

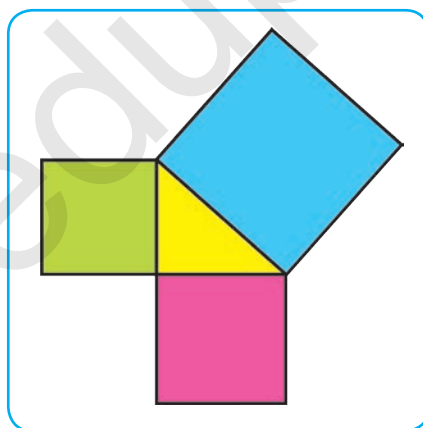
**A.A. RAHIMKARIYEV, M.A. TOHTAHODJA'YEW**

# GEOMETRIYA 8

**Umumy orta bilim berýän mekdepleriň 8-nji synpy  
üçin derslik**

Gaýtadan işlenen we doldurylan 4-nji neşir

*Özbeqistan Respublikasynyň Halk bilimi  
ministrlygi tarapyndan neşire hödürlenen*



**DAŞKENT  
«O'ZBEKISTON»  
2019**

UO'K: 514(075)  
KBK 22.151ya721

R 30

*Syn ýazanlar:*

*N.A. Umarowa — Daşkent welaýatynyň HTIGT we HKI uly mugallymy;  
G.A. Fozilowa — Ýunusabat tümenindäki 274-nji mekdebiň  
matematika mugallymy.*

Derslik Respublikan tälim merkezi tarapyndan 2018-nji ýylyň 25-nji noýabrynda berlen «Anyk ylymlar blok moduly boýunça umumy orta tälimiň okuw maksatnamasy (VIII synp)» esasynda ýazylan. Derslikde belgilenen umumy orta tälimde matematika predmetini okatmagyň maksady we wezipeleri, okuwçylara okuw işi netijesinde goýulýan talaplar öz beýanyny tapan. Derslik okuwçylarda şekillendirilýän daýanç kompetensiyalaryň elementlerini öz içine alýar.

Gaýtadan işlenende ekspertleriň we synçylaryň teklipleri hasaba alyndy.

Her bir babyň ahyrynda ýazma barlag işlerinden nusgalar we testler getirilen bolup, olar okuwçylaryň barlag işine pugta taýýarlanmaklaryna kömek edýär.







Taryhy maglumatlar bölümünde ýurdumyzyň we dünýä alymlarynyň ylma goşan uly goşantlary we taryhy-ylmy işleri bilen tanyşarsyňyz.

«İňlis dilini öwrenýäris» bölümünde temalarda duşýan möhüm geometrik düşünjeleriň iňlis dilindäki terjimesi berlen.

Gaýtalamaga berlen meselelerden ýylyň dowamynda peýdalanyň bilersiňiz.

*Temalarda açyp görkezilen bilimlari öwrenmegiňizde Size üstünlik arsuw edýäris!*

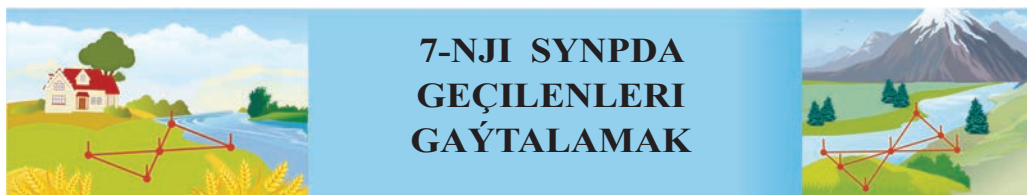
**DERSLIKDÄKI ŞERTLI BELGILER:**

-  – kadal, häsiýetler, kesgitlemeler;
-  – ugrukdyryjy soraglar we ýumuşlar;
-  – synpda işlenýän gönükmeler;
-  – ösdüriji gönükmeler;
-  – mesele çözmegiň nusgasy;
-  – öý işi üçin gönükmeler.

**Respublikanyň ýörite kitap gaznasynyň serişdeleriniň hasabyndan çap edildi.**

ISBN 978-9943-25-817-4

© A.A.Rahimkariýew, I.A.Tohtahodjaýewa.  
Ähli hukuklar goralan, 2014, 2019.  
© «O'zbekiston» NÇDÖ, 2019.



## 1. Üçburçlugyň perimetrine, bissektrisasyna we beýikligine degişli meseleler



### Soraglar, meseleler we ýumuşlar

1. Üçburçlugyň perimetri, medianasy, beýikligi we bissektrisasi diýip nämä aýdylýar?
2. Perimetri 18 cm-e deň bolan üçburçlugyň bissektrisasi ony perimetri 12 cm we 15 cm-e deň bolan üçburçluklara bölýär. Üçburçlugyň bissektrisasyny tapyň (1-nji surat).
3. Üçburçlugyň esasyna geçirilen medianasy ony perimetri 18 cm we 24 cm-e deň iki üçburçluga bölýär. Berlen üçburçlugyň kiçi gapdal tarapy 6 cm-e deň. Onuň uly gapdal tarapyny tapyň (2-nji surat).

4.  $ABC$  üçburçlukda  $AB=BC$  we  $BD$  mediana 6 cm-e deň.  $ABD$  üçburçlugyň perimetri 24 cm-e deň. Berlen üçburçlugyň perimetrini tapyň (3-nji surat).

Berlen:  $\triangle ABC$ -da:  $AB=BC$ ,  $BD=6$  cm – mediana,  $P_{ABD}=24$  cm.

Tapmaly:  $P_{ABC} = ?$

Çözülişi. 1)  $P_{ABD} = AB + BD + AD$ , mundan:

$$24 = AB + AD + 6, \quad AB + AD = 24 - 6, \quad AB + AD = 18 \text{ (cm)}.$$

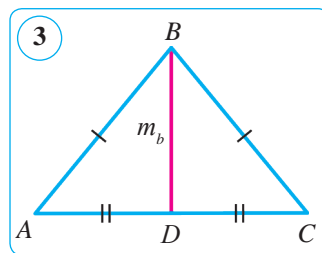
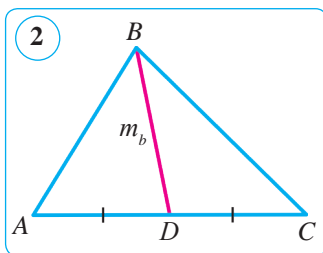
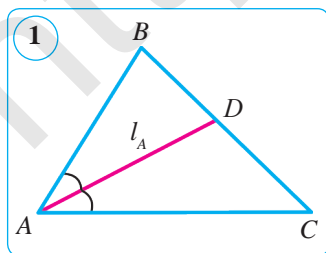
2)  $AB = BC$  we  $AC = 2AD$ , onda

$$P_{ABC} = AB + BC + AC = 2(AB + AD) = 2 \cdot 18 = 36 \text{ (cm)}.$$

Jogaby:  $P_{ABC} = 36$  cm.

5. Üçburçlugyň iki tarapy 0,5 dm we 8,7 dm-e deň. Üçünji tarapynyň uzynlygy natural sandygyny bilmek bilen şu tarapyny tapyň.

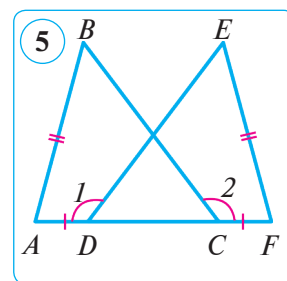
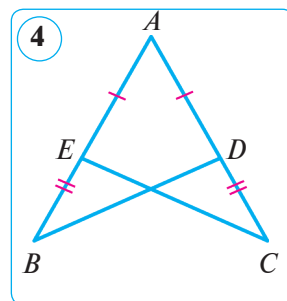
6. Perimetri 30 cm-e deň bolan üçburçlugyň bissektrisasi ony perimetrleri 16 cm we 24 cm-e deň bolan üçburçluklara bölýär. Üçburçlugyň bissektrisasyny tapyň.



- Perimetri 36 cm-e deň bolan üçburçlugyň beýikligi ony perimetrleri 18 cm we 24 cm-e deň bolan üçburçluklara bölýär. Üçburçlugyň beýikligini tapyň.
- Deňýanly üçburçlugyň perimetri 22,5 cm, gapdal tarapy bolsa 0,6 dm. Şu üçburçlugyň esasyny tapyň.

## 2. Üçburçluklaryň deňliginiň nyşanlary, üçburçlugyň burçlarynyň jeminiň we daşky burçunyň häsiýetine degişli meseleler

- $ABC$  we  $DEF$  üçburçluklarda:  $AB=DE$ ,  $AC=DF$ ,  $\angle A = \angle D$ . Bu üçburçluklar deňmi?
- Üçburçlugyň  $117^\circ$ -le daşky burçuna goňşy bolmadyk içki burçlarynyň gatnaşygy  $5 : 4$  ýaly. Üçburçlugyň içki burçlaryny tapyň.
- Deň taraply  $ABC$  üçburçlugyň  $AD$  we  $BE$  bissektrisalary  $O$  nokatda kesişýär. Bissektrisalaryň arasyndaky  $AOE$  burçy tapyň.
- Deňýanly üçburçlugyň esasyndaky burçy kütäk bolup bilermi?  
*Çözülişi.* Bize mälim bolşy ýaly, deňýanly üçburçlugyň esasyndaky burçlary deň. Emma iki kütäk burçuň jemi  $180^\circ$ -dan uly bolýar. Bu üçburçlugyň içki burçlarynyň jemi baradaky teorema ters. *Jogaby:* ýok, bolup bilmeýär.
- Üçburçlugyň  $108^\circ$ -ly daşky burçuna goňşy bolmadyk içki burçlarynyň gatnaşygy  $2 : 7$  ýaly. Üçburçlugyň içki burçlaryny tapyň.
- Bir üçburçlugyň iki tarapy we burçy degişlilikde ikinji üçburçlugyň iki tarapyna we burçuna deň. Mundan şu üçburçluklaryň deňligi gelip çykarmy?
- $ABC$  we  $A_1B_1C_1$  üçburçluklarda  $AB$  we  $A_1B_1$ ,  $BC$  we  $B_1C_1$  taraplar deň hem-de degişlilikde  $AB$  we  $A_1B_1$  taraplara geçirilen  $CD$  we  $C_1D_1$  medianalar hem deň. Üçburçluklaryň deňdigini subut ediň.
- 4-nji suratda  $AB=AC$  we  $AE=AD$ .  $BD=CE$  bolýandygyny subut ediň.
- 5-nji suratda  $AD=CF$ ,  $AB=FE$  we  $CB=DE$ .  
 $\angle 1 = \angle 2$  bolýandygyny subut ediň.
- $ABC$  üçburçlugyň  $B$  burçy  $42^\circ$ -a,  $A$  depesindäki daşky burçy bolsa  $100^\circ$ -a deň.  $ACB$  burçy tapyň.
- Gönüburçly  $ABC$  üçburçlugyň  $C$  burçy göni,  $A$  depesindäki daşky burçy bolsa  $136^\circ$ -a deň.  $B$  burçy tapyň.





# I BAP DÖRTBURÇLUKLAR

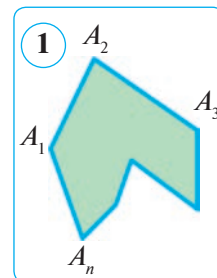
## 1-§. ESASY DÖRTBURÇLUKLAR WE OLARYŇ HÄSIYETLARI

### 1. KÖPBURÇLUGYŇ IÇKI WE DAŞKY BURÇLARYNYŇ HÄSIYETI

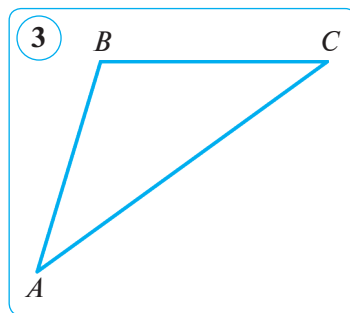
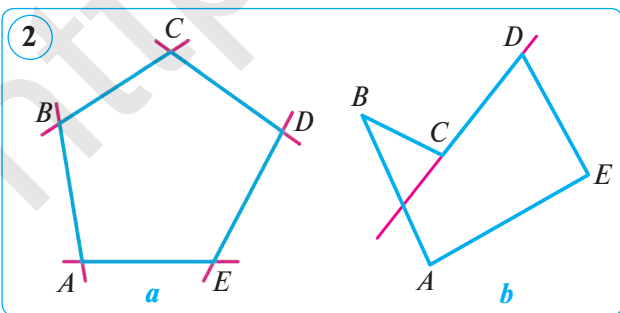
**1. Köpburçluklar.**  $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$  kesimlerden düzülen şekile garap geçyaris. Kesimler şeyle yerlesen bolup, hiç bir iki goňşy kesim (olar umumy uja eýe) bir göni çyzykda ýatmaýar, goňşy bolmadyk kesimler bolsa umumy nokada eýe däl (1-nji surat). Şeyle şekile **köpburçluk** diýilýär.  $A_1, A_2, \dots, A_n$  nokatlar (depeler) **köpburçlugyň depeleri**,  $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$  kesimler bolsa **köpburçlugyň taraplary** diýlip atlandyrylýar.

Köpburçlugyň taraplarynyň sany onuň depeleriniň sany-na, ýagny burçlarynyň sanyna deň. Köpburçluklar depeleriniň (taraplarynyň) sanyna görä **üçburçluklara, dörtburçluklara, bäsburçluklara** we başgalara bölünýär.

Eger ýapyk döwür çyzyk öz-özi bilen kesişmese, şeyle döwür çyzyga **ýönekeý ýapyk döwür çyzyk** diýilýär. Ol tekizligiň şu döwür çyzyga degişli bolmadyk nokatlaryny **iki zolaga** – içki we daşky zolaga bölýär hem-de umumy araçäk wezipesini yerine ýetirýär. 1-nji suratda içki zolak boýap görkezilen.



**1-nji kesgitleme.** Eger köpburçluk onuň islendik tarapyny öz içine alan göni çyzyk bilen bir ýarym tekizlikde ýatsa, oňa **güberçek köpburçluk** diýilýär. Munda göni çyzygyň özi-de şu ýarym tekizlige degişli hasaplanýar.



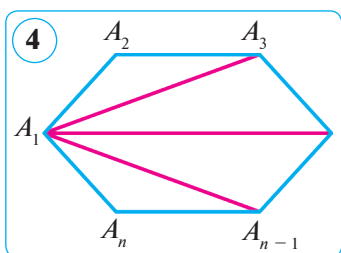
2-njia we 3-nji suratda güberçek köpburçluk, 2-nji  $b$  suratda bolsa güberçek däl köpburçluk şekillendirilen. Islendik üçburçluk – güberçek köpburçlukdyr (3-nji surat).

## 2. Köpburçlugyň içki we daşky burçlarynyň häsiýeti.

**2-nji kesgitleme.** Köpburçlugyň berlen depesindäki içki burçy diýip, onuň şu depesinde duşuşýan taraplary emele getiren burça aýdylyar.

### 1-nji teorema.

**Güberçek  $n$  burç içki burçlarynyň jemi  $180^\circ(n-2)$ -a deň, bu ýerde  $n$  – taraplaryň sany.**

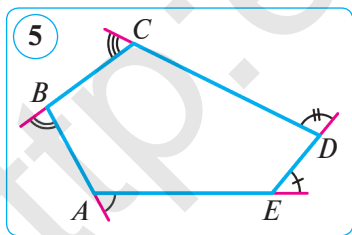


*Subudy.*  $A_1A_2A_3\dots A_n$  – berlen güberçek  $n$  burç we  $n > 3$  bolsun (4-nji surat). Käbir depesinden, meselem  $A_1$ -den, köpburçlugyň ähli diagonallaryny geçirýäris. Bu diagonallar ony  $(n-2)$  üçburçluga bölýär. Hakykatdan hem, iki çetki üçburçluklar ( $\triangle A_1A_2A_3$  we  $\triangle A_1A_{n-1}A_n$ ) köpburçlugyň iki tarapy we bir diagonaly, galan üçburçluklar bolsa köpburçlugyň bir tarapyndan we iki diagonalýndan düzülen. Şonuň üçin üçburçluklar  $(n-2)$  sany, ýagny köpburçlugyň taraplarynyň sanyndan ikä kem bolýar. Köpburçlugyň burçlary jemi ony düzýän üçburçlugyň burçlarynyň jemine, ýagny  $S_n = 180^\circ(n-2)$ -ä deň bolýar. Teorema subut edildi.

**3-nji kesgitleme.** Köpburçlugyň berlen depesindäki daşky burçy diýip, onuň şu depesindäki içki burçuna goňşy burça aýdylyar.

### 2-nji teorema.

**Güberçek  $n$  burçuň her bir depesinden bir sanydan alnan daşky burçlarynyň jemi  $360^\circ$ -a deň.**



*Subudy.* Köpburçlugyň her bir depesinde bir sanydan daşky burç gurýarys. Köpburçlugyň içki burçy we oňa goňşy bolan daşky burçunyň jemi  $180^\circ$ -a deň (5-nji surat). Şu sebäpli ähli içki we her bir depesinden bir sanydan alnan daşky burçlarynyň jemi  $180^\circ n$ -e deň. Emma köpburçlugyň hemme içki burçlarynyň jemi  $180^\circ(n-2)$ -a deň. Onda her bir depesinden bir sanydan alnan daşky burçlaryň jemi

$$180^\circ n - 180^\circ(n-2) = 180^\circ n - 180^\circ n + 360^\circ = 360^\circ$$

-a deň bolýar. Teorema subut edildi.

**1-nji mesele.** Taraplary deň bolan (dogry)  $n$  burçuň her bir içki burçy ( $\alpha_n$ ) nämä deň?

*Çözülüşi.* Bize məlim bolsy ýaly, islendik güberçek  $n$  burçuň burçlarynyň jemi  $180^\circ(n-2)$ -a deň. Dogry köpburçlugyň burçlary deň bolany üçin olaryň

her biri aşakdaka deň:  $\alpha_n = \frac{180^\circ(n-2)}{n}$ .

**2-nji mesele.** Taraplary deň bolan (dogry)  $n$  burçuň her bir daşky burçy ( $\beta_n$ ) nämä deň?

*Çözülüşi.* Bize məlim bolsy ýaly, islendik güberçek  $n$  burçuň her bir depesinden bir sanydan alnan daşky burçlarynyň jemi  $360^\circ$ -a deň.

Şeýdip, taraplary deň bolan  $n$  burçuň her bir daşky burçy aşakdaka deň:

$$\beta_n = \frac{360^\circ}{n}.$$



### Soraglar, meseleler we ýumuşlar

1. 1) Köpburçlugyň berlen depesindäki içki burçy diýip nähili burça aýdylýar? Daşky burçy diýip nähili?



2) Güberçek  $n$  burçuň içki burçlarynyň jemi nämä deň?

2. Köpburçlugyň burçlarynyň jemi: 1)  $1080^\circ$ -a; 2)  $1620^\circ$ -a; 3)  $3960^\circ$ -a deň. Köpburçlugyň näçe tarapy bar?

3. 1) Dörtburçlugyň; 2) onikiburçlugyň; 3) otuzburçlugyň; 4) elliburçlugyň içki burçlarynyň jemini tapyň. *Nusga.* 1)  $S_{13} = 180^\circ \cdot (13-2) = 180^\circ \cdot 11 = 1980^\circ$ .

4. Eger dörtburçlugyň üç sanydan alnan burçlarynyň jemi degişlilikde  $240^\circ$ ,  $260^\circ$  we  $280^\circ$  bolsa, onuň iň kiçi burçuny tapyň.

5. Her bir içki burçy: 1)  $150^\circ$ -a; 2)  $170^\circ$ -a; 3)  $171^\circ$ -a deň bolan güberçek köpburçlugyň näçe tarapy bar?

6. Köpburçlugyň içki burçlarynyň jemi her bir depesinden bir sanydan alnan daşky burçlarynyň jeminden üç esse uly. Şu köpburçlugyň taraplarynyň sany näçe? Boş ýerlere degişli sanlary goýuň.

*Çözülüşi.* Meseläniň şertine görä,  $180^\circ(n-2) = \dots \cdot 360^\circ$ . mundan

$$180^\circ(n-2) = \dots \cdot 2 \cdot 180^\circ, n-2=6, n=\dots$$

*Jogaby:*  $n=\dots$

7. Daşky burçunyň her biri: 1)  $18^\circ$ -a; 2)  $24^\circ$ -a; 3)  $60^\circ$ -a deň bolan güberçek köpburçlugyň näçe tarapy bar?

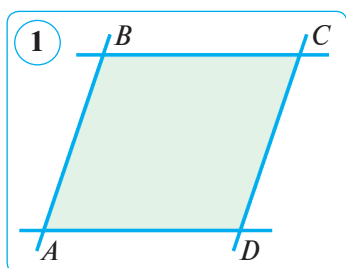
8. Eger dörtburçlugyň üç burçy kütäk bolsa, onda dördünji burçy ýiti bolýar. Şony subut ediň.

9. Daşky burçunyň her biri: 1)  $15^\circ$ -a; 2)  $45^\circ$ -a; 3)  $72^\circ$ -a deň bolan güberçek köpburçlugyň näçe tarapy bar?

10. Güberçek dörtburçlugyň burçlary 1, 2, 3 we 4 sanlaryna proporsional. Şu burçlary tapyň.

## 2. PARALLELOGRAM WE ONUŇ HÄSIYETLERI

**1. Parallelogram.** Tekizlikde iki parallel göni çyzygyň başga iki parallel göni çyzyk bilen kesişmeginden emele gelen dörtburçluga garap geçýäris (1-nji surat). Bu dörtburçluk *yörite* ada eýe bolup, oňa **parallelogram** diýýäris.



**Kesgitleme.** Garşylykly taraplary özara parallel bolan dörtburçluk **parallelogram** diýlip atlandyrylýar.

Eger  $ABCD$  parallelogram bolsa,  $AB \parallel DC$  we  $AD \parallel BC$  bolýar (1-nji surat).

**1-nji mesele.** 2-nji suratda  $\triangle ABC = \triangle CDA$ .  $ABCD$  dörtburçlugyň parallelogramdygyny subut ediň.

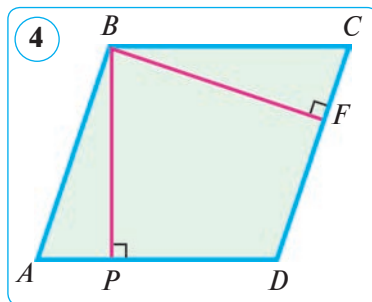
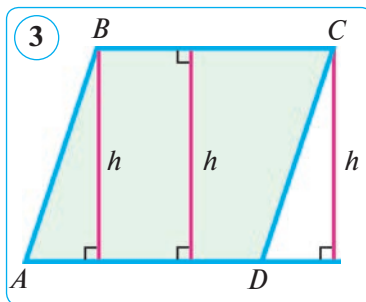
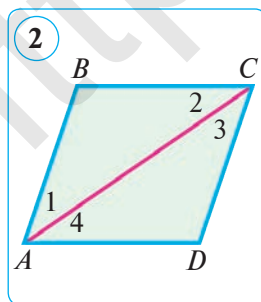
**Çözülişi.**  $ABC$  we  $CDA$  üçburçluklaryň deňliginden aşakdaky gelip çykýar:  $\angle 1 = \angle 3$  we  $\angle 2 = \angle 4$ . 1 we 3 burçlar –  $AB$  we  $CD$  parallel göni çyzyklar we  $AC$  kesiji emele getiren içki atanak burçlar bolany üçin deň. Edil şonuň ýaly, 2 we 4 burçlar  $BC$  we  $AD$  parallel göni çyzyklar hem-de  $AC$  kesiji emele getiren içki atanak burçlar bolany üçin deň. Parallel göni çyzyklaryň nyşanyna görä aşakdaka eýe bolarys:  $AB \parallel DC$  we  $BC \parallel AD$ . Diýmek,  $ABCD$  dörtburçlukda garşylykly taraplar jübüt-jübütden parallel, ýagny kesgitlemä görä,  $ABCD$  – parallelogram.

Parallelogramyň bir tarapynda ýatýan nokatdan garşylykly tarapy öz içine alan göni çyzyga geçirilen perpendikulýara parallelogramyň **beýikligi** diýilýär. Parallelogramyň bir tarapyna çäksiz köp beýiklikler geçirmek mümkinligi aýdyň (3-nji surat), olar parallel göni çyzyklaryň arasyndaky aralyklar bolany üçin özara deň. Parallelogramyň bir depesinden onuň dürli tarapyna bir-birinden tapawutlanýan iki beýiklik geçirmek mümkin. Meselem, 4-nji suratda  $BP$  we  $BF$  – beýikliklerdir.

### 2. Parallelogramyň häsiýetleri.

#### 1-nji teorema.

(1-nji häsiýet.) Parallelogramyň bir tarapyna ýapyşan burçlarynyň jemi  $180^\circ$ -a deň.





*Subudy.* Parallelogramyň bir tarapyna ýapyşan burçlar içki bir taraply burçlar bolýar. Şonuň üçin olaryň jemi  $180^\circ$ -a deň. Teorema subut edildi.

**2-nji teorema.**

**(2-nji häsiýet.) Parallelogramyň garşylykly taraplary we garşylykly burçlary özara deň.**

*Subudy.*  $ABCD$  – berlen parallelogram bolsun, ýagny  $AB \parallel CD$  we  $BC \parallel AD$ . Parallelogramyň  $AC$  diagonalyny geçiryäris (2-nji surata g.) hem-de  $ABC$  we  $CDA$  üçburçluklara seredyäris. Olarda  $AC$  tarap – umumy, 1 we 3 burçlar –  $AB$  we  $CD$  parallel göni çyzyklar hem-de  $AC$  kesiji emele getiren içki atanak burçlar bolany üçin deň, 2 we 4 burçlar bolsa  $AD$  we  $BC$  parallel göni çyzyklar hem-de  $AC$  kesiji emele getiren içki atanak burçlar bolany üçin deň. Diýmek, üçburçluklaryň deňliginiň ikinji nyşanyna görä,  $ABC$  we  $CDA$  üçburçluklar deň. Hususan-da mundan,  $AB=CD$ ,  $AD=BC$  we  $\angle B=\angle D$  hem-de  $\angle 1+\angle 4=\angle 2+\angle 3$ , ýagny  $\angle A=\angle C$  bolýandygy gelip çykýar.

**2-nji mesele.** Parallelogramyň burçlaryndan ikisiniň jemi  $172^\circ$ -a deň. Onuň burçlaryny tapyň.

*Çözülişi.*  $ABCD$  parallelogram berlen bolsun. Parallelogramyň goňşy burçlarynyň jemi  $180^\circ$ -a deň bolany üçin berlen burçlar goňşy burçlar bolup bilmeýär, diýmek, olar garşylykly burçlardyr.  $\angle A+\angle C=172^\circ$  bolsun. Parallelogramyň garşylykly burçlary deň bolany üçin munda burçlaryň her biri  $\angle A=\angle C=172^\circ:2=86^\circ$  bolýar. Parallelogramyň hemme burçlarynyň jemi  $360^\circ$ -a deň, şonuň üçin galan iki burçy  $\angle B=\angle D=(360^\circ-172^\circ):2=94^\circ$ -dan bolýar.

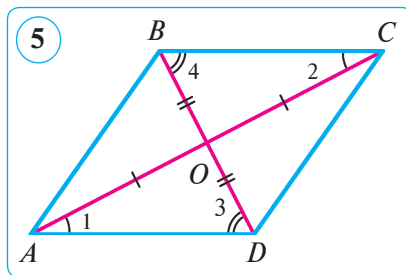
*Jogaby:*  $86^\circ, 94^\circ, 86^\circ, 94^\circ$ .

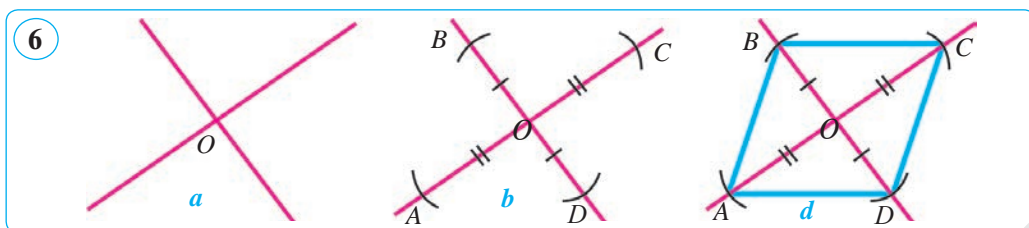
**3-nji teorema.**

**(3-nji häsiýet.) Parallelogramyň diagonalary kesişýär we kesişme nokadynda deň ikä bölünýär.**

*Subudy.*  $ABCD$  berlen parallelogram we  $O$  –  $AC$  we  $BD$  diagonalaryň kesişme nokady bolsun (5-nji surat).  $AO=OC$  we  $DO=OB$  bolýandygyny subut edýäris.

$AOD$  we  $COB$  üçburçluklara garap geçyäris. Bu üçburçluklarda  $AD=BC$  (parallelogramyň 2-nji häsiýetine görä onuň garşylykly taraplary deň),  $\angle 1=\angle 2$  we  $\angle 3=\angle 4$  ( $AD$  we  $BC$  parallel göni çyzyklaryň, deňlilikde,  $AC$  we  $BD$  kesijiler bilen kesişmeginden emele gelen içki atanak burçlar bolany üçin). Diýmek, üçburçluklaryň deňliginiň ikinji nyşanyna görä,  $\triangle AOD=\triangle COB$ . Mundan  $AO=CO$  we  $DO=OB$ , ýagny  $AC$  we  $BD$





diagonallaryň her biriniň  $O$  kesişme nokadynda deň ikä bölünýändigini gelip çykýar. Teorema subut edildi.

**3-nji mesele.** 3-nji häsiýetden peýdalanyp parallelogram çyzyň.

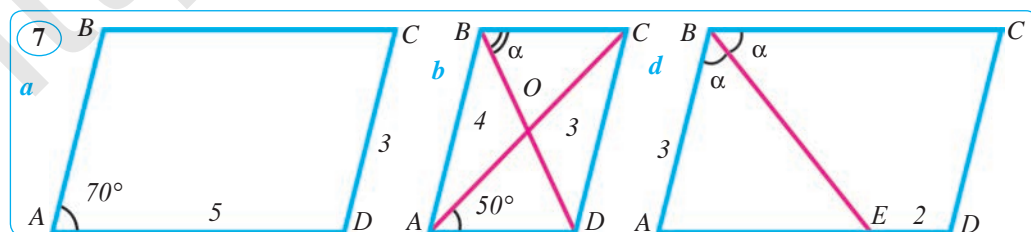
*1-nji ädim.* Kesişýän iki göni çyzyk geçirýäris we olaryň kesişme nokadyny  $O$  harpy bilen belgileýäris (6-njy *a* surat).

*2-nji ädim.* Sirkulyň kömeginde göni çyzyklaryň birinde özara deň  $OA$  we  $OC$ , ikinjisinde bolsa özara deň  $OB$  we  $OD$  kesimleri goýýarys (6-njy *b* surat).

*3-nji ädim.*  $A$ ,  $B$ ,  $C$  we  $D$  nokatlary zygider utgaşdyryp, gözlenýän  $ABCD$  parallelogramy alarys (6-njy *d* surat).

### Soraglar, meseleler we ýumuşlar

- 1) Nähili dörtburçluga parallelogram diýilýär? Parallelogramyň bir tarapyna ýapyşan burçlaryň jemi nämä deň?
- 2) Parallelogramyň diagonallary barada näme diýmek mümkin?
3. Parallelogramyň perimetri 152 cm, taraplaryndan biri ikinjiden 25 cm artyk. Parallelogramyň taraplaryny tapyň.
4.  $ABCD$  parallelogramda:  $AB=7$  cm,  $BC=11$  cm,  $AC=14$  cm,  $BD=12$  cm;  $O$  – diagonallaryň kesişme nokadydygy mälim.  $ABO$  we  $BOC$  üçburçluklaryň perimetrlerini tapyň.
5. Parallelogramyň goňşy taraplarynyň jemi 20 cm-e, tapawudy bolsa 12 cm-e deň. Şu parallelogramyň taraplaryny tapyň.
6. Parallelogramyň iki tarapynyň gatnaşygy 5:3 -e, perimetri bolsa 6,4 dm-e deň. Parallelogramyň taraplaryny tapyň.
7. 7-nji suratda parallelogramyň käbir elementleriniň ululygy görkezilen. Ýene haýsy ululyklary tapmak mümkin?



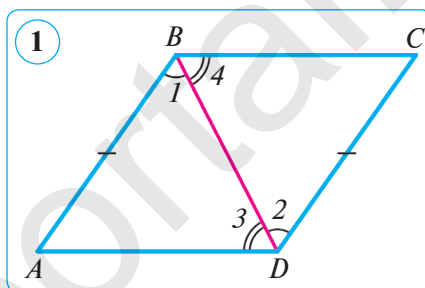
### 3. PARALLELOGRAMYŇ NYŞANLARY

Öňki temadan mälim bolşy ýaly, parallelogramyň häsiýetlerini ulanmak üçin köp ýagdaýlarda berlen dörtburçlugyň hakykatdan hem parallelogramdygyna göz ýetirmeli. Muny kesgitlemä görä (2-nji temadaky 1-nji meselä g.) ýa-da berlen dörtburçlugyň parallelogramdygyny tassyklaýan şertler – nyşanlar arkaly subut etmeli bolýar. Köplenç amalyýetde ulanylýan parallelogramyň nyşanlaryny subut edýäris. Indi parallelogramyň nyşanlary bilen tanyşýarys.

#### 1-nji teorema.

**(1-nji nyşany.)** Eger dörtburçlugyň iki tarapy deň we parallel bolsa, bu dörtburçluk parallelogramdyr.

*Subudy.*  $ABCD$  dörtburçlukda  $AB \parallel CD$  we  $AB = CD$  bolsun (1-nji surat). Onuň  $BD$  diagonalyny geçirýäris. Netijede iki deň  $ABD$  we  $CDB$  üçburçluklara eýe bolarys (iki tarapyna we olaryň arasyndaky burçuna görä), çünki olarda  $AB = CD$  (şerte görä),  $BD$  tarap – umumy,  $\angle 1 = \angle 2$  ( $AB$  we  $CD$  parallel göni çyzyklar hem-de  $BD$  kesiji keşişmeginden emele gelen içki atanak burçlar bolany üçin). Üçburçluklaryň deňliginden,  $\angle 3 = \angle 4$  bolýandygy gelip çykýar. Bu burçlar  $AD$  we  $BC$  göni çyzyklar hem-de  $BD$  kesiji keşişmeginden emele gelen içki atanak burçlar, diýmek,  $AD \parallel BC$ . Şeýle qilib,  $ABCD$  dörtburçlugyň garsylykly taraplary jübüt-jübütde parallel. Şonuň üçin, parallelogramyň kesgitlemesine görä,  $ABCD$  dörtburçluk – parallelogram.

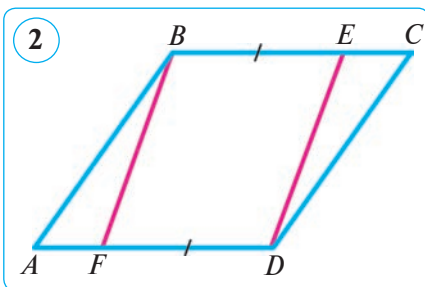


Teorema subut edildi.

**1-nji mesele.**  $ABCD$  parallelogramyň  $BC$  we  $AD$  taraplaryna deň kesimler goýlan:  $BE = DF$  (2-nji surat).  $BEDF$  dörtburçluk parallelogram bolarmy?

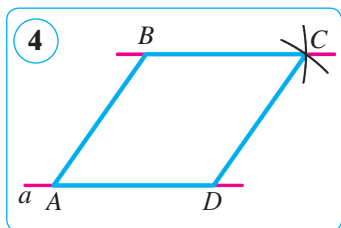
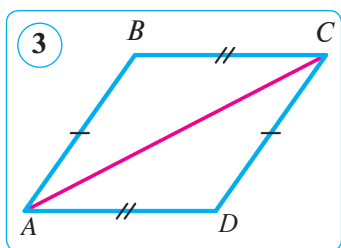
*Çözülişi.*  $BEDF$  dörtburçlugyň  $BE$  we  $DF$  garsylykly taraplary deň hem-de parallel. Şonuň üçin, parallelogramyň 1-nji nyşanyna görä,  $BEDF$  dörtburçluk – parallelogram.

*Jogaby:* hawa, bolýar.



#### 2-nji teorema.

**(2-nji nyşany.)** Eger dörtburçlugyň garsylykly taraplary jübüt-jübütde deň bolsa, bu dörtburçluk parallelogramdyr.



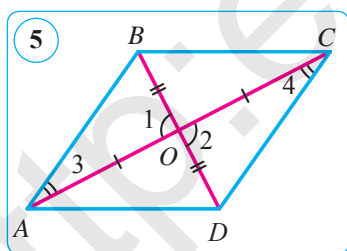
*Subudy.*  $ABCD$  dörtdörtburçlukda  $AB=CD$  we  $BC=DA$  bolsun. Onuñ  $AC$  diagonalyny geçiryäris (3-nji surat). Netijede  $ABC$  we  $CDA$  üçburçluklar emele gelyär. Üçburçluklaryñ deñliginiñ 3-nji nyşanyyna görä, bu üçburçluklar deñ ( $AC$  tarap – umumy, teoremanyñ şertine görä bolsa  $AB=CD$  we  $BC=DA$ ). Üçburçluklaryñ deñliginden  $CAB$  we  $ACD$  burçlaryñ deñligi gelip çykýar. Bu burçlar bolsa  $AB$  we  $DC$  göni çyzyklar hem-de  $AC$  kesiji emele getiren içki atanak burçlardyr. Göni çyzyklaryñ parallellik nyşanyyna görä,  $AB\parallel CD$ . Şeýdip,  $ABCD$  dörtdörtburçlukda  $AB$  we  $CD$  taraplar deñ hem-de parallel, diýmek, parallelogramyñ 1-nji nyşanyyna görä,  $ABCD$  dörtdörtburçluk – parallelogram. Teorema subut edildi.

**2-nji mesele.** Berlen nokatdan geçyän we berlen göni çyzyga parallel göni çyzygy çyzyñ.

*Çözülişi.*  $a$  – göni çyzyk,  $B$  – onda ýatmaýan nokat bolsun.  $a$  göni çyzykda  $A$  we  $D$  nokatlary belgileyäris (4-nji surat).  $B$ ,  $D$  nokatlardan radiuslary degişlikde  $AD$  we  $AB$  bolan töwerekler geçiryäris. Olaryñ kesişme nokadyny  $C$  bilen belgileyäris.  $BC$  göni çyzygy geçiryäris, ol gözlenyän göni çyzyk bolýar. Hakykatdan hem,  $ABCD$  dörtdörtburçlugyñ garşylykly taraplary deñ. Parallelogramyñ 2-nji nyşanyyna görä,  $ABCD$  dörtdörtburçluk – parallelogram. Şonuñ üçin,  $BC\parallel AD$ .

**3-nji teorema.**

**(3-nji nyşany.) Eger dörtdörtburçlugyñ diagonalary kesişme nokadyna deñ ikä bölünse, bu dörtdörtburçluk parallelogramdyr.**



*Subudy.*  $O$  –  $ABCD$  dörtdörtburçlugyñ diagonalary kesişen nokat bolsun. Şerte görä,  $AO=OC$  we  $BO=DO$  (5-nji surat).  $AOB$  we  $COD$  üçburçluklara garap geçyäris. Bu üçburçluklarda:  $\angle 1=\angle 2$  (wertikal burçlar),  $AO=CO$  we  $BO=DO$  (şerte görä). Diýmek, üçburçluklaryñ deñliginiñ birinji nyşanyyna görä,  $AOB$  we  $COD$  üçburçluklar deñ. Bu üçburçluklaryñ deñliginden olaryñ degişli taraplarynyñ we burçlarynyñ deñligi gelip çykýar:  $AB=CD$ ,  $\angle 3=\angle 4$ . Göni çyzyklaryñ parallellik nyşanyyna görä,  $AB\parallel CD$ , çünki 3 we 4 burçlar  $AB$  we  $CD$  göni çyzyklar hem-de  $AC$  kesiji emele getiren içki atanak burçlardyr.  $ABCD$  dörtdörtburçlukda  $AB=CD$  we  $AB\parallel CD$  bolany üçin parallelogramyñ 1-nji nyşanyyna görä,  $ABCD$  dörtdörtburçluk parallelogram bolýar. Teorema subut edildi.

*Subudy.*  $O$  –  $ABCD$  dörtdörtburçlugyñ diagonalary kesişen nokat bolsun. Şerte görä,  $AO=OC$  we  $BO=DO$  (5-nji surat).  $AOB$  we  $COD$  üçburçluklara garap geçyäris. Bu üçburçluklarda:  $\angle 1=\angle 2$  (wertikal burçlar),  $AO=CO$  we  $BO=DO$  (şerte görä). Diýmek, üçburçluklaryñ deñliginiñ birinji nyşanyyna görä,  $AOB$  we  $COD$  üçburçluklar deñ. Bu üçburçluklaryñ deñliginden olaryñ degişli taraplarynyñ we burçlarynyñ deñligi gelip çykýar:  $AB=CD$ ,  $\angle 3=\angle 4$ . Göni çyzyklaryñ parallellik nyşanyyna görä,  $AB\parallel CD$ , çünki 3 we 4 burçlar  $AB$  we  $CD$  göni çyzyklar hem-de  $AC$  kesiji emele getiren içki atanak burçlardyr.  $ABCD$  dörtdörtburçlukda  $AB=CD$  we  $AB\parallel CD$  bolany üçin parallelogramyñ 1-nji nyşanyyna görä,  $ABCD$  dörtdörtburçluk parallelogram bolýar. Teorema subut edildi.



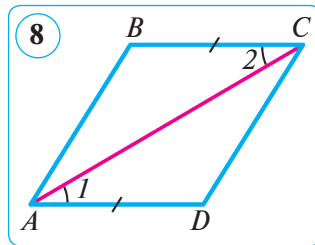
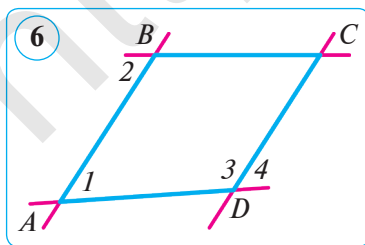
### Soraglar, meseleler we ýumuşlar

- 1) Eger dörtburçlugyň iki tarapy deň we parallel bolsa, bu dörtburçlugyň parallelogramdygyny subut edip bilersiňizmi?
- 2) Parallelogramyň 2–3-nji nyşanlaryny beýan ediň.
2. (Ugrukdyryjy mesele.) 1) Iki deň we parallel kesimler berlen. Olaryň ahyrlary özara kesişmeýän kesimler bilen utgaşdyrylan. Emele gelen dörtburçluk parallelogram bolarmy?
  - 2) Eger dörtburçlugyň iki garşylykly burçy deň bolsa, ol parallelogrammy?
3.  $ABCD$  dörtburçlukda  $AB$  we  $CD$  taraplar parallel,  $AB=CD=11$  cm,  $AD=5$  cm. Şu dörtburçlugyň perimetrini tapyň.
4. Eger: 1)  $\angle 1=70^\circ$ ,  $\angle 3=110^\circ$ ,  $\angle 2 \neq \angle 4$ ; 2)  $\angle 1=\angle 2=60^\circ$ ,  $\angle 3=\angle 4=115^\circ$  bolsa (6-njy surat), onda  $ABCD$  dörtburçluk parallelogram bolarmy?
 

*Çözülüşi.* 1)  $ABCD$  dörtburçlukda iki  $AB$  we  $CD$  tarap parallel, çünki  $\angle 1+\angle 3=70^\circ+110^\circ=180^\circ$ . Bu burçlar –  $AB$  we  $DC$  göni çyzyklar hemde  $AD$  kesiji emele getiren içki bir tarapy burçlar.  $AB \parallel DC$  bolany sebäpli,  $\angle 1=\angle 4$  bolýar (degişli burçlar).  $ABCD$  dörtburçlugyň galan iki  $AD$  we  $BC$  tarapy parallel däl, çünki içki atanak 1 we 2 burçlar deň däl ( $\angle 1=\angle 4 \neq \angle 2$ ). Diýmek,  $ABCD$  dörtburçluk parallelogram bolup bilmeýär.

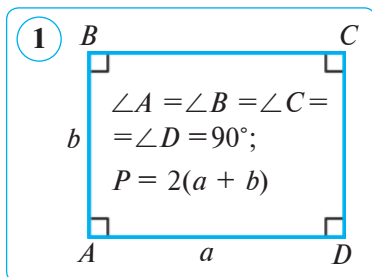
*Jogaby:* ýok,  $ABCD$  dörtburçluk parallelogram bolup bilmeýär.

  - 2) 1-nji bende meňzeş çözülyär.
5.  $ABCD$  parallelogramyň  $AB$  tarapynyň ortasy  $E$  nokatdan,  $CD$  tarapynyň ortasy  $F$  nokatdan ybarat.  $EBFD$  dörtburçlugyň parallelogramdygyny subut ediň (7-nji surat).
6.  $ABCD$  dörtburçlukda:  $AD=BC$ ,  $\angle 1=\angle 2$  (8-nji surat).  $ABCD$  dörtburçlugyň parallelogramdygyny subut ediň.
7.  $ABCD$  dörtburçlukda  $AB$  we  $CD$  taraplar parallel,  $AB=CD=9$  cm,  $AD=4$  cm. Şu dörtburçlugyň perimetrini tapyň.
8.  $ABCD$  dörtburçlukda:  $AB=CD$ ,  $AD=BC$ ,  $A$  burç  $B$  burçdan üç esse uly. Şu dörtburçlugyň burçlaryny tapyň.
9. Parallelogramyň burçlaryndan biriniň bissektrisasi özi kesip geçýän tarapy 4 cm we 5 cm-lik kesimlere bölýär. Parallelogramyň perimetrini tapyň.



## 4. GÖNÜBURÇLUK WE ONUŇ HÄSIYETLERI

**Kesgitleme.** Hemme burçlary göni bolan parallelogram **gönüburçluk** diýlip atlandyrylýar (1-nji surat).

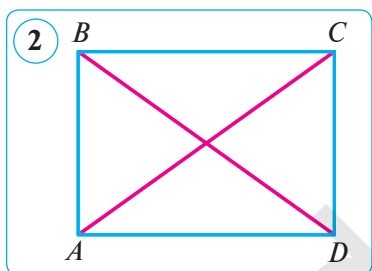


Gönüburçluk parallelogramyň hususy haly bolany üçin ol parallelogramyň ähli häsiýetlerine eýe bolýar: gönüburçlugyň garşylykly taraplary deň, diagonallary kesişme nokadynda deň ikä bölünýär, gönüburçlugyň diagonalyny ony iki deň gönüburçly üçburçluga bölýär.

Gönüburçlugyň özboluşly häsiýetine garap geçýäris.

### Teorema.

**Gönüburçlugyň diagonallary özara deň.**



*Subudy.*  $ABCD$  gönüburçlukda  $AC$  we  $BD$  diagonallar berlen bolsun.  $AC = BD$  bolýandygyny subut edýäris (2-nji surat).

Gönüburçly  $ACD$  we  $DBA$  üçburçluklar iki katetine ( $AD$  – umumy tarap,  $CD = BA$ ) görä deň. Mundan şu üçburçluklaryň gipotenuzalarynyň deňligi, ýagny  $AC = BD$  gelip çykýar.

Ýokardaky teoremadan aşakdaky ters teorema gelip çykýar (**gönüburçlugyň nyşany**).

### Ters teorema.

**Eger parallelogramyň diagonallary deň bolsa, ol gönüburçlukdyr.**

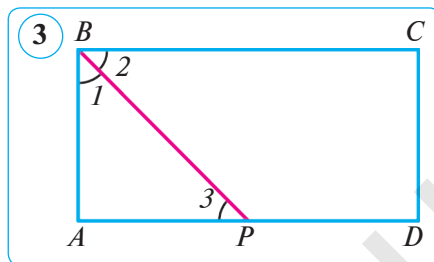
*Subudy.*  $ABCD$  parallelogramda  $AC$  we  $BD$  diagonallar deň bolsun (2-nji surat).  $ABD$  we  $DCA$  üçburçluklar üç tarapyna görä deň ( $AB = DC$ ,  $BD = CA$ ,  $AD$  – umumy tarap). Mundan  $\angle A = \angle D$  gelip çykýar. Parallelogramyň garşylykly burçlary deň, şonuň üçin  $\angle A = \angle C$  we  $\angle B = \angle D$ . Şeýdip,  $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D$ . Parallelogram – güberçek dörtburçluk, şonuň üçin:  $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$ . Mundan  $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$ , ýagny  $ABCD$  parallelogramyň gönüburçlukdygy gelip çykýar. Teorema subut edildi.

**1-nji mesele.**  $ABCD$  gönüburçlugyň perimetri 24 cm-e,  $BD$  diagonalyny bolsa 9 cm-e deň.  $ABD$  üçburçlugyň perimetrini tapyň.

*Çözülüşi.*  $AB+AD=P_{ABCD}:2=24:2=12$  (cm) – goňşy taraplar jemi (2-nji surata g.).  $P_{ABD}=AB+AD+BD=12+9=21$  (cm).

*Jogaby:*  $P_{ABD}=21$  cm.

**2-nji mesele.**  $ABCD$  gönüburçluk  $B$  burçunyň bissektrisasiy  $AD$  tarapy  $P$  nokatda kesýär hem-de ony  $AP=17$  cm we  $PD=21$  cm-lik kesimlere bölýär (3-nji surat). Şu gönüburçlugyň perimetrini tapyň.



*Çözülüşi.* 1)  $ABCD$  – gönüburçluk bolany üçin  $AD\parallel BC$  we şonuň üçin  $\angle 2=\angle 3$  (içki atanak burçlar). Ýöne, şerte görä,  $\angle 2=\angle 1$ , diýmek,  $\angle 1=\angle 3$  hem-de  $\triangle ABP$  – esasy  $BP$  bolan deňýanly üçburçluk. Şeýdip,  $AB=AP=17$  cm.

$$2) AD=AP+PD=17+21=38 \text{ (cm);}$$

$$P_{ABCD}=2(AB+AD)=2\cdot(17+38)=2\cdot 55=110 \text{ (cm).}$$

*Jogaby:*  $P_{ABCD}=110$  cm.



### Soraglar, meseleler we ýumuşlar

1. 1) Nähili parallelogram gönüburçluk diýlip atlandyrylýar?

2) Gönüburçlugyň nähili özboluşly häsiýeti bar?

3) Gönüburçlugyň nyşanyny beýan ediň.

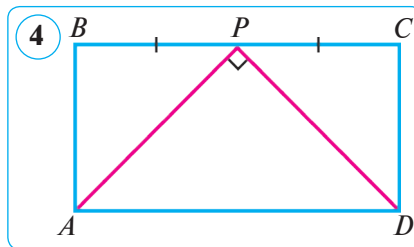
2.  $ABCD$  gönüburçlukda:  $AB=9$  cm,  $BC=7$  cm.

1)  $C$  nokatdan  $AD$  tarapa çenli bolan aralygy tapyň.

2)  $AB$  we  $CD$  göni çyzyklaryň arasyndaky aralygy tapyň.

3. Gönüburçlugyň perimetri 24 cm. Gönüburçlugyň islendik içki nokadyndan onuň taraplaryna çenli bolan aralyklaryň jemini tapyň.

4.  $ABCD$  gönüburçlugyň perimetri 24 cm-e deň.  $P$  nokat  $BC$  tarapyň ortasy,  $\angle APD=90^\circ$  (4-nji surat). Gönüburçlugyň taraplaryny tapyň.



5. Eger dörtburçlukda diagonalлар deň we olar kesişme nokadynda deň ikä bölünse, bu dörtburçluk gönüburçluk bolýandygyny subut ediň.

6. Parallelogramyň taraplary 4 cm we 7 cm. Bu parallelogramyň diagonalлары: 1) 12 cm we 5 cm; 2) 10 cm we 3 cm bolmagy mümkinmi?

7. Gönüburçlugyň perimetri 42 cm, taraplaryndan biri bolsa ikinjiden iki esse uly. Gönüburçlugyň taraplaryny tapyň.

## 5-6. ROMBUŇ WE KWADRATYŇ HÄSIYETLERI

### 1. Romb we onuň häsiyetleri.

**Kesgitleme.** *Taraplary deň bolan parallelograma romb diýilýär* (1-nji surat).

Romb parallelogramyň umumy häsiyetlerine eýe bolmak bilen ýene aşakdaky häsiyete eýe.

#### **Teorema.**

**Rombuň diagonallary özara perpendikulýar hem-de rombuň burçlaryny deň ikä bölýär.**

*Subudy.*  $ABCD$  – berlen romb (2-nji surat),  $O$  – onuň diagonallary kesişen nokat bolsun.  $AC \perp BD$  we her bir diagonal rombuň deňişli burçlaryny deň ikä bölýändigini (meselem,  $\angle BAC = \angle DAC$ ) subut edýäris.

Rombuň kesgitlemesine görä,  $AB = AD$ , şonuň üçin  $BAD$  –  $BD$  esasy deňýanly üçburçluk. Romb parallelogram bolany üçin onuň diagonallary kesişme nokadynda deň ikä bölünýär, ýagny  $BO = OD$ . Diýmek,  $AO$  – deňýanly  $BAD$  üçburçlugyň medianasy. Deňýanly üçburçlugyň häsiyetine görä, onuň esasyňa geçirilen mediana hem beýiklik, hem bissektisa bolýar. Şonuň üçin  $AC \perp BD$  we  $\angle BAC = \angle DAC$ . Şony subut etmek talap edilipdi.

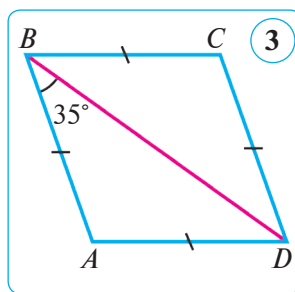
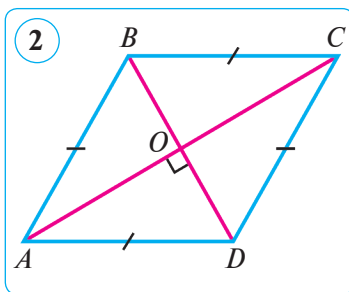
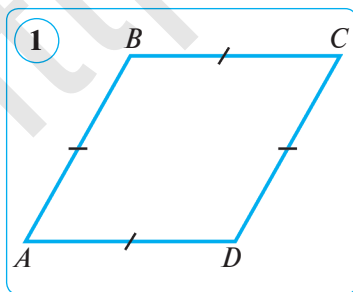
**1-nji mesele.**  $ABCD$  rombuň  $BD$  diagonal tarapy bilen  $35^\circ$ -ly burçy emele getirýär. Onuň burçlaryny tapyň.

*Çözülişi.*  $\angle ABD = 35^\circ$ , diýeliň (3-nji surat). Onda  $\angle CBD = 35^\circ$  (rombuň häsiyetine görä).  $\angle ABC = 2\angle ABD = 2 \cdot 35^\circ = 70^\circ$ ,  $\angle ADC = \angle ABC = 70^\circ$  (parallelogramyň 2-nji häsiyetine görä),  $\angle DAB = 180^\circ - \angle ABC$  (parallelogramyň 1-nji häsiyetine görä). Diýmek,  $\angle DAB = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$ ,  $\angle BCD = \angle DAB = 110^\circ$  (parallelogramyň 2-nji häsiyetine görä).

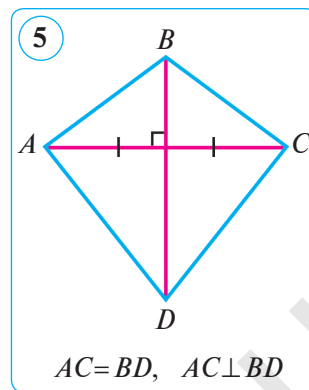
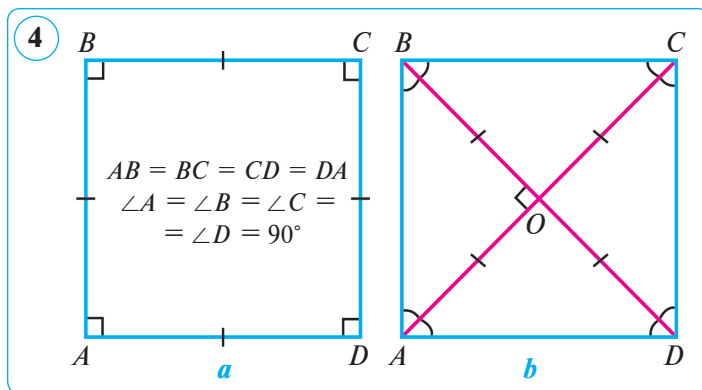
*Jogaby:*  $110^\circ, 70^\circ, 110^\circ, 70^\circ$ .

**2-nji mesele.** Dürli romblaryň perimetrleri deň bolmagy mümkinmi?

*Çözülişi.* Perimetrleri deň bolan romblar bir-birinden burçlary bilen tapawutlanýar. Eger rombuň ýiti burçy: 1)  $40^\circ$ -a deň bolsa, onda galan burçlary deňişlilikde  $140^\circ, 40^\circ, 140^\circ$  bolýar; 2)  $15^\circ$ -a deň bolsa, onda galan burçlary de-







gişlilikde  $165^\circ, 15^\circ, 165^\circ$  bolýar we ş.m. Şonuň ýaly-da, ýiti burçuň ýerine dürli kütäk burçlary almak mümkin. *Jogaby:* hawa, mümkin.

## 2. Kwadrat we onuň häsiýetleri.

**Kesgitleme.** *Taraplary deň bolan gönüburçluga kwadrat diýilýär.*

Kwadratnyň we rombuň kesgitlemelerinden kwadrat burçlary göni bolan rombdugy gelip çykýar (4-nji surat). Kwadrat hem parallelogram, hem gönüburçluk, hem romb bolany üçin olaryň ähli häsiýetlerine eýe. Kwadratnyň esasy häsiýetlerini getirýäris.

1. Kwadratnyň hemme burçlary göni.

2. Kwadratnyň diagonallary özara deň.

3. Kwadratnyň diagonallary özara perpendikulýar we kesişme nokadynda deň ikä bölünýär hem-de kwadratnyň burçlaryny deň ikä bölýär (4-nji surat).

Şu häsiýetleri özbaşdak subut ediň.

**3-nji mesele.** Eger rombuň diagonallary deň bolsa, onda şeýle rombuň kwadratdygyny subut ediň.

*Subudy.* Romb parallelogram bolany üçin gönüburçlugyň nyşanyndan diagonallary deň bolan rombuň gönüburçlukdygy gelip çykýar we diýmek, ol kwadrat bolýar.

**4-nji mesele.** Dörtburçlugyň diagonallary perpendikulýar we özara bir-birine deň. Şu dörtburçluk kwadrat bolarmy?

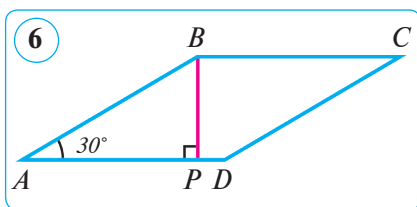
*Çözülüşi.* Meseläniň şertini kanagatlandyryan dörtburçluklardan biri 5-nji suratda şekillendirilen. Munda diagonallardan biri deň ikä bölünen. Emma bu kwadratnyň 2-nji häsiýetini hem-de 3-nji häsiýetde getirilen şertiň bir bölegi – diňe özara perpendikulýarlyk şertini kanagatlandyryar. Bu ýagdaýda diňe diagonallaryndan biri deň ikä bölünen, şu sebäpli bu dörtburçluk kwadrat bolup bilmeýär. Mälim bir ýagdaýda dörtburçlugyň iki diagonalynyň hem kesişme nokadynda deň ikä bölünmegi mümkin. Diňe şonda dörtburçluk kwadrat bolup biler.

*Jogaby:* dörtburçlugyň kwadrat bolmagy hökman däl.



### Soraglar, meseleler we ýumuşlar

1. 1) Romb diýip nämä aýdylýar? Rombuň häsiýetini aýdyň.
- 2) Kwadrat diýip nämä aýdylýar? Onuň häsiýetlerini aýdyň.
- 3) Kwadrata: a) «parallelogram»; b) «romb»; d) «gönüburçluk» düşünjeleriniň kömeginde kesgitleme beriň.
2. Kwadratnyň tarapy 20 cm-e deň. Diagonallary kesişme nokadyndan taraplaryndan birine çenli bolan aralygy tapyň.
3.  $ABCD$  rombuň tarapy 24 cm-e,  $A$  burçy bolsa  $30^\circ$ -a deň.  $B$  depesinden oňa garşylykly  $AD$  tarapa çenli bolan aralygy tapyň (6-njy surat). Boş ýerlere degişli sanlary goýuň.



*Çözülişi.*  $B$  nokatdan  $AD$  göni çyzyga çenli bolan aralyk  $B$  nokatdan şu göni çyzyga geçirilen perpendikulýar, ýagny  $BP$  kesimiň uzynlygyna deň.  $ABP$  üçburçluga garap geçýäris. Onda  $\angle APB = \dots^\circ$ ,  $\angle A = \dots^\circ$ ,  $AB = \dots$ . Onda  $BP = 0,5 \cdot \dots = 0,5 \cdot \dots = \dots$  (cm) ( $\dots^\circ$ -ly burçuň garşysynda ýatýan katetiň häsiýetine görä). *Jogaby:*  $BP = \dots$  cm.

4. 1) (*Amaly ýumuş.*) 1) Iki deň üçburçlukdan; 2) dört deň üçburçlukdan nädip romb we kwadrat gurmak mümkin? Mümkin bolan hemme çözüwleri görkeziň.
5. Deňýanly gönüburçly üçburçlugyň içinden kwadrat şeýle çyzylan, ýagny onuň iki depesi gipotenuzada, galan iki depesi bolsa katetlerde ýatýar. Gipotenuza 21 cm-e deňdigi mälim bolsa, kwadratnyň tarapyny tapyň.
6. Rombuň diagonallary bilen taraplarynyň arasynda emele gelen burçlaryň gatnaşygy  $2:7$  ýaly. Rombuň burçlaryny tapyň.
7. Kwadratnyň taraplarynyň ortalary yzly-yzyna birikdirilen. Netijede nähili şekil emele gelýär?
8. Rombuň hemme beýiklikleri özara deň bolýandygyny subut ediň.
9. Dörtburçlugyň taraplary  $2:4:5:7$  ýaly gatnaşykda, perimetri bolsa 108 cm-e deň. Şu dörtburçlugyň taraplaryny tapyň.
10. Burçlaryndan biri  $60^\circ$ , kiçi diagonalynyň uzynlygy 16 cm bolan rombuň perimetrini tapyň.
11. Rombuň diagonallary bilen taraplarynyň arasynda emele gelen burçlaryň gatnaşygy  $5:4$  ýaly. Rombuň burçlaryny tapyň.
12. Gönüburçlugyň uzynlygy 32 cm, ini bolsa 28 cm-e deň. Şu gönüburçlugyň perimetrine deň bolan kwadratnyň tarapyny tapyň.
13. Dörtburçlugyň iň kiçi tarapy 5 cm-e deň, galan taraplarynyň her biri öňküsinden degişlilikde 2 cm-e uly. Şu dörtburçlugyň perimetrini tapyň.

## 7–8. TRAPESIYA WE ONUŇ HÄSIYETLERI

**1. Trapesiyanıň kesgitlemesi.** Bize mälim bolşy ýaly, islendik parallelogramda iki jübüt parallel taraplar bolýar. Indi biz diňe bir jübüt parallel taraplara eýe bolan dörtburçluklara garap geçýäris.

**1-nji kesgitleme.** *Iki tarapy parallel, galan iki tarapy parallel bolmadyk dörtburçluk **trapesiýa** diýlip atlandyrylýar.*

Trapesiyanıň parallel taraplary onuň *esaslary*, parallel bolmadyk taraplary bolsa *gapdal taraplary* diýlip atlandyrylýar. 1-nji suratdaky  $ABCD$  trapesiýada  $AD$  we  $BC$  taraplar *esaslary*,  $AB$  we  $CD$  taraplar bolsa *gapdal taraplar* bolýar.

**2-nji kesgitleme.** *Taraplaryndan biri esasyňa perpendikulýar bolan trapesiýa **gönüburçly trapesiýa** diýilýär (2-nji surat).*

**3-nji kesgitleme.** *Gapdal taraplary deň bolan trapesiýa **deňyanly trapesiýa** diýilýär.*

3-nji suratda deňyanly  $ABCD$  trapesiýa şekillendirilen:  $AB = CD$ .

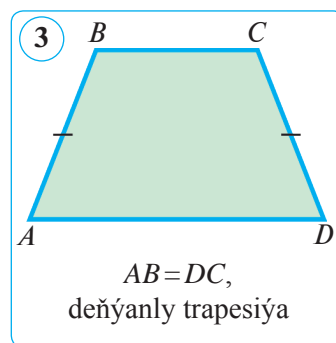
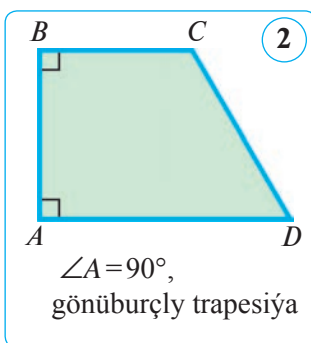
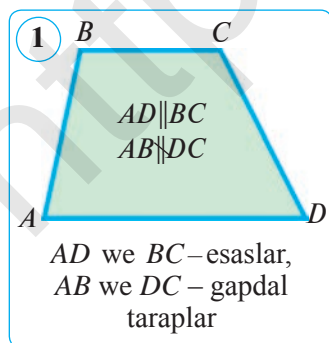
**2. Trapesiyanıň nyşany.** Indi  $ABCD$  dörtburçlugyň trapesiýa bolmagy üçin nähili şerti kanagatlandyryandygyna garap geçýäris.

### Teorema.

**Eger dörtburçlugyň bir tarapyna ýapyşan iki burçunyň jemi  $180^\circ$ -a deň hem-de oňa goňşy taraplara ýapyşan iki burçunyň jemi  $180^\circ$ -dan tapawutly bolsa, şeýle dörtburçluk **trapesiýa** bolýar.**

*Subudy.*  $ABCD$  dörtburçlukda:  $\angle A + \angle B = 180^\circ$ ,  $\angle A + \angle D \neq 180^\circ$  bolsun.  $ABCD$  dörtburçlugyň trapesiýadygyny subut edýäris.

Birinjiden, bir jübüt garşylykly taraplar parallel bolýandygyny görkezýäris.  $AB$ ,  $BC(l_1)$  we  $AD(l_2)$  göni çyzyklary geçirýäris (4-nji surat). Şerte görä,  $\angle A + \angle B = 180^\circ$ , onda  $AD$  we  $BC$  kesimler parallellik nyşanyna görä parallel bolýar. (Iki  $a$  we  $b$  göni çyzyklary üçünji  $c$  göni çyzyk kesende içki bir tarapy burçlaryň jemi  $180^\circ$ -a deň bolsa, onda  $a$  we  $b$  göni çyzyklar parallel bolýar.)



Ikinjiden,  $ABCD$  dörtdürçlügüň galan iki tarapy parallel dälligini görkezýäris. Şerte görä,  $\angle A + \angle D \neq 180^\circ$ , munda  $AB$  we  $DC$  kesimler parallel bolup bilmeýär (*Ýewklidiň parallel göni çyzyklar baradaky 5-nji aksiomasyna görä, ýagny göni çyzyklaryň paralleldiginiň zerur şerti ýerine ýetirilmedi*). Diýmek,  $ABCD$  dörtdürçlük trapesiýa eken. Şony subut etmek talap edilipdi.

Bu teoremadan aşakdaky netije gelip çykýar.

**Netije.** *Trapesiýanyň bir burçy  $90^\circ$  bolsa, onuň ýene bir  $90^\circ$ -ly burçy bardyr.*

**4-nji kesgitleme.** *Trapesiýanyň esaslaryndan birinde ýatýan nokatdan ikinji esasy öz içine alan göni çyzyga geçirilen perpendikulýar trapesiýanyň beýikligi diýlip atlandyrylýar.*

Trapesiýanyň esaslaryna perpendikulýar bolan islendik kesimi onuň beýikligi hökmünde almak mümkin. Islendik trapesiýada islendikçe beýiklik geçirmek bolýar (5-nji surat).

### 3. Deňýanly trapesiýanyň häsiýeti.

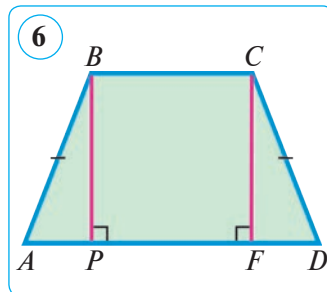
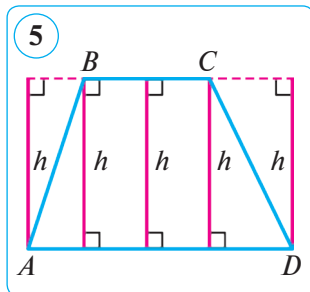
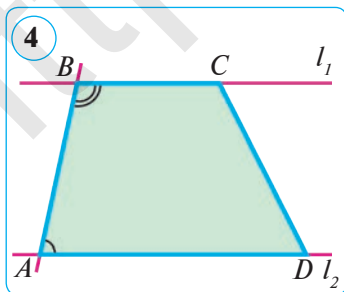
$ABCD$  deňýanly trapesiýa garap geçýäris. Munda  $AD = a$  – uly esas,  $BC = b$  – kiçi esas bolsun. Kiçi esasyň  $B$  depesinden  $BP$  beýiklik geçireliň (6-njy surat). Beýikligiň  $P$  esasy  $AD$  esasy  $AP$  we  $PD$  kesimlere bölsün.

#### Teorema.

**Deňýanly trapesiýanyň kütäk burçy depesinden geçirilen beýiklik uly esasy uzynlyklary esaslarynyň tapawudynyň ýarysyna we esaslarynyň jeminiň ýarysyna deň böleklere bölýär, ýagny:**

$$AP = \frac{a-b}{2}, \quad PD = \frac{a+b}{2}.$$

*Subudy.*  $C$  depesinden  $CF \perp AD$ -ni geçirýäris. Gönüburçly  $ABP$  we  $DCF$  üçburçluklar deň:  $AB = DC$  – şerte görä,  $BP = CF$  bolsa  $BC$  we  $AD$  parallel göni çyzyklaryň arasyndaky aralyk bolany üçin. Üçburçluklar deňliginden  $AP = FD$  gelip çykýar. Göni çyzyklaryň parallellik nyşanyna görä,  $BP \parallel CF$ , çünki  $BP \perp AD$ ,  $CF \perp AD$ . Parallel göni çyzyklaryň arasyndaky aralyk deň bolanlygy üçin  $BC = PF = b$ . Diýmek,



$$AP = FD = \frac{AD - PF}{2} = \frac{a - b}{2}, \quad PD = AD - AP = a - \frac{a - b}{2} = \frac{a + b}{2}.$$

Şeydip,  $AP = \frac{a - b}{2}$  we  $PD = \frac{a + b}{2}$  eken. Teorema subut edildi.

**1-nji mesele.** Deňyanly trapesiýanyň esasyndaky burçlaryň deňdigini subut ediň.

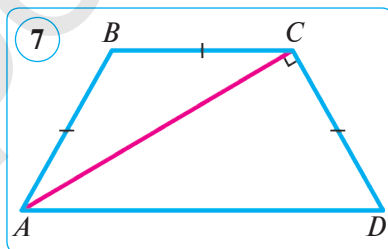
*Çözülişi.*  $ABCD$  – deňyanly trapesiýa, ýagny  $AB = DC$  we  $AD \parallel BC$ . Deňyanly trapesiýanyň  $AD$  we  $BC$  esaslaryna ýapyşan burçlarynyň deňligini subut edýäris ( $\angle A = \angle D$ ,  $\angle B = \angle C$ ).

Trapesiýanyň kütäk burçlary ( $B$  we  $C$ ) depelerinden  $AD$  esasyna perpendikulýar geçirýäris:  $BP \perp AD$ ,  $CF \perp AD$  (6-njy surata g.). Gönüburçly  $ABP$  we  $DCF$  üçburçluklar (gipotenuza we katetine görä) deň:  $AB = DC$  – şerte görä,  $BP = CF$  bolsa  $BC$  we  $AD$  parallel göni çyzyklaryň arasyndaky aralyk bolany üçin. Üçburçluklaryň deňliginden  $\angle A = \angle D$  gelip çykýar.

$A$  we  $B$ ,  $C$  we  $D$  burçlar  $AD$  we  $BC$  parallel göni çyzyklaryň, deňlikde,  $AB$  we  $CD$  kesijiler bilen kesişmeginden emele gelen içki bir taraply burçlar, şonuň üçin  $\angle A + \angle B = 180^\circ$  we  $\angle C + \angle D = 180^\circ$ . Mundan  $\angle B = \angle C$  bolýandygy gelip çykýar. Şeydip, deňyanly trapesiýanyň esasyndaky burçlary deň eken:  $\angle A = \angle D$  we  $\angle B = \angle C$ . Şony subut etmek talap edilipdi.

**2-nji mesele.** Deňyanly trapesiýanyň kiçi esasy gapdal tarapyna deň, diagonal bolsa gapdal tarapyna perpendikulýar. Trapesiýanyň burçlaryny tapyň.

*Çözülişi.* Deňyanly  $ABCD$  trapesiýa berlen, onda  $AD \parallel BC$ ,  $AB = BC = CD$ ,  $AC \perp CD$  bolsun (7-nji surat). Meseläniň şertine görä,  $AC$  – deňyanly  $ABC$  üçburçlugyň esasy, diýmek,  $\angle BCA = \angle CAB$ . Ýöne  $\angle A = \angle D$ , çünki deňyanly trapesiýanyň esasyndaky burçlary deň,  $CAD$  we  $BCA$  burçlar bolsa  $AD \parallel BC$  hem-de  $AC$  kesiji emele getiren içki atanak burçlar bolany üçin deň, ýagny  $\angle CAD = \angle BCA$ .

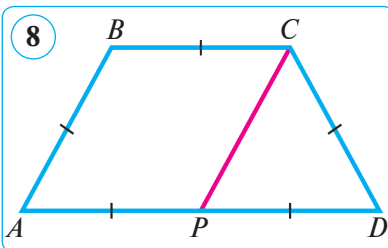


Diýmek,  $\angle A = 2\angle CAD$ . Şerte görä,  $ACD$  – gönüburçly, şonuň üçin  $\angle CAD + \angle D = 90^\circ$ , ýöne  $\angle D = \angle A$ , onda  $90^\circ = 3\angle CAD$ , diýmek,  $\angle CAD = 30^\circ$  we onda  $\angle D = \angle A = 60^\circ$ ,  $\angle C = \angle B = 120^\circ$ . *Jogaby:*  $\angle A = \angle D = 60^\circ$ ,  $\angle B = \angle C = 120^\circ$ .

**3-nji mesele.** Deňyanly trapesiýanyň taraplarynyň gatnaşygy  $1 : 1 : 1 : 2$  ýaly. Şu trapesiýanyň burçlaryny tapyň.

*Çözülişi.*  $ABCD$  trapesiýada  $AB = BC = CD = 1$  we  $AD = 2$  bolsun.  $AD$  tarapyň ortasyny  $P$  bilen belgileýäris (8-nji surat).  $ABCP$  dörtburçlugyň  $AP$  we  $BC$  taraplary deň we parallel.

Diýmek, parallelogramyň nyşanyna görä, bu dörtburçluk parallelogram bolýar. Şuňa görä,  $PC = AB = 1$ .  $PCD$  üçburçlugyň hemme



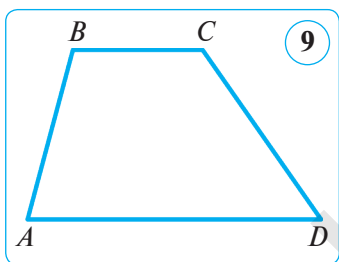
taraplary 1-e deň, şonuň üçin  $\angle PDC = 60^\circ$ . Şeýlelikde,  $ABCD$  trapesiýada  $\angle A = \angle D = 60^\circ$  we  $\angle B = \angle C = 120^\circ$ .

Jogaby:  $\angle A = \angle D = 60^\circ$ ,  $\angle B = \angle C = 120^\circ$ .



### Soraglar, meseleler we ýumuşlar

- 1) Nähili dörtburçluga trapesiýa diýilýär?
- 2) Nähili trapesiýa: a) deňyanly trapesiýa; b) gönüburçly trapesiýa diýlip atlandyrylýar?
2. Trapesiýanyň depesinden geçmedik beýikligi ony iki gönüburçly trapesiýa bölýär. Şekli çyzyp görkeziň.
3. Gönüburçly trapesiýanyň gapdal taraplarynyň gatnaşygy 1:2 ýaly. Trapesiýanyň iň uly burçuny tapyň.
4. Trapesiýanyň esaslary 12 ñm we 20 cm, gapdal taraplary bolsa 4 cm we 11 cm. Kiçi esasyň depesinden kiçi tarapyna parallel göni çyzyk geçirilen. Şu parallel göni çyzyk bölen üçburçlugyň perimetrini tapyň.
5.  $AD$  we  $BC$  esasy  $ABCD$  trapesiýanyň  $B$  we  $C$  burçlaryny tapyň, munda



$\angle A = 75^\circ$  we  $\angle D = 55^\circ$  (9-njy surat). Boş ýerlere degişli sanlary goýuň.

*Çözülişi.*  $A$  we  $B$ ,  $C$  we  $D$  burçlar  $AD$  we  $BC$  parallel göni çyzyklary ... we ... kesijiler bilen kesişmeginden emele gelen ..., şonuň üçin  $\angle A + \angle B = \dots^\circ$  we  $\angle C + \angle D = \dots^\circ$ . Şerte görä,  $\angle A = 75^\circ$  we  $\angle D = 55^\circ$ , onda  $\angle B = \dots^\circ - \angle A = \dots^\circ - \dots^\circ = \dots^\circ$  we  $\angle C = \dots^\circ - \angle D = \dots^\circ - \dots^\circ = \dots^\circ$ .

Jogaby:  $\angle B = \dots^\circ$ ,  $\angle C = \dots^\circ$ .

6. Deňyanly trapesiýanyň ýiti burçlaryndan biri  $60^\circ$ -a, gapdal tarapy bolsa 16 cm-e deň. Eger trapesiýanyň esaslarynyň jemi 38 cm-e deň bolsa, onuň esaslaryny tapyň.
7. Deňyanly trapesiýanyň kütäk burçy depesinden geçirilen beýiklik uly esasy 3 cm we 17 cm-lik kesimlere bölýär. Onuň esaslaryny tapyň.
8. Deňyanly trapesiýanyň diagonalalarynyň deňdigini subut ediň.
9. Trapesiýada: 1) üç göni burçuň; 2) üç ýiti burçuň; 3) üç burçuň jemi  $180^\circ$ -a deň bolup bilermi? Jogabyňyzy esaslandyryň.
10. Gönüburçly trapesiýanyň iň uly we iň kiçi burçlary gatnaşygy 5:4-e deň. Şu trapesiýanyň burçlaryny tapyň.
11.  $ABCD$  trapesiýanyň kiçi esasy 6 cm-e,  $ABE$  üçburçlugyň ( $BE \parallel CD$ ) perimetri 36 cm-e deň. Şu trapesiýanyň perimetrini tapyň.
12. Deňyanly trapesiýanyň diagonalaly kütäk burçuny deň ikä bölýär. Trapesiýanyň esaslary 10 cm we 20 cm. Onuň perimetrini tapyň.

2- §.

FALESİŇ TEOREMASY WE ONUŇ ULANYLYŞY

9. FALESİŇ TEOREMASY

**Teorema.**

Eger burçuň taraplaryny kesiji parallel göni çyzyklar onuň bir tarapyndan deň kesimleri bölse, olar ikinji tarapyndan hem deň kesimleri bölýär.

*Subudy.*  $O$  burçuň bir tarapynda ( $a$  şöhlese) özara deň  $A_1A_2$  we  $A_2A_3$  kesimler goýlan hem-de olaryň ahyrlary ( $A_1, A_2, A_3$ ) arkaly ikinji tarapy ( $b$  şöhläni)  $B_1, B_2, B_3$  nokatlarda kesiji özara parallel  $A_1B_1, A_2B_2$  we  $A_3B_3$  göni çyzyklar geçirilen bolsun (1-nji surat).

Indi emele gelen  $B_1B_2$  we  $B_2B_3$  kesimleriniň özara deňligini, ýagny  $A_1A_2 = A_2A_3$  bolsa,  $B_1B_2 = B_2B_3$  bolýandygyny subut edýäris.

Munuň üçin  $B_2$  nokatdan  $a$  şöhlä parallel  $CD$  göni çyzyk geçirýäris (2-nji surat). Bu göni çyzyk  $A_1B_1$  we  $A_3B_3$  göni çyzyklar bilen degişlilikde  $C$  we  $D$  nokatlarda kesişsin.  $A_1CB_2A_2$  we  $A_2B_2DA_3$  dörtburçluklar – paralelogram (kesgitlemä görä), çünki olaryň garşylykly taraplary şerte we gurmaga görä parallel. Şerte görä,  $A_1A_2 = A_2A_3$  hem-de paralelogramyň garşylykly taraplary bolany üçin  $A_1A_2 = CB_2$  we  $A_2A_3 = B_2D$ -den  $CB_2 = B_2D$ -ge eýe bolarys.

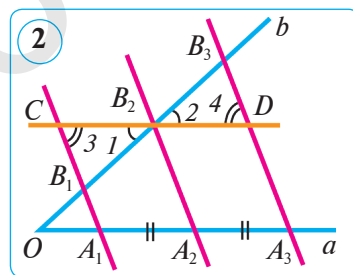
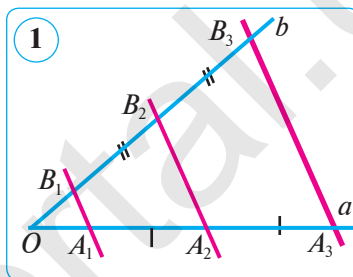
$B_1B_2C$  we  $B_3B_2D$  üçburçluklarda  $CB_2 = B_2D$  (subuda görä), şonuň ýaly-da,  $\angle 1 = \angle 2$  (wertikal burçlar),  $\angle 3 = \angle 4$  ( $A_1B_1$  we  $A_3B_3$  parallel göni çyzyklar hem-de  $CD$  kesiji kesişmeginden emele gelen içki atanak burçlar bolany üçin).

Üçburçluklaryň deňliginiň ikinji nyşanyyna görä, bu üçburçluklar özara deň:  $\angle B_1B_2C = \angle B_3B_2D$ . Mundan  $B_1B_2 = B_2B_3$  gelip çykýar.

Şeýlelikde, eger  $A_1A_2 = A_2A_3$  bolsa,  $B_1B_2 = B_2B_3$  bolýandygy subut edildi. Şony subut etmek talap edilipdi.

**Ýatlatma!** *Falesiň teoremasynyň şertinde burçuň ýerine islendik iki göni çyzygy almak mümkin, munda teoremanyň netijesi üýtgemeyär.*

**Netije.** Berlen iki göni çyzygy kesiji we göni çyzyklaryň birinden deň kesimleri bölüji parallel göni çyzyklar ikinji göni çyzykdan hem deň kesimleri bölýär.



**1-nji mesele.** (*Kesimi deň böleklere bölmek.*) Berlen  $AB$  kesimi  $n$  sany deň bölege bölün.

*Çözülişi.*  $AB$  kesim berlen bolsun. Ony  $n$  sany deň bölege bölmeği görkezýäris.  $A$  nokatdan  $AB$  göni çyzykda ýatmaýan  $AC$  şöhläni geçirýäris we onda  $A$  nokatdan başlap  $n$  sany  $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$  deň kesimleri, ýagny berlen  $AB$  kesimi meseläniň şertinden gelip çykyp näçe bölege bölmeli bolsa, sonça deň kesimi goýýarys (3-nji surat,  $n=6$ ). Soňra  $A_nB$  göni çyzygy ( $A_n$  nokat – ahyrky kesimiň uýy) we  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}$  nokatlar arkaly  $A_nB$  göni çyzyga parallel göni çyzyklary geçirýäris. Bu göni çyzyklar  $AB$  kesimi  $B_1, B_2, B_3, \dots, B_{n-1}$  nokatlarda kesýär we ony Falesiň teoremasyna görä  $n$  sany deň bölege bölýär:

$$AB_1 = B_1B_2 = \dots = B_{n-1}B.$$

Diýmek, islendik kesimi islendikçe deň bölege bölmek mümkin.

**2-nji mesele.**  $ABC$  üçburçlugyň  $BC$  tarapy dört deň kesime bölünip, bölüniji nokatlary arkaly uzynlygy 18 cm-e deň bolan  $AB$  tarapa parallel ýagdaýda göni çyzyklar geçirilen. Şu göni çyzyklaryň üçburçlugyň içinde galan kesimleriniň uzynlyklaryny tapyň.

*Berlen:*  $\angle ABC$ -da:

$$BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3C, AB = 18 \text{ cm}; B_1C_3 \parallel B_2C_2 \parallel B_3C_1 \parallel AB.$$

*Tapmaly:*  $B_1C_3, B_2C_2, B_3C_1$  (4-nji surat).

*Çözülişi.* 1)  $A_1B_3 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_1 \parallel AC$  geçirýäris.

2) Falesiň teoremasyna görä:

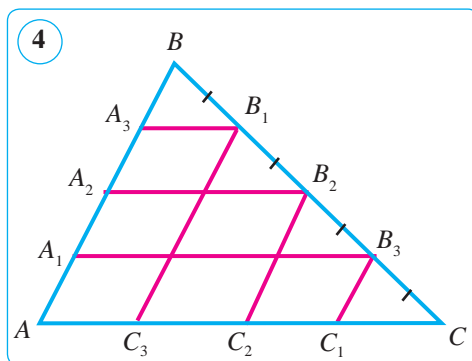
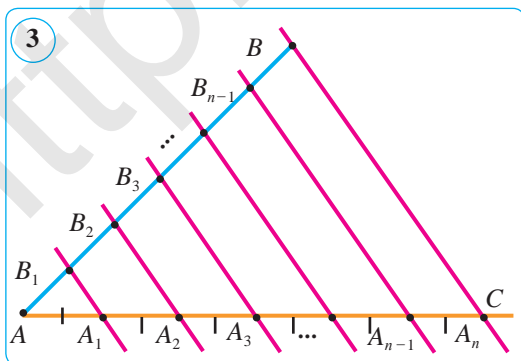
$$AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3B = AB : 4 = 18 : 4 = 4,5 \text{ (cm)}.$$

2) Kesgitlemä görä,  $AA_1B_3C_1$  dörtburçluk – parallelogram, çünki  $AA_1 \parallel C_1B_3$  (şerte görä) we  $A_1B_3 \parallel AC_1$  (gurmaga görä).

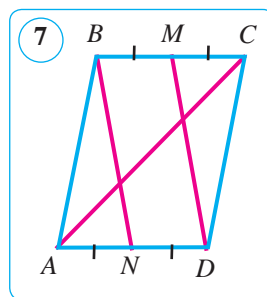
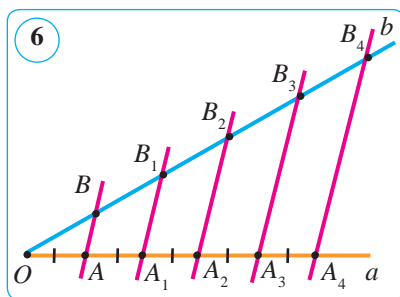
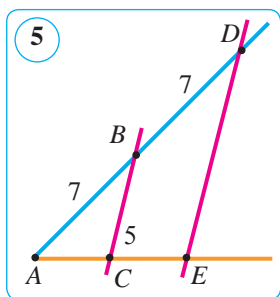
Diýmek,  $AA_1 = C_1B_3 = 4,5 \text{ (cm)}$ .

3) Kesgitlemä görä,  $AA_2B_2C_2$  dörtburçluk – parallelogram, çünki  $AA_2 \parallel C_2B_2$  (şerte görä) we  $A_2B_2 \parallel AC_2$  (gurmaga görä). Diýmek,

$$AA_2 = C_2B_2 = 2AA_1 = 2 \cdot 4,5 = 9 \text{ (cm)}.$$







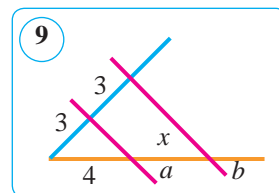
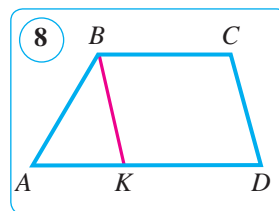
4) Kesgitlemä görä,  $AA_3B_1C_3$  dörtburçluk – paralelogram, çünki  $AA_3 \parallel C_3B_1$  (şerte görä) we  $A_3B_1 \parallel AC_3$  (gurmaga görä). Diýmek,

$$AA_3 = C_3B_1 = 3AA_1 = 3 \cdot 4,5 = 13,5 \text{ (cm)}.$$

Jogaby:  $C_1B_3 = 4,5 \text{ cm}$ ,  $C_2B_2 = 9 \text{ cm}$ ,  $C_3B_1 = 13,5 \text{ cm}$ .

### Soraglar, meseleler we ýumuşlar

- 1) Falesiň teoremasyny aýdyň.
- 2) Falesiň teoremasy diňe burç üçin ýerliklimi?
- 3) Berlen kesim nädip  $n$  sany deň bölege bölünýär?
2. (Amaly ýumuş.) Sirkulyň we çyzgyjyň kömeginde berlen  $AB$  kesimi: 1) iki; 2) üç; 3) alty; 4) ýedi deň bölege bölün.
3. Berlen:  $\angle A$ ,  $AB = BD = 7 \text{ cm}$ ,  $BC \parallel DE$ ,  $CE = 5 \text{ cm}$  (5-nji surat).  
Tapmaly:  $AC$ .
4. Berlen:  $\angle aOb$ ,  $OA = AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$ ,  
 $AB \parallel A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3 \parallel A_4B_4$ ,  $OB_4 = 8 \text{ cm}$  (6-nji surat). Tapmaly:  $OB_1, OB_2, OB_3$ .
5.  $ABCD$  paralelogramda  $M$  nokat  $BC$  tarapyň,  $N$  nokat  $AD$  tarapyň ortasy.  $BN$  we  $MD$  göni çyzyklar paralelogramyň  $AC$  diagonalyny deň üç bölege bölýändigini subut ediň (7-nji surat).
6.  $ABCD$  trapesiýada  $B$  depesi arkaly  $CD$  tarapa parallel  $BK$  göni çyzyk geçirilen (8-nji surat).  
1)  $KBCD$  – paralelogramdygyny subut ediň.  
2) Eger  $BC = 4 \text{ cm}$ ,  $P_{ABK} = 11 \text{ cm}$  bolsa, trapesiýanyň perimetrini tapyň.
7. Sirkulyň we çyzgyjyň kömeginde berlen  $AB$  kesimi: 1) dört; 2) baş sany deň bölege bölün.
8.  $a \parallel b$  bolýandygy mälim. 9-nji suratda berlen maglumatlardan peýdalanyň,  $x$ -i tapyň.
9. Berlen:  $\angle aOb$ ,  $OA = AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$ ,  
 $AB \parallel A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3 \parallel A_4B_4$ ,  $OB_4 - B_3B_4 = 18 \text{ cm}$  (6-nji surata g.). Tapmaly:  $OB_1, OB_2, OB_3$ .



## 10–11. ÜÇBURÇLUGYŇ ORTA ÇYZYGYNÝŇ HÄSİYETI. TRAPESIÝANYŇ ORTA ÇYZYGYNÝŇ HÄSİYETI

### 1. Üçburçlugyň orta çyzygynyň häsiýeti.

**Kesgitleme.** Üçburçlugyň *orta çyzygy* diýip, onuň iki tarapynyň ortalaryny utgaşdyrýan kesime aýdylýar.

$ABC$  üçburçlukda  $AD = DB$  we  $CE = EB$  bolsun, onda  $DE$  orta çyzyk bolýar (kesgitlemä görä).  $DE$  orta çyzyga görä  $AC$  tarap *esas* diýlip atlandyrylýar (1-nji surat). Iskendik üçburçlugyň üç orta çyzygy bolýar (2-nji surat).

#### 1-nji teorema.

**Üçburçlugyň orta çyzygy onuň üçünji tarapyna parallel bolup, uzynlygy bu tarapyň uzynlygynyň ýarysyna deň.**

*Berlen:*  $\triangle ABC$ -da:  $AD = DB$ ,  $CE = EB$ ,  $DE$  – orta çyzyk (3-nji surat).

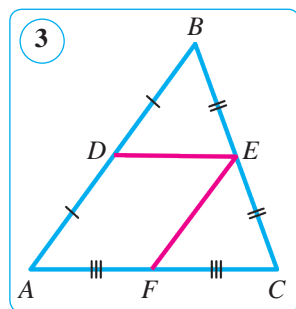
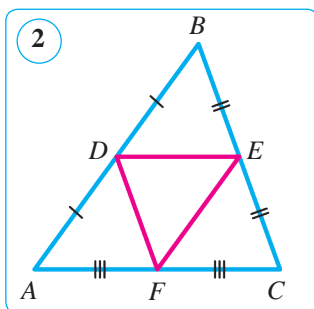
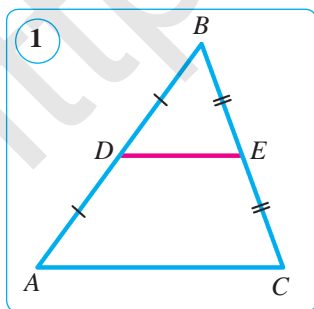
*Subut etmeli:* 1)  $DE \parallel AC$ ; 2)  $DE = \frac{1}{2} AC$ .

*Subudy.* 1)  $DE$  kesim  $ABC$  üçburçlugyň orta çyzygy bolsun.  $D$  nokat arkaly  $AC$  tarapa parallel göni çyzyk geçirýäris. Bu göni çyzyk Falesiň teoremasyna görä  $BC$  kesimi ortasyndan kesip geçýär, ýagny  $DE$  orta çyzygy öz içine alýar. Gurluşyna görä,  $DE \parallel AC$ .

2) Indi  $EF$  orta çyzygy geçirýäris. 1-njibentde subut edilişine görä, ol  $AB$  tarapa parallel bolýar:  $EF \parallel AB$ , mundan  $EF \parallel AD$ .  $ADEF$  dörtburçlugyň garşylykly taraplary özara parallel bolany üçin ol kesgitlemä görä parallelogram bolýar. Parallelogramyň häsiýetine görä  $DE = AF$ , Falesiň teoremasyna görä  $AF = FC$  bolany üçin  $DE = \frac{1}{2} AC$ . Teorema subut edildi.

**1-nji mesele.** Üçburçlugyň perimetri  $p$ -ge deň. Depeleri berlen üçburçlugyň taraplarynyň ortalarynda bolan üçburçlugyň perimetrini tapyň.

*Çözülişi.* Emele gelen üçburçlugyň taraplary berlen üçburçlugyň orta çyzyklary bolýar (2-nji surat). Diýmek, olar degişli taraplarynyň ýarysyna deň.



Шу seabpli gözlenýän perimetr berlen üçburçlugyň perimetriniň ýarysyna deň bolýar:  $P_{DEF} = DE + EF + FD = 0,5(AC + AB + BC) = 0,5 p$ .

Jogaby:  $0,5 p$ .

## 2. Trapesiýa orta çyzygynyň häsiýeti.

**Kesgitleme.** Trapesiýanyň gapdal taraplarynyň ortasyny utgaşdyrýan kesime **trapesiýanyň orta çyzygy** diýilýär.

Bize  $ABCD$  trapesiýa berlen bolup, onda  $AD$  we  $BC$  – trapesiýanyň esaslary,  $AB$  we  $DC$  – gapdal taraplary,  $E$  we  $F$  nokatlar gapdal taraplarynyň ortalary bolsun (4-nji surat). Munda  $EF$  trapesiýanyň orta çyzygy bolýar.

### 2-nji teorema.

**Trapesiýanyň orta çyzygy onuň esaslaryna parallel we onuň uzynlygy trapesiýanyň esaslarynyň uzynlyklarynyň jeminiň ýarysyna deň.**

*Subudy.*  $EF$  – esaslary  $AD$  we  $BC$  bolan  $ABCD$  trapesiýanyň orta çyzygy bolsun ( $AD \parallel BC$ ).  $BF$  göni çyzyk geçirýäris we onuň  $AD$  göni çyzyk bilen kesişme nokadyny  $P$  diýip belgileýäris (5-nji surat). Üçburçluklaryň deňliginiň ikinji nyşanyna görä,  $BCF$  we  $PDF$  üçburçluklar deň ( $CF = DF$  şerte görä,  $\angle 1 = \angle 2$  – wertikal burçlar we  $\angle 3 = \angle 4$  –  $BC$  we  $AD$  parallel göni çyzyklar hem-de  $CD$  kesiji emele getiren içki atanak burçlar bolany üçin). Bu üçburçluklaryň deňliginden taraplar deň diýen netije çykýar:  $BF = PF$  we  $BC = DP$ . Diýmek, trapesiýanyň  $EF$  orta çyzygy  $ABP$  üçburçlugyň orta çyzygy eken. Üçburçlugyň orta çyzygynyň häsiýetine görä:

$$EF \parallel AP \text{ we } EF = \frac{1}{2} AP.$$

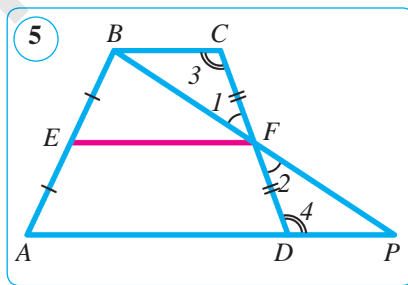
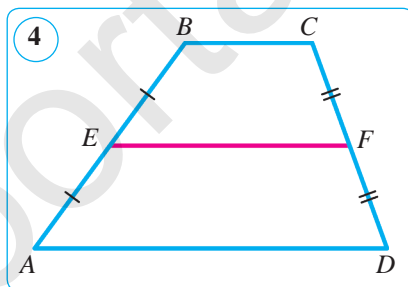
$AD \parallel BC$  bolany seabpli,  $EF$  iki esasa-da parallel bolýar we aşakdaky ýaly aňladylmagy mümkin:

$$EF = \frac{1}{2} AP = \frac{1}{2} (AD + DP) = \frac{1}{2} (AD + BC).$$

Diýmek,  $EF \parallel AD \parallel BC$  we  $EF = \frac{1}{2} (AD + BC)$ . Teorema subut edildi.

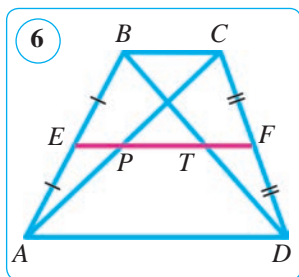
**Netije.** Trapesiýanyň gapdal tarapy ortasyndan geçýän we esaslaryna parallel göni çyzyk ikinji gapdal tarapy deň ikä bolýar.

Muny özbaşdak subut ediň.



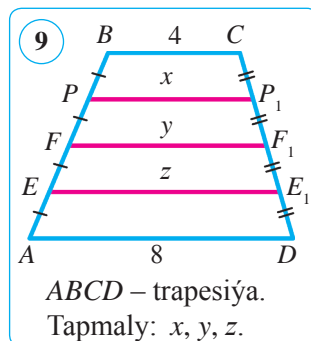
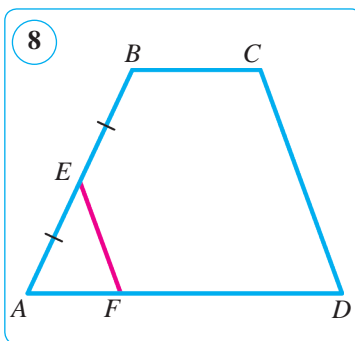
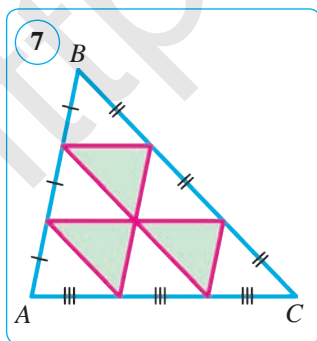
**Soraglar, meseleler we ýumuşlar**

1. 1) Üçburçlugyň orta çyzygy diýip nämä aýdylýar?
- 2) Üçburçlukda näçe orta çyzyk gurmak mümkin?
2. Üçburçlugyň taraplary 5 cm, 7 cm we 11 cm-e deň. Depeleri şu üçburçlugyň taraplarynyň ortalarynda ýatýan üçburçlugyň taraplaryny tapyň.
3. Üçburçlugyň orta çyzyklary 6 cm, 7 cm we 9 cm-e deň bolan üçburçlugyň taraplaryny tapyň.
4. Trapesiýanyň diagonallary onuň orta çyzygy  $EF$ -i  $E$  depesinden başlap 5 cm, 7 cm we 4 cm-lik kesimlere bölýär (6-njy surat). Esaslaryny tapyň.



5.  $ABC$  üçburçlugyň taraplarynyň her biri üç deň kesime bölünen we bölünme nokatlary kesimler bilen utgaşdyrylan.  $ABC$  üçburçlugyň perimetri  $p$  -ge deň bolsa, 7-nji suratda emele gelen şekiliň perimetrini tapyň.
6. Trapesiýanyň esaslary: 1) 4,5 dm we 8,2 dm; 2) 9 cm we 21 cm-e deň. Onuň orta çyzygynyň uzynlygy näçe?

7.  $ABCD$  trapesiýada (8-nji surat)  $EF$  kesim  $CD$  tarapa parallel,  $E$  nokat bolsa  $AB$ -niň ortasy.  $EF=0,5CD$  bolýandygyny subut ediň.
8. 9-njy suratdaky nämälim uzynlyklary hasaplaň.
9. Trapesiýanyň diagonallary onuň orta çyzygyny her biri 6 cm-lik kesimlere bölýär. Şu trapesiýanyň esaslaryny tapyň.
10. Deňýanly trapesiýada uzynlygy 6 cm-e deň diagonaly esasy bilen  $60^\circ$ -ly burçy düzýär. Trapesiýanyň orta çyzygyny tapyň.
11. Trapesiýanyň uly esasy kiçi esasyndan 3 esse uly we onuň orta çyzygy 20 cm-e deň. Trapesiýanyň esaslaryny tapyň.
12. Trapesiýanyň perimetri 40 cm-e, parallel bolmadyk taraplarynyň jemi bolsa 16 cm-e deň. Şu trapesiýanyň orta çyzygyny tapyň.



## 12. AMALY GÖNÜKME WE ULANYLYŞY

### Barlag üçin meseleler.

**1-nji mesele.** Taraplarynyň sany  $n$  bolan köpburçlugy çyzyň we onuň diagonalaryny geçiriň, munda: 1)  $n=5$ ; 2)  $n=7$ ; 3)  $n=8$ . Köpburçlugyň dürli diagonalarynyň sanyny ( $d_n$ ) hasaplamagyň formulasyny pikirlenip tapyň.

**Çözülişi.** 1)  $n=5$ .  $A$  depesinden 2 sany  $AC$  we  $AD$ ,  $B$  depesinden 2 sany  $BD$  we  $BE$  diagonalar çykýar we ş.m. Baş depäniň hersinden 2 sanydan diagonal çykýar (1-nji surat). Mundan güberçek başburçlugyň her bir depesinden çykan diagonalarynyň sany taraplarynyň (depeleriniň) sanyndan 3-e kemligi, ýagny  $5-3=2$ -ä deňdigi gelip çykýar. Hemme depelerinden çykan diagonalarynyň sanyny tapmak üçin taraplarynyň sanyny 2-ä köpeldýäris:  $5 \cdot (5-3) = 5 \cdot 2 = 10$ .

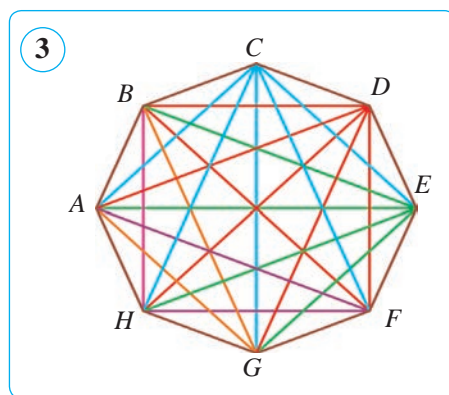
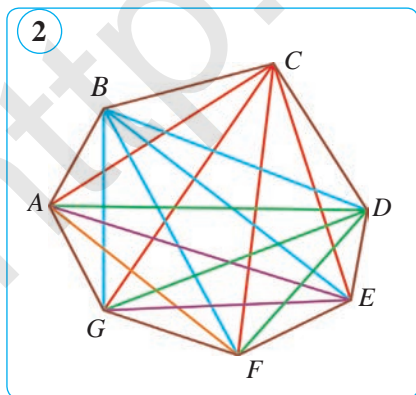
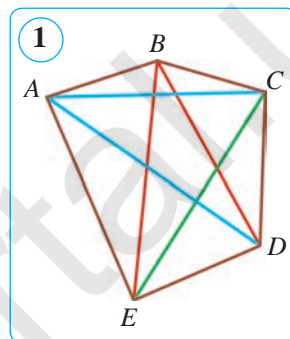
Bu köpeltmek hasylynda her bir diagonal iki gezekden hasaba alnan. Emma  $AC$  we  $CA$ ,  $BD$  we  $DB$  we ş.m. bir diagonalynyň iki hili belgilenmegidir, ýagny olar täze diagonalar däl. Şu sebäpli alnan köpeltmek hasylyny 2-ä bölüp, jemi dürli diagonalaryň sanyny tapýarys:  $5 \cdot 2 : 2 = 5$ .

Diýmek, güberçek başburçlugyň jemi dürli diagonalary aşakdaka deň:

$$d_5 = \frac{5 \cdot (5-3)}{2} = \frac{5 \cdot 2^1}{1 \cdot 2} = 5. \quad \text{Jogaby: 5 sany.}$$

2)  $n=7$ . Güberçek ýediburçlugyň jemi dürli diagonalarynyň sany ýokarda görkezilip geçilen meseläniň çözüwine meňzeş tapylýar. Edilen pikir ýöretmelerden anyklanan kanunalaýyklyga esaslanyp, güberçek ýediburçlugyň diagonalarynyň sanyny aşakdaky ýaly tapýarys (2-nji surat):

$$d_7 = \frac{7 \cdot (7-3)}{2} = \frac{7 \cdot 4^2}{1 \cdot 2} = 14. \quad \text{Jogaby: 14 sany.}$$



3)  $n=8$ . Güberçek sekizburçlugyň jemi dürli diagonallarynyň sany ýokarda görkezilip geçilen meseläniň çözüwine meňzeş tapylýar. Edilen pikir ýöretmelerden anyklanan kanunalaýyklyga esaslanyp, güberçek sekizburçlugyň diagonallarynyň sanyny tapýarys (3-nji surat):

$$d_8 = \frac{8 \cdot (8-3)}{2} = \frac{4 \cdot 8 \cdot 5}{2} = 20. \quad \text{Jogaby: } 20 \text{ sany.}$$

Diýmek, islendik güberçek köpburçlugyň dürli diagonallarynyň sany aşakdaky formula boýunça tapylýar:  $d_n = \frac{n(n-3)}{2}$ .

**Ýatlatma!** Güberçek  $n$  burçuň bir depesinden çykan diagonallary ony  $(n-2)$  sany üçburçluga bölýär.

**2-nji mesele.** Köpburçlugyň 25 diagonaly bolmagy mümkinmi?

**Çözülişi.**  $n$  burçuň jemi dürli diagonallarynyň sany  $d_n = \frac{n(n-3)}{2}$  -e deň. Diýmek,  $\frac{n(n-3)}{2} = 25$ . Onda  $n(n-3) = 50$  ýa-da  $n(n-3) = 2 \cdot 5 \cdot 5$ . Şundan görnüşi ýaly, 50-ni bir-birinden 3-e tapawutlanýan iki natural sanyň köpeltmek hasyly görnüşinde aňladyp bolmaýar. Şonuň üçin jemi dürli diagonallarynyň sany 25 bolýan köpburçluk ýok. Jogaby: ýok.

**3-nji mesele.** Matematika otagyndaky suratlarda şekillendirilen üçburçluklaryň we dörtburçluklaryň sany 15. Bu şekilleriň jemi taraplarynyň sany 53. Suratlarada näçe üçburçluk we näçe dörtburçluk şekillendirilen?

**Çözülişi.** Dörtburçlugyň taraplarynyň sany natural sanyň islendik bahasynda dörde kratny, ýagny jübüt san bolýar. Üçburçluklaryň sany diňe täk san bolanda jem täk bolýar.

Meseläniň şertine görä deňleme düzýäris:  $3x + 4y = 53$ .

Aşakda mümkin bolan ýagdaýlara garap geçýäris. Deňlemedäki näbellileriň ýerine degişli bahalary goýup, ony kanagatlandyryan çözüwi tapýarys.

1-nji ýagdaý.  $x = 1$  we  $y = 14$  bolsun. Onda  $3 \cdot 1 + 4 \cdot 14 = 53$ , ýagny  $59 \neq 53$ .

2-nji ýagdaý.  $x = 3$ ,  $y = 13$ ;  $3 \cdot 3 + 4 \cdot 12 = 53$ , ýagny  $57 \neq 53$ .

3-nji ýagdaý.  $x = 5$ ,  $y = 10$ ;  $3 \cdot 5 + 4 \cdot 10 = 53$ , ýagny  $55 \neq 53$ .

4-nji ýagdaý.  $x = 7$ ,  $y = 8$ ;  $3 \cdot 7 + 4 \cdot 8 = 53$ , ýagny  $53 = 53$ .

4-nji ýagdaý meseläniň şertini kanagatlandyrdy, şu sebäpli başga ýagdaýlara garalmaýar.

Jogaby: **7** üçburçluk, **8** dörtburçluk.

**Berkitmek üçin goşmaça gönükmeler.**

1. Güberçek köpburçlugyň bir depesinden çykan diagonallarynyň sany 13. Şu köpburçlugyň taraplarynyň sany näçe? Jemi diagonallarynyň sany näçe?
2. Diagonallarynyň sany: 1) taraplarynyň sanyna deň; 2) taraplarynyň sanyndan kem bolan; 2) taraplarynyň sanyndan artyk bolan köpburçluk barmy?

## AMALY KOMPETENSIYANI ÖSDÜRIJI GOŞMAÇA MATERIALLAR DOGRY KÖPBURÇLUKLY PARKETLER

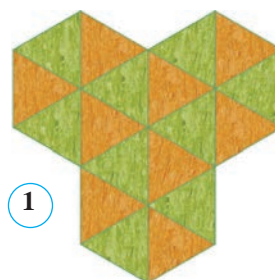
Siz, elbetde, parket barada mälim bir düşünjä eýesiňiz. Köplenç jaýlaryň, dürli desgalaryň pollary gönüburçluk, kwadrat we dogry altyburçly parketler bilen bezelýär.

Matematiki nukdaý nazardan garanda, parket – bu tekizligi geometrik şekiller bilen bir-birine dykyz we olary kesişmeýän edip ýerleşdirmekdir. Ilki dogry köpburçluklar – kwadrat, dörtburçluk we altyburçly parketlere garap geçýäris. Birmeňzeş kwadratlardan düzülen gözenekli depderiňiz iň yönekeý parketlere mysal bolýar. 1-nji suratda dogry üçburçluklardan; 2-nji suratda kwadrat bilen dogry altyburçlukdan; 3-nji suratda bolsa dogry altyburçluklar, kwadratlar we deň taraply üçburçluklardan; 4-nji suratda dogry altyburçluklardan we üçburçluklardan düzülen owadan parketler şekillendirilen.

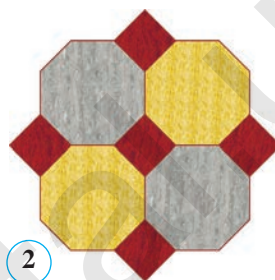
**Parket** diýip, tekizligi köpburçluklar bilen şeýle örtmäge aýdylýar, ýagny munda islendik iki köpburçluk umumy tarapa ýa-da umumy depä eýe bolýar, ýa-da umumy depelere eýe bolmaýar.

Eger parket dogry köpburçluklardan ybarat bolsa we her bir depäniň daşynda köpburçluklar birmeňzeş usulda ýerleşen bolsa, parket *dogry* diýilýär.

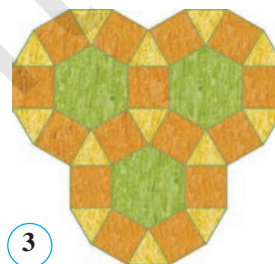
Deň taraply üçburçluklar, kwadratlar we dogry altyburçluklar tekizligi örtýän parketlere mysal bolýar. Bulardan başga dogry köpburçluklar bilen tekizligi örtmek mümkin dälligini subut edýäris. Munuň üçin parketiň



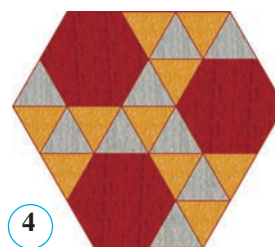
1



2

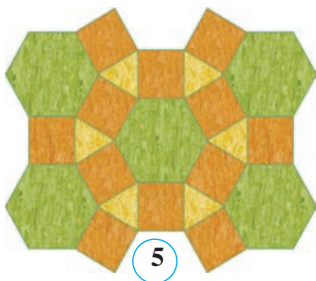


3

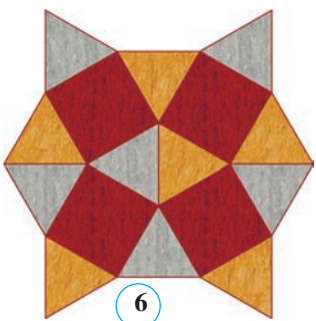


4





5



6

bir depesinden çykn köpburçluklaryň burçlarynyň jemi  $360^\circ$ -a deň bolmagyndan peýdalanýarys.

Munuň üçin dogry başburçluga garap geçýäris. Bize mälim bolşy ýaly, dogry başburçlugyň içki burçlary  $108^\circ$ -a deň. Parketiň bir depesine üç dogry başburçluga ýerleşdirmek mümkin däl, çünki munda burçlaryň jemi  $324^\circ < 360^\circ$  bolýar. Eger dogry başburçluklaryň sany 4-e deň ýa-da ondan uly bolsa, onda burçlaryň jemi  $432^\circ > 360^\circ$  bolýar. Şonuň üçin dogry başburçluklardan düzülen parketler ýok. Edil şuna meňzeş parketiň bir depesine üç ýa-da ondan köp bolan dogry ýediburçly, dogry sekizburçly we başga parket bölegini ýerleşdirip bolmaýar, çünki olaryň her bir burçy  $120^\circ$ -dan uly we olaryň jemi  $360^\circ$ -dan uly bolýar. Şu sebäpli dogry ýediburç, dogry sekizburç we başgalardan düzülen parketler bolmaýar.

5-nji suratdaky dogry altyburçlar, kwadratlar we deň taraply üçburçluklardan düzülen parketler 3-nji suratdaky parketlerden ýerleşmegi bilen tapawutlanýar. 6-njy suratda bolsa deň taraply üçburçluklardan we kwadratlardan düzülen parket şekillendirilen. Geltirilen iki parketde-de umumy kanunalaýyklygyň saklanandygyny görmek mümkin, ýagny her depesiniň daşynda ýerleşen şekilleriň içki burçlarynyň jemi  $360^\circ$ -a deňligi öz-özünden aýan. Meselem, 5-nji suratda  $60^\circ + 90^\circ + 90^\circ + 120^\circ = 360^\circ$ , ýagny bir depesiniň daşynda bir deň taraply üçburçluk, 2 kwadrat we bir dogry altyburçluk ýerleşen; 6-njy suratda bolsa bir depäniň daşynda 3 any deň taraply üçburçluk (her bir içki burçy  $60^\circ$ -dan) we 2 kwadrat (her bir içki burçy  $90^\circ$ -dan) ýerleşen.

Tekizligi örtýän dogry parketleriň başga görnüşlerini aşakdaky jedwelde getirýäris. 5–6-njy suratlardaky parketleri gurjak boluň.

$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\alpha_5$	$\alpha_6$	$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots = 360^\circ$
$60^\circ$	$60^\circ$	$60^\circ$	$60^\circ$	$60^\circ$	$60^\circ$	Üçburçluklardan düzülen parket
$60^\circ$	$60^\circ$	$120^\circ$	$120^\circ$			Üçburçluklardan we altyburçluklardan düzülen parket
$60^\circ$	$90^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$			Üçburçlukdan, kwadratlardan we altyburçlukdan düzülen parket
$60^\circ$	$150^\circ$	$150^\circ$				Üçburçlukdan we onikiburçluklardan düzülen parket
$90^\circ$	$90^\circ$	$90^\circ$	$90^\circ$			Kwadratlardan düzülen parket
$120^\circ$	$120^\circ$	$120^\circ$				Altyburçluklardan düzülen parket



### 13–14. 1-NJI BARLAG IŞI. YALŇYŞLAR ÜSTÜNDE IŞLEMEK

1. Gönüburçlugyň perimetri 40 cm-e, taraplarynyň gatnaşygy 3:5-e deň. Şu gönüburçlugyň taraplaryny tapyň.
2. Parallelogramyň taraplaryndan biri ikinjiden 4 esse uly, perimetri bolsa 30 cm-e deň. Parallelogramyň taraplaryny tapyň.
3. Gönüburçly trapesiýanyň ýiti burçy  $45^\circ$ -a, kiçi gapdal tarapy hem-de kiçi esasy 16 cm-e deň. Trapesiýanyň uly esasy tapyň.
4.  $ABCD$  trapesiýada  $AD$  – uly esasy.  $B$  depesi arkaly  $CD$  tarapa parallel we  $AD$  tarapy  $E$  nokatda kesiji göni çyzyk geçirilen,  $BC = 7$  cm,  $AE = 4$  cm. 1) Trapesiýanyň orta çyzygyny; 2)  $ABE$  üçburçlugyň perimetri 17 cm bolsa, şu trapesiýanyň perimetrini tapyň.

#### 1-nji test

#### Özüňizi synap görüň!

1. Güberçek dörtburçlugyň burçlaryndan biri göni burç, galanlary bolsa özara 3:4:8 gatnaşykda. Dörtburçlugyň kiçi burçuny tapyň.  
A)  $72^\circ$ ;                      B)  $54^\circ$ ;                      D)  $144^\circ$ ;                      E)  $90^\circ$ .
2. Her bir içki burçy  $156^\circ$  bolan güberçek köpburçlugyň näçe tarapy bar?  
A) 10;                      B) 15;                      D) 12;                      E) 8.
3.  $ABCD$  parallelogramyň perimetri 32 cm-e,  $BD$  diagonalyny 9 cm-e deň.  $ABD$  üçburçlugyň perimetrini tapyň.  
A) 16 cm;                      B) 25 cm;                      D) 23 cm;                      E) 41 cm.
4. Iki burçunyň jemi  $100^\circ$ -a deň bolan parallelogramyň uly burçuny tapyň.  
A)  $120^\circ$ ;                      B)  $110^\circ$ ;                      D)  $150^\circ$ ;                      E)  $130^\circ$ .
5. Rombuň burçlaryndan biri  $150^\circ$ -a deň, kiçi diagonalyny bolsa 4,5 cm. Rombuň perimetrini tapyň.  
A) 27 cm;                      B) 18 cm;                      D) 13 cm;                      E) 21,5 cm.
6.  $ABCD$  trapesiýanyň orta çyzygy ony orta çyzyklary 13 cm we 17 cm-e deň bolan iki trapesiýa bölýär. Trapesiýanyň uly esasy tapyň.  
A) 19 cm;                      B) 21 cm;                      D) 18 cm;                      E) 30 cm.
7. Üçburçlugyň orta çyzygy onuň esasyndan 5,4 cm gysga. Üçburçlugyň orta çyzygy bilen esasyň jemini tapyň.  
A) 13,5 cm;                      B) 16,2 cm;                      D) 10,8 cm;                      E) 21,6 cm.
8. Deňýanly trapesiýanyň perimetri 36 cm, orta çyzygy 10 cm. Gapdal tarapyň uzynlygyny tapyň.  
A) 10 cm;                      B) 8 cm;                      D) 12 cm;                      E) 13 cm.
9. Trapesiýanyň orta çyzygy 9 cm, esaslaryndan biri ikinjiden 6 cm gysga. Trapesiýanyň uly esasy tapyň.  
A) 15 cm;                      B) 18 cm;                      D) 12 cm;                      E) 10 cm.

**Iñlis dilini öwrenýäris!**



**Köpburçluk** – polygon  
**Gönüburçluk** – rectangle  
**Romb** – rhombus  
**Kwadrat** – square  
**Beýiklik** – height

**Perimetr** – perimeter  
**Diagonal** – diagonal  
**Parallelogram** – parallelogramm  
**Trapesiýa** – trapezoid  
**Burç** – angle



**Taryhy maglumatl a r**



**Abu Reýhan Biruny**  
(973–1048)

Gadymda Músür we Mesopotamiýa matematikasynda dörtburçluklaryň aşakdaky görnüşleri duşýar: kwadratlar, gönüburçluklar, gönüburçly we deňýanly trapesiýalar. Orta aziýaly alymlardan **Abu Reýhan Biruny** hem dörtburçluklaryň görnüşleri boýunça ençeme gözlegleri alyp barypdyr. Ol özüniň «Astronomiýa sungatyndan başlangyç maglumat berýän kitap» atly eserinde «Dörtburçluklaryň görnüşi nähili?» diýip sorag goýýar we aňa aşakdaky ýaly jogap berýär:

«Olardan **birinjisi** – **kwadrat**, onuň ähli taraplary deň, ähli burçlary göni, diagonallary, ýagny garşylykly burçlaryny (depelerini) utgaşdyrn çyzyklary özara deň.

**Ikinji** – **gönüburçluk**, ol kwadrata garanda uzynrak, ähli burçlary göni, dürli taraplary dürlüçe, onuň diňe garşylykly taraplary we diagonallary deň.

**Üçünjisi** – **romb**, onuň dört tarapy deň, emma diagonallary dürlüçe, burçlary bolsa göni burç däl.

**Dördünjisi** – **romboid**, onuň diagonallary dürlüçe, diňe garşylykly taraplary iki-ikiden deň.

*Bu şekillerden tapawutly dörtburçluklara **trapesiýalar** diýilýär».*

**Kwadrat** latynça söz bolup, «dört burçly» diýen manyny aňladýar. Biruny arapça «*murabba*» adalgasyny ulanypdyr, latynça ynha şu adalga terjime edilipdir. Gönüburçluk arap dilinde «*mustatil*» – «süýri» diýen manyny aňladýar.

**Romb** adalgasynyň emele gelşi dürlüçe düşündirilýär. Ol grekçe söz bolup, romb «*aýlanýan jisim*», «*wolçok*» manysyny berýär. Geometriýa bu adalga aýlanýan kesiminiň romba meňzeşligi sebäpli girizilipdir. Arapçada «*romb*» üçin «*muayýan*» adalgasy alnan.

**Trapesiýa** grekçe söz bolup, terjimesi «*stoljyga*» (nahar iýilýän stol) dogry gelýär, sözlük manysy – dört ayakly. Hakykatdan hem, grekçe «*trapedzion*» sözi «*stoljyk*», «*iýmit stoly*» diýen manyny aňladýar.

Birunynyň eserlerinde «*trapesiýa*» – «*muharrif*» diýlip atlandyrylyp, bu adalga grekçe «*trapedzion*» sözüniň arap dilindäki terjimesidir.

## II BAP GÖNÜBURÇLY ÜÇBURÇLUGYŇ TARAPLARY- NYŇ WE BURÇLARYNYŇ ARA- SYNDAKY GATNAŞYKLAR

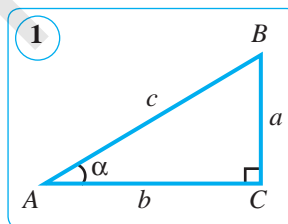
3- §.

ÝITI BURÇUŇ TRIGONOMETRIK  
FUNKSIÝALARY

### 15. ÝITI BURÇUŇ SINUSY, KOSINUSY, TANGENSI WE KOTANGENSI

**Trigonometriya** matematikanyň bölümi bolup, üçburçlugyň taraplary bilen burçlarynyň arasyndaky baglanyşyklar, trigonometrik funksiýalaryň häsiýetleri we olaryň arasyndaky gatnaşyklary öwrenýär. «**Trigonometriya**» sözi grekçe «**trigon**» – üçburçluk we «**metrezis**» – ölçemek diýen sözlerden alnan bolup, türkmen dilinde «**üçburçluklary ölçemek**» diýen manyny aňladýar.

Trigonometriýanyň esasy wezipesi *üçburçluklary çözmekden* ybaratdyr. Üçburçluk geometriýanyň iň möhüm şekillerinden biri hasaplanýar. Şonuň üçin üçburçluklary öwrenmegi dowam etdirýäris. Babyň esasy maksady üçburçluklaryň käbir elementini (taraplaryny we burçlaryny) başga elementleri arkaly aňlatmaktan ybarat.



Katetleri  $BC = a$  we  $AC = b$ , gipotenuzasy  $AB = c$  we ýiti burçy  $\angle A = \alpha$  bolan gönüburçly ( $\angle C = 90^\circ$ )  $ABC$  üçburçluk berlen bolsun (1-nji surat).

Şu üçburçlugyň jübüt-jübütden taraplarynyň gatnaşygyny alalyň:

$\frac{a}{c}$  –  $\alpha$  burçuň garşysyndaky katetiň gipotenuza gatnaşygy;

$\frac{b}{c}$  –  $\alpha$  burça seplesýän katetiň gipotenuza gatnaşygy;

$\frac{a}{b}$  –  $\alpha$  burçuň garşysyndaky katetiň şu burça seplesýän katete gatnaşygy;

$\frac{b}{a}$  –  $\alpha$  burça seplesýän katetiň şu burçuň garşysyndaky katete gatnaşygy;

$\frac{c}{b}$  – gipotenuzanyň  $\alpha$  burça seplesýän katete gatnaşygy;

$\frac{c}{a}$  – gipotenuzanyň  $\alpha$  burçuň garşysyndaky katete gatnaşygy.

Şeýlelikde, jemi 6 gatnaşygy aldyk.

Edil şuna meňzeş, ikinji ýiti burç ( $B$ ) üçin hem şu tertipde gatnaşyklary düzüp bileris.

Bu gatnaşyklardan ilkinji dördüsi *ýörite atlar* bilen atlandyrylýar.

**1-nji kesgitleme.** Gönüburçly üçburçlugyň ýiti burçunyň **sinusy** diýip, şu burçuň garşysyndaky katetiň gipotenuza gatnaşygyna aýdylýar.

$\alpha$  burçuň sinusy  **$\sin\alpha$**  ýaly belgilenýär we «*sinus alfa*» diýlip okalýar.

Kesgitlemä görä:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}.$$

**2-nji kesgitleme.** Gönüburçly üçburçlugyň ýiti burçunyň **kosinusy** diýip, şu burça seplesýän katetiň gipotenuza gatnaşygyna aýdylýar.

$\alpha$  burçuň kosinusy  **$\cos\alpha$**  ýaly belgilenýär we «*kosinus alfa*» diýlip okalýar. Kesgitlemä görä:

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}.$$

**3-nji kesgitleme.** Gönüburçly üçburçlugyň ýiti burçunyň **tangensi** diýip, şu burçuň garşysyndaky katetiň burça seplesýän katete gatnaşygyna aýdylýar.

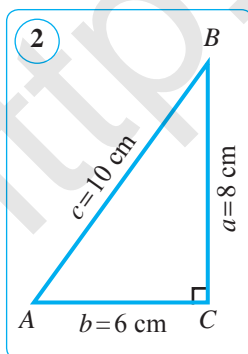
$\alpha$  burçuň tangensi  **$\operatorname{tg}\alpha$**  ýaly belgilenýär we «*tangens alfa*» diýlip okalýar. Kesgitlemä görä:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}.$$

**4-nji kesgitleme.** Gönüburçly üçburçlugyň ýiti burçunyň **kotangensi** diýip, şu burça seplesýän katetiň garşysyndaky katete gatnaşygyna aýdylýar.

$\alpha$  burçuň kotangensi  **$\operatorname{ctg}\alpha$**  ýaly belgilenýär we «*kotangens alfa*» diýlip okalýar. Kesgitlemä görä:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}.$$



Gönüburçly üçburçlukda katet gipotenuzadan kiçi bolany üçin **ýiti burçuň sinusy we kosinusy birden kiçi** bolýar.

Gönüburçly üçburçlukda katetler özara deň, biri ikinjiden uly ýa-da kiçi bolmagy mümkin. Şonuň üçin tangensiň we kotangensiň bahalary **1-den kiçi, 1-e deň** hem-de **1-den uly** bolmagy mümkin.

**Mesele.**  $ABC$  üçburçlukda  $\angle C = 90^\circ$ ,  $AB = 10$  cm,  $BC = 8$  cm,  $AC = 6$  cm (2-nji surat).  $A$  burçuň trigonometrik funksiýalarynyň bahalaryny tapyň.

Çözülüşi. Kesgitlemä görä:

$$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{8}{10} = 0,8; \quad \operatorname{tg} A = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3};$$

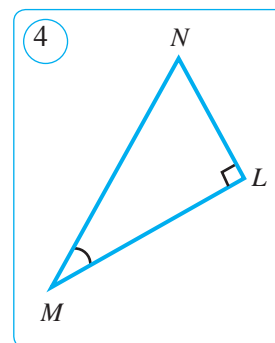
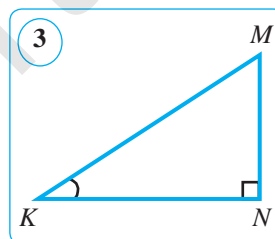
$$\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{6}{10} = 0,6; \quad \operatorname{ctg} A = \frac{3}{4} = 0,75;$$

Jogaby:  $\sin A = 0,8$ ;  $\cos A = 0,6$ ;  $\operatorname{tg} A = 1\frac{1}{3}$ ;  $\operatorname{ctg} A = 0,75$ .



### Soraglar, meseleler we ýumuşlar

- 1) Gönüburçly üçburçlugyň taraplaryndan nähili gatnaşyklary düzmek mümkin we olar nähili okalýar?
- 2) Gönüburçly üçburçlukda ýiti burçuň sinusy, kosinusy, tangensi we kotangensi diýip nämä aýdylýar we olar nähili belgilenýär?
2. Her bir drob kesgitlemä görä  $K$  burçuň haýsy trigonometrik funksiýasyny aňladýar (3-nji surat): a)  $\frac{KN}{KM}$ ; b)  $\frac{MN}{KN}$ ; d)  $\frac{MN}{KM}$ ; e)  $\frac{KN}{MN}$ ?
3.  $\angle ABC$  da  $\angle C = 90^\circ$ ,  $AB = 6$  cm,  $BC = 5$  cm,  $AC = \sqrt{11}$  cm (1-nji surata g.).  $A$  we  $B$  burçlaryň sinusynyň, kosinusynyň, tangensiniň we kotangensleriniň bahalaryny tapyň.
4. Gönüburçly üçburçlukda ýiti burçuň sinusy: a) 0,98; b)  $\sqrt{2}$ ; d)  $\sqrt{5} - 2$  -ä deň bolmagy mümkinmi?
5. Gönüburçly  $MNL$  üçburçlukda  $\sin N = \frac{24}{25}$  -e deň. Bu deňlikden üçburçlugyň haýsy taraplaryny tapmak mümkin (4-nji surat)?
6.  $MNL$  üçburçlukda  $\angle L = 90^\circ$ ,  $MN = 13$  cm,  $ML = 12$  cm,  $NL = 5$  cm (4-nji surat).  $M$  burçuň sinusynyň, kosinusynyň, tangensiniň we kotangensiniň bahalaryny tapyň.
7.  $ABC$  üçburçlukda  $\angle C = 90^\circ$ ,  $AB = 17$  cm,  $BC = 8$  cm,  $AC = 15$  cm.  $A$  we  $B$  burçlaryň sinusynyň, kosinusynyň, tangensiniň we kotangensiniň bahalaryny tapyň.



### Şuny bilmek peýdaly!



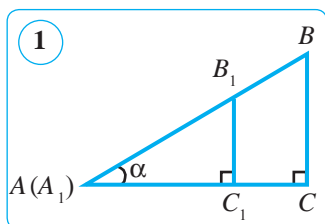
- «**Sinus**» adalgasy latyn dilinden alnan bolup, «egilmek» diýen manyny aňladýar.
- «**Tangens**» adalgasy latyn dilinden terjime edilende «galtaşma» diýen manyny aňladýar.
- «**Kosinus**» we «**kotangens**» adalgalary «complementi sinus» we «complementi tangens» – «dolduryjy sinus» we «dolduryjy tangens» adalgalarynyň gysgaltmalarýndan ybaratdyr.

## 16. ÝITI BURÇUŇ SINUSY, KOSINUSY, TANGENSI WE KOTANGENSI (DOWAMY)

### 1. Ýiti burçuň trigonometrik funksiýalary.

Gönüburçly üçburçlukda ýiti burçuň sinusynyň, kosinusynyň, tangensiniň we kotangensiniň bahalary diňe ýiti burçuň ululygyna baglylygy we gönüburçly üçburçlugyň saýlanmagyna bagly dälligini görkezýäris.

Gönüburçly  $ABC$  we  $A_1B_1C_1$  üçburçluklarda ( $\angle C = \angle C_1 = 90^\circ$ )  $\angle A = \angle A_1$  bolsun (1-nji surat).



Proporsiyanyň esasy häsiýetine görä:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{B_1C_1}{A_1B_1}, \quad \frac{AC}{AB} = \frac{A_1C_1}{A_1B_1}, \quad \frac{BC}{AC} = \frac{B_1C_1}{A_1C_1}, \quad \frac{AC}{BC} = \frac{A_1C_1}{B_1C_1}.$$

Bu deňlikleriň çep we sag bölekleri deňişlilikde  $A$  we  $A_1$  ýiti burçlaryň sinuslaryna, kosinuslaryna, tangenslerine we kotangenslerine deň. Diýmek,

$$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{B_1C_1}{A_1B_1} = \sin A_1, \quad \operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC} = \frac{B_1C_1}{A_1C_1} = \operatorname{tg} A_1,$$

$$\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{A_1C_1}{A_1B_1} = \cos A_1, \quad \operatorname{ctg} A = \frac{AC}{BC} = \frac{A_1C_1}{B_1C_1} = \operatorname{ctg} A_1.$$

Şulardan görnüşi ýaly,  $A$  ýiti burçuň sinusy, kosinusy, tangensi we kotangensi üçburçlugyň saýlanmagyna bagly däl. Eger ýiti burçuň bahasy üýtgeşe, bu gatnaşyklar, hökman, üýtgeýär.

Şeýlelikde, **ýiti burçuň sinusy, kosinusy, tangensi we kotangensi diňe ýiti burçuň ululygyna bagly.**

Sinusa, kosinusa, tangense we kotangense **ýiti burçuň trigonometrik funksiýalary** diýilýär.

Ýokarda getirilen deňliklerden aşakdaky möhüm netijä gelmek mümkin:

**eger  $A$  we  $A_1$  ýiti burçlar üçin trigonometrik funksiýalardan käbiri deň bolsa, onda  $A$  we  $A_1$  ýiti burçlar deň ( $\angle A = \angle A_1$ ) bolýar.**

Başgaça aýdanda, **trigonometrik funksiýanyň her bir bahasyna ýeke-täk ýiti burç laýyk gelýär.**

### 2. Tangensiň we kotangensiň sinuslar we kosinuslar arkaly aňladylyşy.

Sinusyň we kosinusyň kesgitlemelerinden aşakdaky deňlikler gelip çykýar (15-nji tema g.):

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha, \quad \text{ýagny } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \quad (1)$$

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{b}{c} : \frac{a}{c} = \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} = \frac{b}{a} = \operatorname{ctg} \alpha, \quad \text{ýagny } \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}. \quad (2)$$

Şeylelikde, ýiti burçuň tangensi we kotangensi sinus we kosinus arkaly aşakdaky ýaly kesgitlenýär.

*Ýiti burç sinusynyň kosinusyna gatnaşygyna şu burçuň **tangensi** diýilýär.  
Ýiti burç kosinusynyň sinusyna gatnaşygyna şu burçuň **kotangensi** diýilýär.*

(1) we (2) deňlikleri agzama-agza köpeldip, aşakdaky deňligi alarys:

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1. \quad (3)$$

Diýmek,  $\alpha$  ýiti burçuň tangensiniň we kotangensiniň köpeltmek hasyly **1-e deň**.

Mundan,  $\alpha$  ýiti burçuň tangensi we kotangensi özara ters funksiýalardygy gelip çykýar.

Şeylelikde, biz  $\alpha$  ýiti burç üçin üç täze **deňligi (toždestwony)** getirip çykardyk.

### 3. Gönüburçly üçburçlugyň taraplary bilen burçlarynyň arasyndaky gatnaşyklar.

Trigonometrik funksiýalaryň kesgitlemelerinden aşakdaky düzgünler gelip çykýar.

**1-nji düzgün.**  $\alpha$  burçuň garşysyndaky katet gipotenuza bilen  $\alpha$  burçuň sinusynyň köpeltmek hasylyna deň:

$$a = c \sin \alpha.$$

**2-nji düzgün.**  $\alpha$  burçuň garşysyndaky katet ikinji katet bilen  $\alpha$  burçuň tangensiniň köpeltmek hasylyna deň:

$$a = b \operatorname{tg}\alpha.$$

**3-nji düzgün.**  $\alpha$  burça seplesýän katet gipotenuza bilen  $\alpha$  burç kosinusynyň köpeltmek hasylyna deň:

$$b = c \cos \alpha.$$

**4-nji düzgün.**  $\alpha$  burça seplesýän katet garşysyndaky katetiň  $\alpha$  burçuň tangensine gatnaşygyna deň:

$$b = \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

**5-nji düzgün.** Gipotenuza  $\alpha$  ýiti burçuň garşysyndaky katetiň  $\alpha$  burçuň sinusyna gatnaşygyna deň:

$$c = \frac{a}{\sin \alpha}.$$

**6-nji düzgün.** Gipotenuza  $\alpha$  ýiti burça seplesýän katetiň  $\alpha$  burçuň kosinusyna gatnaşygyna deň:

$$c = \frac{b}{\cos \alpha}.$$

**Mesele.**  $ABC$  üçburçlukda  $C$  burç  $90^\circ$ -a deň. Eger:

- 1)  $AB=18$  cm we  $\sin A = \frac{1}{3}$  bolsa,  $BC$  kateti; 2)  $AC=15$  cm we  $\cos A = \frac{5}{6}$  bolsa,  $AB$  gipotenuzany; 3)  $BC=26$  cm we  $\operatorname{tg}A = \frac{13}{15}$  bolsa,  $AC$  kateti hasaplaň.

**Çözülişi.** 1) 1-nji düzgünden peýdalanyň,  $BC$  kateti tapýarys:

$$BC = AB \sin A = 18 \cdot \frac{1}{3} = 6 \text{ (cm)}.$$

*Jogaby:* 6 cm.

2) 6-njy düzgünden peýdalanyň,  $AB$  gipotenuzani tapýarys:

$$AB = \frac{AC}{\cos A} = 15 : \frac{5}{6} = 15 \cdot \frac{6}{5} = 3 \cdot 6 = 18 \text{ (cm)}. \text{ *Jogaby:* 18 cm.}$$

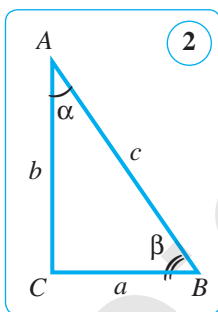
3) 4-nji düzgünden peýdalanyň,  $AC$  kateti tapýarys:

$$AC = \frac{BC}{\operatorname{tg}A} = 26 : \frac{13}{15} = 26 \cdot \frac{15}{13} = 2 \cdot 15 = 30 \text{ (cm)}. \text{ *Jogaby:* 30 cm.}$$



### Soraglar, meseleler we ýumuşlar

- 1) Ýiti burçuň trigonometrik funksiýalary diýip nämä aýdylýar?
- 2) Ýiti burçuň sinusynyň, kosinusynyň, tangensiniň we kotangensiniň ululyklary nämä bagly?
2. Aşakda berlen deňliklerden haýsy biriniň dogry bolýandygyny anyklaň (2-nji surat). Jogabyňyzy esaslandyryň.



a)  $c = \frac{a}{\sin \alpha}$ ; b)  $b = c \sin \alpha$ ; d)  $c = a \operatorname{tg} \alpha$ ; e)  $a = \frac{b}{\operatorname{ctg} \alpha}$ .

3. Gönüburçly üçburçluk ýiti burçunyň tangensi  $\sqrt{2}$ ; 0,001 we 100-e deň bolmagy mümkinmi? Jogabyňyzy esaslandyryň.

4.  $ABC$  üçburçlukda  $C$  burç  $90^\circ$ -a deň. Eger:

- 1)  $BC=10$  cm we  $\operatorname{tg}A = \frac{5}{8}$  bolsa,  $AC$  kateti; 2)  $BC=8$  cm we  $\sin A=0,16$  bolsa,  $AB$  gipotenuzany hasaplaň.

5. Gönüburçly üçburçlugyň taraplary bilen burçlary arasyndaky 6 gatnaşygy  $\beta$  burç üçin getirip çykaryň (2-nji surat).

6.  $ABC$  üçburçlukda  $C$  burç  $90^\circ$ -a deň. Eger  $BC=4$  cm we  $\sin A=0,25$  bolsa,  $AB$  gipotenuzany hasaplaň.

7.  $ABC$  üçburçlukda  $C$  burç  $90^\circ$ -a deň. Eger  $AC=2$  cm we  $\cos A=0,4$  bolsa,  $AB$  gipotenuzany hasaplaň.

8.  $ABC$  üçburçlukda  $C$  burç  $90^\circ$ -a deň. Eger  $BC=14$  cm we  $\cos B = \frac{7}{25}$  bolsa,  $AB$  gipotenuzany hasaplaň.



4- §.

PIFAGORYŇ TEOREMASY WE ONUŇ ULANYLYŞY

17. PIFAGORYŇ TEOREMASY WE ONUŇ DÜRLI SUBUTLARY

1. Pifagoryň teoreması – geometriýanyň möhüm teoremasıdyr.

Beýik grek matematigi **Pifagoryň** durmuşy barada maglumatlar gaty az. Pifagoryň mekdebi şekilleri tapawutlandyrmak we göni çyzykly şekilleri deňdeş şekillere çalşyrmagyň geometrik usulyndan teoremalary subut edende we meseleler çözende peýdalanandygy diňe grek matematikleriniň eserlerinden mälüm. Hususan-da, geometriýanyň ylym hökmünde döremegine Pifagor we onuň mekdebi uly goşant goşupdyr. Aşakda getirilýän teorema Pifagoryň ady bilen aýdylýar.

**Teorema.**

*(Pifagoryň teoreması.)* Gönüburçly üçburçlugyň gipotenuzasynyň kwadraty onuň katetleriniň kwadratlarynyň jemine deň.

Bu teorema gönüburçly üçburçluga degişli bolup, üçburçlugyň taraplaryna deň kwadratlaryň meýdanlarynyň arasyndaky gatnaşygy görkezýär. Pifagor bu teoremanyň nazary subudyny getiripdir. Pifagoryň teoreması bilen anyklanan geometrik gatnaşygyň hususy hallary Pifagordan öň hem dürli halklara mälüm bolupdyr, emma teoremanyň umumy şekili Pifagoryň mekdebi tarapyndan döredilipdir.

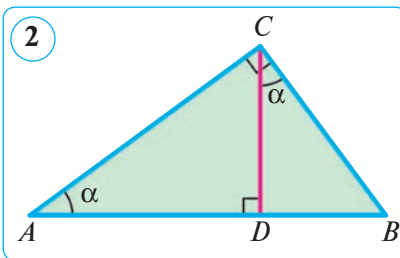
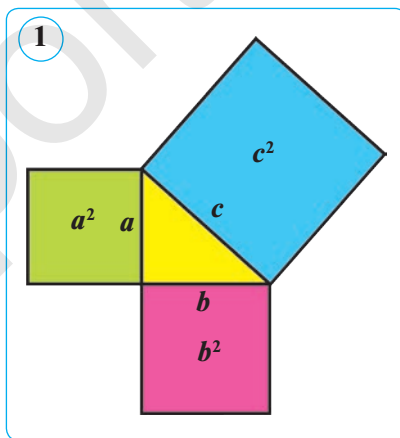
Katetleri  $a$  we  $b$ , gipotenuzasy  $c$  bolan gönüburçly  $ABC$  üçburçluk berlen bolsun, onda Pifagoryň teoreması

$$c^2 = a^2 + b^2, \quad (1)$$

formula bilen aňladylýar, munda  $a^2$ ,  $b^2$ ,  $c^2$  – taraplary  $a$ ,  $b$ ,  $c$  bolan kwadratlaryň meýdanlaryna deň. Şonuň üçin bu deňlik **tarapy gipotenuzanyň uzynlygyna deň kwadratyň meýdany taraplarynyň katetlere deň kwadratlaryň meýdanlarynyň jemine deň** bolýandygyny görkezýär (1-nji surat).

2. Pifagoryň teoremasynyň ýiti burçuň kosinusy arkaly subut edilişi.

*Subudy.*  $ABC$  – berlen gönüburçly üçburçluk bolup, onuň  $C$  burçy göni burç bolsun. Gönüburçly üçburçlugyň  $C$  depesinden  $CD$  beýikligi geçirýäris (2-nji surat).



Gönüburçly  $ACD$  we  $ABC$  üçburçluklardan burçuň kosinusynyň kesgitlemesine görä:

$$\cos A = \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}.$$

Mundan  $AD \cdot AB = AC^2$  (2).

Gönüburçly  $BCD$  we  $ABC$  üçburçluklardan burçuň kosinusynyň kesgitlemesine görä:

$$\cos B = \frac{BD}{BC} = \frac{BC}{AB}.$$

Mundan  $BD \cdot AB = BC^2$  (3).

Emele gelen (2) we (3) deňlikleri agzama-agza goşup we  $AD + DB = AB$  bolýandygyny hasaba alyp,

$$AC^2 + BC^2 = AB \cdot D + BD \cdot AB = AB \cdot (AD + BD) \cdot AB = AB^2$$

deňligi alarys. Teorema subut edildi.

Gönüburçly  $ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ) üçburçlugyň taraplaryny degişlilikde  $a = BC$ ,  $b = AC$ ,  $c = AB$  diýip belgiläp, Pifagoryň formulasyny alarys:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

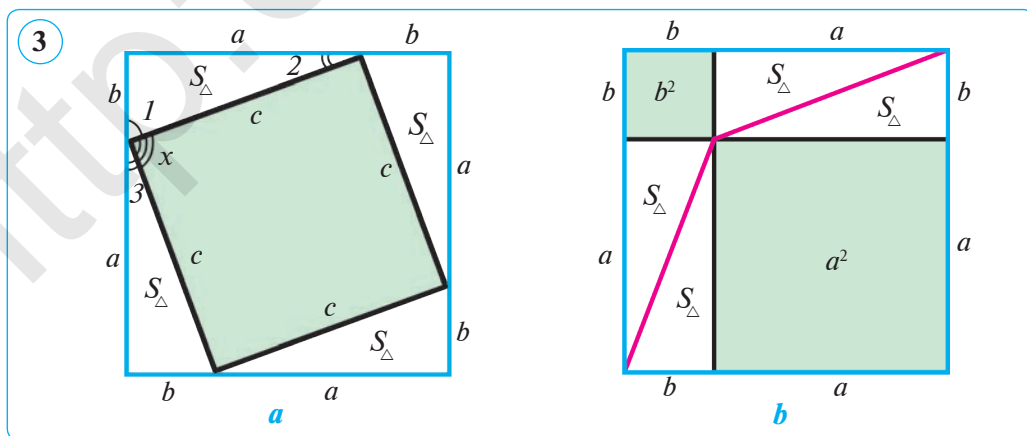
### 3. Pifagoryň teoremasynyň meýdanlar arkaly subut edilişi.

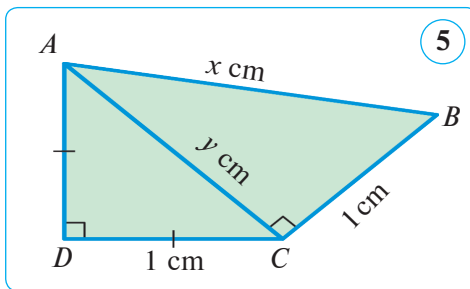
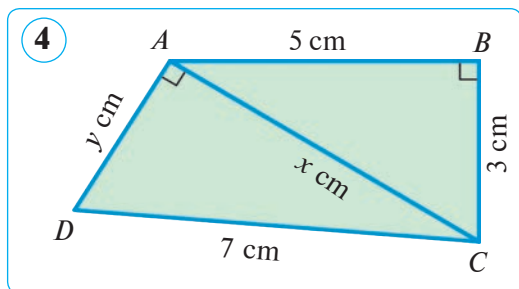
Katetleri  $a$ ,  $b$  we gipotenuzasy  $c$ -ge deň bolan gönüburçly üçburçluk berlen. Bu üçburçluk üçin Pifagoryň teoremasy ýerlikli bolýandygyny subut edýäris, ýagny

$$a^2 + b^2 = c^2$$

bolýandygyny görkezýäris.

*Subudy.* Tarapy  $(a+b)$ -ge deň bolan iki kwadrat gurýarys. Olary 3-nji suratda görkezilen usul bilen gönüburçly üçburçluklara, kwadratlara we gönüburçluklara bölüp çykýarys. 3-nji  $a$  suratdaky dörtburçlugyň tarapy  $c$  bolan kwadrat bolýandygyny görkezýäris. Hakykatdan hem, ilki bilen bu dörtburçluk romb, çünki onuň tarapy katetleri  $a$  we  $b$  bolan gönüburçly üçburçlugyň





gipotenuzasy  $c$ -ge deň. Indi çyzgydaky  $x$  burçuň gönüdigini görkezýäris. Hakykatdan hem,  $\angle x + \angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$ ,  $\angle 3 = \angle 2$  (çünki üçburçluklar deň) we  $\angle 1 = 90^\circ - \angle 2$  bolýandygyny hasaba alyp tapýarys:  $\angle x = 90^\circ$ . Şonuň üçin bu dörtburçlugyň burçlaryndan biri  $90^\circ$ -a deň bolan romb, ýagny kwadrat bolýar. Garalýan iki uly kwadrat deňdeş, ýagny olaryň meýdanlary deň. Şonuň ýalyda, birinji kwadratyň meýdany  $4S_{\Delta} + c^2$ -a, ikinji kwadratyň meýdany bolsa  $4S_{\Delta} + a^2 + b^2$ -a deň (3-nji  $b$  surat). Şonuň üçin

$$4S_{\Delta} + c^2 = 4S_{\Delta} + a^2 + b^2. \quad \text{Diýmek, } c^2 = a^2 + b^2. \text{ Teorema subut edildi.}$$

**Mesele.** 4-nji suratdaky näbelli kesimleriň uzynlygyny tapyň.

**Çözülişi.** 1)  $\triangle ABC$  – gönüburçly,  $\angle B = 90^\circ$  (4-nji surat). Pifagoryň teoremasyna görä:  $x^2 = 5^2 + 3^2$ , mundan  $x^2 = 34 \Rightarrow x = \sqrt{34}$  ( $x > 0$ ).

2)  $\triangle ACD$  – gönüburçly,  $\angle CAD = 90^\circ$  (4-nji surat). Pifagoryň teoremasyna görä,  $y^2 + (\sqrt{34})^2 = 7^2$ , mundan  $y^2 + 34 = 49$ ,  $y^2 = 15$ ,  $y = \sqrt{15}$  ( $y > 0$ ).

**Jogaby:**  $x = \sqrt{34}$  cm;  $y = \sqrt{15}$  cm.



### Soraglar, meseleler we ýumuşlar

- 1) Pifagoryň teoremasynyň nähili subutlaryny bilýärsiňiz?
- 2) «Gipotenuzanyň kwadraty», «katetiň kwadraty» diýen jümleleri nähili düşüňärsiňiz?
2. Gönüburçly üçburçlugyň  $a$  we  $b$  katetleri berlen. Eger: 1)  $a=5$ ,  $b=12$ ; 2)  $a=4\sqrt{2}$ ,  $b=7$ ; 3)  $a=0,7$ ,  $b=2,4$ ; 4)  $a=5$ ,  $b=6$ ; 5)  $a=\frac{5}{13}$ ,  $b=\frac{12}{13}$  bolsa,  $c$  gipotenuzany tapyň.
3. Rombuň diagonallary: 1) 12 cm we 16 cm; 2) 14 cm we 48 cm. Rombuň perimetrini tapyň.
4. Näbelli kesimleriň uzynlygyny tapyň (5-nji surat).
5. Gönüburçly üçburçlukda  $a$  we  $b$  – katetler,  $c$  – gipotenuza. Eger: 1)  $a=1,2$ ,  $c=1,3$ ; 2)  $a=7$ ,  $c=9$ ; 3)  $a=1,5$ ,  $c=1,7$ ; 4)  $a=2$ ,  $c=2,5$  bolsa,  $b$  kateti tapyň.
6. Gönüburçlugyň taraplary: 1) 2,4 dm we 7 cm; 2) 50 cm we 12 dm; 3) 8 dm we 1,5 m. Onuň diagonalyny tapyň.

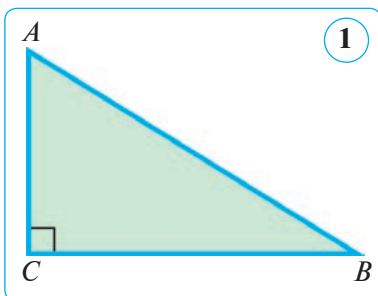
## 18. PIFAGORYŇ TEOREMASYNA TERS TEOREMA

### 1. Pifagoryň teoremasynyň käbir netijeleri.

Pifagoryň teoremasynyň netijeleriniň içinden biriniň subudyny getirýäris.

**Netije. Gönüburçly üçburçlugyň islendik kateti gipotenuzadan kiçidir.**

*Subudy.*  $\triangle ABC$  – gönüburçly,  $\angle C = 90^\circ$  (1-nji surat). Üçburçlugyň islendik kateti gipotenuzadan kiçi bolýandygyny subut edýäris.



Hakykatdan hem, Pifagoryň teoremasyna görä katetler üçin:

$$AC^2 = AB^2 - BC^2 \text{ we } BC^2 = AB^2 - AC^2$$

gatnaşyklar ýerlikli. Mundan

$$AC^2 < AB^2 \text{ we } BC^2 < AB^2$$

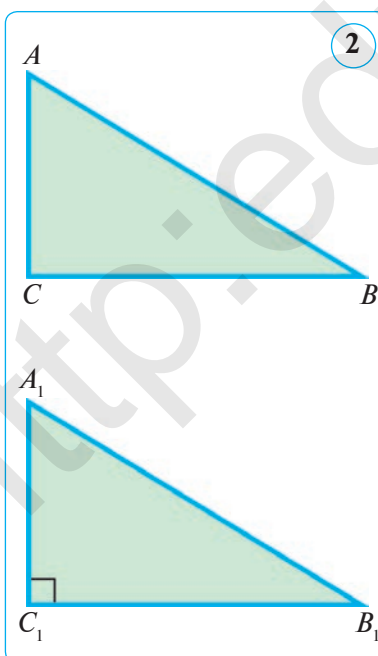
bolýandygy gelip çykýar.

Diýmek,  $AC < AB$  we  $BC < AB$ . Netije subut edildi.

### 2. Pifagoryň teoremasyna ters teorema.

**Teorema.**

Eger üçburçlugyň taraplaryndan biriniň kwadraty onuň galan iki tarapynyň kwadratlarynyň jemine deň bolsa, onda üçburçluk gönüburçly bolýar.



*Subudy.*  $\triangle ABC$ -da  $AB^2 = AC^2 + BC^2$  bolsun.  $\angle C = 90^\circ$  -dygyny subut edýäris (2-nji surat).

$C_1$  burçy göni bolan gönüburçly  $A_1B_1C_1$  üçburçluga garap geçýäris, onda  $A_1C_1 = AC$  we  $B_1C_1 = BC$ . Pifagoryň teoremasyna görä,  $A_1B_1^2 = A_1C_1^2 + B_1C_1^2$  we diýmek,

$$A_1B_1^2 = AC^2 + BC^2.$$

Teoremanyň şertine görä,

$$AB^2 = AC^2 + BC^2, \text{ diýmek, } A_1B_1^2 = AB^2.$$

Mundan  $A_1B_1 = AB$  ekenligini tapýarys. Şeýdip,  $ABC$  we  $A_1B_1C_1$  üçburçluklar üç tarapy-na görä deň. Şonuň üçin  $\angle C = \angle C_1$ , ýagny  $ABC$  üçburçlugyň  $C$  depesindäki burçuň göni burçdugy gelip çykýar.

Teorema subut edildi.

- 1-nji mesele.** Eger üçburçlugyň taraplary: 1)  $a=5$ ,  $b=11$ ,  $c=12$ ;  
2)  $a = \sqrt{85}$ ,  $b=7$ ,  $c=6$  bolsa, ol gönüburçly üçburçluk bolarmy?

*Çözülişi.* 1) Iki kiçi tarapynyň kwadratlarynyň jemini hasaplaýarys:

$$5^2 + 11^2 = 25 + 121 = 146.$$

Indi uly tarapynyň kwadratyny hasaplaýarys:  $12^2 = 144$ .

Alnan netijeleri deňeşdirsek,  $a^2 + b^2 \neq c^2$  gatnaşyk gelip çykýar. Diýmek, üçburçluk gönüburçly däl.

*Jogaby:*  $a=5$ ,  $b=11$  we  $c=12$  bolanda üçburçluk gönüburçly bolmaýar.

- 2) Iki kiçi tarapynyň kwadratlarynyň jemini hasaplaýarys:

$$7^2 + 6^2 = 49 + 36 = 85.$$

Indi uly tarapynyň kwadratyny hasaplaýarys:  $(\sqrt{85})^2 = 85$ .

Diýmek,  $85 = 85$  – ýerlikli. Netijede  $b^2 + c^2 = a^2$ -a eýe bolarys. Mundan üçburçlugyň gönüburçlydygy gelip çykýar.

*Jogaby:*  $a = \sqrt{85}$ ,  $b=7$  we  $c=6$  bolanda üçburçluk gönüburçly bolýar.

### 3. Perpendikulýar we gyşarma.

$l$  – göni çyzyk we onda ýatmaýan  $A$  nokat berlen bolsun. Kesgitlemä görä,  $A$ -dan  $l$  göni çyzyga çenli iň gysga aralyk  $A$ -dan  $l$ -e geçirilen  $AC$  **perpendikulýaryň** uzynlygyna deň bolýar (3-nji surat).

Hakykatdan hem, her bir  $B \in l$  üçin  $ACB$  üçburçluk – gönüburçly, munda  $AC$  we  $CB$  – katetler,  $AB$  bolsa gipotenuza bolýar.  $CB$  kesime  $AB$  gyşarmanyň  $l$  göni çyzykdaky **projeksiýasy** diýilýär.

Pifagoryň teoremasy  $AB$  – gyşarma,  $AC$  – perpendikulýar we  $CB$  – projeksiýasynyň uzynlyklaryny aşakdaky deňlik bilen baglaýar:

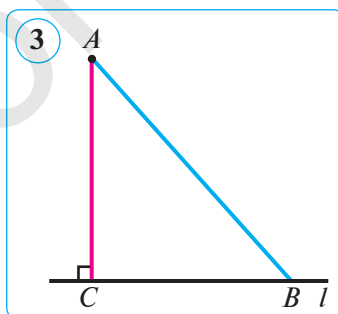
$$AB^2 = AC^2 + CB^2.$$

Şonuň üçin, *hemişe*  $AB > AC$  ýa-da  $AB > BC$ , başgaça aýdanda, *bir nokatdan geçirilen perpendikulýaryň we gyşarmanyň projeksiýasy gyşarmadan kiçi bolýar.*

Şonuň ýaly-da, *deň gyşarmalar deň projeksiýalara eýe; iki gyrmadan haýsý biriniň projeksiýasy uly bolsa, şol gyşarma uly bolýar.*

- 2-nji mesele.** Diagonallary 10 cm we 24 cm-e deň bolan rombuň tarapyny tapyň.

*Çözülişi.* Rombuň diagonallary perpendikulýar we kesişme nokadynda deň ikä bölünýänliginden peýdalanýarys. Onda rombuň tarapynyň katetleri 5 cm we 12 cm-e deň bolan gönüburçly üçburçlugyň gipotenuzasy bolýar.



$$5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169, \text{ ýagny } 169 = 13^2.$$

Diýmek, rombuň tarapy 13 cm-e deň eken.

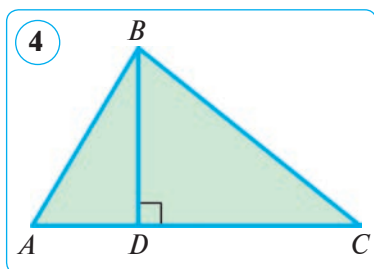
Jogaby: 13 cm.

### Soraglar, meseleler we ýumuşlar

- 1) Pifagoryň teoremasyna ters teoremany aňladyň.
- 2) Gyşarmanyň göni çyzykdaky proyeksiýasy diýende nämäni düşünyärsiňiz?
- 3) Katetiň gipotenuzadan kiçidigi dogrumy?

2. Gönüburçly üçburçlugyň taraplary aşakdaky sanlara deň bolmagy mümkinmi: 1) 11 cm, 7 cm, 17 cm; 2) 3 cm, 1,6 cm, 3,4 cm; 3) 3 cm, 4 cm, 6 cm; 4) 2 cm,  $\sqrt{7}$  cm,  $\sqrt{11}$  cm? Jogabyňyzy esaslandyryň.

3.  $\triangle ABC$ -da  $AB=13$  cm,  $BC=20$  cm,  $BD$ – üçburçlugyň beýikligi we ol 12 cm-e deň.  $AB$ ,  $BC$  taraplaryň  $AC$  tarapa geçirilen proyeksiýalarynyň uzynlyklaryny we  $AC$  tarapyň uzynlygyny tapyň (4-nji surat). Boş ýerlere degişli jogaplary ýazyň.



*Çözülişi.*  $\triangle ABD$  we  $\triangle BCD$  – gönüburçly, çünki  $\angle ADB = \angle BDC = 90^\circ$ .  $AB$  we  $BC$  taraplaryň  $AC$  tarapdaky proyeksiýalary degişlilikde  $AD$  we  $CD$  kesimlerden ybarat.

$\triangle ABD$ -dan Pifagoryň teoremasyna görä:

$$AD^2 = AB^2 - BD^2 = 13^2 - 12^2 = \dots - \dots = \dots \text{ (cm)}.$$

Mundan  $AD = \dots$  cm.

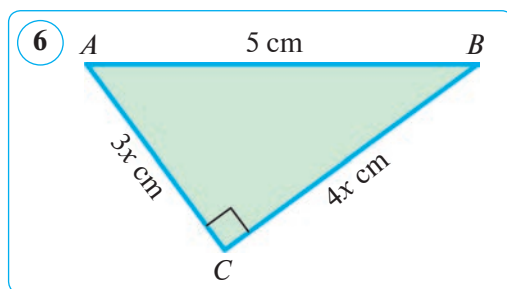
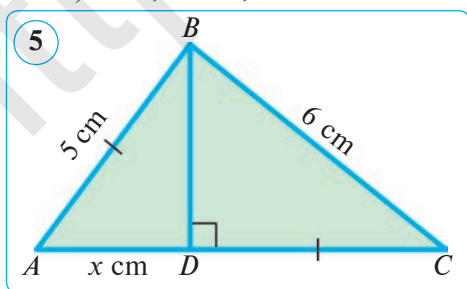
$\triangle BCD$ -dan Pifagoryň teoremasyna görä:

$$CD^2 = BC^2 - BD^2 = \dots^2 - 12^2 = \dots - \dots = \dots \text{ (cm)}. \text{ Mundan } CD = \dots \text{ cm}.$$

$$AC = \dots + DC = \dots + \dots = \dots \text{ (cm)}.$$

Jogaby:  $AD = \dots$  cm,  $CD = \dots$  cm,  $AC = \dots$  cm.

4. Näbelli uzynlyklary tapyň (5–6-njy suratlar).
5. Gönüburçly üçburçlugyň iki tarapy 6 cm we 8 cm-e deň. Üçünji tarapyň uzynlygyny tapyň. Mesele näçe ýözüwe eýe?
6. Gönüburçly üçburçlugyň taraplary aşakdaky sanlara deň bolmagy mümkinmi: 1)  $a=12$ ,  $b=35$ ,  $c=37$ ; 2)  $a=11$ ,  $b=20$ ,  $c=25$ ; 3)  $a=18$ ,  $b=24$ ,  $c=30$ ; 4)  $a=9$ ,  $b=12$ ,  $c=15$ ?



## 19. PIFAGORYŇ TEOREMASYNYŇ KÄBIR ULANYLYŞY

### Üç tarapyna görä üçburçlugyň beýikligini tapmak.

Taraplary  $a$ ,  $b$  we  $c$  bolan  $ABC$  üçburçluga garap geçýäris. Onuň  $C$  depesinden  $AB$  tarapa geçirilen  $CD=h_c$  beýikligini tapýarys (1-nji a surat).

Beýiklik esasy  $D$  nokadyň  $AB$  kesime görä nähili ýerleşişine görä üç ýagdaýyň bolmagy mümkin. Şu ýagdaýlara garap geçýäris.

1-nji ýagdaý.  $D$  nokat  $AB$  kesimiň içki nokady bolsun. Eger  $AD=x$  belgilemäni girizsek, onda  $DB=c-x$  bolýar (1-nji a surat).  $\triangle ADC$  we  $\triangle BDC$ -lar gönüburçly, Pifagoryň teoremasyna görä:

$$h_c^2 = b^2 - x^2 \quad (1) \quad \text{we} \quad h_c^2 = a^2 - (c-x)^2 \quad (2).$$

Bulardan aşakdaky deňligi alarys:  $b^2 - x^2 = a^2 - (c-x)^2$ .

Mundan

$$b^2 - x^2 = a^2 - c^2 + 2cx - x^2, \quad \text{ýagny} \quad b^2 = a^2 - c^2 + 2cx.$$

Ahyrky deňlemeden  $x$ -i tapýarys:

$$x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} \quad \text{ýa-da} \quad x^2 = \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4c^2}.$$

$x^2$ -yň bu bahasyny (1) deňlige goýup, aşakdaka eýe bolarys:

$$h_c^2 = b^2 - \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4c^2} = \frac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4c^2}.$$

Bu drobuň sanawjysyny köpeldijilere dagydyp, aşakdaka eýe bolarys:

$$h_c^2 = \frac{(2bc - (b^2 + c^2 - a^2))(2bc + (b^2 + c^2 - a^2))}{4c^2} = \frac{(2bc - b^2 - c^2 + a^2)(2bc + b^2 + c^2 - a^2)}{4c^2}.$$

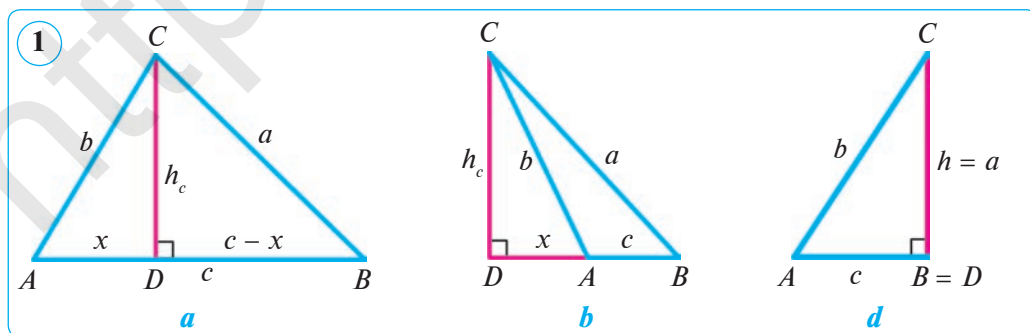
Emele gelen aňlatmanyň sanawjysyndaky iki köpeldijisini aşakdaky ýaly şekil çalşyryarys:

$$2bc - b^2 - c^2 + a^2 = a^2 - (b-c)^2 = (a-b+c)(a+b-c) \quad \text{we}$$

$$2bc + b^2 + c^2 - a^2 = (b+c)^2 - a^2 = (b+c-a)(b+c+a).$$

Onda

$$h_c^2 = \frac{(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)(b+c+a)}{4c^2},$$



mundan

$$h_c = \frac{1}{2c} \sqrt{(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)}$$

Üçburçlugyň ýarym perimetrini  $p$  bilen belgileýäris, onda:

$$a + b + c = 2p,$$

$$a - b + c = a + b + c - 2b = 2p - 2b = 2(p - b),$$

$$a + b - c = a + b + c - 2c = 2p - 2c = 2(p - c),$$

$$b + c - a = a + b + c - 2a = 2p - 2a = 2(p - a).$$

Alnan aňlatmalary kök aşagyndaky aňlatmalaryň ýerine goýup, aşakdaky netijäni alarys:

$$\begin{aligned} h_c &= \frac{1}{2c} \sqrt{16p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{1}{2c} \cdot 4 \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \\ &= \frac{2}{c} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \end{aligned}$$

Edil şonuň ly,

$$h_a = \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{we} \quad h_b = \frac{2}{b} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

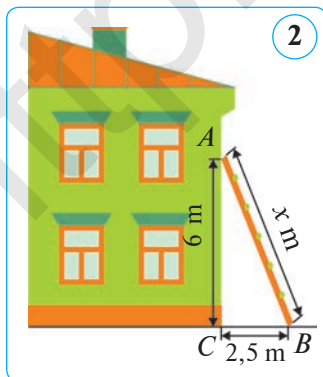
2-nji ýagdaý.  $D$  nokat  $AB$  kesimiň dowamynda ýatýar, ýagny  $DB = c + x$ . Munda-da agzalan netije emele gelýär (1-nji  $b$  surat).

3-nji ýagdaý.  $D$  nokat  $B$  nokat bilen, ýagny  $h = a$  – beýiklik katet bilen üstme-üst düşýär. Munda üçburçluk gönüburçly bolýar (1-nji  $d$  surat).



### Soraglar, meseleler we ýumuşlar

1. Taraplary: 1) 10 cm, 10 cm, 12 cm; 2) 17 dm, 17 dm, 16 dm; 3) 4 dm, 13 dm, 15 dm bolan üçburçluklaryň beýikliklerini tapyň.
2. Beýikligi  $h$ -a deň bolan deň taraply üçburçlugyň tarapyny tapyň. Eger: 1)  $h = 6$  cm; 2)  $h = 1,5$  dm bolsa, tarapy tapyň.
3. Üçburçlugyň taraplary: 1)  $a = 5$  cm,  $b = 7$  cm,  $c = 6$  cm; 2)  $a = 13$  dm,  $b = 14$  dm,  $c = 15$  dm; 3)  $a = 24$  cm,  $b = 25$  cm,  $c = 7$  cm-e deň. Üçburçlugyň uly tarapyna geçirilen beýikligini tapyň.
4. Eger deň taraply üçburçlugyň tarapy 12 cm-e deň bolsa, onuň beýikligini tapyň.



5. Üçburçlugyň taraplary  $a = 8$  cm,  $b = 10$  cm we  $c = 12$  cm. Onuň iň uly we iň kiçi beýikliklerini tapyň.

6. Üçburçlugyň taraplary: 1) 17, 65, 80; 2) 8, 6, 4; 3) 24, 25, 7; 4) 30, 34, 16; 5) 15, 17, 8-e deň bolsa, onuň iň kiçi tarapyna geçirilen beýikligini tapyň.

7. Üçburçlugyň taraplary  $a = 16$  cm,  $b = 12$  cm we  $c = 8$  cm. Üçburçlugyň kiçi beýikligini tapyň.

8. Üzeňniň uzynlygyny tapyň (2-nji surat).



## 5-§.

## TRIGONOMETRIK TO'ZDESTWOLAR

### 20-21. ESASY TRIGONOMETRIK TO'ZDESTWO WE ONUŃ NETIJELERI

#### 1. Esasy trigonometrik to'zdestwolar.

Bir burçun trigonometrik funksiýalarynyň arasyndaky baglanyşygy aňladýan to'zdestwolary getirip çykarýarys.

#### Teorema.

Islendik ýiti  $\alpha$  burç üçin

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

deňlik ýerlikli.

*Subudy.* A depesindeki burç  $\alpha$  deň bolan gönüburçly islendik  $ABC$  üçburçlugy alýarys (1-nji surat).

Pifagoryň teoremasyna görä:  $BC^2 + AC^2 = AB^2$ .

Deňligiň iki bölegini hem  $AB^2$  -a bölüp, aşakdaky

deňlige eýe bolarys:  $\left(\frac{BC}{AB}\right)^2 + \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 = 1$ .

Emma  $\frac{BC}{AB} = \sin \alpha$ ,  $\frac{AC}{AB} = \cos \alpha$ . Şeýlelikde,

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \quad (1)$$

(1) deňlik **trigonometriýanyň esasy to'zdestwosy** diýilýär.

Bize bir burçun trigonometrik funksiýalarynyň arasyndaky baglanyşygy aňladýan üç deňlik mälim:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (2), \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (3), \quad \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1 \quad (4).$$

(1) deňligiň iki bölegini hem  $\cos^2\alpha$  bölüp, (5) to'zdestwony alarys:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \quad \text{ýa-da} \quad 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}. \quad (5)$$

(1) deňligiň iki bölegini hem  $\sin^2\alpha$  bölüp, (6) to'zdestwony alarys:

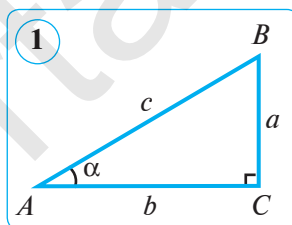
$$1 + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha} \quad \text{ýa-da} \quad 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}. \quad (6)$$

#### 2. Esasy trigonometrik to'zdestwodan gelip çykýan netijeler.

Islendik  $\alpha$  ýiti burç üçin aşakdaky deňlikler ýerlikli:

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}. \quad (7)$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}. \quad (8)$$



**1-nji mesele.** Eger  $\cos \alpha = \frac{2}{3}$  bolsa,  $\sin \alpha$ ,  $\operatorname{tg} \alpha$  we  $\operatorname{ctg} \alpha$  -nyň bahalaryny hasaplaň.

*Çözülişi.* 1)  $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ .

2)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{5}}{3} : \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ ; 3)  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{2}{3} : \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ .

*Jogaby:*  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$ ,  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ .

**2-nji mesele.** Aňlatmany ýönekeýleşdiriň: 1)  $1 + \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}$ ; 2)  $1 - \frac{\cos^2 \alpha - 1}{\cos^2 \alpha}$ .

*Çözülişi.* 1) Goşulyjylary umumy maýdalawja getirýäris, soňra suratdaky meňzeş agzalary toparlap we (6) toždestwodan peýdalanyp tapýarys:

$$1 + \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + 1 - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha.$$

*Jogaby:*  $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha$ .

2) Tapawudy umumy maýdalawja getirýäris, soňra suratdaky meňzeş agzalary toparlap we (5) toždestwodan peýdalanyp tapýarys:

$$1 - \frac{\cos^2 \alpha - 1}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - (\cos^2 \alpha - 1)}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha + 1}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha.$$

*Jogaby:*  $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$ .

**3-nji mesele.** Aňlatmany ýönekeýleşdiriň:  $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$ .

*Çözülişi.* Iki sanyň jeminiň kwadratynyň formulasyndan we esasy trigonometrik toždestwodan peýdalanyp, aňlatmany ýönekeýleşdirýäris:

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 = 1. \quad \text{Jogaby: } 1.$$



### Soraglar, meseleler we ýumuşlar

- 1) Haýsy deňlige trigonometriýanyň esasy toždestwosy diýilýär?
- 2) Trigonometrik toždestwolary aňladýan deňliklerden haýsylaryny bilýärsiňiz?
- 3) Esasy trigonometrik toždestwodan nähili netijeler gelip çykýar?

**2.** Eger: 1)  $\sin \alpha = \frac{12}{13}$  bolsa,  $\cos \alpha$ ,  $\operatorname{tg} \alpha$  we  $\operatorname{ctg} \alpha$ -ny; 2)  $\cos \alpha = 0,8$  bolsa,  $\sin \alpha$ ,  $\operatorname{tg} \alpha$  we  $\operatorname{ctg} \alpha$ -ny; 3)  $\cos \alpha = 0,28$  bolsa,  $\sin \alpha$ ,  $\operatorname{tg} \alpha$  we  $\operatorname{ctg} \alpha$ -ny tapyň.

**3.** Eger  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}$  bolsa,  $\sin \alpha$  we  $\cos \alpha$ -ny tapyň.

**Nusga.** Eger  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$  bolsa,  $\sin \alpha$  we  $\cos \alpha$ -ny tapyň.

*Çözülişi.*  $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 = 1 + \frac{16}{9} = \frac{25}{9}$ . Diýmek,  $\cos^2 \alpha = \frac{9}{25}$ .

Mundan  $\cos \alpha = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$ .

Indi  $\sin\alpha$ -ny hasaplaýarys:  $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{4}{5}$ .

Jogaby:  $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ ;  $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ .

4. Aňlatmany ýönekeýleşdiriň: 1)  $1 + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$ ; 2)  $\frac{\sin^2\alpha}{1 - \cos^2\alpha}$ ; 3)  $\frac{1 - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$ .

**Nusga.** Aňlatmany ýönekeýleşdiriň:  $1 + \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$ .

*Çözülişi.* Ýönekeýleşdirmek üçin goşulyjylary toparlap, alarys:

$$1 + \sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 1 - \underbrace{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}_{\sin^2\alpha} = \sin^2\alpha + \sin^2\alpha = 2\sin^2\alpha.$$

Jogaby:  $2\sin^2\alpha$ .

5. Aňlatmany ýönekeýleşdiriň: 1)  $\frac{(1 - \sin\alpha)(1 + \sin\alpha)}{\sin^2\alpha}$ ; 2)  $\frac{\sin\alpha \cos\alpha}{\cos^2\alpha}$ ; 3)  $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha}$ .
6. Gönüburçly üçburçlugyň katetleri 7 cm we 24 cm-e deň. Üçburçlugyň iň kiçi burçunyň trigonometrik funksiýalarynyň bahalaryny tapyň.
7. Eger: 1)  $\operatorname{tg}A = 2$ ; 2)  $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ; 3)  $\cos\alpha = \frac{15}{17}$  bolsa, A ýiti burçuň trigonometrik funksiýalarynyň bahalaryny tapyň.
8. Aňlatmany ýönekeýleşdiriň:  $\frac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^4\alpha}{\cos^2\alpha}$ .

*Çözülişi.*

$$\frac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^4\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} (1 - \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^4\alpha) = (1 + \operatorname{tg}^2\alpha)(1 - \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^4\alpha) = 1 + \operatorname{tg}^6\alpha$$

Ýönekeýleşdirende (5) toždestwodan we  $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$  formuladan peýdalanyldy.

Jogaby:  $1 + \operatorname{tg}^6\alpha$ .

9. Eger: 1)  $\sin\alpha = \frac{8}{17}$  bolsa,  $\cos\alpha$ ,  $\operatorname{tg}\alpha$  we  $\operatorname{ctg}\alpha$ -ny; 2)  $\cos\alpha = 0,6$  bolsa,  $\sin\alpha$ ,  $\operatorname{tg}\alpha$  we  $\operatorname{ctg}\alpha$ -ny tapyň.
10. Bir burçuň sinusy we kosinusy deňişlilikde aşakdaky sanlara deň bolýandygyny ýa-da bolmaýandygyny anyklaň: 1)  $\frac{1}{2}$  we  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; 2)  $\frac{1}{3}$  we  $\frac{3}{4}$ .
11. Bir burçuň tangensi we kotangensi deňişlilikde aşakdaky sanlara deň bolýandygyny ýa-da bolmaýandygyny anyklaň:  
1) 0,4 we 2,5; 2) 1,1 we 0,9; 3)  $\sqrt{5} + 2$  we  $\sqrt{5} - 2$ .
12. Aňlatmany ýönekeýleşdiriň: 1)  $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha - \cos^2\alpha$ ; 2)  $\cos\alpha - \cos\alpha \cdot \sin^2\alpha$ .
13. Gönüburçly üçburçlugyň katetleri 8 cm we 15 cm-e deň. Üçburçlugyň iň kiçi burçunyň trigonometrik funksiýalarynyň bahalaryny tapyň.
14. Aňlatmany ýönekeýleşdiriň: 1)  $(1 - \cos\alpha)(1 + \cos\alpha)$ ; 2)  $\sin\alpha - \sin\alpha \cos^2\alpha$ .

## 22. DOLDURYJY BURÇUŇ TRIGONOMETRIK FUNKSIÝALARY ÜÇIN FORMULALAR

### Dolduryjy burçuň trigonometrik funksiýalary üçin formulalar.

*Dolduryjy burçlar* diýip, jemi  $90^\circ$ -a deň bolan iki burça aýdylýar. Gönüburçly üçburçlugyň ýiti burçlary dolduryjy burçlara mysal bolýar, çünki olaryň jemi  $90^\circ$ -a deň.

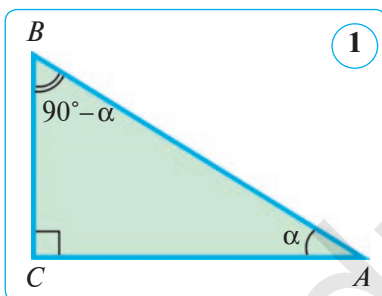
Biz garap çykan trigonometrik toždestwolar bir burçuň dürli trigonometrik funksiýalarynyň arasyndaky özara gatnaşyklary ornaşdyrmaga mümkinçilik berýär. Indi gönüburçly üçburçlugyň iki ýiti burçunyň arasyndaky gatnaşyklara garap geçýäris.

#### Teorema.

Islendik gönüburçly üçburçlugyň ýiti burçy  $\alpha$  üçin

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha; \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$$

deňlikler ýerlikli.



*Subudy.* Gipotenuzasy  $AB$  bolan gönüburçly  $ABC$  üçburçluga garaýarys (1-nji surat). Eger  $\angle A = \alpha$  bolsa, onda  $\angle B = 90^\circ - \alpha$  deň bolýar. Üçburçlugyň ýiti burçlaryny sinuslar we kosinuslar arkaly aňladýarys. Kesgitlemä görä:

$$\sin B = \frac{AC}{AB} \quad \text{we} \quad \cos A = \frac{AC}{AB},$$

$$\text{ýagny} \quad \sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha;$$

$$\sin A = \frac{BC}{AB} \quad \text{we} \quad \cos B = \frac{BC}{AB}, \quad \text{ýagny}$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha. \quad \text{Teorema subut edildi.}$$

Subut edilen teoremadan şu netije gelip çykýar.

**Netije.** Islendik ýiti  $\alpha$  burç üçin

$$\text{tg}(90^\circ - \alpha) = \text{ctg}\alpha; \quad \text{ctg}(90^\circ - \alpha) = \text{tg}\alpha$$

deňlikler ýerlikli.

Bu deňlikleriň dogrudygyny ýokarda getirip çykarylan formulalardan peýdalanyp subut etmegi özüňize hödürleýäris.

$A$  we  $B$  ýiti burçlar – bir-birini  $90^\circ$  dolduryjy burçlardyr. Şony hasaba alyp, ýokarda getirip çykarylan formulalar aşakdaky ýaly okalýar:

- berlen burçuň sinusy dolduryjy burçuň kosinusyna deň;
- berlen burçuň kosinusy dolduryjy burçuň sinusyna deň;
- berlen burçuň tangensi dolduryjy burçuň kotangensine deň;
- berlen burçuň kotangensi dolduryjy burçuň tangensine deň.

**1-nji mesele.**  $A$  we  $B$  burçlar – gönüburçly üçburçlugyň ýiti burçlary bolsun. Eger  $\sin B = \frac{1}{\sqrt{5}}$  bolsa,  $\operatorname{tg}A$ -ny tapyň.

*Çözülişi.*  $\sin B = \cos A$ , diýmek,  $\cos A = \sin B = \frac{1}{\sqrt{5}}$ . Indi  $A$  burçuň sinusyny esasy trigonometrik toždestwonyň netijesinden peýdalanyp tapýarys:

$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$  Burçuň tangensini sinus we kosinus arkaly tapýarys:

$$\operatorname{tg}A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{2}{\sqrt{5}} : \frac{1}{\sqrt{5}} = 2$$


*Jogaby:* 2.

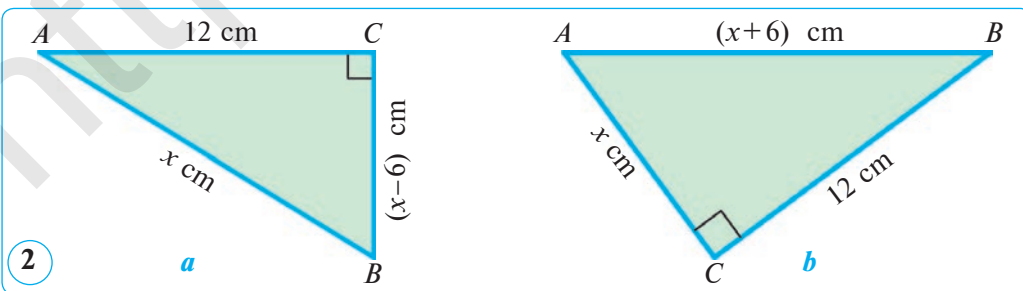
**2-nji mesele.** Eger  $\operatorname{ctg}x = \operatorname{tg}20^\circ$  bolsa, ýiti  $x$  burçy tapyň.

*Çözülişi.*  $\operatorname{tg}20^\circ = \operatorname{ctg}(90^\circ - 20^\circ) = \operatorname{ctg}70^\circ$ , diýmek,  $\operatorname{ctg}x = \operatorname{ctg}70^\circ$ .

Mundan  $x = 70^\circ$ . *Jogaby:*  $x = 70^\circ$ .

### Soraglar, meseleler we ýumuşlar

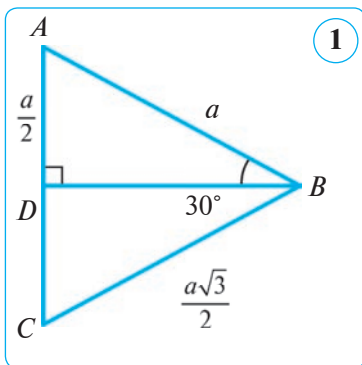
- 1) Dolduryjy burçlar diýip nämä aýdylýar?
-  2) Gönüburçly üçburçlugyň iki ýiti burçunyň arasyndaky nähili gatnaşyklary bilýärsiňiz? Degişli formulalary ýazyň.
- 2.** Eger: 1)  $\sin x = \cos 40^\circ$ ; 2)  $\cos x = \sin 76^\circ$ ; 3)  $\operatorname{tg}x = \operatorname{ctg}56^\circ$ ; 4)  $\operatorname{ctg}x = \operatorname{tg}16^\circ$  bolsa, ýiti  $x$  burçy tapyň.
3.  $A$  we  $B$  burçlar – gönüburçly üçburçlugyň ýiti burçlary. Eger  $\cos A = 0,6$  bolsa,  $\sin B$  we  $\cos B$ -ni tapyň.
4. Bir burçuň sinusy we kosinusy degişlilikde aşakdaky sanlara deň bolýandygyny ýa-da bolmaýandygyny anyklaň: 1)  $\frac{1}{\sqrt{5}}$  we  $\frac{2}{\sqrt{5}}$ ; 2) 0,3 we 0,4.
- 5.**  $A$  we  $B$  burçlar – gönüburçly üçburçlugyň ýiti burçlary. Eger  $\sin B = 0,5$  bolsa,  $\cos A$  we  $\operatorname{tg}A$ -ny tapyň.
6. Näbelli uzynlyklary tapyň (2-nji surat) hem-de ýiti burçlaryň sinusyny, kosinusyny, tangensini we kotangensini hasaplaň.
- 7.** Eger  $\sin(90^\circ - \alpha) = 0,8$  bolsa,  $\cos \alpha$  we  $\sin \alpha$ -ny tapyň.
- 8.** Aňlatmany yönekeyleşdiriň: 1)  $\frac{\cos \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha}$ ; 2)  $\operatorname{ctg}^2 \alpha (2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 1)$ .



## 23. 30°, 45°, 60°-LY BURÇLARYŇ SINUSYNY, KOSINUSYNY, TANGENSINI WE KOTANGENSINI HASAPLAMAK

### 1. 30°-ly burçuň sinusyny, kosinusyny, tangensini we kotangensini hasaplamak.

Deň taraply  $ABC$  üçburçlugy alýarys (1-nji surat). Oňa  $BD$  beýiklik geçirsek, ol bissektrisa we mediana wezipesini ýerine ýetirýär. Şu sebäpli  $ABD$  üçburçluk  $B$  depesindäki ýiti burçy  $30^\circ$ -a deň bolan gönüburçly ( $\angle D=90^\circ$ ) üçburçlukdyr. Deň taraply üçburçlugyň tarapy  $a$ -ga deň bolsun. Onda  $AD = \frac{a}{2}$



Pifagoryň teoremasyna görä:

$$BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Kesgitlemelere görä:

$$\sin 30^\circ = \frac{AD}{AB} = \frac{a}{2} : a = \frac{1}{2};$$

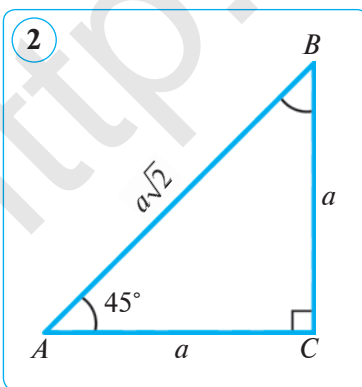
$$\cos 30^\circ = \frac{BD}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2} : a = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{AD}{BD} = \frac{a}{2} : \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}; \quad \operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{BD}{AD} = \frac{a\sqrt{3}}{2} : \frac{a}{2} = \sqrt{3}.$$

Dolduryjy burçuň trigonometrik funksiýalary üçin çykarylan formulalaryň kömeginde **60°-ly burçuň trigonometrik funksiýalarynyň bahalaryny** tapýarys:

$$\sin 60^\circ = \sin(90^\circ - 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{tg}(90^\circ - 30^\circ) = \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3};$$

$$\cos 60^\circ = \cos(90^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}; \quad \operatorname{ctg} 60^\circ = \operatorname{ctg}(90^\circ - 30^\circ) = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$



### 2. 45°-ly burçuň sinusyny, kosinusyny, tangensini we kotangensini hasaplamak.

45°-ly burçuň trigonometrik funksiýalaryny hasaplamak üçin deňýanly gönüburçly  $ABC$  üçburçluga garaýarys (2-nji surat). Bu üçburçlukda  $AC=BC=a$ ,  $\angle A=\angle B=45^\circ$  bolsun. Pifagoryň teoremasyna görä, gipotenuza  $AB = a\sqrt{2}$  -ä deň bolýar. Ýiti burçuň trigonometrik funksiýalarynyň kesgitlemesine görä:

$$\sin 45^\circ = \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos 45^\circ = \cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a} = 1; \operatorname{ctg} 45^\circ = \operatorname{ctg} A = \frac{AC}{BC} = \frac{a}{a} = 1.$$

$30^\circ$ ,  $45^\circ$  we  $60^\circ$ -ly burçlaryň sinusy, kosinusy, tangensi we kotangensi bahalarynyň jedwelini düzýäris.

Ýiti burçly trigonometrik funksiýalaryň bahalary, sanlaryň kwadratlary we olardan çykarylan arifmetik kwadrat köki ýörite jedwellerden bilmek ýa-da kalkulýatordan peýdalanyňp hasaplamak mümkin.

**Mesele.** Gönüburçly  $ABC$  üçburçlugyň  $AB$  gipotenuzasy  $4\sqrt{3}$  cm we  $\angle A = 60^\circ$  (3-nji surat). Şu üçburçlugyň katetlerini tapyň.

**Çözülişi.** Bize mälim bolşy ýaly,  $\alpha$  burçuň garşysyndaky katet gipotenuza bilen  $\alpha$  burçuň sinusynyň köpeltmek hasylyna deň. Şuňa görä:

$$BC = AB \sin A = 4\sqrt{3} \cdot \sin 60^\circ = 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6 \text{ (cm)}.$$

Bize mälim bolşy ýaly,  $\alpha$  burça seplesýän katet gipotenuza bilen  $\alpha$  burçuň kosinusynyň köpeltmek

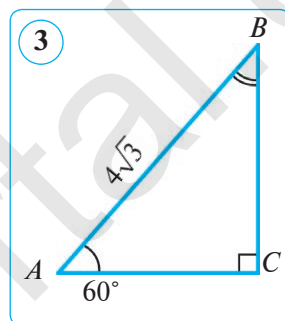
hasylyna deň. Şuňa görä:  $AC = AB \cos A = 4\sqrt{3} \cdot \cos 60^\circ = 4\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = 2\sqrt{3}$  (cm).

*Jogaby:*  $BC = 6$  cm,  $AC = 2\sqrt{3}$  cm.

### Soraglar, meseleler we ýumuşlar

- Hasaplaň: 1)  $\sin 30^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ$ ; 2)  $\cos 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ$ ; 3)  $\sqrt{2} \sin 45^\circ - \cos 60^\circ$ .
- Deň taraply üçburçluk çyzyň we onuň beýikligini geçiriň. Gerekli ölçemeleri ýerine ýetirip,  $30^\circ$  we  $60^\circ$ -ly burçlaryň trigonometrik funksiýalaryny hasaplaň, netijeleri jedweldäkileri bilen deňeşdiriň.
- $ABCD$  parallelogramyň  $BD$  diagonalý  $AB$  tarapa perpendikulýar we 16 cm-e deň. Eger  $BDA$  burç  $30^\circ$ -a deň bolsa, parallelogramyň taraplaryny tapyň.
- Gönüburçly üçburçlugyň bir kateti  $6\sqrt{3}$  -e, bu katetiň garşysyndaky burç  $60^\circ$ -a deň. Gipotenuzany we ikinji kateti tapyň.
- Aňlatmany yönekeyleşdiriň: 1)  $\operatorname{tg}^2 \alpha (2 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - 1)$ ; 2)  $\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \alpha$ .
- Gönüburçly üçburçlugyň bir kateti 2-ä, bu katetiň garşysyndaky burç  $60^\circ$ -a deň. Gipotenuzany we ikinji kateti tapyň.
- Aňlatmany yönekeyleşdiriň:  $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2$ .
- Hasaplaň: 1)  $\cos 45^\circ \cdot \sin 45^\circ$ ; 2)  $\sin 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ$ ; 3)  $\sqrt{3} \cos 30^\circ - \cos 60^\circ$ .

$\alpha$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$



## 6- §.

## GÖNÜBURÇLY ÜÇBURÇLUKLARY ÇÖZMEK

24. TRIGONOMETRIK FUNKSIYALARYŇ  
BAHALARYNYŇ JEDWELI

Dersligiň ahyrynda bitin sanly graduslar bilen  $1^\circ$ -dan  $89^\circ$ -a çenli ähli burçlar üçin laýyk gelýän trigonometrik funksiýalar (on müňden bire çenli takyklyk-da) görkezilen jedwel getirilen. Bu jedwel aşakdaky ýaly düzülen: çep tarapdan birinji sütünä (ýokarsynda «graduslar» diýlip ýazylanyňa) graduslaryň sanlary  $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, \dots, 45^\circ$ -a çenli ýerleşdirilen; ikinji sütünä (ýokarsynda «sinuslar» ýazylanyňa) sinuslaryň birinji sütünde görkezilen burçlara laýyk gelýän bahalary goýlan; 3-nji sütünä tangensler, soňra kotangensler we ondan soň kosinuslaryň bahalary ýerleşdirilen. Soňky 6-njy sütünä ýene graduslar sanlary: ýagny  $45^\circ, 46^\circ, 47^\circ, \dots$  we başgalar,  $89^\circ$ -a çenli ýerleşdirilen. Bu (ýeri tygşytlamak üçin) aşakdaka esasan edilen:  $\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$ ,  $\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$  we başgalar, diýmek,  $\sin 1^\circ = \cos 89^\circ$ ,  $\sin 2^\circ = \cos 88^\circ$  we başgalar. Şonuň üçin ýokardaky «sinuslar» ýazylan sütüniň astyna «kosinuslar»; ýokardaky «tangensler» ýazylan (çepden 3-nji) sütüniň astyna «kotangensler» ýazylan we şuna meňzeş. Şeýlelikde,  $1^\circ$  dan  $45^\circ$ -a çenli burçlar üçin graduslar sanlaryny çep tarapdaky birinji sütünden we trigonometrik funksiýalaryň atlaryny ýokardan okamaly,  $45^\circ$ -dan  $89^\circ$ -a çenli bolan burçlar üçin bolsa graduslaryň sanlaryny sag tarapdaky soňky sütünden we funksiýalaryň atlaryny sütünleriň aşagyndan okamaly. Meselem, jedwelden tangensiň bahasyny tapýarys:  $\operatorname{tg} 35^\circ = 0,7002$ .

## 1. Berlen burça görä trigonometrik funksiýalaryny tapmak.

**1-nji mesele.**  $\sin 20^\circ$ -y tapyň.

*Çözülişi.*  $1^\circ \leq 20^\circ \leq 45^\circ$  bolany üçin *çepdäki* «graduslar» sözi ýazylan sütünden 20-ni alýarys we oňa laýyk setiriň ikinji (« $\sin \alpha$ ») sütüninden 0,3420 bahany tapýarys. Ýnha şu san  $\sin 20^\circ$ -yň bahasydyr.

Diýmek,  $\sin 20^\circ \approx 0,3420$ .

**2-nji mesele.**  $\sin 75^\circ$  ni tapyň.

*Çözülişi.*  $45^\circ \leq 75^\circ \leq 89^\circ$  bolany üçin *sagdaky* «graduslar» sözi ýazylan sütünden 75-i alýarys we oňa laýyk setiriň dördünji (*pesdäki* « $\sin \alpha$ ») sütüninden 0,9659 bahany tapýarys. Ýnha şu san  $\sin 75^\circ$  -yň bahasydyr.

Diýmek,  $\sin 75^\circ \approx 0,9659$ .

**3-nji mesele.**  $\cos 33^\circ$  ni tapyň.

*Çözülişi.*  $1^\circ \leq 33^\circ \leq 45^\circ$  bolany üçin *çepdäki* «graduslar» sözi ýazylan sütünden 33-i alýarys we oňa laýyk setiriň dördünji (« $\cos \alpha$ ») sütüninden 0,8387 bahany tapýarys. Ýnha şu san  $\cos 33^\circ$ -yň bahasydyr.

Diýmek,  $\cos 33^\circ \approx 0,8387$ .



Tangensleriň we kotangensleriň bahalary degişlilikde sinuslaryň we kosinuslaryň bahalary jedwelden nähili tapylan bolsa, şeýle tapylýar.

## 2. Burçy trigonometrik funksiýasyna görä tapmak.

**4-nji mesele.** Eger  $\sin x = 0,9848$  bolsa,  $x$  ýiti burçy tapyň.

*Çözülişi.* Sinusy 0,9848-e deň bolan burçy tapmak üçin trigonometrik funksiýalaryň bahalary ýerleşen birinji ýa-da dördünji sütünden bu bahany gözleýäris. Bu baha dördünji ( $\sin\alpha$ ) sütünde bar, ýagny gözlenýän burç  $45^\circ$ -dan uly we  $89^\circ$ -dan kiçi. Bu setire laýyk sagdaky «graduslar» sütüninden 80 sanyny tapýarys. Diýmek, gözlenýän burç takmynan  $80^\circ$ -a deň. *Jogaby:*  $x \approx 80^\circ$ .

**5-nji mesele.** Eger  $\operatorname{tg} x = 0,7002$  bolsa,  $x$  ýiti burçy tapyň.

*Çözülişi.* Tangensi 0,7002-ä deň bolan burçy tapmak üçin trigonometrik funksiýalaryň bahalary ýerleşen ikinji ýa-da üçünji sütünden bu bahany gözleýäris. Şu baha ikinji ( $\operatorname{tg}\alpha$ ) sütünde bar, ýagny gözlenýän burç  $45^\circ$ -dan kiçi. Bu setire laýyk çepdäki «graduslar» sütüninden 35 sanyny tapýarys. Diýmek, gözlenýän burç takmynan  $35^\circ$ -a deň. *Jogaby:*  $x \approx 35^\circ$ .



## Soraglar, meseleler we ýumuşlar

**1.** Jedwelden peýdalanyp tapyň:

- a) 1)  $\sin 3^\circ$ ;    2)  $\sin 21^\circ$ ;    3)  $\sin 50^\circ$ ;    4)  $\sin 82^\circ$ ;    5)  $\sin 40^\circ$ ;  
 b) 1)  $\cos 9^\circ$ ;    2)  $\cos 12^\circ$ ;    3)  $\cos 41^\circ$ ;    4)  $\cos 67^\circ$ ;    5)  $\cos 4^\circ$ ;  
 d) 1)  $\operatorname{tg} 5^\circ$ ;    2)  $\operatorname{tg} 89^\circ$ ;    3)  $\operatorname{tg} 15^\circ$ ;    4)  $\operatorname{tg} 60^\circ$ ;    5)  $\operatorname{tg} 50^\circ$ ;  
 e) 1)  $\operatorname{ctg} 10^\circ$ ;    2)  $\operatorname{ctg} 30^\circ$ ;    3)  $\operatorname{ctg} 75^\circ$ ;    4)  $\operatorname{ctg} 52^\circ$ ;    5)  $\operatorname{ctg} 5^\circ$ .

**2.** Jedwelden peýdalanyp,  $x$  ýiti burçy tapyň:

- a) 1)  $\sin x \approx 0,1392$ ;    2)  $\sin x \approx 0,8590$ ;    3)  $\sin x \approx 0,5150$ ;  
 b) 1)  $\cos x \approx 0,7431$ ;    2)  $\cos x \approx 0,6428$ ;    3)  $\cos x \approx 0,0523$ ;  
 d) 1)  $\operatorname{tg} x \approx 0,4663$ ;    2)  $\operatorname{tg} x \approx 11,430$ ;    3)  $\operatorname{tg} x \approx 0,1763$ ;  
 e) 1)  $\operatorname{ctg} x \approx 0,9004$ ;    2)  $\operatorname{ctg} x \approx 1,192$ ;    3)  $\operatorname{ctg} x \approx 0,3640$ .

**3.** (*Amaly iş.*) Transportiriň kömeginde ýiti burçy  $40^\circ$  bolan gönüburçly üçburçluk çyzyň. Onuň taraplaryny ölçäň hem-de şu burçuň sinusyny, kosinusyny, tangensini we kotangensini hasaplaň.

**4.** Aňlatmanyň bahasyny tapyň:  $\operatorname{tg} 15^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 75^\circ$ .

*Çözülişi.*  $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$  we  $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$  formulalardan peýdalanyp aňlatmanyň bahasyny hasaplaýarys (boş ýerlere degişli jogaby ýazyň):

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 15^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 75^\circ &= \operatorname{tg} 15^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ \cdot \operatorname{tg}(90^\circ - 30^\circ) \cdot \operatorname{tg}(90^\circ - 15^\circ) = \\ &= (\operatorname{tg} 15^\circ \cdot \operatorname{ctg} \dots^\circ) \cdot (\operatorname{tg} 30^\circ \cdot \operatorname{ctg} \dots^\circ) = \dots \cdot \dots = \dots \end{aligned}$$

**5.** Subut ediň:  $\operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \dots \cdot \operatorname{tg} 88^\circ \cdot \operatorname{tg} 89^\circ = 1$ .

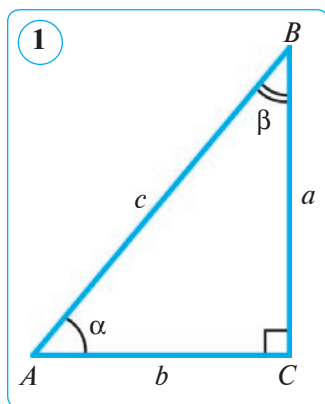
**6.** Aňlatmany yönekeýleşdiriň: 1)  $\cos^2\alpha + \cos^2(90^\circ - \alpha)$ ; 2)  $\sin^2\alpha - \cos^2(90^\circ - \alpha)$ .

**7.** Jedwelden peýdalanyp tapyň: 1)  $\sin 70^\circ$ ; 2)  $\cos 55^\circ$ ; 3)  $\operatorname{tg} 10^\circ$ ; 4)  $\operatorname{ctg} 18^\circ$ .

**8.** Jedwelden peýdalanyp,  $x$  ýiti burçy tapyň:  $\sin x \approx 0,1392$ .

## 25. GÖNÜBURÇLY ÜÇBURÇLUKLARY ÇÖZMEK

*Üçburçluklary çözmek* üçburçlugyň mälim burçlary we taraplary boýunça onuň nämälim taraplaryny we burçlaryny tapmaktan ybarat. Gönüburçly üçburçlugy tarapy we ýiti burçy ýa-da iki tarapy boýunça çözmek mümkin. Gönüburçly üçburçluklary çözmekde 1-nji suratdaky belgilemelerden peýdalanýarys. Munuň üçin meselniň manysyndand gelip çykmak bilen, trigonometrik funksiýalaryň bahalaryny on müňden birler öýjüginä çenli (dersligiň ahyryndaky goşmaça g.) ýa-da zerur bolsa, müňden birler öýjüginä çenli, taraplaryň uzynlyklaryny yüzden bire çenli, burçuň gradus ölçegini bire çenli tegelekläp almaga ylalaşýarys.



Gönüburçly üçburçlugyň elementlerini onuň iki mälim elementine görä hasaplamagyň 4 ýagdaýyna garap geçýäris.

1-nji ýagdaý. Üçburçlugy gipotenuzasy we ýiti burçy boýunça çözmek.

**1-nji mesele.** Gönüburçly üçburçlugyň gipotenuzasy  $c=10$  cm we ýiti burçy  $\alpha=50^\circ$  berlen.  $a$ ,  $b$  katetler we  $\beta$  ýiti burçy tapyň.

*Çözülişi.* 1) Gönüburçly üçburçlugyň ýiti burçlarynyň jemi  $90^\circ$ -a deň. Onda  $\beta=90^\circ-\alpha=90^\circ-50^\circ=40^\circ$ .

*1-nji usul.* 2)  $\alpha$  burçuň garşysyndaky katet gipotenuza bilen  $\alpha$  burçuň sinusynyň köpeltmek hasylyna deň, ýagny  $a=c \sin \alpha$ .

Diýmek,  $a=10 \sin 50^\circ=10 \cdot 0,7660 \approx 7,66$  (cm).

3)  $\alpha$  burça seplesýän katet gipotenuza bilen  $\alpha$  burçuň kosinusynyň köpeltmek hasylyna deň, ýagny  $b=c \cos \alpha$ .

Diýmek,  $b=10 \cos 50^\circ=10 \cdot 0,6428 \approx 6,43$  (cm).

*2-nji usul.* 2)  $a=c \cos \beta$ ;  $a=10 \cos 40^\circ=10 \cdot 0,7660 \approx 7,66$  (cm).

3)  $b=c \sin \beta$ ;  $b=10 \sin 40^\circ=10 \cdot 0,6428 \approx 6,43$  (cm).

*Jogaby:*  $a \approx 7,66$  cm;  $b \approx 6,43$  cm;  $\beta=40^\circ$ .

**2-nji ýagdaý. Üçburçlugy kateti we ýiti burçy boýunça çözmek.**

**2-nji mesele.** Gönüburçly üçburçlugyň kateti  $a=6$  cm we ýiti burçy  $\beta=22^\circ$  berlen.  $b$  katet,  $c$  gipotenuzany we  $\alpha$  ýiti burçy tapyň.

*Çözülişi.* 1) Gönüburçly üçburçlugyň ýiti burçlarynyň jemi  $90^\circ$ -a deň. Onda  $\alpha=90^\circ-\beta=90^\circ-22^\circ=68^\circ$ . *1-nji usul.* 2) Gipotenuza  $\beta$  ýiti burça seplesýän katetiň  $\beta$  burçunyň kosinusyna gatnaşygyna deň, ýagny  $c = \frac{a}{\cos \beta}$ .

Diýmek,  $c = \frac{a}{\cos \beta} = \frac{6}{\cos 22^\circ} = \frac{6}{0,9272} \approx 6,47$  (cm).

3) Kesgitlemä görä:  $\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}$ . Mundan  $b = a \operatorname{tg}\beta$ , ýagny

$$b = 6 \operatorname{tg} 22^\circ = 6 \cdot 0,4040 \approx 2,42 \text{ (cm)}.$$

2-nji usul. 2) Gipotenuza  $a$  ýiti burçuň garşysyndaky katetiň  $\alpha$  burçuň sinusyna gatnaşygyna deň, ýagny  $c = \frac{a}{\sin \alpha}$ .

Diýmek,  $c = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{6}{\sin 68^\circ} = \frac{6}{0,9272} \approx 6,47 \text{ (cm)}$ .

3) Kesgitlemä görä:  $\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}$ . Mundan  $b = a \operatorname{tg}\beta$ , ýagny

$$b = 6 \operatorname{tg} 22^\circ = 6 \cdot 0,4040 \approx 2,42 \text{ (cm)}.$$

Jogaby:  $c \approx 6,47 \text{ cm}$ ,  $b \approx 2,42 \text{ cm}$ ,  $\alpha = 68^\circ$ .



### Soraglar, meseleler we ýumuşlar

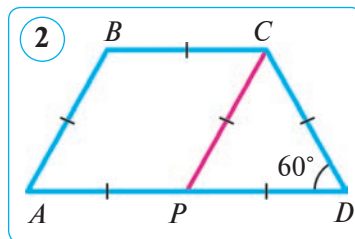
1. Gönüburçly üçburçlukda uzynlygy 7 cm-e deň bolan katet  $60^\circ$ -ly burça sepleşýär. Şu üçburçlugyň gipotenuzasyny tapyň.
2. Gönüburçly üçburçlugyň gipotenuzasy 12 cm-e, katetlerinden biri bolsa  $6\sqrt{2}$  cm-e deň. Üçburçlugyň ýiti burçlaryny tapyň.
3. Gönüburçly üçburçlugyň gipotenuzasy  $c=10$  cm we ýiti burçy  $\alpha=42^\circ$  berlen.  $a$ ,  $b$  katetler we  $\beta$  ýiti burçy tapyň. Meseläni iki usul (tekstdäki 1-nji meselä g.) bilen çözüň.
4. Gönüburçly üçburçlugyň kateti  $b=4$  cm we ýiti burçy  $\beta=18^\circ$  berlen.  $a$  katet,  $c$  gipotenuza we  $\alpha$  ýiti burçy tapyň. Meseläni iki usul (tekstdäki 2-nji meselä g.) bilen çözüň.
5. Aňlatmany yönekeyleşdiriň:  $\frac{\cos^2 \alpha}{(1 + \sin \alpha)(1 - \sin \alpha)} - \sin \alpha \cos(90^\circ - \alpha)$ .

6. Deňýanly trapesiýanyň esasyndaky burç  $60^\circ$ -a, gapdal tarapy bolsa kiçi esasyyna deň bolup,  $2\sqrt{2}$  cm-e deň. Şu trapesiýanyň uly esasyyny tapyň. Boş ýerlere degişli jogaby ýazyň.

Çözülişi.  $ABCD$  trapesiýa – deňýanly,  $\angle A = \angle D = 60^\circ$ ,  $AB = DC = BC = 2\sqrt{2}$  cm.

$CP \parallel BA$  geçirýäris (2-nji surat). Onda  $\angle A = \angle CPD = 60^\circ$  ( $CP \parallel BA$  hemde  $AD$  kesiji kesişmeginden emele gelen ... burçlar).  $CPD$  üçburçlugyň burçlary  $\dots^\circ$ -dan, diýmek, ol ... taraply. Şonuň üçin,  $CP = PD = \dots = 2\sqrt{2}$  cm. Onda  $AD = 2 \cdot 2\sqrt{2} = \dots$  (cm). Jogaby:  $4\sqrt{2}$  cm.

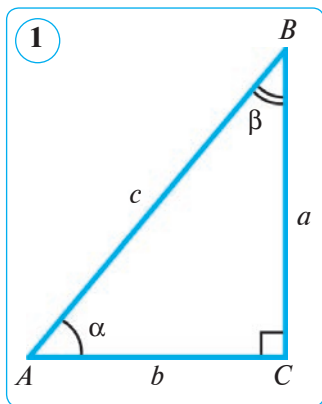
7. Gönüburçly üçburçlugyň gipotenuzasy  $c=8$  cm we ýiti burçy  $\alpha=30^\circ$  berlen. Onuň  $a$ ,  $b$  katetlerini we  $\beta$  ýiti burçuny tapyň. Meseläni iki usul (tekstdäki 1-nji meselä g.) bilen çözüň.



## 26. GÖNÜBURÇLY ÜÇBURÇLUKLARY ÇÖZMEK (DOWAMY)

### 3-nji ýagdaý. Üçburçlugy gipotenuzasy we kateti boýunça çözmek.

**1-nji mesele.** Gönüburçly üçburçlugyň gipotenuzasy  $c=13$  cm we kateti  $a=5$  cm berlen. Onuň  $b$  kateti,  $\alpha$  we  $\beta$  ýiti burçlaryny tapyň.



*Çözülişi.* 1) Pifagoryň teoremasyna görä:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12 \text{ cm.}$$

*1-nji usul.* 2)  $\alpha$  ýiti burçuň sinusynyň kesgitlemesine görä:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{5}{13} \approx 0,3846.$$

Mundan  $\alpha \approx 23^\circ$ .

3) Gönüburçly üçburçlugyň ýiti burçlarynyň jemi  $90^\circ$ -a deň. Onda

$$\beta = 90^\circ - \alpha \approx 90^\circ - 23^\circ = 67^\circ.$$

*Jogaby:*  $b=12$  cm,  $\alpha \approx 23^\circ$ ,  $\beta \approx 67^\circ$ .

*2-nji usul.* 2)  $\beta$  ýiti burçuň sinusynyň kesgitlemesine görä:

$$\sin \beta = \frac{b}{c} = \frac{12}{13} \approx 0,9231.$$

Mundan  $\beta \approx 67^\circ$ .

3) Gönüburçly üçburçlugyň ýiti burçlarynyň jemi  $90^\circ$ -a deň. Onda

$$\alpha = 90^\circ - \beta \approx 90^\circ - 67^\circ = 23^\circ.$$

*Jogaby:*  $b=12$  cm,  $\alpha \approx 23^\circ$ ,  $\beta \approx 67^\circ$ .

### 4-nji ýagdaý. Üçburçlugy iki kateti boýunça çözmek.

**2-nji mesele.** Gönüburçly üçburçlugyň katetleri  $a=8$  cm we  $b=15$  cm berlen. Onuň  $c$  gipotenuzasyny,  $\alpha$  we  $\beta$  ýiti burçlaryny tapyň.

*Çözülişi.* 1) Pifagoryň teoremasyna görä:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{64 + 225} = \sqrt{289} = 17 \text{ (cm).}$$

*1-nji usul.* 2)  $\alpha$  ýiti burçuň tangensiniň kesgitlemesine görä:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{8}{15} \approx 0,5333.$$

Mundan  $\alpha \approx 28^\circ$ .

3) Gönüburçly üçburçlugyň ýiti burçlarynyň jemi  $90^\circ$ -a deň. Onda

$$\beta = 90^\circ - \alpha \approx 90^\circ - 28^\circ = 62^\circ.$$

*Jogaby:*  $c=17$  cm,  $\alpha \approx 28^\circ$ ,  $\beta \approx 62^\circ$ .

2-nji usul. 2)  $\beta$  ýiti burçuň tangensiniň kesgitlemesine görä:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a} = \frac{15}{8} = 1,875.$$

Mundan  $\beta \approx 62^\circ$ .

3) Gönüburçly üçburçlugyň ýiti burçlarynyň jemi  $90^\circ$ -a deň. Onda

$$\alpha = 90^\circ - \beta \approx 90^\circ - 62^\circ = 28^\circ.$$

Jogaby:  $c = 17$  cm,  $\alpha \approx 28^\circ$ ,  $\beta \approx 62^\circ$ .

3-nji usul. 1)  $\alpha$  ýiti burçuň kotangensiniň kesgitlemesine görä:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a} = \frac{15}{8} = 1,875.$$

Mundan  $\alpha \approx 28^\circ$ .

2) Gönüburçly üçburçlugyň ýiti burçlarynyň jemi  $90^\circ$ -a deň. Onda

$$\beta = 90^\circ - \alpha \approx 90^\circ - 28^\circ = 62^\circ.$$

3) Pifagoryň teoremasyna görä:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{64 + 225} = \sqrt{289} = 17 \text{ (cm)}.$$

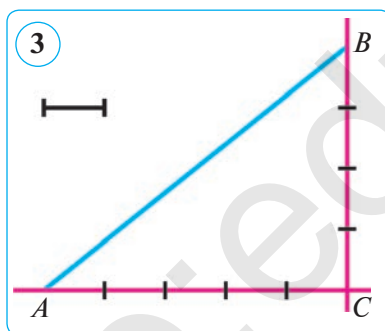
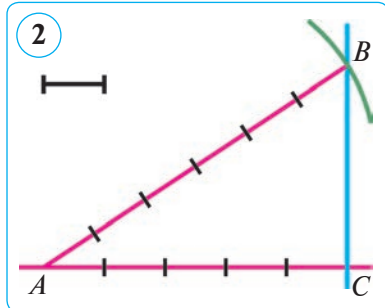
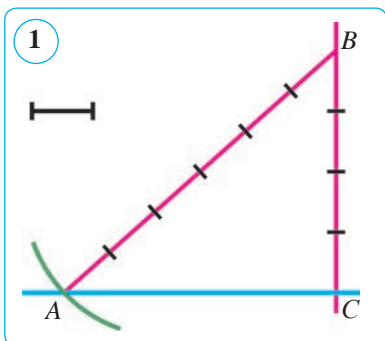
Jogaby:  $c = 17$  cm,  $\alpha \approx 28^\circ$ ,  $\beta \approx 62^\circ$ .



### Soraglar, meseleler we ýumuşlar

- Gönüburçly  $ABC$  üçburçlukda  $\angle C = 90^\circ$ , gipotenuza  $c = 9\sqrt{2}$  cm, katet  $a = 9$  cm. Şu üçburçlugyň  $b$  katetini,  $\alpha$  we  $\beta$  ýiti burçlaryny tapyň. Iki usul bilen çözüň.
- Gönüburçly  $ABC$  üçburçlukda  $\angle C = 90^\circ$ , katetleri  $a = 6\sqrt{3}$  cm we  $b = 6$  cm. Şu üçburçlugyň  $c$  gipotenuzasyny,  $\alpha$  we  $\beta$  ýiti burçlaryny tapyň. Iki usul bilen çözüň.
- Gönüburçly  $ABC$  üçburçlukda  $\angle C = 90^\circ$ , katetleri  $a = \sqrt{11}$  cm we  $b = 5$  cm. Şu üçburçlugyň  $c$  gipotenuzasyny,  $\alpha$  we  $\beta$  ýiti burçlaryny tapyň. Iki usul bilen çözüň.
- $CD$  kesim – gönüburçly  $ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ) üçburçlugyň gipotenuzasyna geçirilen beýikligi. Subut ediň:  
1)  $\frac{CD}{\sin A} = AB \cos A$ ;    2)  $AD \operatorname{tg} A = BD \operatorname{tg} B$ .
- Hasaplaň:  $2\sin 60^\circ + 4\cos 60^\circ - \operatorname{ctg} 30^\circ - 2\operatorname{tg} 45^\circ$ .
- Gönüburçly  $ABC$  üçburçlukda  $\angle C = 90^\circ$ , gipotenuza  $c = 25$  cm, katet  $b = 24$  cm. Şu üçburçlugyň  $a$  katetini,  $\alpha$  we  $\beta$  ýiti burçlaryny tapyň. Iki usul bilen çözüň.
- Gönüburçly  $ABC$  üçburçlukda  $\angle C = 90^\circ$ , katetleri  $a = 10$  cm we  $b = 24$  cm. Şu üçburçlugyň  $c$  gipotenuzasyny,  $\alpha$  we  $\beta$  ýiti burçlaryny tapyň. Iki usul bilen çözüň.

## 27. GÖNÜBURÇLY ÜÇBURÇLUKLARY GURMAK



**1-nji mesele.** Sinusy  $\frac{4}{5}$ -e deň bolan burçy gurmak.

Munuň üçin  $C$  göni burç gurýarys we onuň taraplaryndan birinde burçuň depesinden başlap 4 sany islendik masştab birligine deň  $CB$  kesimi goýýarys (1-nji surat). Merkezi  $B$  nokatda we radiusy 5 sany masştab birligine deň radiusly dugany burçuň ikinji tarapy bilen kesişýänçe çyzýarys. Olaryň kesişme nokadyny  $A$  bilen belgileýäris.  $A$  we  $B$  nokatlary birleşdirip, gönüburçly  $ABC$  üçburçlugy alarys.  $A$  – gözlenýän burç, onuň sinusy  $\frac{4}{5}$  -e deň bolýar, ýagny  $\sin A = \frac{4}{5}$ .

**2-nji mesele.** Kosinusy  $\frac{5}{6}$  -e deň bolan burçy gurmak.

Munuň üçin  $C$  göni burç gurýarys we onuň taraplaryndan birinde burç depesinden başlap 5 sany islendik masştab birligine deň  $AC$  kesimi goýýarys (2-nji surat). Merkezi  $A$  nokatda we radiusy 6 sany masştab birligine deň radiusly dugany burçuň ikinji tarapy bilen kesişýänçe çyzýarys. Olaryň kesişme nokadyny  $B$  bilen belgileýäris.  $A$  we  $B$  nokatlary birleşdirip, gönüburçly  $ABC$  üçburçlugy alarys.  $A$  – gözlenýän burç, onuň kosinusy  $\frac{5}{6}$  -e deň bolýar,

ýagny  $\cos A = \frac{5}{6}$ .

**3-nji mesele.** Tangensi  $\frac{4}{5}$ -e deň bolan burçy gurmak.

Munuň üçin  $C$  göni burç gurýarys we onuň taraplaryndan birinde burçuň depesinden başlap 5 sany islendik masştab birligine deň  $CA$  kesimi, ikinjide bolsa 4 masştab birligine deň  $CB$  kesimi goýýarys (3-nji surat).  $A$  we  $B$  nokatlary birleşdirip, gönüburçly  $ABC$  üçburçlugy alarys.  $A$  – gözlenýän burç, onuň tangensi  $\frac{4}{5}$  -e deň bolýar, ýagny  $\operatorname{tg} A = \frac{4}{5}$ .

Berlen kotangense görä burç gurmak talap edilende-de edil şeýle gurmaga dogry gelýär, diňe munda gözlenýän burç üçin  $AC$ -ge seplesýän kateti almany bolýar.

Gönüburçly üçburçlugyň kateti hemişe gipotenuzadan kiçi. Şonuň üçin ýiti burçuň sinusy we kosinusy hemişe 1-den kiçidir.

Katetleriň uzynlyklaryny deňeşdirmekden görnüşi ýaly, olar özara deň, biri ikinjiden uly ýa-da kiçi bolmagy mümkin. Şonuň üçin ýiti burçuň tangensleri we kotangensleri islendik položitel san bolmagy mümkin. Diýmek, olaryň her biri katetlere baglylykda 1-den kiçi, 1-den uly we 1-e deň bolýar.

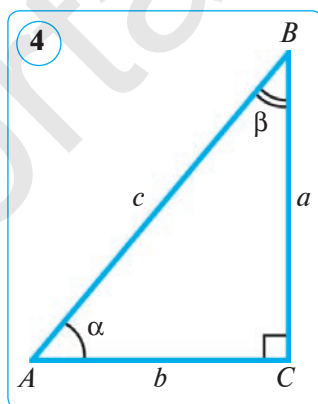
### Soraglar, meseleler we ýumuşlar

1. 1)  $\operatorname{tg}A = \frac{3}{5}$ ; 2)  $\sin A = \frac{2}{3}$  -ä deň bolan, gönüburçly  $ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ) üçburçlugy çyzyň.

2. 1)  $\sin A = \frac{5}{8}$ ; 2)  $\cos A = \frac{3}{4}$  -e deň bolan, gönüburçly  $ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ) üçburçlugy çyzyň.

3. Gönüburçly  $ABC$  üçburçlukda  $\angle C = 90^\circ$ , gipotenuza  $c = 7\sqrt{2}$  cm, katet  $b = 7$  cm. Üçburçlugyň  $a$  katetini,  $\alpha$  we  $\beta$  ýiti burçlaryny (4-nji surat) tapyň.

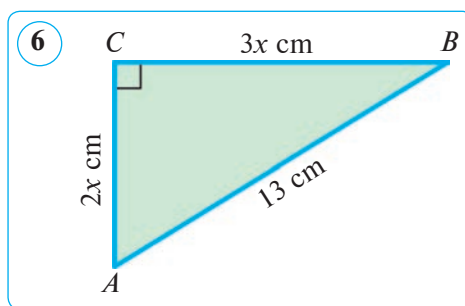
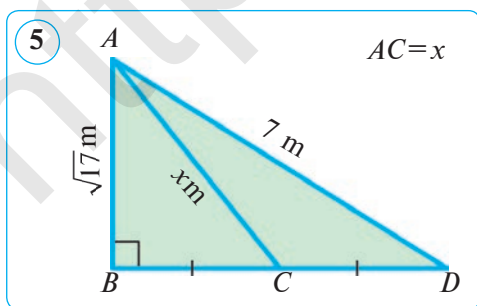
4. Gönüburçly  $ABC$  üçburçlukda  $\angle C = 90^\circ$ , gipotenuza  $c = 12$  cm,  $\alpha = 60^\circ$ . Üçburçlugyň  $a$ ,  $b$  katetlerini,  $\beta$  ýiti burçuny (4-nji surat) tapyň. Meseläni iki usul bilen çözüň.



5. Nämälim uzynlyklary tapyň (5–6-njy suratlar).

6. Gönüburçly  $ABC$  üçburçlukda  $\angle C = 90^\circ$ , gipotenuza  $c = 74$  cm,  $\sin \alpha = \frac{12}{37}$ . Şu üçburçlugyň perimetrini (4-nji surat) tapyň.

7. 1)  $\sin A = \frac{4}{7}$ ; 2)  $\cos A = \frac{3}{5}$ ; 3)  $\operatorname{tg}A = \frac{2}{5}$  -ä deň bolan gönüburçly  $ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ) üçburçlugy çyzyň.

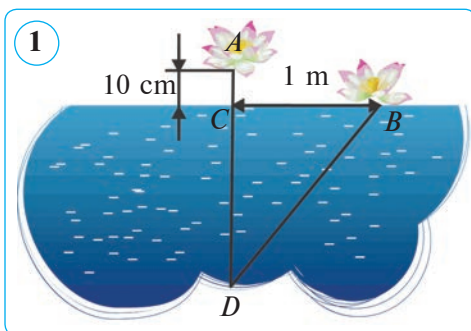


## 28. AMALY GÖNÜKME WE ULANYLYŞY

### 1. Pifagoryň teoremasynyň amaly ulanylyşyna degişli meseleler.

**1-nji mesele.** Suw liliýasy gülüniň kölüň üstünden görünýän bölegi 10 cm. Eger güli başlangyç ýagdaýyndan bir tarapa 1 m çekilse, suw üstüne degýär. Kölüň şu ýerdäki çuňlugyny tapyň.

**Çözülişi.** Kölüň gözlenýän  $CD$  çuňluguny  $x$  bilen belgileýäris (1-nji surat). Onda  $BD=AD=AC+CD=0,1+CD=0,1+x$  (m)-e deň bolýar. Onda gönüburçly  $BCD$  üçburçlukdan Pifagoryň teoremasyna görä aşakdakylara eýe bolarys:



$$BD^2 - CD^2 = BC^2, (0,1+x)^2 - x^2 = 1,$$

mundan:

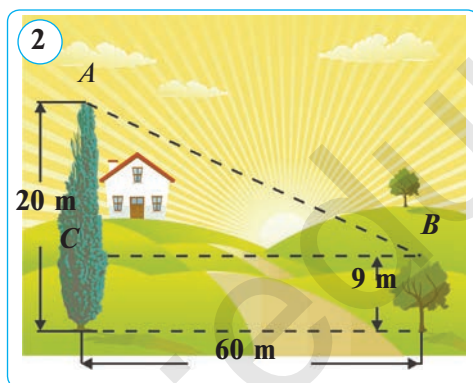
$$0,01 + 0,2x + x^2 - x^2 = 1;$$

$$0,2x = 0,99; x = 0,99 : 0,2;$$

$$x = 9,9 : 2; x = 4,95 \text{ (m)}.$$

**Jogaby:** kölüň çuňlugy 4,95 m.

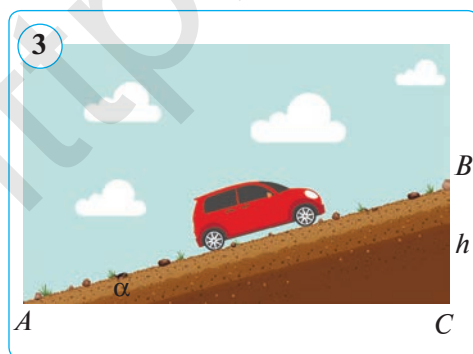
**2-nji mesele.** Bir daragtyň beýikligi 20 m, ikinjiniňki bolsa 9 m. Bu daragtlaryň arasyndaky aralyk 60 m. Şu iki daragtyň uçlarynyň arasyndaky aralygy tapyň (2-nji surat). Özbaşdak çözüň.



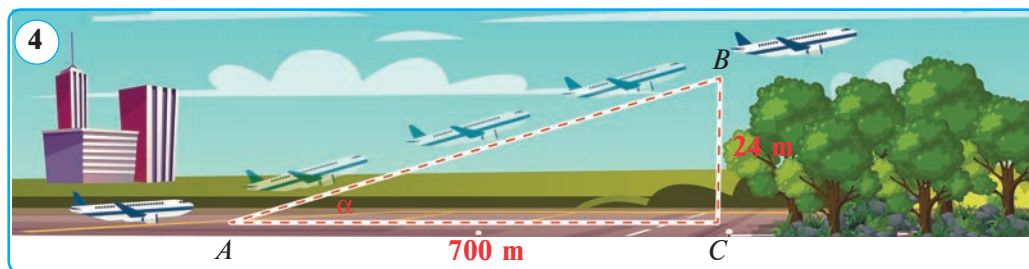
**3-nji mesele.** Iki sosna agajynyň beýiklikleri degişlilikde 21 m we 28 m, bu daragtlaryň arasyndaky aralyk bolsa 24 m. Iki daragtyň uçlarynyň arasyndaky aralygy tapyň (2-nji surata garaň). Özbaşdak çözüň.

**2. Ýiti burçuň sinusynyň amaly ulanylyşyna degişli mesele.**

Ýapgyt tekiz ýoluň ýokary galýan ýeriniň dikligini gorizonta görä ýokary galma burçy arkaly bermek mümkin (3-nji surat). Köplenç ýokary galýan ýeriň dikligini ýokary galyş burçundan görä geçilen ýoluň uzynlygynyň ýokary galyş beýikligi arkaly bermek amatly. Meselem, maşyn 100 m aralygy geçende 2 m beýiklige galan bolsun. Munda ýokary galyş ýeriniň dikligi beýikligiň geçilen ýola gatnaşygy bilen berilýär.







Ýokary galyş beýikligi  $\frac{2 \text{ m}}{100 \text{ m}} = 0,02$ -ä deň. Bu gatnaşyk geçilen ýola bagly däl. Ýapgyt tekiz ýoldan düşende-de edil şuna meňzeş pikir ýöretmek mümkin.

**4-nji mesele.** Ýeňil maşyn eňňitligi  $15^\circ$  bolan ýapgyt ýol boýunça ýokary galýar (3-nji surata g.). Ol ýapgytlyga galýan ýerinden 300 m ýol geçensoň gorizonta görä näçe metr beýiklikde bolar?

**Görkezme.** Ýiti burç sinusynyň kesgitlemesini ulanyň, ýokary galyş beýikligini tapyň.

### 2. Ýiti burçuň tangensiniň amaly ulanylyşyna degişli meseleler.

**5-nji mesele.** Samolýot uçuş ýodasyndan howa galýan nokatdan 700 m aralykda tokaýlyk ýerleşen bolup, daragtlaryň maksimal beýikligi 24 m-e deň. Samolýot bu daragtlara degmez ýaly nähili burç astynda ýokary galmaly?

**Çözülişi.** Gönüburçly  $ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ) üçburçlukda  $AC = 700 \text{ m}$ ,  $BC = 24 \text{ m}$  (4-nji surat). Ýiti burçuň tangensiniň kesgitlemesinden tapýarys:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{24}{700} \approx 0,0343 \Rightarrow \alpha \approx 2^\circ$$

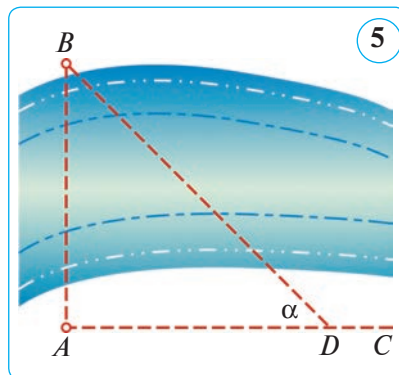
**Jogaby:** samolýot daragtlara degmezden uçmagy üçin uçuş nokadyndan  $2^\circ$ -dan kem bolmadyk burç astynda ýokary galmaly.

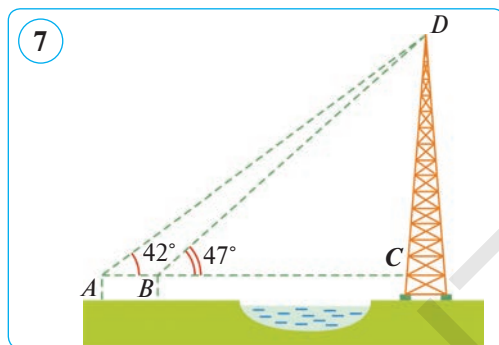
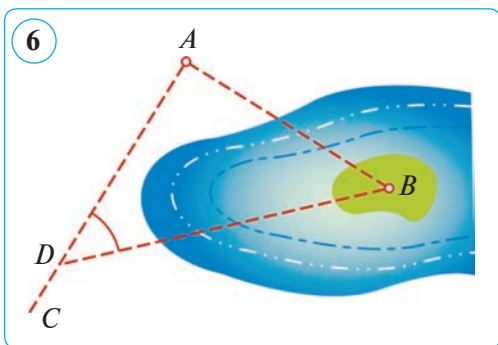
**6-njy mesele.** A punktadan derýanyň aňyrsyndaky baryp bolmaýan B punkta çenli bolan aralygy tapyň (5-nji surat).

**Çözülişi.** Usturlob (astrolýabiýa, gorizont tekizlikde ýerleşen burçlary ölçemek üçin ulanylýan abzal, ýagny burç ölçýji) ýa-da ekkeriň kömeginde A nokatda göni  $BAC$  burçy gurýarys.  $AC$  göni çyzykda islendik  $D$  nokady alyp, usturlobyň kömeginde  $ADB$  burçy ölçýäris. Aýdaly, ol  $44^\circ$ -a deň bolsun. Soňra  $AD$  aralygy ölçýäris, ol 120 m bolsun.  $AB$  aralygy ýiti burçuň tangensinden peýdalanyp tapýarys:

$$\begin{aligned} \frac{AB}{120} &= \operatorname{tg} 44^\circ \Rightarrow AB = 120 \cdot \operatorname{tg} 44^\circ \approx \\ &\approx 120 \cdot 0,9657 \approx 116 \text{ (m)}. \end{aligned}$$

**Jogaby:**  $\approx 116 \text{ m}$ .





**7-nji mesele.** A punktдан baryp bolmaýan adajykda  $B$  punkta çenli bolan aralygy tapyň (6-njy surat).

*Görkezme.* 5-nji meselä meňzeş pikir ýöredilýär.  $\angle ADB = 48^\circ$  we  $AD = 200$  m diýip, meseläni çözüň.

**8-nji mesele.** Esasyna baryp bolmaýan obýekt, meselem, elektrik geçirijiniň beýikligini ölçemek talap edilýän bolsun (7-nji surat).

*Çözülişi.* Gönüburçly  $ACD$  üçburçluga garaýarys. Bu üçburçluga  $A$  burçuny usturlobyň kömeginde ölçäp bileris, goý, ol  $42^\circ$ -a deň bolsun.

Gönüburçly  $BCD$  üçburçlukda  $DBC$  burçy ölçeyäris, ol  $47^\circ$ -a deň bolsun.

Ýiti burçuň tangensiniň kesgitlemesine esasan  $ACD$ -dan tapýarys:

$$\frac{CD}{AC} = \operatorname{tg}42^\circ \Rightarrow AC = \frac{CD}{\operatorname{tg}42^\circ}. \quad (1)$$

Ýiti burçuň tangensiniň kesgitlemesine esasan  $BCD$ -dan tapýarys:

$$\frac{CD}{BC} = \operatorname{tg}47^\circ \Rightarrow BC = \frac{CD}{\operatorname{tg}47^\circ}. \quad (2)$$

$A$ ,  $B$  we  $C$  nokatlar bir göni çyzykda ýatýar. (1)-dan (2)-ny aýyryarys:

$$\begin{aligned} AC - BC &= \frac{CD}{\operatorname{tg}42^\circ} - \frac{CD}{\operatorname{tg}47^\circ} \Rightarrow AC - BC = CD \left( \frac{1}{\operatorname{tg}42^\circ} - \frac{1}{\operatorname{tg}47^\circ} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow AC - BC &= CD \left( \frac{1}{0,9004} - \frac{1}{1,0724} \right) \Rightarrow AC - BC = CD(1,1106 - 0,9325) \Rightarrow \\ \Rightarrow AC - BC &= CD \cdot 0,1781 \Rightarrow CD = \frac{AC - BC}{0,1781}. \end{aligned}$$

$AC - BC$ , ýagny  $AB$  aralygy gönüden-göni ölçäp bileris, goý, ol 12 m-e deň bolsun. Onda

$$CD = \frac{AC - BC}{0,1781} = \frac{AB}{0,1781} = \frac{12}{0,1781} \approx 67,4 \text{ (m)}.$$

*Jogaby:*  $\approx 67,4$  m.

Daş-töweregiňizden garalan meselelere meňzeş meseleler ýeterli tapylyar. Özbaşdak meseleler düzüň we çözüň.

**29–30. 2-NJI BARLAG IŞI. YÁLŇYŞLAR ÜSTÜNDE IŞLEMEK**

1. Gönüburçly üçburçlugyň gipotenuzasy 20 cm-e, ýiti burçlaryndan biriniň sinusy 0,5-e deň. Üçburçlugyň katetlerini tapyň.
2. Gönüburçly üçburçlugyň gipotenuzasy 13 cm-e, ýiti burçlaryndan biriniň kosinusy  $\frac{5}{13}$ -e deň. Üçburçlugyň katetlerini tapyň.
3. Aňlatmany ýönekeýleşdiriň:  $(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)^2 + 2 \sin\alpha \cos\alpha$ .
4. Taraplary: 1)  $a=c=17$  cm,  $b=16$  cm; 2)  $a=30$  cm,  $b=34$  cm,  $c=16$  cm bolan üçburçlugyň beýikligini tapyň.

**2-nji test**

**Özüňizi synap görüň!**

1. Gönüburçly üçburçlugyň katetlerinden biri 12 cm, gipotenuzasy bolsa ikinji katetden 6 cm uzyn. Gipotenuzanyň uzynlygyny tapyň.  
A) 15 cm;      B) 25 cm;      D) 26 cm;      E) 18 cm.
2. Gönüburçly üçburçlugyň katetlerinden biri 12 cm, ikinji bolsa gipotenuzadan 8 cm gysga. Şu üçburçlugyň gipotenuzasy tapyň.  
A) 15 cm;      B) 16 cm;      D) 13 cm;      E) 25 cm.
3. Gönüburçly üçburçlugyň gipotenuzasy 25 cm, katetleri özara 3:4 gatnaşykda. Şu üçburçlugyň kiçi katetini tapyň.  
A) 10 cm;      B) 15 cm;      D) 9 cm;      E) 20 cm.
4. Taraplary 13 cm, 14 cm we 15 cm bolan üçburçlugyň in kiçi beýikligi näçe santimetr?  
A) 11,5 cm;      B) 11,1 cm;      D) 11 cm;      E) 11,2 cm.
5. Rombuň diagonallary 14 cm we 48 cm-e deň. Şu rombuň perimetrini tapyň.  
A) 60 cm;      B) 100 cm;      D) 80 cm;      E) 120 cm.
6. Rombuň perimetri 68 cm, diagonallarydan biri 30 cm-e deň. Onuň ikinji diagonalyny tapyň.  
A) 12 cm;      B) 8 cm;      D) 16 cm;      E) 20 cm.
7. Gönüburçly üçburçlugyň katetlerinden biri  $5\sqrt{3}$  cm-e, onuň garşysyndaky burç bolsa  $60^\circ$ -a deň. Üçburçlugyň gipotenuzasy tapyň.  
A)  $5\sqrt{3}$  cm;      B)  $2\sqrt{15}$  cm;      D) 5 cm;      E) 10 cm.
8. Gönüburçly üçburçlugyň katetlerinden biri  $5\sqrt{3}$  cm, oňa seplesýän burç bolsa  $30^\circ$ -a deň. Şu üçburçlugyň ikinji katetini tapyň.  
A)  $5\sqrt{3}$  cm;      B)  $2\sqrt{15}$  cm;      D) 5 cm;      E) 10 cm.
9. Gönüburçly  $ABC$  ( $\angle C=90^\circ$ ) üçburçlugyň gipotenuzasy 17 cm-e, katetleri bolsa 15 cm we 8 cm-e deň. A burçuň sinusyny tapyň.  
A)  $\frac{8}{15}$ ;      B)  $\frac{8}{17}$ ;      D)  $\frac{17}{15}$ ;      E)  $\frac{15}{17}$ .

10. Gönüburçly  $ABC$  ( $\angle C=90^\circ$ ) üçburçlugyň gipotenuzasy 37 cm-e, katetleri bolsa 12 cm we 35 cm-e deň.  $B$  burçuň kosinusyny tapyň.

- A)  $\frac{12}{37}$ ;      B)  $\frac{35}{37}$ ;      D)  $\frac{12}{35}$ ;      E)  $\frac{35}{12}$ .



**Iňlis dilini öwrenýäris!**

**Pifagoryň teoremasy** – Pythagorean theorem

**Ters teorema** – inverse function theorem

**Trigonometriýa** – trigonometry

**Gipotenuza** – hypotenuse

**Sinus** – sine

**Kosinus** – cosine

**Tangens** – tangent

**Kotangens** – cotangent



**Taryhy maglumatlar**



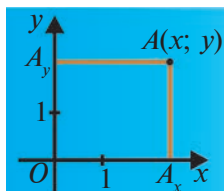
**Pifagor**

(miladydan öňki 570–500-nji ý.)

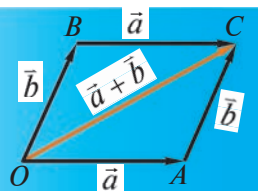
Gadymky grek filosofy we matematigi **Pifagor** miladydan öňki VI asyryň ikinji ýarymynda (miladydan öňki 570–500-nji ýyllar) Egeý deňziniň Samos adasyn-da doglan we Tarentde aradan çykan diýip takmyn edilýär. Pifagor Günorta Italiýanyň grekleriň koloniýasy bolan Kroton şäherine (takmynan miladydan öňki 530-njy ý.) göçüp gelip, şu ýerde öz mekdebini esaslandyrypdyr. Biz bu mekdebiň alyp baran geometrik barlag işleriniň netijeleri barada soňrak ýaşap geçen grek matematikleriniň eserlerinden bilýäris. Pifagor alyp baran geometrik işleriniň özi bize çenli ýetip gelmändir.

Pifagor birinji bolup sanlary jübüt we täk, düýp we çylşyrymly sanlara bölüpdir. Onuň mekdebinde «Pifagoryň sanlary» diýilýän natural sanlaryň üçlükleri doly garalypdyr. Pifagoryň teoremasy gaty köp geometrik hasaplamaalaryň esasyny düzýär. Häzirki günde Pifagoryň teoremasynyň ýüzden artyk subutlary bar. Olardan käbirleri kwadrat-lary böleklere bölmäge esaslanan, munda katetlere gurlan kwadratlaryň bölekle-rinden gipotenuza gurlan kwadrat düzülen; başgalary deň şekillere doldurmaga, üçünjileri bolsa göni burçuň depesinden gipotenuza geçirilen beýiklik gönüburçly üçburçlugy iki meňzeş üçburçluga bölüşine esaslanan.

Gadymky Mesopotamiýada deňyanly üçburçlugyň gapdal tarapy we esasy uzynlygyna görä onuň beýikligini tapypdyrlar. Käbir çeşmelere görä, Pifago-ryň mekdebinde göni çyzykly şekilleri deňdeş şekillere bölmegiň geometrik us-ullaryndan teoremalary subut etmekte we meseleler çözendä peýdalanypdyr. Çünki göni çyzykly şekilleri geometrik çalyşma meselesi amaly işlerden gelip çykypdyr.



### III BAP KOORDINATAR USULY. WEKTORLAR



#### 7-§.

#### TEKIZLIKDE KOORDINATAR SISTEMASY

### 31. TEKIZLIKDE NOKADYŇ KOORDINATALARY. KESIMIŇ ORTASYNYŇ KOORDINATALARY

**1. Tekizlikde nokadyň koordinatalary.** Tekizlikde özara perpendikulýar  $x$  we  $y$  oklary geçirýäris. Olaryň kesişme nokadyny  $O$  harpy bilen belgiläliň. Bu nokady her bir ok üçin *hasap başy* diýip, her bir okda özara deň *birlik kesimi* alýarys.  $Ox$  okdaky ugur «çepden saga»,  $Oy$  okundaky ugur bolsa «pesden ýokary» bolýar (1-nji surat). Munda tekizlikde  $xOy$  gönüburçly koordinatar sistemasy anyklanan, diýilýär. Bu sistemany ylma fransuz alymy **Rene Dekart** gízendigi üçin **Dekartyň koordinatar sistemasy** hem diýilýär.  $Ox$  oka **abssissalar oky** (ýa-da  $x$  oky),  $Oy$  oka bolsa **ordinatar oky** (ýa-da  $y$  oky) diýilýär. Absissalar oky gorizonttal, ordinatar oky wertikal ýerleşen.

Dekartyň koordinatar sistemasy ýatýan tekizlige **koordinatar tekizligi** diýilýär.

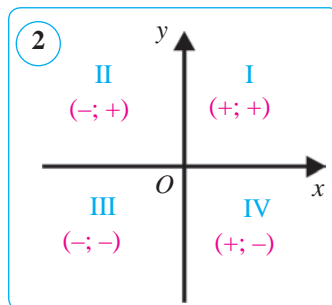
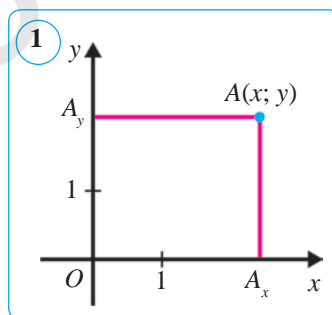
$A$  – koordinata tekizliginde alnan islendik nokat bolsun.  $A$  nokatdan  $Ox$  we  $Oy$  oklaryna parallel göni çyzyklar geçirýäris. Olar  $Ox$  we  $Oy$  oklary bilen, degişlilikde,  $A_x$  we  $A_y$  nokatlarda kesişýär, diýeliň (1-nji surata g.).

$AA_x$  kesimiň uzynlygy  $x$ ,  $AA_y$  kesimiň uzynlygy  $y$  bolsun.  $x$  sana  $A$  nokadyň **abssissasy**,  $y$  sana bolsa  $A$  nokadyň **ordinatasy** diýilýär.

$x$  we  $y$  sanlar jübütine  $A$  nokadyň **koordinatalary** diýilýär we  $A(x; y)$  ýaly belgilenýär. Koordinatalary aňlatmakda birinji abssissa, soň ordinata ýazylyar.

Şeýlelikde: 1) koordinata tekizliginde her bir  $A$  nokada sanlar jübüti  $(x; y)$  laýyk gelýär; 2) islendik sanlar jübütini  $(x; y)$  koordinata tekizligindäki käbir  $A$  nokadyň koordinatalary diýmek mümkin; 3) eger  $x \neq y$  bolsa, onda  $(x; y)$  we  $(y; x)$  jübütlikler koordinata tekizliginde dürli nokatlary aňladýar.

Koordinata başlangyjy –  $O$  nokadyň koordinatalary  $O(0; 0)$ -dan ybarat.  $Ox$  okundaky islendik  $B$  nokadyň koordinatasy  $B(x; 0)$ ,  $Oy$  okundaky islendik  $C$  nokadyň koordinatasy  $C(0; y)$  görnüşinde bolýar.



$Ox$  we  $Oy$  oklar tekizligi dört göni burça bölýär, olara *koordinata çärýekleri* ýa-da *koordinata burçlary* diýilýär. Koordinata çärýekleri rim sifrleri bilen belgilenýär hem-de olar sagat millerine garşy ugur boýunça nomerlenýär. Nokadyň koordinatalarynyň çärýeklerdäki alamatlarynyň belgilenişi 2-nji suratda görkezilen.

Geometrik şekilleri we olaryň häsiýetlerini koordinatalarda ulanyp öwrenmäge garap geçýäris.

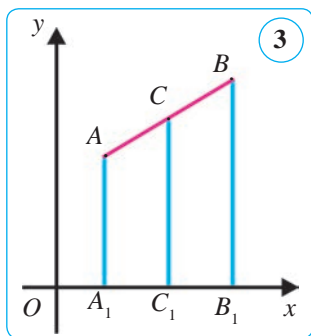
## 2. Kesimiň ortasynyň koordinatalary.

### Teorema.

**Kesimiň ortasynyň koordinatalary aşakdaky formulalar boýunça hasaplanýar:**

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2},$$

munda  $A(x_1; y_1)$  we  $B(x_2; y_2)$  – kesimiň uçlary,  $C(x; y)$  – kesimiň ortasy.



*Subudy.*  $C$  nokadyň  $x$  we  $y$  kordinatalaryny tapýarys.  $AB$  kesim  $Ox$  okuny kesmedik bolsun, ýagny  $x_1 < x_2$  ýagdaýa garap geçýäris (3-nji surat).  $Ox$  okuna  $AA_1$ ,  $BB_1$  we  $CC_1$  perpendikulýar göni çyzyklary geçirýäris.  $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$  hemde perpendikulýaryň esaslary  $A_1(x_1; 0)$ ,  $B_1(x_2; 0)$  we  $C_1(x; 0)$  koordinatalara eýedigi aýdyň.  $C$  nokat  $AB$  kesimiň ortasy bolany üçin, Falesiň teoremasyna görä,  $C_1$  nokat  $A_1B_1$  kesimiň ortasy bolýar we diýmek,  $A_1C_1 = C_1B_1$ , ýagny  $x_2 - x = x - x_1$ . Mundan şu

formulany tapýarys:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

$x_1 = x_2$ , ýagny  $AB$  kesim  $Oy$  okuna parallel bolsa, üç nokat –  $A_1$ ,  $B_1$  we  $C_1$  bir meňzeş absissa eýe bolýar. Diýmek, formula munda-da ýerlikli boluberýär.

$x_1 > x_2$  bolan ýagdaýda-da ýokardaky netijä gelyäris (muny özbaşdak barlamagy özüňize hödürleýäris).

$C$  nokadyň ordinatasy hem şuna meňzeş tapylýar.  $A$ ,  $B$  we  $C$  nokatlar arkaly  $Oy$  okuna perpendikulýar göni çyzyklar geçirilýär. Şu formula emele gelyär:

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

**Mesele.** Depeleri  $A(-2; 1)$ ,  $B(0; 4)$ ,  $C(4; 1)$  we  $D(2; -2)$  nokatlarda bolan  $ABCD$  dörtburçlугyň parallelogramdygyny subut ediň.

*Çözülişi.* Parallelogramyň nyşanyna görä, dörtburçlугyň diagonallary kesişme nokadynda deň ikä bölünse, bu dörtburçlугyň parallelogramdygy mälim.

Berlen  $ABCD$  dörtdörtburçlugyň  $AC$  we  $BD$  diagonallary ortasynyň koordinatalaryny tapýarys.  $AC$  kesimiň ortasy aşakdaky koordinata eýe:

$$x = \frac{-2+4}{2} = 1, \quad y = \frac{1+1}{2} = 1.$$

$BD$  kesimiň ortasy aşakdaky koordinata eýe:

$$x = \frac{0+2}{2} = 1, \quad y = \frac{4+(-2)}{2} = 1.$$

Şeýdip,  $AC$  we  $BD$  diagonallaryň kesişme nokady umumy  $(1; 1)$  koordinata eýe eken. Diýmek, parallelogram nyşanyna görä,  $ABCD$  dörtdörtburçluk parallelogramdyr. Şony subut etmek talap edilipdi.

### Soraglar, meseleler we ýumuşlar

1. 1) Koordinata oklary we olaryň kesişen nokady nähili atlandyrylýar?
- 2) Koordinatalar tekizligi diýip nämä aýdylýar? Tekizlikdäki nokadyň koordinatalary diýende nämäni düşüňärsiňiz?
2.  $A(4; -5)$  nokatdan koordinatalar oklaryna perpendikulýarlar geçirilen. Şu perpendikulýarlaryň esasynyň koordinatalaryny ýazyň.
3. Eger: 1)  $x = -4, y = -6$ ; 2)  $x = -3, y = 5$ ; 3)  $x > 0, y < 0$ ; 4)  $x > 0, y > 0$  bolsa,  $A(x; y)$  nokadyň haýsy çärýekde ýatýandygyny anyklaň.
4. Eger: 1)  $A(-12; -3), B(-8; 1)$ ; 2)  $A(4; -1), B(-4; 0)$  bolsa,  $AB$  kesimiň ortasynyň koordinatalaryny tapyň.
5.  $C$  nokat –  $AB$  kesimiň ortasy. Eger  $A(2; -3), C(0,5; 1)$  bolsa,  $B$  nokadyň koordinatalaryny tapyň.
6.  $A(-4; 0), B(-2; -2), C(0; -6)$  we  $D(-2; -4)$  nokatlar berlen.  $ABCD$  dörtdörtburçlugyň parallelogramdygyny subut ediň.
7. Eger: 1)  $A(-6; 2), B(4; 4)$ ; 2)  $A(-8; -4), B(-1; 3)$  bolsa,  $AB$  kesimiň ortasynyň koordinatalaryny tapyň.
8.  $C$  nokat –  $AB$  kesimiň ortasy,  $D$  nokat bolsa  $BC$  kesimiň ortasy. Eger: 1)  $A(-3; 3), B(5; -1)$ ; 2)  $A(-2; -1), C(2; 3)$  bolsa,  $D$  nokadyň koordinatalaryny tapyň.

### Şuny bilmek peýdaly!

Ýeriň üstündäki nokadyň geografik uzynlygyna we giňligine şu nokadyň **geografik koordinatalary** diýilýär. Ýeriň üstündäki her bir nokada iki mukdar – onuň geografik uzynlygy we giňligi laýyk goýulýar we tersine, iki mukdar – geografik uzynlyk we giňlik boýunça ýeriň üstündäki belli bir nokat tapylýar. Munda paralleller we meridianlar gönüburçly koordinatalar sistemasyndaky absissa we ordinata oklary wezipesini ýerine ýetirýär.

Meselem, Daşkent şäheri  $069,20$  gündogar uzynlykda ( $\approx 69^\circ$ ) we  $041,26$  demirgazyk giňlikde ( $\approx 41^\circ$ ), Samarkant şäheri bolsa  $066,93$  gündogar uzynlykda ( $\approx 67^\circ$ ) we  $039,65$  demirgazyk giňlikde ( $\approx 40^\circ$ ) ýerleşen.



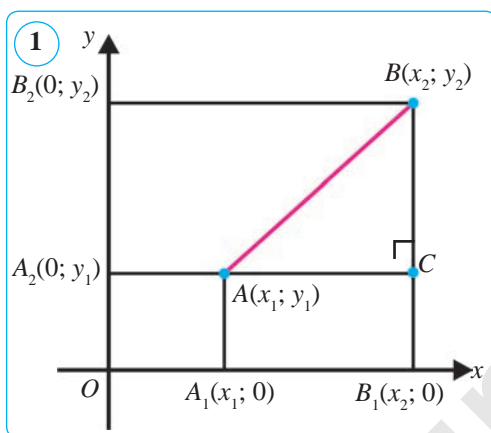
## 32–33. IKI NOKADYŇ ARASYNDAKY ARALYK. TÖWEREĞIŇ DEŇLEMESI

### 1. Iki nokadyň arasyndaky aralyk.

#### Teorema.

$A(x_1; y_1)$  we  $B(x_2; y_2)$  nokatlaryň arasyndaky aralyk aşakdaky formulalar boýunça hasaplanýar:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$



*Subudy.* ilki  $x_1 \neq x_2$  we  $y_1 \neq y_2$  ýagdaýa garap geçýäris. Berlen  $A$  we  $B$  nokatlar arkaly koordinatlar oklaryna perpendikulýar geçirýäris we olaryň kesişme nokadyny  $C$  bilen belgileýäris (1-nji surat).  $A$  we  $C$  nokatlaryň arasyndaky aralyk  $|x_2 - x_1|$ -e,  $B$  we  $C$  nokatlaryň arasyndaky aralyk bolsa  $|y_2 - y_1|$ -e deň. Gönüburçly  $ABC$  üçburçluga Pifagoryň teoremasyny ulanyp tapýarys:

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \text{ ýa-da}$$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (1)$$

Nokatlaryň arasyndaky aralygyň formulasy  $x_1 \neq x_2$  we  $y_1 \neq y_2$  ýagdaý üçin garalan bolsa-da, ol başga ýagdaýlar üçin hem öz güýjüni saklaýar. Hakykattan hem,  $x_1 = x_2$  we  $y_1 \neq y_2$  bolsa,  $AB = |y_2 - y_1|$  (1) formula hem şu netijäni berýär.  $x_1 \neq x_2$  we  $y_1 = y_2$  ýagdaý hem şuna meňzeş garalýar.  $x_1 = x_2$  we  $y_1 = y_2$  ýagdaýda  $A$  we  $B$  nokatlar üstme-üst düşýär we (1) formula  $AB = 0$  nokady berýär.

**1-nji mesele.** Depeleri  $A(-2; 1)$ ,  $B(0; 4)$ ,  $C(4; 1)$  we  $D(2; -2)$  nokatlarda bolan  $ABCD$  dörtburçlугyň parallelogramdygyny subut ediň.

*Çözülişi.* Parallelogramyň 2-nji nyşanyna görä, dörtburçlугyň garsylykly taraplary özara deň bolsa, bu dörtburçlугyň parallelogramdygy mälim. Berlen  $ABCD$  dörtburçlугyň taraplarynyň uzynlyklaryny tapýarys:

$$AB = \sqrt{(0 - (-2))^2 + (4 - 1)^2} = \sqrt{13}; \quad BC = \sqrt{(4 - 0)^2 + (1 - 4)^2} = \sqrt{25} = 5;$$

$$CD = \sqrt{(2 - 4)^2 + (-2 - 1)^2} = \sqrt{13}; \quad AD = \sqrt{(2 - (-2))^2 + (-2 - 1)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Şeýdip,  $AB = CD$  we  $BC = AD$ , ýagny parallelogram nyşanyna görä  $ABCD$  dörtburçluk – parallelogram.



**2. Tekizlikde şekiliñ deñlemesi.** Tekizlikde *şekiliñ*. Dekartyñ koordinatalar sistemasyndaky *deñlemesi* diýip, şekile degişli islendik nokadyñ koordinatalary kanagatlandyryan iki  $x$ ,  $y$  nämälimli deñlemä aýdylýar. Tersine, bu deñlemäni kanagatlandyryan islendik iki san şekiliñ käbir nokadynyñ koordinatalary bolýar.

### 3. Töwregiñ deñlemesi.

#### Teorema.

**Gönüburçly koordinatalar sistemasynda merkezi  $C(a; b)$  nokatda, radiusy bolsa  $R$ -e deñ töwregiñ deñlemesi aşakdaky görnüşe eýe:**

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2.$$

*Subudy.* Gönüburçly koordinatalar sistemasynda merkezi  $C(a; b)$  nokatda bolan  $R (R > 0)$  radiusly töwerek berlen bolsun (2-nji surat). Töwerekde islendik  $A(x; y)$  nokady alýarys. Töwregiñ kesgitlemesine görä, töwregiñ merkezinden töwregiñ islendik nokadyna çenli bolan aralyk  $R$ -e deñ, ýagny  $CA = R$  we diýmek,  $CA^2 = R^2$ . Bu deñlemäni koordinatalar görnüşinde ýazyp, aşakdakyny tapýarys:  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ . (2)

$A$  – töwregiñ islendik nokady. Şonuň üçin (2) deñlemäni töwerekdäki islendik nokadyñ koordinatalary kanagatlandyryar.

Tersine, koordinatalary (2) deñlemäni kanagatlandyryan islendik  $A$  nokat töwerege degişlidir, çünki ondan  $C$  nokada çenli aralyk  $R$ -e deñ. Mundan (2) deñleme hakykatdan hem merkezi  $C$  nokatda we radiusy  $R$ -den ybarat töwregiñ deñlemesidigi gelip çykýar. Şeýlelikde, şekiliñ deñlemesiniñ kesgitlemesindeki iki talap hem ýerine ýetirilýar. Teorema subut edildi.

**Netije.** Merkezi koordinatalar başlangyjynda, radiusy  $R$  bolan töwregiñ deñlemesi şu görnüşe eýe:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

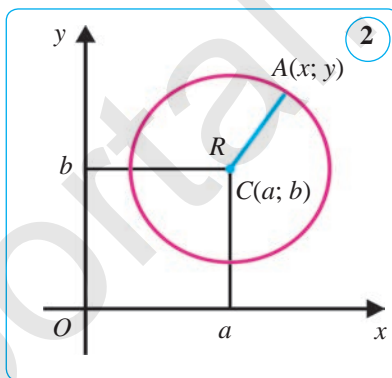
**2-nji mesele.**  $x^2 - 4x + y^2 + 2y - 11 = 0$  deñleme bilen berlen töwregiñ merkeziniñ koordinatalaryny we radiusyny anyklaň.

*Çözülişi.* Berlen deñlemäni  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$  görnüşe getirýäris.  $x^2 - 4x$ -i  $(x-2)^2 - 4$  görnüşde,  $y^2 + 2y$ -i bolsa  $(y+1)^2 - 1$  görnüşde ýazyp alýarys. Bu aňlatmalary berlen deñlemä goýup, alarys:

$$(x-2)^2 - 4 + (y+1)^2 - 1 - 11 = 0 \text{ ýa-da } (x-2)^2 + (y+1)^2 = 4^2.$$

Bu deñleme merkezi  $C(2; -1)$  nokatda we radiusy 4 bolan töwregiñ deñlemesini berýär.

*Jogaby:*  $(2; -1), R=4$ .





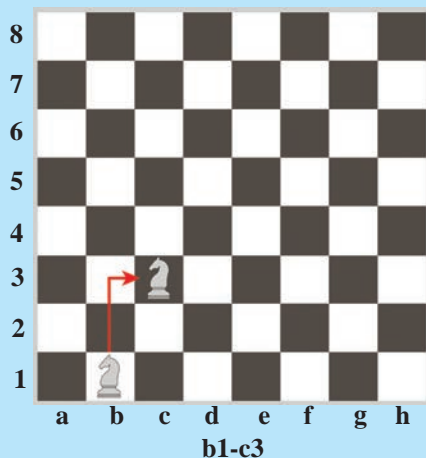
### Soraglar, meseleler we ýumuşlar

1. 1) Nokatlaryň arasyndaky aralyk olaryň koordinatalary arkaly nähili aňladylýar?  
2) Şekiliň Dekartyň koordinatalar sistemasyndaky deňlemesi näme? Koordinatalar tekizliginde töweregiň deňlemesi nähili görnüşde berilýär?
2. Eger: 1)  $A(-3; 8)$ ,  $B(5; 2)$ ; 2)  $A(8; -1)$ ,  $B(-7; 7)$ ; 3)  $A(5; 0)$ ,  $B(0; -12)$  bolsa,  $AB$  kesim uzynlygyny tapyň.
3. Eger: 1)  $A(2; 1)$  we  $B(x; -2)$  nokatlaryň arasyndaky aralyk 5-e; 2)  $A(x; 0)$  we  $B(2; -1)$  nokatlaryň arasyndaky aralyk 1-e deň bolsa,  $x$ -i tapyň.
4. Eger  $A(-1; 2)$ ,  $B(2; 6)$  we  $C(5; 2)$  bolsa,  $ABC$  üçburçlugyň perimetrini tapyň.
5. Eger: 1)  $C(7; 11)$ ,  $R=5$ ; 2)  $C(-2; 3)$ ,  $R=1$  bolsa, merkezi  $C$  nokatda, radiusy  $R$  bolan töweregiň deňlemesini düzüň.
6. Aşakdaky deňleme bilen berlen töweregiň merkeziniň koordinatalaryny we radiusyny anyklaň: 1)  $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 7^2$ ; 2)  $(x+1)^2 + (y-5)^2 = 4$ .
7. 1)  $x^2 - 6x + y^2 + 2y - 6 = 0$ ; 2)  $x^2 + y^2 + 10y + 24 = 0$  deňleme bilen berlen töweregiň merkeziniň koordinatalaryny we radiusyny anyklaň.
8. Eger üçburçlugyň depeleri: 1)  $A(0; 0)$ ,  $B(0; 2)$  we  $C(2; 0)$ ; 2)  $(1; 0)$ ,  $B(2; \sqrt{3})$  we  $C(8; 0)$  bolsa,  $ABC$  üçburçlugyň görnüşini anyklaň.
9. Eger: 1)  $C(9; 4)$ ,  $R=7$ ; 2)  $C(-3; -4)$ ,  $R=2$  bolsa, merkezi  $C$  nokatda, radiusy  $R$  bolan töweregiň deňlemesini düzüň.
10. Aşakdaky deňleme bilen berlen töweregiň merkeziniň koordinatalaryny we radiusyny anyklaň: 1)  $(x-7)^2 + (y+2)^2 = 25$ ; 2)  $(x-4)^2 + y^2 = 1$ .
11.  $x^2 + y^2 = 100$  deňleme bilen berlen töwerekde: 1) absissasy 8-e; 2) ordinatasy  $-6$ -a deň nokatlary tapyň.

#### Şuny bilmek peýdaly!

**Küşt** (parsça *şahmat* – şa ýeňildi) sport görnüşi bolup, oýnuň maksady bäsdeşin şasyny mat etmekden ybarat. Ak we gara reňkdäki 64 gözenekli tagtada her bir tarap iki hili reňkdäki 16 sanydan çöp (bir sanydan şa we ferzin; 2 sanydan ruh, pil we at; 8 sanydan pyýada) bilen oýnaýar.

Küşt partiýasynyň belliginde Siz küştçileriň oýnuň dowamynda çöpler bilen eden ähli ýörişlerini okamagyňyz mümkin bolýar. Meselem, at b1-c3 diýen ýazgy atyň b1 gözenekden c3 gözenege eden hereketini aňladýar. Bularyň ählisi küşt tagtasyndaky koordinatalar sistemasydyr.



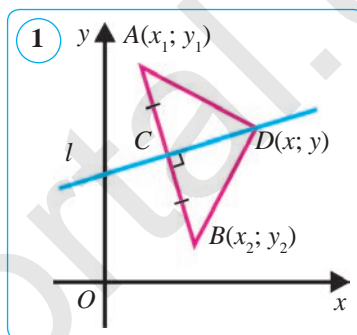
## 34. GÖNI ÇYZYGYŇ DEŇLEMESI. GEOMETRIK MESELELER ÇÖZMEGIŇ KOORDINATALAR USULY

### 1. Göni çyzygyň deňlemesi.

#### Teorema.

Göni çyzygyň gönüburçly koordinatalar sistemasyndaky deňlemesi aşakdaky görnüşe eýe:  $ax+by+c=0$ , (1) munda  $a, b, c$  – islendik sanlar,  $a$  we  $b$  sanlardan biri nola deň däl.

*Subudy.*  $l$  göni çyzyk gönüburçly koordinatalar sistemasyndaky islendik göni çyzyk bolsun.  $l$ -e perpendikulýar käbir göni çyzygy geçirýäris we oňa  $l$  göni çyzyk bilen kesişen nokady  $C$ -den başlap deň  $CA$  we  $CB$  kesimleri goýýarys (1-nji surat).  $x_1, y_1$  –  $A$  nokadyň koordinatalary,  $x_2, y_2$  –  $B$  nokadyň koordinatalary bolsun. Orta perpendikulýar  $l$  göni çyzykda ýatýan islendik  $D(x; y)$  nokat  $A$  we  $B$  nokatlardan deň uzaklaşan bolýar, ýagny  $DA=DB$ , mundan  $DA^2=DB^2$ . Bu deňligi koordinatalarda ýazyp, aşakdakyny alarys:



$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2. \quad (2)$$

Ýaýyň içindäki aňlatmalary kwadrata göterip we deňlemedäki meňzeş agzalary toparlandan soň, (2) deňleme aşakdaky görnüşe gelýär:

$$2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y + (x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 + y_2^2) = 0. \quad (3)$$

$x_1, y_1, x_2, y_2$  – islendik sanlar, şu sebäpli  $2(x_2 - x_1) = a$ ,  $2(y_2 - y_1) = b$  we  $x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 + y_2^2 = c$  diýip belgiläp, olary (3) deňlemä goýup:

$$ax + by + c = 0$$

deňlemäni alarys, munda  $a, b$  we  $c$  – käbir sanlar.

$D$  –  $l$  göni çyzykdaky islendik nokat, şonuň üçin (1) deňlemäni berlen göni çyzykdaky islendik nokadyň koordinatasy kanagatlandyrýar.

Käbir  $D_0$  nokadyň  $x_0$  we  $y_0$  koordinatalary (1) deňlemäni kanagatlandyrsyn. Onda  $D_0A = D_0B$ , ýagny  $D_0$  nokat  $A$  we  $B$  nokatlardan deň uzaklaşan bolýar, diýmek,  $AB$  kesimiň orta perpendikulýary  $l$  göni çyzyga degişli bolýar.  $A$  we  $B$  – dürli iki nokat bolany üçin  $(x_2 - x_1)$  ýa-da  $(y_2 - y_1)$  tapawutlardan biri, ýagny  $a$  we  $b$  sanlardan biri nola deň dälligini aýdyp geçýäris.

**1-nji mesele.**  $A(1; -1)$  we  $B(-3; 2)$  nokatlardan geçýän göni çyzygyň deňlemesini düzüň.

*Çözülişi.*  $AB$  göni çyzygyň deňlemesi  $ax+by+c=0$  görnüşde aňladylýandygyny bilýäris.  $A$  we  $B$  nokatlar  $AB$  göni çyzykda ýatýar, diýmek, olaryň koordinatalaryny göni çyzygyň deňlemesine goýup, şu deňlemeleri alarys:

$$a \cdot 1 + b \cdot (-1) + c = 0, \quad a \cdot (-3) + b \cdot 2 + c = 0 \text{ ýa-da}$$

$$a - b + c = 0, \quad -3a + 2b + c = 0.$$

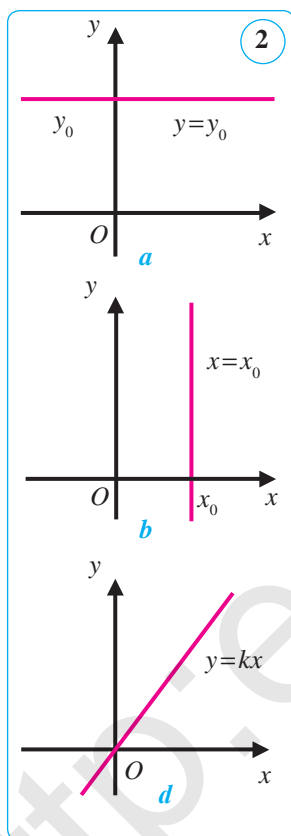
Bu deňlemelerden  $a$  we  $b$  koeffisiýentleri  $c$  arkaly aňladýarys:  $a = 3c$ ,  $b = 4c$ .  $a$  we  $b$ -niň bu bahalaryny göni çyzygyň deňlemesine goýup, tapýarys:  $3cx + 4cy + c = 0$ , munda  $c \neq 0$ .

Bu deňleme  $AB$  göni çyzygyň deňlemesi bolýar. Ýokardaky deňlemäni  $c$ -ge gysgaldyp, aşakdaky görnüşe getirýäris:  $3x + 4y + 1 = 0$ .

Bu deňleme gözlenýän göni çyzyk deňlemesidir.

## 2. Göni çyzygyň koordinatalar sistemasyna görä ýerleşşi.

Indi  $ax + by + c = 0$  göni çyzygyň deňlemesiniň üç hususy ýagdaýyna garap geçýäris. Her bir ýagdaý üçin göni çyzygyň koordinatalar oklaryna görä nähili ýerleşendigini anyklaýarys.



**1-nji ýagdaý.**  $a = 0$ ,  $b \neq 0$ . Munda göni çyzygyň deňlemesini  $by + c = 0$  ýa-da  $y = y_0$  görnüşde ýazmak mümkin, munda  $y_0 = -\frac{c}{b}$  – käbir san.  $y = y_0$  Göni çyzygyň hemme nokatlary birmeňzeş ordinata eýe, diýmek, ol absissalar okuna parallel (2-nji  $a$  surat). Eger  $c = 0$  bolsa, onuň bilen üstme-üst düşýär.  $y = 0$  – absissalar okunyň deňlemesi.

**2-nji ýagdaý.**  $a \neq 0$ ,  $b = 0$ . Munda göni çyzygyň deňlemesini  $ax + c = 0$  ýa-da  $x = x_0$  görnüşde ýazmak mümkin, munda  $x_0 = -\frac{c}{a}$  – käbir san.  $x = x_0$  göni çyzygyň hemme nokatlary birmeňzeş absissa eýe, diýmek, ol ordinatalar okuna parallel (2-nji  $b$  surat). Eger  $c = 0$  bolsa, onuň bilen üstme-üst düşýär.  $x = 0$  – ordinatalar okunyň deňlemesi.

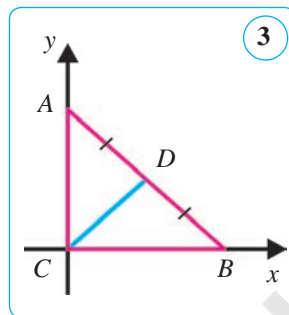
**3-nji ýagdaý.**  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$ ,  $c = 0$ . Munda göni çyzygyň deňlemesini  $ax + by = 0$  ýa-da  $y = kx$  görnüşde ýazmak mümkin, bu ýerde  $k = -\frac{a}{b}$  – käbir san.

$y = kx$  göni çyzyk koordinatalar başlangyjyndan geçoýär (2-nji  $d$  surat).

**3. Geometrik meseleleri çözmegiň koordinatalar usuly.** Eňçeme geometrik meseleleri kesimiň ortasynyň koordinatalary we iki nokadyň arasyndaky aralygy hasaplamak formulalaryndan peýdalanylýp çözmek mümkin. Şu maksatda gönüburçly koordinatalar sistemasyny girizmek we meseläniň şertini koordinatalarda ýazyp almaly. Şundan soň mesele algebraik hasaplamalaryň kömeginde çözülýär.

**2-nji mesele.** Gönüburçly üçburçlukda gipotenuzanyň ortasy hemme depelerinden deň uzaklaşan. Şony subut ediň.

*Çözülişi.* Gönüburçly  $ABC$  ( $\angle C=90^\circ$ ) üçburçluğa garap geçýäris.  $AB$  kesimiň ortasyny  $D$  harpy bilen belgileyäris. 3-nji suratda görkeziliş ýaly, gönüburçly koordinatalar sistemasyny girizýäris. Eger  $BC=a$ ,  $AC=b$  bolsa, onda üçburçlugyň depeleri  $C(0; 0)$ ,  $B(a; 0)$  we  $A(0; b)$  koordinatalara eýe bolýar. Kesimiň ortasynyň koordinatalarynyň formulasyna görä  $D$  nokadyň koordinatalaryny tapýarys:  $D(0,5a; 0,5b)$ .



Nokatlaryň arasyndaky aralygy tapmagyň formulasyndan peýdalanylýp,  $DC$  we  $DA$  kesimleriň uzynlyklaryny tapýarys:

$$DC = \sqrt{(0,5a)^2 + (0,5b)^2} = \sqrt{0,25(a^2 + b^2)} = 0,5\sqrt{a^2 + b^2};$$

$$DA = \sqrt{(0,5a)^2 + (0,5b - b)^2} = \sqrt{0,25a^2 + 0,25b^2} = \sqrt{0,25(a^2 + b^2)} = 0,5\sqrt{a^2 + b^2}.$$

### Soraglar, meseleler we ýumuşlar

Şeýlelikde,  $DA = DB = DC$  eken. Şony subut etmek talap edilipdi.

1. 1) Göni çyzygyň gönüburçly koordinatalar sistemasynda  $ax+by+c=0$  görnüşdäki deňlemä eýedigini subut ediň.
- 2) Göni çyzygyň  $ax+by+c=0$  deňlemesinde  $a=0$  ( $b=0$ ;  $c=0$ ) bolsa, göni çyzyk nähili ýerleşýär?
2.  $A(3; -1)$ ,  $B(-3; 0)$ ,  $C(12; 5)$ ,  $D(3; 0)$  we  $E(-9; -2)$  nokatlaryň haýsylary  $x-3y+3=0$  deňleme bilen berlen göni çyzyga degişli, haýsylary degişli däl?
3. 1)  $A(1; 7)$  we  $B(-3; -1)$ ; 2)  $A(2; 5)$  we  $B(5; 2)$ ; 3)  $A(0; 1)$  we  $B(-4; -5)$  nokatlardan geçýän göni çyzygyň deňlemesini düzüň.
4.  $x+y+c=0$  göni çyzyk  $(1; 2)$  nokatdan geçse, onuň deňlemesinde  $c$  koeffisiýent nämä deň?
5. Eger  $ax+by-1=0$  göni çyzygyň  $(1; 2)$  we  $(2; 1)$  nokatlardan geçýändigini mälim bolsa, onuň deňlemesinde  $a$  we  $b$  koeffisiýentler nämä deň?
6. 1)  $x+2y+3=0$ ; 2)  $3x+4y=12$ ; 3)  $4x-2y-10=0$  deňleme bilen berlen göni çyzygyň koordinatalar oklary bilen kesişme nokatlaryny tapyň.
7. Eger: 1)  $A(3; -1)$ ,  $B(5; 5)$ ; 2)  $A(3; 6)$ ,  $B(-5; -2)$  bolsa,  $C(4; 2)$  nokat  $AB$  kesimiň ortasy bolýandygyny ýa-da bolmaýandygyny barlaň.
8.  $A(0; -2)$ ,  $B(4; 2)$ ,  $C(-4; -5)$  nokatlaryň haýsylary  $8x-4y-8=0$  deňleme bilen berlen göni çyzyga degişli, haýsylary degişli däl?
9. Eger  $A(-1; -1)$ ,  $B(-1; 3)$  we  $C(2; 2)$  bolsa,  $ABC$  üçburçlugyň taraplaryny öz içine alan göni çyzyklaryň deňlemesini düzüň.

8-§.

TEKIZLIKDE WEKTORLAR

35. WEKTOR DÜŞÜNJESI. WEKTORYŇ UZYNLYGY WE UGRY

**1. Wektor ululyklar. Wektor.** Size mälim bolan ululyklar iki görnüşde bolmagy mümkin. Şeýle ululyklar bar bolup, olar özleriniň san bahalary bilen (berlen ölçeg birliginde) doly anyklanýar. Meselem, uzynlyk, meýdan we agyrlyk şolara degişlidir.

**1-nji kesgitleme.** *Diňe san bahasy bilen anyklanýan ululyklara **skalýar ululyklar** diýilýär.*

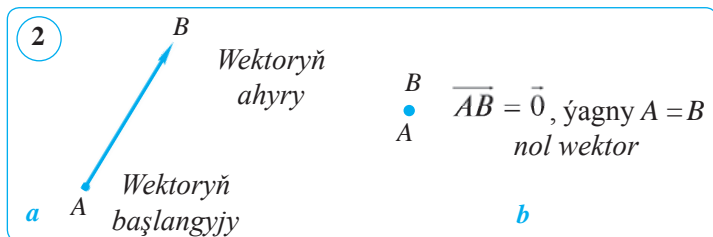
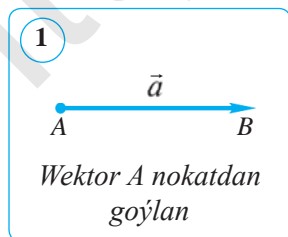
Ýene şeýle ululyklar bar bolup, olary doly bilmek üçin bu ululyklary aňladýan san bahalaryndan daşary, olaryň ugurlaryny hem bilmek zerur bolýar. Meselem, tizlik, güýç we basyş şolara degişlidir.

**Wektor** geometriýanyň esasy düşünjelerinden biri bolup, ol sany (uzynlyk) we ugru bilen doly anyklanýar. Görkezmeli bolmagy üçin ony ugrukdyrylan kesim görnüşinde göz önüne getirmek mümkin. Aslynda wektorlar barada aýdylanda, hemmesi özara parallel birmeňzeş uzynlyga we birmeňzeş ugra eýe bolan ugrukdyrylan kesimleriň bütin bir synpyny nazarda tutmak dogrurak bolýar.

**2-nji kesgitleme.** *San bahasy we ugru bilen anyklanýan (häsiýetlenýän) ululyklar **wektor ululyklar** ýa-da **wektorlar** diýlip atlandyrylýar.*

Fizikanyň, mehanikanyň we matematikanyň diňe bir san bilen däl, eýsem ugru bilen häsiýetlenýän mukdarlary barlaýan dürli meseleleri wektor düşünjesine getirýär. Meselem, güýç, tizlik – bular wektorlardyr.

Wektor ululyklary biz örän köp ýagdaýlarda duşýarys. Meselem, transportda barýarkamyz hereket tizligi, öwrüm ýa-da säginmek bilen bagly wektor ululyklary görüp bilersiňiz. Tebigaty öwrenýän ylmlarda olar tizlenme, inertiýa güýji, merkezden gaçma güýji we şuna meňzeş atlar bilen atlandyrylýar. Biz wektor ululyklaryň tebigy manysyny hasaba almanda onuň matematiki tebigatyny öwrenýäris. Elbetde, wektor ululygyň matematiki häsiýetleri özünüň tebigy manysyna eýe bolýar.



Wektor ululygyn san mukdaryny kesim arkaly añladýarys. Mälim bolş ýaly, islendik kesimiň iki ujy bar. Olardan birini wektoryň **başlangyjy** diýip, ikinji ujuny wektor ululygyn ugruna laýyk ugrukdyrýarys we strelka (ugur) bilen belgileyäris. Muny wektoryň **ujy** diýýäris.

**3-nji kesgitleme.** **Wektor** (wektor ululyk) diýip, ugra eýe bolan kesime aýdylýar.

Wektor ululyk ugry görkezilen kesim hökmünde şekillendirilýär. Wektory añladýan kesimiň uçlary  $A$  we  $B$  nokatda bolsa,  $A$  nokatdan  $B$  nokada ýönelen wektor  $\overline{AB}$  ýaly belgilenýär. Şonuň ýaly-da, wektorlar  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  (latyn elipbiýiniň kiçi harplary) şekilinde-de belgilenmegi mümkin (1-nji surat).

Okalyşy:  $\overline{AB}$  wektor ýa-da  $\vec{a}$  wektor.

1) Wektoryň ugry onuň başlangyjyny we ahyryny görkezmek bilen anyklanýar. Munda wektoryň başlangyjy birinji oruna goýulýar (2-nji a surat).

$AB$  şöhle bilen kesgitlenýän ugra  $\overline{AB}$  wektoryň ugry diýilýär. Başlangyjy we ahyry gabat gelýän wektor *nol wektor* diýlip atlandyrylýar.  $\overline{AB} = \vec{0}$  deňlik  $A$  we  $B$  nokatlaryň gabat gelendigini añladýar (2-nji b surat).

2) Wektory añladýan kesimiň uzynlygy wektoryň *moduly* ýa-da *absolýut bahasy* diýlip atlandyrylýar.

Wektoryň moduly  $|\overline{AB}|$  ýa-da  $|\vec{a}|$  ýaly belgilenýär (3-nji surat).

$\vec{a} = \overline{AB}$  wektoryň moduly  $AB$  kesimiň uzynlygy hasaplanýar:  $|\vec{a}| = |\overline{AB}|$  Şonuň üçin geometriýada wektoryň moduly ýa-da absolýut bahasyna onuň *uzynlygy* diýlip hem atlandyrylýar.

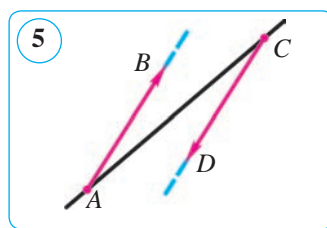
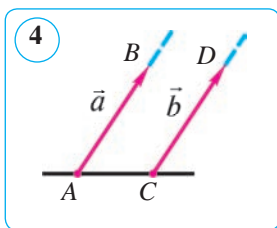
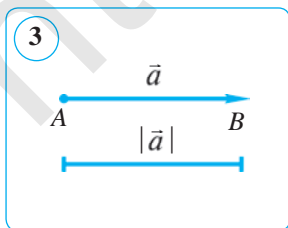
Nol wektoryň uzynlygy (moduly) nola deň diýlip hasaplanýar:  $|\vec{0}| = 0$ .

## 2. Wektorlaryň deňligi.

**4-nji kesgitleme.** Bir göni çyzykda ýa-da parallel göni çyzyklarda ýatýan wektorlara **kollinear wektorlar** diýilýär.

$\vec{a}$  we  $\vec{b}$  wektorlaryň kollinearlygy  $\vec{a} \parallel \vec{b}$  ýaly belgilenýär.

Eger parallel göni çyzyklarda ýatýan iki wektor olaryň başlangyjy arkaly geçen göni çyzykdan bir tarapda ýatsa, *ugurdaş wektorlar* (4-nji surat); göni çyzyga görä dürli tarapda ýatsa, *garşylykly ugrukdyrylan wektorlar* diýilýär (5-nji surat).



- $\overline{AB}$  we  $\overline{CD}$  vektorlar: 1) *ugurdaş* bolsa, olar  $\overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{CD}$  ýaly; 2) *garşylykly ugrukdyrylan* bolsa,  $\overline{AB} \uparrow\downarrow \overline{CD}$  ýaly belgilenýär.

Nol vektor islendik vektora kollinear diýlip hasaplanýar.

**5-nji kesgitleme.** Eger  $\vec{a}$  we  $\vec{b}$  vektorlaryň uzynlyklary deň we ugurlary birmeňzeş bolsa, bu vektorlar **deň vektorlar** diýlip atlandyrylýar.

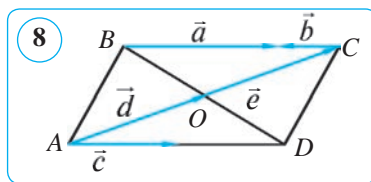
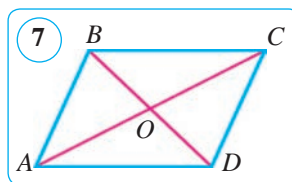
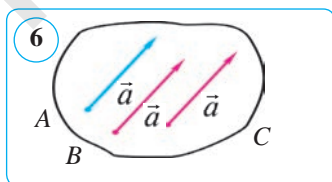
Şeýlelikde, eger  $|\vec{a}| = |\vec{b}|$  we  $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$  bolsa,  $\vec{a}$  we  $\vec{b}$  vektorlar deň bolýar. Vektorlaryň deňligi  $\vec{a} = \vec{b}$  görnüşinde ýazylýar.

Vektorlaryň deňligi onuň başlangyjy tekizligiň islendik nokadynda bolup bilýändigini görkezýär (6-njy surat), ýagny vektoryň modulyny üýtgetmän, ugruny saklamak bilen onuň başlangyjyny tekizligiň islendik nokadyna orun üýtgetmek mümkin. Bu vektory *parallel orun üýtgetme häsiýeti* diýlip atlandyrylýar.



### Soraglar, meseleler we ýumuşlar

1. 1) Vektor näme? Vektorlar nähili belgilenýär?
- 2) Nähili iki vektor deň vektorlar diýlip atlandyrylýar? Nähili vektorlar birmeňzeş (garşylykly) ugrukdyrylan vektorlar diýilýär? Vektoryň moduly näme?
2.  $ABCD$  parallelogramda (7-nji surat): 1)  $\overline{DC}$  vektor bilen ugurdaş; 2)  $\overline{AO}$  vektor bilen ugurdaş; 3)  $\overline{AD}$  vektora garşylykly ugrukdyrylan; 4)  $\overline{BD}$  vektora garşylykly ugrukdyrylan; 5)  $\overline{AB}$  vektora deň; 6)  $\overline{OC}$  vektora deň; 7)  $\overline{OB}$  vektora deň vektorlary ýazyň.
3.  $ABCD$  parallelogramyň diagonallary  $O$  nokatda kesişýär. Onuň depeleri we diagonallary kesisme nokadv bilen belgilenen vektorlary ýazyň. Olardan haýsylary:  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  we  $\overline{BO}$  vektorlara kollinear?
4. Eger: 1)  $\overline{AD} = \overline{BC}$  we  $|\overline{AD}| = |\overline{DC}|$ ; 2)  $\overline{AD} \uparrow\uparrow \overline{BC}$ ,  $\overline{AB}$  we  $\overline{DC}$  vektorlar nokollinear bolsa,  $ABCD$  dörtburçlugyň görnüşini anyklaň.
5.  $\overline{AB} = \overline{CD}$  ekenligi mälim. Şu tassyklamalar dogrumy:
  - 1)  $AB \parallel CD$ ;
  - 2)  $|AB| = |CD|$ ?
6.  $ABCD$  – parallelogram. 8-nji suratda şekillendirilen vektorlardan: 1) kollinear; 2) ugurdaş; 3) garşylykly ugrukdyrylan; 4) deň uzynlyklara eýe bolan vektorlar jübütlerini görkeziň.
7.  $\overline{AB}$  we  $\overline{BA}$  vektorlaryň ugry barada näme diýmek mümkin?





### 36–37. WEKTORLARY GOŠMAK WE AÝYRMAK

**1. Wektorlary gošmak.** Bize  $\vec{a}$  we  $\vec{b}$  wektorlar berlen bolsun (1-nji a surat). Islendik  $A$  nokady belgileýäris we bu nokatdan  $\vec{a}$  wektora deň  $\vec{AB}$  wektory goýýarys. Soňra  $B$  nokatdan  $\vec{b}$  wektora deň  $\vec{BC}$  wektory goýýarys. Indi  $\vec{a}$  wektoryň başlangyjy  $A$  nokatdan  $\vec{b}$  wektor ujy  $C$ -ge ugrukdyrylan wektor geçirýäris (1-nji b surat).  $\vec{AC}$  wektor  $\vec{a}$  we  $\vec{b}$  wektorlaryň jemi diýilýär. Wektorlary gošmagyň bu düzgünine «üçburçlugyň (üç nokat) düzgüni» diýilýär.  $\vec{a}$  we  $\vec{b}$  wektorlaryň jemi  $\vec{a} + \vec{b}$  ýaly belgilenýär.

Üçburçlugyň düzgünini aşakdaky ýaly aňlatsak hem bolýar:

eger  $A, B$  we  $C$  islendik nokatlar bolsa, onda aşakdaky deňlik ýerlikli:

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

Üçburçlugyň düzgüni islendik  $A, B$  we  $C$  nokatlar üçin, şunuň bilen bir hata olardan ikisi ýa-da üçüsi gabat gelende-de ýerlikli bolmagy mümkin (1-nji d surat).

**2. Wektorlary gošmak kanunlary.** Mälim bolşy ýaly, parallelogramyň garşylykly taraplary özara deň we parallel. Eger ugurlary birmeňzeş bolsa, parallelogramyň garşylykly taraplary deň wektorlary aňladýar.

$\vec{a}$  we  $\vec{b}$  – nokollinear wektorlar bolsun. Islendik  $A$  nokatdan  $\vec{AB} = \vec{a}$  we  $\vec{AD} = \vec{b}$  wektorlary goýýarys hem-de taraplary şu wektordan düzülen  $ABCD$  parallelogramy gurýarys (2-nji surat). Üçburçlugyň düzgünine görä:

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{a} + \vec{b} \quad \text{we} \quad \vec{AC} = \vec{AD} + \vec{DC} = \vec{b} + \vec{a}.$$

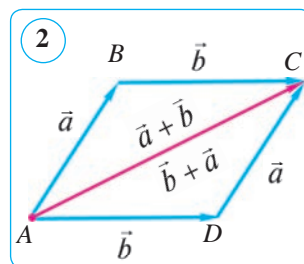
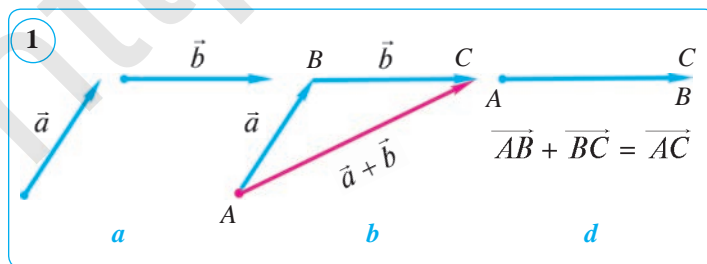
Bulardan  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$  gelip çykýar.

Diýmek, wektorlaryň jemi olaryň nähili tertipde yzygider ýerleşişine bagly däl, ýagny islendik  $\vec{a}$  we  $\vec{b}$  wektorlar üçin aşakdaky deňlik ýerlikli:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}.$$

Muňa wektorlary gošmagyň *orun çalşyрма kanuny* diýilýär.

$\vec{a}$  we  $\vec{b}$  wektordardan düzülen  $ABCD$  parallelogramda jem  $\vec{AC}$  wektor goşulyjy wektorlaryň umumy başlangyjyndan çykýan diagonaldan ybarat.



Adatda, vektorlary şeyle goşmak vektorlary goşmagyň «*parallelogram düzgüni (usuly)*» diýilýär (2-nji surat).

Indi üç  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  we  $\vec{c}$  vektorlaryň jemine garalyň. Islendik  $A$  nokatdan  $\overline{AB} = \vec{a}$  wektory,  $B$  nokatdan  $\overline{BC} = \vec{b}$  wektory,  $C$  nokatdan bolsa  $\overline{CD} = \vec{c}$  wektory goýýarys (3-nji surat). Üçburçlugaň düzgünini ulanyp, aşakdaka eýe bolarys:

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = (\overline{AB} + \overline{BC}) + \overline{CD} = \overline{AC} + \overline{CD} = \overline{AD};$$

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \overline{AB} + (\overline{BC} + \overline{CD}) = \overline{AB} + \overline{BD} = \overline{AD}.$$

Mundan, islendik  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  we  $\vec{c}$  vektorlar üçin

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

deňligiň ýerliklidigi gelip çykýar. Bu vektorlary goşmagyň *utgaşdyrma kanunydyr (häsiýetidir)*.

Wektorlaryň her biri noldan tapawutly bolanda olaryň jemi nol wektor bolmagy mümkin.

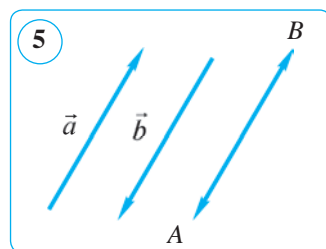
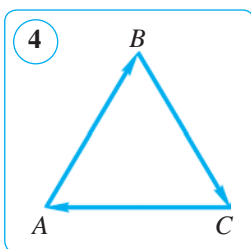
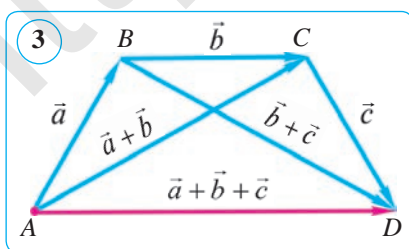
Meselem,  $ABC$  üçburçluga garalyň (4-nji surat). Munda  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  we  $\overline{CA}$  vektorlaryň jemi nol wektor bolýar, ýagny:  $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = \vec{0}$ , çünki birinji wektoryň başlangyjy bilen üçünji wektoryň uýy gabat geldi. Diýmek, jem wektor nol wektor – nokat boldy.

**1-nji kesgitleme.** Iki wektoryň jemi nol wektor bolsa, olar **garşylykly vektorlar** diýlip atlandyrylýar.

Diýmek, eger  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$  bolsa, onda  $\vec{b} = \overline{BA}$  wektor  $\vec{a} = \overline{AB}$  wektora (we tersine) *garşylykly wektor* diýilýär we  $\vec{b} = -\vec{a}$ ,  $\vec{a} = -\vec{b}$  ýaly ýazylýar (5-nji surat). Eger garşylykly vektorlary (üçburçlugaň düzgüni boýunça) goşsak, onda nol wektor gelip çykýar. Munda  $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ,  $\vec{a}$  we  $\vec{b}$  vektorlar parallel bolup, dürli tarapa ugrukdyrylan bolýar. Diýmek, *her bir  $\vec{a}$  wektor üçin oňa garşylykly  $\vec{a}$  wektor bar (ýagny  $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ ) bolýar*. Ýokardaky pikir ýöretmelerden aşakdaky netijä gelýäris.

Eger nol bolmadyk iki wektoryň uzynlyklary deň we olar *garşylykly ugrukdyrylan* bolsa, olara **garşylykly vektorlar** diýilýär.

Nol wektor öz-özüne *garşylykly wektor* hasaplanýar.



**3. Vektorlary aýyrmak.** Vektorlary aýyrmak edil sanlary aýyrmak ýaly goşmaga ters amaldyr.

**2-nji kesgitleme.**  $\vec{a}$  we  $\vec{b}$  vektorlaryň tapawudy diýip, şeýle  $\vec{c}$  vektora aýdylyar, ýagny onuň  $\vec{b}$  vektor bilen jemi  $\vec{a}$  vektory berýär:  $\vec{c} + \vec{b} = \vec{a}$ .

$\vec{a}$  we  $\vec{b}$  vektorlaryň tapawudy edil sanlaryň tapawudy ýaly belgilenýär:  $\vec{a} - \vec{b}$ . Iki vektoryň tapawudy birinji vektora ikinji vektora garşylykly vektory goşmak hökmünde anyklanýar we ol  $\vec{a} + (-\vec{b})$  vektora deň (6-njy b surat).

Bize  $\vec{a}$  we  $\vec{b}$  vektorlar berlen bolsun (6-njy a surat).  $\vec{a}$  vektor bilen  $\vec{b}$  vektora garşylykly bolan  $-\vec{b}$  vektoryň jemine garalyň.

Islendik  $\vec{a}$  we  $\vec{b}$  vektorlar üçin  $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$  deňlik ýerlikli.

Hakykatdan hem,  $(\vec{a} + (-\vec{b})) + \vec{b} = \vec{a} + ((-\vec{b}) + \vec{b}) = \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ .

Eger  $\vec{a}$  we  $\vec{b}$  vektorlar bir  $O$  nokatdan goýlan bolsa, onda  $\vec{a} - \vec{b}$  tapawudy tapmak üçin aşakdaky düzgünden peýdalanmak amatly (6-njy d surat):

$$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}.$$

Ýokardan görnüşi ýaly, kemeldiji vektoryň ahyry tapawut vektoryň başlangyjy, kemeliji vektoryň ahyry bolsa tapawut vektoryň ahyry wezipesini ýerine ýetirýän eken. Düzgüni ýatda saklamak oňaýly bolmagyny üpjün etmek maksadynda ol shematik ýagdaýda görkezilýär.

Vektory goşmakda parallelogram usulyndan peýdalansak (7-nji surat), tapawut vektor parallelogramyň ikinji diagonalyndand ybarat bolýar.

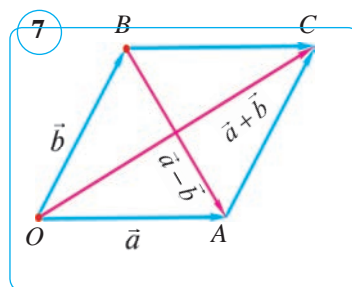
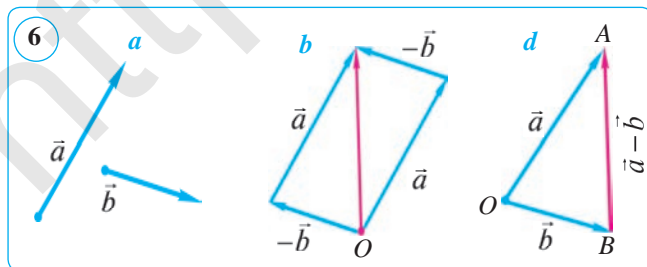
**Mesele.**  $ABC$  üçburçluk berlen. 1)  $\overrightarrow{BA}$ ; 2)  $\overrightarrow{CB}$ ; 3)  $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$  vektorlary  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$  we  $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$  vektorlar arkaly aňladyň.

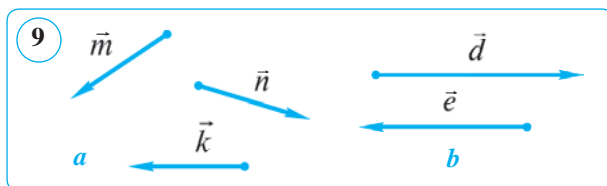
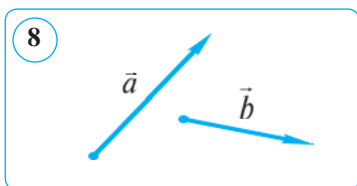
Çözülişi. 1)  $\overrightarrow{BA}$  we  $\overrightarrow{AB}$  – garşylykly vektorlar, şonuň üçin

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} \text{ ýa-da } \overrightarrow{BA} = -\vec{a}.$$

2) Üçburçlugyň düzgünine görä:  $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$ . Ýöne  $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC}$ , şonuň üçin

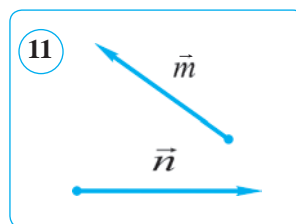
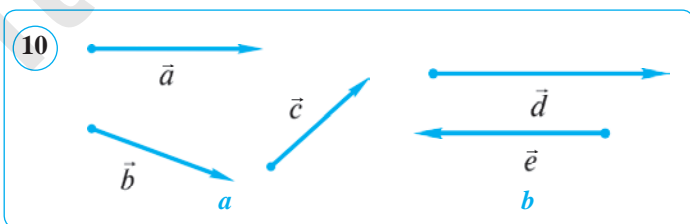
$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \vec{a} - \vec{b}.$$





**Soraglar, meseleler we ýumuşlar**

- 1) Üçburçlugyň we parallelogramyň düzgünine görä wektorlaryň jemi nähili tapylýar? Iki wektoryň tapawudy diýip nämä aýdylýar?
- 2) Berlen wektora garşylykly wektor diýip nämä aýdylýar?
- 8-nji suratda  $\vec{a}$  we  $\vec{b}$  wektorlar şekillendirilen.  $\vec{a} + \vec{b}$  wektory iki usul bilen çyzyň.
- 9-njy suratda  $\vec{m}$ ,  $\vec{n}$  we  $\vec{k}$  hem-de  $\vec{d}$  we  $\vec{e}$  wektorlar şekillendirilen. Wektorlary çyzyň: 1)  $\vec{m} + \vec{n} + \vec{k}$ ; 2)  $\vec{d} + \vec{e}$ .
- 10-njy suratda  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  we  $\vec{c}$  hem-de  $\vec{d}$  we  $\vec{e}$  wektorlar şekillendirilen. Wektorlary çyzyň: 1)  $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ ; 2)  $\vec{e} - \vec{d}$ .
- $ABCD$  parallelogram berlen.  $(\vec{AB} - \vec{AD}) + \vec{BC} = \vec{AB}$  deňlik ýerine ýetirilýärmi? Barlap görüň.
- $ABCD$  rombda:  $AD = 20$  cm,  $BD = 24$  cm,  $O$  – diagonallaryň kesişme nokady.  $|\vec{AD} + \vec{AB} - \vec{BC} - \vec{OB}|$  -ni tapyň.
- $ABCD$  – islendik dörtburçluk.  $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AD} + \vec{DC}$  bolýandygyny subut ediň.
- $ABCD$  –parallelogram.  $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$  wektor deňligi subut ediň (wektorlary goşmagyň «parallelogram düzgüni»).
- $ABCD$  parallelogramda:  $\vec{CA} = \vec{a}$ ,  $\vec{CD} = \vec{b}$ .  $\vec{AB}$ ,  $\vec{BC}$ ,  $\vec{DA}$  wektorlary  $\vec{a}$  we  $\vec{b}$  wektorlar arkaly aňladyň.
- $E$  we  $F$  –  $ABC$  üçburçluk  $AB$  we  $AC$  taraplarynyň ortalary.  $\vec{BF}$ ,  $\vec{EC}$ ,  $\vec{EF}$  we  $\vec{BC}$  wektorlary  $\vec{a} = \vec{AE}$  we  $\vec{b} = \vec{AF}$  wektorlar arkaly aňladyň.
- 11-nji suratda  $\vec{m}$  we  $\vec{n}$  wektorlar şekillendirilen.  $\vec{m} + \vec{n}$  wektory iki usul bilen çyzyň.



## 38–39. WEKTORY SANA KÖPELTMEK. WEKTORYŇ KOORDINATALARY

**1. Wektory sana köpeltmek.** Käbir  $\vec{a}$  wektory alýarys we  $\vec{a} + \vec{a} + \vec{a}$  jemini tapýarys (1-nji surat). Şeýle jemi  $3 \cdot \vec{a}$  diýip belgileýäris we bu aňlatmany  $\vec{a}$  wektoryň 3 sanyna köpeltmek hasyly diýip atlandyrmagymyz tebigydyr.

**Kesgitleme.** Nol bolmadyk  $\vec{a}$  wektoryň  $k$  sana köpeltmek hasyly diýip, şeýle  $\vec{b} = k \cdot \vec{a}$  wektora aýdylýar; ýagny munda onuň uzynlygy  $|k| \cdot |\vec{a}|$  sana deň bolup, ugry  $k > 0$  bolanda  $\vec{a}$  we  $\vec{b}$  wektorlaryň ugry birmeňzeş,  $k < 0$  bolanda bolsa garşylykly bolýar.

Nol wektoryň islendik sana köpeltmek hasyly nol wektor hasaplanylýar.

$\vec{a}$  wektoryň  $k$  sana köpeltmek hasyly  $k\vec{a}$  ýaly belgilenýär (san köpeldiji çep tarapa ýazylyýar). Kesgitlemä görä:  $|k\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}|$ .

Wektoryň sana köpeltmek hasyly kesgitlemesinden gönüden-göni aşakdakylar gelip çykýar: 1) *islendik wektoryň nola köpeltmek hasyly nol wektor bolýar*; 2) *islendik san we islendik  $\vec{a}$  wektor üçin  $\vec{a}$  we  $k\vec{a}$  wektorlar kollinear*dyr.

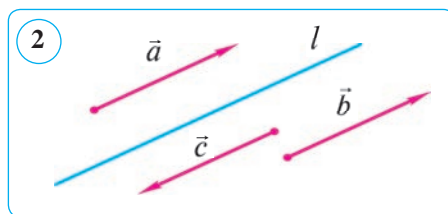
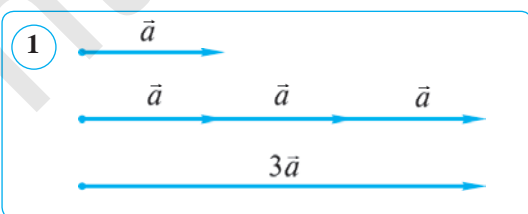
Indi wektory sana köpeltmegiň esasy häsiýetlerini sanap geçýäris. Islendik  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  wektorlar we islendik  $k, l$  sanlar üçin aşakdaky deňlikler ýerlikli:

1°.  $(k \cdot l)\vec{a} = k \cdot (l\vec{a})$  – *utgaşdyrma kanuny*. 2°.  $(k + l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$  – *birinji paýlaşdyrma kanuny*. 3°.  $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$  – *ikinji paýlaşdyrma kanuny*. 4°.  $k \cdot \vec{0} = 0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$ .

*Parallel göni çyzyklara ýa-da bir göni çyzykda ýatýan iki wektoryň kollinear wektorlar diýilýändigini ýene bir gezek ýatladyp geçýäris.*

$l$  göni çyzyk we oňa parallel bolan  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  we  $\vec{c}$  wektorlar berlen bolsun (2-nji surat). Kesgitlemä görä,  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  we  $\vec{c}$  wektorlar kollinear wektorlar bolýar. Bu ýerde  $\vec{a}$  we  $\vec{b}$  wektorlar birmeňzeş ugrukdyrylan,  $\vec{c}$  wektor bolsa  $\vec{a}$  we  $\vec{b}$  wektorlara görä garşylykly ugrukdyrylan.

Mälim bolşy ýaly, wektory sana köpeldende köpeltmek hasyly wektoryň ugry berlen wektora parallel bolýar. Mundan aşakdaky möhüm netijäni alarys: *wektoryň sana köpeltmek hasyly şu wektora kollinear wektordyr.*



**Teorema.**

**Wektor özünüň modulyna deň sana bölünse, şu wektora kollinear birlik wektor emele gelýär.**

*Subudy.*  $\vec{a}$  wektoryň moduly  $|\vec{a}|$  bolsun.  $\vec{a}$  wektoryň  $k = \frac{1}{|\vec{a}|}$  sana köpeltmek hasylyna garalyň:

$$|k\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}| = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot |\vec{a}| = 1.$$

Diýmek, köpeltmek hasyly wektor moduly bir birlige deň.

Moduly bire deň wektory *birlik wektor* diýip atlandyrylýars. Eger  $\vec{a}$  wektor boýunça ugrukdyrylan birlik wektory  $\vec{e}$  diýip belgilesek, teorema görä:  $\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$  ýa-da bu deňligi  $|\vec{a}|$  sana köpeltsek:  $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{e}$ .

Netijede biz wektorlary öwrenmekde uly ähmiýete eýe bolan deňligi aldyk, ýagny *islendik wektor şu wektoryň moduly bilen özüne kollinear birlik wektoryň köpeltmek hasylyna deň eken.*

**1-nji mesele.**  $k$ -nyň nähili bahalarynda aşakdaky pikir ýöretmeler dogry:

- 1)  $|k\vec{a}| < |\vec{a}|$ ;      2)  $|k\vec{a}| > |\vec{a}|$ ;      3)  $|k\vec{a}| = |\vec{a}|$ , bu yerda  $\vec{a} \neq \vec{0}$ ?

*Çözülüşi.* 1)  $\vec{a} \neq \vec{0}$  -da  $|k\vec{a}| < |\vec{a}| \Leftrightarrow |k| \cdot |\vec{a}| < |\vec{a}| \Leftrightarrow |k| < 1 \Leftrightarrow -1 < k < 1$ ;

2)  $\vec{a} \neq \vec{0}$  -da  $|k\vec{a}| > |\vec{a}| \Leftrightarrow |k| \cdot |\vec{a}| > |\vec{a}| \Leftrightarrow |k| > 1 \Leftrightarrow k < -1$  ýa-da  $k > 1$ ;

3)  $\vec{a} \neq \vec{0}$  -da  $|k\vec{a}| = |\vec{a}| \Leftrightarrow |k| \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}| \Leftrightarrow |k| = 1 \Leftrightarrow k = -1$  ýa-da  $k = 1$ .

$\vec{a} \neq \vec{0}$  -da  $|\vec{a}| > 0$ . Bize mälim bolşy ýaly, deňsizligiň ýa-da deňlemäniň iki bölegini hem položitel sana bölsek, gatnaşyk üýtgemeyär.

*Jogaby:* 1)  $-1 < k < 1$ ; 2)  $k < -1$  ýa-da  $k > 1$ ; 3)  $k = -1$  ýa-da  $k = 1$  da pikir ýöretmeler dogry bolýar.

**2. Wektoryň koordinatalary.** Tekizlikde  $xOy$  Dekartyň koordinatalar sistemasy, ýagny koordinatalar başlangyjy  $O$  nokat, koordinata oklarynyň ugry we masştab birligi – birlik kesim berlen bolsun. Munda tekizlikdäki islendik  $A$  nokat özünüň  $x$  absissasyna we  $y$  ordinatasyna eýe bolýar:  $A(x; y)$ . Moduly bir birlige eýe bolan hem-de ugry  $Ox$  oky boýunça ugrukdyrylan birlik wektory  $\vec{i}$  bilen, edil şonuň ýaly,  $Oy$  oky boýunça ugrukdyrylan birlik wektory  $\vec{j}$  bilen belgileýäris (3-nji a surat).

Tekizlikde koordinatalary  $(x; y)$  bolan  $A$  nokat berlen bolsun.  $OA_xA$  üçburçluga garalyň. Bu üçburçlukda  $\vec{OA} = \vec{OA_x} + \vec{A_xA}$ . Emma  $OA_x = x$ ,  $A_xA = OA_y = y$  bolany üçin  $\vec{OA_x} = x \cdot \vec{i}$ ,  $\vec{A_xA} = y \cdot \vec{j}$  bolýar. Mundan

$$\vec{a} = \overline{OA} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} \quad (1)$$

deñligi alarys. Bu (1) deñlige wektoryň *koordinata aňlatmasy* diýilýär.

Diýmek, başlangyjy koordinatalar başlangyjynda, uýj  $A(x; y)$  nokatda bolan wektory koordinata oklary boýunça ugrukdyrylan  $\vec{i}$  we  $\vec{j}$  wektorlar arkaly (1) görnüşde ýazmak mümkin eken.

Munda  $(\vec{i}; \vec{j})$  wektorlaryň jübütligi *bazis wektorlar*,  $x$  we  $y$  sanlar bolsa  $\vec{a}$  wektoryň *koordinatalary* diýlip atlandyrylýar.

Eger wektoryň (1) koordinata aňlatmasy mälim bolsa, wektor koordinatalary bilen berlen diýilýär we gysgaça  $\vec{a}(x; y)$  şekilde ýazylýar:

$$\vec{a}(x; y) = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}. \quad (2)$$

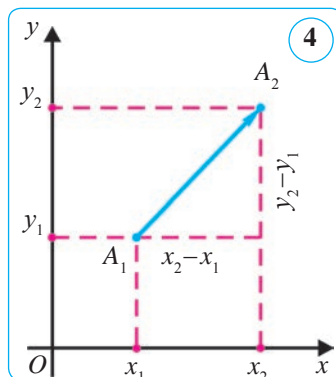
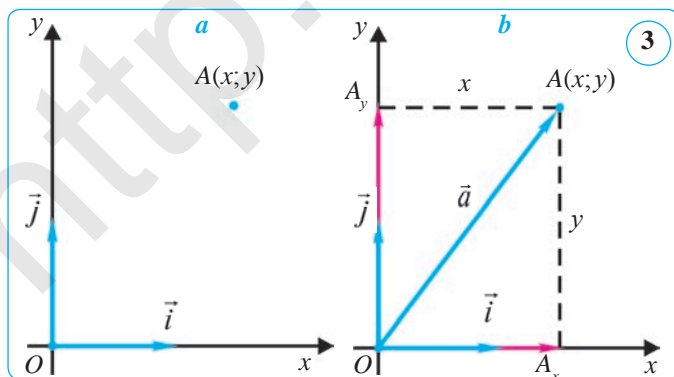
**Kesgitleme.** Eger  $A_1(x_1; y_1)$  we  $A_2(x_2; y_2)$  bolsa,  $x_2 - x_1$  we  $y_2 - y_1$  sanlara  $\overline{A_1A_2}$  wektoryň *koordinatalary diýilýär* (4-nji surat).

Wektoryň koordinatalary harply belgilenişinden soň ýaýyň içinde ýazylýar:  $\overline{A_1A_2}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$ . Käbir ýagdaýlarda koordinatalary berlen wektorlary belgilände  $\overline{(x_2 - x_1; y_2 - y_1)}$  ýazuwdan hem peýdalanylýar. Nol wektoryň koordinatalarynyň nola deňdigi aýdyň:  $\vec{0}(0; 0)$ .

Nokatlaryň arasyndaky aralygy tapmagyň formulasyna göre,  $\vec{a}(a_1; a_2)$  wektoryň uzynlygy  $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$  formula boýunça hasaplanýar.

**Düzgün.** Wektoryň koordinatalaryny tapmak üçin onuň ahyrynyň (ujunyň) koordinatalaryndan başlangyjynyň degişli koordinatalaryny aýyrmak ýeterli.

Meselem,  $\overline{OA}$  wektoryň koordinatalary wektor ahyry (ujy)  $A$ -nyň koordinatalary bilen doly anyklanýar, ýagny wektoryň ahyrynyň koordinatalaryna deň bolýar.



Eger  $A(x; y)$  bolsa,  $\overline{OA}(x; y) = \overline{(x; y)}$  bolýar.

Koordinatalary deň bolan wektorlaryň häsiýetini we nyşanyňy subutsyz getirýäris.

**Teorema.**

**Deň wektorlar degişlilikde deň koordinatalara eýe. We tersine, eger wektorlaryň degişli koordinatalary deň bolsa, wektorlar deň bolýar.**

**1-nji netije.** Eger wektoryň ahyrynyň koordinatalary wektoryň koordinatalary bilen deň bolsa, onda berlen wektoryň başlangyjy koordinatalar başlangyjynda bolýar (3-nji  $b$  surat).

**2-nji netije.** Eger  $\vec{a}(a_1; a_2)$  wektor bilen onuň ahyry bolan  $B(x_2; y_2)$  nokadynyň koordinatalary berlen bolsa, onda wektoryň başlangyjy  $A(x_1; y_1)$  nokadyň koordinatalaryny tapmak üçin  $B$  nokadyň koordinatalaryndan  $\vec{a}(a_1; a_2)$  wektoryň degişli koordinatalaryny aýyrmak ýeterli:

$$x_1 = x_2 - a_1; \quad y_1 = y_2 - a_2. \quad (1)$$

**3-nji netije.** Eger  $\vec{a}(a_1; a_2)$  wektor bilen onuň başlangyjy bolan  $A(x_1; y_1)$  nokadynyň koordinatalary berlen bolsa, onda wektoryň ahyry  $B(x_2; y_2)$  nokadyň koordinatalaryny tapmak üçin  $A$  nokadyň koordinatalaryna  $\vec{a}(a_1; a_2)$  wektoryň degişli koordinatalaryny goşmak ýeterli:

$$x_2 = x_1 + a_1; \quad y_2 = y_1 + a_2. \quad (2)$$

**2-nji mesele.** Eger  $A(-2; 1)$ ,  $B(0; 4)$  we  $C(4; 1)$  bolsa,  $ABCD$  parallelogramyň dördünji depesiniň koordinatasyny tapyň.

*Çözülişi.* Eger  $ABCD$  dörtburçluk parallelogram bolsa, onda  $\overline{AB} = \overline{DC}$  bolýar.  $(x; y)$ – gözlenýän  $D$  depesiniň koordinatasy bolsun.  $\overline{AB}$  we  $\overline{DC}$  wektorlaryň koordinatalaryny tapýarys:

$$\overline{AB} = \overline{(0 - (-2); 4 - 1)} = \overline{(2; 3)}, \quad \overline{DC} = \overline{(4 - x; 1 - y)}.$$

Şeýlelikde,  $4 - x = 2$  we  $1 - y = 3$ , mundan  $x = 2$  we  $y = -2$ .

*Jogaby:*  $D(2; -2)$ .

**3-nji mesele.**  $A(-1; 5)$  nokat  $\vec{a}(2; -3)$  wektoryň başlangyjy bolsa, bu wektoryň ahyry (ujy)  $B$ -niň koordinatalaryny tapyň.

*Çözülişi.* Berlen maglumatlary soňky (2) gatnaşyklara goýup, gözlenýän koordinatalary tapýarys:

$$x_2 = -1 + 2 = 1, \quad y_2 = 5 + (-3) = 2.$$

*Jogaby:*  $B(1; 2)$ .

**4-nji mesele.**  $A(-3; 0)$  we  $B(5; -4)$  nokatlar berlen.  $\overline{AB}$  we  $\overline{BA}$  wektorlaryň koordinatalaryny tapyň.



Çözülişi. 1)  $\overline{AB} = \overline{AB}(5 - (-3); -4 - 0) = \overline{AB}(8; -4) = \overline{(8; -4)}$ ;

2)  $\overline{BA} = -\overline{AB} = -\overline{(8; -4)} = \overline{(-8; -(-4))} = \overline{(-8; 4)}$ . Jogaby:  $(8; -4)$ ;  $(-8; 4)$ .

**Ýatlatma!** Käbir wektoryň koordinatalary mälim bolsa, onda oňa garşylykly wektoryň koordinatalaryny ýene gaýtadan hasaplamazdan, berlen wektoryň koordinatalarynyň alamatyny garşylyklysyna üýtgetmek ýeterli.



### Soraglar, meseleler we ýumuşlar

1. 1) Berlen wektoryň sana köpeltmek hasyly diýip nämä aýdylýar?  
? 2) Wektory sana köpeltmegiň häsiýetlerini aýdyň.  
 3) Koordinatalar okundaky birlik wektorlar nähili belgilenýär?
2. Uzynlygy 2 cm-e deň bolan  $\vec{a}$  wektory çyzyň.  $4\vec{a}$ ,  $-2\vec{a}$ ,  $3\vec{a}$ ,  $1,5\vec{a}$ ,  $-1,5\vec{a}$  wektorlary çyzyň.
3.  $k$ -nyň nähili bahalarynda  $\vec{a}$  ( $\vec{a} \neq \vec{0}$ ) we  $k\vec{a}$  wektorlar:  
 1) ugurdaş; 2) garşylykly ugrukdyrylan; 3) deň bolýar?
4.  $ABCD$  parallelogramda  $O$  – diagonallaryň kesişme nokady,  $K$  nokat –  $CD$  tarapyň ortasy.  $\overline{OA}$  we  $\overline{AK}$  wektorlary  $\overline{AB} = \vec{a}$  we  $\overline{AD} = \vec{b}$  wektorlar arkaly aňladyň.
5.  $C$  nokat  $AB$  tarapyň ortasy. 1)  $\overline{AC}$  wektory  $\overline{CB}$  wektor arkaly; 2)  $\overline{AB}$  wektory  $\overline{CB}$  wektor arkaly; 3)  $\overline{AC}$  wektory  $\overline{BA}$  wektor arkaly aňladyň.
6. Aňlatmalary ýönekeýleşdiriň:  
 1)  $(\overline{AB} + \overline{AC}) + (\overline{BA} + \overline{CB})$ ; 2)  $\overline{AB} - \overline{DB} - \overline{CA} + \overline{DA}$ .
7. 1)  $A(-1; 4)$  we  $B(3; 9)$ ; 2)  $A(2; -5)$  we  $B(1; -1)$ ; 3)  $A(3; 2)$  we  $B(3; 2)$  nokatlar berlen.  $\overline{AB}$  wektoryň koordinatalaryny tapyň.
8. Eger: 1)  $\overline{AB}(7; 24)$ ; 2)  $A(0; -1)$  we  $B(3; -5)$ ; 3)  $A(2; -4)$  we  $B(2; -1)$  bolsa,  $\overline{AB}$  wektoryň uzynlygyny tapyň.
9. Eger: 1)  $A(-2; -3)$ ,  $B(-3; -1)$ ; 2)  $A(m; n)$ ,  $B(-m; -n)$  bolsa,  $\overline{BA}$  wektoryň koordinatalary nämä deň bolýar?
10.  $A(-1; -3)$ ,  $B(2; -4)$ ,  $C(-3; -1)$  we  $D(5; 2)$  nokatlar berlen.  $\overline{AC}$  we  $\overline{DB}$  wektorlar deňmi?
11.  $\vec{a}(m; 24)$  wektoryň uzynlygy 25-e deň.  $m$ -i tapyň.
12.  $A(5; -3)$  nokat  $\vec{a}(-7; -8)$  wektoryň başlangyjy bolsa, bu wektoryň ahyry ( $B$ )-niň koordinatalaryny tapyň.
13. Eger: 1)  $A(-3; 1)$  we  $B(5; -5)$ ; 2)  $A(12; 0)$  we  $B(0; -5)$  bolsa,  $\overline{AB}$  wektoryň uzynlygyny tapyň.

## 40. KOORDINATALARY BILEN BERLEN WEKTORLARYŇ ÜSTÜNDE AMALLAR

Koordinatalary bilen berlen wektorlary goşmak, aýyrmak we sana köpeltmek amallary bilen tanyşýarys.

### 1. Koordinatalary bilen berlen wektorlary goşmak.

**Kesgitleme.**  $\vec{a}(a_1; a_2)$  we  $\vec{b}(b_1; b_2)$  wektorlaryň jemi diýip, koordinatalary  $c_1 = a_1 + b_1, c_2 = a_2 + b_2$  bolan  $\vec{c}(c_1; c_2)$  wektora aýdylýar.

Şeýlelikde,

$$\vec{a}(a_1; a_2) + \vec{b}(b_1; b_2) = \vec{c}(a_1 + b_1; a_2 + b_2) \quad \text{ýa-da} \quad \overline{(a_1; a_2)} + \overline{(b_1; b_2)} = \overline{(a_1 + b_1; a_2 + b_2)}.$$

Islendik  $\vec{a}(x_1; y_1)$ ,  $\vec{b}(x_2; y_2)$  we  $\vec{c}(c_1; c_2)$  wektorlar üçin aşakdaky deňlikler ýerlikli:

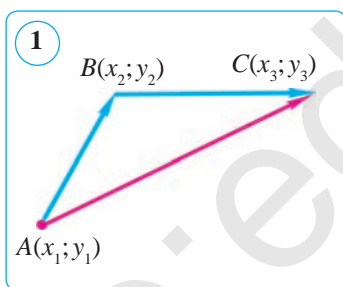
$$1) \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}; \quad 2) (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}); \quad 3) \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}.$$

Subut etmek üçin deňligiň sag we çep böleklerinde duran wektorlaryň koordinatalarynyň degişli koordinatalaryny deňeşdirmek ýeterli.

#### Teorema.

**A, B, C nokatlar nähili bolsa-da, aşakdaky wektor deňlik ýerliklidir:**

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$



*Subudy.*  $A(x_1; y_1)$ ,  $B(x_2; y_2)$ ,  $C(x_3; y_3)$  – berlen nokatlar (1-nji surat). Goşulyjy wektorlary koordinatalar arkaly aňladyp, tapýarys:

$$\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1), \quad \overrightarrow{BC}(x_3 - x_2; y_3 - y_2).$$

Kesgitlemä görä, jem wektoryň koordinatalaryny anyklamak üçin  $\overrightarrow{AB}$  we  $\overrightarrow{BC}$  wektorlaryň degişli koordinatalaryny goşýarys:

$$x_2 - x_1 + x_3 - x_2 = x_3 - x_1, \quad y_2 - y_1 + y_3 - y_2 = y_3 - y_1.$$

Bu bolsa  $\overrightarrow{AC}$  wektoryň koordinatalarydyr:  $\overrightarrow{AC}(x_3 - x_1; y_3 - y_1)$ .

Deň wektorlar baradaky teorema görä:  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ .

Teorema subut edildi.

2-nji suratdan peýdalanyp, ýokardaky deňligiň dogrudygyny subut etmegi özüňize hödürleýäris.

Şeýdip, wektorlary goşmak üçin olaryň degişli koordinatalaryny goşmak ýeterli eken.

## 2. Koordinatalary bilen berlen wektorlary aýyrmak.

**Kesgitleme.**  $\vec{a}(a_1; a_2)$  we  $\vec{b}(b_1; b_2)$  wektorlaryň tapawudy diýip, şeýle  $\vec{c}(c_1; c_2)$  wektora aýdylýar, ýagny onuň  $\vec{b}$  wektor bilen jemi  $\vec{a}$  wektory berýär:  $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$ .

Mundan  $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$  wektoryň koordinatalaryny tapýarys:

$$c_1 = a_1 - b_1, c_2 = a_2 - b_2.$$

Koordinatalary bilen berlen wektorlary aýyrmak üçin olaryň degişli koordinatalaryny aýyrmak ýeterli, ýagny:

$$\vec{a}(a_1; a_2) - \vec{b}(b_1; b_2) = \vec{c}(a_1 - b_1; a_2 - b_2) \text{ ýa-da}$$

$$\overline{(a_1; a_2)} - \overline{(b_1; b_2)} = \overline{(a_1 - b_1; a_2 - b_2)}.$$

## 3. Koordinatalary bilen berlen wektorlary sana köpeltmek.

**Kesgitleme.**  $\vec{a}(a_1; a_2)$  wektoryň  $k$  sana köpeltmek hasyly diýip,  $\overline{(ka_1; ka_2)}$  wektora aýdylýar, ýagny:

$$k\vec{a} = \overline{(ka_1; ka_2)}.$$

Kesgitlemä görä,  $\overline{(a_1; a_2)} \cdot k = \overline{k(a_1; a_2)}$ .

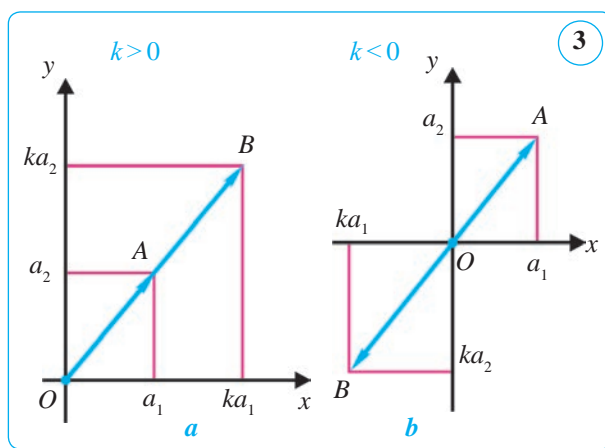
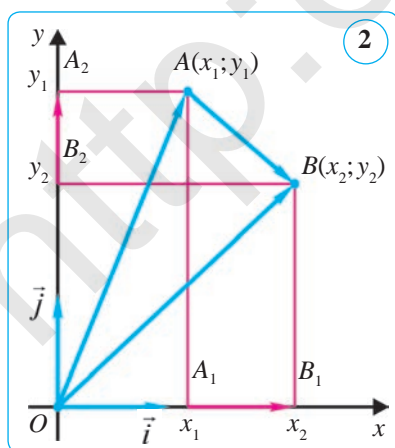
Diýmek, wektory sana (ýa-da  $k$  sany  $\vec{a}$  wektora köpeltmek üçin) onuň koordinatalaryny şu sana köpeltmek ýeterli eken.

Wektory sana köpeltmegiň öň getirilen kesgitlemesini 3-nji suratdan peýdalanyp barlap görüň. Onuň häsiýetleri koordinatalarda hem ýerlikli bolýar. Şu sebäpli olary getirip geçmedik.

**1-nji mesele.**  $\vec{a}(3; 5)$  we  $\vec{b}(2; 7)$  wektorlaryň jemini tapyň.

**Çözülişi.**  $\vec{a}(3; 5) + \vec{b}(2; 7) = \overline{(3; 5)} + \overline{(2; 7)} = \overline{(3+2; 5+7)} = \overline{(5; 12)}$ .

Diýmek,  $\vec{a} + \vec{b}$  wektoryň koordinatalary  $(5; 12)$ -ä deň.



**2-nji mesele.**  $\vec{a}(-3; 5)$  we  $\vec{b}(3; -3)$  wektorlar tapawudyni tapyň.

*Çözmek:*  $\vec{a}(-3; 5) - \vec{b}(3; -3) = \overline{(-3; 5)} - \overline{(3; -3)} = \overline{(-3-3; 5-(-3))} = \overline{(-6; 8)}$ .

*Jogaby:*  $\overline{(-6; 8)}$ .

**3-nji mesele.**  $\vec{a}(3; 5)$  wektora garşylykly  $\vec{b}$  wektory tapyň.

*Çözülişi.*  $\vec{a}$  wektora garşylykly  $\vec{b}$  wektor aşakdaka deň:

$$\vec{b} = -\vec{a} = -1 \cdot \vec{a} = -1 \cdot \overline{(3; 5)} = \overline{(-3; -5)}.$$

*Jogaby:*  $\vec{b}(-3; -5)$  ýa-da  $\vec{b} = 4\vec{a}$ .

**4-nji mesele.** Eger  $\vec{a}(-3; 4)$  bolsa,  $\vec{b} = 4\vec{a}$  wektoryň koordinatalaryny tapyň.

*Çözülişi.*  $\vec{b} = 4\vec{a} = 4 \cdot \overline{(-3; 4)} = \overline{(4 \cdot (-3); 4 \cdot 4)} = \overline{(-12; 16)}$ .

*Jogaby:*  $\vec{b}(-12; 16)$  ýa-da  $(-12; 16)$ .



### Soraglar, meseleler we ýumuşlar

1. 1) Koordinatalary berlen iki wektor nähili goşulýar?
- 2) Koordinatalary berlen iki wektor nähili aýrylýar?
- 3) Koordinatalary berlen wektor sana nähili köpeldilýär?
2. Eger  $\vec{a}(-4; 8)$  we  $\vec{b}(1; -4)$  bolsa, şu wektorlaryň: 1) jeminiň; 2) tapawudynyň koordinatalaryny tapyň.
3.  $\vec{a}(-2; 6)$  we  $\vec{b}(-2; 4)$  wektorlar berlen. 1)  $\vec{a} + \vec{b}$ ; 2)  $\vec{a} - \vec{b}$ ; 3)  $\vec{b} - \vec{a}$ ; 4)  $-\vec{a} - \vec{b}$  wektoryň koordinatalaryny tapyň.
4.  $\vec{a}(2; 3)$  we  $\vec{b}(-1; 0)$  wektorlar berlen. Wektoryň koordinatalaryny tapyň: 1)  $2\vec{a} + \vec{b}$ ; 2)  $\vec{a} - 3\vec{b}$ ; 3)  $2\vec{b} - \vec{a}$ .
5.  $\vec{a}(2; -3)$  we  $\vec{b}(-2; -3)$  wektorlar berlen. Şu wektoryň koordinatalaryny tapyň: 1)  $\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$ ; 2)  $\vec{c} = -2\vec{a} + \vec{b}$ ; 3)  $\vec{c} = -3\vec{a} - 2\vec{b}$ .
6.  $\vec{a} = -2\vec{i} - 3\vec{j}$  we  $\vec{b} = -2\vec{j}$  wektorlar berlen. Şu wektoryň koordinatalaryny tapyň: 1)  $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$ ; 2)  $\vec{c} = -4\vec{a} + 3\vec{b}$ ; 3)  $\vec{c} = -3\vec{a} + 4\vec{b}$ .
7.  $\vec{a} = -2\vec{i} + 2\vec{j}$  we  $\vec{b} = 3\vec{i}$  wektorlar berlen. 1)  $\vec{c} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$ ; 2)  $\vec{c} = 4\vec{a} - \vec{b}$  wektoryň koordinatalaryny tapyň.
8.  $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$  we  $\vec{b} = 2\vec{j}$  wektorlar berlen. 1)  $\vec{c} = -\vec{a} - 2\vec{b}$ ; 2)  $\vec{c} = \vec{a} - 5\vec{b}$  wektoryň koordinatalaryny tapyň.
9.  $\vec{a} = -3\vec{i}$  we  $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j}$  wektorlar berlen. 1)  $\vec{c} = -2\vec{a} + \vec{b}$ ; 2)  $\vec{c} = -\vec{a} - \vec{b}$  wektoryň koordinatalaryny tapyň.

## 41. WEKTORYŇ FIZIKI WE GEOMETRIK DÜŞÜNDIRIŞLARI. GEOMETRIK MESELELER ÇÖZMEGİN WEKTOR USULY

### 1. Wektoryň fiziki we geometrik düşündirişleri.

1. Jisime täsir edýän güýjüň (goýlan güýjüň) ugry täsir ediş ugry bilen birmeňzeş, absolýut bahasy bolsa güýjüň mukdaryna proporsional wektor bilen şekillendirmek amatly. Amalyýetden görnüşi ýaly, güýçleri şeýle şekillendirmek usulynda jisime bir nokatda täsir edýän iki ýa-da birnäçe güýjüň deň täsir edijisi şu güýçlere laýyk wektorlaryň jemi bilen şekillendirilýär. 1-nji suratda jisime A nokatda  $\vec{a}$  we  $\vec{b}$  wektorlar bilen şekillendirilen iki güýç täsir edýär. Bu güýçleriň deň täsir edijisi  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$  wektor bilen şekillendirilýär.

Güýji berlen iki ugurda täsir ediji güýçleriň jemi şekilinde şekillendirmäge *güýji ugurlar boýunça ýaýmak (bölmek)* diýilýär.

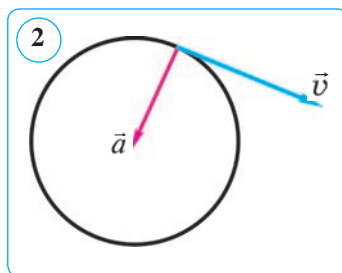
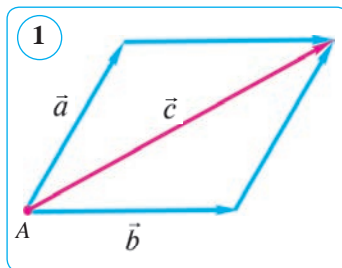
2. Fizikada jisimiň *öňe gitme hereketi* diýip şeýle herekete aýdylýar, ýagny munda jisimiň ähli nokatlary birmeňzeş wagt aralygynda, birmeňzeş ugurda birmeňzeş aralyga süýşýär. Şeýlelikde, fizikadaky *süýşme wektory* dersligimizde kabul edilen wektor eken. Tapawudy, geometriýa dersliginde diňe tekizlikdäki wektorlar barada gürrüň edilýänliginde, fizikada bolsa başdan başlap giňişlikdäki wektorlar, olaryň häsiýetleri barada hem pikir ýöredilýär.

3. Fizikada «wektor» sözi esli giň manyda ulanylýar. Meselem, tizlik wektor diýlip aýdylýar. Emma geometrik wektoryň uzynlygy metrlerde, tizligiň absolýut bahasy bolsa sekundyna metrlerde (m/s) ölçenişiniň özünde tizligiň geometriýada kabul edilen manydaky wektor dälligi görnüp dur. Biz geometriýada tizligi wektor däl, eýsem *wektor ululyk* diýýäris. Umuman, wektor ululyklar, özleriniň modulyndan daşary, ugry bilen anyklanýar. Mälim masştab saýlap alnanda wektor ululyklar geometrik wektorlar bilen şekillendirilýär.

Munda wektor ululyklary goşmakda olary şekillendirýän geometrik wektorlary goşmak, wektor ululyklary sanlara köpeltmekde bolsa olary şekillendirýän geometrik wektorlary şol sanlara köpeltmek laýyk gelýär.

Bir mysala garalyň. 2-nji suratda  $\vec{v}$  wektor aýlanma hereketniň tizligini,  $\vec{a}$  wektor bolsa tizlenmäni aňlatmagy mümkin. Ýöne bu wektorlary fizika nukdaý nazaryndan goşmak mana eýe däl.

Şeýle bolsa-da, fizikada tizlik ýa-da tizlenmeler gönüden-göni wektorlar diýlip aýdylýar.



Gürrün näme barada edilyändigini anyk göz öňüne getirilse, şeýle söz azatlygy umumylyga hiç bir zyýan ýetirmeýär. Edil şuna meňzeş biz öz wagtynda üçburçlugyň tarapynyň uzynlygyny, gysgalyk üçin, ýönekeýje edip onuň tarapy diýip aýtmaga ylalaşypdyk we başgalar.

## 2. Geometrik meseleleri çözmegiň wektor usuly.

Geometrik meseleleri çözende we teoremlary subut edende wektorlardan giň peýdalanylýar.

**1-nji mesele.**  $C$  nokat  $AB$  kesimiň ortasy,  $O$  nokat bolsa tekizligiň islendik nokady.  $\vec{OC} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$  bolýandygyny subut ediň (3-nji a surat).

*Çözülişi. 1-nji usul.* Üçburçlugyň düzgünine görä:

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} \quad \text{we} \quad \vec{OC} = \vec{OB} + \vec{BC}.$$

Bu iki deňligi goşup, aşakdaka eýe bolarys:

$$2\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB} + (\vec{AC} + \vec{BC}).$$

$C$  nokat  $AB$  kesimiň ortasy bolanlygyndan, onda  $\vec{AC} + \vec{BC} = \vec{0}$ , çünki garşylykly wektorlaryň jemi nol wektora deň.

Şeýlelikde, aşakdaka eýe bolarys:

$$2\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB} \quad \text{ýa-da} \quad \vec{OC} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB}).$$

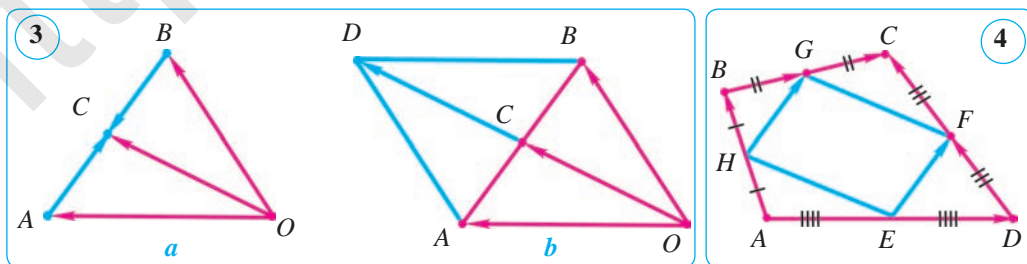
*2-nji usul.*  $OAB$  üçburçlugy parallelograma doldurýarys (3-nji b surat).

$\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OD}$  (parallelogramyň düzgünine görä). Parallelogramyň diagonallary kesişme nokadynda deň ikä bölünýär, şonuň üçin  $\vec{OC} = \vec{CD}$  we  $\vec{OD} = 2\vec{OC}$ .

Diýmek,  $\vec{OA} + \vec{OB} = 2\vec{OC}$ . Mundan:  $\vec{OC} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$ .

**2-nji mesele.** Islendik  $ABCD$  dörtburçlugyň taraplarynyň ortalary parallelogramyň depeleri bolýandygyny subut ediň.

*Çözülişi.*  $E, F, G, H$  – degişlilikde  $AB, BC, CD$  we  $DA$  taraplaryň ortalary bolsun (4-nji surat). Parallelogramyň 3-nji nyşanyna görä, meselem,  $EF$  we  $HG$  kesimleriň uzynlygynyň deňligini we parallelligini subut etmek ýeterli. Wektoryň dilinde, bu  $\vec{EF}$  we  $\vec{HG}$  wektorlaryň deňligini subut etmekden ybaratdyr.



Hakikatdan hem,

$$\overline{EF} = \overline{EB} + \overline{BF} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{BC}) \quad \overline{HG} = \overline{HD} + \overline{DG} = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{DC}).$$

Mundan daşary,  $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AD} + \overline{DC}$  bolýandygy aýdyň. Şonuň üçin,  $\overline{EF} = \overline{HG}$  Mundan,  $EF$  we  $HG$  kesimleriň uzynlyk boýunça deňligi we paraleldigi gelip çykyar. Diýmek, islendik  $ABCD$  dörtburçlugyň taraplarynyň ortalary parallelogramyň depeleri bolýar. Şony subut etmek talap edilipdi.

Getirilen subutlardan görnüşi ýaly, meseleleri we teoremlary wektor usuly bilen çözmek algebraik meseleleri çözmäge meňzeýär. Bu meseläni çözmegiň bir tarapydyr we ol üç basgançakdan ybarat.

*Birinji basgançak.* Mesele (teorema) şertini wektor görnüşinde ýazmak we amatly wektorlary girizmek (meňzeşlik – nämälimleri girizmek we algebraik deňlemäni düzmek).

*Ikinji basgançak.* Wektor algebrasynyň serişdeleri arkaly meseläniň şerti şeýle çalşyrylýar, ýagny meseläni wektor görnüşinde çözmek mümkinçiligi bolsun (meňzeşlik – algebraik deňlemäni çözmek).

*Üçünji basgançak.* Alnan wektor gatnaşyk deslapky adalgalarda düşündirilýär (meňzeşlik – deňlemäni algebraik çözendən soň jogaby ýazmak).



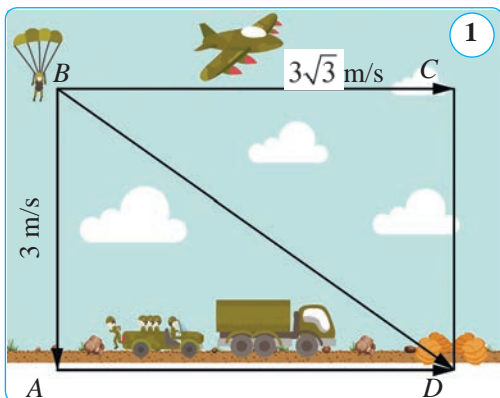
### Soraglar, meseleler we ýumuşlar

1. Depeleri  $A(3; 1)$ ,  $B(1; 3)$  we  $C(0; 2)$  bolan üçburçluk  $CC_1$  medianasynyň uzynlygyny tapyň.
2.  $K$  nokat  $ABCD$  parallelogramyň  $AD$  tarapynyň ortasy.  $\overline{KC}$  wektory  $\overline{AB}$  we  $\overline{AD}$  wektorlar arkaly aňladyň.
3.  $A(2; 4)$ ,  $B(3; 6)$  we  $C(6; 14)$  nokatlar berlen.  $\overline{AB} + \overline{AC}$  wektoryň koordinatalaryny tapyň.
4.  $ABCD$  kwadratynyň iki garşylykly depesiniň koordinatalary berlen:  $A(0; 4)$  we  $C(6; 0)$ . Galan iki depesiniň koordinatalaryny tapyň.
5.  $A(-2; 3)$  nokat  $\vec{a}(-3; 8)$  wektoryň başlangyjy bolsa, bu wektoryň ahyry  $(B(x; y))$ -iň koordinatalaryny tapyň.
6. Trapesiýanyň orta çyzygy esaslaryna parallel we olaryň uzynlygynyň ýarysyna deň bolýandygyny wektoryň kömeginde subut ediň.
7.  $\vec{a}(1; 3)$ ,  $\vec{b}(-2; 4)$ ,  $\vec{c}(-1; -3)$ ,  $\vec{d}(-4; 4)$ ,  $\vec{p}(3; 9)$ ,  $\vec{q}(-1; 2)$  wektorlar berlen. Şolardan: 1) ugurdaş wektorlary; 2) bir jübüt garşylykly ugrukdyrylan wektorlary tapyň.
8.  $ABCD$  rombda  $N$  nokat  $CD$  tarapyň ortasy.  $\overline{AN}$  wektory  $\overline{AB}$  we  $\overline{AD}$  wektorlar arkaly aňladyň.
9.  $ABCD$  – parallelogram we şu parallelogramdan daşarda ýatýan islendik  $O$  nokat berlen.  $\overline{OD}$  wektory  $\overline{OA}$ ,  $\overline{OB}$  we  $\overline{OC}$  wektorlar arkaly aňladyň.

## 42. AMALY GÖNÜKME WE ULANYLYŞY

### AMALY KOMPETENSIÝANY ÖSDÜRJI GOŞMAÇA MATERIALLAR

#### 1. Wektorlaryň amaly ulanylyşyna degişli meseleler.



**1-nji mesele.** Paraşýutçy ýere 3 m/s tizlik bilen düşýär, şemal bolsa ony  $3\sqrt{3}$  m/s tezlik bilen sürüp äkidýär. Bu şertde paraşýutçy ýere nähili burç astynda düşer (1-nji surat)?

*Çözülişi.* Paraşýutçy  $B$  nokatda bolsun. Agyrlyk güýji  $\overline{BA}$  we şemalyň güýji  $\overline{BC}$  -niň deň täsir edijisi  $\overline{BD}$  bolýar we  $ABCD$  – gönüburçluk,  $AB$  – wertikal. Diýmek,  $\angle ADB$  burçuň

bahasyny tapmaly.  $\overline{BC} = \overline{AD}$  we  $BC=AD$  ( $ABCD$  – gönüburçluk,  $\angle A=90^\circ$ ). Pifagoryň teoremasyna görä:  $BD^2 = AD^2 + AB^2$ , diýmek:

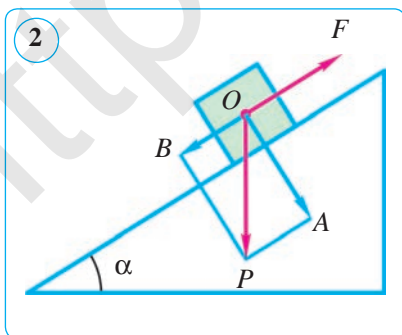
$$BD = \sqrt{AD^2 + AB^2} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 3^2} = \sqrt{27 + 9} = \sqrt{36} = 6 \text{ (cm)}.$$

Şeýdip,  $ABD$  üçburçlukda 3 cm-lik  $AB$  katet 6 cm-lik  $BD$  gipotenuza garanda iki esse kiçi eken. Diýmek,  $AB=0,5BD$  bolany üçin gönüburçly üçburçlukda  $30^\circ$ -ly burçuň garşysyndaky katetiň häsiýetine görä,  $\angle ADB=30^\circ$  ýa-da  $\sin \angle ADB = \frac{AB}{BD} = 0,5$ , mundan  $\angle ADB=30^\circ$  gelip çykýar.

*Jogaby:*  $\angle ADB=30^\circ$ .

**2-nji mesele.** Paraşýutçy ýere 4 m/s tizlik bilen düşýär, şemal bolsa ony  $4\sqrt{3}$  m/s tezlik bilen sürüp äkidýär. Şeýle şertde paraşýutçy ýere nähili burç astynda düşer (1-nji surat g.)? Meseläni özbaşdak çözüň.

**3-nji mesele.** Agyrlygy  $P$  bolan ýük ýapgyt tekizlikde typyp pese gaçmaz ýaly ony nähili  $F$  güýç bilen saklap durmaly (2-nji surat)?



*Çözülişi.* Ýüküň  $O$  agyrlık merkezine  $\overline{P}$  güýç goýlan bolsun.  $\overline{P}$  wektory özara perpendikulýar iki ugur boýunça 2-nji suratda görkezilişi ýaly goýýarys. Ýapgyt tekizlige perpendikulýar bolan  $\overline{OA}$  güýç ýüküň süýşmegine ýol bermeyär. Ýüki saklap durýan  $\overline{F}$  güýç oňa garşylykly ugrukdyrylan  $\overline{OB}$  güýje mukdar taýdan deň bolmaly. Mundan aşadaky netijä gelýäris:  $F=P \sin \alpha$ .



**4-nji mesele.**  $P=50\text{ N}$  yük ýapgyt tekizlikde ýatyr. Eger tekizligiň gorizonta görä gyşarma burçy  $30^\circ$ -a deň bolsa, tynma güýji we basyş güýjüni tapyň.

Berlen:  $P=50\text{ N}$ ,  $\angle A = 30^\circ$ . Tapmaly:  $F_{\text{gyşar}}$ ,  $F_{\text{basyş}}$ .

Çözülişi. 1)  $\vec{P}$  güýji iki: tynma güýjüniň ugruna parallel hem-de basyş güýji ýapgyt tekizlige perpendikulýar güýçler boýunça ýaýýarys.

2) Parallelogramy gurýarys;  $\vec{OP}$  wektor onuň diagonaly;  $OM \parallel AB$ ,  $OK \perp AB$ ,  $PK \parallel AB$ ,  $PM \perp AB$ ,  $\vec{OM} = \vec{F}_{\text{gyşar}}$ ,  $\vec{OK} = \vec{F}_{\text{basyş}}$  -y geçirýäris (3-nji surat).

3)  $\angle OPM = \angle A = 30^\circ$  ( $OP \perp AC$ ,  $PM \perp AB$ ).

4) Gönüburçly  $OPM$  üçburçlukdan:

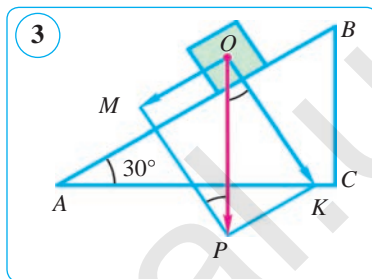
$$OM = 0,5OP = 0,5 \cdot 50 = 25; \quad F_{\text{gyşar}} = 25\text{ N}.$$

5) Gönüburçly  $OPK$  üçburçlukdan Pifagoryň teoremasyna görä:

$$OK = \sqrt{OP^2 - PK^2} = \sqrt{OP^2 - OM^2} = \sqrt{50^2 - 25^2} = \sqrt{25^2 \cdot (4 - 1)} = 25\sqrt{3} \approx 43,$$

ýagny  $F_{\text{basyş}} \approx 43\text{ N}$ .

Jogaby:  $F_{\text{gyşar}} = 25\text{ N}$ ,  $F_{\text{basyş}} \approx 43\text{ N}$ .



**5-nji mesele.** Tejribeden görnüşi ýaly, eger  $A$  jisime iki  $a$  we  $b$  güýç täsir edýän bolsa, onda olaryň täsiri bir  $c$  güýjüň täsirine deň bolup, bu  $c$  güýç  $a$  we  $b$  kesimlerden gurlan parallelogramyň diagonaly bilen şekillendirilýär. Deň täsir ediji güýç «parallelogramyň düzgüni» boýunça tapylýar.

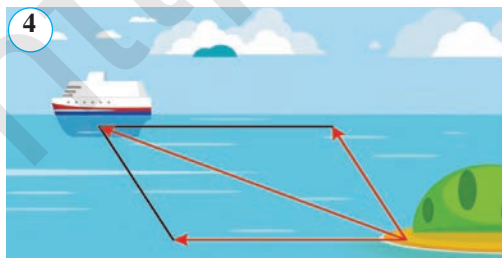
Meselem, ýüzüp barýan gämide (4-nji surat) bolan ýa-da derýany gaýykda kesip geçýän (5-nji surat) adama kese kesik we akym boýunça ugrukdyrylan iki güýç täsir edýär. Şu güýçleri suratda bellik ediň.

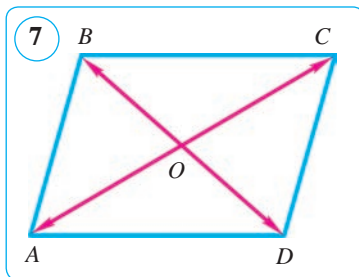
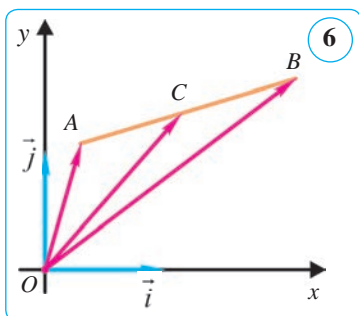
Şu meselä meňzeş mesele düzüň we degişli suratlarda açyp görkeziň.

## 2. Sistemanyň agyrylyk merkeziniň koordinatalaryny tapmak.

**6-njy mesele. Kesimi berlen gatnaşykda bölmek (koordinata görnüşinde).**

Eger  $\vec{AC} = \lambda \vec{CB}$  bolsa,  $C$  nokat  $AB$  kesimi  $\lambda$  gatnaşykda bölýär (6-njy surat). Eger kesimiň ahyrlarynyň koordinatalary  $A(x_1; y_1)$ ,  $B(x_2; y_2)$  mälim bolsa,  $C$  nokadyň  $x$ ,  $y$  koordinatalaryny tapyň.





*Çözülüşi.*  $\overline{OA}$ ,  $\overline{OC}$  we  $\overline{OB}$  wektorlary gurýarys.  $\overline{OA}(x_1; y_1)$ ,  $\overline{OC}(x; y)$ ,  $\overline{OB}(x_2; y_2)$ ,  $\overline{AC}(x-x_1; y-y_1)$ ,  $\overline{CB}(x_2-x; y_2-y)$  we wektory  $\lambda$  sana köpeldende onuň koordinatalary  $\lambda$  sana köpeldilýändigini hasaba alyp, aşakdaka eýe bolarys:

$$\begin{aligned} \overline{AC} = \lambda \overline{CB} &\Leftrightarrow \overline{AC}(x-x_1; y-y_1) = \\ &= \lambda \overline{CB}(x_2-x; y_2-y) \Leftrightarrow \begin{cases} x-x_1 = \lambda(x_2-x); \\ y-y_1 = \lambda(y_2-y). \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Diýmek, } x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

**7-nji mesele.**  $M_1(x_1; y_1)$  we  $M_2(x_2; y_2)$  nokatlara degişlilikde  $m_1$  we  $m_2$  -ä deň ýükler goýlan. Bu massalar sistemasynyň agyrylyk merkeziniň (C nokat) koordinatalaryny tapyň.

*Çözülüşi.* Agyrylyk merkezi C –  $M_1M_2$  kesimde hem-de  $M_1$  we  $M_2$  nokatlara goýlan  $m_1$  we  $m_2$  massalardan ters proporsional aralykda ýatýar, ýagny iki maddy nokatlar sistemasynyň agyrylyk merkezi bolan C nokat  $M_1M_2$  kesimi  $\lambda = \frac{m_2}{m_1}$  gatnaşykda bölýär.  $\lambda$  -nyň bahasyny 5-nji meseledäki formulalara goýup, şekil çalşyrmalardan soň C nokadyň koordinatalaryny tapýarys:  $x_C = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2}$ ,  $y_C = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2}{m_1 + m_2}$ .

### 3. Wektor gatnaşygy subut etmäge degişli mesele.

**8-nji mesele.** ABCD – parallelogram we onuň diagonallary kesişen O nokat berlen. Subut ediň:  $\overline{OA} + \overline{OC} = \overline{OB} + \overline{OD}$ .

*Berlen:* ABCD – parallelogram, O – AC we BD diagonallaryň kesişme nokady,  $AO = OC$ ,  $BO = OD$  (7-nji surat).

*Subut etmeli:*  $\overline{OA} + \overline{OC} = \overline{OB} + \overline{OD}$ .

*Subudy.* Bu wektor deňligi subut etmegiň bir näçe usulyny getirýäris.

Tapawudyň nol wektora deňligini görkezýäris: 1)

$$(\overline{OA} + \overline{OC}) - (\overline{OB} + \overline{OD}) = (\overline{OA} - \overline{OB}) + (\overline{OC} - \overline{OD}) = \overline{BA} + \overline{DC} = \overline{BA} + \overline{AB} = \overline{BB} = \vec{0}.$$

Şekil çalşyрма prosesinde jemden jemi aýyrmak düzgüninden, toparlamak kanunyndan, üçburçlugyň düzgüninden,  $\overline{DC} = \overline{AB}$  (parallelogramyň garsylykly taraplary we ugurdaş wektorlar), nol wektoryň kesgitlemelerinden peýdalanyldy.

$$2) \overline{OA} + \overline{OC} - (\overline{OB} + \overline{OD}) = (\overline{OA} - \overline{OD}) + (\overline{OC} - \overline{OB}) = \overline{DA} + \overline{BC} = \overline{DA} + \overline{AD} = \overline{DD} = \vec{0}.$$

Şekil almashtirishda jemdan jemni aýyrmak we uçburckak qoidalari, guruhlash kanuny,  $\overline{DC} = \overline{AB}$  ekani we nol wektor ta'riflaridan peýdalanyldy.

### 43–44. 3-NJI BARLAG IŞI. ÝALŇYŞLAR ÜSTÜNDE IŞLEMEK

1.  $A(-2; 3)$  we  $B(4; 0)$  nokatlardan geçýän göni çyzygyň deňlemesini düzüň.
2. Eger  $C(4; 9)$  we  $R=5$  bolsa, merkezi  $C$  nokatda, radiusy  $R$  bolan töweregiň deňlemesini düzüň.
3.  $\vec{a}(1; 0)$ ,  $\vec{b}(1; 2)$  we  $\vec{c}(1; 3)$  wektorlar berlen.  $\vec{a} - \vec{b}$  we  $\vec{b} + \vec{c}$  wektorlaryň koordinatalaryny tapyň.
4.  $\vec{c}(-1; 0)$  we  $\vec{d}(1; 2)$  wektorlar berlen.  $2\vec{c} + 3\vec{d}$  wektoryň koordinatalaryny tapyň.

### 3-nji test

### Özüňizi synap görüň!

1.  $A(0; -1)$ ,  $B(1; 0)$  nokatlardan geçýän göni çyzyk haýsy çärýeklerde ýerleşen?  
A) III, IV, I;      B) I, II, III;      D) II, III, IV;      E) II, IV.
2.  $A(-2; 0)$ ,  $B(-2; 2)$  nokatlardan geçýän göni çyzyk haýsy çärýeklerde ýatýar?  
A) I, II, III;      B) II, III;      D) II, IV;      E) III, IV, I.
3. Depeleri  $A(-4; 0)$ ,  $B(-4; 4)$  nokatlarda bolan  $AB$  kesimiň ortasynyň koordinatalaryny tapyň.  
A)  $(-2; 0)$ ;      B)  $(0; 2)$ ;      D)  $(2; -4)$ ;      E)  $(-4; 2)$ .
4. Depeleri  $A(-2; 0)$ ,  $B(0; 2)$ ,  $C(2; 0)$  nokatlarda bolan üçburçlugyň  $AC$  tarapynyň ortasynyň koordinatalaryny tapyň.  
A)  $(-1; 1)$ ;      B)  $(1; 0)$ ;      D)  $(0; 0)$ ;      E)  $(0; 1)$ .
5.  $\vec{a}(-3; 1)$  we  $\vec{b}(5; -6)$  wektorlar berlen.  $\vec{c} = \vec{b} - 3\vec{a}$  wektoryň koordinatalaryny tapyň.  
A)  $(14; -9)$ ;      B)  $(4; -3)$ ;      D)  $(14; -3)$ ;      E)  $(9; 3)$ .
6.  $A(-3; 0)$  we  $B(-5; 4)$  nokatlar berlen.  $\overline{BA}$  wektoryň koordinatalaryny tapyň.  
A)  $(-8; -4)$ ;      B)  $(-8; 4)$ ;      D)  $(2; -4)$ ;      E)  $(8; -4)$ .

### İňlis dilini öwrenýäris!



**Töweregiň deňlemesi** – circle equation

**Göni çyzyk deňlemesi** – straight-line equation

**Kollinear wektorlar** – collinear vectors

**Wektor uzynlygy** – vector length

**Deň wektorlar** – equal vectors

**Skalýar** – scalar

**Garşylykly wektorlar** – opposite vectors

**Birlik wektor** – onyt vector

**Ugurdaş** – equiwelent



## Taryhy maglumatlar



**Rene Dekart**  
(1596–1650)

1. Göni burçly koordinatalar sistemasyny fransuz alymy Rene Dekart ylma girizipdir. Gönüburçly koordinatalar sistemasy käte Dekartyň koordinatalar sistemasy hem diýilýär.

**Rene Dekart** (1596–1650) – fransuz filosofy, matematigi, fizigi, fiziology. La-Fleş iezuit kollezhinde tälim alypdyr, grek we latyn dillerini, matematikany we filosofiýani öwrenipdir. Dekartyň filosofiýasy onuň matematikasy, kosmogoniýasy, fizikasy bilen bagly. Matematikada analitik geometriýany esaslandyryjylaryndan biri (gönüburçly koordinatalar sistemasy onuň ady bilen atlandyrylýar). Dekart XVII–XVIII asyrlaryň filosofiýasynyň we ylmynyň ösüşine saldamlý goşant goşupdyr.

XVII asyrdä Dekartyň işleri sebäpli bütün matematika, hususan-da geometriýany öwrülişikli gaýtadan guran koordinatalar metody emele geldi. Algebraik deňlemeleri geometrik grafik arkaly düşündürmek we geometrik meseleleriň çözüwini analitik formulalar, deňlemeler sistemalarynyň kömeginde gözlemek mümkinçiligi peýda boldy.

Biziň günlerimize çenli saklanyp gelen amatly belgileriň girizilmeginde, ýagny nämälimleri belgilemek üçin  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ; koeffisiýentleri belgilemek üçin  $a$ ,  $b$ ,  $c$  latyn harplaryny girizmekde, derejeleri  $x^2$ ,  $y^2$ ,  $z^2$  görnüşde belgilemekde-de Dekartyň hyzmatlary uly.

2. Wektor düşünjesi XIX asyryň ortalarynda bir wagtda birnäçe matematigiň işlerinde duşýar. Tekizlikde wektorlar bilen iş salyşmagy ilkinji gezek 1835-nji ýylda italiýan alymy **Belliwitis** (1803–1880) başlap berdi. Mundan daşary, **K. Gaussyň** (1777–1855) 1831-nji ýylda «Bikwadratik deňleşdirme nazaryýeti» atly eserinde hem-de **Ý. Argan** (1768–1822) we **K. Wesseliň** (1745–1818) kompleks sanlary geometrik şekillendirmge degişli işlerinde wektor düşünjesi nygtalypdyr. Ahyrynda, **W. Gamiltonyň** (1805–1865) we **R. Grassmanyň** (1854–1901) wektorlaryň üstünde amallary ýerine ýetirmäge degişli işleri emele geldi. Gamilton 1845-nji ýylda birinji bolup wektor we skalýar ululyklaryň tapawudyny düşündirdi. Gamiltonyň şol işinde «skalýar», «wektor» adalgalary ýüze çykdy.

Gamilton «wektor» adalgasyny latynça *wehere* – «daşamak», «süýremek» sözünden emele getiripdir, *wektor* – «daşajy», «eltiji» diýmekdir. 1806-njy ýylda Argan ugrukdyrylan kesimleri harpyň üstüne çyzyk goýmak bilen belgiläpdir. Wektorlaryň başlangyjyny we ahryny görkezmek üçin **A. Myobius** (1790–1868) ony  $AB$  görnüşde belgiläpdir. Grassman wektorlary «kesimler» diýip atlandyrypdyr, ol koordinata oklary boýunça ugrukdyrylan  $e_1$ ,  $e_2$  birlik wektorlary we wektorlary  $x_1e_1 + x_2e_2$  görnüşinde şekillendirmegi hödürleýdi. Gamilton we **J. Gibss** (1839–1903) wektorlary grekçe harplar bilen belgiläpdir. Wektorlary gara harplar bilen belgilemegi 1891-nji ýylda **A. Hewisaýd** (1850–1925) teklipe edipdir. Wektoryň uzynlygyny  $|AB|$  görnüşde belgilemegi bolsa 1905-nji ýylda **R. Gans** (1880–1954) girizipdir.



9- §.

KÖPBURÇLUGYŇ MEYDANY

45. MEYDAN BARADA DÜŞÜNJE

1. Meydan barada düşünje.

Şekilleriň meýdanlaryny anyklamak meselesi örän gadym zamanlara baryp direlýär. Bu meseläniň emele gelmegini adamlaryň amaly işi talap edipdir. Her birimiz gündelik durmuşymyza meýdan barada birneme düşüňjä eýediris. Meselem, Siz gönüburçluk (aýdaly, özüňiz ýaşayan otag) we kwadratyň meýdanyny tapmagy bilýärsiňiz. Biz indi şekilleriň meýdany baradaky düşüňjeleri anyklamagy we olary ölçemek usullaryny tapmak bilen meşgullanarys.

Eger geometrik şekili çäkli sandaky üçburçluklara bölmek mümkin bolsa, bu şekile *yönekeý şekil* diýilýär.

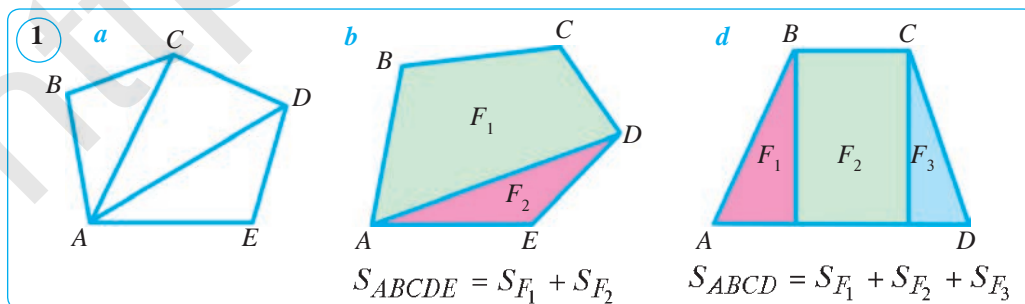
Biz üçburçluk diýip, tekizligiň üçburçluk bilen araçäklenen çäkli bölegine aýdýarys. Güberçek köpburçluk özüniň käbir depesinden çykan diagonalary bilen üçburçluklara bölünýär (1-nji a surat).

**Meýdan** položitel mukdar (ululyk) bolup, onuň san bahasy aşadaky esasy häsiýetlere (aksiomalara) eýe.

**1-nji häsiýet.** *Deň şekiller deň meýdanlara eýe.*

**2-nji häsiýet.** *Eger köpburçluk bir-birini örtmeýän köpburçluklardan düzülen bolsa, onda onuň meýdany bu köpburçluklaryň meýdanlarynyň jemi-ne deň bolýar.*

$F$  köpburçluk bir-birini örtmeýän köpburçluklardan düzülen diýeni: 1)  $F$  bu köpburçluklaryň jeminden ybaratlygy we 2) köpburçluklardan hiç bir ikisi umumy içki nokatlara eýe dälligini aňladýar. Meselem, 1-nji b we 1-nji d surat-



larda bir-birini örtmeýän köpburçluklardan düzülen köpburçluklar şekillendirilen.

1-nji we 2-nji häsiýetlere meýdanlaryň *esasy häsiýetleri* diýilýär.

**2. Meýdany ölçemek.** Meýdany ölçemek kesimleri ölçemek ýaly ölçeg birligi üçin kabul edilen şekiliň meýdany bilen berlen şekili deňeşdirmäge esaslan. Netijede berlen şekiliň *meýdanynyň sanly bahasyny* alýarys.

Meýdan – tekiz şekilleri häsiýetlendirýän esasy matematiki mukdarlardan biri. Ýönekeý ýagdaýlarda meýdan tekiz şekili dolduryjy birlik kwadratlar–tarapy uzynlyk birligine deň bolan kwadratlaryň sany bilen ölçenýär.

**3-nji häsiýet.** *Tarapy bir uzynlyk ölçeg birligine deň bolan kwadratnyň meýdany bire deň.*

Şeýlelikde, aşakdaky teorema ýerlikli bolýar.

**Teorema.**

**Tarapyň uzynlygy  $a$ -ga deň bolan kwadratnyň meýdany  $a^2$  -a deň.**

Adatda, meýdan latynça baş harp  $S$  bilen belgilenýär. Diýmek, kwadrat üçin

$$S = a^2$$

formula ýerlikli bolup, uzynlyk ölçeg birligi kwadraty bilen bile aýdylýar.

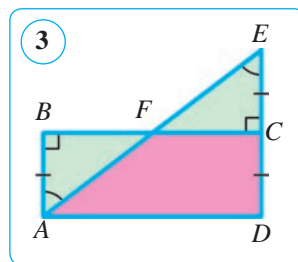
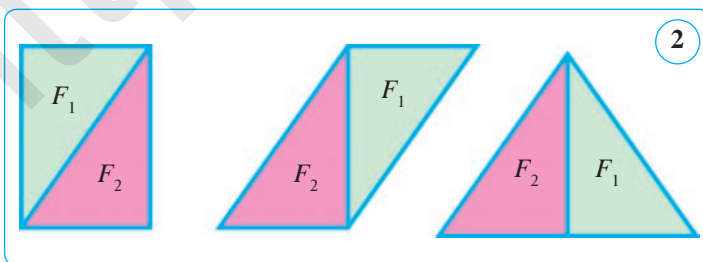
**3. Deňdeş şekiller.**

**Kesgitleme.** *Eger iki köpburçlukdan birini birnäçe bölege bölüp, bu böllekleri başgaça ýerleşdirende ikinji köpburçluk emele gelse, bu köpburçluklara deň düzülenler diýilýär.*

Eger iki köpburçlugyň meýdanlary deň bolsa, olar **deňdeş köpburçluklar** diýlip atlandyrylýar. 2-nji suratdaky köpburçluklar deňdeşdir. Deň köpburçluklar deňdeşdir (1-nji häsiýet), emma ters tassyklama, umuman aýdanda, dogry bolmaýar: eger iki şekil deňdeş bolsa, mundan olaryň deňligi gelip çykmaýar.

**Mesele.**  $ABCD$  gönüburçlugyň  $DC$  tarapyňyň dowamynda  $C$  depesine görä  $D$  nokada simmetrik  $E$  nokat belgilenen (3-nji surat).  $ADE$  üçburçlugyň meýdanynyň  $ABCD$  gönüburçlugyň meýdanyna deňdigini subut ediň.

*Subudy.*  $AE$  we  $BC$  taraplar  $F$  nokatda kesişsin.  $ABF$  we  $ECF$  üçburçluklar deň (katetine we ýiti burçuna görä:  $AB=EC$ ,  $\angle BAF=\angle E$ ). Netijede  $ADE$  üçburçluk  $AFCD$  trapesiýa bilen  $ECF$  üçburçlukdan,  $ABCD$  gönüburçluk bol-



sa şol  $AFCD$  trapesiya bilen  $ECF$  -e deñ bolan  $ABF$  üçburçlukdan düzülen, diýmek,  $ADE$  üçburçluk bilen  $ABCD$  gönüburçluk deñ düzülendir (ýagny deñdeşdir). Şony subut etmek talap edilipdi.

Meýdan ululyk bolany üçin ululyklaryň ähli häsiýetlerine eýe bolýar. Olary bir görnüşdäki ululyklardaky ýaly goşmak we položitel sana köpeltmek mümkin. Iki meýdany goşmakda we sana köpeltmekde meýdan emele gelýär.

Amalyýetde meýdany bar bolan islendik şekiliň meýdanyny ölçemek ýa-da hasaplamak mümkin. Köplenç dürli meýdanlary anyklamakda formulalardan peýdalanylýar. Käbir şekilleriň meýdanlaryny hasaplamagyň formulalaryny çykarmak bilen indiki temalarda meşgullanarys.

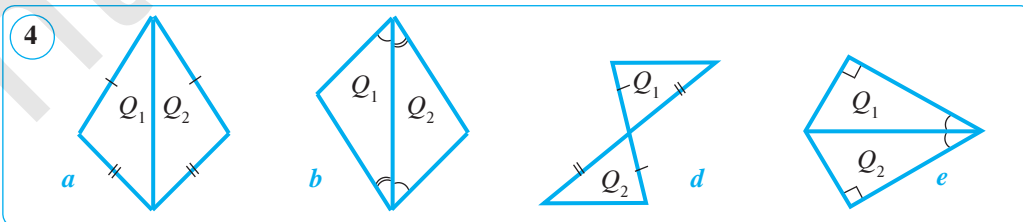
### Soraglar, meseleler we ýumuşlar

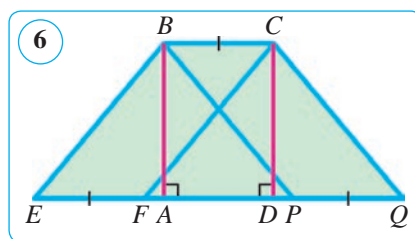
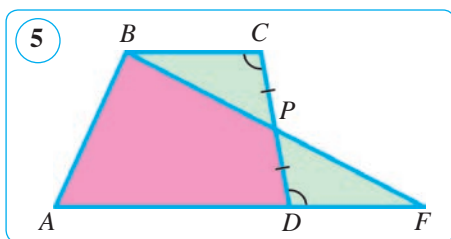
1. 1) Ýönekeý şekil diýip nämä aýdylýar?  
2) Şekiliň meýdany diýende nämäni düşünyärsiňiz?  
3) Meýdanyň esasy häsiýetlerini beýan ediň.  
4) Nähili iki köpburçluk deñ düzülen diýilýär?  
5) Deñdeş şekiller näme? Deñdeş şekiller deñmi?
2. Kwadratyň tarapy: 1) 1,3 cm; 2) 0,15 dm; 3) 2,5 cm; 4) 18 dm; 5) 2,5 m. Kwadratyň meýdanyny tapyň.
3. Kwadratyň meýdany: 1) 16 dm<sup>2</sup>; 2) 144 cm<sup>2</sup>; 3) 121 cm<sup>2</sup>; 4) 49 mm<sup>2</sup>; 5) 196 cm<sup>2</sup>; 6) 0,64 dm<sup>2</sup>; 7) 6,25 m<sup>2</sup>. Kwadratyň tarapyny tapyň.
4. Perimetri taraplary 54 cm we 42 cm-e deñ bolan gönüburçlugyň perimetrine deñ bolan kwadratyň meýdanyny tapyň.
5. 4-nji suratdaky  $Q_1$  we  $Q_2$  üçburçluklar deñdeş. Şony subut ediň.
6. Kwadratyň meýdany 36 cm<sup>2</sup>. Eger onuň hemme tarapyny:
  - 1) iki esse uzaldylsa;
  - 2) üç esse kemeldilse;
  - 3) 2 cm-e uzaldylsa, onuň meýdany nähili üýtgär?

**Nusga.** Meýdany 81 cm<sup>2</sup> -a deñ bolan kwadratyň hemme taraplary 1 cm-e gysgaldylsa, onuň meýdany nähili üýtgär?

**Çözülişi.** Berlen kwadratyň tarapy  $a=9$  cm. Täze kwadratyň tarapy  $a_1=a-1=9-1=8$  (cm). Onda  $S_y=8^2=64$  (cm<sup>2</sup>). Berlen kwadrat taraplary 1 cm-e kemeldilse, onuň meýdany

$S-S_{ya.}=81-64=17$  (cm<sup>2</sup>), -a kemelýär. **Jogaby:** 17 cm<sup>2</sup> -a kemelýär.





7. Deň düzülen iki gönüburçlukdan: 1) bu gönüburçluklaryň deňligi; 2) olaryň deňdeşligi gelip çykarmy?
8. Eger kwadratyň hemme tarapy: 1)  $n$  esse uzaldylsa; 2)  $k$  esse kemeldilse, onuň meýdany nähili üýtgär?
9. (Amaly iş.) Käbir kwadrat çyzyň. Tarapy şu kwadratyň tarapyndan 2 esse uly bolan ikinji kwadraty çyzyň. Ikinji kwadratyň meýdany birinji kwadratyň meýdanyndan näçe esse uly?
10.  $AD$  –  $ABCD$  trapesiýanyň uly esasy bolsun.  $CD$  tarapyň ortasy  $P$  nokat we  $B$  depesi arkaly  $AD$  şöhläni  $F$  nokatda kesiji göni çyzyk geçirilen (5-nji surat).  $S_{ABCD} = S_{ABF}$  bolýandygyny subut ediň.  
*Subudy.* 1)  $\triangle BCP = \triangle FDP$  – tarapy we oňa sepleşýän iki burçuna görä ( $CP = \dots - \dots$ ,  $\angle BCP = \angle \dots - \dots$  we  $\dots$  parallel göni çyzyklary  $\dots$  kesiji kesende emele gelen  $\dots$  burçlar,  $\angle BPC = \angle \dots - \dots$  bolany üçin) deň, ýagny  $S_{BCP} = \dots$ .  
 2)  $S_{ABCD} = S_{ABPD} + \dots$ ,  $S_{ADP} = S_{ABPD} + \dots$ , şonuň üçin  $S_{ABCD} = \dots$ .  
 Nokatlaryň ýerine degişli jogaplary ýazyň.
11. Meýdany: 1)  $2,25 \text{ cm}^2$ ; 2)  $0,81 \text{ dm}^2$ ; 3)  $289 \text{ mm}^2$ ; 4)  $5,76 \text{ m}^2$ ; 5)  $400 \text{ dm}^2$  -a deň bolan kwadratyň perimetrini tapyň.
12. 6-njy suratda şekillendirilen köpburçluklardan deňdeşlerini tapyň.
13. Özbekistanyň meýdany  $448,9$  müň  $\text{km}^2$ . Bu meýdanyň takmynan  $80\%$ -ini düzlük tutýar. Meýdanyň düzlük bölegi näçe müň kwadrat kilometr?

### Şuny bilmek peýdaly!



- $S$  – latynça «*superficies*» sözünden alnan bolup, bu söz «üst» manysyny aňladýar.
- Kontinentleriň, döwletleriň çäkleri kwadrat kilometrlerde, uly ekin meýdanlarynyň meýdanlary gektarlarda, onçakly uly bolmadyk ýer meýdanlary ar (sotka)-larda ölçenýär.

Özbeqistan Respublikasynyň meýdany –  $448\,900 \text{ km}^2$





## 46–47. GÖNÜBURÇLUGYŇ WE PARALLELOGRAMYŇ MEÝDANY

### 1. Gönüburçlугyň meýdany.

Siz gönüburçlугyň meýdany goňşy taraplarynyň uzynlyklarynyň köpeltmek hasylyna deňligini bilýärsiňiz we muňa degişli meseleler çözüpdiniňiz.

Häzir bu ýerine ýetirilen amalyň nazary taýdan dogrudygyny görkezýäris.

#### Teorema.

**Taraplary  $a$  we  $b$  bolan gönüburçlугyň meýdany  $S = a \cdot b$  formula boýunça hasaplanýar.**

*Subudy.* Taraplary  $a$  we  $b$  bolan gönüburçlугy alalyň, munda  $a$  we  $b$  – islen-dik položitel sanlar.  $S = a \cdot b$  bolýandygyny subut edýäris.

Teoremany subut etmek üçin tarapy  $(a+b)$  bolan kwadrat gurýarys. Bu kwadraty 1-nji suratda görkezilen şekildäki ýaly böleklere bölýäris. Munda kwadratyň meýdany tarapy  $a$  we  $b$ -ge deň iki kwad-rat hem-de taraplary  $a$  we  $b$  bolan iki gönüburçluk-dan ybaratdygyny görmek mümkin. Şeýlelikde, tar-apy  $(a+b)$  bolan kwadratyň meýdany  $S_1 + 2S + S_2$  -ä deň. Ikinji tarapdan meýdanyň häsiýetine görä, bu meýdan  $(a+b)^2$  -a deň, ýagny

$$S_1 + 2S + S_2 = (a+b)^2, \text{ ýa-da}$$

$$S_1 + 2S + S_2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Bu deňlikden  $S_1 = a^2$ ,  $S_2 = b^2$  bolýandygyny hasa-ba alsak,  $S = a \cdot b$

bolýandygy gelip çykýar. Teorema subut edildi.

**1-nji mesele.** Gönüburçlугyň meýdany  $150 \text{ cm}^2$ -a deň, taraplarynyň gatnaşygy bolsa  $3:2$  ýaly. Şu gönüburçlугyň peri-metrini tapyň.

*Çözülişi.* Gönüburçlугyň kiçi tarapy  $b = 2x \text{ cm}$  bolsun. Onda uly tarapyň uzynlygynyň  $a = 3x \text{ cm}$ -liginden peýdalanyp deňleme düzýäris we ony çözüäris:

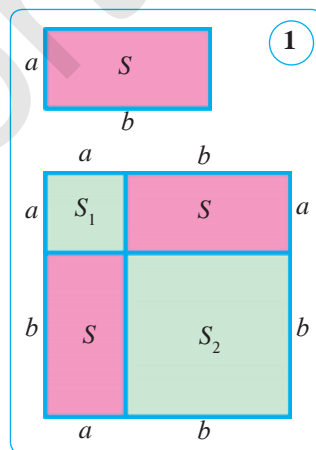
$$S = 3x \cdot 2x, \text{ ýagny } S = 6x^2.$$

Mundan  $x^2 = S : 6$ ,  $x^2 = 150 : 6$ ,  $x^2 = 25$ ,  $x = 5 \text{ (cm)}$ .

Diýmek, gönüburçlугyň kiçi tarapy:  $b = 2 \cdot 5 = 10 \text{ (cm)}$  -e, uly tarapy bolsa  $a = 3 \cdot 5 = 15 \text{ (cm)}$  -e deň. Indi onuň perimetrini hasaplaýarys:

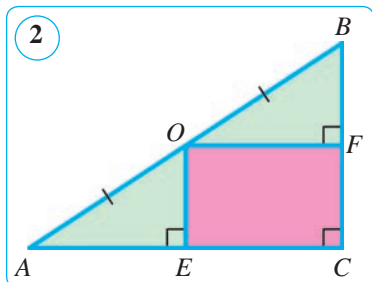
$$P = 2 \cdot (a+b) = 2 \cdot (15+10) = 2 \cdot 25 = 50 \text{ (cm)}.$$

*Jogaby:*  $P = 50 \text{ cm}$ .



**2-nji mesele.** Gönüburçly üçburçlugyň katetleri 12 cm we 24 cm-e deň. Gipotenuzanyň ortasyndan üçburçlugyň katetlerine perpendikulýarlar geçirilen. Emele gelen gönüburçlugyň meýdanyny tapyň.

*Berlen:* gönüburçly  $\triangle ABC$ -da:  $AO=OB$ ,  $OE \perp AC$ ,  $OF \perp CB$ ,  $AC=24$  cm,  $BC=12$  cm (2-nji surat). *Tapmaly:*  $S_{CEOF}$ .



*Çözülişi.* Bize mälim bolşy ýaly, bir göni çyzyga geçirilen iki perpendikulýar özara parallel bolýar. Falesiň teoremasyna görä:

$$AE=EC=0,5AC=0,5 \cdot 24=12 \text{ (cm)},$$

$$CF=FB=0,5BC=0,5 \cdot 12=6 \text{ (cm)}.$$

$$\text{Diýmek, } S_{CEOF} = CE \cdot CF = 12 \cdot 6 = 72 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

*Jogaby:*  $72 \text{ cm}^2$ .

## 2. Parallelogramyň meýdany.

Parallelogramyň islendik tarapyny onuň esasy diýip almak mümkin, onda garşylykly tarapyň islendik nokadyndan esasy öz içine alan göni çyzyga geçirilen perpendikulýara parallelogramyň beýikligi diýilýär. Beýiklik tarapa ýa-da tarapyň dowamyna düşmegi mümkin. 3-nji suratda  $BP$  we  $CF$  –  $ABCD$  parallelogramyň beýiklikleridir.

### Teorema.

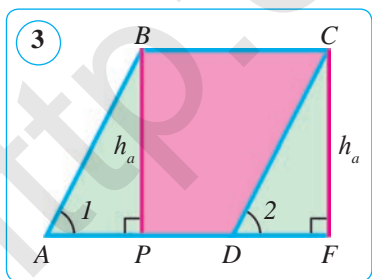
**Parallelogramyň meýdany esasy bilen beýikliginiň köpeltmek hasylyna deň:  $S = a \cdot h_a$ .**

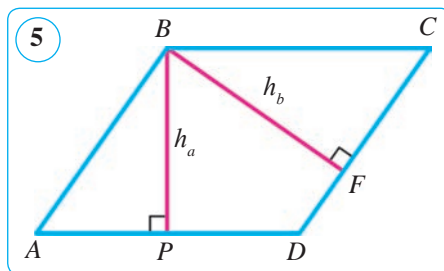
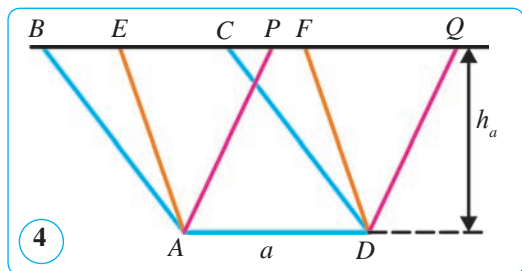
$ABCD$  parallelogramyň esasy üçin  $AD = a$  tarap alnan, beýikligi bolsa  $h_e$  -a deň bolsun (3-nji surat).  $S = a \cdot h_e$  bolýandygyny subut etmek talap edilýär.

*Subudy.* Esasy parallelogramyň  $BC$  tarapyna deň, beýikligi bolsa  $h_e$  -den ybarat bolan  $PBCF$  gönüburçluk gurýarys.  $ABP$  we  $DCF$  üçburçluklar deň (gipotenuzasy we ýiti burçuna görä:  $AB=DC$  – gipotenuzalar,  $\angle 1 = \angle 2$  – degişli burçlar).  $ABCD$  parallelogram  $PBCD$  trapesiýa bilen  $ABP$  üçburçlukdan,  $PBCF$  gönüburçluk bolsa şol  $PBCD$  trapesiýa bilen  $ABP$ -ge deň bolan  $DCF$  üçburçlukdan düzülen. Diýmek,  $ABCD$  parallelogram bilen gurlan  $PBCF$  gönüburçluk deň düzülendir (ýagny, deň-deş). Mundan,  $ABCD$  parallelogramyň meýdany  $PBCF$  gönüburçlugyň meýdanyna, ýagny  $ah_e$  deň, diýen netije çykýar.

Şeýlelikde, esasy  $a$  we oňa geçirilen beýikligi  $h_e$  bolan parallelogramyň  $S$  meýdany aşakdaky formula boýunça hasaplanýar:  $S = a \cdot h_e$ .

Şu formulany subut etmek talap edilipdi.





**1-nji netije.** Eger iki parallelogram bir esasa eýe we beýiklikleri deň bolsa, olar deň düzülendir.

*Berlen:*  $ABCD$ ,  $AEFD$  we  $APQD$  parallelogrammlar bir  $AD=a$  esasa eýe hem-de beýiklikleri deň ( $h_e$ ) (4-nji surat).

*Subut etmeli:*  $ABCD$ ,  $AEFD$  we  $APQD$  parallelogramlar deň düzülen.

*Subudy.* Meselem,  $ABCD$  we  $AEFD$  parallelogramlaryň deň düzülendigini subut edýäris.  $BAE$  we  $CDF$  üçburçluklar deň (üçburçluklaryň deňliginiň birinji nyşanyna görä), çünki  $BA=CD$  we  $AE=DF$  hem-de  $\angle BAE=\angle CDF$  (değişli taraplary parallel burçlar bolany üçin). Diýmek,  $ABCD$  parallelogram  $AECD$  trapesiýa bilen  $BAE$  üçburçlukdan,  $AEFD$  parallelogram bolsa  $AECD$  trapesiýa bilen  $BAE$  üçburçluga deň bolan  $CDF$  üçburçlukdan düzülen. Diýmek,  $ABCD$  we  $AEFD$  parallelogramlar deň düzülen.

Şuňa meňzeş, galan parallelogramlaryň deň düzülendigi subut edilýär.

**3-nji mesele.** Parallelogramyň taraplary 25 cm we 20 cm, birinji tarapyňa geçirilen beýiklik 8 cm. Şu parallelogramyň ikinji tarapyňa geçirilen beýikligini tapyň.

*Berlen:*  $ABCD$  parallelogramda:

$$AD=a=25 \text{ cm}, DC=b=20 \text{ cm}, h_e=8 \text{ cm (5-nji surat)}.$$

*Tapmaly:*  $h_b$ .

*Çözülüşi.* 1)  $S=ah_e=25 \cdot 8=200 \text{ (cm}^2\text{)}$ .

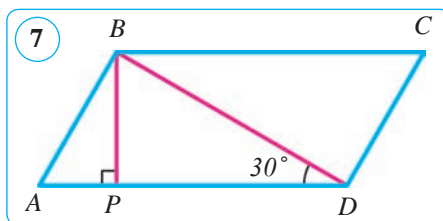
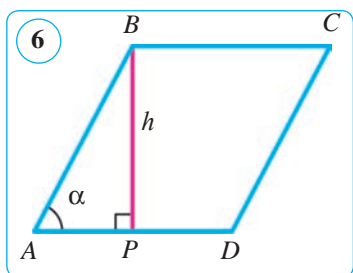
2)  $S=bh_b$ , ýagny  $200=20 \cdot h_b$ . Mundan  $h_b=200:20=10 \text{ (cm)}$ . *Jogaby:* 10 cm.

**2-nji netije.** Parallelogramyň meýdany onuň iki tarapy bilen olaryň arasyndaky burçuň sinusynyň köpeltmek hasylyna deň. Şony subut ediň.

*Çözülüşi.*  $ABCD$  parallelogramda  $AD=a$ ,  $AB=b$  we  $\angle BAD=\alpha$  bolsun. Onda parallelogramyň meýdany  $S=ab \sin\alpha$  formula boýunça hasaplanýar. Şony subut edýäris.

$ABCD$  parallelogramyň  $BP$  beýikligini geçirýäris we ony  $BP=h_e=h$  bilen belgileýäris (6-njy surat). Onda  $h$  beýiklik gönüburçly  $ABP$  üçburçlugyň  $\alpha$  ýiti burçunyň garşysynda ýatýan katet bolýar.  $h$ -y  $b$  tarapyň we  $\alpha$  burçuň sinusynyň köpeltmek hasyly bilen aňladýarys:  $h=b \sin\alpha$ .

Parallelogramyň meýdanyny hasaplamak  $S=ah$  formulasyna  $h$ -yň bu aňlatmasyny goýup, şu formulany alarys:  $S=ab \sin\alpha$ .



**4-nji mesele.** Berlen:  $ABCD$  – parallelogram,  $AD=20$  cm,  $BD=16$  cm,  $\angle BDA=30^\circ$ .

Tapmaly:  $S_{ABCD}$ .

**Çözülişi. 1-nji usul.** 1) Berlen parallelogramyň  $BP$  beýikligini geçirýäris we  $BDP$  üçburçluga garap geçýäris (7-nji surat). Ol gönüburçly, çünki  $BP \perp AD$ .  $BP$  beýikligi tapýarys.  $30^\circ$ -ly burçuň garşysyndaky katet gipotenuzanyň ýarysyna deň, şonuň üçin

$$BP = 0,5BD = 0,5 \cdot 16 = 8 \text{ (cm)}.$$

2) Şeýlelikde,  $ABCD$  parallelogramyň meýdany aşakdaka deň bolýar:

$$S = AD \cdot BP = 20 \cdot 8 = 160 \text{ (cm}^2\text{)}$$

**2-nji usul.** Gönüburçly  $BDP$  üçburçlukdan  $BP$ -ni  $BD$  tarap (gipotenuza) we  $\angle BDP=30^\circ$  burçuň sinusy bilen aňladýarys we parallelogramyň meýdanynyň formulasyna goýup, gözlenýän meýdany tapýarys:

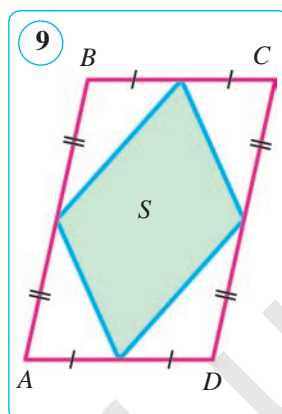
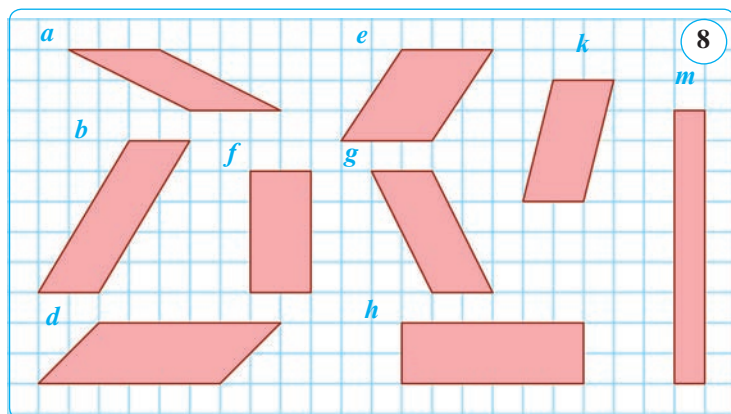
$$S = AD \cdot BP = AD \cdot BD \cdot \sin \angle BDP = 20 \cdot 16 \cdot \sin 30^\circ = 20 \cdot 16 \cdot 0,5 = 160 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Jogaby:  $S = 160 \text{ cm}^2$ .



### Soraglar, meseleler we ýumuşlar

1. 1) Gönüburçlugyň meýdany nämä deň?  
 2) Parallelogramyň esasy we beýikligi diýende nämäni düşünyärsiňiz?  
 3) Parallelogramyň meýdany onuň iki goňşy tarapy we olaryň arasyndaky burç boýunça nähili tapylýar?
2. Gönüburçlugyň iki tarapy: 1) 30 cm we 2,9 cm; 2) 34 dm we 0,6 dm; 3) 2,5 dm we 12 cm. Şu gönüburçlugyň perimetrini we meýdanyny tapyň.
3. Gönüburçlugyň bir tarapy 15 dm, ikinji tarapy bolsa ondan 5 esse artyk. Şu gönüburçlugyň perimetrini we meýdanyny tapyň.
4. Meýdany  $240 \text{ m}^2$  bolan basketbol meýdany sport meýdanynyň 15%-ini tutýar. Sport meýdanynyň meýdany tutuş mekdebiň meýdanynyň 32%-ini düzýär. Mekdebiň meýdanynyň meýdanyny tapyň.
5. Gönüburçlugyň bir tarapy 23 cm, ikinji tarapy bolsa ondan 17 cm uzyn. Gönüburçlugyň perimetrini we meýdanyny tapyň.



6. Eger gönüburçlугyň meýdany  $20 \text{ cm}^2$  we 1) uzynlygy  $5 \text{ cm}$ -e; 2) uzynlygy eniniň  $125\%$ -ine; 3) taraplaryndan biri  $x$  -a deň bolsa, perimetri nämä deň bolar?
  7. Eger  $ABCD$  gönüburçlukda: 1)  $AB=9 \text{ cm}$ ,  $BC=4 \text{ cm}$ ; 2)  $AB:BC=5:7$ ,  $P_{ABCD}=48 \text{ cm}$  bolsa, onuň meýdanyny tapyň.
  8. Parallelogramyň tarapy  $16 \text{ cm}$ -e, oňa geçirilen beýiklik bolsa  $9 \text{ cm}$ -e deň. Şu parallelograma deňdeş kwadratyň tarapyny tapyň.
  9.  $a$  – parallelogramyň esasy,  $h$ –beýikligi,  $S$ –meýdany. Eger:
    - 1)  $a=10 \text{ cm}$ ,  $h_e=0,5 \text{ m}$  bolsa,  $S$ -i; 2)  $h_e=4 \text{ cm}$ ,  $S=48 \text{ cm}^2$  bolsa,  $a$ -ny; 3)  $a=24 \text{ cm}$ ,  $S=120 \text{ cm}^2$  bolsa,  $h_e$  -y tapyň.
  10. 8-nji suratdaky deňdeş parallelogramlary tapyň.
  11. Eger gönüburçlугyň: 1) esasy  $5$  esse kemeldilip, beýikligi  $8$  esse uzaldylsa; 2) esasy hem, beýikligi hem  $2,5$  esse kemeldilse, onuň meýdany nähili üýtgär?
  12. 9-njy suratdaky  $S$  şekiliň meýdany parallelogramyň meýdanynyň nähili bölegini tutýar?
  13. Gönüburçlугyň iki tarapy: 1)  $24 \text{ cm}$  we  $20 \text{ cm}$ ; 2)  $3,5 \text{ dm}$  we  $8 \text{ cm}$ ; 3)  $8 \text{ m}$  we  $4,5 \text{ m}$ ; 4)  $3,2 \text{ dm}$  we  $1,5 \text{ dm}$ . Onuň meýdanyny tapyň.
  14. Parallelogramyň meýdany  $36 \text{ cm}^2$ , beýiklikleri  $3 \text{ cm}$  we  $4 \text{ cm}$ . Şu parallelogramyň perimetrini tapyň.
  15. Parallelogramyň taraplary  $20 \text{ cm}$  we  $28 \text{ cm}$ , olaryň arasyndaky burç  $30^\circ$ -a deň. Şu parallelogramyň meýdanyny iki usul bilen tapyň.
- Üçburçlугyň meýdanyny hasaplamagyň formulasyny tapmak üçin parallelogram şekiline getirmek usulyndan peýdalanýarys.

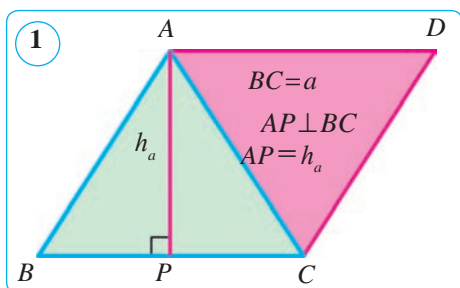
## 48. ÜÇBURÇLUGYŇ MEÝDANY

### Teorema.

Üçburçlugyň meýdany onuň esasy bilen beýikliginiň köpeltmek hasylynyň ýarysyna deň:  $S = \frac{1}{2} a \cdot h$

munda  $a$  – üçburçlugyň esasy,  $h_a$  – esasa geçirilen beýiklik.

*Subudy.*  $ABC$  – berlen üçburçluk bolsun (1-nji surat).  $\triangle ABC$ -ni suratda görkezilişi ýaly  $ABCD$  (esasy  $BC$ ) parallelograma doldurýarys.  $\triangle BAC$  we  $\triangle DCA$ -lar deň, çünki parallelogramyň diagonaly ony iki deň üçburçluga bölýär. Şonuň üçin bu üçburçluklaryň meýdanlary deň. Diýmek,  $ABCD$  parallelogramyň meýdany  $\triangle ABC$  meýdanynyň ikeldilenine deň:  $2S = a \cdot h_a$ .



Mundan,  $S = \frac{ah_a}{2}$ . Teorema subut edildi.

Üçburçlugyň meýdanyny hasaplamagyň formulasyny başgaça hem okamak mümkin:

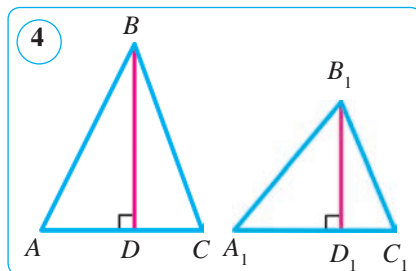
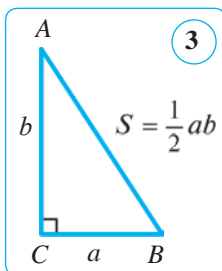
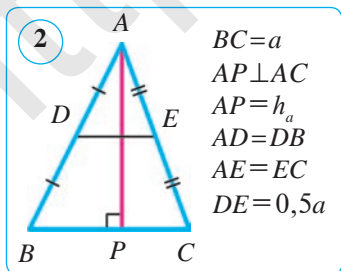
**üçburçlugyň meýdany onuň orta çyzygy bilen beýikliginiň köpeltmek hasylyna deň** (2-nji surat):  $S = \frac{a}{2} \cdot h_a$ .

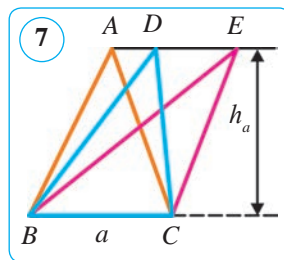
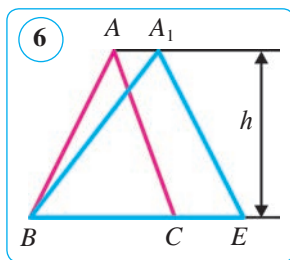
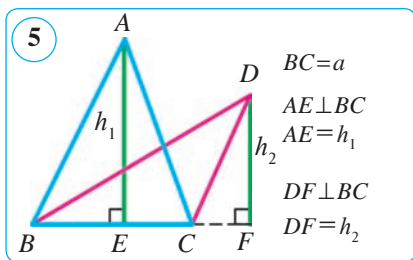
**1-nji netije.** Gönüburçly üçburçlugyň meýdany katetleriniň köpeltmek hasylynyň ýarysyna deň, çünki bir kateti esas we ikinjini beýiklik edip almak mümkin (3-nji surat).

**2-nji netije.** Iki üçburçlugyň meýdanlarynyň gatnaşygy esaslary bilen beýiklikleriniň köpeltmek hasylynyň gatnaşygy ýalydyr (4-nji surat).

*Subudy.*  $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{0,5AC \cdot BD}{0,5A_1C_1 \cdot B_1D_1} = \frac{AC \cdot BD}{A_1C_1 \cdot B_1D_1}$ .

**3-nji netije.** Esaslary deň bolan iki üçburçluk meýdanlarynyň gatnaşygy beýiklikleriniň gatnaşygy ýalydyr (5-nji surat). *Subudy.*  $\frac{S_{ABC}}{S_{DBC}} = \frac{0,5a \cdot h_1}{0,5a \cdot h_2} = \frac{h_1}{h_2}$ .





**4-nji netije.** *Beýiklikleri deň bolan iki üçburçlugyň meýdanlarynyň gatnaşygy esaslarynyň gatnaşygy ýalydyr (6-njy surat).*

Subudy.  $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1BE}} = \frac{0,5 \cdot BC \cdot h}{0,5 \cdot BE \cdot h} = \frac{BC}{BE} = \frac{a}{a_1}$ , munda  $BC = a$ ,  $BE = a_1$ .

**5-nji netije.** *Esaslary we beýiklikleri deň bolan üçburçluklar deňdeşdir (7-nji surat). Subudy.  $S_{BAC} = S_{BDC} = S_{BEC} = 0,5ah_e$ .*

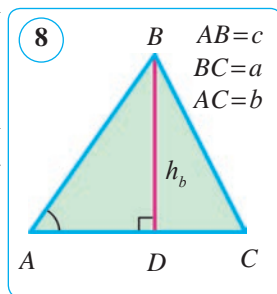
**6-njy netije.** *Üçburçlugyň meýdany onuň iki tarapy we olaryň arasyndaky burçuň sinusynyň köpeltmek hasylynyň ýarysyna deň (8-nji surat).*

Subudy.  $ABC$  üçburçlugyň taraplary  $BC = a$ ,  $AC = b$ ,  $AB = c$  bolsun. Onda  $S = \frac{1}{2}bc \sin A$  bolýandygyny subut edýäris. Munuň üçin  $ABC$  üçburçlugyň  $BD = h_b$  beýikligini geçirýäris (8-nji surat).  $h_b$ -ni  $c$  tarap we  $A$  burçuň sinusy bilen aňladýarys:  $h_b = c \sin A$ . Üçburçlugyň meýdanyny hasaplamagyň formulasy  $S = \frac{1}{2}bh_b$  -a  $h_b$  -yň şu aňlatmasyny goýup, şu formulany alarys:  $S = \frac{1}{2}bc \sin A$ .

Üçburçlugyň meýdanyny  $a$ ,  $b$  taraplary we  $C$  burçuň sinusy,  $a$ ,  $c$  taraplary we  $B$  burçuň sinusy arkaly hasaplamagyň formulalary şuna meňzeş getirip çykarylýar.

Şeýdip, üçburçlugyň meýdany iki tarapyna we olaryň arasyndaky burçuň sinusyna görä şu formulalar boýunça hasaplanýar:

$$S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}bc \sin A$$



Üçburçlugyň meýdanyny taraplary arkaly hasaplamagyň formulasy I asyrdan ýaşan gadymky grek alymy **Geron** tarapyndan tapylan bolup, ol *Geronyň formulasy* diýlip atlandyrylýar. Geronyň formulasy üçburçlugyň üç tarapynyňuzynlygy mälim bolanda onuň meýdanyny hasaplamak üçin ulanylýar.

Geronyň formulasynyň subudyny getirip çykarýarys.

Mälim bolşy ýaly, üçburçlugyň meýdany onuň esasy bilen beýikliginiň köpeltmek hasylynyň ýarysyna deň:  $S = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}b \cdot h_b = \frac{1}{2}c \cdot h_c$ .

Beýikligiň ýerine onuň üçburçlugyň taraplary arkaly aňlatmasy

$$h_a = \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \beta = 90^\circ, \quad h_b = \frac{2}{b} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{we}$$

$$h_c = \frac{2}{c} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

-lary go'up, ony yönekeyleşdirip şu Geronyň formulasyny alarys:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad \text{munda } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

**1-nji mesele.** Üçburçlugyň medianasy ony iki deňdeş üçburçluga bölýändigini subut ediň.

*Subudy.*  $BD$  –  $ABC$  üçburçlugyň medianasy bolsun (9-njy surat).  $ABD$  we  $CBD$  üçburçluklar deň  $AD$  we  $DC$  taraplara hem-de umumy  $BP$  beýiklige eýe, ýagny üçburçluklar 5-nji netijä görä deňdeşdir:  $S_{ABD} = S_{CBD}$ .

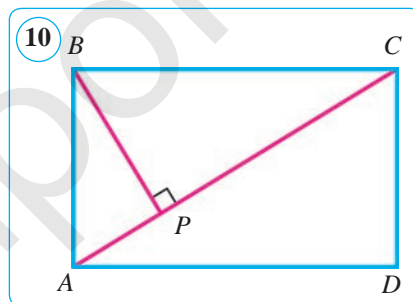
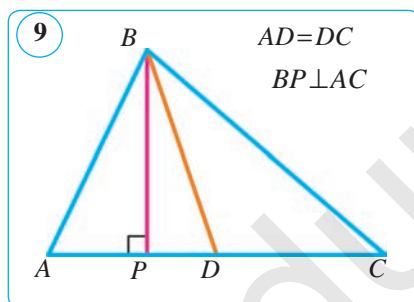
**2-nji mesele.** Berlen:  $ABCD$  – gönüburçluk,  $AC = 20$  cm,  $BP = 12$  cm,  $BP \perp AC$  (10-njy surat).

*Tapmaly:*  $S_{ABCD}$ .

*Çözülüşi.* 1)  $S_{ABC} = 0,5AC \cdot BP = 0,5 \cdot 20 \cdot 12 = 120$  (cm<sup>2</sup>).

2)  $S_{ABCD} = 2 \cdot S_{ABC} = 2 \cdot 120 = 240$  (cm<sup>2</sup>).

*Jogaby:*  $S_{ABCD} = 240$  cm<sup>2</sup>.



### Soraglar, meseleler we ýumuşlar

- 1) Üçburçlugyň meýdany nämä deň?
- 2) Gönüburçly üçburçlugyň meýdany nähili hasaplanýar?
- 3) Taraplaryna görä üçburçlugyň meýdany nähili hasaplanýar?
2. Gönüburçly üçburçlugyň katetleri: 1) 4 cm we 7 cm; 2) 1,2 dm we 25 cm. Şu gönüburçly üçburçlugyň meýdanyny tapyň.
3. Bir üçburçlugyň esasy 20 cm, beýikligi 8 cm. Ikinji üçburçlugyň esasy 40 cm. Üçburçluklar deňdeş bolmagy üçin ikinji üçburçlugyň beýikligi nähili bolmaly?
4.  $ABC$  üçburçlukda  $AB = 5AC$ . Üçburçlugyň  $B$  we  $C$  depelerinden geçirilen beýiklikleriniň gatnaşygy nämä deň?
5. Nämälim mukdarlary tapyň.  $a$  – üçburçlugyň esasy,  $h$  – esasyňa geçirilen beýiklik,  $S$  – üçburçlugyň meýdany.



	1	2	3	4	5	6
	69 cm	0,8 dm	?	0,25 m	?	0,9 m
	0,5 m	?	20 dm	100 cm	4,8 cm	?
	?	4 cm <sup>2</sup>	2000 cm <sup>2</sup>	?	9,6 mm <sup>2</sup>	36 dm <sup>2</sup>

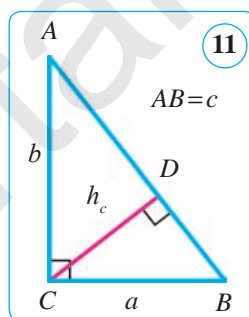
6. Katetleriñ ( $a$  we  $b$ ) köpeltmek hasyly gipotenuza ( $c$ ) bilen göni burçuñ depesinden gipotenuza geçirilen beýikligiñ ( $h_c$ ) köpeltmek hasylyna deñ (11-nji surat).

Çözülüşi. Eger katetlerden birini esas üçin kabul etsek, onda ikinji beýiklik bolýar. Şonuñ üçin, göni burçly üçburçlugyñ meýdany katetleriñ köpeltmek hasylynyñ ýarysyna deñ bolýar:

$$S = \frac{1}{2}ab, \text{ mundan } ab = 2S; S = \frac{1}{2}ch_c, \text{ mundan } \zeta_c = 2S.$$

Diýmek,  $ab = \zeta_c$  eken. Şony subut etmek talap edilipdi.

Üçburçlugyñ katetleri: 1) 12 cm we 16 cm; 2) 5 cm we 12 cm-e deñ.  $c$  (Pifagoryñ teoremasyna görä) we  $h_c$  ( $ab = \zeta_c$  görä)-ni tapyň.



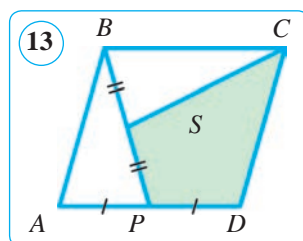
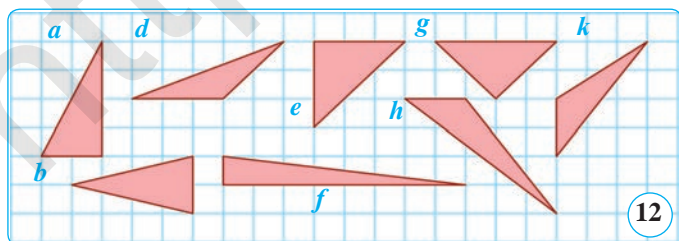
7. 12-nji suratdaky deñdeş üçburçluklary görkeziň. Jogabyňyzy esaslandyryň.

8. Taraplary: 1) 39 cm, 42 cm, 45 cm; 2) 35 cm, 29 cm, 8 cm; 3) 20 cm, 20 cm, 32 cm-e deñ bolan üçburçlugyñ meýdanyny tapyň.

9. 13-nji suratdaky  $S$  şekiliñ meýdany parallelogramyñ meýdanynyñ nähili bölegini düzýär?

10. Üçburçlugyñ meýdany 150 cm<sup>2</sup>-a deñ. Üçburçlugyñ beýiklikleri 15 cm, 12 cm we 20 cm-e deñ bolsa, onuñ perimetrini tapyň.

11. Üçburçlugyñ iki tarapy 5 dm we 6 dm, olaryñ arasyndaky burç 30°. Üçburçlugyñ meýdanyny tapyň. Meseläni iki usul bilen çözüň.



$$h_a = \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \beta = 90^\circ, \quad h_b = \frac{2}{b} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{we}$$

$$h_c = \frac{2}{c} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

-lary go'up, ony yönekeyleşdirip şu Geronyň formulasyny alarys:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad \text{munda } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

**1-nji mesele.** Üçburçlugyň medianasy ony iki deňdeş üçburçluga bölýändigini subut ediň.

*Subudy.*  $BD$  –  $ABC$  üçburçlugyň medianasy bolsun (9-njy surat).  $ABD$  we  $CBD$  üçburçluklar deň  $AD$  we  $DC$  taraplara hem-de umumy  $BP$  beýiklige eýe, ýagny üçburçluklar 5-nji netijä görä deňdeşdir:  $S_{ABD} = S_{CBD}$ .

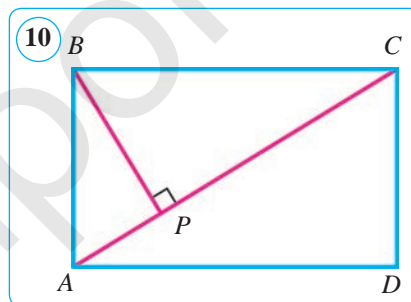
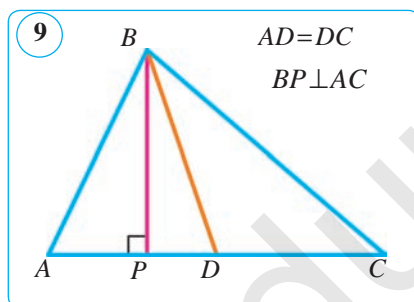
**2-nji mesele.** Berlen:  $ABCD$  – gönüburçluk,  $AC = 20$  cm,  $BP = 12$  cm,  $BP \perp AC$  (10-njy surat).

*Tapmaly:*  $S_{ABCD}$ .

*Çözülüşi.* 1)  $S_{ABC} = 0,5AC \cdot BP = 0,5 \cdot 20 \cdot 12 = 120$  (cm<sup>2</sup>).

2)  $S_{ABCD} = 2 \cdot S_{ABC} = 2 \cdot 120 = 240$  (cm<sup>2</sup>).

*Jogaby:*  $S_{ABCD} = 240$  cm<sup>2</sup>.



### Soraglar, meseleler we ýumuşlar

- 1) Üçburçlugyň meýdany nämä deň?
- 2) Gönüburçly üçburçlugyň meýdany nähili hasaplanýar?
- 3) Taraplaryna görä üçburçlugyň meýdany nähili hasaplanýar?
2. Gönüburçly üçburçlugyň katetleri: 1) 4 cm we 7 cm; 2) 1,2 dm we 25 cm. Şu gönüburçly üçburçlugyň meýdanyny tapyň.
3. Bir üçburçlugyň esasy 20 cm, beýikligi 8 cm. Ikinji üçburçlugyň esasy 40 cm. Üçburçluklar deňdeş bolmagy üçin ikinji üçburçlugyň beýikligi nähili bolmaly?
4.  $ABC$  üçburçlukda  $AB = 5AC$ . Üçburçlugyň  $B$  we  $C$  depelerinden geçirilen beýiklikleriniň gatnaşygy nämä deň?
5. Nämälim mukdarlary tapyň.  $a$  – üçburçlugyň esasy,  $h$  – esasyňa geçirilen beýiklik,  $S$  – üçburçlugyň meýdany.

## 49–50. ROMBUŇ WE TRAPESIÝANYŇ MEÝDANY

**1. Rombuň meýdany. Romb** – taraplary deň bolan parallelogramdyr. Tarapy  $a$  we beýikligi  $h_e$  bolan rombuň meýdany  $S = ah_e$  formula boýunça hasaplanýar. Bize mälim bolşy ýaly, rombuň hemme beýiklikleri özara deň. Mundan daşary, rombuň meýdanyny diagonalalary arkaly hem hasaplamak mümkin.

### Teorema.

**Rombuň meýdany onuň diagonalalarynyň köpeltmek hasylynyň ýarysyna deň:**  $S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$ ,

bu ýerde  $d_1$  we  $d_2$  – rombuň diagonalalary.

*Subudy.* Mälim bolşy ýaly, rombuň  $AC$  diagonalasy ony iki özara deňýanly üçburçluga bölýär (1-nji surat). Ikinji diagonal bolsa birinjisine perpendikulýar bolup, emele gelen üçburçluklar beýiklikleriniň jemine deň bolýar. Şonuň üçin rombuň meýdany:

$$\begin{aligned} S = S_{ABCD} &= S_{ABC} + S_{ADC} = \frac{1}{2} AC \cdot BO + \frac{1}{2} AC \cdot DO = \frac{1}{2} AC \cdot (BO + DO) = \\ &= \frac{1}{2} AC \cdot \underline{\underline{BD}} = \frac{1}{2} \underline{\underline{d_1}} \cdot \underline{\underline{d_2}}. \end{aligned}$$

Diýmek,  $S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$ . Teorema subut edildi.

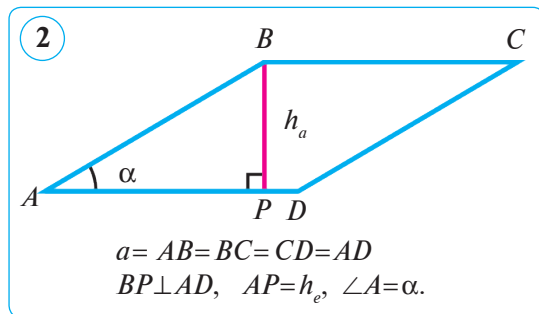
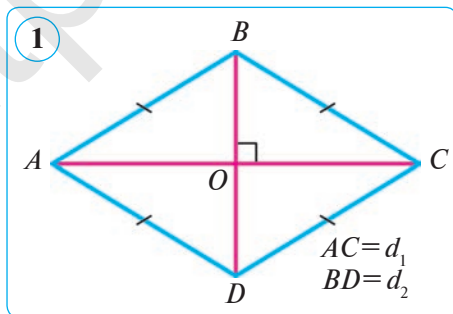
**1-nji mesele.**  $ABCD$  rombuň tarapy  $a$ -ga, ýiti burçy bolsa  $\alpha$  deň. Şu rombuň meýdanyny tapyň.  $\alpha = 30^\circ$ -da onuň meýdanyny tapyň.

*Çözülişi.* 1)  $ABCD$  rombda  $AB = BC = CD = AD = a$ ,  $\angle A = \alpha$  bolsun.  $BP \perp AD$ -ni geçirýäris (2-nji surat). Onda  $h_e$  beýiklik gönüburçly  $ABP$  üçburçlugyň  $\alpha$  ýiti burçunyň garşysynda ýatýan katet bolýar.  $h_e$ -y  $\alpha$  burçuň sinusy bilen aňladýarys:  $h_e = a \sin \alpha$ . Rombuň meýdanyny hasaplamagyň formulasy  $S = ah_e$ -a  $h_e$ -yň bu aňlatmasyny goýup, şu formulany alarys:  $S = a^2 \sin \alpha$ .

2) Rombuň meýdanyny  $S = a^2 \sin \alpha$  formuladan peýdalanyp tapýarys:

$$S = a^2 \sin 30^\circ = a^2 \cdot 0,5 = 0,5a^2 \text{ (kw. birl.)}$$

*Jogaby:*  $S = 0,5a^2$  kw. birl.



**2-nji mesele.** Rombuň diagonalaryndan biri ikinjiden 1,5 esse uly, meýdany bolsa  $27 \text{ cm}^2$ -a deň. Şu rombuň diagonallaryny tapyň.

*Berlen:*  $ABCD$  – romb;  $S_{ABCD} = 27 \text{ cm}^2$ ;  $AC = 1,5BD$  (1-nji surata g.)

*Tapmaly:*  $AC, BD$ .

*Çözülişi.*  $BD = x \text{ cm}$  bolsun, onda  $AC = 1,5x \text{ cm}$  bolýar.

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$ , muňa belgilemeleri goýýarys:  $27 = \frac{1}{2} \cdot 1,5x \cdot x$ . Onda  $x^2 = 36$  bolýar, mundan  $x = 6 \text{ (cm)}$ . Şeýlelikde,

$$BD = 6 \text{ cm}, \quad AC = 1,5 \cdot 6 = 9 \text{ (cm)}.$$

*Jogaby:* 9 cm, 6 cm.

**2. Trapesiýanyň meýdany.** Islendik köpburçlугy diagonallar geçirmek ýoly bilen üçburçluklara bölmek mümkin. Islendik köpburçlугyň meýdanyny hasaplamak üçin ol ilki üçburçluklara bölünýär, soňra üçburçluklaryň meýdany hasaplanýar. Köpburçlугyň meýdany bolsa ony düzýän bir-birini örtmeýän üçburçluklaryň meýdanlarynyň jemine deň bolýar. Trapesiýanyň meýdanlaryny hasaplanda şu usuldan peýdalanýarys.

**Teorema.**

**Trapesiýanyň meýdany onuň esaslarynyň jeminiň ýarysy bilen beýikliginiň köpeltmek hasylyna deň:**

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

bu ýerde  $a$  we  $b$  – trapesiýanyň esaslary,  $h$  – trapesiýanyň beýikligi.

*Subudy.* Esaslary  $AD = a$ ,  $BC = b$  we beýikligi  $CE = h$  ( $CE \perp AD$ ) bolan  $ABCD$  trapesiýa garalyň (3-nji surat).

Trapesiýada  $AC$  diagonalý geçiryäris. Munda  $ABCD$  trapesiýa  $ABC$  we  $ACD$  üçburçluklara bölünýär. Trapesiýanyň meýdany bolsa bu üçburçluklaryň meýdanlarynyň jemine deň bolýar.

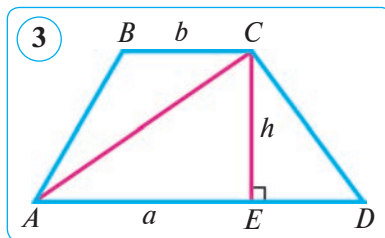
Parallel göni çyzyklaryň arasyndaky aralyk hemişelik bolany üçin  $ABC$  we  $ACD$  üçburçluklaryň beýiklikleri özara deň.

Mundan,  $S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot CE = \frac{1}{2} b \cdot h$  we  $S_{ACD} = \frac{1}{2} AD \cdot CE = \frac{1}{2} a \cdot h$ .

Trapesiýanyň meýdany  $S = S_{ABC} + S_{ACD}$ , ýagny:

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h + \frac{1}{2} b \cdot h \quad \text{ýa-da} \quad S = \frac{a+b}{2} \cdot h.$$

Teorema subut edildi.



**Netije.** *Trapesiyanıń meýdany orta çyzygy bilen beýikliginiń köpeltmek hasylyna deň.*

Şu netije trapeşiyanıń orta çyzygy esaslarynyń jeminiń ýarysyna deňliginden gelip çykýar.

**3-nji mesele.** Trapeşiyanıń esaslary 15 cm we 30 cm-e, meýdany 225 cm<sup>2</sup>-a deň. Şu trapeşiyanıń beýikligini tapyň.

*Çözülişi.* Trapeşiyanıń orta çyzygy:  $\frac{a+b}{2} = \frac{15+30}{2} = \frac{45}{2} = 22,5$  (cm).

Diýmek, trapeşiyanıń beýikligi:  $h = S_{tr.} : \frac{a+b}{2} = 225 : 22,5 = 10$  (cm).

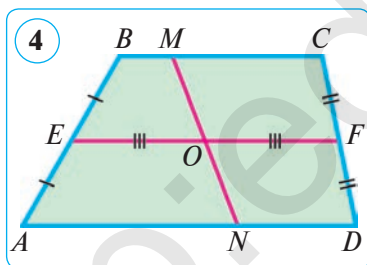
*Jogaby:*  $h=10$  cm.

**4-nji mesele.** Trapeşiyanıń orta çyzygy ortasyndan geçip, esaslaryny kesiji göni çyzyk bu trapeşiyanı iki deňdeş bölege bölýändigini subut ediň.

*Çözülişi.* ABCD – berlen trapeşiya ( $AD \parallel BC$ ), EF – onuń orta çyzygy, MN bolsa orta çyzygyń ortasy O arkaly geçýän hem-de esaslaryny M we N nokatlarda kesiji göni çyzyk bolsun (4-nji surat). ABMN we MNDC trapeşiýalar deňşililikde deň EO we OF orta çyzyk hem-de berlen trapeşiyanıń beýikligine deň beýiklige eýe. Diýmek, bu trapeşiýalaryń meýdanlary deň, ýagny olar deňdeşdir:  $S_{ABMN} = S_{MNDC}$ .

Şony subut etmek talap edilipdi.

**5-nji mesele.** Deňyanly trapeşiyanıń diagonallary özara perpendikulýar bolsa, onda trapeşiyanıń beýikligi onuń orta çyzygyna, meýdany bolsa beýikliginiń kwadratyna deň bolýar. Şony subut ediň.



*Berlen:* ABCD trapeşiya – deňyanly ( $AB=DC$ ),  $AC \perp BD$ ,  $AD=a$ ,  $BC=b$  bolsun (5-nji surat).

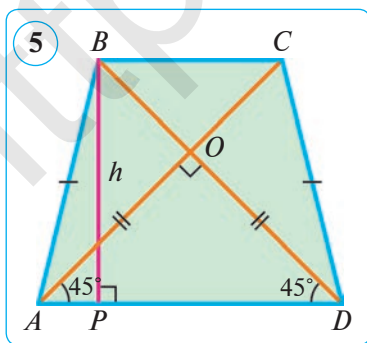
*Subut etmeli:*

$$1) h = \frac{a+b}{2}; \quad 2) S_{tr.} = h^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

*Çözülişi.* 1)  $\triangle AOD$  – deňyanly we gönüburçly, şonuń üçin  $\angle ADO = 45^\circ$ .

2) B depesinden  $BP \perp AD$ -ni geçirýäris. Emele gelen BPD üçburçluk hem deňyanly we gönüburçly, çünki  $\angle ADO = 45^\circ$  we diýmek,  $\angle PBD = 45^\circ$ . Mundan:  $DP = BP$ . Bize mälim bolşy ýaly, deňyanly trapeşiyanıń kiçi esasy depesinden geçirilen beýikligiń häsiýetine görä:


$$BP = DP = \frac{a+b}{2}.$$



$$3) S_{\text{tr.}} = \frac{a+b}{2} \cdot h = h \cdot h = h^2 \text{ ýa-da } S_{\text{tr.}} = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a+b}{2} = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

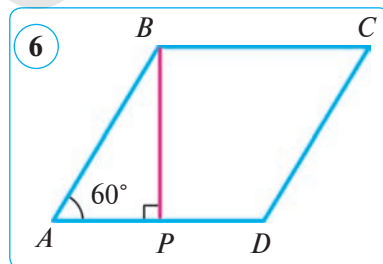
Şeýlelikde, deňýanly trapesiýanyň diagonallary özara perpendikulýar bolanda onuň beýikligi orta çyzygyna, meýdany bolsa beýikliginiň kwadratyna deňligi doly subut edildi.

### Soraglar, meseleler we ýumuşlar

- 1) Rombuň meýdany tarapy we beýikligi boýunça nähili tapylýar?
-  2) Rombuň meýdany diagonallary arkaly nähili tapylýar? Ony aňladyň.
- 3) Trapesiýanyň meýdany nämä deň?
2. Rombuň meýdany  $40 \text{ cm}^2$ , beýikligi bolsa  $5 \text{ cm}$ -e deň. Şu rombuň perimetrini tapyň.
3. Eger rombuň: 1) beýikligi  $16 \text{ cm}$ , ýiti burçy  $30^\circ$ -a; 2) tarapy  $1,8 \text{ dm}$ , ýiti burçy  $30^\circ$ -a deň bolsa, onuň meýdanyny tapyň.
4. Rombuň meýdany  $60 \text{ cm}^2$ , diagonallaryndan biri  $10 \text{ cm}$ -e deň. Şu rombuň ikinji diagonalyny tapyň.
5. Rombuň meýdany  $30 \text{ cm}^2$ , perimetri bolsa  $24 \text{ cm}$ -e deň. Şu rombuň beýikligini tapyň.
6. Berlen:  $ABCD$  – romb.  $\angle BAD = 60^\circ$ ,  $BP \perp AD$ ,  $BP = 12 \text{ cm}$  (6-njy surat).

Tapmaly:  $S$ .

Çözülişi. Gönüburçly  $BPA$  üçburçluga garap geçýäris. Ýiti burçuň sinusynyň kesgitlemesine görä:  $\sin A = \frac{BP}{AB}$ . Muňa berlenleri goýup,  $AB$ -ni tapýarys:



$$\sin A = \frac{BP}{AB} \Rightarrow AB = \frac{BP}{\sin A} = \frac{12}{\sin 60^\circ} = 12 : \frac{\sqrt{3}}{2} = 12 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{24}{\sqrt{3}} \text{ (cm)}$$

Tarapyna we ýiti burçuna görä rombuň meýdanyny tapmagyň formulasyna

$$AB = a = \frac{24}{\sqrt{3}}, \quad \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

bahalary goýup, aşakdakyny tapýarys:

$$S = a^2 \cdot \sin 60^\circ = \left(\frac{24}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{576}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 96\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

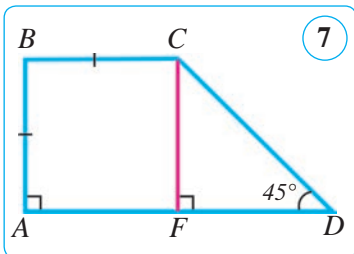
Jogaby:  $96\sqrt{3} \text{ cm}^2$ .

7. Diagonallary: 1)  $1,5 \text{ dm}$  we  $1,8 \text{ dm}$ ; 2)  $24 \text{ cm}$  we  $15 \text{ cm}$ ; 3)  $3,2 \text{ cm}$  we  $0,5 \text{ dm}$  bolan rombuň meýdanyny tapyň.

8. 1) Trapesiyanıń esaslary 11 cm we 18 cm-e, beýikligi bolsa 6 cm-e deń. Şu trapesiyanıń meýdanyny tapyń.

2) Trapesiyanıń esasy 26 cm, beýikligi 10 cm, meýdany bolsa  $200 \text{ cm}^2$ . Şu trapesiyanıń ikinji esasyny tapyń.

9.  $ABCD$  gönüburçly trapesiýada  $AB=BC=18 \text{ cm}$ ,  $\angle D=45^\circ$  (7-nji surat). Trapesiyanıń meýdanyny tapyń. Boş ýerlere degişli jogaplary ýazyń.



*Çözülişi.*  $CF \perp AD$ -ni geçiryäris.

1)  $ABCF$  –kwadrat, çünki  $ABCF$  dörtburçlugyń gońşy taraplary  $AB$  we ..., şonuń üçin  $AF=CF=... \text{ (cm)}$ .

2)  $\triangle CFD$  – gönüburçly, gurmaga görä  $\angle F=90^\circ$  we şerte görä  $\angle D=45^\circ$ , şonuń üçin

$\angle DCF=...^\circ$  we diýmek,  $\triangle CFD$  – ... we  $DF=...=... \text{ (cm)}$ .

3)  $AD=AF+...=...+...=... \text{ (cm)}$  we  $S_{ABCD}=... \cdot ...=... \text{ (cm}^2\text{)}$ .

*Jogaby:* ...  $\text{cm}^2$ .

10. Rombuń burçlarynyń gatnaşygy  $1:5$ -e, tarapy bolsa  $a$ -ga deń. Şu rombuń meýdanyny tapyń.

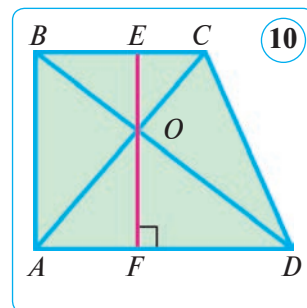
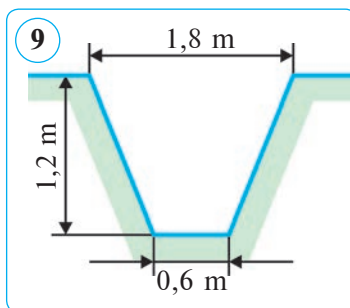
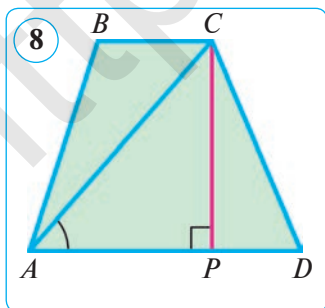
11.  $ABCD$  trapesiýada:  $AD=20\sqrt{2} \text{ cm}$ ,  $BC=10\sqrt{2} \text{ cm}$ ,  $AC=24 \text{ cm}$ ,  $\angle CAD=45^\circ$  (8-nji surat). Trapesiyanıń meýdanyny tapyń.

12. Diagonallary: 1) 3,5 dm we 1,4 dm; 2) 28 cm we 17 cm; 3) 4,2 cm we 1,5 dm bolan rombuń meýdanyny tapyń.

13. Deńyanly trapesiyanıń diagonallary özara perpendikulýar we beýikligi 5 cm-e deń. Şu trapesiyanıń meýdanyny tapyń.

14. Deńyanly trapesiýa şeklindeki çukuryń kese kesiginiń meýdanyny tapyń (9-njy surat).

15. Trapesiyanıń esaslary 16 cm we 12 cm. Diagonallarynyń kesişme nokadyn dan esaslaryna çenli bolan aralyklar 6 cm we 4 cm-e deń (10-njy surat). Şu trapesiyanıń meýdanyny tapyń.



## 51. KÖPBURÇLUGYŇ MEÝDANY

Köpburçlugyň meýdanyny hasaplamak üçin ony özara kesişmeýän, ýagny umumy içki nokatlary bolmadyk üçburçluklara bölmek we olaryň meýdanlarynyň jemini tapmak mümkin. Güberçek köpburçlugy üçburçluklara bölmek üçin, meselem, onuň bir depesinden diagonallar geçirmek ýeterli (1-nji a surat). Käte başgaça bölmeklerden peýdalanmak amatly (1-nji b surat).

**1-nji mesele.**  $ABCDE$  köpburçlukda  $BD \parallel AE$ ,  $CP \perp AE$  bolýandygy mälim (2-nji surat)

$S_{ABCDE} = 0,5(BD \cdot CP + AE \cdot OP)$  bolýandygyny subut ediň.

*Subudy.* Berlen şekiliň trapesiýadan we üçburçlukdan ybaratdygyny görmek kyn däl. Şu sebäpli meýdanyň häsiýetine görä:

$$S_{ABCDE} = S_{BCD} + S_{ABDE} = 0,5BD \cdot CO + 0,5(AE + BD) \cdot OP = 0,5(\underline{BD \cdot CO} + AE \cdot OP + \underline{BD \cdot OP}) = 0,5(BD \cdot (CO + OP) + AE \cdot OP) = 0,5(BD \cdot CP + AE \cdot OP).$$

Diýmek,  $S_{ABCDE} = 0,5(BD \cdot CP + AE \cdot OP)$ .

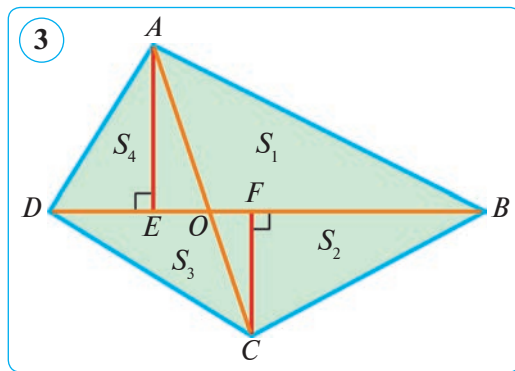
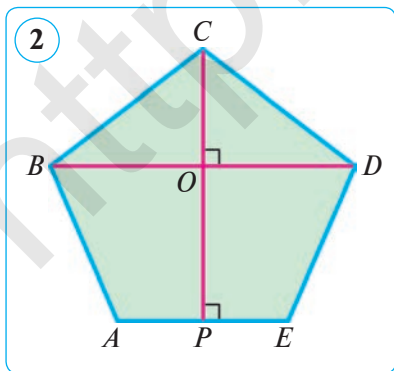
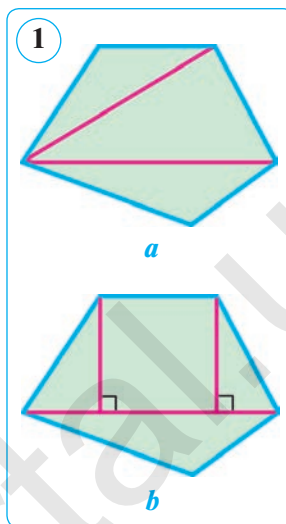
**2-nji mesele.**  $AC$  we  $BD$  –  $ABCD$  dörtburçlugyň diagonallary,  $O$  – diagonallarynyň kesişme nokady (3-nji surat). Eger  $S_{AOB} = S_1$ ,  $S_{BOC} = S_2$ ,  $S_{COD} = S_3$  we  $S_{AOD} = S_4$  bolsa,  $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$  bolýandygyny subut ediň.

*Subudy.* 1)  $AE \perp BD$  we  $CF \perp BD$ -leri geçiryäris.

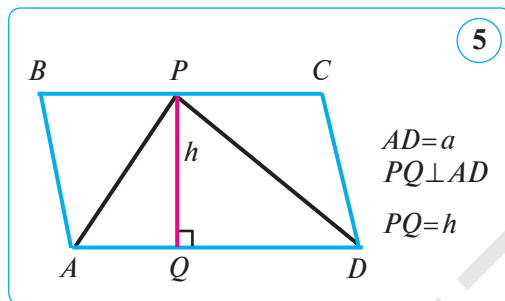
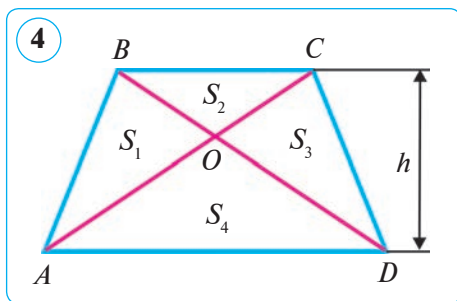
2)  $\frac{S_1}{S_4} = \frac{0,5OB \cdot AE}{0,5OD \cdot AE} = \frac{OB}{OD}$  (1) we  $\frac{S_2}{S_3} = \frac{0,5OB \cdot CF}{0,5OD \cdot CF} = \frac{OB}{OD}$  (2).

3) (1) we (2) dan tapýarys:

$$\frac{S_1}{S_4} = \frac{S_2}{S_3} \Rightarrow S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4.$$







**3-nji mesele.**  $BC$  we  $AD$  –  $ABCD$  trapesiyanıń esaslary,  $O$  –  $AC$  we  $BD$  diagonallarynyń kesişme nokady (4-nji surat).  $AD = a$ ,  $BC = b$ .

$S_{AOB} = S_1$ ,  $S_{BOC} = S_2$ ,  $S_{COD} = S_3$  we  $S_{AOD} = S_4$  bolsa, aşqadaky subut ediń:

$$1) S_1 = S_3 = \sqrt{S_2 \cdot S_4}; \quad 2) S_{tr.} = (\sqrt{S_2} + \sqrt{S_4})^2.$$

*Subudy.* 1)  $S_{tr.} = \underline{S_1} + S_2 + \underline{S_3} + S_4 = S_2 + 2S_1 + S_4 =$ .

2) Bize  $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$  bolýandygy mälim.  $S_1 = S_3$ -i nazara alsak,  $S_1 = S_3 = \sqrt{S_2 \cdot S_4}$  gelip çykyar. Meseläniń birinji bölegi subut edildi.

3) Trapesiyanıń meýdany dört üçburçlugyń meýdanlarynyń jemine deńdigi we ýokardaky netijeleri hasaba alyp, aşqadaka eýe bolarys:

$$\begin{aligned} S_{tr.} &= \underline{S_1} + S_2 + \underline{S_3} + S_4 = S_2 + 2S_1 + S_4 = \\ &= (\sqrt{S_2})^2 + 2\sqrt{S_2 \cdot S_4} + (\sqrt{S_4})^2 = (\sqrt{S_2} + \sqrt{S_4})^2. \end{aligned}$$

Diýmek,  $S_{tr.} = (\sqrt{S_2} + \sqrt{S_4})^2$ . Meseläniń ikinji bölegi subut edildi.

**4-nji mesele.** Parallelogram bilen umumy esasa we umumy beýiklige eýe bolan üçburçlugyń meýdany parallelogramyń meýdanynyń ýarysyna deň.

*Subudy.*  $AD$  esas we  $h$  beýiklik  $ABCD$  parallelogram we  $APD$  üçburçluk üçin umumy (5-nji surat).  $S_{APD} = 0,5S_{ABCD}$  bolýandygyny subut edýäris.

$S_{ABCD} = ah$  (1) we  $S_{APD} = 0,5ah$  (2) bolýandygy mälim. (2) deňlikdäki  $ah$  ýerine  $S_{ABCD}$ -ni goýup, tapýarys:  $S_{APD} = 0,5ah = 0,5S_{ABCD}$ .

**Yatlatma!** Ýokarda getirilen meseläni aşqadaky ýaly hem okamak mümkin: *üçburçluk bilen umumy esasa we umumy beýiklige eýe bolan parallelogramyń meýdany üçburçlugyń meýdanyndan iki esse uly.*

**5-nji mesele.** Güberçek dörtburçlugyń depeleri arkaly onuń diagonallaryna parallel göni çyzyklar geçirilse, onda emele gelen parallelogramyń meýdany berlen dörtburçlugyń meýdanyndan iki esse uly bolýandygyny subut ediń.

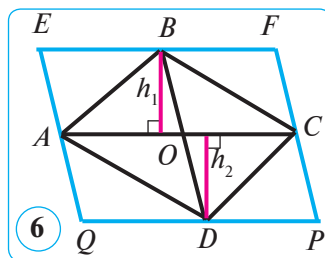
*Subudy.*  $ABCD$  – berlen güberçek dörtburçluk,  $O$  –  $AC$  we  $BD$  diagonallaryń kesişme nokady,  $h_1$  we  $h_2$  – dörtburçlugyń  $B$  we  $D$  depelerinden  $AC$  diagonalga geçirilen beýiklikler;  $EFPQ$  – dörtburçlugyń depeleri arkaly onuń diagonallaryna parallel geçirilen göni çyzyklarń kesişmeginden emele gelen parallelogram (6-nji surat).

$S_{EFPQ} = 2S_{ABCD}$  bolýandygyny subut edýäris.

Gurmaga görä, parallelogramyň  $EF$  we  $QP$  taraplary  $AC$  diagonala parallel hem-de deň. Şonuň üçin,  $AC$  diagonal emele gelen  $EFPQ$  parallelogramy iki –  $AEFC$  we  $ACPQ$  parallelogramlara bölýär.

Ýokarda getirilen ýatlatmadaky netijäni ulanyp,  $S_{EFPQ} = 2S_{ABCD}$  deňligi subut edýäris:  $S_{EFPQ} = S_{AEFC} + S_{ACPQ} = 2S_{ABC} + 2S_{ADC} = 2(S_{ABC} + S_{ADC}) = 2S_{ABCD}$ .

Diýmek,  $S_{EFPQ} = 2S_{ABCD}$ .



### Soraglar, meseleler we ýumuşlar

1. 7-nji suratdaky şekiliň meýdanyny tapyň.

*Çözülişi.* Suratda şekillendirilen şekiliň meýdanyny  $A$  we  $B$  nokatlary utgaşdyryp, ony kwadrata doldurmak arkaly tapmak amatlydyr. Berlen şekiliň meýdany emele gelen kwadratyň meýdany bilen  $ABC$  üçburçlugyň meýdanynyň tapawudyna deň:  $S = S_{kw.} - S_{ABC} = \dots^2 - 0,5 \cdot (50 - 2 \cdot 10) \cdot \dots = \dots - 375 = \dots$  (kw. birl.).

Nokatlaryň ýerine degişli sanlary goýuň.

*Jogaby:* ... kw. birl.

2. 8-nji suratdaky şekiliň meýdanyny hasaplamak üçin formula getirip çykaryň. Munda  $AE \parallel BC \parallel PD$ ,  $AE = BC$ ,  $AP = PB$ ,  $PD \perp AB$ .
3. Berlen:  $ABCD$  – gönüburçluk,  $AB = 12$  cm,  $AD = 16$  cm;  $E, F, P$  we  $Q$  nokatlar – degişli taraplaryň ortalary.

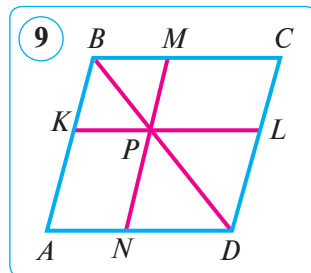
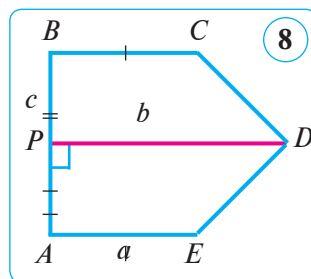
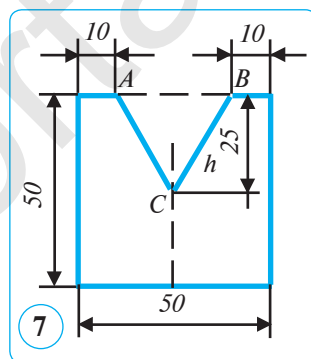
*Tapmaly:*  $S_{EFCPQA}$ .

4. Berlen:  $ABCD$  – parallelogram,  $P \in BD$ ,  $KL \parallel BC$ ,  $MN \parallel AB$  (9-njy surat).

*Subut etmeli:*  $S_{AKPN} = S_{PMCL}$ .

5.  $AC$  we  $BD$  –  $ABCD$  dörtburçlugyň diagonallary,  $O$  – olaryň kesişme nokady.  $S_{AOD} = 12$ ,  $S_{BOC} = 8$ ,  $S_{AOB} = 6$ .  $S_{COD}$  -ni tapyň.

6. Gönüburçluk şekildäki ýer uçaştogunyň meýdany 400 ha. Eger: 1) uçaştoguň uzynlygy 10 km bolsa; 2) uçaştok kwadrat şeklinde bolsa, onuň perimetri nähili bolar?



## 52. AMALY GÖNÜBKME WE ULANYLYŞY

### I. Barlag üçin meseleler.

**1-nji mesele.** Gönüburçlugyň taraplary natural san we perimetri 4-e kratny bolan meselä garap geçýäris.

Perimetri 72 cm-e deň we taraplary natural san bolan ähli gönüburçluklardan iň uly meýdana eýe bolanyny tapyň. Ol nähili şekil bolýar? Netije çykaryň.

*Çözülişi.* Gönüburçlukda:  $P=2 \cdot (a+b)=72$  cm – perimetr,  $p=a+b=36$  cm – ýarym perimetr, ýagny goňşy taraplaryň jemi. Diňe  $a$  we  $b$ -niň bahalary mälim bolanda  $S=a \cdot b$ -ni hasaplap bileris. Meselede goýlan soraga jogap bermek üçin gönüburçlugyň goňşy taraplaryny tapmaga synanyşýarys.

Munuň üçin 36-ny iki natural sanyň jemi görnüşinde aňladýarys:

$$a+b=36=1+35=2+34=3+33=\dots=33+3=34+2=35+1.$$

Mundan görnüşi ýaly, goňşy taraplarynyň jemi 36 sm-e deň bolan 35 sany dürli gönüburçluk bar. Maglumatlary jedwele girizip, olary derňeýäris we netije çykarýarys:

$a$ cm	1	2	...	17	18	19	20	...	34	35
$b$ cm	35	34	...	19	18	17	16	...	2	1
$(a+b)$ cm	36	36		36	36	36	36	...	36	36
$S=a \cdot b$ cm <sup>2</sup>	35	68	...	323	324	323	320	...	68	35

Jedwelden görnüşi ýaly, iň kiçi meýdan diňe  $a=1$  cm we  $b=35$  cm ýa-da  $a=35$  cm we  $b=1$  cm bolanda, iň uly meýdan bolsa diňe  $a=b=18$  cm – tarapy 18 cm-e deň kwadrat bolanda alynýar. Galan gönüburçluklaryň perimetrleri 72 cm bolsa-da, emma meýdanlary

$$18 \cdot 18 = 324 \text{ (cm}^2\text{)}$$

-dan kiçi bolýar.

Jedweli derňemek netijesinde aşakdaky netijelere geleris.

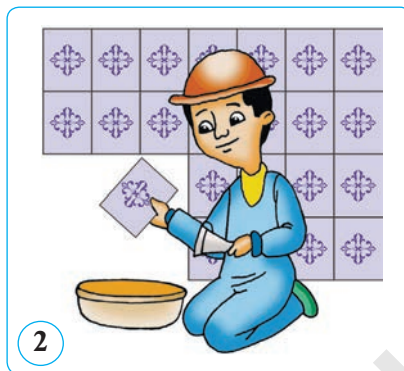
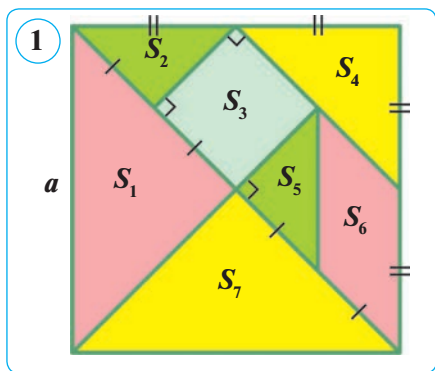
**1-nji netije.** Eger gönüburçlugyň taraplary natural san we perimetri 4-e kratny bolsa, iň uly meýdan aşakdaky formula boýunça tapylýar:

$$S_{\max} = \left(\frac{P}{4}\right)^2 \text{ kw. birl.}$$

**2-nji netije.** Eger gönüburçlugyň taraplary natural san we perimetri 2-ä kratny bolsa, onda diňe perimetrleri deň bolan ähli gönüburçluklardan taraplaryndan biri 1-e we ikinji tarapy bolsa 1-i ýarym perimetre dolduryjy san bolanda iň kiçi meýdana eýe bolýar.

**3-nji netije.** Gönüburçlugyň goňşy taraplarynyň uzynlyklary bir-birine ýakynlaşdygy saýyn meýdan barha artýar.

**2-nji mesele.** Hytaýça «tangram» oýnunda kwadrat 1-nji suratda görkezilişi ýaly



üçburçlulara we dörtburçlulara bölünen. Bulardan dürlüçe şekilleri gurmak mümkün. Eger kwadratyň tarapy 8 cm-e deň bolsa, bölünen şekilleriň meýdanlaryny tapyň.

*Çözülişi.*  $a=8$  cm – kwadratyň tarapy.  $S=a^2=8^2=64$  (cm<sup>2</sup>) – berlen kwadratyň meýdany. Indi şekildäki bölejikleriň meýdanlaryny tapýarys.

1)  $S_1$  we  $S_7$  – kwadratyň meýdanynyň dörtten birine deň. Diýmek,

$$S_1=S_7=S:4=64:4=16 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

2) Deňýanly gönüburçly üçburçlugyň meýdany gipotenuzanyň kwadratynyň dörtten birine deň. Diýmek,

$$S_2=S_5=0,25 \cdot (a:2)^2=0,25 \cdot 4^2=0,25 \cdot 16=4 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

3)  $S_3$  kwadratyň meýdany iki  $S_2$  üçburçlugyň meýdanlarynyň jemine deň. Diýmek,  $S_3=2S_2=2 \cdot 4=8$  (cm<sup>2</sup>).

4)  $S_4$  üçburçlugyň katetleri berlen kwadratyň tarapynyň ýarysyna deň, ýagny  $a:2=8:2=4$  (cm). Deňýanly üçburçlugyň meýdany katetiniň kwadratynyň ýarysyna deň, ýagny  $S_4=0,5 \cdot 4^2=0,5 \cdot 16=8$  (cm<sup>2</sup>).

5) Esaslary we beýiklikleri deň bolan kwadrat bilen parallelogram deňdeş, şonuň üçin  $S_6=S_3=2 \cdot 4=8$  (cm<sup>2</sup>).

*Jogaby:*  $S_1=S_7=16$  cm<sup>2</sup>;  $S_2=S_5=4$  cm<sup>2</sup>;  $S_3=S_4=S_6=8$  cm<sup>2</sup>.

**3-nji mesele.** Ussa uzynlygy 2,25 m we ini 1,8 m bolan gönüburçluk şekildäki diwaryň bölegini kafel bilen örtmekçi. Munuň üçin oňa tarapy 15 cm-lik kwadrat şekildäki kafelden näçe gerek bolar (2-nji surat)?

*Çözülişi.* 1) Örtülmeli bolan diwaryň meýdanyny tapýarys we ony kwadrat santimetrde aňladýarys:

$$2,25 \cdot 1,8=4,05 \text{ (m}^2\text{)}=4,05 \cdot 10\,000 \text{ cm}^2=40\,500 \text{ cm}^2.$$

2) Bir sany kafeliň meýdanyny tapýarys:  $a^2=15^2=225$  (cm<sup>2</sup>).

3) Gönüburçluk şekildäki diwary örtmek üçin näçe kafel gerek bolýandygyny tapýarys:

$$40\,500 : 225=180 \text{ (ta)}.$$

*Jogaby:* 180 sany kafel.

Aşakdaky meseläni çözmegi özüňize hödürleýäris.

**4-nji mesele.** Tarapy 4 m-e deň bolan kwadrat şekildäki ýodany örtmek üçin tarapy 20 cm-lik kafelden näçe gerek bolar?

## AMALY KOMPETENSIYANY ÖSDÜRJI GOŞMAÇA MATERIALLAR

### GÖZENEKLI KAGYZDA MEYDANLARY HASAPLAMAK

Gözenekli kagyza berlen güberçek we güberçek bolmadyk köpburçluklaryň meýdanyny hasaplamak üçin «Pikiň formulasy» diýlip atlandyrylýan formulany getirýäris. Her bir gözenegiň tarapyňyň uzynlygy 1 cm bolsun. Gözenekli kagyzdaky göni çyzyklaryň kesişme nokatlaryny – birlik kwadratnyň depelerini **düwün nokatlar** diýip atlandyryars. Onda köpburçlugyň meýdany aşakdaky formula boýunça hasaplanýar:

$$S = \frac{M}{2} + N - 1.$$

Bu formulada  $M$  – köpburçlugyň araçäginde ýatýan düwün nokatlaryň sany,  $N$  – köpburçlugyň içinde ýatýan düwün nokatlaryň sany.

Bu formulany köpburçlugyň depeleri düwün nokatlarda bolan islendik köpburçluk üçin ulanmak bolýar.

**1-nji mesele.** 1-nji suratdaky şekiliň meýdanyny hasaplaň.

*Çözülişi. 1-nji usul.* 1) Ähli doly kwadratlar 59 sany bolup, olaryň meýdany  $59 \text{ cm}^2$ ; kwadratnyň ýarysyna deň bolan üçburçluklar 16 sany bolup, olaryň meýdany  $16 : 2 = 8 \text{ (cm}^2\text{)}$ ; bir esasy 2 cm, beýikligi 3 cm-e deň üçburçluk bar, onuň meýdany  $3 \text{ cm}^2$ -a deň.

Şeýlelikde, berlen köpburçlugyň meýdany:  $S = 59 + 8 + 3 = 71 \text{ (cm}^2\text{)}$ .

*2-nji usul.* Şu jogabyň Pikiň formulasynyň kömeginde nähili tapylýandygyna garap geçýäris. Düwün nokatlary bellik edýäris.

1) Şekiliň içinde ýatýan düwün nokatlary (gara reňkde belgilenen) sanaýars: olar 50 sany, ýagny  $N = 50$ .

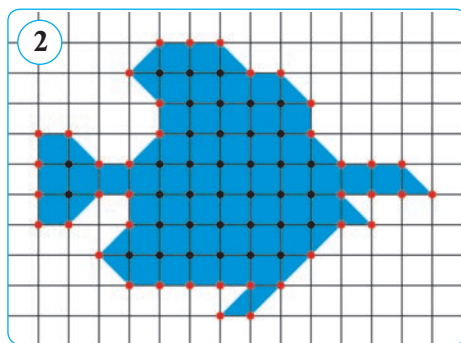
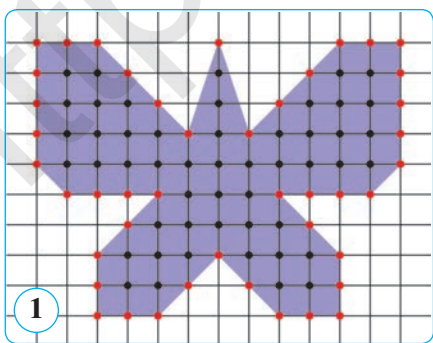
2) Şekiliň taraplarynda ýatýan düwün nokatlary (gyzyl reňkde belgilenen) sanaýars: olar 44 sany, ýagny  $M = 44$ . Pikiň formulasyny ulanýars:

$$S = \frac{44}{2} + 50 - 1 = 22 + 49 = 71 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Diýmek, iki usulda-da birmeňzeş netije gelip çykdy. *Jogaby:*  $71 \text{ cm}^2$ .

**2-nji mesele.** 2-nji suratdaky köpburçlugyň meýdanyny hasaplaň.

*Çözülişi.* 1) Köpburçlugyň taraplarynda ýatýan düwün nokatlary (gyzyl reňkde belgilenen) sanaýars: olar 40 sany, ýagny  $M = 40$ .



2) Köpburçluk içinde ýatýan düwün nokatlary (gara reňkde belgilenen) sanaýarys: olar 37 sany, ýagny  $N=37$ .

Pikiň formulasyna görä:

$$S = \frac{40}{2} + 37 - 1 = 20 + 36 = 56 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Jogaby:  $56 \text{ cm}^2$ .

**3-nji mesele.** 3-nji suratdaky köpburçluguň meýdanyny hasaplaň.

*Çözülişi. 1-nji usul.* 1) Köpburçluguň taraplarynda ýatýan düwün nokatlary (gyzyl reňkde belgilenen) sanaýarys: olar 39 sany, ýagny  $M=39$ .

2) Köpburçluguň içinde ýatýan düwün nokatlary (gara reňkde belgilenen) sanaýarys: olar 17 sany, ýagny  $N=17$ .

Pikiň formulasyna görä:

$$S = \frac{39}{2} + 17 - 1 = 19,5 + 16 = 35,5 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

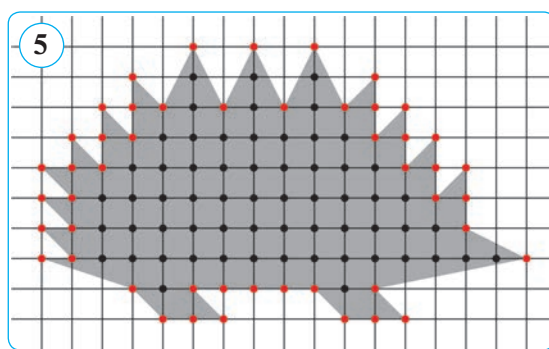
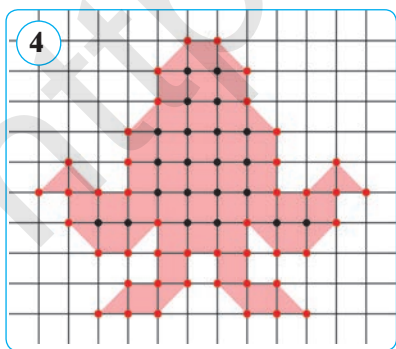
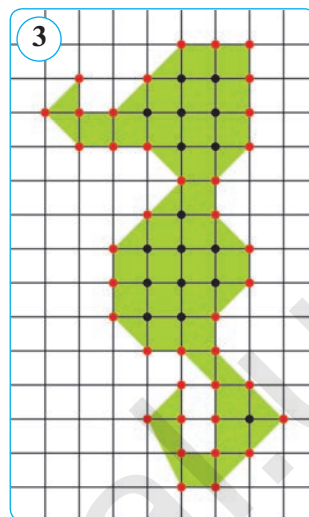
*2-nji usul.* Alnan jogabyň dogrudygyna ýene bir gezek göz ýetirmekçi bolsaňyz, ilki berlen köpburçlugu dürli usullar bilen öwrenilen güberçek köpburçluklara bölüň. Soňra emele gelen şekilleriň meýdanlaryny deňişli formulalaryň kömeginde hasaplaň. Alnan netijeleri goşup, 1-nji usulda çykan netije bilen deňeşdiriň. Eger hasaplamlary dogry ýerine ýetirseňiz, elbetde iki netije-de birmeňzeş bolar. Berlen köpburçluk çyzgyda dürli şekillere bölünip görkezilmese-de bolýar. Hasaplama usulyny saýlamak özüňize bagly. Hasaplamlary ýatdan ýetirse-de bolýar.

Ähli doly kwadratlar 26 sany, olaryň meýdany  $26 \text{ cm}^2$ ; kwadratyň ýarysyna deň bolan üçburçluklar 17 sany, olaryň meýdany  $17 : 2 = 8,5 \text{ (cm}^2\text{)}$ ; bir esasy 2 cm, beýikligi 1 cm-e deň üçburçluk bar, onuň meýdany  $1 \text{ cm}^2$ -a deň. Şeýlelikde, berlen köpburçluguň meýdany:  $26 + 8,5 + 1 = 35,5 \text{ (cm}^2\text{)}$ .

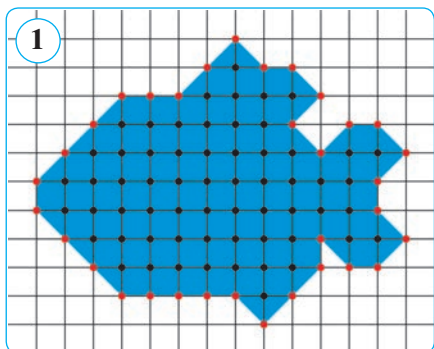
Diýmek, iki netije hem birmeňzeş.

Jogaby:  $35,5 \text{ cm}^2$ .

**4-nji mesele.** 4-nji we 5-nji suratdaky köpburçluklaryň meýdanyny Pikiň formulasyny ulanyp hasaplaň.



**53–54. 4-NJI BARLAG IŞI. ÝALŇYŞLAR ÜSTÜNDE IŞLEMEK**



1. Taraplary 27 cm we 21 cm-e deň gönüburçlugyň perimetrine deň bolan kwadratyň meýdanyny tapyň.
2. Gönüburçlugyň meýdany  $540 \text{ cm}^2$ , iki tarapynyň gatnaşygy  $3:5$  ýaly. Şu gönüburçlugyň perimetrini tapyň.
3. Parallelogramyň meýdany  $24 \text{ cm}^2$ . Eger onuň beýiklikleri 3 cm we 4 cm-e deň bolsa, onuň perimetrini tapyň.
4. 1-nji suratda şekillendirilen şekiliň meýdanyny böleklere bölüp hem-de Pikiň formulasyny ulanyp tapyň.

**4-nji test**

**Özüňizi synap görüň!**

1. Eger gönüburçlugyň taraplary 4 esse artdyrylsa, onuň meýdany näçe esse artar?  
A) 4;                      B) 8;                      D) 16;                      E) 32.
2. Gönüburçlugyň meýdany 400 ha, taraplarynyň gatnaşygy  $4:1$ -e deň. Şu gönüburçlugyň perimetrini tapyň.  
A) 10 km;                      B) 5 km;                      D) 2 km;                      E) 8 km.
3. Gönüburçlugyň uzynlygy 25%-e artdyryldy. Onuň meýdany üýtgemez ýaly inini näçe görerim kemeltmeli?  
A) 20%;                      B) 16%;                      D) 25%;                      E) 18%.
4. Kwadratyň tarapyny näçe esse kemeldende meýdany 4 esse kiçeler?  
A) 1,5 esse;                      B) 2 esse;                      D) 3 esse;                      E) 3,5 esse.
5. Meýdany  $144 \text{ cm}^2$ , beýiklikleri 8 cm we 12 cm bolan parallelogramyň perimetrini tapyň.  
A) 40 cm;                      B) 30 cm;                      D) 80 cm;                      E) 60 cm.
6.  $ABCD$  parallelogramyň  $AC$  diagonalyna  $BO$  perpendikulýar geçirilen.  $AO=8$  cm,  $OC=6$  cm we  $BO=4$  cm bolsa, parallelogramyň meýdanyny tapyň.  
A)  $50 \text{ cm}^2$ ;                      B)  $28 \text{ cm}^2$ ;                      D)  $52 \text{ cm}^2$ ;                      E)  $56 \text{ cm}^2$ .
7. Rombuň meýdany  $40 \text{ cm}^2$ -a, onuň perimetri 20 cm-e deň. Şu rombuň beýikligini tapyň.  
A) 2 cm;                      B) 8 cm;                      D) 4 cm;                      E) 16 cm.
8. Esaslary 5 cm we 9 cm-e deň bolan trapesiýanyň meýdany  $35 \text{ cm}^2$ -a deň. Şu trapesiýanyň beýikligini tapyň.  
A) 9 cm;                      B) 8 cm;                      D) 5 cm;                      E) 10 cm.

9. Esaslary 8 we 12-ä deň bolan deňyanly trapesiýanyň diagonallary özara perpendikulýar. Trapesiýanyň meýdanyny tapyň.  
 A) 100;                      B) 64;                      D) 144;                      E) 76.
10. Trapesiýanyň meýdany  $30 \text{ cm}^2$ -a, beýikligi 6 cm-e deň bolsa, onuň orta çyzygy näçä deň bolar?  
 A) 2,5 cm;                      B) 5 cm;                      D) 7,5 cm;                      E) 4,5 cm.



**Iňlis dilini öwrenýäris!**

**Kwadrat kök** – square root

**Üçburçluk** – triangle

**Orta çyzyk** – midline

**Geronyň formulasy** – formula of Heron

**Meýdan** – area

**Meýdan** – area



**Taryhy maglumatlar**

Ibn Sinanyň «Danişnama» eseriniň başinji baby «Dörtburçluklara, olarda ýerleşen üçburçluklara we olaryň gatnaşyklaryna degişli esasy geometrik meseleler» temasynda bagyşlanan. Eserde parallel çyzyklar barada aşakdaky ýaly pikirler aýdylyp geçilen.

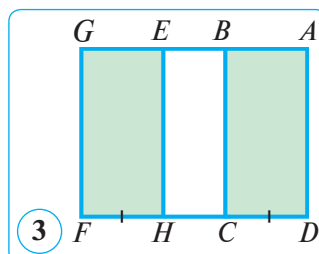
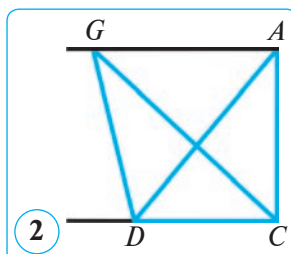
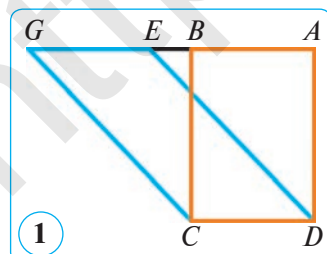
**1-nji teorema.** Özara parallel iki çyzygyň arasyna ýerleşen, umumy esasa eýe we garşylykly taraplary parallel şekiller deňdeş bolýar (ýagny olaryň meýdanlary deň). Meselem, esaslary  $CD$  bolan  $ABCD$  we  $EGCD$  tekiz şekiller özara deňdeş bolýar (1-nji surat).

**2-nji teorema.** Özara parallel çyzyklaryň arasyna ýerleşen we umumy esasa eýe bolan üçburçluklar deňdeş bolýar. Meselem,  $CD$  esasa eýe bolan  $ACD$  we  $GCD$  üçburçluklar deňdeş bolýar (2-nji surat).

**3-nji teorema.** Özara parallel çyzyklaryň arasyna ýerleşen we esaslary deň bolan dörtburçluklar deňdeş bolýar. Meselem,  $ABCD$  we  $GEHF$  dörtburçluklar deňdeşdir (3-nji surat).



**Abu Ali ibn Sina**  
(980–1037)







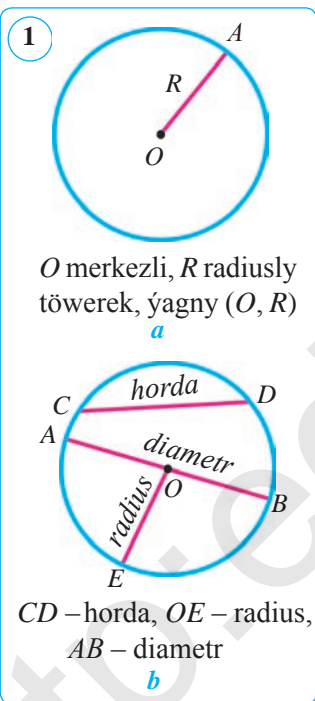
10-§.

TÖWEREKDÄKI BURÇLAR

55. GÖNI ÇYZYGYŇ WE TÖWEREĞIŇ ÖZARA ÝERLEŞIŞI. TÖWEREGE GALTAŞMA WE ONUŇ HÄSIÝETLERI

1. Töwerek barada başlangyç maglumatlar.

**Kesgitleme.** Tekizligiň berlen nokadyndan birmeňzeş uzaklykda ýatýan ähli nokatlaryndan ybarat şekile **töwerek** diýilýär.



Berlen  $O$  nokada **töweregiň merkezi** diýilýär. Töweregiň islendik nokatlaryndan onuň merkezine çenli bolan aralyga **töweregiň radiusy** diýilýär. Şonuň ýaly-da, töweregiň nokadyny onuň merkezi bilen utgaşdyrýan islendik kesime-de **radius** diýilýär. Şeýlelikde, merkezi  $O$  nokat we radiusy  $R$  bolan töwerek – berlen  $O$  nokatdan  $R$ -e deň aralykda ýerleşen tekizligiň hemme nokatlaryndan düzülen geometrik şekildir.

Adatda,  $O$  merkezli we  $R$  radiusly töwerek aşakdaky ýaly belgilenýär:  $(O, R)$  (1-nji  $a$  surat).

Töweregiň islendik iki nokadyny utgaşdyrýan kesime **horda** diýilýär. Töweregiň merkezinden geçýän horda onuň **diametri** diýilýär.

1-nji  $b$  suratda töweregiň radiusy we iki hordasy şekillendirilen bolup, hordadan biri töweregiň diametridir:  $OE$  – radius,  $CD$  – horda,  $AB$  – diametr.

Adatda, diametr  $d$  harpy bilen belgilenýär. Bize mälim bolşy ýaly, diametr radiusdan iki esse uly, ýagny  $d = 2R$ -e deň.

2. Göni çyzygyň we töweregiň özara ýerleşiji.

Bu temada tekizlikde göni çyzyk bilen töweregiň özara ýerleşişine garap geçýäris. Eger göni çyzyk töweregiň merkezinden geçse, onda ol töweregi iki nokatda, ýagny bu göni çyzykda ýatýan diametriň depelerinde kesip geçýändigini görnüp dur.

Berlen  $l$  göni çyzyk bilen  $(O, R)$  töwerek näçe umumy nokada eýe, diýen soraga jogap bermek üçin töweregiň merkezi  $O$ -dan  $l$  göni çyzyga çenli bolan  $d$  aralygy şu töweregiň  $R$  radiusy bilen deňeşdirmeli.

Töweringň merkezinden göni çyzyga geçirilen perpendikulýar töweringň merkezinden göni çyzyga çenli aralyk diýlip atlandyrylýar.

Üç ýagdaýyň bolmagy mümkin: 1)  $d > R$ ; 2)  $d = R$ ; 3)  $d < R$ . Indi şu ýagdaýlara garap geçýäris.

**1-nji ýagdaý.** Eger töweringň merkezinden göni çyzyga çenli bolan aralyk töweringň radiusyndan uly bolsa, göni çyzyk bilen töwerek umumy nokada eýe bolmaýar, ýagny kesişmeýär.

Hakykatdan hem, eger  $d > R$  bolsa (2-nji a surat),  $l$  göni çyzygyň  $O$  merkeze iň ýakyn nokady (bu göni çyzygyň islendik nokady hem) ( $O, R$ ) töwerege degişli bolmaýar, çünki ol merkezden töweringň radiusyndan uly aralykda bolýar.

**2-nji ýagdaý.** Eger töweringň merkezinden göni çyzyga çenli aralyk töweringň radiusyna deň bolsa, onda göni çyzyk bilen töwerek bir we diňe bir umumy nokada eýe bolýar.

Hakykatdan hem, eger  $d = R$  bolsa (2-nji b surat),  $l$  göni çyzygyň  $O$  merkeze iň ýakyn nokady töweringň radiusyna deň aralykda bolýar we diýmek, ol nokat töwerege hem degişli bolýar.  $l$  göni çyzygyň galan hemme nokatlary  $O$  merkezden töweringň radiusyndan uly aralykda bolýar, diýmek, töwerege degişli bolmaýar.

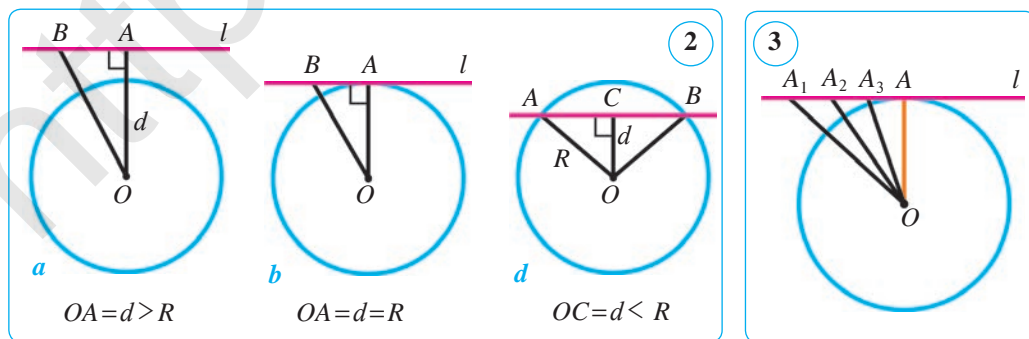
**3-nji ýagdaý.** Töweringň merkezinden göni çyzyga çenli bolan aralyk töweringň radiusyndan kiçi bolsa ( $d < R$ ), onda göni çyzyk bilen töwerek iki umumy nokada eýe bolýar.

Göni çyzygyň töweringň içindäki bölegi horda bolýar (2-nji d surat). Munda göni çyzyk töwerege görä kesiji diýilýär.

Hordanyň uzynlygy  $AB$ -ni töweringň radiusyndan we merkezinden göni çyzyga çenli aralyk  $d$  arkaly aňlatmak mümkin:  $AB = 2\sqrt{R^2 - d^2}$ .

Bu deňligi özüňiz subut ediň.

**Netije.** Göni çyzyk bilen töwerek umumy nokatlara eýe bolmazlygy, bir ýa-da iki umumy nokada eýe bolmagy mümkin.



## 2. Töwerege galtaşma.

**Kesgitleme.** Töwerek bilen diñe bir sany umumy nokada eýe bolan göni çyzyk şu töwerege **galtaşma**, olaryň umumy nokadyna bolsa **galtaşma nokady** diýilýär.

2-nji b suratda  $l$  göni çyzyk  $O$  merkezli töwerege galtaşma,  $A$ –galtaşma nokady. Töwerek  $l$  göni çyzyga galtaşýar, diýmek hem mümkin.

Galtaşmanyň häsiýeti baradaky teoremany subut edýäris.

### 1-nji teorema.

**Töwerege galtaşma şu töweregiň galtaşma nokadyna geçirilen radiusa perpendikulýardyr.**

*Subudy.*  $l$  göni çyzyk töwerege  $A$  nokatda geçirilen galtaşma bolsun (3-nji surata g.).  $R=OA$ -nyň  $l$ -e perpendikulýardygy subut edýäris. Şerte görä,  $l$  göni çyzygyň  $A$  nokadandan başga hemme nokatlary töwerekden daşarda ýatýar. Şonuň üçin bu göni çyzygyň  $A$ -dan başga islendik  $A_1$  nokady üçin  $OA_1 > OA$ . Diýmek,  $OA$  aralyk  $O$  nokatdan  $l$  göni çyzygyň nokatlaryna çenli bolan aralyklaryň iň gysgasydyr. Nokatdan göni çyzyga çenli iň gysga aralyk bolsa şu göni çyzyga geçirilen perpendikulýar bolýar. Mundan,  $OA \perp l$  bolýandygy gelip çykýar.

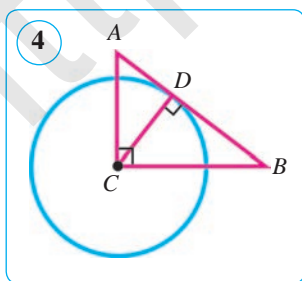
Teorema subut edildi. Endi galtaşmanyň häsiýetine ters teoremany subut edýäris.

### 2-nji teorema.

**Radiusa perpendikulýar we onuň töwerekde ýatýan depesinden geçýän göni çyzyk şu töwerege galtaşmadyr.**

*Subudy.* Eger töweregiň merkezinden göni çyzyga çenli bolan aralyk töweregiň radiusyna deň ( $d=R$ ) bolsa (2-nji b surata g.),  $l$  göni çyzygyň  $O$  merkeze iň ýakyn nokady töweregiň radiusyna deň bolýar, diýmek, ol nokat töwerege hem degişli bolýar.  $l$  göni çyzygyň galan hemme nokatlary  $O$  merkezden töweregiň radiusyndan uly aralykda bolýar, diýmek, töwerege degişli bolmaýar. Kesgitlemä görä,  $l$  göni çyzyk şu töwerege galtaşma bolýar. Teorema subut edildi.

**Mesele.** Gönüburçly  $ACB$  ( $\angle C=90^\circ$ ) üçburçlugyň katetleri  $AC=3$  cm we  $BC=4$  cm. Merkezi  $C$  nokatda bolan radiusy 2,4 cm-e deň töwerek geçirilen. Bu töwerek bilen  $AB$  göni çyzyk özara nähili ýagdaýda bolar?



*Çözülişi.*  $\triangle ACB$  ( $\angle C=90^\circ$ ) da:  $AC=3$  cm,  $BC=4$  cm. Pifagoryň teoremasyna görä:

$$AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ (cm)}.$$

$CD \perp AB$  ni geçirýäris (4-nji surat). Üçburçlugyň meýdanyny iki hili hasaplamak mümkin, ýagny  $CA \cdot CB = AB \cdot CD$  deňlik ýerlikli. Mundan  $ND = CA \cdot \tilde{N}B$ :  
:  $AB=3 \cdot 4 : 5=2,4$  (cm). Diýmek,  $C$  nokatdan  $AB$  göni

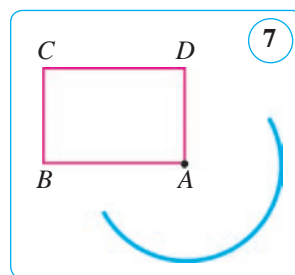
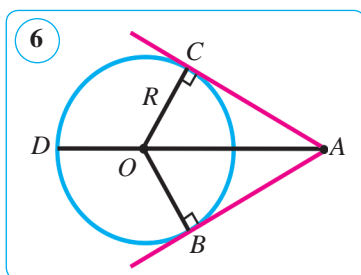
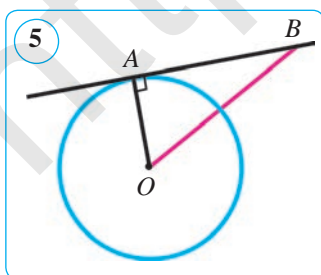
çyzyga çenli bolan aralyk radiusyň uzynlygyna deň bolany üçin  $AB$  göni çyzyk töwerege galtaşýar.

Jogaby:  $AB$  – galtaşma.



### Soraglar, meseleler we ýumuşlar

- 1) Töwerek näme? Töwregiň: merkezi, radiusy, hordasy we diametri diýip nämä aýdylýar? Nähili göni çyzyk töwerege galtaşma diýilýär?
- 2) Galtaşmanyň nähili häsiýetini we nyşanyňy bilýärsiňiz?
- 3)  $d - R$  radiusly töwregiň merkezinden  $l$  göni çyzyga çenli bolan aralyk. Eger: 1)  $R=8$  cm,  $d=6$  cm; 2)  $R=10$  cm,  $d=8,4$  cm; 3)  $R=14,4$  dm,  $d=7,4$  dm; 4)  $R=1,6$  dm,  $d=24$  cm; 5)  $R=4$  cm,  $d=40$  mm bolsa,  $l$  göni çyzyk bilen töwerek özara nähili ýerleşen bolýar?
4.  $ABCD$  kwadratyň tarapy 8 cm-e we merkezi  $A$  nokatda bolan töwregiň radiusy 7 cm-e deň.  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  we  $BD$  göni çyzyklardan haýsýsy şu töwerege görä kesiji bolýar?
5.  $ABCD$  gönüburçly  $ACB$  ( $\angle C=90^\circ$ ) üçburçlukda  $AB=10$  cm,  $\angle ABC=30^\circ$ . Merkezi  $A$  nokatda bolan töwerek geçirilen. Bu töwregiň radiusy nähili bolanda: 1) töwerek  $BC$  göni çyzyga galtaşýar; 2)  $BC$  göni çyzyk bilen umumy nokada eýe bolmaýar; 3)  $BC$  göni çyzyk bilen iki umumy nokada eýe bolýar?
6. Töwregiň daşarsyndaky bir nokatdan oňa iki galtaşma geçirilse, şol nokatdan galtaşma nokatlaryna çenli bolan aralyklar deň. Şony subut ediň (6-njy surat).
7. Eger töwregiň radiusy 5 cm-e deň, töwregiň merkezinden göni çyzyga çenli bolan aralyk: 1) 6 cm; 2) 5 cm; 3) 4 cm bolsa, göni çyzyk bilen töwerek özara nähili ýerleşen bolýar?
8.  $ABCD$  gönüburçluk berlen, onda  $AB=16$  cm,  $AD=12$  cm (7-nji surat).  $AC$ ,  $BC$ ,  $CD$  we  $BD$  göni çyzyklardan haýsýy biri radiusy 12 cm-lik  $A$  merkezli töwerege galtaşma bolýar?

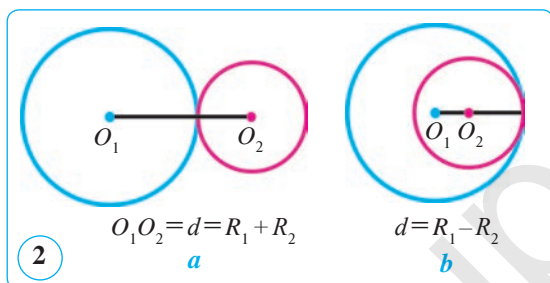
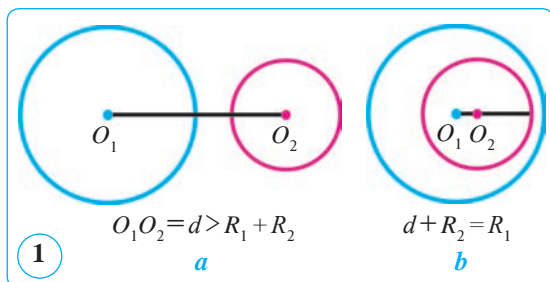


## 56. IKI TÖWEREGIŇ ÖZARA ÝERLEŞIŞI. MERKEZI BURÇUŇ WE DUGANYŇ GRADUS ÖLÇEGI

### 1. Iki töweregiň özara ýerleşishi.

Iki töwerek özara ýerleşýän ýagdaýlara garap geçýäris.

1) Iki töwerek umumy nokada eýe bolmaýar. Munda olar töwerekden daşarda (1-nji *a* surat) ýa-da biri ikinjisiniň içinde bolýar (1-nji *b* surat).



2) Iki töwerek bir umumy nokada eýe bolýar (2-nji surat). Munda, töwerekler bir-birine *galtaşýar*, diýilýär. Emma munda töwerekler *daşky* tarapdan (2-nji *a* surat) ýa-da *içki* tarapdan galtaşmagy mümkin (2-nji *b* surat).

3) Iki töwerek iki umumy nokada eýe bolmagy mümkin (3-nji surat). Munda töwerekler bir-biri bilen *kesişýär*, diýilýär.

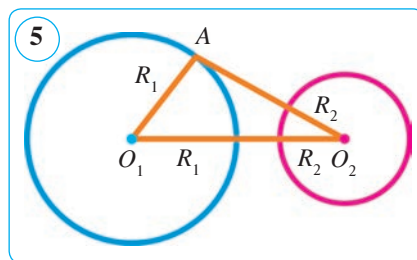
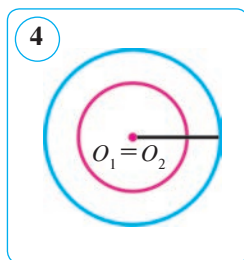
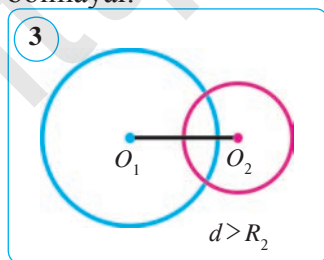
Umumy merkeze eýe bolan töwereklere *konsentrik töwerekler* diýilýär (4-nji surat).

Iki töweregiň özara ýerleşishi olaryň radiusy bilen merkezleriň arasyndaky aralyga bagly bolýar.

### Teorema.

Eger iki töweregiň merkezleriniň arasyndaky aralyk olaryň radiuslarynyň jeminden uly ýa-da tapawudyndan kiçi bolsa, bu töwerekler umumy nokada eýe bolmaýar.

*Subudy.*  $O_1, O_2$  merkezli we radiuslary deňlilikde  $R_1, R_2$  ( $d = R_1 + R_2 < O_1O_2$ ) bolan iki töwerek berlen bolsun (5-nji surat). Töwerekdäki  $A$  nokada garap geçýäris:  $O_1A = R_1$ . Onda  $O_2A \geq O_1O_2 - O_1A > R_1 + R_2 - R_1 = R_2$  we diýmek,  $A$  nokat ikinji töwerege deňişli däl. Diýmek, bu töwerekler umumy nokada eýe bolmaýar.

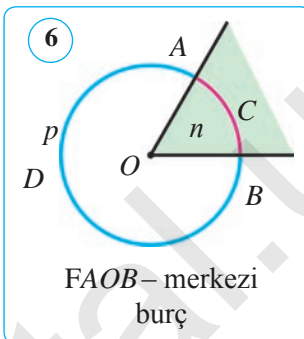


Iki t werek bir umumy nokada e e bolan  agda a,  onu   aly-da, iki t werek iki umumy nokada e e bolan  agda lara  zba dak gara .

## 2. Merkezi bur .

**Kesgitleme.** *Depesi t weregi n merkezinde bolan bur  merkezi bur  di lip atlandyryl ar.*

Umumy depesi t weregi n  $O$  merkezinde bolan iki  ohlle  $OA$  we  $OB$  iki merkezi bur  kesgitle ar, olardan biri g ber ek zolak bilen ara aklenen bol ar. T weregi n iki  $A$  we  $B$  nokady ony iki duga b l ar. Bu dugalar bir-birinden tapawutlanmagy  chin olary n her birine bir sanydan aralyk nokat (dugany n depelerinden tapawutly)  a-da latyn a ki i harp go lup belgilen ar hem-de  $ACB$  ( a-da  $AnB$ ) we  $ADB$  ( a-da  $ApB$ ) *dugalar* di ily ar (6-njy surat). Dugalary a akdaky  aly belgilemek kabul edilen:  $\cup ACB$  ( a-da  $\cup AnB$ ) we  $\cup ADB$  ( a-da  $\cup ApB$ ). K  halatlarda duga aralyk nokatsyz belgilen ar:  $\cup AB$  (iki dugadan ha sysy barada g rr n edily ndigi d  n kli bolanda). Eger dugany n depelerini utga dyryan kesim t weregi n diametri bolsa, duga * arym t werek* di ily ar. 7-nji *b* suratda iki  arym t werek  ekillendirilen, olardan biri a ratynlykda g rkezilen.

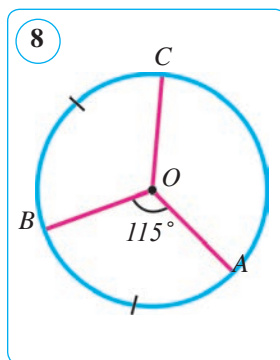
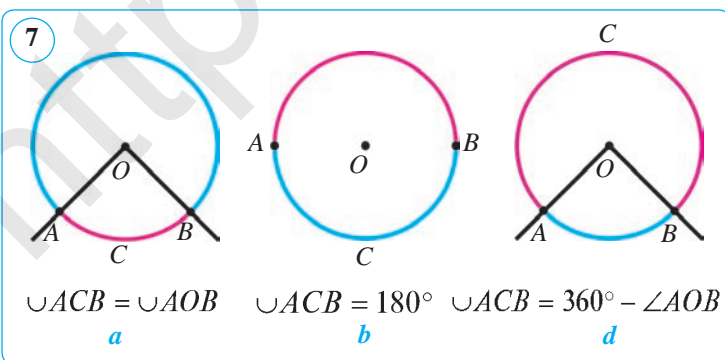


## 3. Dugany n gradus  l egi.

**Kesgitleme.** *T werek dugasyny n bur  ululygy di yip, t weregi n  u duga degi li merkezi bur uny n ululygyna a dyly ar.*

T weregi n dugasyny graduslarda  l emek m mkin. Eger  $O$  merkezli t weregi n  $ACB$  dugasy * arym t werekden ki i  a-da  arym t werege de n* bolsa, onda onu n gradus  l egi  $AOB$  merkezi bur u n gradus  l egine de n hasaplan ar (7-njia, *b* surat). Eger  $ACB$  duga * arym t werekden uly* bolsa, onda onu n gradus  l egi  $360^\circ - \angle AOB$ -ge de n hasaplan ar (7-nji *d* surat).

Mundan, *ahylary umumy bolan t weregi n iki dugasyny n gradus  l eglerini  jemi  $360^\circ$ -a de ligi gelip  yk ar.*



Töweringiň iki dugasynyň burç ululyklary (ýagny olara degişli merkezi burçlar) deň bolanda we diňe şonda bu dugalar deň bolýar.

**Mesele.**  $O$  nokat – töweringiň merkezi,  $\angle AOB = 115^\circ$ ,  $\cup BC = \cup AB$  (8-nji surat).  $AOC$  burçy tapyň.

**Çözülişi.**  $AOB$  burç töweringiň merkezi burçy,  $AB$  duga bolsa ýarym töwerekden kiçi, şonuň üçin  $\cup AB = \angle AOB = 115^\circ$ . Meseläniň şertine görä,  $\cup BC = \cup AB$  we diýmek,  $BC$  duga  $115^\circ$ -a deň.  $\cup ABC = \cup AB + \cup BC = 230^\circ > 180^\circ$ , ýagny  $ABC$  duga ýarym töwerekden uly, şonuň üçin  $\angle AOC = 360^\circ - \angle ABC = 360^\circ - 230^\circ = 130^\circ$ . Jogaby:  $\angle AOC = 130^\circ$ .



### Soraglar, meseleler we ýumuşlar

1. 1) Töwerek berlen nokatda galtaşýar diýende, nämäni düşünyärsiňiz?
- 2) Konsentrik töwerekler diýip nämä aýdylýar?
- 3) Merkezi burç näme? Töweringiň dugasy nähili belgilenýär?
- 4) Töweringiň dugasynyň burç ululygy näme?
2. Eger iki töweringiň merkezleriniň arasyndaky aralyk 2 cm, radiuslary degişlilikde: 1) 3 cm we 5 cm; 2) 2 cm we 5 cm bolsa, olar bir-birine görä özara nähili ýerleşen bolýar?
3. Eger radiuslary 4 cm we 6 cm-e deň töwerekler: 1) daşky tarapdan galtaşsa; 2) içki tarapdan galtaşsa, olaryň merkezleriniň arasyndaky aralyk nämä deň?
4. Töweringiň merkezinden geçýän iki göni çyzyk bu töwerekde näçe duga we näçe merkezi burçy kesgitleýär?
5. Berlen töweringiň nokadyndan radiusyna deň iki horda geçirilen. Olaryň arasyndaky burçy tapyň.
6. Merkezi burça laýyk duga töweringiň: 1)  $\frac{2}{5}$ ; 2)  $\frac{4}{15}$ ; 3)  $\frac{7}{12}$ ; 4)  $\frac{5}{9}$ ; 5)  $\frac{13}{18}$ ; 6)  $\frac{17}{20}$ ; 7)  $\frac{23}{30}$  bölegine deň. Şu merkezi burçy tapyň.
7. Töwerek iki nokat bilen iki duga bölünýär. Eger: 1) olardan biriniň burç ululygy ikinjisiniň burç ululygyndan  $40^\circ$  artyk bolsa; 2) bu dugalaryň burç ululyklary 2 : 7 gatnaşykda bolsa, burçlaryň hersiniň ululygyny tapyň.
8.  $A, B, C$  nokatlar merkezi  $O$  nokatda bolan töwerekde ýatýar. Eger  $\cup ABC = 70^\circ$  bolsa,  $AOC$  burçy tapyň.
9. Töweringiň: 1)  $\frac{1}{5}$ ; 2)  $\frac{1}{6}$ ; 3)  $\frac{1}{9}$ ; 4)  $\frac{1}{10}$ ; 5)  $\frac{1}{12}$  bölegini düzýän  $AB$  duga laýyk gelýän merkezi burçlary tapyň. Bu ýagdaýlaryň her birinde  $AB$  duganyň burç ululygyny belgileriň kömeginde ýazyň.
10. Töweringiň radiusy: 1) 7,8 cm; 2) 10,5 cm; 3) 0,8 dm. Töweringiň diametrini tapyň.

## 57. TÖWEREĞIŇ İÇINDEN ÇYZYLAN BURÇ

**Kesgitleme.** *Depesi töwerekde ýatýan, taraplary bolsa şu töweregi kesip geçýän burça töweregiň içinden çyzylan burç diýilýär.*

1-nji suratda  $ABC$  burç töweregiň içinden çyzylan,  $AnC$  duga şu burçuň içine ýerleşen. Şeýle ýagdaýda, içinden çyzylan  $ABC$  burç  $AnC$  duga direlýän diýip hem aýdylýar.

### Teorema.

**Töweregiň içinden çyzylan burç özi direlýän duganyň ýarysy bilen ölçenýär:**

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \sphericalangle AC.$$

*Subudy.*  $\angle ABC$  –  $O$  merkezli töweregiň  $AC$  dugasyna direlýän içinden çyzylan burç bolsun (2-nji surat). Töweregiň merkeziniň şu içinden çyzylan burça görä ýerleşişiniň üç ýagdaýyna garap geçýäris.

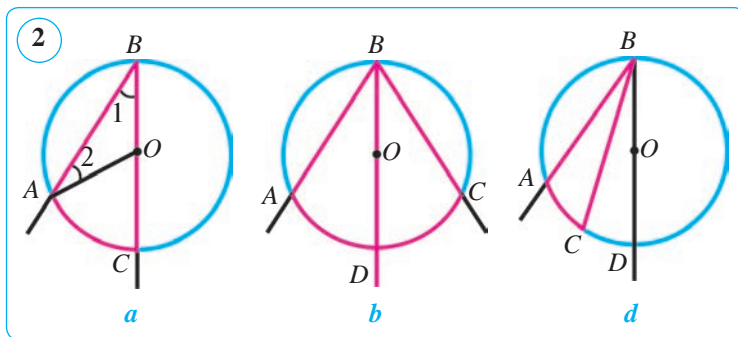
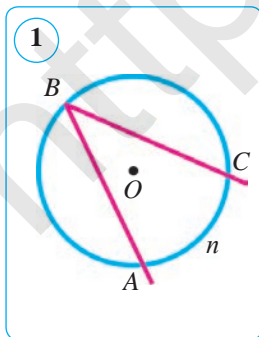
*1-nji ýagdaý.* Töweregiň merkezi içinden çyzylan burçuň taraplaryndan biri, meselem,  $BC$  tarapda ýatýar (2-nji a surat).  $OA$  radiusy geçirýäris we  $AOC$  merkezi burça garaýarys. Ol  $BOA$  üçburçlugyň daşky burçudyr. Üçburçlugyň daşky burçunyň häsiýetine görä:  $\angle AOC = \angle OBA + \angle OAB$ . Emma  $\angle OBA = \angle OAB$ , çünki  $AOB$  üçburçluk deňýanly ( $OA = OB = R$ ).  $OBA$  we  $OAB$  burçlar bolsa deňýanly üçburçlugyň esasyndaky burçlardyr. Diýmek,  $\angle AOC = 2\angle ABC$  (1). Merkezi burçuň ululygy şu burça laýyk duganyň burç ululygyna deň bolýandygyny bilýärsiňiz (56-njy tema). Munda  $AC$  duga ýarym töwerekden kiçi, şonuň üçin merkezi burçuň häsiýetine görä:

$$\angle AOC = \sphericalangle AC. \tag{2}$$

(1) we (2) deňliklerden:  $2\angle ABC = \sphericalangle AC$ , ýagny  $\angle ABC = \frac{1}{2} \sphericalangle AC$ .

Teorema 1-nji ýagdaý üçin subut edildi.

*2-nji ýagdaý.* Töweregiň merkezi  $O$  içinden çyzylan burçuň taraplarynyň arasynda ýatýar.  $BO$  şöhläni geçirýäris, ol  $AC$  dugany käbir  $D$  nokatda kesýär





(2-nji b surat).  $D$  nokat  $AC$  dugany iki  $\cup AD$  we  $\cup DC$  duga bölyär. Diýmek, subuda görä (1-nji ýagdaý):  $\angle ABD = \frac{1}{2} \cup AD$  we  $\angle DBC = \frac{1}{2} \cup DC$ . Bu deňlikleri agzama-agza goşup, aşakdakylary alarys:

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC = \frac{1}{2} \cup AD + \frac{1}{2} \cup DC = \frac{1}{2} (\cup AD + \cup DC) = \frac{1}{2} \cup AC.$$

3-nji ýagdaý. Töweregiň merkezi  $O$  içinden çyzylan burçdan daşarda ýatýar. Bu ýagdaýyň subudyny 2-nji d suratdan peýdalanyp, özüňiz özbaşdak ýerine ýetiriň.

**1-nji netije.** Bir duga direlýän hemme içinden çyzylan burçlar özara deňdir (3-nji a surat):

$$\angle B = \angle B_1 = \angle B_2 = \dots = \frac{1}{2} \cup AC.$$

**2-nji netije.** Diametre (ýarym töwerege) direlýän hemme içinden çyzylan burçlar göni burçdyr (3-nji b surat):

$$\angle B = \angle B_1 = \angle B_2 = \dots = 90^\circ.$$

**Mesele.** Töweregiň radiusyna deň horda geçirilen. Şu horda: 1) töweregiň merkezinden; 2) berlen hordanyň depelerinden tapawutly töweregiň islendik nokadyndan nähili burç astynda görünýär?

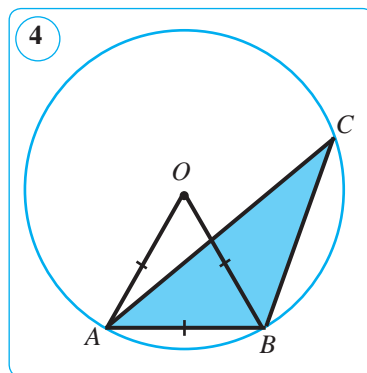
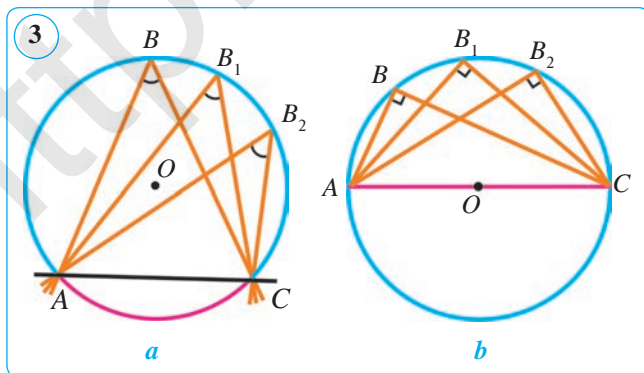
**Çözülişi.**  $AB - O$  merkezli töweregiň radiusyna deň horda bolsun (4-nji surat). Onda  $AOB$  üçburçluk deň taraply we diýmek, merkezi burç (töweregiň merkezinden  $AB$  horda görünýän burç)  $60^\circ$ -a deň.  $A$  we  $B$  nokatlardan tapawutly töweregiň islendik  $C$  nokadyndan içinden çyzylan  $ACB$  burç ( $C$  nokatdan  $AB$  horda görünýän burç) merkezi burçuň ýarysyna deň, ýagny  $30^\circ$ -a deň.

Jogaby: 1)  $60^\circ$ ; 2)  $30^\circ$ .



**Soraglar, meseleler we ýumuşlar**

1. 1) Nähili burça töweregiň içinden çyzylan burç diýilýär?
- 2) İçinden çyzylan burç nähili ölçenýär?
- 3) Ýarym töwerege direlýän içinden çyzylan burç nämä deň?



2. (Ýatdan.) İçinden çyzylan burç  $25^\circ$ -a deň. Şu içki burça direlýän duganyň ululygyny tapyň.
3.  $AB$  we  $BC$  – merkezi  $O$  nokatda bolan töweregiň hordalary,  $\angle ABC=30^\circ$ . Eger töwerek radiusy 10 cm-e deň bolsa,  $AC$  hordanyň uzynlygyny tapyň.
4. 1) 5-nji suratda  $O$  nokat – töweregiň merkezi,  $\angle AOB=88^\circ$ .  $\angle ACB$ -ni tapyň. Çözülişi.  $AOB$  burç berlen töweregiň ... burçy bolýar we ... $^\circ$ -a deň. Diýmek,  $\cup ADB=...^\circ$ .  $ACB$  burç ... çyzylan burç bolýar we ... duga direlýär, şonuň üçin  $\angle ACB=\frac{1}{2}\cup ...=...^\circ$ . Jogaby:  $\angle ACB=...^\circ$ .
- 2) 6-njy suratda  $\cup CAB=130^\circ$ .  $\angle CAB$  ni tapyň. Çözülişi.  $CAB$  burç töweregiň içinden çyzylan burç bolýar we  $\cup CDB$  duga direlýän. Mundan:

$$\cup CDB=360^\circ-\cup CAB=360^\circ-130^\circ=230^\circ,$$

$$\angle CAB=\frac{1}{2}\cup CDB=\frac{1}{2}\cdot 230^\circ=115^\circ.$$

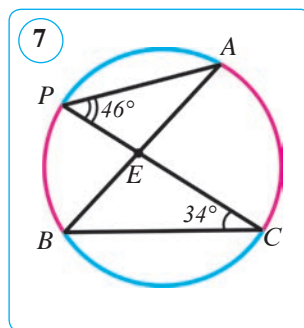
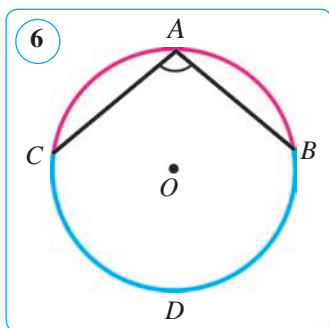
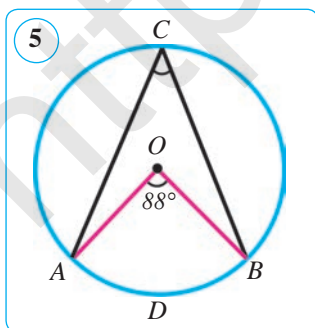
Jogaby:  $\angle CAB=115^\circ$ .

3) 7-nji suratda  $\angle APE=46^\circ$ ,  $\angle BCE=34^\circ$ .  $\angle AEP$ -ni tapyň.

Çözülişi.  $PAB$  we  $BCP$  içinden çyzylan burçlar bir sany  $BP$  ..., diýmek,  $\angle PAB=\angle ...=...$ .  $AEP$  üçburçlukdan aşakdaka eýe bolarys:

$$\angle AEP=180^\circ-(\angle ...+\angle ...)=180^\circ-(...+...)=.... \quad \text{Jogaby: } \angle AEP=... .$$

5. Töwerekde ýatýan  $A, B, C$  nokatlar bu töweregi üç duga bölýär. Bu dugalaryň gradus ölçegleriniň gatnaşygy  $3:5:7$  ýaly.  $ABC$  üçburçlugyň burçlaryny tapyň.
6. Horda töweregi iki duga bölýär. Eger bu dugalar burç ululyklarynyň gatnaşygy: 1)  $5:4$ ; 2)  $7:3$  ýaly bolsa, horda töweregiň nokatlaryndan nähili burç astynda görünýär?
7. Töwerege  $AB$  diametr we  $AC$  horda geçirilen. Eger  $AC$  we  $CB$  dugalaryň gradus ölçegi  $7:2$  gatnaşykda bolsa,  $BAC$  burçy tapyň.
8.  $AB$  we  $AC$  – töweregiň hordalary,  $\angle BAC=70^\circ$ ,  $\cup AB=120^\circ$ .  $AC$  duganyň gradus mukdaryny tapyň.



## 58. TÖWEREGİN KESIJILERI EMELE GETIREN BURÇLAR

### 1. Galtaşma bilen hordadan düzülen burç.

#### 1-nji teorema.

**Galtaşma bilen hordadan düzülen burç öz içine alan duganyň ýarysy bilen ölçenýär.**

*Subudy.*  $AB$  galtaşma we  $BC$  horda bolsun.  $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup BmC$  bolýandygyny subut edýäris (1-nji surat). Munuň üçin  $C$  depesinden  $CD \parallel AB$ -ni geçiresek,  $\angle ABC = \angle BCD$ , çünki olar içki atanak burçlar.

Emma  $\angle C = \frac{1}{2} \cup BnD$  we  $CD \parallel AB$  bolany üçin  $\cup BnD = \cup BmC$  we  $\angle B = \angle C = \frac{1}{2} \cup BnD = \frac{1}{2} \cup BmC$ . Teorema subut edildi.

**1-nji mesele.**  $AB$  horda  $56^\circ$ -ly dugany çekip durýar. Şu hordanyň depelerinden töwerege geçirilen galtaşmalar bilen hordadan emele gelen burçlary tapyň.

*Berlen:*  $(O, R)$ ,  $AB$  – horda,  $\angle AOB = 56^\circ$  –  $AB$  hordany çekip duran merkezi burç,  $AC \perp OA$ ,  $BC \perp OB$  (2-nji surat).

*Tapmaly:*  $\angle CAB$ ,  $\angle CBA$ ,  $\angle BAD$ ,  $\angle ABE$ .

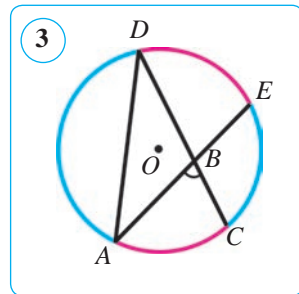
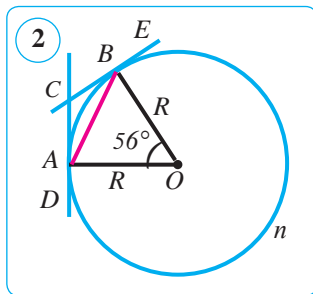
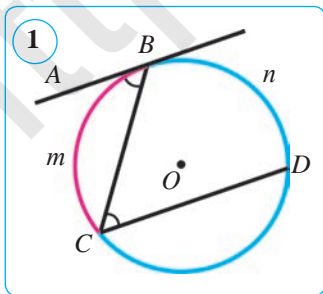
*Çözülişi.* Galtaşma bilen hordanyň arasyndaky duga  $\cup AB = 56^\circ$  (1-nji ýagdaý) ýa-da  $\cup AnB = 360^\circ - 56^\circ = 304^\circ$  (2-nji ýagdaý) bolýar.

Şeýlelikde, 1-nji ýagdaýda  $\angle CAD = \frac{1}{2} \cup AB = \frac{1}{2} \cdot 56^\circ = 28^\circ$ , 2-nji ýagdaýda bolsa  $\angle BAD = \frac{1}{2} \cup AnB = \frac{1}{2} \cdot 304^\circ = 152^\circ$  -ä eýe bolarys.

Bize mälim bolşy ýaly, töweregiň daşarsyndaky bir nokatdan töwerege geçirilen galtaşmalaryň galtaşma nokatlaryna çenli bolan kesimleri deň bolýar. Şonuň üçin  $\triangle ACB$  – deňyanly.

Diýmek,  $\angle CAB = \angle CBA = 28^\circ$  we  $\angle BAD = \angle ABE = 152^\circ$ .

*Jogaby:*  $\angle CAB = \angle CBA = 28^\circ$ ,  $\angle BAD = \angle ABE = 152^\circ$ .



## 2. Iki hordanyň kesişmeginden emele gelen burçlar.

### 2-nji teorema.

Islendik iki hordanyň kesişmeginden emele gelen her haýsy wertikal burç öz taraplary direlýän dugalaryň jeminiň ýarysyna deň.

*Subudy.*  $\angle ABC - CD$  we  $AE$  hordalaryň kesişmeginden emele gelen burçlardan biri bolsun (3-nji surat).

$\angle ABC = \frac{1}{2}(\cup AC + \cup DE)$  bolýandygyny subut edýäris. Munuň üçin  $A$  we  $D$  nokatlary birleşdirýäris, onda  $\angle ABC \triangle ABD$ -ge görä daşky burç bolýar.

Diýmek,  $\angle ABC = \angle ADC + \angle DAE$ . Emma  $\angle ADC = \frac{1}{2} \cup AC$  we  $\angle DAE = \frac{1}{2} \cup DE$ . Şonuň üçin

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC + \frac{1}{2} \cup DE = \frac{1}{2}(\cup AC + \cup DE).$$

$\angle ABD = \angle CBE = \frac{1}{2}(\cup AD + \cup EC)$  ekenligi edil ýokardaky ýaly subut edilýär. Muny özbaşdak subut ediň.

**2-nji mesele.**  $AB$  we  $CD$  – bir töweregiň hordalary,  $P$  – olaryň kesişme nokady. Eger  $BPD$  burç  $BPC$  burçdan 4 esse uly,  $CDA$  burç bolsa  $BPC$ -dan  $26^\circ$ -a uly bolsa,  $CBP$  burçy tapyň.

*Berlen:*  $\angle BPD = 4\angle BPC$ ,  $\angle CDA = \angle BPC + 26^\circ$  (4-nji surat). *Tapmaly:*  $\angle CBP$ .

*Çözülişi.*  $\angle BPD + \angle BPC = 180^\circ$ ,

$4\angle BPC + \angle BPC = 180^\circ$ , mundan  $5\angle BPC = 180^\circ$  we ahyrynda,  $\angle BPC = 36^\circ$ .  $\angle CDA = \angle BPC + 26^\circ = 36^\circ + 26^\circ = 62^\circ$ .  $\angle CBA = \angle CDA = 62^\circ$ , çünki olar bir  $\cup AC$ -ge direlýän içinden çyzylan burçlar. Mundan  $\angle CBP = \angle CBA = 62^\circ$ .

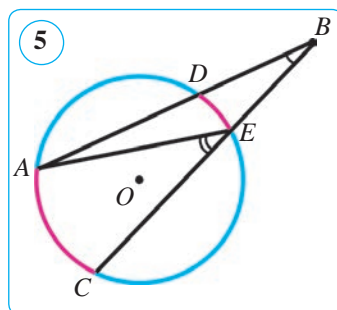
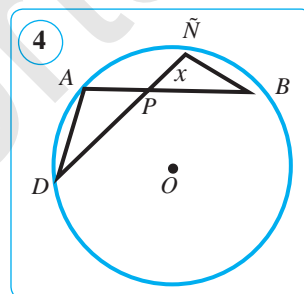
*Jogaby:*  $\angle CBP = 62^\circ$ .

## 3. Töwerek daşarsyndaky bir nokatdan oňa geçirilen iki kesijiniň arasyndaky burç.

### 3-nji teorema.

Töweregiň daşarsyndaky bir nokatdan oňa geçirilen iki kesijiniň arasyndaky burç ( $ABC$ ) kesijileriň arasyndaky dugalaryň ( $AC$  we  $DE$ ) tapawudynyň ýarysyna deň.

*Subudy.*  $B$  – töwerek daşarsyndaky nokat,  $BA$  we  $BC$  kesijiler bolsun.  $\angle B = \frac{1}{2}(\cup AC - \cup DE)$  bolýandygyny subut edýäris. Munuň üçin  $A$  we  $E$  nokatlary birleşdirýäris (5-nji surat).



$\angle AEC$   $\triangle AEB$ -ge daşky burç bolýar. Diýmek,  $\angle AEC = \angle B + \angle DAE$ , mundan  $\angle B = \angle AEC - \angle DAE$ . Emma  $\angle AEC = 0,5 \cup AC$  we  $\angle DAE = 0,5 \cup DE$ . Bulary öz ýerlerine goýsak:

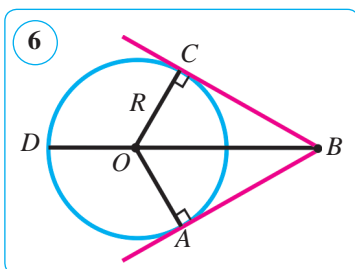
$$\angle B = \frac{1}{2} \cup AC - \frac{1}{2} \cup DE = \frac{1}{2} (\cup AC - \cup DE).$$

Diýmek,  $\angle B = \frac{1}{2} (\cup AC - \cup DE)$ . Teorema subut edildi.

#### 4. Töwregiň daşarsyndaky bir nokatdan oňa geçirilen iki galtaşmanyň häsiýeti.

##### 4-nji teorema.

Töwregiň daşarsyndaky bir nokatdan oňa iki galtaşma geçirilse, olaryň şol nokatdan galtaşma nokatlaryna çenli bolan kesimleri deň we töwregiň merkezi olaryň arasyndaky burçuň bissektrisasynda ýatýar, bu burç  $180^\circ$  bilen galtaşmalar direlýän duganyň tapawudyna deň.



*Subudy.*  $BC$  we  $BA$  göni çyzyklar töwerege  $C$  we  $A$  nokatlardan geçýän galtaşmalar,  $BD$  bolsa  $ABC$  burç bissektrisasy bolsun.  $AB = CB$  we  $O$  merkeziň  $BD$ -da ýatýandygyny hem-de  $\angle B = 180^\circ - \cup AC$  bolýandygyny görkezýäris (6-njy surat).

$OA$  we  $OC$  radiuslar geçirilse,  $OA \perp BA$  we  $OC \perp BC$  bolany üçin:  $\triangle AOB$  we  $\triangle COB$  – gönüburçly.  $\triangle AOB = \triangle COB$ , çünki  $BO$  gipotenuza umumy,  $OA = OC = R$ . Üçburçluklaryň deňliginden:  $AB = BC$ . Indi  $OC = OA = R$  we  $OA \perp BA$ ,  $AB = BC$  we  $OC \perp BC$  bolany üçin  $O$  merkez hemişe  $BD$  bissektrisa-da ýatýar. Töwregiň daşarsyndaky bir nokatdan geçirilen iki kesijiniň arasyndaky burçy ölçemek baradaky teorema esasan:

$$\angle B = 0,5(\cup ADC - \cup AC) = 0,5(360^\circ - \cup AC - \cup CA) = 180^\circ - \cup AC.$$

Diýmek,  $\angle B = 180^\circ - \cup AC$  bolýar. Teorema subut edildi.

**3-nji mesele.** Töwregiň  $A$ ,  $B$  we  $C$  nokatlary ony  $11:3:4$  gatnaşykda-ky dugalara bölýär.  $A$ ,  $B$  we  $C$  nokatlardan galtaşmalar geçirilip, bir-biri bilen kesişýänçe dowam etdirilen. Emele gelen üçburçlugyň burçlaryny tapyň.

*Çözülişi.* 1)  $\cup BnC : \cup CD : \cup DB = 11 : 3 : 4$ , galtaşma nokatlaryna galtaşmalar geçirmekden emele gelen üçburçluk  $AKL$  bolsun (7-nji surat).  $A$ ,  $AKL$  we  $ALK$  burçlary tapýarys:

$$\cup BnC = \frac{360^\circ}{11+3+4} \cdot 11 = 220^\circ; \quad \cup CD = \frac{360^\circ}{11+3+4} \cdot 3 = 60^\circ;$$

$$\cup DB = \frac{360^\circ}{11+3+4} \cdot 4 = 80^\circ;$$

$$\cup CDB = \cup CD + \cup DB = 60^\circ + 80^\circ = 140^\circ;$$

$$FA = 180^\circ - \cup CDB = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ;$$

$$FBKD = 180^\circ - \cup DB = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ;$$

$$FAKL = 180^\circ - \angle BKD = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ;$$

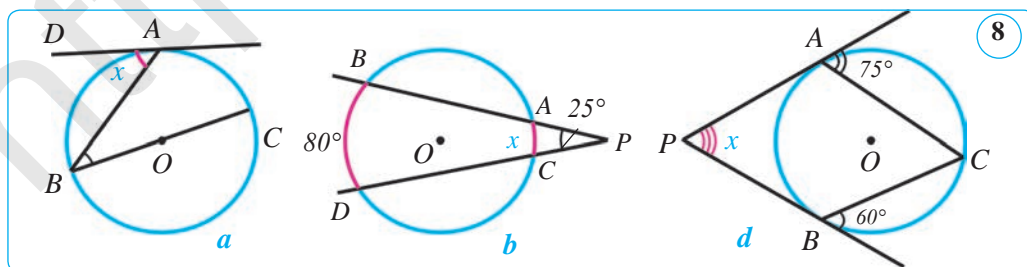
$$FALK = 180^\circ - (FA + \angle AKL) = 180^\circ - (40^\circ + 80^\circ) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$

Jogaby:  $\angle A = 40^\circ$ ,  $\angle AKL = 80^\circ$ ,  $\angle ALK = 60^\circ$ .



### Soraglar, meseleler we ýumuşlar

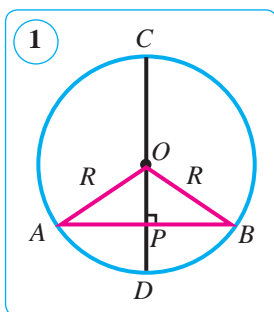
- 1) Galtaşma bilen hordadan düzülen; iki hordanyň kesişmeginden emele gelen; iki kesişyän hordanyň arasyndaky burç nähili ölçenýär?
- 2) Bir nokatdan geçirilen iki galtaşma nähili häsiýete eýe?
2. Töweregiň radiusyna deň  $AB$  horda  $A$  nokatda geçirilen galtaşma bilen nähili burçlary emele getirýär?
3. Töweregi kesiji iki hordasynyň arasyndaky burçlardan biri  $70^\circ$ -a deň. Şu burça goňşy bolan burçlaryň jemini tapyň.
4. 8-nji suratda şekillendirilen  $x$  nämälim mukdary tapyň.
5. Iki radiusyň arasyndaky burç  $150^\circ$ -a deň. Bu radiuslaryň ahyrlaryndan töwerege geçirilen galtaşmalaryň arasyndaky burçy tapyň.
6.  $B$  nokatdan töwerege geçirilen  $BA$  we  $BC$  galtaşmalar töweregi galtaşma nokatlarynda: 1) 5 : 4; 2) 12 : 6; 3) 9 : 6; 4) 13 : 7; 5) 2 : 3 gatnaşykda iki duga bölýär.  $ABC$  burçuň mukdaryny tapyň.
7. Töweregi: 1) 2 : 7; 2) 4 : 5 gatnaşykda bölýän hordanyň depelerinden iki galtaşma geçirilen. Emele gelen üçburçlugyň burçlaryny tapyň.
8. Töwerekden daşardaky nokatdan geçirilen iki galtaşmanyň galtaşma nokatlary töweregi: 1) 1 : 9; 2) 3 : 15; 3) 7 : 11; 4) 3 : 7 gatnaşykda iki duga bölýär. Galtaşmalaryň arasyndaky burçy tapyň.
9. 1)  $52^\circ$ ; 2)  $74^\circ$ ; 3)  $104^\circ$ -ly merkezi burç emele getiren iki radiusyň depelerine geçirilen galtaşmalaryň arasyndaky burçy tapyň.
10. Töweregiň radiusy diametrinden 40 mm gysga. Töweregiň diametrini tapyň.



## 59. TÖWEREĞIŇ HORDASYNYŇ WE DIAMETRINIŇ HÄSIYETLERI

### 1-nji teorema.

**Horda perpendikulýar diametr şu hordany we oña direlýän dugany deň ikä bölýär.**



*Subudy.* Merkezi  $O$  nokatda we radiusy  $R$  bolan töwerek,  $AB$  horda perpendikulýar  $CD$  diametr,  $CD$  we  $AB$ -leriň kesişme nokady  $P$  berlen bolsun (1-nji surat).  $AP=PB$  we  $\cup AD=\cup DB$  bolýandygyny subut edýäris. Eger  $AB$  horda diametr bolsa,  $P$  nokat  $O$  nokat bilen gabat gelýär we şu nokatda  $AB$  horda hem-de ony çekip durýan ýarym töweregiň  $ADB$  dugasy deň ikä bölünýär, ýagny tassyklama ýerlikli bolýar.  $AB$  horda diametr bolmasyn.  $OA$  we  $OB$  radiuslary geçirýäris. Emele gelen  $AOB$  üçburçluk – deňýanly, çünki  $OA=OB=R$ .  $OP$  – deňýanly üçburçlugyň  $AB$  tarapyna geçirilen beýiklik deňýanly üçburçlugyň häsiýetine görä, üçburçlugyň esasyňa geçirilen mediana we  $O$  depesindäki burçunyň bissektrisasi bolýar. Hordanyň ortasy arkaly geçen diametr bolsa  $AB$  hordany deň ikä bölýär, ýagny  $AP=PB$ .  $OP$ – $AOB$  burçuň bissektrisasi dygyndan  $\angle AOP=\angle BOP$ -ni alarys. Bu burçlar direlýän dugalar bolany üçin  $\cup AD=\cup DB$ . Teorema subut edildi.

### 2-nji teorema.

**Töweregiň hordasy onuň diametrinden uly bolmaýar.**

*Subudy.*  $OPB$  üçburçluk – gönüburçly (1-nji surata g.). Onda, bu üçburçlukda  $OB$  – gipotenuza,  $PB$  – katet. Mälüm bolşy ýaly, katet gipotenuzadan ulydäl, ýagny  $PB \leq OB$ . Mundan,  $2PB \leq 2 \cdot OB$  hem-de  $2PB=AB$  we  $2OB=2R=d$ . Diýmek,  $AB \leq d$  eken.

**1-nji netije.** *Hordanyň ortasyndan geçýän diametr şu horda perpendikulýardyr.*

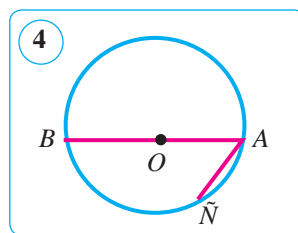
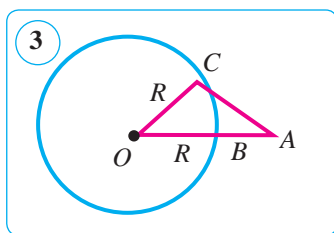
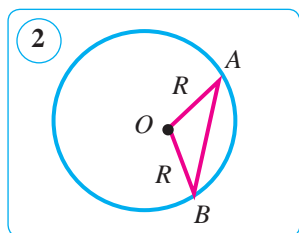
**2-nji netije.** *Hordanyň orta perpendikulýary töweregiň diametri bolýar.*

Bu netijeleri subut etmek özüňize hödürlenýär.

**1-nji mesele.** Diametr in uly horda bolýandygyny subut ediň.

*Çözülişi.*  $O$  merkezli we  $R$  radiusly töwerek hem-de diametrden tapawutly islendik  $AB$  horda berlen bolsun (2-nji surat).  $OA$  we  $OB$  kesimleri geçirýäris.  $AOB$  üçburçlukda  $AB$  tarap galan iki tarapyň jeminden kiçi, ýagny  $AB < OA + OB = R + R = 2R$ . Diýmek,  $AB$  horda diametrden kiçi bolýar.

**2-nji mesele.**  $A$  nokat  $R$  radiusly töwerekden daşarda we bu töweregiň  $O$  merkezinden  $d$  aralykda ýerleşen.  $A$  nokatdan şu töwerekdäki nokada çenli bolan in gysga aralyk näçä deň?



*Çözülüşi.*  $B$  – töweringň  $OA$  kesim bilen kesişen nokady bolsun (3-nji surat).  $AB$  aralyk  $A$  nokatdan töwerekdäki nokatlara çenli mümkin bolan aralyklaryň içinde iň kiçisidigini görkezýäris. Hakykatdan hem, töweringň islendik  $C$  nokady üçin  $AB+BO < AC+CO$  deňsizlik ýerine ýetirilýär.  $BO=CO=R$ -i hasaba alyp, ahyrky deňsizlikden  $AB < AC$  deňsizligi alarys.  $AO=d$  we  $BO=R$ -i hasaba alsak, gözlenýän iň gysga aralyk  $AB$  kesimiň uzynlygyna, ýagny  $d-R$ -e deňdigi gelip çykýar.

### Soraglar, meseleler we ýumuşlar

1. 1) Horda perpendikulýar diametr nähili häsiýete eýe?
- 2) Töweringň hordasy onuň diametrinden uly bolmagy mümkinmi?
- 3) Hordanyň orta perpendikulýary diametr bolmazlygy mümkinmi?
2. Töwerek çyzyň hem-de onuň bir-birine perpendikulýar iki  $AB$  we  $CD$  diametrlerini geçiriň.  $A, B, C$  we  $D$  nokatlar bölen töweringň dugalarynyň gradus ölçegini tapyň.
3. 8 cm-lik horda töwerekden  $90^\circ$ -ly duga bölýär. Töweringň merkezinden horda çenli bolan aralygy tapyň.
4. Berlen töweringň nokadyndan radiusyna deň iki horda geçirilen. Olaryň arasyndaky burçy tapyň.
5. Töweringň berlen nokadyndan diametre we radiusa deň horda geçirilen. Diametr bilen hordanyň arasyndaky burçy tapyň (4-nji surat).
6. Töwerekde ondan  $90^\circ$ -ly duga bölýän iki parallel horda geçirilen. Olardan biriniň uzynlygy 8 sm. Hordalaryň arasyndaky aralygy tapyň.
7. Töweringň merkezinden başga nokatda kesişýän iki hordasynyň kesişme nokadynda deň ikä bölünmeýänligini subut ediň.
8. Töwerekdäki  $A$  nokatdan töweringň radiusyna deň iki horda  $AB$  we  $AC$  geçirilen.  $B$  we  $C$  nokatlar göni çyzyk bilen utgaşdyrylan. Töweringň radiusy 12 cm. Töweringň merkezinden  $BC$  horda çenli bolan aralygy tapyň.
9. Töwerekde ondan  $90^\circ$ -ly duga bölýän iki parallel horda geçirilen. Olardan biriniň uzynlygy 10 cm. Hordalaryň arasyndaky aralygy tapyň.
10. Töweringň radiusy 13 cm-e deň. Şu töwerekde 10 cm-e deň horda geçirilen. Töweringň merkezinden horda çenli bolan aralygy tapyň.
11.  $AB$  kesim – merkezi  $O$  nokatda bolan töweringň diametri,  $AC$  we  $CB$  – şu töweringň deň hordalary.  $COB$  burçy tapyň.



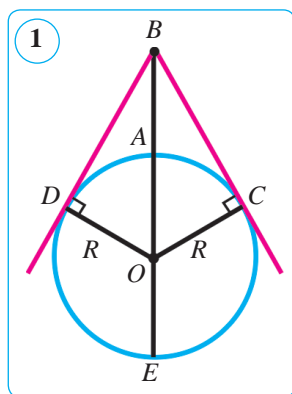
## 60. AMALY GÖNÜKME WE ULANYLYŞY

### AMALY KOMPETENSIÝANY ÖSDÜRJI GOŞMAÇA MATERIALLAR

#### GORIZONTYŇ UZAKLYGY

**1-nji mesele.** (*Daýanç mesele.*) Kesiji bilen onuň daşky böleginiň köpeltmek hasyly galtaşmanyň kwadratyna deň. Şony subut ediň.

*Çözülişi.*  $O$  merkezli töweregiň daşarsynda alnan  $B$  nokatdan  $BE$  kesiji,  $BC$  we  $BD$  galtaşmalar geçirilen bolsun (1-nji surat).



$BC^2 = BE \cdot BA$  bolýandygyny subut edýäris. Munuň üçin gönüburçly  $BOC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ) üçburçluga garap geçýäris. Mundan Pifagoryň teoremasyna görä:

$$BC^2 = BO^2 - OC^2.$$

Bu deňlige  $BO = BA + AO = BA + R$  we  $OC = R$  belgilemeleri goýup, emele gelen deňligi şekil çalşyryarys:

$$BC^2 = (BA + R)^2 - R^2 \Rightarrow BC^2 = BA^2 + 2BA \cdot R + R^2 - R^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BC^2 = BA^2 + 2BA \cdot R \Rightarrow BC^2 = BA \cdot (BA + 2R) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BC^2 = BA \cdot BE$$

Şony subut etmek talap edilipdi.

#### 1. Gorizont barada düşünje.

Uzagy görmek üçin hiç zat päsgel bermeýän açyk ýerde durup alysa garanyňyzda siz özüňizi ýeriň üstü (deňziň üstü) göýä asman bilen utgaşyp giden ýaly we ondan soň hiç zat ýok ýaly görünýän töweregiň merkezinde duran ýaly duýýarsyňyz. Bu – gorizontdyr (gözýetim). Gorizont çyzygyny tutup bolmaýar: siz oňa ýakynlaşdygy saýyn, ol sizden uzaklaşyberýär. Oňa baryp bolmaýar, emma şuna seretmezden ol hakykatda bar. Her bir gözegçilik nokady üçin şu ýerden garanda ýeriň üstüni görmek mümkin bolan mälum araçägi bolýar we bu araçägiň uzaklygyny hasaplamak kyn däl. Gorizonta bagly bolan geometrik gatnaşyklary düşünmek üçin Ýer şarynyň mälum bölegini şekillendirýän 1-nji surata (ýa-da 2-nji surata) ýüzlenýäris. Ýerden  $BA$  beýiklikdäki  $B$  nokatda gözegçiniň gözi ýerleşýär. Şu gözegçi bu ýerde özüniň daş-töweregini nähili uzaklyga çenli görüp bilýär? Garaş şöhlesi Ýeriň üstüne galtaşýan  $C$  we  $D$  (1-nji surat) ýa-da  $C$  (2-nji surat) nokatlara çenlidigi aýdyň: mundan aňyrdä  $Y$ er garaş şöhlesinden pesde bolýar. Bu nokatlar (we  $DAC$  dugada ýatýan başga nokatlar hem) ýeriň üstü görünýn böleginiň araçäginu şekillendirýär, ýagny gorizont çyzygyny emele getirýär. Gözegçä ynha şu ýerde asman ýere utgaşan ýaly bolup görünýär, çünki gözegçi bu nokatlarda bir wagtyň özünde hem asmany, hem ýerdäki zatlary görýär.

#### 2. Gorizontyň uzaklygy.

Gorizont çyzygy gözegçiden nähili uzaklykda bolýar? Başgaça aýdanda, tekiz ýerde biz merkezinde özümizi gören tegelegiň radiusynyň ululygy näçe? Gözegçiniň ýeriň üstünden göterilen beýikligi mälum bolsa, gorizontyň uzaklygy nähili hasaplanýar?

Mesele gözegçiniň gözünden ýeriň üstüne geçirilen galtaşma (2-nji surat)  $BC$  kesiminiň uzynlygyny hasaplamaga getirilýär. 1-nji meseleden mälim bolşy ýaly, galtaşmanyň kwadraty kesijiniň daşky kesimi  $BA=h$  bilen kesijiniň hemme uzynlygy, ýagny  $BE=h+2R$ -iň köpeltmek hasylyna deň:  $d^2 = (h + 2R) \cdot h$ , bu ýerde  $R$  – Ýeriň radiusy,  $BC=d$  – gözegçiden görüňýän iň uzak aralyk. Gözegçiniň gözüniň ýerden göterilmegi Ýer şarynyň diametrine ( $2R$ -e) görä örän kiçi, meselem, samolýotyň iň beýik göterilmegi Ýer şarynyň diametriniň takmynan bary-ýogy 0,001 ülsüni düzýär, onda  $2R+h \approx 2R$  diýip almak mümkin, onda formula ýene-de ýönekeýleşýär:

$$d^2 \approx 2Rh.$$

Diýmek, gorizontyň uzaklygyny örän ýönekeý formula boýunça hasaplamak mümkin:

$$d \approx \sqrt{2Rh},$$

bu ýerde:  $R$  – Ýer şarynyň radiusy (takmynan 6400 km ýa-da has takygy 6371 km),  $h$  – ýeriň üstünden gözegçi göterilen beýiklik,  $\sqrt{6400} = 80$ , onda formula aşakdaky ýaly görnüşi almagy mümkin:

$$d \approx 80\sqrt{2h} \approx 113\sqrt{h}$$

bu ýerde  $h$  hökman kilometriň böleklerinde aňladylmalydyr.

**2-nji mesele.** Ýerden 10 km beýiklikde uçýan samolýotdan näçe uzaklykdaky aralygy görmek mümkin? (Ýeriň radiusy takmynan 6370 km.)

*Çözülişi.*  $OA=R \approx 6370$  km,  $AB=h=10$  km.  $BC=d$ -ni tapýarys (2-nji surat). Kesiji bilen onuň daşky böleginiň köpeltmek hasyly galtaşmanyň kwadratyna deň bolýandygyny bilýärsiňiz, ýagny

$$d^2 = (h + 2R) \cdot h \text{ ýa-da}$$

$$d^2 = (10 + 2 \cdot 6370) \cdot 10 = 127500,$$

mundan:

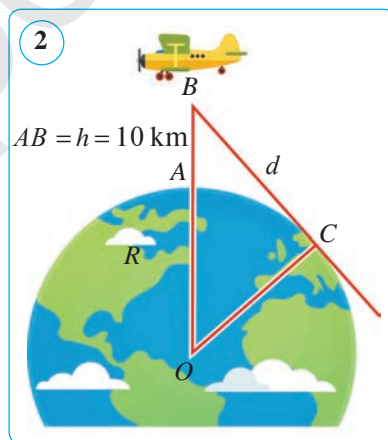
$$d = \sqrt{127500} = \sqrt{51 \cdot 2500} = 50\sqrt{51} \approx \\ \approx 50 \cdot 7,141 = 357,05 \approx 360 \text{ (km)}.$$

*Jogaby:*  $\approx 360$  km.

**3-nji mesele.** Ýerden 4 km beýiklige göterilen howa şaryndan näçe uzaklykdaky aralyk görüňýär? Ýeriň radiusy takmynan 6370 km. *Jogaby:*  $\approx 225,8$  km.

**4-nji mesele.** Kawkazdaky Elburs depesi deňiz derejesinden  $\approx 5600$  m (has takygy 5642 m) beýiklikde ýerleşen. Şu depeden nähili uzaklygy görmek mümkin? Ýeriň radiusy takmynan 6370 km. *Jogaby:*  $\approx 270$  km.

**Ýatlatma!** Ýokarda çözülen meselelerde gorizontyň uzaklygyna täsir edýän fiziki faktorlary hasaba almadyk. Gorizontyň uzaklygy ençeme faktorlara baglylykda bir-neme artmagy ýa-da kemelmegi mümkin.



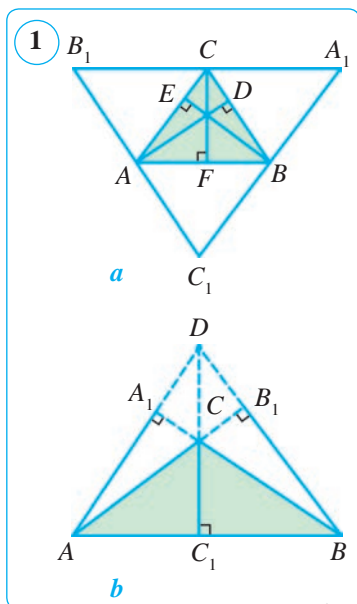
## ÜÇBURÇLUGYŇ AJAÝYP NOKATLARY

Üçburçlугyň dört ajaýyp nokadyna garap geçýäris.

### 1. Üçburçluk beýiklikleriniň kesişme nokady.

#### 1-nji teorema.

Üçburçlугyň beýiklikleri (ýa-da olaryň dowamy) bir noktada kesişýär.



*Subudy.*  $AD$ ,  $BF$  we  $CE$  –  $ABC$  üçburçlугyň beýiklikleri (1-nji a surat). Üçburçlугyň depeleri arkaly garşylykly ýatýan taraplaryna parallel edip göni çyzyklary geçirip, netijede taraplary  $ABC$  üçburçlугyň beýikliklerine perpendikulýar bolan täze  $A_1B_1C_1$  üçburçlугy alarys. Gurmaga görä,  $C_1BCA$  we  $B_1ABC$  dörtburçluklar – parallelogram, mundan  $C_1A = BC$  we  $BC = AB_1$  gelip çykýar. Diýmek,  $A$  nokat –  $B_1C_1$  kesimiň ortasy. Edil şonuň ýaly,  $B$  nokat –  $A_1C_1$  -iň ortasy,  $C$  bolsa  $A_1B_1$  -iň ortasydygy subut edilýär.

Şeýlelikde,  $AD$ ,  $BF$  we  $CE$  beýiklikler  $A_1B_1C_1$  üçburçlугyň orta perpendikulýarynda ýatýar. Diýmek, olar bir noktada kesişýär. Üçburçlугyň beýiklikleri kesişmezligi-de mümkinligini belläp geçýäris. Kütäk burçly üçburçlугyň beýiklikleri olaryň dowamynda bir noktada kesişýär, emma beýiklikleriň özi kesişmeýär (1-nji b surat).

Üçburçlугyň beýiklikleriniň (ýa-da olaryň dowamy) kesişme nokady onuň *ortomerkezi* hem diýilýär.

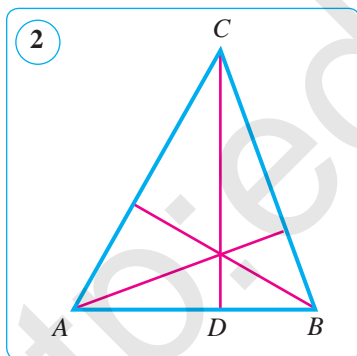
**Mesele.** Üçburçlугyň taraplaryndan haýsysy ortomerkeze ýakyn ýerleşen?

*Çözülişi.*  $ABC$  üçburçlukda  $AC > BC$  bolsun (2-nji surat). Üçburçlугyň  $CD$  beýikligi üçin  $AD > BD$  deňsizlik we diýmek,  $\angle ACD > \angle BCD$  deňsizlik ýerine ýetirilýänliginden peýdalanýarys. Bu beýiklik nokatlary şu depeden çykýan taraplardan iň kiçisine ýakyn ýerleşendigini aňladýar. Diýmek, üçburçlугyň ortomerkezi kiçi tarapa ýakyn ýerleşýär.

### 2. Üçburçlугyň medianalarynyň kesişme nokady.

#### 2-nji teorema.

Üçburçlугyň medianalary bir noktada kesişýär we bu noktada depesinden başlap hasaplanda 2 : 1 gatnaşykda bölünýär.

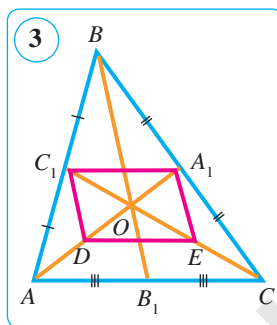


*Subudy.*  $ABC$  üçburçlukda  $AA_1$ ,  $BB_1$  we  $CC_1$  medianalar geçirilen bolsun (3-nji surat). Olar käbir  $O$  nokatda kesişýändigini hem-de  $AO:OA_1=BO:OB_1=CO:OC_1=2:1$  bolýandygyny subut edýäris.

$O - AA_1$  we  $CC_1$  medianalaryň kesişme nokady,  $D$  we  $E$  degişlilikde  $AO$  we  $CO$  kesimleriniň ortasy bolsun.  $C_1A_1$  kesim  $ABC$  üçburçlugyň orta çyzygy we üçburçlugyň orta çyzygynyň häsiýetine görä:  $C_1A_1 \parallel AC$ ,  $C_1A_1 = 0,5AC$ . Mundan daşary,  $DE - AOC$  üçburçlugyň orta çyzygy we şol häsiýete görä:  $DE \parallel AC$ ,  $DE = 0,5AC$ . Diýmek,  $DC_1A_1E$  dörtburçlugyň iki tarapy parallel we deň. Şeýlelikde,  $DC_1A_1E$  – parallelogram, onuň  $DA_1$  we  $C_1E$  diagonalary kesişme nokadynda deň ikä bölünýär. Diýmek,  $AD=DO=OA_1$ ,  $CE=EO=OC_1$ , ýagny  $AA_1$  we  $CC_1$  medianalar  $O$  nokatda  $2:1$  gatnaşykda bölünýär.

Edil şonuň ýaly, üçünji  $BB_1$  mediana –  $AA_1$  we  $CC_1$  medianalaryň her biri bilen kesişme nokadynda  $2:1$  gatnaşykda bölünýändigini subut edilýär. Her bir mediana üçin şeýle bölünme ýeke-täk we diýmek, üç mediana hem bir nokatda kesişýän eken.

Üçburçlugyň medianalarynyň kesişme nokadyna *centroid* ýa-da *agyrlyk merkezi* hem diýilýär. Şeýle atlandyrylyşyny aşakdaky tejribede barlap görüň: karton kagyздan islendik üçburçluk gyrkyp alyň we onuň medianalaryny geçiriň, soňra iňne ýa-da ujy ýiti ýonulan galamyň ujuny medianalaryň kesişme nokadyna goýup, deňagramlylykda saklajak boluň (4-nji surat).

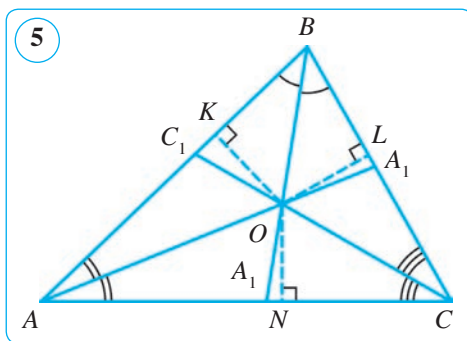


### 3. Üçburçluk bissektrisalarynyň kesişme nokady.

#### 3-nji teorema.

**Üçburçlugyň üç bissektrisasi hem bir nokatda kesişýär.**

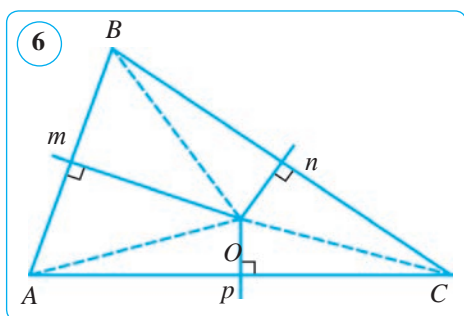
*Subudy.*  $ABC$  üçburçlugyň  $AA_1$  we  $BB_1$  bissektrisalary kesişen nokadyny  $O$  bilen belgileýäris. Ol nokatdan degişlilikde  $AB$ ,  $BC$  we  $CA$  göni çyzyklara  $OK$ ,  $OL$  we  $OM$  perpendikulýary geçirýäris (5-nji surat). Bize mälim bolşy ýaly, burçuň bissektrisasiynyň islendik nokadynyň burçuň taraplaryna çenli bolan aralyklar deň. Şuňa esasan,  $OK=OK$  we  $OK=OL$ . Şonuň üçin  $ON=OL$ , ýagny  $O$  nokat  $ACB$  burçuň taraplaryndan deň uzaklaşýan bolýar we diýmek, şu burçuň  $CC_1$  bissektrisasiynda ýatýar. Mundan,  $ABC$  üçburçlugyň üç bissektrisasiynyň hem  $O$  nokatda kesişýändigini gelip çykýar. Teorema subut edildi.



#### 4. Üçburçlugyň orta perpendikulýarlarynyň kesişme nokady.

##### 4-nji teorema.

Üçburçlugyň taraplarynyň orta perpendikulýarlary bir nokatda kesişýär.

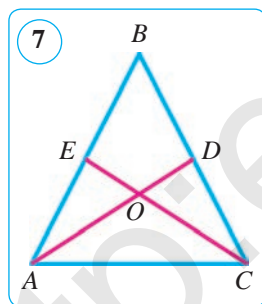


*Subudy.*  $\triangle ABC$  berlen (6-njy surat). Onuň  $AB$  we  $BC$  taraplaryna  $m$  we  $n$  orta perpendikulýarlar geçirýäris. Olar käbir  $O$  nokatda kesişýär (kesişiji göni çyzyklara perpendikulýar göni çyzyklar kesişýär). Bize mälim bolşy ýaly, kesimiň orta perpendikulýarynyň islendik nokadyndan kesimiň uçlaryna çenli bolan aralyklar deň. Şuňa görä,  $OA=OB$  (1) we  $OB=OC$  (2) bolýar. (1) we (2) deňliklerden tapýarys:  $OA=OC$ . Diýmek,

$AC$  tarapyň orta perpendikulýary  $p$  hem  $O$  nokatdan geçýär. Şeýlelikde,  $O$  nokat  $\triangle ABC$ -niň üç depesinden hem deň uzaklaşan bolýar:  $OA=OB=OC$ . Mundan,  $\triangle ABC$ -niň taraplaryna geçirilen üç  $m$ ,  $n$  we  $p$  orta perpendikulýary  $O$  nokatda kesişýändigini gelip çykýar. Teorema subut edildi

#### ❓ Soraglar, meseleler we ýumuşlar

- 1) Üçburçlugyň beýiklikleri elmydama kesişýärmi?
- 2) Üçburçlugyň näçe ajaýyp nokadyny bilýärsiňiz? Olary aýdyň.
2. Deň taraply üçburçlugyň ajaýyp nokatlary nähili ýerleşen bolýar?
3. Eger üçburçlukda iki mediana deň bolsa, onda ol deňýanly bolýar. Şony subut ediň.



*Çözülişi.*  $ABC$  üçburçlukda  $AD$  we  $CE$  medianalar deň hem-de  $O$  nokatda kesişsin (7-nji surat).  $AOE$  we  $COD$  üçburçluklara garap geçýäris.  $O$  nokat deň  $AD$  we  $CE$  medianalaryň her birini 2:1 gatnaşykda bolýar. Şonuň üçin,  $AO=CO$ ,  $EO=DO$  bolýar. Mundan daşary, wertikal burçlar bolany üçin:  $\angle AOE=\angle COD$ . Diýmek, üçburçluklaryň deňliginiň birinji nyşanyna görä:  $\triangle AOE=\triangle COD$ . Mundan,  $AE=CD$  gelip çykýar.

Bu kesimler mediananyň kesgitlemesine görä,  $AB$  we  $CB$  taraplaryň ýarysyna deň. Diýmek,  $AB=CB$ , ýagny  $ABC$  üçburçluk deňýanly eken. Şony subut etmek talap edilipdi.

4. Deňýanly üçburçlugyň dört ajaýyp nokady bir göni çyzykda ýatýandygyny subut ediň. Ol haýsy göni çyzyk bolýar?
5. Üçburçlugyň medianalarynyň kesişme nokady ortomerkez bilen gabat gelýär. Berlen üçburçlugyň deň taraplydygyny subut ediň.
6. Üçburçlugyň depesi beýiklikleri kesişen nokady bolmagy mümkinmi?
7. Üçburçlugyň medianalarynyň kesişme nokady medianalardan birini tapawudy 3 cm-e deň böleklere bölýär. Şu mediananyň uzynlygyny tapyň.

**61–62. 5-NJI BARLAG IŞI. ÝALŇYŞLAR ÜSTÜNDE IŞLEMEK**

- $AB$  –  $O$  merkezli töweringiň diametri. Eger  $OA = OC = AC$  bolsa,  $BCO$  burçy tapyň.
- 1) Töweringiň daşarsynda berlen nokatdan töweringiň nokatlaryna çenli bolan iň uly we iň kiçi aralyklar degişlilikde 50 cm we 20 cm-e deň. Berlen töweringiň radiusyny tapyň.  
2) Töweringiň merkezinden  $B$  nokada çenli aralyk 3 cm-e, radius 10 cm-e deň.  $B$  nokatdan töwerege çenli bolan iň kiçi we iň uly aralygy tapyň.
- $AB$  we  $AC$  göni çyzyklar  $O$  merkezli töwerege  $B$  we  $C$  nokatlarda galtaşýar. Eger  $\angle OAB = 30^\circ$  we  $AB = 5$  cm bolsa,  $BC$ -ni tapyň.
- Töwerek  $11 : 16 : 9$  gatnaşykda üç duga bölünen we bölünme nokatlary utgaşdyrylan. Emele gelen üçburçlugyň burçlarynyň ululyklaryny tapyň.

**5-nji test**

**Özüňizi synap görüň!**

- Töweringiň merkezinden  $B$  nokada çenli aralyk 5 cm-e, radius 12 cm-e deň.  $B$  nokatdan töwerege çenli bolan iň kiçi we iň uly aralygy tapyň.  
A) 7 cm, 17 cm;    B) 7 cm, 12 cm;    D) 5 cm, 7 cm;    E) 7 cm, 24 cm.
- Töweringiň daşarsynda berlen nokatdan töweringiň nokatlaryna çenli bolan iň uly we iň kiçi aralyklar degişlilikde 30 cm we 10 cm-e deň. Berlen töweringiň radiusyny tapyň.  
A) 20 cm;    B) 10 cm;    D) 15 cm;    E) 5 cm.
- $AB$  –  $O$  merkezli töweringiň diametri. Eger  $OA = OC = BC$  bolsa,  $CAO$  burçy tapyň.  
A)  $60^\circ$ ;    B)  $30^\circ$ ;    D)  $90^\circ$ ;    E)  $120^\circ$ .
- Radiusy  $R$ -e deň bolan töwerekdäki nokatdan uzynlyklary  $R$ -e deň bolan iki horda geçirildi. Hordalaryň arasyndaky burçy tapyň.  
A)  $120^\circ$ ;    B)  $110^\circ$ ;    D)  $135^\circ$ ;    E)  $40^\circ$ .
- Töweringiň kesiji iki hordasynyň arasyndaky burçlardan biri  $80^\circ$ -a deň. Şu burça goňşy bolan burçlaryň jemini tapyň.  
A)  $200^\circ$ ;    B)  $90^\circ$ ;    D)  $100^\circ$ ;    E)  $160^\circ$ .
- Töweringiň daşarsyndaky nokatdan töwerege iki galtaşma geçirilen. Eger galtaşmalaryň arasyndaky burç  $72^\circ$  bolsa, töweringiň galtaşma nokatlarynyň arasyndaky uly dugasyny tapyň.  
A)  $248^\circ$ ;    B)  $240^\circ$ ;    D)  $252^\circ$ ;    E)  $236^\circ$ .

**İňlis dilini öwrenýäris!**



**Töwerek** – circle

**Horda** – chord

**Radius** – radius

**Duga** – arc

**Diametr** – diameter

**Merkezi burç** – central angle

**Töwerege galtaşma** – tangent to the circle

**Perpendikulýar** – perpendicular



## Taryhy maglumatlar



**Abul Wepa Buzjany**  
(940–998)

**Abul Wepa Buzjany** 940-njy ýylda Horasan welaýatynyň Hyrat we Nişapur şäherleriniň arasyndaky Buzjon şäherinde (häzirki Türkmenistanyň Serhetabat şäheriniň töwereginde) doglupdyr. Ol Bagdatda okapdyr we döredijilik edipdir.

Abul Wepa Buzjanyň «Hünärdmentler geometrik gurmaldan nämeleri bilmelidirler» atly kitabynyň birinji we ikinji baplary çyzygyň we sirkulyň kömeginde gurmaga bagyşlanypdyr. Biz size Abul Wepanyň töweregiň merkezini tapmak meselesini getirýäris.

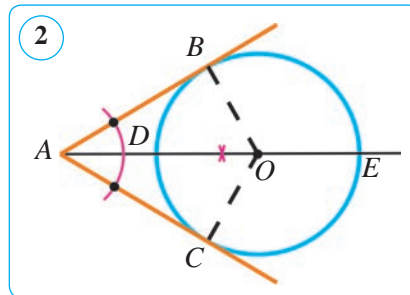
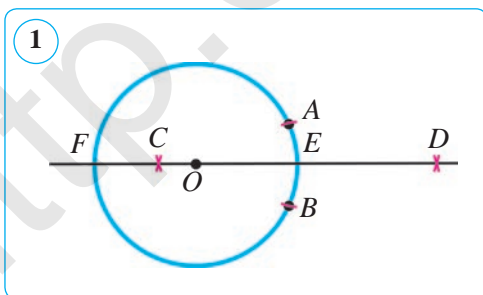
«Eger «Töweregiň merkezi nähili tapylýar?» diýip soralsa, onuň töwereginde  $A$  we  $B$  nokatlary belgiläp,  $AB$  aralyk bilen  $A$  we  $B$  nokatlary merkez edip iki deň töwerek gurýarys, olar  $C$  we  $D$  nokatlarda kesişýär (1-nji surat).  $CD$  çyzygy geçirýäris we ony töwerek bilen  $E$  we  $F$  nokatlarda kesişýänçe dowam etdirýäris, soňra  $EF$  çyzygy  $O$  nokatda deň ikä bölýäris. Onda  $O$  nokat töweregiň merkezi bolýar».

Abul Wepanyň bu usuly  $A$  we  $B$  nokatlary merkez edip duga çyzylanda olaryň kesişen nokatlaruny utgaşdyrýan  $CD$  göni çyzyk berlen töweregiň merkezinden geçip, onuň  $AB$  hordasyna perpendikulýar bolýandygyna esaslanan.

Häzir bu mesele aşakdaky ýaly çözülýär: çak edeliň, bize merkezi belgilenmedik töwerek berlen we onuň merkezini anyklamak talap edilsin (2-nji surat).

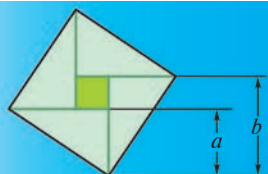
$A$  nokatdan bu töwerege  $AB$  we  $AC$  galtaşmalary geçirýäris hem-de  $BAC$  burçuň bissektrisasyny gurýarys. Bissektrisa töweregi  $D$  we  $E$  nokatlarda kesýär.  $DE$ -ni deň ikä bölsek, bölünme nokady  $O$  töweregiň merkezi bolýar. Näme üçin? Ýa-da  $B$  nokatda  $AB$  galtaşma perpendikulýar geçirsek, ol bissektrisany  $O$  nokatda kesýär.  $O$  nokat töweregiň merkezi bolýar. Näme üçin?

Şunuň bilen birlikde Abul Wepa öz eserinde ýazgyn dugany doly töwerege doldurmak, töwerege onuň daşarsyndaky nokatdan galtaşma geçirmek, töwerege onda ýatýan nokatdan galtaşma geçirmek ýaly gurmak usullaryny beripdir.





## VI BAP GAÝTALAMAK



### 8-NJISYNPDA GEÇILEN TEMALARY GAÝTALAMAK ÜÇÜN GÖNÜKMELER

1. Dörtburçlugyň üç daşky burçy degişlilikde  $142^\circ$ ,  $22^\circ$  we  $136^\circ$ -a deň. Şu dörtburçlugyň burçlaryny tapyň.
2. Dörtburçlugyň iň kiçi tarapy 7 cm-e deň, galan taraplarynyň her biri oldingisidan degişlilikde 4 cm-e uly. Şu dörtburçlugyň perimetrini tapyň.
3. Gönüburçly trapesiýanyň ýiti burçy  $45^\circ$ -a deň. Kiçi gapdal tarapy hem-de kiçi esasy 24 cm-e deň. Şu trapesiýanyň uly esasyny tapyň.
4. Deňyanly üçburçlugyň taraplary: 1) 6 cm, 5 cm we 5 cm; 2) 24 cm, 15 cm we 15 cm; 3) 3,2 dm, 20 cm we 20 cm; 4) 22 cm, 60 cm we 60 cm. Şu üçburçlugyň meýdany we gapdal tarapyna geçirilen beýikligi tapyň.
5.  $ABCD$  dörtburçlukda:  $AB=CD$ ,  $AD=BC$ ,  $A$  burç  $B$  burçdan üç esse uly. Şu dörtburçlugyň burçlaryny tapyň.
6.  $ABCD$  deňyanly trapesiýada  $BC=20$  cm,  $AB=24$  cm we  $\angle D=60^\circ$  bolsa, onuň  $AD$  esasyny tapyň.
7.  $\triangle ABC$ -da  $AE$  we  $BD$  – beýiklikler.  $AC=20$  cm,  $BD=16$  cm we  $BC=32$  cm.  $AE$  -ni tapyň.
8. Gönüburçly üçburçlugyň meýdany  $168 \text{ cm}^2$ -a deň. Eger katetlerinden biri ikinjisiniň  $\frac{7}{12}$  bölegine deň bolsa, üçburçlugyň katetlerini tapyň.
9. Üçburçlugyň meýdany  $24 \text{ cm}^2$ . Üçburçlugyň 16 cm-e deň tarapyna geçirilen beýikligini tapyň.
10.  $ABCD$  romb berlen.  $AC$  we  $BD$  diagonallar degişlilikde 30 cm we 12 cm-e deň. Rombuň meýdanyny tapyň.
11. Üç tarapyna görä üçburçlugyň meýdanyny tapyň:  
1) 15, 15, 18; 2) 39, 42, 45; 3) 4, 13, 15; 4) 29, 25, 6.
12.  $ABC$  üçburçlukda  $BC=34$  cm.  $BC$  kesimiň ortasyndan  $AC$  göni çyzyga geçirilen  $EF$  perpendikulýar  $AC$  tarapy  $AF=25$  cm we  $FC=15$  cm-lik kesimlere bölýär.  $ABC$  üçburçlugyň meýdanyny tapyň.
13. Rombuň diagonallary 18 dm we 24 dm. Şu rombuň perimetrini we parallel taraplarynyň arasyndaky aralygy tapyň.
14. Deňyanly trapesiýanyň beýikligi gapdal tarapyndan iki esse kiçi. Trapesiýanyň burçlaryny tapyň.



15. Deň taraply üçburçlugyň islendik nokadyndan taraplaryna çenli bolan aralyklaryň jemi hemişelik (birmeňzeş) we şu üçburçlugyň beýikligine deň. Şuny subut ediň.
16. Töweregiň  $A$ ,  $B$  we  $C$  nokatlary ony: 1)  $14:6:4$ ; 2)  $13:12:5$ ; 3)  $17:10:9$  gatnaşykdaky dugalara bölýär.  $A$ ,  $B$  we  $C$  nokatlardan galtaşmalar geçirilip, bir-biri bilen kesişýänçe dowam etdirilen. Emele gelen üçburçlugyň burçlaryny tapyň.
17. Gönüburçlugyň uzynlygy 30 %-e artdyrylsa we ini 30 %-e kemeldilse, onuň meýdany nähili üýtgär?
18. Eger üçburçlugyň esasy 20 % uzaldylyp, beýikligi 20 %-e gysgaldylsa, onuň meýdany nähili üýtgär?
19. Gönüburçlugyň meýdany  $540 \text{ cm}^2$ , iki tarapynyň gatnaşygy  $3:5$  ýaly. Şu gönüburçlugyň perimetrini tapyň.
20. Parallelogramyň meýdany  $24 \text{ cm}^2$ -a deň. Eger beýiklikleri  $3 \text{ cm}$  we  $4 \text{ cm}$ -e deň bolsa, onuň perimetrini tapyň.
21. Käbir  $ABCD$  parallelogramy çyzyň. Wektorlary çyzyň:
- 1)  $\overline{AB} + \overline{BC}$ ;    2)  $\overline{AD} + \overline{DC}$ ;    3)  $\overline{AB} - \overline{AD}$ ;    4)  $\overline{DB} - \overline{DA}$ .
22. Eger: 1)  $A(0; 1)$ ,  $B(1; 0)$ ; 2)  $A(-2; 1)$ ,  $B(-4; 3)$  bolsa,  $\overline{AB}$  wektoryň koordinatalary nämä deň bolýar?
23.  $ABC$  üçburçlukda  $AA_1$  – mediana,  $O$  –  $AA_1$ -iň ortasy.  $\overline{BO}$  wektory  $\vec{a} = \overline{BA}$  we  $\vec{b} = \overline{BC}$  wektorlar arkaly aňladyň.
24.  $ABCD$  parallelogramyň diagonallary  $O$  nokatda kesişýär,  $P$  nokat  $OB$ -niň ortasy.  $\overline{AP}$  wektory  $\overline{AB} = \vec{a}$  we  $\overline{AC} = \vec{b}$  wektorlar arkaly aňladyň.
25.  $240^\circ$ -ly duganyň depelerinden geçirilen galtaşmalar kesişýänçe dowam etdirilen. Olaryň arasyndaky burçy tapyň.
26. Parallelogramyň burçlaryndan biri ikinjiden 4 esse uly. Şu parallelogramyň uly burçuny tapyň.
27. Gönüburçlugyň meýdany  $288 \text{ cm}^2$ , iki tarapynyň gatnaşygy  $1:2$ -ä deň. Şu gönüburçlugyň perimetrini tapyň.
28. Parallelogramyň taraplaryndan birine geçirilen beýikligi şu tarapdan uç esse kiçi. Parallelogramyň meýdany  $48 \text{ cm}^2$ . Şu tarapyny we beýikligini tapyň.
29. Kwadratnyň meýdany  $16 \text{ cm}^2$ . Eger: 1) onuň hemme tarapyny iki esse gysgalsak; 2) onuň hemme tarapyny üç esse uzaltsak, kwadratnyň meýdany nähili üýtgär?
30. Eger: 1) 1)  $A(7; -5)$ ,  $B(-9; -3)$ ; 2)  $A(-8; 2)$ ,  $B(-12; -4)$ ; 2)  $A(8; -1)$ ,  $B(-16; -11)$  bolsa,  $AB$  kesimiň ortasy –  $C$  nokat koordinatalaryny tapyň.

## JEMLEÝJI BARLAG IŞI. ÝALŇYŞLAR ÜSTÜNDE IŞLEMEK

1. Gönüburçlugyň kiçi tarapy 10 cm-e deň, diagonallary bolsa  $60^\circ$ -ly burç astynda kesişýär. Şu gönüburçlugyň diagonallaryny tapyň.
2. Üçburçlugyň taraplary 11 cm, 7 cm we 10 cm-e deň. Berlen üçburçlugyň orta çyzyklaryndan emele gelen üçburçlugyň perimetrini tapyň.
3. Üçburçlugyň taraplary 21 cm, 72 cm we 75 cm-e deň. Şu üçburçlugyň meýdanyny tapyň.
4. Töweregiň daşyndaky nokatdan geçirilen iki galtaşmanyň arasyndaky burç  $75^\circ$  -a deň. Şu galtaşmanyň taraplaryny öz içine alan dugalary tapyň.
5.  $\vec{a}(2; -3)$  we  $\vec{b}(-2; -3)$  wektorlar berlen.  $\vec{m} = \vec{a} - 2\vec{b}$  wektoryň koordinatalaryny tapyň.

### 6-njy test

### Özüňizi synap görüň!

1. Dörtburçlugyň burçlary özara 3:5:4:6 gatnaşykda. Dörtburçlugyň kiçi burçuny tapyň.  
A)  $80^\circ$ ;                      B)  $30^\circ$ ;                      D)  $60^\circ$ ;                      E)  $40^\circ$ .
2. Güberçek dörtburçlugyň diagonallary ony näçe üçburçluga bölýär?  
A) 4;                              B) 5;                              D) 6;                              E) 8.
3. Gönüburçlugyň ini 5 cm-e deň, uzynlygy ondan 7 cm artyk. Gönüburçlugyň perimetrini hasaplaň.  
A) 32 cm;                      B) 34 cm;                      D) 24 cm;                      E) 26 cm.
4. Her bir içki burçy  $162^\circ$  bolan güberçek köpburçlugyň näçe tarapy bar?  
A) 18 ;                              B) 20 ;                              D) 15 ;                              E) 12 .
5. Parallelogramyň iki tarapynyň gatnaşygy 3:7-ä, onuň perimetri bolsa 18 cm-e deň. Şu parallelogramyň kiçi tarapyny tapyň.  
A) 2,7 cm;                      b) 3,4 cm;                      d) 5,4 cm;                      E) 4,5 cm.
6. Gönüburçluk şekliňdäki uçastoguň ini 32 m. Eger uçastoguň meýdany 2 gektar bolsa, onuň uzynlygy näçe metr bolýar?  
A) 610 m;                      B) 615 m;                      D) 625 m;                      E) 630 m.
7. Rombuň beýikligi 5 cm-e, diagonallarynyň köpeltmek hasyly  $80 \text{ cm}^2$ -a deň. Onuň perimetrini tapyň.  
A) 32 cm;                      B) 16 cm;                      D) 24 cm;                      E) 28 cm.
8.  $\vec{a}(2; -3)$  we  $\vec{b}(-2; -3)$  wektor berlen.  $\vec{m} = -\vec{a} + 2\vec{b}$  wektoryň koordinatalaryny tapyň.  
A)  $(-6; -3)$ ;                      B)  $(-3; 6)$ ;                      D)  $(-2; -9)$ ;                      E)  $(2; -3)$ .
9.  $\vec{a}(3; 2)$  we  $\vec{b}(0; -1)$  wektor berlen.  $2\vec{a} - 4\vec{b}$  wektoryň modulyny tapyň.  
A) 10;                              B) 6;                              C) 8;                              D) 3.

**Ilowe. Ýiti burçly trigonometrik funksiýalaryň bahalarynyň jedweli**

<b>Graduslar</b>	<b>sin<math>\alpha</math></b> $1^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ$	<b>tga</b> $1^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ$	<b>ctga</b> $1^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ$	<b>cosa</b> $1^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ$	<b>Graduslar</b>
1	≈ 0,0175	≈ 0,0175	≈ 57,290	≈ 0,9998	89
2	≈ 0,0349	≈ 0,0349	≈ 28,636	≈ 0,9994	88
3	≈ 0,0523	≈ 0,0524	≈ 19,081	≈ 0,9986	87
4	≈ 0,0698	≈ 0,0699	≈ 14,301	≈ 0,9976	86
5	≈ 0,0872	≈ 0,0875	≈ 11,430	≈ 0,9962	85
6	≈ 0,1045	≈ 0,1051	≈ 9,514	≈ 0,9945	84
7	≈ 0,1219	≈ 0,1228	≈ 8,144	≈ 0,9925	83
8	≈ 0,1392	≈ 0,1405	≈ 7,115	≈ 0,9903	82
9	≈ 0,1564	≈ 0,1584	≈ 6,314	≈ 0,9877	81
10	≈ 0,1736	≈ 0,1763	≈ 5,671	≈ 0,9848	80
11	≈ 0,1908	≈ 0,1944	≈ 5,145	≈ 0,9816	79
12	≈ 0,2079	≈ 0,2126	≈ 4,705	≈ 0,9781	78
13	≈ 0,2250	≈ 0,2309	≈ 4,331	≈ 0,9744	77
14	≈ 0,2419	≈ 0,2493	≈ 4,011	≈ 0,9703	76
15	≈ 0,2588	≈ 0,2679	≈ 3,732	≈ 0,9659	75
16	≈ 0,2756	≈ 0,2867	≈ 3,487	≈ 0,9613	74
17	≈ 0,2924	≈ 0,3057	≈ 3,271	≈ 0,9563	73
18	≈ 0,3090	≈ 0,3249	≈ 3,078	≈ 0,9511	72
19	≈ 0,3256	≈ 0,3443	≈ 2,904	≈ 0,9455	71
20	≈ 0,3420	≈ 0,3640	≈ 2,747	≈ 0,9397	70
21	≈ 0,3584	≈ 0,3839	≈ 2,605	≈ 0,9336	69
22	≈ 0,3746	≈ 0,4040	≈ 2,475	≈ 0,9272	68
23	≈ 0,3907	≈ 0,4245	≈ 2,356	≈ 0,9205	67
24	≈ 0,4067	≈ 0,4452	≈ 2,246	≈ 0,9135	66
25	≈ 0,4226	≈ 0,4663	≈ 2,145	≈ 0,9063	65
26	≈ 0,4384	≈ 0,4877	≈ 2,050	≈ 0,8988	64
27	≈ 0,4540	≈ 0,5095	≈ 1,963	≈ 0,8910	63
28	≈ 0,4695	≈ 0,5317	≈ 1,881	≈ 0,8829	62
29	≈ 0,4848	≈ 0,5543	≈ 1,804	≈ 0,8746	61
30	0,5000	≈ 0,5774	≈ 1,732	≈ 0,8660	60
31	≈ 0,5150	≈ 0,6009	≈ 1,664	≈ 0,8572	59
32	≈ 0,5299	≈ 0,6249	≈ 1,600	≈ 0,8480	58
33	≈ 0,5446	≈ 0,6494	≈ 1,540	≈ 0,8387	57
34	≈ 0,5592	≈ 0,6745	≈ 1,483	≈ 0,8290	56
35	≈ 0,5736	≈ 0,7002	≈ 1,428	≈ 0,8192	55
36	≈ 0,5878	≈ 0,7265	≈ 1,376	≈ 0,8090	54
37	≈ 0,6018	≈ 0,7536	≈ 1,327	≈ 0,7986	53
38	≈ 0,6157	≈ 0,7813	≈ 1,280	≈ 0,7880	52
39	≈ 0,6293	≈ 0,8098	≈ 1,235	≈ 0,7771	51
40	≈ 0,6428	≈ 0,8391	≈ 1,192	≈ 0,7660	50
41	≈ 0,6561	≈ 0,8693	≈ 1,150	≈ 0,7547	49
42	≈ 0,6691	≈ 0,9004	≈ 1,111	≈ 0,7431	48
43	≈ 0,6820	≈ 0,9325	≈ 1,072	≈ 0,7314	47
44	≈ 0,6947	≈ 0,9657	≈ 1,036	≈ 0,7193	46
45	≈ 0,7071	1,0000	1,000	≈ 0,7071	45
<b>Graduslar</b>	<b>cosa</b> $45^\circ \leq \alpha \leq 89^\circ$	<b>ctga</b> $45^\circ \leq \alpha \leq 89^\circ$	<b>tga</b> $45^\circ \leq \alpha \leq 89^\circ$	<b>sin<math>\alpha</math></b> $45^\circ \leq \alpha \leq 89^\circ$	<b>Graduslar</b>

## JOGAPLAR

**7-nji synpda geçilenleri gaytalamak.** 5. 9 dm. 7. 3 cm. 9. Hawa, deň. 10.  $52^\circ$ ,  $63^\circ$ ,  $65^\circ$ . 11.  $60^\circ$ . 13.  $24^\circ$ ,  $72^\circ$ ,  $84^\circ$ . 14. Ýok, gelip çykmaýar. 18.  $58^\circ$ .

**I bap. 1-nji tema.** 2. 1)  $n=8$ ; 2)  $n=11$ ; 3)  $n=24$ . 4.  $60^\circ$ . 5. 1)  $n=12$ ; 2)  $n=36$ ; 3)  $n=40$ . 6.  $n=8$  sany. 7. 1)  $n=20$  sany; 2)  $n=15$  sany; 3)  $n=6$  sany. 9. 1)  $n=24$  sany; 2)  $n=8$  sany; 3)  $n=5$  sany. 10.  $36^\circ$ ,  $72^\circ$ ,  $108^\circ$ ,  $144^\circ$ . **2-nji tema.** 2. 25,5 cm, 50,5 cm. 3. 1)  $35^\circ$ ,  $145^\circ$ ,  $35^\circ$ ,  $145^\circ$ ; 3)  $85^\circ$ ,  $105^\circ$ ,  $85^\circ$ ,  $105^\circ$ . 4.  $P_{ABO}=20$  cm;  $P_{BOC}=24$  cm. 5.  $AB=DC=16$  cm,  $AD=BC=4$  cm. **3-nji tema.** 2. 1) Hawa, dogry. 3. 32 cm. 7. 26 cm. 8.  $45^\circ$ ,  $135^\circ$ ,  $135^\circ$ ,  $45^\circ$ . 9. 26 cm ýoki 28 cm. **4-nji tema.** 2. 1) 9 cm; 2) 7 cm. 3. 12 cm. 4.  $AB=DC=4$  cm,  $BC=AD=8$  cm. 6. 1)  $4+7 < 12$  – üçburçlugyň deňsizligi ýerine ýetirilmedi; ýok, bolmagy mümkin däl. 7. 7 cm, 14 cm, 7 cm, 14 cm. **5–6-njy temalar.** 2. 10 cm. 3.  $BP=12$  cm. 5. 7 cm. 6.  $40^\circ$ ,  $140^\circ$ ,  $40^\circ$ ,  $140^\circ$ . 9. 12 cm, 24 cm, 30 cm, 42 cm. 10. 64 cm. 12. 30 cm. 13. 32 cm. **7–8-nji temalar.** 3.  $150^\circ$ . 4. 23 cm. 6. 27 cm, 11 cm. 7. 20 cm, 14 cm. 10.  $90^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $100^\circ$ ,  $80^\circ$ . 12. 70 ñm. **9-nji tema.** 3.  $AC=5$  cm. 4.  $OB_1=3,2$  cm,  $OB_2=4,8$  cm,  $OB_3=6,4$  cm. 6. 2) 19 cm. 8.  $x=4$ . 9.  $OB_1=9$  cm,  $OB_2=13,5$  cm,  $OB_3=18$  cm. **10–11-nji temalar.** 2. 2,5 cm, 3,5 cm, 5,5 cm. 4. 22 cm, 10 cm. 6. 2) 15 cm. 9. 24 cm, 12 cm. 10. 3 cm. 11. 30 cm, 10 cm. 12. 12 cm.

**II bap. 15-nji tema.** 2. a)  $\cos\alpha$ ; b)  $\operatorname{tg}\alpha$ ; d)  $\sin\alpha$ ; e)  $\operatorname{ctg}\alpha$ . 4. a) Hawa, çünki  $0,98 < 1$ ; b) ýok, çünki  $\sqrt{2} > 1$ ; d) hawa, çünki  $\sqrt{5} - 2 < 1$ . 5.  $ML=24$ ,  $MN=25$ . 6.  $\sin M = \frac{5}{13}$ ,  $\cos M = \frac{12}{13}$ ,  $\operatorname{tg} M = \frac{5}{12}$ ,  $\operatorname{ctg} M = \frac{12}{5}$ . **16-nji tema.** 2. a) Dogry, çünki  $a = c \sin\alpha$ ; d) nädogry, çünki  $c = \frac{a}{\sin\alpha}$ . 3. Hawa, çünki tangensiň bahasy islendik položitel san bolýar. 4. 1) 16 cm; 2) 50 cm. 6. 16 cm. 7. 5 cm. 8. 50 cm. **17-nji tema.** 2. 1) 13; 2) 9; 3) 2,5. 3. 1) 40 cm; 2) 100 cm. 4.  $x = \sqrt{3}$ ;  $y = \sqrt{2}$ . 5. 1) 0,5; 2)  $4\sqrt{2}$ ; 3) 0,8; 4) 1,5. **18-nji tema.** 2. 1) Ýok, çünki  $121+49 \neq 289$ ; 2) hawa, çünki  $3^2+1,6^2=3,4^2$ ,  $11,56=11,56$ . 5. Iki ýözüwe eýe. 6. 1) Hawa, çünki  $12^2+35^2=37^2$ ; 2) ýok, çünki  $11^2+20^2 \neq 25^2$ .

7. 2 cm. **19-nji tema.** 1. 1) 9,6 cm, 9,6 cm, 8 cm. 2.  $\frac{2\sqrt{3}}{3}h$ . 3. 1)  $h_b = \frac{12}{7}\sqrt{6}$  cm; 2)  $h_c = 11,2$  dm; 3)  $h_b = 6,72$  cm. 4.  $h = 6\sqrt{3}$  cm. 5.  $h_a = \frac{15}{4}\sqrt{7}$  cm;  $h_c = \frac{5}{2}\sqrt{7}$  cm. 7.  $h_a = \frac{3}{2}\sqrt{15}$  ñm. **20–21-nji temalar.** 2. 1)  $\frac{5}{13}$ ; 2,4;  $\frac{5}{12}$ . 4. 1) 2; 2) 1; 3) 1. 5. 1)  $\operatorname{ctg}^2\alpha$ ; 2)  $\operatorname{tg}\alpha$ . 7. 1)  $\frac{2}{\sqrt{5}}$ ;  $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ;  $\frac{1}{2}$ . 9. 1)  $\cos\alpha = \frac{15}{17}$ ;  $\operatorname{tg}\alpha = \frac{8}{15}$ ;  $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{15}{8}$ . 12. 1)  $\sin^2\alpha$ ; 2)  $\cos^3\alpha$ . 14. 1)  $\sin^2\alpha$ ; 2)  $\sin^3\alpha$ . **22-nji tema.** 2. 1)  $x \approx 40^\circ$ ; 2)  $x \approx 14^\circ$ ; 3)  $x \approx 34^\circ$ ; 4)  $x \approx 74^\circ$ . 3. 1)  $\sin B = 0,6$ ;  $\cos B = 0,8$ . 5.  $\cos A = 0,5$ ;  $\operatorname{tg} A = \sqrt{3}$ . 7. 1)  $\sin\alpha = 0,6$ ;  $\cos\alpha = 0,8$ . 8. 1)  $\sin\alpha$ ; 2)  $\cos^3\alpha$ . **23-nji tema.** 1. 1) 1,5; 3) 0,5. 3.  $\frac{32\sqrt{3}}{3}$ ;  $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ . 4. 12; 6. 5. 1)  $\sin^2\alpha$ ; 2)  $\sin^2\alpha$ . 7. 2. 8. 1) 0,5; 2) 0,5; 3) 1. **24-nji tema.** 1. a) 1)  $\approx 0,0523$ ; 2)  $\approx 0,3584$ ; 3)  $\approx 0,7660$ ; 4)  $\approx 0,6428$ ; e) 1)  $\approx 5,671$ ; 2)  $\approx 1,732$ ; 3)  $\approx 0,2679$ ; 4)  $\approx 11,430$ . 2. b) 1)  $\approx 42^\circ$ ; 2)  $\approx 50^\circ$ ; 3)  $\approx 87^\circ$ ; d) 1)  $\approx 25^\circ$ ; 2)  $\approx 85^\circ$ ; 3)  $\approx 10^\circ$ . 4. 1. 6. 1) 1; 2) 0. 7. 1)  $\approx 0,9397$ ; 4)  $\approx 23,078$ . 8.  $x \approx 8^\circ$ . **25-nji tema.** 1. 14 cm. 2.  $45^\circ$ ,  $45^\circ$ . 3.  $a = 6,691$ ;  $b = 7,431$ ;  $\beta \approx 48^\circ$ . 5.  $\cos^2\alpha$ . 7.  $a = 4$  cm;  $b = 4\sqrt{3}$  cm,  $\beta = 60^\circ$ . **26-nji tema.** 1.  $b = 9$  cm,  $\alpha = \beta = 45^\circ$ . 2.  $c = 12$  cm,  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\beta = 30^\circ$ . 5. 0. 7.  $c = 26$  cm. **27-nji tema.** 3.  $a = 7$  cm,  $\alpha = \beta = 45^\circ$ . 4.  $a = 6\sqrt{3}$  cm,  $b = 6$  cm,  $\beta = 30^\circ$ . 5.  $a = 5$  ñm (5-nji surat);  $AC = 2\sqrt{13}$  cm,  $BC = 3\sqrt{13}$  cm (6-njy surat). 6. 168 cm.

**III bap. 31-nji tema.** 3. 1) III çärýek; 2) II çärýek; 3) IV çärýek; 4) I çärýek. 4. 1)  $(-10; -1)$ ; 2)  $(0; -5,5)$ ; 3)  $(-2; 1)$ . 5.  $B(-1; 5)$ . 8. 1)  $D(3; 0)$ ; 2)  $D(4; 5)$ . **32–33-nji temalar.** 2. 1) 10; 2) 17; 3) 13. 3. 1)  $x_1 = -2$ ;  $x_2 = 6$ . 4.  $P = 16$ . 5. 1)  $(x-7)^2 + (y-11)^2 = 25$ ; 2)  $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 1$ . 6.

1) (2; 5),  $R=7$ ; 2)  $(-1; 5)$ ,  $R=2$ . **7.** 1)  $C(3; -1)$ ,  $R=4$ ; 2)  $C(0; -5)$ ,  $R=1$ . **8.** 1) Деңйанлы. **9.** 1)  $(x-9)^2+(y-4)^2=49$ ; 2)  $(x+3)^2+(y+4)^2=4$ . **10.** 1)  $C(7; -2)$ ,  $R=5$ ; 2)  $C(4; 0)$ ,  $R=1$ . **11.** 1)  $(5; -12)$

we  $(5; 12)$ ; 2)  $(-5; -12)$  we  $(5; -12)$ . **34-nji tema. 3.** 1)  $2x-y+5=0$ ; 2)  $x+y-7=0$ ; 3)  $3x-2y+2=0$ .

**4.**  $c=-3$ . **5.**  $a=b=\frac{1}{3}$ . **6.** 1)  $(0; -1,5)$  we  $(-3; 0)$ ; 2)  $(0; 3)$  we  $(4; 0)$ ; 3)  $(0; -5)$  we  $(2,5; 0)$ . **9.**

$x+1=0$ ,  $x-3y-8=0$ ,  $x-y=0$ . **35-nji tema. 2.** 1)  $\overline{DC} \uparrow \uparrow \overline{AB}$ ; 2)  $\overline{AO} \uparrow \uparrow \overline{OC}$ ; 3)  $\overline{CB} \uparrow \downarrow \overline{AD}$  we  $\overline{DA} \uparrow \downarrow \overline{AD}$ ; 5)  $\overline{DC} = \overline{AB}$ ; 6)  $\overline{AO} = \overline{OC}$ ; 7)  $\overline{DO} = \overline{OB}$ . **36-37-nji temalar. 5.** Hawa, ýerine ýetirilýär.

**6.**  $|\overline{AO}| = 16$  cm. **7.**  $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AD} + \overline{DC} \Rightarrow \overline{AC} = \overline{AC}$ . **9.**  $\overline{AB} = -\overline{b}$ ;  $\overline{BC} = -\overline{a} + \overline{b}$ ;

$\overline{DA} = \overline{a} - \overline{b}$ . **10.**  $\overline{BF} = -2\overline{a} + \overline{b}$ ;  $\overline{EC} = -\overline{a} + 2\overline{b}$ ;  $\overline{EF} = -\overline{a} + \overline{b}$ ;  $\overline{BC} = -2\overline{a} + 2\overline{b}$ . **38-39-nji temalar.**

**4.**  $\overline{OA} = -\frac{1}{2}\overline{a} - \frac{1}{2}\overline{b}$ ;  $\overline{AK} = \frac{1}{2}\overline{a} + \overline{b}$ . **5.** 1)  $\overline{AC} = \overline{CB}$ ; 2)  $\overline{AB} = 2\overline{CB}$ ; 3)  $\overline{AC} = -\frac{1}{2}\overline{BA}$ . **7.** 1)  $(4; 5)$ ; 2)

$(-1; 4)$ ; 3)  $(0; 0)$ . **8.** 1) 25; 2) 5; 3) 3. **9.** 1)  $(1; -2)$ ; 2)  $(2m; 2n)$ . **11.**  $m=7$ . **12.**  $B(-2; -11)$ . **40-nji tema. 2.** 1)  $(-3; 4)$ ; 2)  $(-5; 12)$ . **3.** 1)  $(-4; 10)$ ; 2)  $(0; 2)$ ; 4)  $(4; -10)$ . **4.** 1)  $(3; 6)$ ; 2)  $(5; 3)$ ; 3)  $(-4; -3)$ . **5.** 1)  $(6; 3)$ ; 2)  $(-6; 3)$ ; 3)  $(-2; 15)$ . **6.** 1)  $\vec{c}(-4; -4)$ ; 2)  $\vec{c}(8; 6)$ . **7.** 1)  $\vec{c}(-12; 6)$ ; 2)  $\vec{c}(-11; 8)$ .

**8.** 1)  $\vec{c}(-2; -1)$ ; 2)  $\vec{c}(2; -13)$ . **41-nji tema. 1.**  $CC_1=2$ . **2.**  $\overline{KC} = \overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AD}$ . **3.**  $(5; 12)$ . **4.**  $B(5; 5)$ ,  $D(1; -1)$ . **5.**  $B(-5; 11)$ . **8.**  $\overline{AN} = \frac{1}{2}\overline{AB} + \overline{AD}$ .

**IV bap. 45-nji tema. 2.** 2) 0,0225 dm<sup>2</sup>; 5) 6,25 m<sup>2</sup>. **6.** 1) 4 esse artýar; 2) 9 esse kemelýär; 3) 28 cm<sup>2</sup>-a artýar. **11.** 2) 3,6 dm; 3) 68 mm; 5) 80 dm. **13.** 359,12 ming km<sup>2</sup>. **46-47-nji temalar. 2.** 1)  $P=65,8$  cm,  $S=87$  cm<sup>2</sup>; 3)  $P=7,4$  dm,  $S=3$  dm<sup>2</sup>. **4.**  $S=5000$  m<sup>2</sup>. **5.** 1)  $P=126$  cm,  $S=920$  cm<sup>2</sup>. **8.** 12 cm. **9.** 1)  $S=500$  cm<sup>2</sup>; 2)  $a=12$  cm; 3)  $h_a=5$  cm. **11.** 1) 1,6 esse artýar; 2) 6,25 esse kemelýär.

**13.** 2) 280 cm<sup>2</sup>; 4) 4,8 dm<sup>2</sup>. **14.**  $P=42$  cm. **15.**  $S=280$  cm<sup>2</sup>. **48-nji tema. 2.** 1) 14 cm<sup>2</sup>; 2) 150 cm<sup>2</sup>. **3.** 4 cm. **4.** 5 : 1. **8.** 1) 756 cm<sup>2</sup>; 2) 84 cm<sup>2</sup>; 3) 192 cm<sup>2</sup>. **10.** 60 cm. **11.** 7,5 dm<sup>2</sup>. **49-50-nji temalar. 2.** 1) 32 cm. **3.** 1) 512 cm<sup>2</sup>; 2) 1,62 dm<sup>2</sup>. **4.** 12 cm. **5.** 5 cm. **7.** 1) 1,35 dm<sup>2</sup>; 2) 180 cm<sup>2</sup>; 3) 8 cm<sup>2</sup>. **8.** 1) 87 cm<sup>2</sup>; 2) 14 cm. **10.** 1)  $0,5a^2$  kw. birl. **11.** 360 cm<sup>2</sup>. **12.** 1) 2,45 dm<sup>2</sup>; 2) 238 cm<sup>2</sup>; 3) 31,5 cm<sup>2</sup>. **14.** 1) 1,44 m<sup>2</sup>. **15.** 1) 140 cm<sup>2</sup>. **51-nji tema. 1.** 2125 kw. birl. **2.**  $(a+b) \cdot c$ . **3.** 144 cm<sup>2</sup>. **5.** 16 kw. birl. **6.** 1) 20,8 km; 2) 8 km.

**V bap. 55-nji tema. 3.**  $AB$  we  $BD$  kesiji. **4.** 25 cm. **5.** 1)  $R=5$  cm; 2)  $R<5$  cm; 3)  $R>5$  cm. **8.**  $CD$ . **56-nji tema. 2.** 1) Töwerekler içki tarapdan bir-birine galtaşýar; 2) umumy nokada eýe däl, biri ikinjisiniň içinde ýatýar. **3.** 1) 10 cm; 2) 2 cm. **6.** 1) 144°; 2) 96°; 3) 210°; 4) 200°; 5) 260°; 6) 306°; 7) 276°. **7.** 1) 160°, 200°; 2) 80°, 280°. **8.** 70°. **9.** 1) 72°; 2) 60°; 3) 40°; 4) 36°; 5) 30°. **10.** 1) 15,6 cm; 2) 21 cm; 3) 1,6 dm. **57-nji tema. 3.**  $AC=10$  cm. **4.** 1)  $\angle ACB=44^\circ$ ; 3)  $\angle AEP=100^\circ$ . **5.** 36°, 60°, 84°. **6.** 1) 100° ýa-da 80°; 2) 126° ýa-da 54°. **7.**  $\angle BAC=20^\circ$ . **8.** 100°. **58-nji tema. 3.** 220°. **4.** a)  $x=45^\circ$ ; b)  $x=30^\circ$ ; d)  $x=90^\circ$ . **5.** 30°. **6.** 1)  $\angle ABC=20^\circ$ ; 2)  $\angle ABC=60^\circ$ ; 3)  $\angle ABC=36^\circ$ ; 4)  $\angle ABC=54^\circ$ ; 5)  $\angle ABC=36^\circ$ . **7.** 1) 100°, 40°, 40°. **8.** 1) 144°; 2) 120°; 3) 40°; 4) 72°. **9.** 1) 128°; 3) 76°. **59-nji tema. 3.** 4 cm. **6.** 8 cm. **9.** 10 cm. **11.** 90°.

**VI bap. 1.** 38°, 158°, 44°, 120°. **2.** 52 cm. **3.** 48 cm. **4.** 1) 12 cm<sup>2</sup>; 4,8 cm; 2) 108 cm<sup>2</sup>; 14,4 cm.

**6.** 44 cm. **7.** 10 cm. **9.** 3 cm. **10.** 180 cm<sup>2</sup>. **13.** 60 dm, 14,4 dm. **14.** 30°, 150°, 150°, 30°. **17.** 9% kemelýär. **19.** 96 cm. **20.** 28 cm. **22.** 1)  $(1; -1)$ ; 2)  $(-2; 2)$ . **23.**  $\overline{BO} = \frac{1}{2}\overline{a} + \frac{1}{4}\overline{b}$ . **25.** 60°. **26.** 144°.

**27.** 72 cm. **28.** 12 cm, 4 cm. **29.** 1) 4 cm<sup>2</sup>-a kemelýär; 2) 128 cm<sup>2</sup>-a artýar.

## MAZMUNY

7-nji synpda geçilenleri gaýtalamak .....	3
<b>I bap. Dörtburçluklar .....</b>	<b>5</b>
<b>1-Ş. Esasy dörtburçluklar we olaryň häsiýetleri</b>	
1-nji tema. Köpburçlugyň içki we daşky burçlarynyň häsiýeti .....	5
2-nji tema. Parallelogram we onuň häsiýetleri .....	8
3-nji tema. Parallelogramyň nyşanlary .....	11
4-nji tema. Gönüburçluk we onuň häsiýetleri .....	14
5–6-njy tema. Rombuň we kwadratyň häsiýetleri .....	16
7–8-nji tema. Trapesiýa we onuň häsiýetleri .....	19
<b>2-Ş. Falesiň teoremasy we onuň ulanylyşy .....</b>	<b>23</b>
9-njy tema. Falesiň teoremasy .....	23
10–11-nji tema. Üçburçluk orta çyzygynyň häsiýeti. Trapesiýa orta çyzygynyň häsiýeti .....	26
12-nji tema. Amaly gönükme we ulanylyşy .....	29
13–14-nji tema. 1-nji barlag işi. Ýalňyşlar üstünde işlemek .....	33
1-nji test .....	33
Taryhy maglumatlar .....	34
<b>II bap. Gönüburçly üçburçlugyň taraplarynyň we burçlarynyň arasyndaky gatnaşyklar .....</b>	<b>35</b>
<b>3-Ş. Ýiti burçuň trigonometrik funksiýalary .....</b>	<b>35</b>
15-nji tema. Ýiti burçuň sinusy, kosinusy, tangensi we kotangensi .....	35
16-njy tema. Ýiti burçuň sinusy, kosinusy, tangensi we kotangensi (dowamy) .....	38
<b>4-Ş. Pifagoryň teoremasy we onuň ulanylyşy .....</b>	<b>41</b>
17-nji tema. Pifagoryň teoremasy we onuň dürli subutlary .....	41
18-nji tema. Pifagoryň teoremasyna ters teorema .....	44
19-njy tema. Pifagoryň teoremasynyň käbir ulanylyşy .....	47
<b>5-Ş. Trigonometrik toždestwolar .....</b>	<b>49</b>
20–21-nji tema. Esasy trigonometrik toždestwo we onuň netijeleri .....	49
22-nji tema. Dolduryjy burçuň trigonometrik funksiýalary üçin formulalar .....	52
23-nji tema. $30^\circ$ , $45^\circ$ , $60^\circ$ li burçlaryň sinusy, kosinusy, tangensi we kotangensini hasaplamak .....	54
<b>6-Ş. Gönüburçly üçburçluklary çözmek .....</b>	<b>56</b>
24-nji tema. Trigonometrik funksiýalaryň bahalarynyň jedweli .....	56
25-nji tema. Gönüburçly üçburçluklary çözmek .....	58
26-njy tema. Gönüburçly üçburçluklary çözmek (dowamy) .....	60
27-nji tema. Gönüburçly üçburçluklary gurmak .....	62
28-nji tema. Amaly gönükme we ulanylyşy .....	64
29–30-nji tema. 2-nji barlag işi. Ýalňyşlar üstünde işlemek .....	67
2-nji test .....	67
Taryhy maglumatlar .....	68
<b>III bap. Koordinatalar usuly. Wektorlar .....</b>	<b>69</b>
<b>7-Ş. Tekizlikde koordinatalar sistemasy .....</b>	<b>69</b>
31-nji tema. Tekizlikde nokadyň koordinatalary. Kesimiň ortasynyň koordinatalary .....	69

32-33-nji tema. Iki nokadnyň arasyndaky aralyk. Töweregiň deňlemesi.....	72
34-nji tema. Göni çyzyk deňlemesi. Geometrik meseleler çözmegiň koordinata usuly .....	75
<b>8-§. Tekizlikde wektorlar .....</b>	<b>78</b>
35-nji tema. Wektor düşünjesi. Wektoryň uzynlygy we ugry.....	78
36–37-nji tema. Wektorlary goşmak we aýyrmak.....	81
38–39-njy tema. Wektory sana köpeltmek. Wektoryň koordinatalary .....	85
40-nji tema. Koordinatalary bilen berlen wektorlaryň üstünde amallar.....	90
41-nji tema. Wektoryň fiziki we geometrik düşündirişleri. Geometrik meseleler çözmegiň wektor usuly .....	93
42-nji tema. Amaly gönükme we ulanylyşy.....	96
43–44-nji tema. 3-nji barlag işi. Ýalňyşlar üstünde işlemek .....	99
3-nji test.....	99
Taryhy maglumatlar.....	100
<b>IV bap. Meýdan .....</b>	<b>101</b>
<b>9-§. Köpburçlugyň meýdany .....</b>	<b>101</b>
45-nji tema. Meýdan barada düşünje.....	101
46–47-nji tema. Gönüburçlugyň we parallelogramyň meýdany .....	105
48-nji tema. Üçburçlugyň meýdany .....	110
49–50-nji tema. Rombuň we trapesiýanyň meýdany .....	114
51-nji tema. Köpburçlugyň meýdany .....	119
52-nji tema. Amaly gönükme we ulanylyşy .....	122
53–54-nji tema. 4-nji barlag işi. Ýalňyşlar üstünde işlemek .....	126
4-nji test.....	126
Taryhy maglumatlar.....	127
<b>V bap. Töwerek .....</b>	<b>128</b>
<b>10-§. Töwerekdäki burçlar .....</b>	<b>128</b>
55-nji tema. Göni çyzyk we töweregiň özara ýerleşişini. Töwerege galtaşma we onuň häsiýetleri.....	128
56-njy tema. Iki töweregiň özara ýerleşişini. Merkezi burçuň we duganyň gradus ölçegi.....	132
57-nji tema. Töweregiň içinden çyzylan burç .....	135
58-nji tema. Töweregiň kesijileri emele getiren burçlar.....	138
59-njy tema. Töweregiň hordasynyň we diametriniň häsiýetleri .....	142
60-nji tema. Amaly gönükme we ulanylyşy .....	144
Üçburçlugyň ajaýyp nokatlary .....	146
61–62-nji tema. 5-nji barlag işi. Ýalňyşlar üstünde işlemek .....	149
5-nji test.....	149
Taryhy maglumatlar.....	150
<b>VI bap. Gaýtalamak .....</b>	<b>151</b>
8-nji synpda geçilen temalary gaýtalamak üçin gönükmeler .....	151
Jemleýji barlag işi. Ýalňyşlar üstünde işlemek .....	153
6-njy test.....	153
Goşmaça. Ýiti burçly trigonometrik funksiýalaryň bahalarynyň jedweli .....	154
Jawoblar.....	155

UO‘K: 514(075)  
KBK 22.151ya721

**Rahimkariyew A.A.**  
**R 30 Geometriya 8:** Umumiy orta bilim berýän mekdepleriň 8-nji synpy üçin derslik. / A.A. Rahimkariyew, M.A. Tohtahodjayewa. - Gaýtadan işlenen we doldurylan 4-nji neşir. — D.: O‘zbekiston, 2019. -160 s.

ISBN 978-9943-25-817-4

UO‘K: 514(075)  
KBK 22.151ya721

*ABDUVAHOB ABDURAHMONOVICH RAHIMQORIYEV,  
TOXTAXODJAYEVA MUYASSAR ABDUVAHOBOVNA*

## GEOMETRIYA

Umumiy o‘rta ta‘lim maktablarining 8- sinfi uchun darslik  
(Turkman tilida)

Qayta ishlangan va to‘ldirilgan 4-nashr

TOHIKEHT — “MITTI YULDUZ” — 2019

Terjime eden — *K. Hallyyew*

Redaktor — *J. Metyakubow*

Suratçylar — *Ş. Rahimkariyew, H. Abdullaýew*

Tehniki redaktor — *T. Haritonowa*

Korrektor — *J. Metyakubow*

Sahaplayjy — *H. Ho‘djayeva*

Neşirýat lisenziýasy AI №158, 14.08.2009

Çep etmäge 06.08 2019-njy ýylyň da rugsat edildi. Möçberi 70×100<sup>1/16</sup>.

Kegli 12. Times New Roman garniturasy. Ofset çep ediliş usuly.

Şertli çep listi 13,0. Neşir listi 10,0. 1067 nusgada çep edildi.

Buýurma № 19-136.

Dersligiň gaýtadan işlenip, neşire taýýarlanan original-maketi  
«MITTI YULDUZ» JÇJ-ne degişlidir. Daşkent şähri, Nowaýy köçesi, 30.

Özbeqistan Respublikasynyň Prezidenti Administrasiýasynyň ýanyndaky  
Habar we köpçülikleýin kommunikasiýalar agentliginiň «O‘zbekiston»  
neşirýat-çephana döredijilik öýünde çep edildi. 100011, Daşkent, Nowaýy köçesi, 30.

Telefon: (371) 244-87-55, 544-87-20

Faks: (371) 244-87-55, 544-87-20.

e-mail: [uzbekistan@iptd-uzbekistan.uz](mailto:uzbekistan@iptd-uzbekistan.uz)

[www.iptd-uzbekistan.uz](http://www.iptd-uzbekistan.uz)



**Kärendesine berlen dersligiň ýagdaýyny görkezýän jedwel**

T/n	Okuwçynyň ady, familiýasy	Okuw ýyly	Dersligiň alnandaky ýagdaýy	Synp ýolbaşçysynyň goly	Dersligiň tabşyrylandaky ýagdaýy	Synp ýolbaşçysynyň goly
1						
2						
3						
4						
5						

**Derslik kärendesine berlip, okuw ýylynyň ahrynda gaýtarylyp alnanda ýokardaky jedwel synp ýolbaşçysy tarapyndan aşakdaky baha bermek ölçeglerine esaslanlyp doldurylýar:**

<b>Täze</b>	Dersligiň birinji gezek peýdalanmaga berlendäki ýagdaýy.
<b>Ýagşy</b>	Sahaby bütün, dersligiň esasy böleginden aýrylmandyr. Ähli sahypalary bar, ýyrtylmadyk, goparylmadyk, sahypalarynda ýazgylar we çyzyklar ýok.
<b>Kanagatlanarly</b>	Kitabyň daşy ýenjilen, ep-esli çyzylan, gyalary gädilen, dersligiň esasy böleginden aýrylan ýerleri bar, peýdalanýjy tarapyndan kanagatlanarly abatlanan. Goparylan sahypalary täzedan ýelmenen, käbir sahypalary çyzylan.
<b>Kanagatlanarsyz</b>	Kitabyň daşy çyzylan ýyrtylan, esasy böleginden aýrylan ýa-da bütinleý ýok, kanagatlanarsyz abatlanan. Sahypalary ýyrtylan, sahypalary ýetişmeýär, çyzylyp taşlanan. Dersligi dikeldip bolmaýar.

UO'K: 514(075)  
KBK 22.151ya721

**Rahimkariyew A.A.**  
**R 30 Geometriya 8:** Umumiy orta bilim berýän mekdepleriň 8-nji synpy üçin derslik. / A.A. Rahimkariyew, M.A. Tohtahodjaýewa. - Gaýtadan işlenen we doldurylan 4-nji neşir. — D.: O'zbekiston, 2019. -160 s.

ISBN 978-9943-25-817-4

UO'K: 514(075)  
KBK 22.151ya721

*ABDUVAHOB ABDURAHMONOVICH RAHIMQORIYEV,  
TOXTAXODJAYEVA MUYASSAR ABDUVAHOBOVNA*

## GEOMETRIYA

Umumiy o'rta ta'lim maktablarining 8- sinfi uchun darslik  
(Turkman tilida)

Qayta ishlangan va to'ldirilgan 4- nashr

TOHIKEHT — "MITTI YULDUZ" — 2019

Terjime eden — *K. Hallyyew*

Redaktor — *J. Metyakubow*

Suratçylar — *Ş. Rahimkariyew, H. Abdullaýewa*

Tehniki redaktor — *T. Haritonowa*

Korrektor — *J. Metyakubow*

Sahaplaýjy — *H. Ho'djyeva*

Neşirýat lisenziýasy AI №158, 14.08.2009

Çep etmäge 06.08 2019-njy ýylyň da rugsat edildi. Mõçberi 70×100<sup>1/16</sup>.

Kegli 12. Times New Roman garniturasy. Ofset çep ediliş usuly.

Şertli çep listi 13,0. Neşir listi 10,0. 144 nusgada çep edildi.

Buýurma № 19-137.

Dersligiň gaýtadan işlenip, neşire taýýarlanan original-maketi  
«MITTI YULDUZ» JÇJ-ne degişlidir. Daşkent şäheri, Nowaýy köçesi, 30.

Özbeqistan Respublikasynyň Prezidenti Administrasiyasynyň ýanyndaky  
Habar we köpçülikleýin kommunikasiýalar agentliginiň «O'zbekiston»  
neşirýat-çepkana döredijilik öýünde çep edildi. 100011, Daşkent, Nowaýy köçesi, 30.

Telefon: (371) 244-87-55, 544-87-20

Faks: (371) 244-87-55, 544-87-20.

e-mail: [uzbekistan@iptd-uzbekistan.uz](mailto:uzbekistan@iptd-uzbekistan.uz)

[www.iptd-uzbekistan.uz](http://www.iptd-uzbekistan.uz)