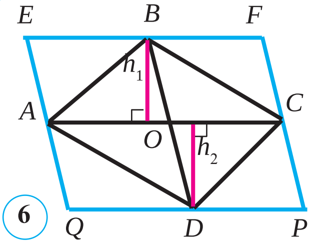
$$S_{APD}=0{,}5ah=0{,}5S_{ABCD}.$$

Эскертүү! Жогоруда берилген маселени төмөнкүдөй окуса да болот: *үч бурчтук менен жалпы негизге жана жалпы бийиктикке ээ болгон параллелограммдын аянты үч бурчтуктун аянтынан эки эсе чоң.*

5-маселе. Томпок төрт бурчтуктун чокулары аркылуу анын диагоналдарына параллель түз сызыктар жүргүзүлсө, анда алынган параллелограммдын аянты берилген төрт бурчтуктун аянтынан эки эсе чоң экенин далилде.

Далилдөө. *ABCD* – берилген томпок төрт бурчтук, *O* – *AC* жана *BD* диагоналдардын кесилишүү чекити, h_1 жана h_2 – төрт бурчтуктун *B* жана *D* чокуларынан *AC* диагоналга жүргүзүлгөн бийиктиктер; *EFPQ*

– төрт бурчтуктун чокулары аркылуу анын диагоналдарына параллель жүргүзүлгөн түз сызыктардын кесилишүүсүнөн алынган параллелограмм (6-сүрөт).



6

$S_{EFPQ}=2S_{ABCD}$ экенин далилдейбиз.

Түзүү боюнча, параллелограммдын EF жана QP жактары AC диагоналга параллель жана барабар. Ошондуктан, AC диагонал алынган $EFPQ$ параллелограммды эки – $AEFC$ жана $ACPQ$ параллелограммга бөлөт.

Жогорудагы эскертменин корутундусун колдоп, $S_{EFPQ}=2S_{ABCD}$ барабардыгын далилдейбиз:

$$S_{EFPQ}=S_{AEFC}+S_{ACPQ}=2S_{ABC}+\ 2S_{ADC}=2(S_{ABC}+S_{ADC})=2S_{ABCD}.$$

Демек, $S_{EFPQ}=2S_{ABCD}$.

Суроо, маселе жана тапшырмалар

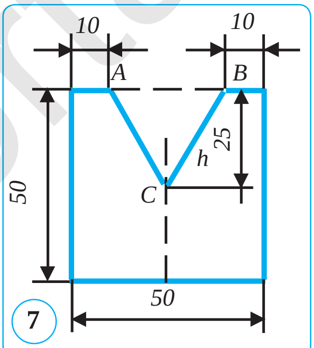
1. 7-сүрөттөгү фигуранын аянтын тап.

Чыгаруу. Сүрөттөгү фигуранын аянтын A жана B чекиттерин туташтырып, аны квадратка толтуруу аркылуу тапкан оң. Берилген фигуранын аянты алынган квадраттын аянты менен ABC үч бурчтугу аянтынын айырмасына барабар:

$S=S_{кв.}-S_{ABC}=...^2-0{,}5\cdot(50-2\cdot10)\cdot...=$
$=...-375=...$ (кв. бирд.).

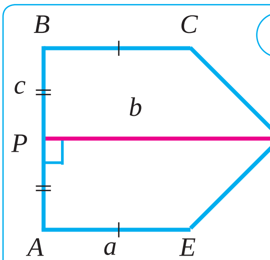
Чекиттердин ордуна тиешелүү сандарды кой.

Жообу: ... кв. бирд.



7

2. 8-сүрөттөгү фигуранын аянтын эсептөө үчүн формуланы келтирип чыгар. Мында $AE\parallel BC\parallel PD$, $AE=BC$, $AP=PB$, $PD\perp AB$.



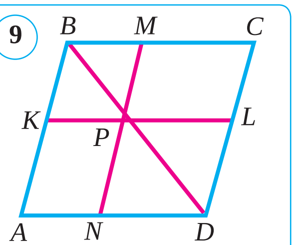
8

3. *Берилген:* $ABCD$ – тик бурчтук, $AB=$ 12 см, $AD=16$ см; E, F, P жана Q чекиттер – тиешелүү жактарынын ортолору.

Табуу керек: S_{EFCPQA}.

4. *Берилген:* $ABCD$ – параллелограмм, $P\in BD$, $KL\parallel BC$, $MN\parallel AB$ (9-сүрөт).

Далилдөө керек: $S_{AKPN}=S_{PMCL}$.



9

5. AC жана BD – $ABCD$ төрт бурчтугунун диагоналдары, O–алардын кесилишүү чекити. $S_{AOD}=12$, $S_{BOC}=8$, $S_{AOB}=6$. S_{COD} ны тап.

6. Тик бурчтук формасындагы жер участогунун аянты 400 га. Эгерде: 1) участоктун узуну 10 км болсо; 2) участок квадрат формасында болсо, анын периметри кандай болот?

52. ПРАКТИКАЛЫК КӨНҮГҮҮ ЖАНА КОЛДОНУУ

I. Изилдөө үчүн маселелер.

1-маселе. Тик бурчтуктун жактары натуралдык сан жана периметри 4 эселүү болгон маселени көрүп чыгабыз.

Периметри 72 см ге барабар жана жактары натуралдык сан болгон бардык тик бурчтуктардан эң чоң аянтка ээ болгонун тап. Ал кандай фигура болот? Корутунду чыгар.

Чыгаруу. Тик бурчтукта: $P=2\cdot(a+b)=72$ см – периметр, $p=a+b=36$ см – жарым периметр, б. а. жанаша жактарынын суммасы. a менен b нын маанилери белгилүү болгондо, $S=a\cdot b$ ны эсептей алабыз. Маселеде коюлган суроого жооп берүү үчүн тик бурчтуктун жанаша жактарын табууга аракеттенебиз.

Ал үчүн 36 ны эки нутаралдык сандын суммасы көрүнүшүндө туюнтабыз:

$$a+b=36=1+35=2+34=3+33=...=33+3=34+2=35+1.$$

Көрүнүп тургандай, жанаша жактарынын суммасы 36 см ге барабар болгон 35 түрдүү тик бурчтук бар. Маалыматтарды жадыбалга киргизип, аларды иликтейбиз жана корутунду чыгарабыз:

a см	**1**	2	...	**17**	**18**	**19**	20	...	**34**	**35**
b см	**35**	34	...	**19**	**18**	**17**	16	...	**2**	**1**
$(a+b)$ см	**36**	**36**		**36**	**36**	**36**	**36**	...	**36**	**36**
$S=a\cdot b$ см^2	**35**	68	...	**323**	**324**	**323**	320	...	**68**	**35**

Жадыбалдан көрүнүп тургандай, эң кичине аянт $a=1$ см жана $b=35$ см же $a=35$ см жана $b=1$ см болгондо, эң чоң аянт болсо $a=b=18$ см – жагы 18 см ге барабар квадрат болгондо алынат. Калган тик бурчтуктардын периметрлери 72 см болсо да, бирок аянттары

$$18\cdot 18=324\ (\text{см}^2)$$

ден кичине болот.

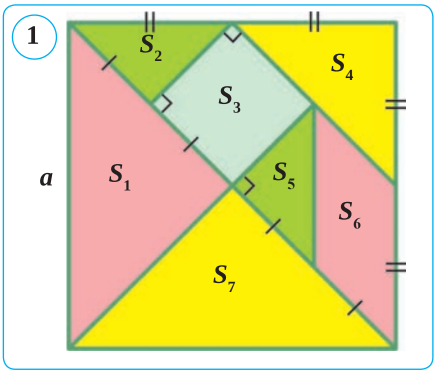
Жадыбалды иликтөөнүн натыйжасында төмөнкү корутундуга келебиз.

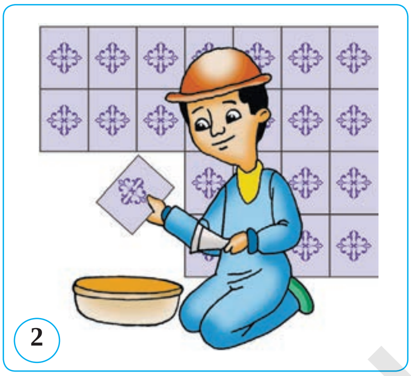
1-корутунду. Эгерде тик бурчтуктун жактары натуралдык сан жана периметри 4 эселүү болсо, эң чоң аянт төмөнкү формула боюнча табылат:

$$S_{\text{макс}}=\left(\frac{P}{4}\right)^2 \text{ кв. бирд.}$$

2-корутунду. Эгерде тик бурчтуктун жактары натуралдык сан жана периметри 2 эселүү болсо, анда периметрлери барабар болгон бардык тик бурчтуктардын ичинен жактарынан бири 1 ге жана экинчи жагы болсо 1 ди жарым периметрге толуктоочу сан болгондо эң кичине аянтка ээ болот.

3-корутунду. Тик бурчтуктун жанаша жактарынын узундуктары бири-бирине жакындашкан сайын аянт чоңоюп отурат.





2-маселе. Кытайча «танграм» оюнунда квадрат 1-сүрөттө көрсөтүлгөн өңдүү үч бурчтук жана төрт бурчтуктарга бөлүнгөн. Алардан ар түрдүү фигураларды түзүүгө болот. Эгерде квадраттын жагы 8 см ге барабар болсо, бөлүнгөн фигуралардын аянттарын тап.

Чыгаруу. $a=8$ см – квадраттын жагы. $S=a^2=8^2=64$ (см^2) – берилген квадраттын аянты. Эми фигурадагы бөлүкчөлөрдүн аянттарын табабыз.

1) S_1 жана S_7 – квадрат аянтынын төрттөн бирине барабар. Демек,

$$S_1=S_7=S:4=64:4=16 \text{ (см}^2\text{)}.$$

2) Тең капталдуу тик бурчтуу үч бурчтуктун аянты гипотенуза квадратынын төрттөн бирине барабар. Демек,

$$S_2=S_5=0{,}25\cdot(a:2)^2=0{,}25\cdot4^2=0{,}25\cdot16=4 \text{ (см}^2\text{)}.$$

3) S_3 квадраттын аянты эки S_2 үч бурчтук аянттарынын суммасына барабар. Демек, $S_3=2S_2=2\cdot4=8$ (см^2).

4) S_4 үч бурчтуктун катеттери берилген квадрат жагынын жарымына барабар, б. а. $a:2=8:2=4$ (см). Тең капталдуу үч бурчтуктун аянты катети квадратынын жарымына барабар, б. а. $S_4=0{,}5\cdot4^2=0{,}5\cdot16=8$ (см^2).

5) Негиздери жана бийиктиктери барабар болгон квадрат менен параллелограмм теңдеш, ошондуктан $S_6=S_3=2\cdot4=8$ (см^2).

Жообу: $S_1=S_7=16$ см^2; $S_2=S_5=4$ см^2; $S_3=S_4=S_6=8$ см^2.

3-маселе. Уста узуну 2,25 м жана туурасы 1,8 м болгон тик бурчтук формасындагы дубалдын бөлүгүн кафель менен каптамакчы. Ал үчүн ага жагы 15 см лүү квадрат формасындагы кафелден канча керек болот (2-сүрөт)?

Чыгаруу. 1) Капталмакчы болгон дубалдын аянтын табабыз жана аны квадрат сантиметрде туюнтабыз: $2{,}25\cdot1{,}8=4{,}05$ (м^2)$=4{,}05\cdot10\,000$ см$^2=40500$ см^2.

2) Бир даана кафелдин аянтын табабыз: $a^2=15^2=225$ (см^2).

3) Тик бурчтук формасындагы дубалды каптоого канча кафель керектигин табабыз:

$$40500:225=180.$$

Жообу: 180 даана кафель.

Төмөнкү маселени чыгарууну өзүңө калтырабыз.

4-маселе. Жагы 4 м ге барабар болгон квадрат формасындагы жолду каптоо үчүн жагы 20 см лүү кафелден канча керек болот?

ПРАКТИКАЛЫК КОМПЕТЕНЦИЯНЫ ӨНҮКТҮРҮҮЧҮ КОШУМЧА МАТЕРИАЛДАР

ЧАКМАКТУУ КАГАЗДА АЯНТТАРДЫ ЭСЕПТӨӨ

Чакмактуу кагазда берилген томпок жана томпок эмес көп бурчтуктардын аянтын эсептөө үчүн «**Пик формуласы**» деп аталган формуланы келтиребиз. Ар бир чакмак жагынын узундугу 1 см болсун. Чакмактуу кагаздагы түз сызыктардын кесилишүү чекиттерин – бирдик квадраттын чокуларын **түйүн чекиттер** деп атайбыз. Анда көп бурчтуктун аянты төмөнкү формула менен эсептелет:

$$S = \frac{M}{2} + N - 1.$$

Бул формулада M – көп бурчтуктун чек арасында жаткан түйүн чекиттердин саны, N – көп бурчтуктун ичинде жаткан түйүн чекиттердин саны.

Бул формуланы көп бурчтуктун чокулары түйүн чекиттерде болгон ар кандай көп бурчтук үчүн колдосо болот.

1-маселе. 1-сүрөттөгү фигуранын аянтын эсепте.

Чыгаруу. 1-усул. 1) Бардык толук квадраттар 59 даана болуп, алардын аянты 59 см^2; квадраттын жарымына барабар болгон үч бурчтуктар 16 даана болуп, алардын аянты $16:2=8$ (см^2); бир негизи 2 см, бийиктиги 3 см ге барабар үч бурчтук бар, анын аянты 3 см^2 ге барабар.

Ошентип, берилген көп бурчтуктун аянты:

$$S=59+8+3=71 \text{ (см}^2\text{)}.$$

2-усул. Ушул жооптун Пик формуласынын жардамында кантип табылганын көрөбүз. Түйүн чекиттерди белгилеп алабыз.

1) Фигуранын ичинде жаткан түйүн чекиттерди (кара түстө белгиленген) санайбыз: алар 50 даана, б. а. $N=50$.

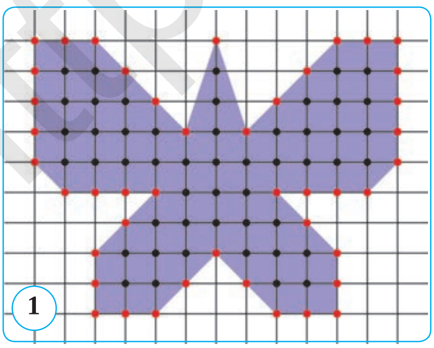
2) Фигуранын жактарында жаткан түйүн чекиттерди (кызыл түстө белгиленген) санайбыз: алар 44 даана, б. а. $M=44$. Пик формуласын колдойбуз:

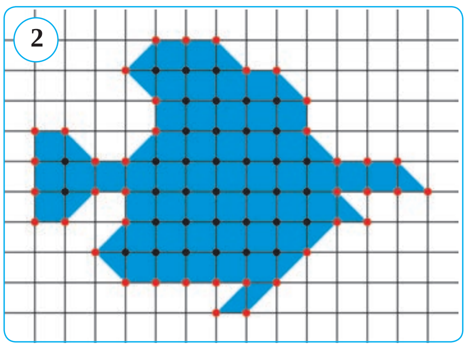
$$S = \frac{44}{2} + 50 - 1 = 22 + 49 = 71 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Демек, эки усулда тең бирдей натыйжа алынды. *Жообу:* 71 см^2.

2-маселе. 2-сүрөттөгү көп бурчтуктун аянтын эсепте.

Чыгаруу. 1) Көп бурчтуктун жактарында жаткан түйүн чекиттерди (кызыл түстө белгиленген) санайбыз: алар 40 даана, б. а. $M=40$.


1


2

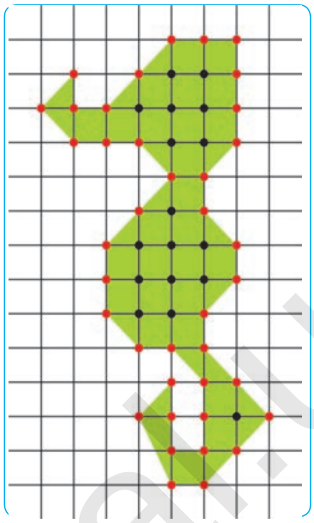
2) Көп бурчтуктун ичинде жаткан түйүн чекиттерди (кара түстө белгиленген) санайбыз: алар 37 даана, б. а. $N=37$.

Пик формуласы боюнча:

$$S = \frac{40}{2} + 37 - 1 = 20 + 36 = 56 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Жообу: 56 см².

3-маселе. 3-сүрөттөгү көп бурчтуктун аянтын эсепте.



Чыгаруу. 1-усул. 1) Көп бурчтуктун жактарында жаткан түйүн чекиттерди (кызыл түстө белгиленген) санайбыз: алар 39 даана, б. а. $M=39$.

2) Көп бурчтуктун ичинде жаткан түйүн чекиттерди (кара түстө белгиленген) санайбыз: алар 17 даана, б. а. $N=17$.

Пик формуласы боюнча:

$$S = \frac{39}{2} + 17 - 1 = 19,5 + 16 = 35,5 \text{ (см}^2\text{)}.$$

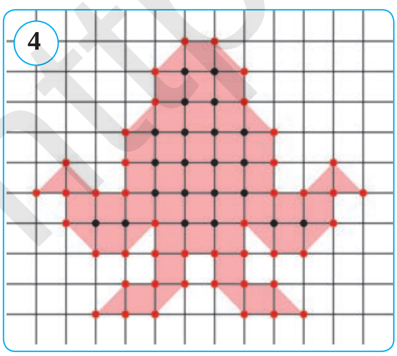
2-*усул*. Алынган жооптун тууралыгына дагы бир жолу ишеним пайда кылмакчы болсоң, баштап берилген көп бурчтукту түрдүү усулдар менен үйрөнүлгөн томпок көп бурчтуктарга ажырат. Андан кийин алынган фигуралардын аянттарын тиешелүү формулалар жардамында эсепте. Алынган натыйжаларды кошуп, 1-усулда чыккан натыйжа менен салыштыр. Эгерде эсептөөлөрдү туура аткарсаң, сөзсүз эки натыйжа тең бирдей болот. Берилген көп бурчтук чиймеде түрдүү фигураларга ажыратып көрсөтүлбөсө да болот. Эсептөөнүн усулун тандоо өз эркиң. Эсептөөлөрдү оозеки аткарса да болот.

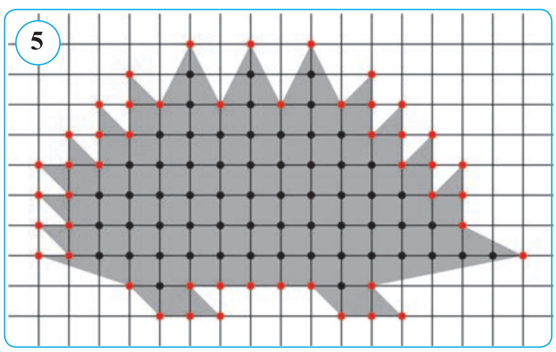
Бардык толук квадраттар 26 даана, алардын аянты 26 см²; квадраттын жарымына барабар болгон үч бурчтуктар 17 даана, алардын аянты $17:2=8,5$ (см²); бир негизи 2 см, бийиктиги 1 см ге барабар үч бурчтук бар, анын аянты 1 см² ге барабар. Ошентип, берилген көп бурчтуктун аянты: $26+8,5+1=35,5$ (см²).

Демек, эки натыйжа тең бирдей.

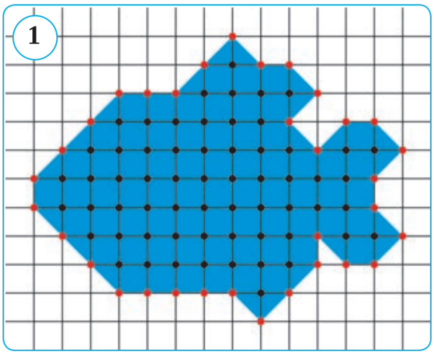
Жообу: 35,5 см².

4-маселе. 4 жана 5-сүрөттөгү көп бурчтуктардын аянтын Пик формуласын колдоп эсепте.





53–54. 4-КӨЗӨМӨЛ ИШИ. КАТАЛАР ҮСТҮНДӨ ИШТӨӨ



1. Жактары 27 см жана 21 см ге барабар тик бурчтуктун периметрине барабар болгон квадраттын аянтын тап.

2. Тик бурчтуктун аянты 540 см², эки жагынын катышы $3:5$ сыяктуу. Ошол тик бурчтуктун периметрин тап.

3. Параллелограммдын аянты 24 см². Эгерде анын бийиктиктери 3 см жана 4 см ге барабар болсо, анын периметрин тап.

4. 1-сүрөттө берилген фигуранын аянтын бөлүктөргө ажыратып жана Пик формуласын колдоп тап.

4-тест Өзүңдү сынап көр!

1. Эгерде тик бурчтуктун жактары 4 эсе чоңойтулса, анын аянты канча эсе чоңоёт?
A) 4; B) 8; D) 16; E) 32.

2. Тик бурчтуктун аянты 400 га, жактарынын катышы $4:1$ ге барабар. Ошол тик бурчтуктун периметрин тап.
A) 10 км; B) 5 км; D) 2 км; E) 8 км.

3. Тик бурчтуктун узундугу 25 % га чоңойтулду. Анын аянты өзгөрбөстүгү үчүн аны канча пайызга азайтуу керек?
A) 20 %; B) 16 %; D) 25 %; E) 18 %.

4. Квадраттын жагын канча эсе азайтканда, аянты 4 эсе кичиреет?
A) 1,5 эсе; B) 2 эсе; D) 3 эсе; E) 3,5 эсе.

5. Аянты 144 см², бийиктиктери 8 см жана 12 см болгон параллелограммдын периметрин тап.
A) 40 см; B) 30 см; D) 80 см; E) 60 см.

6. *ABCD* параллелограммдын *AC* диагоналына *BO* перпендикуляр жүргүзүлгөн. $AO=8$ см, $OC=6$ см жана $BO=4$ см болсо, параллелограммдын аянтын тап.
A) 50 см²; B) 28 см²; D) 52 см²; E) 56 см².

7. Ромбдун аянты 40 см² ге, анын периметри 20 см ге барабар. Ошол ромбдун бийиктигин тап.
A) 2 см; B) 8 см; D) 4 см; E) 16 см.

8. Негиздери 5 см жана 9 см ге барабар болгон трапециянын аянты 35 см² ге барабар. Ошол трапециянын бийиктигин тап.
A) 9 см; B) 8 см; D) 5 см; E) 10 см.

9. Негиздери 8 жана 12 ге барабар болгон тең капталдуу трапециянын диагоналдары өз ара перпендикуляр. Трапециянын аянтын тап.

A) 100; B) 64; D) 144; E) 76.

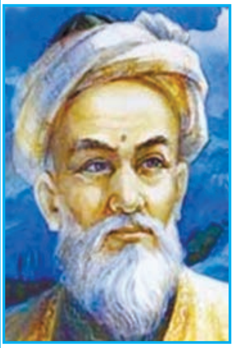
10. Трапециянын аянты 30 см^2 ге, бийиктиги 6 см ге барабар болсо, анын орто сызыгы канчага барабар болот?

A) 2,5 см; B) 5 см; D) 7,5 см; E) 4,5 см.

Англис тилин үйрөнөбүз!

Квадрат тамыр – square root
Үч бурчтук – triangle
Орто сызык – midline
Герон формуласы – формула of Heron
Аянт – area

Тарыхый маалыматтар



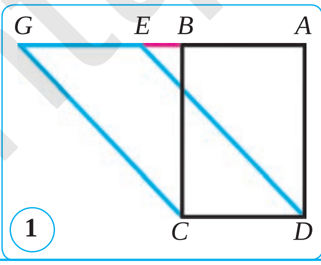
Abu Ali ibn Sina
(980–1037)

Ибн Синанын «Даанышнаама» чыгармасынын бешинчи главасы «Төрт бурчтуктар, аларда жайлашкан үч бурчтуктар жана алардын катыштары боюнча негизги геометриялык маселелер» темасына арналган. Анда параллель сызыктар жөнүндө төмөнкүдөй пикирлер айтып өтүлгөн.

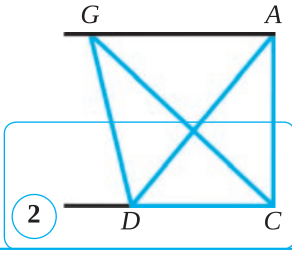
1-теорема. Өз ара параллель эки сызыктын ортосунда жайлашкан, жалпы негизге ээ жана карама-каршы жактары параллель фигуралар теңдеш болот (б. а. алардын аянттары барабар). Мисалы, негиздери *CD* болгон *ABCD* жана *EGCD* тегиз фигуралар өз ара теңдеш болот (1-сүрөт).

2-теорема. Өз ара параллель сызыктардын ортосунда жайлашкан жана жалпы негизге ээ болгон үч бурчтуктар теңдеш болот. Мисалы, *CD* негизге ээ болгон *ACD* жана *GCD* үч бурчтуктары теңдеш болот (2-сүрөт).

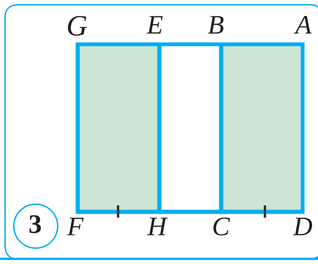
3-теорема. Өз ара параллель сызыктардын ортосунда жайлашкан жана негиздери барабар болгон төрт бурчтуктар теңдеш болот. Мисалы, *ABCD* жана *GEHF* төрт бурчтуктары теңдеш болот (3-сүрөт).



1



2



3

V ГЛАВА
АЙЛАНА

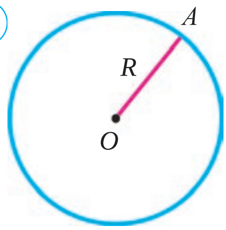
10-§. АЙЛАНАДАГЫ БУРЧТАР

55. ТҮЗ СЫЗЫК ЖАНА АЙЛАНАНЫН ӨЗ АРА ЖАЙЛАШУУСУ. АЙЛАНАГА ЖАНЫМА ЖАНА АНЫН КАСИЕТТЕРИ

1. Айлана жөнүндө башталгыч маалыматтар.

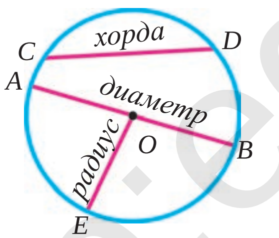
Аныктама. *Тегиздиктин берилген чекитинен бирдей алыстыкта жаткан бардык чекиттеринен турган фигурага* ***айлана*** *дейилет.*

1



а

O борборлуу, *R* радиустуу айлана, б. а. (*O*, *R*)



CD – хорда, *OE* – радиус, *AB* – диаметр

б

Берилген *O* чекитке ***айлананын борбору*** дейилет. Айлананын ар кандай чекиттеринен анын борборуна чейин болгон аралыкка ***айлананын радиусу*** дейилет. Айлананын чекитин анын борбору менен туташтырган ар кандай кесиндиге да *радиус* дейилет. Ошентип, борбору *O* чекит жана радиусу *R* болгон айлана – берилген *O* чекитинен *R* ге барабар аралыкта жайлашкан тегиздиктин бардык чекиттеринен түзүлгөн геометриялык фигура болот.

Адатта, *O* борборлуу жана *R* радиустуу айлана төмөнкүдөй белгиленет: (*O*, *R*) (1-*а* сүрөт).

Айлананын ар кандай эки чекитин туташтырган кесиндиге ***хорда*** дейилет. Айлананын борборунан өткөн хордага анын ***диаметри*** дейилет.

1-*б* сүрөттө айлананын радиусу жана эки хордасы берилген, хордадан бири айлананын диаметри: *OE* – радиус, *CD* – хорда, *AB* – диаметр.

Адатта, диаметр *d* тамгасы менен белгиленет. Белгилүү болгондой, диаметр радиустан эки эсе чоң, б. а. $d=2R$ ге барабар.

2. Түз сызыктын жана айлананын өз ара жайлашуусу.

Тегиздикте түз сызык менен айлананын өз ара жайлашуусун көрөбүз. Эгерде түз сызык айлананын борборунан өтсө, анда ал айлананы эки чекитте, ошол түз сызыкта жаткан диаметрдин учтарында кесип өткөндүгү анык.

Берилген *l* түз сызыгы менен (*O*, *R*) айлана канча жалпы чекитке ээ, деген суроого жооп берүү үчүн айлананын борбору *O* дон *l* түз сызыгына чейин болгон *d* аралыкты ошол айлананын *R* радиусу менен салыштыруу керек.

Айлананын борборунан түз сызыкка жүргүзүлгөн перпендикуляр *айлананын борборунан түз сызыкка чейинки аралык* деп аталат.

Үч учуру болушу мүмкүн: 1) $d>R$; 2) $d=R$; 3) $d<R$. Эми ошол учурларды көрөбүз.

1-учур. *Эгерде айлананын борборунан түз сызыкка чейин болгон аралык айлананын радиусунан чоң болсо, анда түз сызык менен айлана жалпы чекитке ээ болбойт, б. а. кесилишпейт.*

Чындыгында да, эгерде $d>R$ болсо (2-*а* сүрөт), l түз сызыгынын O борборго эң жакын чекити (ошол түз сызыктын ар кандай чекити да) (O, R) айланага тиешелүү болбойт, анткени ал борбордон айлананын радиусунан чоң аралыкта болот.

2-учур. *Эгерде айлананын борборунан түз сызыкка чейинки аралык айлананын радиусуна барабар болсо, анда түз сызык менен айлана бир гана жалпы чекитке ээ болот.*

Чындыгында да, эгерде $d=R$ болсо (2-*б* сүрөт), l түз сызыгынын O борборго эң жакын чекити айлананын радиусуна барабар аралыкта болот жана демек, ал чекит айланага да тиешелүү болот. l түз сызыгынын калган бардык чекиттери O борбордон айлананын радиусунан чоң аралыкта болот, демек, айланага тиешелүү болбойт.

3-учур. *Айлананын борборунан түз сызыкка чейин болгон аралык айлананын радиусунан кичине болсо* ($d<R$), *анда түз сызык менен айлана эки жалпы чекитке ээ болот.*

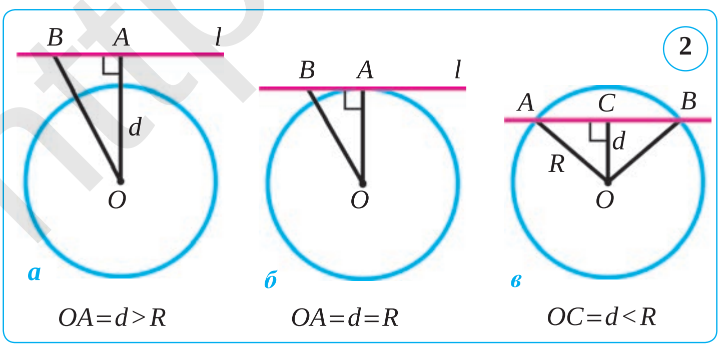
Түз сызыктын айлананын ичиндеги бөлүгү хорда болот (2-*в* сүрөт). Мында түз сызыкка айланага карата *кесүүчү* дейилет.

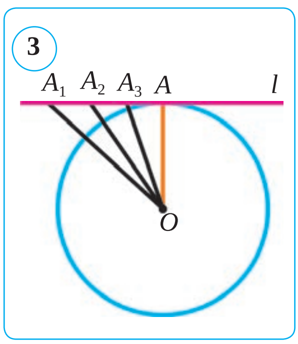
Хорданын узундугу AB ны айлананын радиусунан жана борборунан түз сызыкка чейинки аралык d аркылуу туюнтууга болот:

$$AB = 2\sqrt{R^2 - d^2}.$$

Бул барабардыкты өзүң далилде.

Корутунду. *Түз сызык менен айлана жалпы чекиттерге ээ болбостугу, бир же эки жалпы чекитке ээ болушу мүмкүн.*





2. Айланага жаныма.

Аныктама. *Айлана менен бир гана жалпы чекитке ээ болгон түз сызыкка ошол айланага* ***жаныма****, ал эми алардын жалпы чекитине болсо* ***жануу чекити*** *дейилет.*

2-*б* сүрөттө l түз сызыгы O борборлуу айланага жаныма, A–жануу чекити. Айлана l түз сызыкка жанат, деп айтса да болот.

Жаныманын касиети жөнүндөгү теореманы далилдейбиз.

1-теорема.

Айланага жаныма ошол айлананын жануу чекитине жүргүзүлгөн радиуска перпендикуляр болот.

Далилдөө. l түз сызыгы айланага A чекитинде жүргүзүлгөн жаныма болсун (3-сүрөткө к.). $R=OA$ нун l ге перпендикулярдуулугун далилдейбиз. Шарт боюнча, l түз сызыгынын A чекитинен башка бардык чекиттери айланадан сыртта жатат. Ошондуктан бул түз сызыктын A дан башка ар кандай A_1 чекити үчүн $OA_1>OA$. Демек, OA аралык O чекитинен l түз сызыгынын чекиттерине чейин болгон аралыктардын эң кыскасы. Чекиттен түз сызыкка чейинки эң кыска аралык болсо ошол түз сызыкка жүргүзүлгөн перпендикуляр болот. Мындан, $OA\perp l$ болгондугу келип чыгат.

Теорема далилденди.

Эми жаныманын касиетине тескери теореманы далилдейбиз.

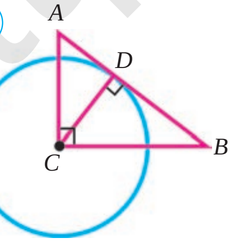
2-теорема.

Радиуска перпендикуляр жана анын айланада жаткан чокусунан өткөн түз сызык ошол айланага жаныма болот.

Далилдөө. Эгерде айлананын борборунан түз сызыкка чейин болгон аралык айлананын радиусуна барабар ($d=R$) болсо (2-*б* сүрөткө к.), l түз сызыгынын O борборго эң жакынкы чекити айлананын радиусуна барабар болот, демек, ал чекит айланага да тиешелүү болот. l түз сызыгынын калган бардык чекиттери O борбордон айлананын радиусунан чоң аралыкта болот, демек, айланага тиешелүү болбойт. Аныктама боюнча, l түз сызыгы ошол айланага жаныма болот. Теорема далилденди.

Маселе. Тик бурчтуу ACB ($\angle C=90°$) үч бурчтугун катеттери $AC=3$ см жана $BC=4$ см. Борбордук C чекитинде болгон радиусу 2,4 см ге барабар айлана түзүлгөн. Айлана менен AB түз сызыгы өз ара кандай абалда болот?

4



Чыгаруу. $\triangle ACB$ ($\angle C=90°$) та: $AC=3$ см, $BC=4$ см. Пифагордун теоремасы боюнча:

$$AB=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5 \text{ (см)}.$$

$CD\perp AB$ ны жүргүзөбүз (4-сүрөт). Үч бурчтуктун аянтын эки түрдүү эсептөөгө болот, б. а.

$CA \cdot CB = AB \cdot CD$ барабардык орундуу. Мындан $CD = CA \cdot CB : AB = 3 \cdot 4 : 5 = 2{,}4$ (см). Демек, C чекитинен AB түз сызыгына чейин болгон аралык радиустун узундугуна барабар болгондуктан, AB түз сызык айланага жанат.

Жообу: AB – жаныма.

Суроо, маселе жана тапшырмалар

1. 1) Айлана эмне? Айлананын: борбору, радиусу, хордасы жана диаметри деп эмнеге айтылат? Кандай түз сызыкка айланага жаныма дейилет?
2) Жыманын кандай касиетин жана белгисин билесиң?

2. d – R радиустуу айлананын борборунан l түз сызыгына чейин болгон аралык. Эгерде: 1) $R=8$ см, $d=6$ см; 2) $R=10$ см, $d=8{,}4$ см; 3) $R=14{,}4$ дм, $d=7{,}4$ дм; 4) $R=1{,}6$ дм, $d=24$ см; 5) $R=4$ см, $d=40$ мм болсо, l түз сызыгы менен айлана өз ара кандай жайлашкан болот?

3. $ABCD$ квадратынын жагы 8 см ге жана борбору A чекитте болгон айлананын радиусу 7 см ге барабар. AB, BC, CD жана BD түз сызыктарынан кайсы бири ошол айланага карата кесүүчү болот?

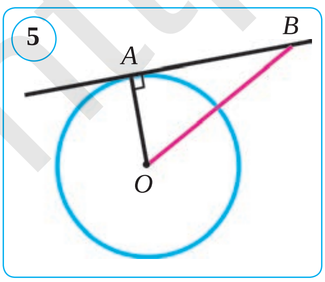
4. AB түз сызыгы O борборлуу айлананын A чекитине жүргүзүлгөн жаныма. Эгерде $AB=24$ см, айлананын радиусу 7 см ге барабар болсо, OB кесиндинин узундугун тап (5-сүрөт).

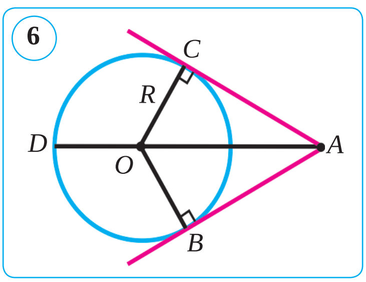
5. Тик бурчтуу ACB ($\angle C=90°$) үч бурчтугунда $AB=10$ см, $\angle ABC=30°$. Борбору A чекитинде болгон айлана жүргүзүлгөн. Айлананын радиусу кандай болгондо: 1) айлана BC түз сызыгына жанат; 2) BC түз сызыгы менен жалпы чекитке ээ болбойт; 3) BC түз сызыгы менен эки жалпы чекитке ээ болот?

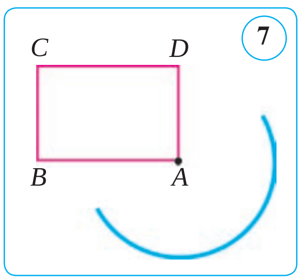
6. Айлананын сыртындагы бир чекиттен ага эки жаныма жүргүзүлсө, ошол чекиттен жаныма чекиттерине чейин болгон аралыктар барабар. Ошону далилде (6-сүрөт).

7. Эгерде айлананын радиусу 5 см ге барабар, айлананын борборунан түз сызыкка чейин болгон аралык: 1) 6 см; 2) 5 см; 3) 4 см болсо, түз сызык менен айлана өз ара кандай жайлашкан болот?

8. $ABCD$ тик бурчтугу берилген, анда $AB=16$ см, $AD=12$ см (7-сүрөт). AC, BC, CD жана BD түз сызыктарынан кайсы бири радиусу 12 см лүү A борборлуу айланага жаныма болот?





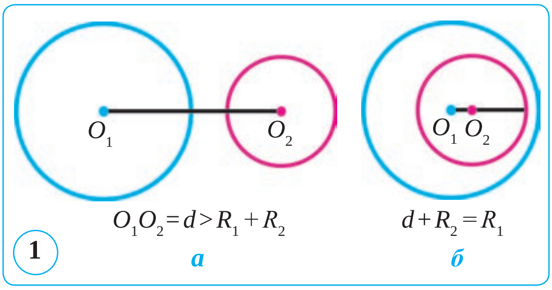


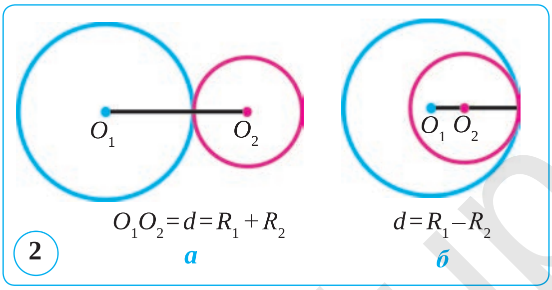
56. ЭКИ АЙЛАНАНЫН ӨЗ АРА ЖАЙЛАШУУСУ. БОРБОРДУК БУРЧ МЕНЕН ЖААНЫН ГРАДУСТУК ӨЛЧӨМҮ

1. Эки айлананын өз ара жайлашуусу.

Эки айлананын өз ара жайлашуу учурларын көрүп чыгабыз.

1) Эки айлана жалпы чекитке ээ болбойт. Мында алар айланадан сыртта (1-*а* сүрөт) же бири экинчисинин ичинде болот (1-*б* сүрөт).





2) Эки айлана бир жалпы чекитке ээ болот (2-сүрөт). Мында, айланалар бири-бирине *жанат,* дейилет. Бирок айланалар *сырткы* (2-*а* сүрөт) же *ички* жактан жанышы мүмкүн (2-*б* сүрөт).

3) Эки айлана эки жалпы чекитке ээ болушу мүмкүн (3-сүрөт). Буга айланалар бири-бири менен *кесилишет*, дейилет.

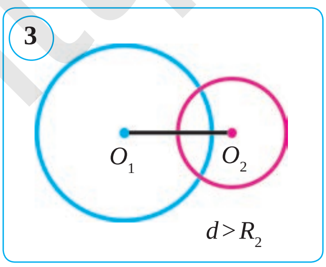
Жалпы борборго ээ айланаларга *борборлош айланалар* дейилет (4-сүрөт).

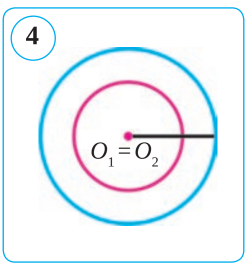
Эки айлананын өз ара жайлашуусу алардын радиусу менен борборлорунун арасындагы аралыктан көз каранды болот.

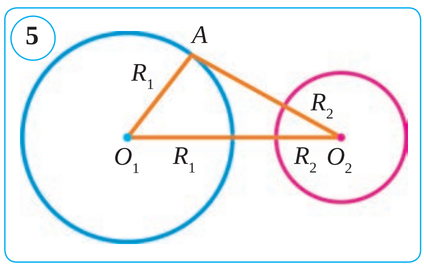
Теорема.

Эгерде эки айлананын борборлорунун арасындагы аралык алардын радиустарынын суммасынан чоң же айырмасынан кичине болсо, анда бул айланалар жалпы чекитке ээ болбойт.

Далилдөө. O_1, O_2 борборлуу жана радиустары тиешелүү түрдө R_1, R_2 ($d=R_1+R_2<O_1O_2$) болгон эки айлана берилген болсун (5-сүрөт). Айланадагы A чекитин көрүп чыгабыз: $O_1A=R_1$. Анда $O_2A\geq O_1O_2-O_1A>R_1+R_2-R_1=R_2$ жана демек, A чекити экинчи айланага тиешелүү эмес. Демек, бул айланалар жалпы чекитке ээ болбойт.







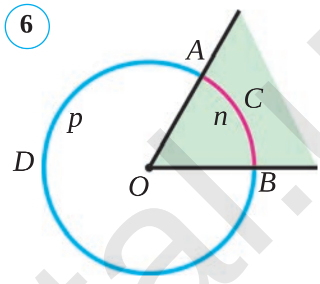
Эки айлана бир жалпы чекитке ээ болгон учурду, ошондой эле, эки айлана эки жалпы чекитке ээ болгон учурларды өз алдынча көрүп чык.

2. Борбордук бурч.

Аныктама. *Чокусу айлананын борборунда болгон бурч* ***борбордук бурч*** *деп аталат.*

Жалпы чокусу айлананын O борборунда болгон эки нур OA жана OB эки борбордук бурчту белгилейт, алардан бири томпок зона менен чектелген болот. Айлананын эки A жана B чекити аны эки жаага бөлөт. Аларды бирин-биринен айырмалоо үчүн ар биринде бирден аралык чекит (жаанын учтарынан айырмалуу) же латинче кичине тамга менен белгиленип, ACB (же AnB) жана ADB (же ApB) *жаалар* дейилет (6-сүрөт). Жааны төмөнкүдөй белгилөө кабыл алынган: $\cup ACB$ (же $\cup AnB$) жана $\cup ADB$ (же $\cup ApB$). Кээде жаа аралык чекитсиз белгиленет: $\cup AB$ (эки жаадан кайсы бири жөнүндө сөз болгону түшүнүктүү болгондо). Эгерде жаанын чокуларын туташтырган кесинди айлананын диаметри болсо, жаага *жарым айлана* дейилет. 7-*б* сүрөттө эки жарым айлана берилген, алардан бири ажыратып көрсөтүлгөн.

6



$\angle AOB$ – борбордук бурч

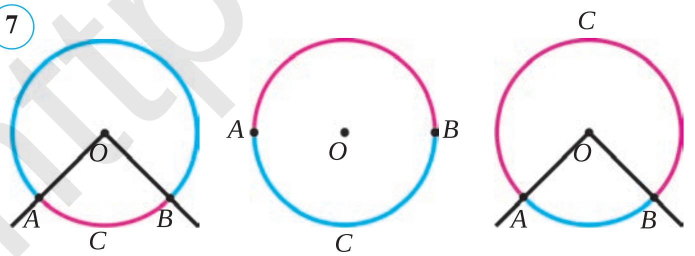
3. Жаанын градустук өлчөмү.

Аныктама. ***Айлана жаасынын бурч чоңдугу*** *деп, айлананын ошол жаага тиешелүү борбордук бурчтун чоңдугуна айтылат.*

Айлананын жаасын градустарда ченөөгө болот. *Эгерде O борборлуу айлананын ACB жаасы жарым айланадан кичине же ага барабар болсо, анда анын градустук өлчөмү AOB борбордук бурчтун градустук өлчөмүнө барабар эсептелет* (7-*а*, *б* сүрөт). *Эгерде ACB жаа жарым айланадан чоң болсо, анда анын градустук өлчөмү* $360° – \angle AOB$ га *барабар эсептелет* (7-*в* сүрөт).

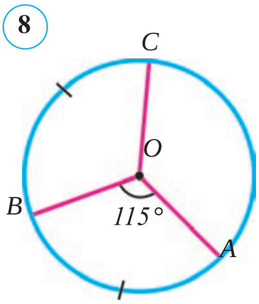
Мындан, *аяктары жалпы болгон айлана эки жаасынын градустук өлчөмдөрүнүн суммасы* $360°$ *ка барабардыгы* келип чыгат.

7



$\cup ACB = \cup AOB$ *а* $\cup ACB = 180°$ *б* $\cup ACB = 360° – \angle AOB$ *в*

8



Айлананын эки жаасынын бурч чоңдуктары (б. а. аларга тиешелүү борбордук бурчтар) барабар болгондо гана бул жаалар барабар болот.

Маселе. O чекит–айлананын борбору, $\angle AOB = 115°$, $\cup BC = \cup AB$ (8-сүрөт). AOC бурчту тап.

Чыгаруу. AOB бурч айлананын борбордук бурчу, AB жаа болсо жарым айланадан кичине, ошондуктан $\cup AB = \angle AOB = 115°$. Маселенин шарты боюнча, $\cup BC = \cup AB$ жана демек, BC жаа $115°$ ка барабар. $\cup ABC = \cup AB + \cup BC = 230° > 180°$, б. а. ABC жаа жарым айланадан чоң, ошондуктан $\angle AOC = 360° - ABC = = 360° - 230° = 130°$. *Жообу:* $\angle AOC = 130°$.

Суроо, маселе жана тапшырмалар

1. 1) Айлана берилген чекитте жанат дегенде, эмнени түшүнөсүң?
2) Борборлош айланалар деп эмнеге айтылат?
3) Борбордук бурч эмне? Айлананын жаасы кандай белгиленет?
4) Айлананын жаасынын бурч чоңдугу эмне?

2. Эгерде эки айлананын борборлорунун арасындагы аралык 2 см, радиустары тиешелүү түрдө: 1) 3 см жана 5 см; 2) 2 см жана 5 см болсо, алар бири-бирине карата өз ара кандай жайлашкан болот?

3. Эгерде радиустары 4 см жана 6 см ге барабар айланалар: 1) сырткы жактан жанса; 2) ички жактан жанса, алардын борборлорунун арасындагы аралык эмнеге барабар?

4. Айлананын борборунан өткөн эки түз сызык ошол айланада канча жаа жана канча борбордук бурчту аныктайт?

5. Берилген айлананын чекитинен радиусуна барабар эки хорда жүргүзүлгөн. Алардын арасындагы бурчту тап.

6. Борбордук бурчка ылайык жаа айлананын: 1) $\frac{2}{5}$; 2) $\frac{4}{15}$; 3) $\frac{7}{12}$; 4) $\frac{5}{9}$; 5) $\frac{13}{18}$; 6) $\frac{17}{20}$; 7) $\frac{23}{30}$ бөлүгүнө барабар. Ошол борбордук бурчту тап.

7. Айлана эки чекит менен эки жаага бөлүнөт. Эгерде: 1) алардан биринин бурч чоңдугу экинчисиникинен $40°$ ка чоң болсо; 2) бул жаалардын бурч чоңдуктары $2:7$ катышта болсо, ар бир бурчтун чоңдугун тап.

8. A, B, C чекиттер борбору O чекитинде болгон айланада жатат. Эгерде $\cup ABC = 70°$ болсо, AOC бурчту тап.

9. Айлананын: 1) $\frac{1}{5}$; 2) $\frac{1}{6}$; 3) $\frac{1}{9}$; 4) $\frac{1}{10}$; 5) $\frac{1}{12}$ бөлүгүн түзгөн AB жаага тиешелүү борбордук бурчтарды тап. Бул учурлардын ар биринде AB жаанын бурч чоңдугун белгилер жардамында жаз.

10. Айлананын радиусу: 1) 7,8 см; 2) 10,5 см; 3) 0,8 дм. Айлананын диаметрин тап.

57. АЙЛАНАГА ИЧИНЕН ЧИЙИЛГЕН БУРЧ

Аныктама. *Чокусу айланада жаткан, жактары болсо ошол айлананы кесип өткөн бурчка **айланага ичинен чийилген бурч** дейилет.*

1-сүрөттө ABC бурчу айланага ичинен чийилген бурч, AnC жаа ошол бурчтун ичинде жайлашкан. Мындай учурда, ичинен чийилген ABC бурч AnC жаага керилген деп да айтылат.

Теорема.

Айланага ичинен чийилген бурч өзү керилген жаанын жарымы менен өлчөнөт:

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC.$$

Далилдөө. $\angle ABC$ – O борборлуу айлананын AC жаасына керилген ичинен чийилген бурч болсун (2-сүрөт). Айлана борборунун ошол ичинен чийилген бурчка карата жайлашуусунун үч учурун көрүп чыгабыз.

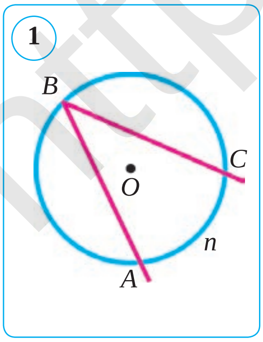
1-учур. Айлананын борбору ичинен чийилген бурчтун жактарынан бири, мисалы, BC жагында, жатат (2-*а* сүрөт). OA радиусун жүргүзөбүз жана AOC борбордук бурчун карайбыз. Ал BOA үч бурчтугунун сырткы бурчу. Үч бурчтуктун сырткы бурчунун касиети боюнча: $\angle AOC = \angle OBA + \angle OAB$. Бирок $\angle OBA = \angle OAB$, анткени AOB үч бурчтугу тең капталдуу ($OA = OB = R$). OBA жана OAB бурчтары болсо тең капталдуу үч бурчтуктун негизиндеги бурчтар. Демек, $\angle AOC = 2\angle ABC$ (1). Борбордук бурчтун чоңдугу ошол бурчка тиешелүү жаанын бурч чоңдугуна барабар экенин билесиң (56-тема). Мында AC жаа жарым айланадан кичине, ошондуктан борбордук бурчтун касиети боюнча:

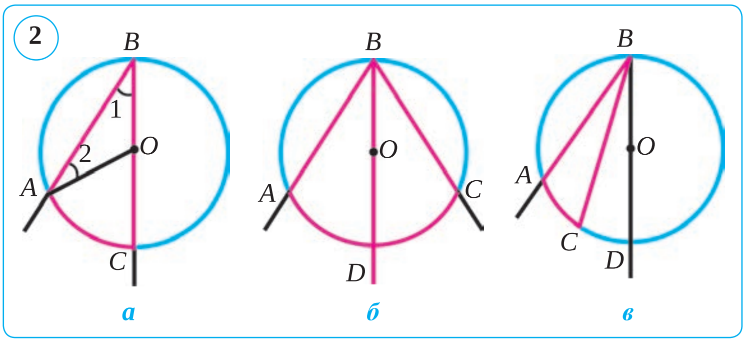
$$\angle AOC = \cup AC. \qquad (2).$$

(1) жана (2) барабардыктарынан: $2\angle ABC = \cup AC$, б. а. $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$.

Теорема 1-учур үчүн далилденди.

2-учур. Айлананын борбору O ичинен чийилген бурч жактарынын арасында жатат. BO нурун жүргүзөбүз, Ал AC жааны кандайдыр D чекитте кесет (2-*б* сүрөт). D чекити AC жааны эки $\cup AD$ жана $\cup DC$ жаага бөлөт. Де-





мек, далил боюнча (1-учур): $\angle ABD=\frac{1}{2}\cup AD$ жана $\angle DBC=\frac{1}{2}\cup DC$. Бул барабардыктарды мүчөлөп кошуп, төмөнкүлөрдү алабыз:

$$\angle ABC=\angle ABD+\angle DBC=\frac{1}{2}\cup AD+\frac{1}{2}\cup DC=\frac{1}{2}(\cup AD+\cup DC)=\frac{1}{2}\cup AC.$$

3-учур. Айлананын борбору O ичинен чийилген бурчтан сыртта жатат. Бул учурдун далилин 2-*в* сүрөттөн пайдаланып, өзүң аткар.

1-натыйжа. *Бир жаага керилген бардык ичинен чийилген бурчтар өз ара барабар болот* (3-*а* сүрөт):

$$\angle B=\angle B_1=\angle B_2=...=\frac{1}{2}\cup AC.$$

2-натыйжа. *Диаметрге* (*жарым айланага*) *керилген бардык ичинен чийилген бурчтар тик бурч болот* (3-*б* сүрөт):

$$\angle B=\angle B_1=\angle B_2=...=90°.$$

Маселе. Айлананын радиусуна барабар хорда жүргүзүлгөн. Ошол хорда: 1) айлананын борборунан; 2) берилген хорданын учтарынан айырмалуу айлананын каалагандай чекитинен кандай бурч менен көрүнөт?

Чыгаруу. AB – O борборлуу айлананын радиусуна барабар хорда болсун (4-сүрөт). Анда AOB үч бурчтугу тең жактуу жана демек, борбордук бурч (айлананын борборунан AB хорда көрүнгөн бурч) 60° ка барабар. A жана B чекиттеринен айырмалуу айлананын каалагандай C чекитинен ичинен чийилген ACB бурч (C чекитинен AB хорда көрүнгөн бурч) борбордук бурчтун жарымына барабар, б. а. 30° ка барабар.

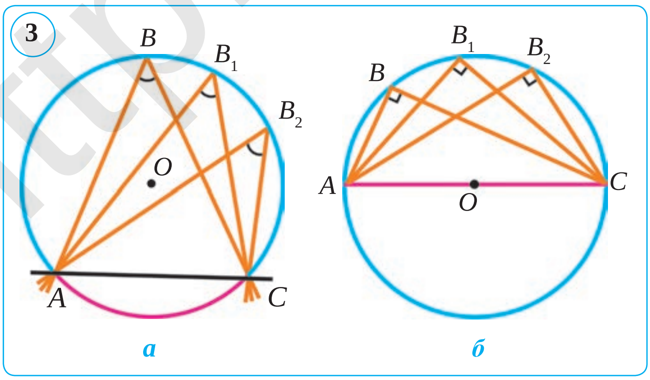
Жообу: 1) 60°; 2) 30°.

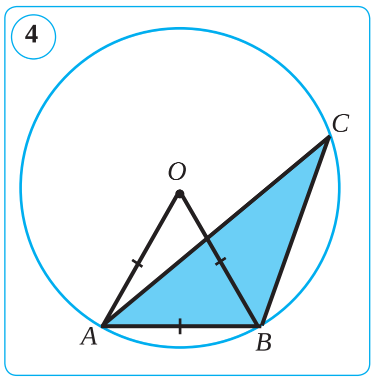
Суроо, маселе жана тапшырмалар

1. 1) Кандай бурчка айланага ичинен чийилген бурч дейилет?

? 2) Ичинен чийилген бурч кандай өлчөнөт?

3) Жарым айланага керилген ичинен чийилген бурч эмнеге барабар?





2. (*Оозеки.*) Ичинен чийилген бурч 25° ка барабар. Ошол ички бурчка керилген жаанын чоңдугун тап.

3. AB жана BC – борбору O чекитинде болгон айлананын хордалары, $\angle ABC = 30°$. Эгерде айлананын радиусу 10 см ге барабар болсо, AC хорданын узундугун тап.

4. 1) 5-сүрөттө O чекити – айлананын борбору, $\angle AOB = 88°$. $\angle ACB$ ны тап.
Чыгаруу. AOB бурч берилген айлананын ... бурчу болот жана ...° ка барабар. Демек, $\cup ADB = ...°$. ACB бурч ... чийилген бурч болот жана ... жаага керилет, ошондуктан $\angle ACB = \frac{1}{2}\cup ... = ...°$.
Жообу: $\angle ACB = ...°$.
2) 6-сүрөттө $\cup CAB = 130°$. $\angle CAB$ ны тап.
Чыгаруу. CAB бурчу айланага ичинен чийилген бурч болот жана $\cup CDB$ жаага керилген. Мындан:

$$\cup CDB = 360° - \cup CAB = 360° - 130° = 230°,$$

$$\angle CAB = \frac{1}{2}\cup CDB = \frac{1}{2}\cdot 230° = 115°.$$

Жообу: $\angle CAB = 115°$.
3) 7-сүрөттө $\angle APE = 46°, \angle BCE = 34°$. $\angle AEP$ ны тап.
Чыгаруу. PAB жана BCP ичинен чийилген бурчтар бир BP ..., демек, $\angle PAB = \angle ... = ...$. AEP үч бурчтугунан төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\angle AEP = 180° - (\angle ... + \angle ...) = 180° - (... + ...) = ...$$

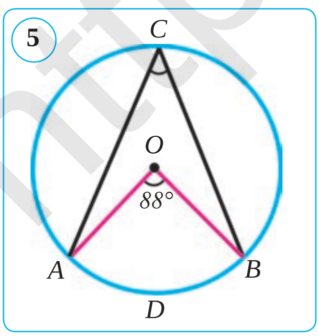
Жообу: $\angle AEP = ...$.

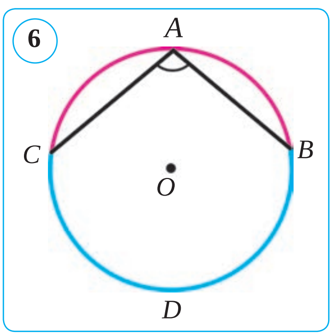
5. Айланада жаткан A, B, C чекиттер аны үч жаага бөлөт. Алардын градустук өлчөмдөрүнүн катышы $3:5:7$. ABC үч бурчтугунун бурчтарын тап.

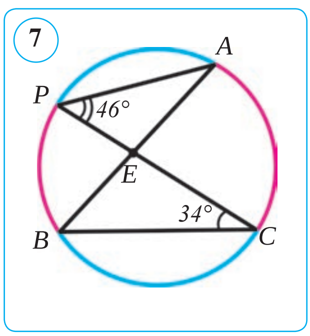
6. Хорда айлананы эки жаага бөлөт. Эгерде алардын бурч чоңдуктарынын катышы: 1) $5:4$; 2) $7:3$ сыяктуу болсо, хорда айлананын чекиттеринен кандай бурч менен көрүнөт?

7. Айланага AB диаметр жана AC хорда жүргүзүлгөн. Эгерде AC жана CB жаалардын градустук өлчөмү $7:2$ катышта болсо, BAC бурчун тап.

8. AB жана AC – айлананын хордалары, $\angle BAC = 70°$, $\cup AB = 120°$. AC жаанын градустук маанисин тап.







58. АЙЛАНАНЫН КЕСҮҮЧҮЛӨРҮ ТҮЗГӨН БУРЧТАР

1. Жаныма менен хордадан алынган бурч.

1-теорема.

Жаныма менен хордадан алынган бурч өз ичине алган жаанын жарымы менен өлчөнөт.

Далилдөө. AB жаныма жана BC хорда болсун. $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup BmC$ экенин далилдейбиз (1-сүрөт). Ал үчүн C чокусунан $CD \parallel AB$ ны жүргүзсөк, $\angle ABC = \angle BCD$, анткени алар ички алмашуучу бурчтар.

Бирок $\angle C = \frac{1}{2} \cup BnD$ жана $CD \parallel AB$ болгондуктан, $\cup BnD = \cup BmC$ жана

$\angle B = \angle C = \frac{1}{2} \cup BnD = \frac{1}{2} \cup BmC$.

Теорема далилденди.

1-маселе. AB хорда $56°$ туу жааны керип турат. Ошол хорданын учтарынан айланага жүргүзүлгөн жанымалар менен хордадан алынган бурчтарды тап.

Берилген: $(O,\ R)$, AB – хорда, $\angle AOB = 56° - AB$ хорданы керип турган борбордук бурч, $AC \perp OA$, $BC \perp OB$ (2-сүрөт).

Табуу керек: $\angle CAB$, $\angle CAB$, $\angle BAD$, $\angle ABE$.

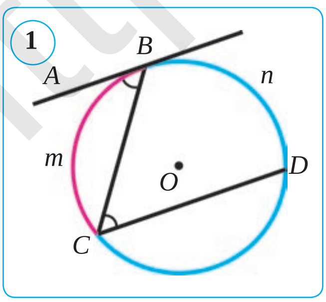
Чыгаруу. Жаныма менен хорданын арасындагы жаа $\cup AB = 56°$ (1-учур) же $\cup AnB = 360° - 56° = 304°$ (2-учур) болот.

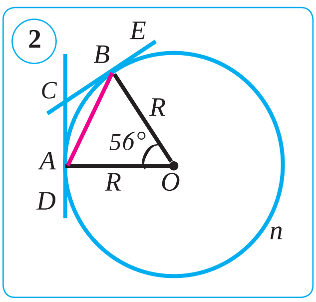
Ошентип, 1-учурда $\angle CAD = \frac{1}{2} \cup AB = \frac{1}{2} \cdot 56° = 28°$, 2-учурда болсо $\angle BAD = \frac{1}{2} \cup AnB = \frac{1}{2} \cdot 304° = 152°$ ка ээ болобуз.

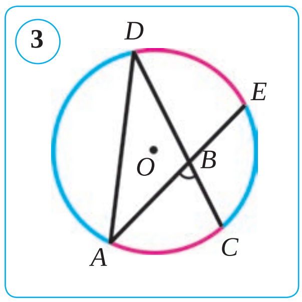
Белгилүү болгондой, айлананын сыртындагы бир чекиттен айланага жүргүзүлгөн жанымалардын жаныма чекиттерине чейин болгон кесиндилери барабар болот. Ошондуктан $\triangle ACB$ – тең капталдуу.

Демек, $\angle CAB = \angle CBA = 28°$ жана $\angle BAD = \angle ABE = 152°$.

Жообу: $\angle CAB = \angle CBA = 28°$, $\angle BAD = \angle ABE = 152°$.







2. Эки хорданын кесилишинен алынган бурчтар.

2-теорема.

Каалагандай эки хорданын кесилишинен алынган ар бир вертикалдуу бурч жактары керген жаалар суммасынын жарымына барабар.

Далилдөө. $\angle ABC - CD$ жана AE хордалардын кесилишинен алынган бурчтардан бири болсун (3-сүрөт).

$\angle ABC = \frac{1}{2}(\cup AC + \cup DE)$ экенин далилдейбиз. Ал үчүн A жана D чекиттерин бириктиребиз, анда $\angle ABC$ $\triangle ABD$ га салыштырмалуу сырткы бурч болот. Демек, $\angle ABC = \angle ADC + \angle DAE$. Бирок $\angle ADC = \frac{1}{2} \cup AC$ жана $\angle DAE = \frac{1}{2} \cup DE$. Ошондуктан

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC + \frac{1}{2} \cup DE = \frac{1}{2}(\cup AC + \cup DE).$$

$\angle ABD = \angle CBE = \frac{1}{2}(\cup AD + \cup EC)$ экендиги куду жогорудагыдай далилденет. Муну өз алдынча далилде.

2-маселе. AB жана CD – бир айлананын хордалары, P – алардын кесилишүү чекити. Эгерде BPD бурчу BPC бурчунан 4 эсе чоң, CDA бурчу болсо BPC *дан* 26° ка чоң болсо, CBP бурчун тап.

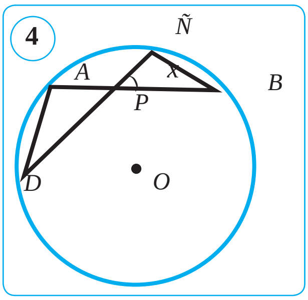
Берилген: $\angle BPD = 4\angle BPC$, $\angle CDA = \angle BPC + 26°$ (4-сүрөт).

Табуу керек: $\angle CBP$.

Чыгаруу. $\angle BPD + \angle BPC = 180°$,

$4\angle BPC + \angle BPC = 180°$, мындан $5\angle BPC = 180°$ жана аягында, $\angle BPC = 36°$. $\angle CDA = \angle BPC + 26° = 36° + 26° = 62°$. $\angle CBA = \angle CDA = 62°$, анткени алар бир $\cup AC$ ка керилген ичинен чийилген бурчтар. Мындан $\angle CBP = \angle CBA = 62°$.

Жообу: $\angle CBP = 62°$.

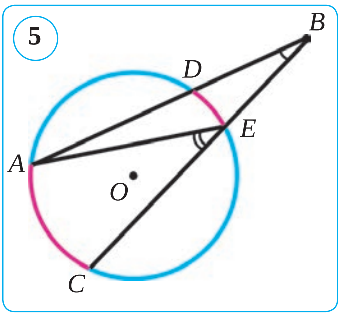


3. Айлананын сыртындагы бир чекиттен ага жүргүзүлгөн эки кесүүчүнүн арасындагы бурч.

3-теорема.

Айлананын сыртындагы бир чекиттен ага жүргүзүлгөн эки кесүүчүнүн арасындагы бурч (ABC) кесүүчүлөрдүн арасындагы жаалар (AC жана DE) айырмасынын жарымына барабар.

Далилдөө. B – айлана сыртындагы чекит, BA жана BC кесүүчүлөр болсун. $\angle B = \frac{1}{2}(\cup AC - \cup DE)$ экенин далилдейбиз. Ал үчүн A жана E чекиттери бириктиребиз (5-сүрөт).



$\angle AEC$ $\triangle AEB$ на сырткы бурч болот. Демек, $\angle AEC = \angle B + \angle DAE$, мындан $\angle B = \angle AEC - DAE$. Бирок $\angle AEC = 0{,}5\cup AC$ жана $\angle DAE = 0{,}5\cup DE$. Аларды өз ордуларына койсок:

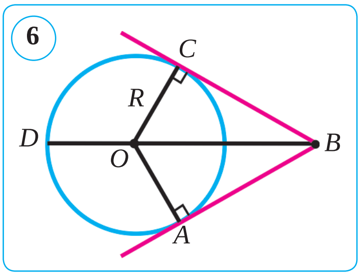
$$\angle B = -\frac{1}{2}\cup AC - \frac{1}{2}\cup DE - \frac{1}{2}(\cup AC - \cup DE$$

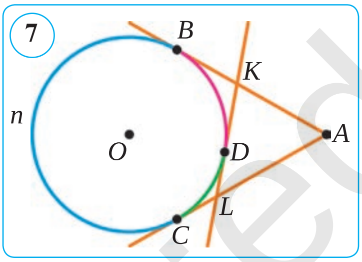
Демек, $\angle B = \frac{1}{2}(\cup AC - \cup DE$. Теорема далилденди.

4. Айлананын сыртындагы бир чекиттен ага жүргүзүлгөн эки жаныманын касиети.

4-теорема.

Айлананын сыртындагы бир чекиттен ага эки жаныма жүргүзүлсө, алардын ошол чекиттен жаныманын чекиттерине чейинки кесиндилери барабар жана айлананын борбору алардын арасындагы бурчтун биссектрисасында жатат, ал бурч 180° менен жанымалар керген жаанын айырмасына барабар.





Далилдөө. BC жана BA түз сызыктары айланага C жана A чекиттеринде жанган жанымалар, BD болсо ABC бурчтун биссектрисасы болсун. $AB = CB$ жана O борбордун BD да жатышын жана $\angle B = 180° - \cup AC$ экенин көрсөтөбүз (6-сүрөт).

OA жана OC радиустары жүргүзүлсө, $OA \perp BA$ жана $OC \perp BC$ болгондуктан: $\triangle AOB$ жана $\triangle COB$ – тик бурчтуу. $\triangle AOB = \triangle COB$, анткени BO гипотенуза жалпы, $OA = OC = R$. Үч бурчтуктардын барабардыгынан: $AB = BC$. Эми $OC = OA = R$ жана $OA \perp BA$, $AB = BC$ жана $OC \perp BC$ болгондуктан, O борбор дайыма BD биссектрисада жатат. Айлананын сыртындагы бир чекиттен жүргүзүлгөн эки кесүүчүнүн арасындагы бурчту чеnөө жөнүндөгү теореманын негизинде:

$$\angle B = 0{,}5(\cup ADC - \cup AC) =$$
$$= 0{,}5(360° - \cup AC - \cup CA) = 180° - \cup AC.$$

Демек, $\angle B = 180° - \cup AC$ болот. Теорема далилденди.

3-маселе. Айлананын A, B жана C чекиттери аны $11:3:4$ катышта жааларга бөлөт. A, B жана C чекиттеринен жанымалар жүргүзүлүп, бири-бири менен кесилишкенче улантылат. Алынган үч бурчтуктун бурчтарын тап.

Чыгаруу. 1) $\cup BnC : \cup CD : \cup DB = 11:3:4$, жанган чекиттерге жанымалар жүргүзүүдөн алынган үч бурчтук AKL болсун (7-сүрөт). A, AKL жана ALK бурчтарды табабыз:

$$\cup BnC = \frac{360°}{11+3+4}\cdot 11 = 220°;\quad \cup CD = \frac{360°}{11+3+4}\cdot 3 = 60°;\quad \cup DB = \frac{360°}{11+3+4}\cdot 4 = 80°;$$

$\cup CDB = \cup CD + \cup DB = 60° + 80° = 140°$;
$FA = 180° - \cup CDB = 180° - 140° = 40°$,
$FBKD = 180° - \cup DB = 180° - 80° = 100°$,
$FAKL = 180° - \angle BKD = 180° - 100° = 80°$,
$FALK = 180° - (FA + \angle AKL) = 180° - (40° + 80°) = 180° - 120° = 60°$.
Жообу: $\angle A = 40°$, $\angle AKL = 80°$, $\angle ALK = 60°$.

Суроо, маселе жана тапшырмалар

1. 1) Жаныма менен хордадан алынган; эки хорданын кесилишинен алынган; эки кесилишкен хорданын арасындагы бурч кандай өлчөнөт? 2) Бир чекиттен жүргүзүлгөн эки жаныма кандай касиетке ээ?

2. Айлананын радиусуна барабар *AB* хорда *A* чекитине жүргүзүлгөн жанyма менен кандай бурчтарды түзөт?

3. Айлананы кесүүчү эки хордасынын арасындагы бурчтардан бири 70° ка барабар. Ошол бурчка жанаша болгон бурчтардын суммасын тап.

4. 8-сүрөттө берилген *x* белгисиз санды тап.

5. Эки радиустун арасындагы бурч 150°. Бул радиустардын аяктарынан айланага жүргүзүлгөн жанымалардын арасындагы бурчу тап.

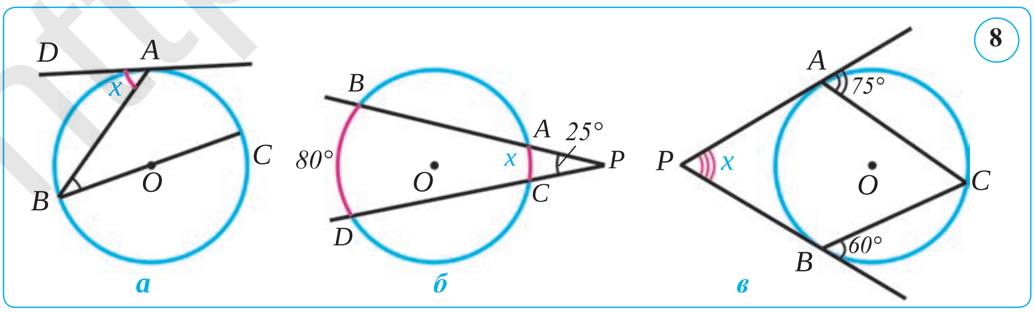
6. *B* чекитинен айланага жүргүзүлгөн *BA* жана *BC* жанымалар айлананы жанган чекиттеринде: 1) 5 : 4; 2) 12 : 6; 3) 9 : 6; 4) 13 : 7; 5) 2 : 3 катышта эки жаага бөлөт. *ABC* бурчунун маанисин тап.

7. Айлананы: 1) 2 : 7; 2) 4 : 5 катышта бөлгөн хорданын учтарынан эки жанyма жүргүзүлгөн. Алынган үч бурчтуктун бурчтарын тап.

8. Айланадан сырттагы чекиттен жүргүзүлгөн эки жаныманын жанган чекиттери айлананы: 1) 1 : 9; 2) 3 : 15; 3) 7 : 11; 4) 3 : 7 катыштагы эки жаага бөлөт. Жанымалардын арасындагы бурчту тап.

9. 1) 52°; 2) 74°; 3) 104° туу борбордук бурч тузгөн эки радиустун чокуларына жүргүзүлгөн жанымалардын арасындагы бурчу тап.

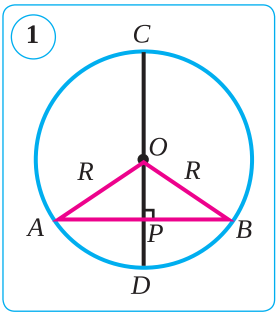
10. Айлананын радиусу диаметринен 40 мм ге кыска. Айлананын диаметрин тап.



59. АЙЛАНА ХОРДАСЫНЫН ЖАНА ДИАМЕТРИНИН КАСИЕТТЕРИ

1-теорема.

Хордага перпендикуляр диаметр ошол хорданы жана ага керилген жааны тең экиге бөлөт.



Далилдөө. Борбору O чекитинде жана радиусу R болгон айлана, AB хордага перпендикуляр CD диаметр, CD жана AB лардын кесилишүү чекити P берилген болсун (1-сүрөт). $AP=PB$ жана $\cup AD=\cup DB$ экенин далилдейбиз. Эгерде AB хорда диаметр болсо, P чекити O чекити менен үстү-үстүнөн түшөт жана ошол чекитте AB хорда жана аны керип турган жарым айлананын ADB жаасы тең экиге бөлүнөт, б. а. тастык орундуу болот. AB хорда диаметр эмес. OA жана OB радиустарын жүргүзөбүз. Алынган AOB үч бурчтук – тең капталдуу, анткени $OA=OB=R$. OP – тең капталдуу үч бурчтуктун AB жагына жүргүзүлгөн бийиктик, тең капталдуу үч бурчтуктун касиети боюнча, үч бурчтуктун негизине жүргүзүлгөн медиана жана O учундагы бурчунун биссектрисасы болот. Хорданын ортосу аркылуу өткөн диаметр болсо AB хорданы тең экиге бөлөт, б. а. $AP=PB$. OP–AOB бурчтун биссектрисасы экендигинен $\angle AOP=\angle BOP$ ны алабыз. Бул бурчтар керилген жаалар болгондуктан, $\cup AD=\cup DB$. Теорема далилденди.

2-теорема.

Айлананын хордасы анын диаметринен чоң болбойт.

Далилдөө. OPB үч бурчтугу – тик бурчтуу (1-сүрөткө к.). Анда, бул үч бурчтукта OB – гипотенуза, PB – катет. Белгилүү болгондой, катет гипотенузадан чоң эмес, б. а. $PB \leq OB$. Мындан, $2PB \leq 2 \cdot OB$, $2PB=AB$ жана $2OB=2R=d$. Демек, $AB \leq d$ экен.

1-натыйжа. *Хорданын ортосунан өткөн диаметр ошол хордага перпендикулярдуу болот.*

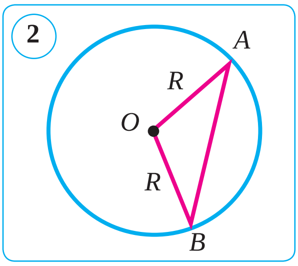
2-натыйжа. *Хорданын орто перпендикуляры айлананын диаметри болот.*

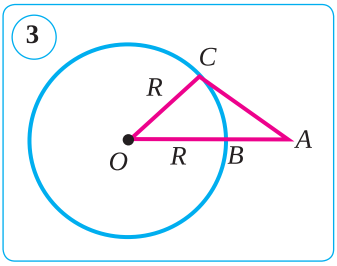
Бул натыйжаларды далилдөө өзүңө калтырылат.

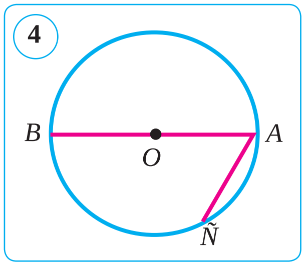
1-маселе. Диаметр эң чоң хорда экенин далилде.

Чыгаруу. O борборлуу жана R радиустуу айлана жана диаметрден айырмалуу каалагандай AB хорда берилген болсун (2-сүрөт). OA жана OB кесиндилерди жүргүзөбүз. AOB үч бурчтугунда AB жак калган эки жагынын суммасынан кичине, б. а. $AB<OA+OB=R+R=2R$. Демек, AB хорда диаметрден кичине болот.

2-маселе. A чекит R радиустуу айланадан сыртта жана ошол айлананын O борборунан d аралыкта жайлашкан. A чекитинен ошол айланадагы чекитке чейин болгон эң кыска аралык эмнеге барабар?







Чыгаруу. B – айлананын OA кесинди менен кесилишкен чекит болсун (3-сүрөт). AB аралык A чекитинен айланадагы чекиттерге чейин мүмкүн болгон аралыктардын ичинен эң кичинеси экенин көрсөтөбүз. Чындыгында да, айлананын каалагандай C чекити үчүн $AB+BO<AC+CO$ барабарсыздыгы аткарылат. $BO=CO=R$ ди эсепке алып, акыркы барабарсыздыктан $AB<AC$ барабарсыздыгын алабыз. $AO=d$ жана $BO=R$ ди эсепке алсак, изделген эң кыска аралык AB кесиндинин узундугуна, б. а. $d-R$ ге барабардыгы келип чыгат.

Суроо, маселе жана тапшырмалар

1. 1) Хордага перпендикуляр диаметр кандай касиетке ээ?
? 2) Айлананын хордасы анын диаметринен чоң болушу мүмкүнбү?
3) Хорданын орто перпендикуляры диаметр болбостугу мүмкүнбү?

2. Айлана түз жана анын бири-бирине перпендикуляр эки AB жана CD диаметрлерин жүргүз. A, B, C жана D чекиттер бөлгөн айлана жааларынын градустук өлчөмүн тап.

3. 8 см лүү хорда айланадан 90° туу жааны бөлөт. Айлананын борборунан хордага чейин болгон аралыкты тап.

4. Берилген айлананын чекитинен радиусуна барабар эки хорда жүргүзүлгөн. Алардын арасындагы бурчту тап.

5. Айлананын берилген чекитинен диаметрге жана радиуска барабар хорда жүргүзүлгөн. Алардын арасындагы бурчту тап (4-сүрөт).

6. Айланада андан 90° туу жааны бөлгөн эки параллель хорда жүргүзүлгөн. Алардан биринин узундугу 8 см. Алар арасындагы аралыкты тап.

7. Айлананын борборунан башка чекитте кесилишкен эки хордасынын кесилишүү чекитинде тең экиге бөлүнбөстүгүн далилде.

8. Айланадагы A чекиттен айлананын радиусуна барабар эки хорда AB жана AC жүргүзүлгөн. B жана C чекиттер түз сызык менен туташтырылган. Айлананын радиусу 12 см. Айлананын борборунан BC хордага чейин болгон аралыкты тап.

9. Айланада андан 90° туу жаа бөлгөн эки параллель хорда жүргүзүлгөн. Алардан биринин узундугу 10 см. Алар арасындагы аралыкты тап.

10. Айлананын радиусу 13 см. Ошол айланада 10 см ге барабар хорда жүргүзүлгөн. Айлананын борборунан хордага чейин болгон аралыкты тап.

11. AB кесинди – борбору O чекитте болгон айлананын диаметри, AC жана CB – ошол айлананын барабар хордалары. COB бурчун тап.

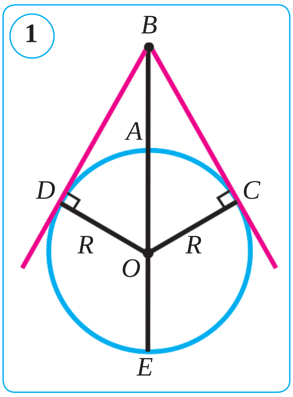
60. ПРАКТИКАЛЫК КӨНҮГҮҮ ЖАНА КОЛДОНУУ

ПРАКТИКАЛЫК КОМПЕТЕНЦИЯНЫ ӨНҮКТҮРҮҮЧҮ КОШУМЧА МАТЕРИАЛДАР

ГОРИЗОНТТУН АЛЫСТЫГЫ

1-маселе. (*Таяныч маселе.*) Кесүүчү менен анын сырткы бөлүгүнүн көбөйтүндүсү жаныманын квадратына барабар. Ошону далилде.

Чыгаруу. O борборлуу айлананын сыртында алынган B чекитинен BE кесүүчү, BC жана BD жанымалар жүргүзүлгөн болсун (1-сүрөт).



$BC^2 = BE \cdot BA$ экенин далилдейбиз. Ал үчүн тик бурчтуу BOC ($\angle C = 90°$) үч бурчтугун көрөбүз. Мындан Пифагордун теоремасы боюнча:

$$BC^2 = BO^2 - OC^2.$$

Бул барабардыкка $BO = BA + AO = BA + R$ жана $OC = R$ белгилөөлөрүн коюп, алынган барабардыкта форма алмаштырабыз:

$$BC^2 = (BA + R)^2 - R^2 \Rightarrow BC^2 = BA^2 + 2BA \cdot R + R^2 - R^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow BC^2 = BA^2 + 2BA \cdot R \Rightarrow BC^2 = BA \cdot (BA + 2R) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow BC^2 = BA \cdot BE$$

Ошону далилдөө талап кылынган эле.

1. Горизонт жөнүндө түшүнүк.

Алысты көрүү үчүн эч нерсе тоскоол болбогон ачык жерде алыска караганыңда сен өзүңдү жердин сырты асман менен туташып кеткендей жана андан ары эч нерсе жоктой көрүнгөн айлананын борборунда тургандай сезесиң. Бул – горизонт. Горизонт сызыгы карматпайт: сен ага жакындашкан сайын, ал сенден алыстай берет. Ага барууга болбойт, бирок ал чындыгында бар нерсе. Ар бир байкоо чекити үчүн ошол жерден караганда жердин үстүн көрүүгө мүмкүн болгон белгилүү чек арасы болот жана бул чек аранын алыстыгын эсептөө кыйын эмес. Горизонтко байланыштуу болгон геометриялык катыштарды түшүнүү үчүн Жер шарынын белгилүү бөлүгүн сүрөттөгөн 1-сүрөткө (же 2-сүрөткө) кайрылабыз. Жерден BA бийиктиктеги B чекитинде байкоочунун көзү турат. Байкоочу бул жерде өзүнүн айланасын кандай алыстыкка чейин көрө алат? Көрүү нуру Жердин кыртышына жанган C жана D (1-сүрөт) же C (2-сүрөт) чекиттерге чейин экени анык: мындан ары Жер көрүү нурунан төмөндө болот. Бул чекиттер (жана DAC жаада жаткан башка чекиттер да) жер сыртынын көрүнгөн бөлүгүнүн чек арасын сүрөттөйт, б. а. горизонт сызыгын түзөт. Байкоочуга ушул жерде асман жерге туташкан өңдүү көрүнөт, анткени байкоочу бул чекиттерде бир убакыттын өзүндө асмандагы жана жердеги нерселерди көрөт.

2. Горизонттун алыстыгы.

Горизонт сызыгы байкоочудан кандай алыстыкта болот? Башкача айтканда тегиз жерде биз борборунда өзүбүздү көргөн тегерек радиусунун чоңдугу канча? Байкоочунун жердин кыртышынан көтөрүлгөн бийиктиги белгилүү болсо, горизонттун алыстыгы кандай эсептелет?

Маселе байкоочунун көзүнөн жертин сыртына жүргүзүлгөн жаныма (2-сүрөт) BC кесиндинин узундугун эсептөөгө келтирилет. 1-маселеден белгилүү болгондой, жаныманын квадраты кесүүчүнүн сырткы кесиндиси $BA=h$ менен кесүүчүнүн бардык узундугу, б. а. $BE=h+2R$ дин көбөйтүндүсүнө барабар: $d^2=(h+2R)\cdot h$, бул жерде R – Жердин радиусу, $BC=d$ – байкоочуга көрүнгөн эң алыс аралык. Байкоочу көзүнүн жерден бийиктиги Жер шарынын диаметрине ($2R$ ге) салыштырмалуу абдан кичине, мисалы, самолёттун эң бийик көтөрүлүшү Жер шары диаметринин болжолдуу 0,001 үлүшүн гана түзөт, анда $2R+h\approx 2R$ деп алууга болот, анда формула дагы да жөнөкөйлөшөт: $d^2\approx 2Rh$.

Демек, горизонттун алыстыгын жөнөкөй формула боюнча эсептөөгө болот: $d\approx\sqrt{2Rh}$, бул жерде: R – Жер шарынын радиусу (болжолдуу 6400 км же тагыраагы 6371 км), h – жердин сыртынан байкоочу көтөрүлгөн бийиктик, $\sqrt{6400}=80$, анда формула төмөнкүдөй көрүнүш алат: $d\approx 80\sqrt{2h}\approx 113\sqrt{h}$,

бул жерде h сөзсүз километрдин бөлүктөрүндө туюнтулууга тийиш.

2-маселе. Жерден 10 км бийиктикте учкан самолёттон канча алыстыктагы аралыкты көрүүгө болот? (Жердин радиусу болжолдуу 6370 км.)

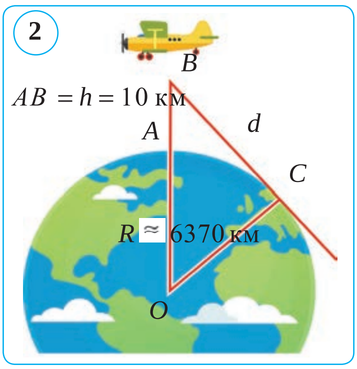
Чыгаруу. $OA=R\approx 6370$ км, $AB=h=10$ км. $BC=d$ ди табабыз (2-сүрөт). Кесүүчү менен анын сырткы бөлүгүнүн көбөйтүндүсү жаныманын квадратына барабар экенин билесиң, б.а.

$$d^2=(h+2R)\cdot h \text{ же}$$

$$d^2=(10+2\cdot 6370)\cdot 10=127\,500,$$

мындан: $d=\sqrt{127500}=\sqrt{51\cdot 2500}=50\sqrt{51}\approx$

$\approx 50\cdot 7{,}141=357{,}05\approx 360$ (км). *Жообу:* ≈ 360 км.



3-маселе. Жерден 4 км бийиктикке көтөрүлгөн аба шарынан канча алыстыктагы аралык көрүнөт? Жердин радиусу болжолдуу 6370 км. *Жообу:* $\approx 225{,}8$ км.

4-маселе. Кавказдагы Эльбрус чокусу деңиз деңгээлинен ≈ 5600 м (тагыраагы 5642 м) бийиктикте жайлашкан. Ошол чокудан кандай алыстыкты көрүүгө болот? Жердин радиусу болжолдуу 6370 км. *Жообу:* ≈ 270 км.

Эскертүү! *Жогоруда каралган маселелерде горизонттун алыстыгына таасир эткен физикалык факторлорду эсепке албадык. Горизонттун алыстыгы көптөгөн факторлорго байланыштуу түрдө чоңоюшу же азайышы мүмкүн.*

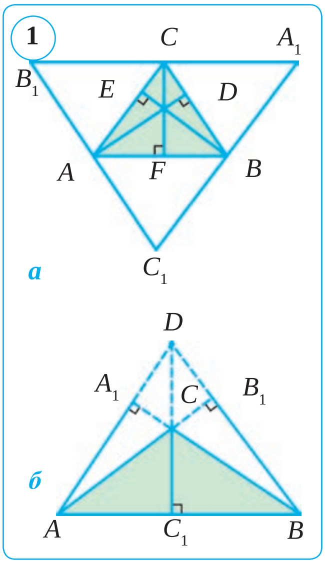
ҮЧ БУРЧТУКТУН ӨЗГӨЧӨ ЧЕКИТТЕРИ

Үч бурчтуктун төрт өзгөчө чекитин көрөбүз.

1. Үч бурчтук бийиктиктеринин кесилишүү чекити.

1-теорема.

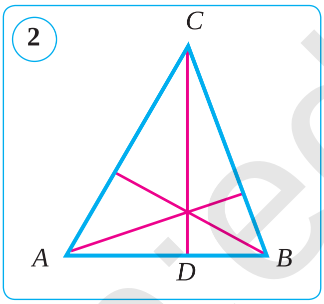
Үч бурчтуктун бийиктиктери (алардын уландысы) бир чекитте кесилишет.



Далилдөө. AD, BF жана CE – ABC үч бурчтуктун бийиктиктери (1-*а* *сүрөт*). Үч бурчтуктун чокулары аркылуу карама-каршы жактарына параллель түз сызыктарды жүргүзүп, жактары ABC үч бурчтугунун бийиктиктерине перпендикуляр болгон жаңы $A_1B_1C_1$ үч бурчтугун алабыз. Түзүү боюнча, C_1BCA жана B_1ABC төрт бурчтуктар – параллелограмм, мындан $C_1A=BC$ жана $BC=AB_1$ келип чыгат. Демек, A чекити – B_1C_1 кесиндинин ортосу. Куду ушундай, B чекити – A_1C_1 дин ортосу, C болсо A_1B_1 дин ортосу экенин далилде.

Ошентип, AD, BF жана CE бийиктиктер $A_1B_1C_1$ үч бурчтугунун орто перпендикулярында жатат. Демек, алар бир чекитте кесилишет. Үч бурчтуктун бийиктиктери кесилишпестиги да мүмкүндүгүн эскерте кетебиз. Кең бурчтуу үч бурчтуктун бийиктиктери алардын уландысында бир чекитте кесилишет, бирок бийиктиктери кесилишпейт (1-*б* сүрөт).

Үч бурчтук бийиктиктеринин (же алардын уландысы) кесилишүү чекитине анын орто *борбору да* дейилет.



Маселе. Үч бурчтуктун жактарындан кайсы бири орто борборго жакын жайлашкан?

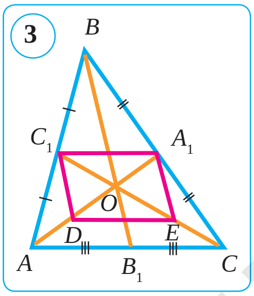
Чыгаруу. ABC үч бурчтугунда $AC>BC$ болсун (2-сүрөт). Үч бурчтуктун CD бийиктиги үчүн $AD>BD$ барабарсыздыгы менен $\angle ACD>\angle BCD$ барабарсыздыгынын аткарылышынан пайдаланабыз. Бул бийиктиктин чекиттери ошол чокудан чыккан жактардан эң кичинесине жакын жайлашканын билдирет. Демек, үч бурчтуктун орто борбору кичине жакка жакын жайлашат.

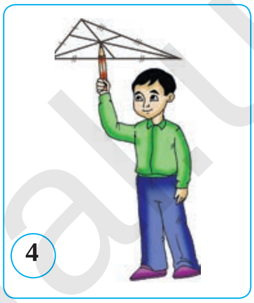
2. Үч бурчтук медианаларынын кесилишүү чекити.

2-теорема.

Үч бурчтуктун медианалары бир чекитте кесилишет жана ошол чекитте чокусунан баштап эсептегенде 2 : 1 катышта бөлүнөт.

Далилдөө. ABC үч бурчтугунда AA_1, BB_1 жана CC_1 медианалар жүргүзүлгөн болсун (3-сүрөт). Алар кандайдыр O чекитте кесилишин жана $AO:OA_1=BO:OB_1=CO:OC_1=2:1$ экенин далилдейбиз.





O – AA_1 жана CC_1 медианаларынын кесилишүү чекити, D жана E тиешелүү түрдө AO жана CO кесиндилердин ортосу болсун. C_1A_1 кесинди ABC үч бурчтугун орто сызыгы жана үч бурчтук орто сызыгынын касиети боюнча: $C_1A_1 \| AC$, $C_1A_1=0{,}5AC$. Мындан тышкары, $DE-AOC$ үч бурчтуктун орто сызыгы жана ошол касиет боюнча: $DE \| AC, DE=0{,}5AC$. Демек, DC_1A_1E төрт бурчтугунун эки жагы параллель жана барабар. Ошентип, DC_1A_1E – параллелограмм, анын DA_1 жана C_1E диагоналдары кесилишүү чекитинде тең экиге бөлүнөт. Демек, $AD=DO=OA_1, CE=EO=OC_1$, б. а. AA_1 жана CC_1 медианалар O чекитинде $2:1$ катышта бөлүнөт.

Куду ушундай, үчүнчү BB_1 медиана – AA_1 жана CC_1 медианаларынын ар бири менен кесилишүү чекитинде $2:1$ катышта бөлүнүшү далилденет. Ар бир медиана үчүн мындай бөлүнүү жалгыз гана жана демек, үч медиана да бир чекитте кесилишет экен.

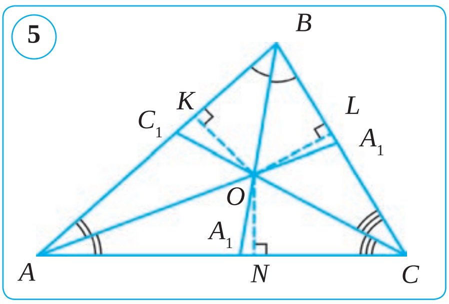
Үч бурчтук медианаларынын кесилишүү чекитине *центроид* же *оордук борбору* да дейилет. Мындай аталышын төмөнкү тажрыйбада текшерип көр: картон кагаздан каалагандай үч бурчтукту кыркып ал жана анын медианаларын жүргүз, андан кийин ийнени же учталган калемдин учун медианалардын кесилишүү чекитине коюп, тең салмакта кармоого аракеттен (4-сүрөт).

3. Үч бурчтук биссектрисаларынын кесилишүү чекити.

3-теорема.

Үч бурчтуктун үч биссектрисасы да бир чекитте кесилишет.

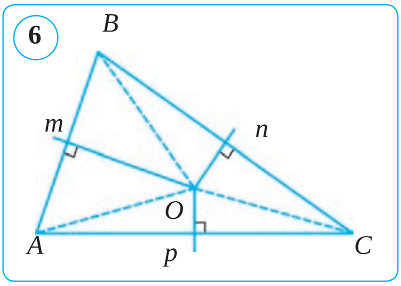
Далилдөө. ABC үч бурчтугунун AA_1 жана BB_1 биссектрисалары кесилишкен чекитин O менен белгилейбиз. Ал чекиттен тиешелүү түрдө AB, BC жана CA түз сызыктарга OK, OL жана OM перпендикулярын жүргүзөбүз (5-сүрөт). Белгилүү болгондой, бурч биссектрисасынын каалагандай чекитинен бурчтун жактарына чейин болгон аралыктар барабар. Андыктан, $OK=OK$ жана $OK=OL$. Ошондуктан $ON=OL$, б. а. O чекит ACB бурчтун жактарынан барабар алысташкан болот жана демек, ошол бурчтун CC_1 биссектрисасында жатат. Мындан, ABC үч бурчтугунун үч биссектрисасы да O чекитте кесишүүсү келип чыгат. Теорема далилденди.



4. Үч бурчтук орто перпендикулярларынын кесилишүү чекити.

4-теорема.

Үч бурчтук жактарынын орто перпендикулярлары бир чекитте кесилишет.



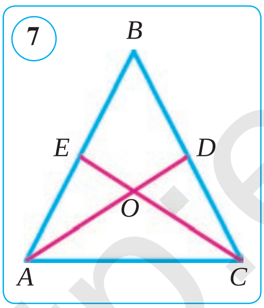
Далилдөө. $\triangle ABC$ берилген (6-сүрөт). Анын AB жана BC жактарына m жана n орто перпендикулярларды жүргүзөбүз. Алар кандайдыр O чекитте кесилишет (кесишүүчү түз сызыктарга перпендикуляр түз сызыктар кесилишет). Белгилүү болгондой, кесиндинин орто перпендикулярынын каалагандай чекитинен кесиндинин учтарына чейин болгон аралыктар барабар. Ошол боюнча, $OA=OB$ (1) жана $OB=OC$ (2) болот. (1) жана (2) барабардыктарынан табабыз: $OA=OC$. Демек, AC жагынын орто перпендикуляры p да O чекиттен өтөт. Ошентип, O чекити $\triangle ABC$ нын үч чокусунан да тең алыстаган болот: $OA=OB=OC$. Мындан, $\triangle ABC$ нын жактарына жүргүзүлгөн үч m, n жана p орто перпендикуляры O чекитте кесишкендиги келип чыгат. Теорема далилденди.

Суроо, маселе жана тапшырмалар

1. 1) Үч бурчтуктун бийиктиктери ар дайым кесилишеби?
2) Үч бурчтуктун канча өзгөчө чекитин билесиң? Аларды айт.

2. Тең жактуу үч бурчтуктун өзгөчө чекиттери кандай жайлашкан болот?

3. Эгерде үч бурчтукта эки медиана барабар болсо, анда ал тең капталдуу болот. Ошону далилде.



Чыгаруу. ABC үч бурчтугунда AD жана CE медианалар барабар жана O чекитте кесишсин (7-сүрөт). AOE жана COD үч бурчтуктарын көрөбүз. O чекити барабар AD жана CE медианаларынын ар бирин $2:1$ катышта бөлөт. Ошондуктан, $AO=CO$, $EO=DO$ болот. Мындан тышкары, вертикалдуу бурчтар болгондуктан: $\angle AOE=\angle COD$. Демек, үч бурчтуктар барабардыгынын биринчи белгиси боюнча: $\triangle AOE=\triangle COD$. Мындан, $AE=CD$ келип чыгат.

Бул кесиндилер медиананын аныктамасы боюнча, AB жана CB жактарынын жарымына барабар. Демек, $AB=CB$, б. а. ABC үч бурчтугу тең капталдуу экен. Ошону далилдөө талап кылынган эле.

4. Тең капталдуу үч бурчтуктун төрт өзгөчө чекитин бир түз сызыкта жатышын далилде. Ал кайсы түз сызык болот?

5. Үч бурчтук медианаларынын кесилишүү чекитин орто борбор менен үстү-үстүнөн түшөт. Берилген үч бурчтуктун тең жактуу экенин далилде.

6. Үч бурчтуктун чокусу бийиктиктери кесишкен чекит болушу мүмкүнбү?

7. Үч бурчтуктун медианаларынын кесилишүү чекити медианалардан бирин айырмасы 3 см ге барабар бөлүктөргө бөлөт. Ошол медиананын узундугун тап.

61–62. 5-КӨЗӨМӨЛ ИШИ. КАТАЛАР ҮСТҮНДӨ ИШТӨӨ

1. *AB* – *O* борборлуу айлананын диаметри. Эгерде $OA=OC=AC$ болсо, *BCO* бурчун тап.

2. 1) Айлананын сыртында берилген чекиттен айлананын чекиттерине чейин болгон эң чоң жана эң кичине аралыктар тиешелүү түрдө 50 см жана 20 см ге барабар. Берилген айлананын радиусун тап.
2) Айлананын борборунан *B* чекитке чейинки аралык 3 см ге, радиус 10 см ге барабар. *B* чекитинен айланага чейин болгон эң кичине жана эң чоң аралыкты тап.

3. *AB* жана *AC* түз сызыктар *O* борборлуу айланага *B* жана *C* чекиттерде жанат. Эгерде $\angle OAB = 30°$ жана $AB = 5$ см болсо, *BC* ны тап.

4. Айлана 11 : 16 : 9 катышта үч жаага бөлүнгөн жана бөлүнүү чекиттери туташтырылган. Алынган үч бурчтук бурчтарынын чоңдуктарын тап.

5-тест Өзүңдү сынап көр!

1. Айлананын борборунан *B* чекитке чейин аралык 5 см ге, радиус 12 см ге барабар. *B* чекиттен айланага чейин болгон эң кичине жана эң чоң аралыкты тап.
A) 7 см, 17 см; B) 7 см, 12 см; D) 5 см, 7 см; E) 7 см, 24 см.

2. Айлананын сыртында берилген чекиттен айлананын чекиттерине чейин болгон эң чоң жана эң кичине аралыктар тиешелүү түрдө 30 см жана 10 см ге барабар. Берилген айлананын радиусун тап.
A) 20 см; B) 10 см; D) 15 см; E) 5 см.

3. *AB* – *O* борборлуу айлананын диаметри. Эгерде $OA=OC=BC$ болсо, *CAO* бурчту тап.
A) 60°; B) 30°; D) 90°; E) 120°.

4. Радиусу *R* ге барабар болгон айланадагы чекиттен узундуктары *R* ге барабар болгон эки хорда жүргүзүлдү. Хордалардын арасындагы бурчту тап.
A) 120°; B) 110°; D) 135°; E) 40°.

5. Айлананын кесүүчү эки хордасынын арасындагы бурчтардан бири 80° ка барабар. Ошол бурчка жанаша болгон бурчтардын суммасын тап.
A) 200°; B) 90°; D) 100°; E) 160°.

6. Айлананын сыртындагы чекиттен айланага эки жаныма жүргүзүлгөн. Эгерде жанымалардын арасындагы бурч 72° болсо, айлананын жанган чекиттеринин арасындагы чоң жаасын тап.
A) 248°; B) 240°; D) 252°; E) 236°.

Англис тилин үйрөнөбүз!

Айлана – circle
Хорда – çord
Радиус – радиус
Жаа – arc

Диаметр – diameter
Борбордук бурч – central angle
Айланага жаныма – tangent to thн circle
Перпендикуляр – perpendicolar

Тарыхый маалыматтар

Абул Вафа Бузжаний
(940–998)

Абул Вафа Бузжаний 940-жылы Хорасан вилаятынын Герат жана Нишапур шаарларынын арасындагы Бузжан шаарында (азыркы Түркменстандын Сархатабад шаарына жакын) туулган. Ал Багдадда окуган жана изилденген.

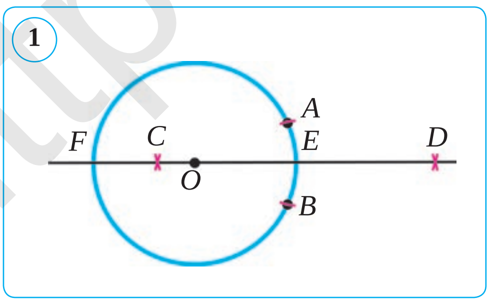
Анын «Кол өнөрчүлөр геометриялык түзүүлөрдөн эмнелерди билүүгө тийиш» аттуу китебинин 1 жана 2-главалары сызгыч жана циркуль жардамында түзүүлөргө арналган. Абул Вафанын айлананын борборун табуу маселесин келтиребиз.

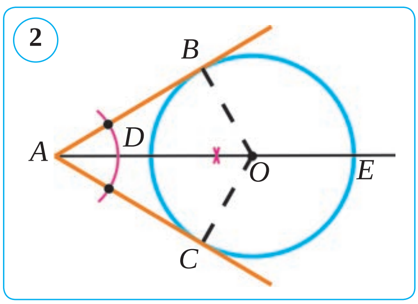
«Эгерде «Айлананын борбору кандай табылат?» деп суралса, анын айланасында A жана B чекиттерин белгилеп, AB аралык менен A жана B чекиттерин борбор кылып, эки барабар айлана түзөбүз, алар C жана D чекиттеринде кесилишет (1-*сүрөт*). *CD сызыгын жүргүзөбүз жана аны айлана менен E жана F чекиттеринде кесилишкенге чейин улантабыз, соң EF сызыгын O чекитинде тең экиге бөлөбүз. Анда O чекити айлананын борбору болот».*

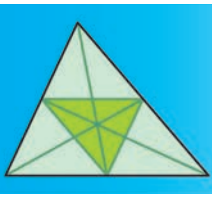
Анын бул усулу *A* жана *B* чекиттерин борбор кылып жаа чийилгенде, алардын кесилишкен чекиттерин туташтырган *CD* түз сызыгы берилген айлананын борборунан өтүп, анын *AB* хордасына перпендикуляр болушуна негизделген. Учурда бул маселе төмөнкүдөй чыгарылат: элестетели, бизге борбору белгиленбеген айлана берилген жана анын борборун аныктоо талап кылынган (2-сүрөт).

A чекитинен бул айланага *AB* жана *AC* жанымаларын жүргүзөбүз жана *BAC* бурчтун биссектрисасын түзөбүз. Биссектриса айлананы *D* жана *E* чекиттеринде кесет. *DE* ни тең экиге бөлсөк, бөлүнүү чекити *O* айлананын борбору болот. Эмне үчүн? Же *B* чекитинде *AB* жанымага перпендикуляр жүргүзсөк, ал биссектрисаны *O* чекитинде кесет. *O* чекити айлананын борбору болот. Эмне үчүн?

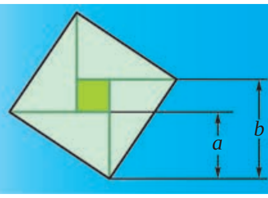
Ошону менен бирге Абул Вафа өзүнүн чыгармасында жааны толук айланага толтуруу, айланага анын сыртындагы чекиттен жаныма жүргүзүү, айланага анда жаткан чекиттен жаныма жүргүзүү сыяктуу түзүү усулдарын берген.







VI ГЛАВА
КАЙТАЛОО



8-КЛАССТА ӨТҮЛГӨН ТЕМАЛАРДЫ КАЙТАЛОО ҮЧҮН КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Төрт бурчтуктун үч сырткы бурчу тиешелүү түрдө 142°, 22° жана 136° ка барабар. Ошол төрт бурчтуктун жактарын тап.

2. Төрт бурчтуктун эң кичине жагы 7 см ге барабар, калган жактарынын эч бири мурдагысынан тиешелүү түрдө 4 см ге чоң. Ошол төрт бурчтуктун периметрин тап.

3. Тик бурчтуу трапециянын тар бурчу 45° ка барабар. Кичине каптал жагы жана кичине негизи 24 см. Ошол трапециянын чоң негизин тап.

4. Тең капталдуу үч бурчтуктун жактары: 1) 6 см, 5 см жана 5 см; 2) 24 см, 15 см жана 15 см; 3) 3,2 дм, 20 см жана 20 см; 4) 22 см, 60 см жана 60 см. Ошол үч бурчтуктун аянтын жана каптал жагына жүргүзүлгөн бийиктигин тап.

5. $ABCD$ төрт бурчтугунда: $AB=CD$, $AD=BC$, A бурч B бурчунан үч эсе чоң. Ошол төрт бурчтуктун бурчтарын тап.

6. $ABCD$ тең капталдуу трапецияда $BC=20$ см, $AB=24$ см жана $\angle D=60°$ болсо, анын AD негизин тап.

7. $\triangle ABC$ да AE жана BD – бийиктиктер. $AC=20$ см, $BD=16$ см жана $BC=32$ см. AE ни тап.

8. Тик бурчтуу үч бурчтуктун аянты 168 см^2. Эгерде катеттеринен бири экинчисинин $\frac{7}{12}$ бөлүгүнө барабар болсо, үч бурчтуктун катеттерин тап.

9. Үч бурчтуктун аянты 24 см^2. Үч бурчтуктун 16 см ге барабар жагына жүргүзүлгөн бийиктигин тап.

10. $ABCD$ ромб берилген. AC жана BD диагоналдары тиешелүү түрдө 30 см жана 12 см ге барабар. Ромбдун аянтын тап.

11. Үч жагы боюнча үч бурчтуктун аянтын тап:
1) 15, 15, 18; 2) 39, 42, 45; 3) 4, 13, 15; 4) 29, 25, 6.

12. ABC үч бурчтугунда $BC=34$ см. BC кесиндинин ортосунан AC түз сызыкка жүргүзүлгөн EF перпендикуляр AC жагын $AF=25$ см жана $FC=15$ см лүү кесиндилерге бөлөт. ABC үч бурчтугун аянтын тап.

13. Ромбдун диагоналдары 18 дм жана 24 дм. Ошол ромбдун периметрин жана параллель жактарынын арасындагы аралыкты тап.

14. Тең капталдуу трапециянын бийиктиги каптал жагынан эки эсе кичине. Трапециянын бурчтарын тап.

15. Тең жактуу үч бурчтуктун каалагандай чекитинен жактарына чейин болгон аралыктардын суммасы туруктуу (бирдей) жана ошол үч бурчтуктун бийиктигине барабар. Ошону далилде.

16. Айлананын A, B жана C чекиттери аны: 1) $14:6:4$; 2) $13:12:5$; 3) $17:10:9$ катыштагы жааларга бөлөт. A, B жана C чекиттеринен жанымалар жүргүзүлүп, бири-бири менен кесилишкенче улантылган. Алынган үч бурчтуктун бурчтарын тап.

17. Тик бурчтуктун узуну 30 % га чоңойтулса жана туурасы 30 % га азайтылса, анын аянты кандайча өзгөрөт?

18. Эгерде үч бурчтуктун негизи 20 % га узайтылып, бийиктиги 20 % га кыскартылса, анын аянты кандайча өзгөрөт?

19. Тик бурчтуктун аянты 540 см^2, эки жагынын катышы $3:5$ сыяктуу. Ошол тик бурчтуктун периметрин тап.

20. Параллелограммдын аянты 24 см^2 ге барабар. Эгерде бийиктиктери 3 см жана 4 см ге барабар болсо, анын периметрин тап.

21. Кандайдыр $ABCD$ параллелограммын чий. Векторун түз:

1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$; 3) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$; 4) $\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA}$.

22. Эгерде: 1) $A(0; 1)$, $B(1; 0)$; 2) $A(-2; 1)$, $B(-4; 3)$ болсо, $\overline{AB}$ векторунун координаталары эмнеге барабар болот?

23. ABC үч бурчтугунда AA_1 – медиана, O – AA_1 дин ортосу. $\overrightarrow{BO}$ векторун $\vec{a}=\overrightarrow{BA}$ жана $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$ векторлору аркылуу туюнт.

24. $ABCD$ параллелограммдын диагоналдары O чекитинде кесилишет, P чекити OB нын ортосу. $\overrightarrow{AP}$ векторун $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ жана $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$ векторлору аркылуу туюнт.

25. 240° туу жаанын чокуларынан жүргүзүлгөн жанымалар кесилишкенче улантылган. Алардын арасындагы бурчту тап.

26. Параллелограммдын бурчтарынан бири экинчисинен 4 эсе чоң. Ошол параллелограммдын чоң бурчун тап.

27. Тик бурчтуктун аянты 288 см^2, эки жагынын катышы $1:2$. Ошол тик бурчтуктун периметрин тап.

28. Параллелограммдын жактарынан бирине жүргүзүлгөн бийиктиги ошол жактан үч эсе кичине. Параллелограммдын аянты 48 см^2. Ошол жагын жана бийиктигин тап.

29. Квадраттын аянты 16 см^2. Эгерде: 1) анын бардык жагын эки эсе кыскартсак; 2) анын бардык жагын үч эсе узартсак, квадраттын аянты кандайча өзгөрөт?

30. Эгерде: 1) 1) $A(7; -5)$, $B(-9; -3)$; 2) $A(-8; 2)$, $B(-12; -4)$; 2) $A(8; -1)$, $B(-16; -11)$ болсо, AB кесиндинин ортосу – C чекитинин координаталарын тап.

ЖЫЙЫНТЫКТООЧУ КӨЗӨМӨЛ ИШИ. КАТАЛАР ҮСТҮНДӨ ИШТӨӨ

1. Тик бурчтуктун кичине жагы 10 см ге барабар, диагоналдары болсо 60° туу бурч менен кесилишет. Ошол тик бурчтуктун диагоналдарын тап.
2. Үч бурчтуктун жактары 11 см, 7 см жана 10 см ге барабар. Берилген үч бурчтуктун орто сызыктарынан алынган үч бурчтуктун периметрин тап.
3. Үч бурчтуктун жактары 21 см, 72 см жана 75 см ге барабар. Ошол үч бурчтуктун аянтын тап.
4. Айлананын сыртындагы чекиттен жүргүзүлгөн эки жаныманын арасындагы бурч 75°. Ошол жаныманын жактарын өз ичине алган жааларды тап.
5. $\vec{a}(2;-3)$ жана $\vec{b}(-2;-3)$ векторлору берилген. $\vec{m}=\vec{a}-2\vec{b}$ векторунун координаталарын тап.

6-тест Өзүңдү сынап көр!

1. Төрт бурчтуктун бурчтарды өз ара $3:5:4:6$ катышта. Төрт бурчтуктун кичине бурчун тап.
   A) 80°; B) 30°; D) 60°; E) 40°.
2. Томпок төрт бурчтуктун диагоналдары аны канча үч бурчтукка бөлөт?
   A) 4; B) 5; D) 6; E) 8.
3. Тик бурчтуктун туурасы 5 см ге барабар, узундугу андан 7 см ге чоң. Тик бурчтуктун периметрин эсепте.
   A) 32 см; B) 34 см; D) 24 см; E) 26 см.
4. Ар бир ички бурчу 162° болгон томпок көп бурчтуктун канча жагы бар?
   A) 18 ; B) 20 ; D) 15 ; E) 12 .
5. Параллелограммдын эки жагынын катышы $3:7$ ге, анын периметри болсо 18 см ге барабар. Ошол параллелограммдын кичине жагын тап.
   A) 2,7 см; B) 3,4 см; D) 5,4 см; E) 4,5 см.
6. Тик бурчтук формасындагы участоктун туурасы 32 м. Эгерде участоктун аянты 2 гектар болсо, анын узундугу канча метр болот?
   A) 610 м; B) 615 м; D) 625 м; E) 630 м.
7. Ромбдун бийиктиги 5 см ге, диагоналдарынын көбөйтүндүсү 80 см^2 ге барабар. Анын периметрин тап.
   A) 32 см; B) 16 см; D) 24 см; E) 28 см.
8. $\vec{a}$ (2; −3) жана $\vec{b}$ (−2; −3) вектору берилген. $\vec{m}=-\vec{a}+2\vec{b}$ векторунун координаталарын тап.
   A) (−6; −3); B) (−3; 6); D) (−2; –9); E) (2; −3).
9. $\vec{a}$ (3; 2) жана $\vec{b}$ (0; −1) вектору берилген. $2\vec{a}-4\vec{b}$ векторунун модулун тап.
   A) 10; B) 6; C) 8; D) 3.

Тиркеме. Тар бурчтуу тригонометриялык функциялар маанилеринин жадыбалы

Градустар	sinα $1° \le \alpha \le 45°$	tgα $1° \le \alpha \le 45°$	ctgα $1° \le \alpha \le 45°$	cosα $1° \le \alpha \le 45°$	Градустар
1	≈ 0,0175	≈ 0,0175	≈ 57,290	≈ 0,9998	89
2	≈ 0,0349	≈ 0,0349	≈ 28,636	≈ 0,9994	88
3	≈ 0,0523	≈ 0,0524	≈ 19,081	≈ 0,9986	87
4	≈ 0,0698	≈ 0,0699	≈ 14,301	≈ 0,9976	86
5	≈ 0,0872	≈ 0,0875	≈ 11,430	≈ 0,9962	85
6	≈ 0,1045	≈ 0,1051	≈ 9,514	≈ 0,9945	84
7	≈ 0,1219	≈ 0,1228	≈ 8,144	≈ 0,9925	83
8	≈ 0,1392	≈ 0,1405	≈ 7,115	≈ 0,9903	82
9	≈ 0,1564	≈ 0,1584	≈ 6,314	≈ 0,9877	81
10	≈ 0,1736	≈ 0,1763	≈ 5,671	≈ 0,9848	80
11	≈ 0,1908	≈ 0,1944	≈ 5,145	≈ 0,9816	79
12	≈ 0,2079	≈ 0,2126	≈ 4,705	≈ 0,9781	78
13	≈ 0,2250	≈ 0,2309	≈ 4,331	≈ 0,9744	77
14	≈ 0,2419	≈ 0,2493	≈ 4,011	≈ 0,9703	76
15	≈ 0,2588	≈ 0,2679	≈ 3,732	≈ 0,9659	75
16	≈ 0,2756	≈ 0,2867	≈ 3,487	≈ 0,9613	74
17	≈ 0,2924	≈ 0,3057	≈ 3,271	≈ 0,9563	73
18	≈ 0,3090	≈ 0,3249	≈ 3,078	≈ 0,9511	72
19	≈ 0,3256	≈ 0,3443	≈ 2,904	≈ 0,9455	71
20	≈ 0,3420	≈ 0,3640	≈ 2,747	≈ 0,9397	70
21	≈ 0,3584	≈ 0,3839	≈ 2,605	≈ 0,9336	69
22	≈ 0,3746	≈ 0,4040	≈ 2,475	≈ 0,9272	68
23	≈ 0,3907	≈ 0,4245	≈ 2,356	≈ 0,9205	67
24	≈ 0,4067	≈ 0,4452	≈ 2,246	≈ 0,9135	66
25	≈ 0,4226	≈ 0,4663	≈ 2,145	≈ 0,9063	65
26	≈ 0,4384	≈ 0,4877	≈ 2,050	≈ 0,8988	64
27	≈ 0,4540	≈ 0,5095	≈ 1,963	≈ 0,8910	63
28	≈ 0,4695	≈ 0,5317	≈ 1,881	≈ 0,8829	62
29	≈ 0,4848	≈ 0,5543	≈ 1,804	≈ 0,8746	61
30	0,5000	≈ 0,5774	≈ 1,732	≈ 0,8660	60
31	≈ 0,5150	≈ 0,6009	≈ 1,664	≈ 0,8572	59
32	≈ 0,5299	≈ 0,6249	≈ 1,600	≈ 0,8480	58
33	≈ 0,5446	≈ 0,6494	≈ 1,540	≈ 0,8387	57
34	≈ 0,5592	≈ 0,6745	≈ 1,483	≈ 0,8290	56
35	≈ 0,5736	≈ 0,7002	≈ 1,428	≈ 0,8192	55
36	≈ 0,5878	≈ 0,7265	≈ 1,376	≈ 0,8090	54
37	≈ 0,6018	≈ 0,7536	≈ 1,327	≈ 0,7986	53
38	≈ 0,6157	≈ 0,7813	≈ 1,280	≈ 0,7880	52
39	≈ 0,6293	≈ 0,8098	≈ 1,235	≈ 0,7771	51
40	≈ 0,6428	≈ 0,8391	≈ 1,192	≈ 0,7660	50
41	≈ 0,6561	≈ 0,8693	≈ 1,150	≈ 0,7547	49
42	≈ 0,6691	≈ 0,9004	≈ 1,111	≈ 0,7431	48
43	≈ 0,6820	≈ 0,9325	≈ 1,072	≈ 0,7314	47
44	≈ 0,6947	≈ 0,9657	≈ 1,036	≈ 0,7193	46
45	≈ 0,7071	1,0000	1,000	≈ 0,7071	45
Градустар	cosα $45° \le \alpha \le 89°$	ctgα $45° \le \alpha \le 89°$	tgα $45° \le \alpha \le 89°$	sinα $45° \le \alpha \le 89°$	Градустар

ЖООПТОР

7-класста өтүлгөндөрдү кайталоо. 5. 9 дм. **7.** 3 см. **9.** Ооба, барабар. **10.** 52°, 63°, 65°. **11.** 60°. **13.** 24°, 72°, 84°. **14.** Жок, келип чыкпайт. **18.** 58°.

I глава. 1-тема. 2. 1) $n=8$; 2) $n=11$; 3) $n=24$. **4.** 60°. **5.** 1) $n=12$; 2) $n=36$; 3) $n=40$. **6.** $n=8$. **7.** 1) $n=20$; 2) $n=15$; 3) $n=6$. **9.** 1) $n=24$; 2) $n=8$; 3) $n=5$. **10.** 36°, 72°, 108°, 144°. **2-тема. 2.** 25,5 см, 50,5 см. **3.** 1) 35°, 145°, 35°, 145°; 3) 85°, 105°, 85°, 105°. **4.** $P_{ABO}=20$ см; $P_{BOC}=24$ см. **5.** $AB=DC=16$ см, $AD=BC=4$ см. **3-тема. 2.** 1) Ооба, туура. **3.** 32 см. **7.** 26 см же 28 см. **8.** 45°, 135°, 135°, 45°. **9.** 26 см. **4-тема. 2.** 1) 9 см; 2) 7 см. **3.** 12 см. **4.** $AB=DC=4$ см, $BC=AD=8$ см. **6.** 1) $4+7<12$ – үч бурчтуктун барабарсыздыгы аткарылбады; жок, болушу мүмкүн эмес. **7.** 7 см, 14 см, 7 см, 14 см. **5–6-темалар. 2.** 10 см. **3.** $BP=12$ см. **5.** 7 см. **6.** 40°, 140°, 40°, 140°. **9.** 12 см, 24 см, 30 см, 42 см. **10.** 64 см. **12.** 30 см. **13.** 32 см. **7–8-темалар. 3.** 150°. **4.** 23 см. **6.** 27 см, 11 см. **7.** 20 см, 14 см. **10.** 90°, 90°, 100°, 80°. **12.** 70 cm. **9-тема. 3.** $AC=5$ см. **4.** $OB_1=3{,}2$ см, $OB_2=4{,}8$ см, $OB_3=6{,}4$ см. **6.** 2) 19 см. **8.** $x=4$. **9.** $OB_1=9$ см, $OB_2=13{,}5$ см, $OB_3=18$ см. **10–11-темалар. 2.** 2,5 см, 3,5 см, 5,5 см. **4.** 22 см, 10 см. **6.** 2) 15 см. **9.** 24 см, 12 см. **10.** 3 см. **11.** 30 см, 10 см. **12.** 12 см.

II глава. 15-тема. 2. а) cosα; б) tgα; в) sinα; г) ctgα. **4.** а) Ооба, анткени $0{,}98<1$; б) жок, анткени $\sqrt{2}>1$; в) ооба, анткени $\sqrt{5}-2<1$. **5.** $ML=24$, $MN=25$. **6.** $\sin M=\frac{5}{13}$, $\cos M=\frac{12}{13}$, $\operatorname{tg} M=\frac{5}{12}$, $\operatorname{ctg} M=\frac{12}{5}$. **16-тема. 2.** а) Туура, анткени $a=c\sin\alpha$; б) туура эмес, анткени $c=\frac{a}{\sin\alpha}$ **3.** Ооба, анткени тангенстин мааниси ар кандай оң сан болот. **4.** 1) 16 см; 2) 50 см. **6.** 16 см. **7.** 5 см. **8.** 50 см. **17-тема. 2.** 1) 13; 2) 9; 3) 2,5. **3.** 1) 40 см; 2) 100 см. **4.** $x=\sqrt{3}$; $y=\sqrt{2}$. **5.** 1) 0,5; 2) $4\sqrt{2}$; 3) 0,8; 4) 1,5. **18-тема. 2.** 1) Жок, анткени $121+49\neq289$; 2) ооба, анткени $3^2+1{,}6^2=3{,}4^2$, $11{,}56=11{,}56$. **5.** Эки чыгарылышка ээ. **6.** 1) Ооба, анткени $12^2+35^2=37^2$; 2) жок, анткени $11^2+20^2\neq25^2$. **7.** 2 см. **19-тема. 1.** 1) 9,6 см, 9,6 см, 8 см. **2.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}h$. **3.** 1) $h_b=\frac{12}{7}\sqrt{6}$ см; 2) $h_c=11{,}2$ дм; 3) $h_b=6{,}72$ см. **4.** $h=6\sqrt{3}$ см. **5.** $h_a=\frac{15}{4}\sqrt{7}$ см; $h_c=\frac{5}{2}\sqrt{7}$ см. **7.** $h_a=\frac{3}{2}\sqrt{15}$ см. **20–21-темалар. 2.** 1) $\frac{5}{13}$; 2,4; $\frac{5}{12}$. **4.** 1) 2; 2) 1; 3) 1. **5.** 1) ctg²α; 2) tgα. **7.** 1) $\frac{2}{\sqrt{5}}$; $\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\frac{1}{2}$. **9.** 1) $\cos\alpha=\frac{15}{17}$; $\operatorname{tg}\alpha=\frac{8}{15}$; $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{15}{8}$. **12.** 1) sin²α; 2) cos³α. **14.** 1) sin²α; 2) sin³α. **22-тема. 2.** 1) $x\approx50°$; 2) $x\approx14°$; 3) $x\approx34°$; 4) $x\approx74°$. **3.** 1) $\sin B=0{,}6$; $\cos B=0{,}8$. **5.** $\cos A=0{,}5$; $\operatorname{tg} A=\sqrt{3}$. **7.** 1) $\sin\alpha=0{,}6$; $\cos\alpha=0{,}8$. **8.** 1) sinα; 2) cos³α. **23-тема. 1.** 1) 1,5; 3) 0,5. **3.** $\frac{32\sqrt{3}}{3}$; $\frac{16\sqrt{3}}{3}$. **4.** 12; 6. **5.** 1) sin²α; 2) sin²α. **7.** 2. **8.** 1) 0,5; 2) 0,5; 3) 1. **24-тема. 1.** а) 1) $\approx0{,}0523$; 2) $\approx0{,}3584$; 3) $\approx0{,}7660$; 4) $\approx0{,}6428$; е) 1) $\approx5{,}671$; 2) $\approx1{,}732$; 3) $\approx0{,}2679$; 4) $\approx11{,}430$. **2.** б) 1) $\approx42°$; 2) $\approx50°$; 3) $\approx87°$; в) 1) $\approx25°$; 2) $\approx85°$; 3) $\approx10°$. **4.** 1. **6.** 1) 1; 2) 0. **7.** 1) $\approx0{,}9397$; 4) $\approx23{,}078$. **8.** $x\approx8°$. **25-тема. 1.** 14 см. **2.** 45°, 45°. **3.** $a\approx6{,}691$; $b\approx7{,}431$; $\beta\approx48°$. **5.** cos²α. **7.** $a=4$ см; $b=4\sqrt{3}$ см, $\beta=60°$. **26-тема. 1.** $b=9$ см, $\alpha=\beta=45°$. **2.** $c=12$ см, $\alpha=60°$, $\beta=30°$. **5.** 0. **7.** $c=26$ см. **27-тема. 3.** $a=7$ см, $\alpha=\beta=45°$. **4.** $a=6\sqrt{3}$ см, $b=6$ см, $\beta=30°$. **5.** $a=5$ см (5-сүрөт); $AC=2\sqrt{13}$ см, $BC=3\sqrt{13}$ см (6-сүрөт). **6.** 168 см.

III глава. 31-тема. 3. 1) III чейрек; 2) II чейрек; 3) IV чейрек; 4) I чейрек. **4.** 1) (–10; –1); 2) (0; –5,5); 3) (–2; 1). **5.** $B(-1; 5)$. **8.** 1) $D(3; 0)$; 2) $D(4; 5)$. **32–33-темалар. 2.** 1) 10; 2) 17; 3) 13. **3.** 1) $x_1=-2$; $x_2=6$. **4.** $P=16$. **5.** 1) $(x-7)^2+(y-11)^2=25$; 2) $(x+2)^2+(y-3)^2=1$. **6.** 1) (2; 5), $R=7$; 2)

(–1; 5), $R=2$. **7.** 1) $C(3; -1)$, $R=4$; 2) $C(0; -5)$, $R=1$. **8.** 1) Тең капталдуу. **9.** 1) $(x-9)^2+(y-4)^2=49$; 2) $(x+3)^2+(y+4)^2=4$. **10.** 1) $C(7; -2)$, $R=5$; 2) $C(4; 0)$, $R=1$. **11.** 1) (5; –12) жана (5; 12); 2) (–5; –12) жана (5; –12). **34-тема. 3.** 1) $2x-y+5=0$; 2) $x+y-7=0$; 3) $3x-2y+2=0$. **4.** $c=-3$. **5.** $a=b=\frac{1}{3}$. **6.** 1) (0; –1,5) жана (–3; 0); 2) (0; 3) жана (4; 0); 3) (0; –5) жана (2,5; 0). **9.** $x+1=0$, $x-3y-8=0$, $x-y=0$. **35-тема. 2.** 1) $\overrightarrow{DC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{AO} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OC}$; 3) $\overrightarrow{CB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{AD}$ жана $\overrightarrow{DA} \uparrow\downarrow \overrightarrow{AD}$; 5) $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$; 6) $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}$; 7) $\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{OB}$. **36–37-темалар. 5.** Ооба, аткарылат. **6.** $|\overrightarrow{AO}|=16$ см. **7.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}$. **9.** $\overrightarrow{AB}=-\vec{b}$; $\overrightarrow{BC}=-\vec{a}+\vec{b}$; $\overrightarrow{DA}=\vec{a}-\vec{b}$. **10.** $\overrightarrow{BF}=-2\vec{a}+\vec{b}$; $\overrightarrow{EC}=-\vec{a}+2\vec{b}$; $\overrightarrow{EF}=-\vec{a}+\vec{b}$; $\overrightarrow{BC}=-2\vec{a}+2\vec{b}$. **38–39-темалар. 4.** $\overrightarrow{OA}=-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$; $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$ **5.** 1) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$; 2) $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{CB}$; 3) $\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$. **7.** 1) (4; 5); 2) (–1; 4); 3) (0; 0). **8.** 1) 25; 2) 5; 3) 3. **9.** 1) (1; –2); 2) $(2m; 2n)$. **11.** $m=7$. **12.** $B(-2; -11)$. **40-тема. 2.** 1) (–3; 4); 2) (–5; 12). **3.** 1) (–4; 10); 2) (0; 2); 4) (4; –10). **4.** 1) (3; 6); 2) (5; 3); 3) (–4; –3). **5.** 1) (6; 3); 2) (–6; 3); 3) (–2; 15). **6.** 1) $\vec{c}(-4;-4)$; 2) $\vec{c}(8;6)$. **7.** 1) $\vec{c}(-12;6)$; 2) $\vec{c}(-11;8)$. **8.** 1) $\vec{c}(-2;-1)$; 2) $\vec{c}(2;-13)$. **41-тема. 1.** $CC_1=2$. **2.** $\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$. **3.** (5; 12). **4.** $B(5; 5)$, $D(1; -1)$. **5.** $B(-5; 11)$. **8.** $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

IV глава. 45-тема. 2. 2) 0,0225 дм^2; 5) 6,25 м^2. **6.** 1) 4 эсе чоңоёт; 2) 9 эсе азаят; 3) 28 см^2 ге чоңоёт. **11.** 2) 3,6 дм; 3) 68 мм; 5) 80 дм. **13.** 359,12 миң км^2. **46–47-темалар. 2.** 1) $P=65,8$ см, $S=87$ см^2; 3) $P=7,4$ дм, $S=3$ дм^2. **4.** $S=5000$ м^2. **5.** 1) $P=126$ см, $S=920$ см^2. **8.** 12 см. **9.** 1) $S=500$ см^2; 2) $a=12$ см; 3) $h_a=5$ см. **11.** 1) 1,6 эсе чоңоёт; 2) 6,25 эсе азаят. **13.** 2) 280 см^2; 4) 4,8 дм^2. **14.** $P=42$ см. **15.** $S=280$ см^2. **48-тема. 2.** 1) 14 см^2; 2) 150 см^2. **3.** 4 см. **4.** 5 : 1. **8.** 1) 756 см^2; 2) 84 см^2; 3) 192 см^2. **10.** 60 см. **11.** 7,5 дм^2. **49–50-темалар. 2.** 1) 32 см. **3.** 1) 512 см^2; 2) 1,62 дм^2. **4.** 12 см. **5.** 5 см. **7.** 1) 1,35 дм^2; 2) 180 см^2; 3) 8 см^2. **8.** 1) 87 см^2; 2) 14 см. **10.** 1) $0,5a^2$ кв. бирд. **11.** 360 см^2. **12.** 1) 2,45 дм^2; 2) 238 см^2; 3) 31,5 см^2. **14.** 1) 1,44 м^2. **15.** 1) 140 см^2. **51-тема. 1.** 2125 кв. бирд. **2.** $(a+b)\cdot c$. **3.** 144 см^2. **5.** 16 кв. бирд. **6.** 1) 20,8 км; 2) 8 км.

V глава. 55-тема. 3. AB жана BD кесүүчү. **4.** 25 см. **5.** 1) $R=5$ см; 2) $R<5$ см; 3) $R>5$ см. **8.** CD. **56-тема. 2.** 1) Айланалар ички жактан бири-бирине жанат; 2) жалпы чекитке ээ эмес, бири экинчисинин ичинде жатат. **3.** 1) 10 см; 2) 2 см. **6.** 1) 144°; 2) 96°; 3) 210°; 4) 200°; 5) 260°; 6) 306°; 7) 276°. **7.** 1) 160°, 200°; 2) 80°, 280°. **8.** 70°. **9.** 1) 72°; 2) 60°; 3) 40°; 4) 36°; 5) 30°. **10.** 1) 15,6 см; 2) 21 см; 3) 1,6 дм. **57-тема. 3.** $AC=10$ см. **4.** 1) $\angle ACB=44°$; 3) $\angle AEP=100°$. **5.** 36°, 60°, 84°. **6.** 1) 100° же 80°; 2) 126° же 54°. **7.** $\angle BAC=20°$. **8.** 100°. **58-тема. 3.** 220°. **4.** a) $x=45°$; b) $x=30°$; d) $x=90°$. **5.** 30°. **6.** 1) $\angle ABC=20°$; 2) $\angle ABC=60°$; 3) $\angle ABC=36°$; 4) $\angle ABC=54°$; 5) $\angle ABC=36°$. **7.** 1) 100°, 40°, 40°. **8.** 1) 144°; 2) 120°; 3) 40°; 4) 72°. **9.** 1) 128°; 3) 76°. **59-тема. 3.** 4 см. **6.** 8 см. **9.** 10 см. **11.** 90°.

VI глава. 1. 38°, 158°, 44°, 120°. **2.** 52 см. **3.** 48 см. **4.** 1) 12 см^2; 4,8 см; 2) 108 см^2; 14,4 см. **6.** 44 см. **7.** 10 см. **9.** 3 см. **10.** 180 см^2. **13.** 60 дм, 14,4 дм. **14.** 30°, 150°, 150°, 30°. **17.** 9% га азаят. **19.** 96 см. **20.** 28 см. **22.** 1) (1; –1); 2) (–2; 2). **23.** $\overrightarrow{BO}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$ **25.** 60°. **26.** 144°. **27.** 72 см. **28.** 12 см, 4 см. **29.** 1) 4 см^2 ге азаят; 2) 128 см^2 ге чоңоёт.

МАЗМУНУ

УЎК: 514(075)
КВК 22.151я721
R 24

Рахимкариев А.А.
Геометрия 8: Жалпы орто билим берүүчү мектептердин 9-классы үчүн окуу китеби. / А.А. Рахимкариев, М.А. Тохтаходжаева. - Т.: “O‘zbekiston” БПЧУ, 2019. -160 б.

ISBN 978-9943-25-815-0

УЎК: 514(075)
КВК 22.151я721

ABDUVAHOB ABDURAHMONOVICH RAHIMQORIYEV,
TOXTAXODJAYEVA MUYASSAR ABDUVAHOBOVNA

ГЕОМЕТРИЯ

Umumiy o‘rta ta’lim maktablarining 8- sinfi uchun darslik
(Qirg‘iz tilida)

ТОШКЕНТ — «MITTI YULDUZ» — 2019

Котормочу *А. Зулпихаров*
Редактору *А. Зулпихаров*
Сүрөтчүлөр *Ш. Рахимкариев, Х. Абдуллаев*
Техникалык редактору *Т. Харитонова*
Корректору *Ш. Зулпихарова*
Компьютерде даярдаган Х.*Ходжаева*

Басма үйдүн лицензиясы AI №158, 14.08.2009
Басууга 2019-жылдын 00-июлунда уруксат берилди. Форматы $70\times100^1/_{16}$.
Кегель 12. Times New Roman гарнитурасы. Офсеттик басма усулда басылды.
Шарттуу б. т. 13,0. Басма-эсеп. т. 10,0. Нускасы 811.
Буюртма № 19-134.

Окуу китебинин кайра иштелип, басмага даярдалган оригинал-макети «MITTI YULDUZ» ЖЧК га таандык. Ташкент шаары, Навоий көчөсү, 30.

Өзбекстан Республикасы Президенти администрациясынын алдындагы Маалымат жана массалык коммуникациялар агенттигинин «O‘zbekiston» басма-полиграфиялык чыгармачылык үйүнүн басмаканасында басылды.
Ташкент шаары, Навоий кўчаси, 30.

Телефон: (371) 244-87-55, 544-87-20
Факс: (371) 244-87-55, 544-87-20.
e-mail: uzbekistan@iptd-uzbekistan.uz
www.iptd-uzbekistan.uz

Ижарага берилген окуу китебинин абалын көрсөтүүчү жадыбал

№	Окуучунун аты жана фамилиясы	Окуу жылы	Окуу китебинин алынгандагы абалы	Класс жетекчисинин колу	Окуу китебинин тапшы-рылгандагы абалы	Класс жетекчисинин колу
1						
2						
3						
4						
5						

Окуу китеби ижарага берилип, окуу жылынын соңунда кайтарып алынганда жогорудагы жадыбал класс жетекчиси тарабынан төмөнкүчө баалоо критерийлери боюнча толтурулат:

Жаңы	Окуу китебинин биринчи жолу пайдаланууга берилгендеги абалы.
Жакшы	Мукабасы бүтүн, окуу китеби негизги бөлүгүнөн ажыраган. Бардык барактары бар, жыртылбаган, беттеринде жазуу жана сызыктар жок.
Канааттан-дырарлуу	Мукабасы эскирген, четтери жыртылган, окуу китеби негизги бөлүгүнөн бир аз ажыраган, пайдалануучу тарабынан канааттандырарлуу даражада калыбына келтирилген. Кээ бир беттерине чийилген.
Канааттан-дырарлык эмес	Мукабага чийилген, жыртылган, негизги бөлүгүнөн ажыраган же таптакыр жок, канааттандырарлуу даражада калыбына келтирилбеген. Беттери жыртылган, барактары жетишсиз, чийип-боёп ташталган. Окуу китебин калыбына келтирүүгө болбойт.

УЎК: 514(075)
КВК 22.151я721
R 24

Рахимкариев А.А.
Геометрия 8: Жалпы орто билим берүүчү мектептердин 9-классы үчүн окуу китеби. / А.А. Рахимкариев, М.А. Тохтаходжаева. - Т.: "O'zbekiston" БПЧУ, 2019. -160 с.

ISBN 978-9943-25-815-0

УЎК: 514(075)
КВК 22.151я721

ABDUVAHOB ABDURAHMONOVICH RAHIMQORIYEV,
TOXTAXODJAYEVA MUYASSAR ABDUVAHOBOVNA

ГЕОМЕТРИЯ

Umumiy o'rta ta'lim maktablarining 8- sinfi uchun darslik

(Qirg'iz tilida)

Тошкент — «MITTI YULDUZ» — 2019

Которгон	А.Зулпихорова
Редактору	Б.Кадырова
Сүрөтчүсү	Л.Дабижа
Техникалык редактору	Е.Толочко
Компьютерде беттеген	Х.Хожаева

Басманын лицензиясы AI № 185. 10. 05. 2011.
Басууга руксат берилди 09. 08. 2019. Форматы 70x100 $^{1}/_{16}$ Кегли 11. Тауms гарнитурасы.
Офсеттик басма усулунда басылды. Шарттуу б.т. 13,0. Басма табагы 10,0.
Нускасы 96. Заказ № 19-135.

Окуу китебинин кайра иштелип, басмага даярдалган оригинал-макети «MITTI YULDUZ» ЖЧК га таандык. Ташкент шаары, Навоий көчөсү, 30.

Өзбекстан Республикасы Президенти администрациясынын алдындагы Маалымат жана массалык коммуникациялар агенттигинин «O'zbekiston» басма-полиграфиялык чыгармачылык үйүнүн басмаканасында басылды.
Ташкент шаары, Навоий кўчаси, 30.

Telefon: (371) 244-87-55, 544-87-20
Faks: (371) 244-87-55, 544-87-20.
e-mail: uzbekistan@iptd-uzbekistan.uz www.iptd-uzbekistan.uz