ALGEBRA

Aniq fanlarga ixtisoslashtirilgan Davlat umumta'lim maktablarining
8-sinfi uchun darslik

Qayta ishlangan va to'ldirilgan 2-nashri

O'zbekiston Respublikasi Xalq ta'limi vazirligi
tavsiya etgan

„O'QITUVCHI" NASHRIYOT-MATBAA IJODIY UYI
TOSHKENT – 2019

UO'K: 51(075.3)
KBK 22.1ya72
A 45

Mualliflar:

M. A. Mirzaahmedov, G'. Nasritdinov, Sh. N. Ismailov,
F. R. Usmonov, F. S. Rahimova, Sh. R. Aripova

Taqrizchilar:

A. Akmalov – Nizomiy nomidagi TDPU matematika va uni o'qitish kafedrasi mudiri, pedagogika fanlari nomzodi;
J. Saparboyev – Nizomiy nomidagi TDPU matematika va uni o'qitish kafedrasi katta o'qituvchisi;
J. Abdurahmonova – Toshkent shahar, Olmazor tumanidagi AFIDUM matematika fani o'qituvchisi;
M. Shoniyozova – Toshkent shahar, Sergeli tumanidagi 300-maktab matematika fani o'qituvchisi.

Darslikdagi shartli belgilar:

△ masalani yechish boshlandi;
▲ masalani yechish tugadi;
○ matematik tasdiqni asoslash yoki formulani keltirib chiqarish boshlandi;
● asoslash yoki formulani keltirib chiqarish tugadi;
– bilish muhim va eslab qolish foydali matn;
– faollashtiruvchi savol va topshiriqlar;
16, 18, ... – murakkabroq masalalar;
– chuqurlashtirishga oid qo'shimcha mavzular.

Respublika maqsadli kitob jamg'armasi mablag'lari hisobidan chop etildi.

ISBN 978-9943-22-403-2

7-SINF „ALGEBRA“ KURSIDA O‘TILGAN MAVZULARNI TAKRORLASH

Aziz o‘quvchi! Siz 7-sinf „Algebra“sini o‘rganib, undagi algebraik ifodalar, bir noma’lumli birinchi darajali tenglamalar, birhadlar va ko‘phadlar, ko‘phadni ko‘paytuvchilarga ajratish usullari, algebraik kasrlar bilan tanishgansiz hamda shu mavzularga doir misol va masalalarni yechgansiz. 7-sinfda „Algebra“dan olgan bilimlaringizni yodga solish maqsadida Sizga bir necha mashqlar taklif etamiz.

1. Algebraik ifodaning son qiymatini toping:

1) $S = 2\pi Rh$, bunda $R = 8$, $h = 15$ ($\pi = 3{,}14$ deb oling);

2) $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$, bunda $R = 9$, $h = 10$;

3) $V = \frac{1}{3}\left(a^2 + ab + b^2\right)\cdot H$, bunda $a = 12$, $b = 6$, $H = 10$;

4) $V = \frac{1}{3}\pi\left(R^2 + Rr + r^2\right)\cdot H$, bunda $R = 15$, $r = 9$, $H = 20$.

2. Qavslarni oching va soddalashtiring:

1) $2\frac{5}{7}a - \left(1\frac{1}{7}a + 3b\right)$;

2) $-(8{,}5a - 2{,}6b) - (-1{,}5a + 3{,}6b)$;

3) $20{,}8x - \left(5y + 2\frac{5}{8}x\right)$;

4) $7x - (5y + 7{,}3x) - (-4y - 1{,}3x)$.

3. Ifoda qanday geometrik ma’noga ega:

1) $a\cdot b$ – bunda a va b to‘g‘ri to‘rtburchakning tomonlari uzunliklari;

2) $2(a+b)$ – bunda a va b to‘g‘ri to‘rtburchakning tomonlari uzunliklari;

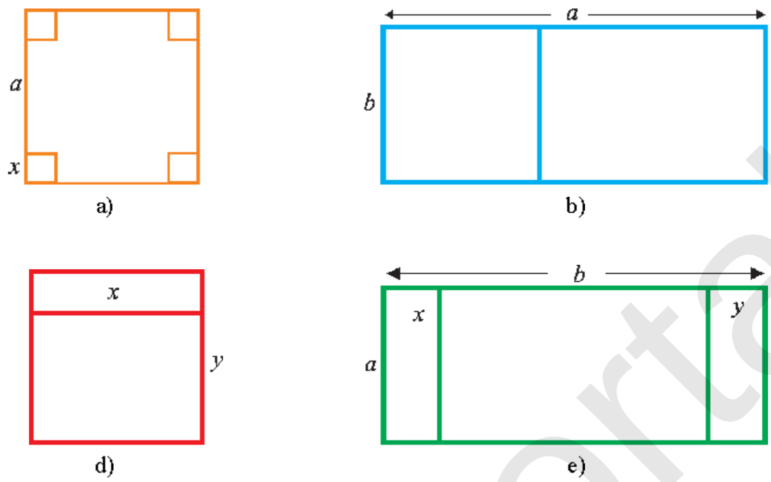
3) x^2 – bunda x kvadratning tomoni uzunligi;

4) $4x$ – bunda x kvadratning tomoni uzunligi;

5) $a^2 - 4x^2$, a – katta kvadratning, x – har bir kichik kvadratning tomoni uzunligi (1-*a* rasm);

6) $ab - b^2$ – bunda a va b to‘g‘ri to‘rtburchakning tomonlari (1-*b* rasm);

7) $\frac{x^2}{x\cdot y}$ – bunda x – kvadratning, y – to‘g‘ri to‘rtburchakning tomoni uzunligi (1-*d* rasm);



1-rasm.

8) $\frac{ab}{ax-ay}$ – bunda a va b katta to‘g‘ri to‘rtburchakning, x va y kichik to‘g‘ri to‘rtburchakning tomonlari uzunliklari (1-*e* rasm).

4. Har bir to‘g‘ri javob uchun ona tili va adabiyotdan k ball, matematikadan m ball, ingliz tilidan n ball qo‘yiladi. Feruza ona tili va adabiyotdan a ta, matematikadan b ta, ingliz tilidan c ta savolga to‘g‘ri javob berdi.
a) Feruza to‘plagan jami ballni hisoblash uchun ifoda tuzing.
b) Agar $a=36$, $b=35$, $c=33$; $k=3{,}1$; $m=2{,}1$; $n=1{,}1$ bo‘lsa, u jami qancha ball to‘plagan?

Tenglamani yeching **(5–7)**:

5. 1) $(18-3x)-(4+2x)+6=0$; 2) $x+(x+1)+(x+2)=9$;
3) $21+(20-4x)-(11-2x)=0$; 4) $(x-2)+(x-1)+x+3=0$.

6. 1) $\frac{x}{5}-\frac{x}{2}+\frac{x}{20}=1$; 2) $\frac{x}{2}-\frac{x}{12}=3-\frac{x}{3}$; 3) $\frac{x}{5}=\frac{x}{2}-\frac{x}{3}-4$;
4) $\frac{x}{8}-\frac{x}{4}+\frac{x}{2}-x=1$ 5) $\frac{2x}{3}+\frac{x}{6}=11-x$; 6) $0{,}8x+2{,}4x-1{,}2x=4{,}8$.

7. 1) $1{,}6x+0{,}9x=3x-7{,}3$; 2) $0{,}2\cdot(2{,}5x-15)=10\cdot(0{,}1x-0{,}5)$;
3) $1{,}2\cdot(3{,}5x-6)=-0{,}4\cdot(5-2{,}5x)$; 4) $0{,}75x-0{,}25x=0{,}8x+0{,}45$.

8. Sayyoh 4 km va qolgan yo‘lning $\frac{1}{4}$ qismini o‘tgach, hisoblab ko‘rsa, jami yo‘lning yarmiga yetishi uchun qolgan yo‘lning 25% ini yurishi kerak ekan. Jami yo‘l necha kilometr?

9. Dilafruz kitobning 144 betini o‘qib bo‘ldi. Bu esa kitob jami sahifalarining 36% ini tashkil qiladi. Kitob necha betli?

10. Yangi uzilgan olmadan 16% olma qoqi olinadi. 8 kg olma qoqi olish uchun necha kilogramm yangi uzilgan olma sotib olish kerak?

11. a) Bir son ikkinchi sonning p% ini tashkil qiladi. Sonlardan biri ikkinchisidan a ga ko‘p bo‘lsa, shu sonlarni toping.
b) Bir son ikkinchi sonning q% ini tashkil qiladi. Sonlardan biri ikkinchisidan b ga kam bo‘lsa, shu sonlarni toping.

12. Yangiobod qishlog‘idan Gulobod qishlog‘iga qarab v_1 km/h tezlik bilan piyoda yo‘lga chiqdi. Oradan t soat o‘tgach, shu yo‘nalishda v_2 km/h tezlik bilan velosipedchi yo‘lga chiqdi. U Gulobodga piyodadan t_2 soat avval yetib keldi. Qishloqlar orasidagi masofani toping.

13. Hisoblang:

1) $\frac{27^2 \cdot 25^2}{15^8}$; 2) $\frac{\left(3^3\right)^2 \cdot 27}{81^2}$; 3) $\left(\frac{3}{4}\right)^{50} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{49}$;

4) $(0,25)^{40} \cdot 4^{42}$; 5) $\frac{5^{12} \cdot \left(5^4\right)^2}{\left(5^5\right)^4}$; 6) $\frac{2^6 \cdot \left(2^3\right)^5}{64^4}$.

14. Birhadni standart shaklda yozing va son qiymatini hisoblang:

1) $b^3 a^2 \cdot 16 \cdot abc$, bunda $a = -1$, $b = -2, c = \frac{1}{4}$;

2) $0,8x^2 \cdot 7y^3 \cdot \frac{9}{28} x^2 y$, bunda $x = 2$, $y = -\frac{1}{3}$.

15. Ko‘phadni standart shaklda yozing:

1) $2a^3 \cdot (-2)\, a + 4b^2 \cdot 3a - 2a^2 \cdot 7b^2 - 2a \cdot 3 \cdot b^2 + a^3 \cdot 5 \cdot a$;
2) $3a \cdot 2b^2 c - 4 \cdot c^3 b a^4 \cdot 2 + 1,5 \cdot a^2 c^2 b^3 \cdot 2 + 4abc$.

16. Ko‘phadni ko‘paytma ko‘rinishida tasvirlang:

1) $\frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2} n$; 2) $\frac{1}{6} n + \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{3} n^3$; 3) $\frac{1}{4} n^2 + \frac{1}{2} n^3 + \frac{1}{4} n^4$.

17. Amallarni bajaring **(17–19)**:

1) $(a^2+2ab+b^2)-(a^2-2ab+b^2)$;
2) $(a^2+2ab+b^2)+(a^2-2ab+b^2)$;
3) $(x^2+xy+3y^3)+(2x^2-xy-3y^2)$;
4) $(x^3-y^3)-(x^3-3x^2y+3xy^2-y^2)$.

18. 1) $6ab\cdot\left(\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{3}b^2\right)$;
2) $10ab\left(0,1a^2-0,2ab+b\right)$;
3) $\frac{1}{3}xy\left(1,2x^2-1,5y\right)$;
4) $\left(-\frac{1}{2}x\right)\cdot\left(-4x^3-3x^2+6x\right)$.

19. 1) $(a^2+b^2)(a^2-b^2)$;
2) $(a^3-b^3)(a-b)$;
3) $(a^2-ab+b^2)(a+b)$;
4) $(a-4)(a-1)-(a+1)(a+4)$.

20. Ko'phadni birhadga bo'ling:

1) $(49x^3y^2-35x^2y):7xy$;
2) $(2x^3y^5+8x^4y^4):4x^3y^2$;
3) $\left(32a^7b^7-52a^5b^5+64a^3b^7\right):\frac{4}{5}a^3b^3$;
4) $\left(15a^5b^4+27a^4b^5-18a^3b^6\right):\frac{3}{4}a^3b^4$.

21. Ko'paytuvchilarga ajrating:

1) $6x^2-36x+54$;
2) $3x^3-15x^2+18x$;
3) $ac+bc+ad+bd$;
4) $ax-bx-ay+by$;
5) $(x^2+x)^2-8(x^2+x)+12$;
6) x^4+2x^2-35;
7) $(3x^2-4)^2-8(3x^2-4)-9$;
8) $a^2-2a^2b^2-a^4-b^4$.

22. Hisoblang:

1) $38^2+76\cdot62+62^2$;
2) $79^2-58\cdot79+29^2$;
3) $\frac{28^2+12\cdot56+12^2}{28^2-12^2}$;
4) $\frac{31,73^2-31,73\cdot68,27+68,27^2}{31,73^3+68,27^3}$.

Amallarni bajaring **(23–24)**:

23. 1) $\frac{5x-7}{x^2-4}-\frac{3x-2}{2-x}$;
2) $\frac{a+1}{25-a^2}-\frac{4}{a+5}+2$;
3) $\frac{2}{(2-a)^2}-\frac{3}{a^2-4a+4}+\frac{7}{a^2-4}$;
4) $\frac{4-a}{25-10a+a^2}-\frac{3}{25-10a+a^2}-\frac{a+4}{25-a^2}$.

24. 1) $\frac{54x^4y^7}{77a^5}\cdot\frac{22a^5x^5}{81y^6}$;
2) $\frac{10a^2b^3}{21c^7}:\frac{22a^4b}{39c^3}$.

I BOB. ALGEBRAIK KASRLAR VA ULAR USTIDA AMALLAR

1-§. Algebraik ifodalar

Quyidagi masalani qaraymiz.

1-masala. Biror son o‘ylang, uni 3 ga ko‘paytiring, hosil bo‘lgan natijaga 6 ni qo‘shing, topilgan yig‘indini 3 ga bo‘ling va o‘ylangan sonni ayiring. Qanday son hosil bo‘ladi?

△ Aytaylik, o‘ylangan son 8 bo‘lsin. Barcha amallarni masala shartida ko‘rsatilgan tartibda bajaramiz:

$$1)\, 8 \cdot 3 = 24; \quad 2)\, 24 + 6 = 30; \quad 3)\, 30 : 3 = 10; \quad 4)\, 10 - 8 = 2.$$

2 soni hosil bo‘ldi.

Bu yechimni qiymati 2 ga teng bo‘lgan $(8 \cdot 3 + 6) : 3 - 8$ sonli ifoda shaklida yozish mumkin.

Bordi-yu, agar 5 soni o‘ylangan bo‘lsa, u holda qiymati yana 2 ga teng bo‘lgan $(5 \cdot 3 + 6) : 3 - 5$ sonli ifoda hosil qilingan bo‘lar edi.

Biz qanday sonni o‘ylamaylik, natijada 2 soni hosil bo‘laverar ekan-da, degan faraz tug‘iladi. Buni tekshirib ko‘ramiz. O‘ylangan sonni a harfi bilan belgilaymiz va amallarni yana masala shartida ko‘rsatilgan tartibda yozamiz:

$$(a \cdot 3 + 6) : 3 - a.$$

Arifmetik amallarning bizga ma’lum bo‘lgan xossalaridan foydalanib, bu ifodani soddalashtiramiz:

$$(a \cdot 3 + 6) : 3 - a = a + 2 - a = 2. \ ▲$$

Masalani yechishda istalgan sonni bildiruvchi a harfi, 3 va 6 sonlari, amallar belgilari va qavslardan iborat $(a \cdot 3 + 6) : 3 - a$ ifoda hosil qilindi. Bu *algebraik ifoda*ga misoldir va u masala shartini matematik tilga o‘tkazish namunasidir.

Yana algebraik ifodalarga misollar keltiramiz:

$$2(m+n), \quad 3a + 2ab - 7, \quad (a+b)(a-b), \quad \frac{x+y}{a}.$$

Algebraik ifoda sonlar va harflardan tuzilib, amallar belgilari bilan birlashtirilgan ifodadir.

Agar algebraik ifodada qatnashgan harflar o‘rniga sonlar qo‘yilsa va ko‘rsatilgan amallar bajarilsa, natijada, hosil qilingan son berilgan *algebraik ifodaning son qiymati* deyiladi.

Masalan, $a=2$, $b=3$ bo‘lganda

$$3a+2b-7$$

algebraik ifodaning qiymati 5 ga teng, chunki $3\cdot2+2\cdot3-7=5$; shu algebraik ifodaning qiymati $a-1$; $b-0$ bo‘lganda -4 ga teng, chunki

$$3\cdot1+2\cdot0-7=-4.$$

a ning istalgan qiymatida

$$(a\cdot3+6):3-a$$

algebraik ifodaning qiymati 2 ga teng.

2-masala. $\frac{(3a+7)b}{a-b}$ ifodaning qiymatini $a=10$, $b=5$ bo‘lganda toping.

$$\triangle\ \frac{(3\cdot10+7)\cdot5}{10-5}=\frac{37\cdot5}{5}=37.\ \blacktriangle$$

Qo‘shish, ayirish va ko‘paytirish belgilari yordamida birlashtirilgan bir nechta ko‘phadlardan iborat algebraik ifoda *butun ifoda* deyiladi.

Ixtiyoriy butun ifoda standart ko‘rinishdagi ko‘phadga keltirilishi mumkin.

Misol. $P(a,b)-30a^3b^2-(6a^2b+a)(5ab-2)$ butun ifodani standart ko‘rinishdagi ko‘phadga keltiring.

$$\triangle\ P(a,b)=30a^3b^2-30a^2b\cdot ab-5ab\cdot a+12a^2b+2a=$$
$$=30a^3b^2-30a^3b^2-5a^2b+12a^2b+2a=7a^2b+2a.\ \blacktriangle$$

Mashqlar

1. Algebraik ifodaning qiymatini toping:

1) $3a-2b$, bunda $a=\frac{1}{3}, b=1$;

2) $2a+3b$, bunda $a=3, b=-2$;

3) $0,25a-4c^2$, bunda $a=4, c=3$;

4) $\left(2a^2-\frac{1}{3}b\right)$, bunda $a=2, b=9$.

2. Algebraik ifodaning qiymatini toping:

1) $\frac{1}{4}x-\frac{3}{7}y$, bunda $x=8, y=-14$;

2) $\frac{2}{3}x+\frac{4}{5}y$, bunda $x=9$, $y=-10$;

3) $\frac{a-3b}{a+3b}$, bunda $a=4$, $b=-2$;

4) $\frac{a+3c}{2a-c}$, bunda $a=3$, $c=-1$.

3. Neft quvuridan 1 soatda 7 t neft oqadi, m soatda quvurdan necha tonna neft oqib o‘tadi? Bir sutkada-chi?

4. 1) m soatda; 2) p sekundda; 3) m soat l minut va p sekundda necha minut bor?

5. x va y sonlar ayirmasining uchlanganini yozing. Shu ifodaning:

1) $x - -0{,}37$, $y - -0{,}42$; 2) $x=-2{,}98$, $y=-4{,}48$;

3) $x=-\frac{5}{6}$, $y=-\frac{9}{4}$; 4) $x=\frac{2}{15}$, $y=-0{,}7$

bo‘lgandagi son qiymatini toping.

6. x va y sonlar yig‘indisi bilan ular ayirmasining ko‘paytmasini yozing. Hosil bo‘lgan algebraik ifodaning:

1) $x=-\frac{1}{8}$, $y=\frac{1}{4}$; 2) $x=-\frac{5}{8}, y=\frac{3}{4}$;

3) $x=0{,}15$, $y=-0{,}75$; 4) $x=1{,}32$, $y=-1{,}28$

bo‘lgandagi son qiymatini toping.

Algebraik ifodalarning son qiymatini toping (**7–8**):

7. 1) $\frac{2mn(n+k)}{n-k}$, bunda $m=k=\frac{1}{3}$, $n=\frac{1}{2}$;

2) $\frac{(3p+1)\cdot 2p}{p-l}+\frac{1}{3}$, bunda $p=\frac{1}{3}$, $l=1$.

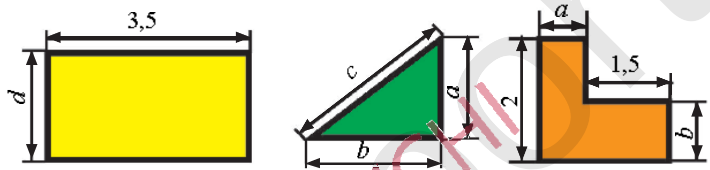
8. 1) $\frac{3(x-y)}{2p+q}$, bunda $x=8{,}31$; $y=2{,}29$; $p=2{,}01$; $q=2$;

2) $\frac{5(bc+m)}{2q+4\frac{1}{4}}$, bunda $b=\frac{2}{3}$; $c=6$; $q=\frac{1}{2}$, $m=\frac{1}{5}$.

9. Toq son formulasi $n-2k+1$ dan foydalanib, $k-0$, $k-1$, $k-7$, $k=10$ bo‘lganda n ning qiymatini toping.

10. Algebraik ifoda shaklida yozing:
1) kichigi n ga teng bo‘lgan ikkita ketma-ket kelgan 4 ta natural sonning yig‘indisi; 2) kattasi m ga teng bo‘lgan ikkita ketma-ket kelgan 4 ta natural sonning ko‘paytmasi; 3) kichigi $2k$ ga teng bo‘lgan uchta ketma-ket kelgan 4 ta juft natural sonning yig‘indisi; 4) kichigi $2p+1$ ga teng bo‘lgan uchta ketma-ket kelgan toq natural sonning ko‘paytmasi.

11. Shakllarning perimetri va yuzini algebraik ifoda ko‘rinishida yozing (2- rasm):



2- rasm.

12. Uyni isitish uchun p tonna ko‘mir g‘amlandi; shu zaxiradan q tonna sarf qilindi. Necha tonna ko‘mir qoldi? 1) $p=20$, $q=15$ bo‘lganda hisoblang; 2) q son p sondan katta bo‘lishi mumkinmi? p ga teng bo‘lishi-chi?

13. Kurash musobaqasini ko‘rish uchun har biri 4000 so‘mdan n ta chipta va har biri 5000 so‘mdan m ta chipta sotildi. Hamma chiptalardan qancha pul tushgan? Mos ifoda tuzing va uni $n=200$, $m=150$; $n=100$, $m=230$ bo‘lganda hisoblang.

14. Bitta albomning bahosi 2000 so‘m, bitta daftarning bahosi 40 so‘m, bitta ruchkaning bahosi 600 so‘m. c ta albom, a ta daftar va b ta ruchkaning umumiy (so‘mlardagi) bahosini p harfi bilan belgilab, uni formula shaklida yozing. Agar $c=9$, $a=21$, $b=4$ bo‘lsa, bu formula bo‘yicha p ni hisoblang.

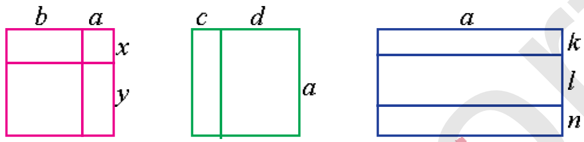
15. Issiqlik uzatish stansiyasi uchun mo‘ljallangan gaz quvuri orqali har minutda 26 m^3 gaz o‘tadi. 5 sutkada; m sutkada quvurdan necha kub metr gaz o‘tadi?

16. Geologlar o‘z yo‘nalishi bo‘yicha harakat qilib, otda soatiga c kilometr tezlik bilan 3 soat-u 10 minut yurishdi; oqimining tezligi soatiga a kilometr bo‘lgan daryoda oqim bo‘yicha 1 soat-u

40 minut solda suzishdi va soatiga b kilometr tezlik bilan 2 soat-u 30 minut piyoda yurishdi. Yo‘nalishning (km lardagi) uzunligini s harfi bilan belgilab, geologlar bosib o‘tgan yo‘l formulasini yozing. Agar $a-3{,}3$ km/h, $b-5{,}7$ km/h, $c-10{,}5$ km/h bo‘lsa, yo‘nalishning uzunligini hisoblang.

17. Aralash son $a+\frac{b}{c}$ ko‘rinishida yozilgan. Aralash sonni noto‘g‘ri kasrga aylantirish qoidasini harflar yordamida yozing.

18. 1) 3-rasmdagi shakl (to‘g‘ri to‘rtburchak) yuzini va perimetrini hisoblash uchun formulalar tuzing:



3-rasm.

2) Shakl yordamida:

a) $(a+b)(x+y)=ax+bx+ay+by$;

b) $a(c+d)=ac+ad$;

d) $a\cdot(k+l+n)=ak+al+an$

tengliklarni isbotlang. Bu formulalar ma’nosini oching.

19. Ushbu tengliklarga olib keluvchi *hayotiy masalalar* tuzing:

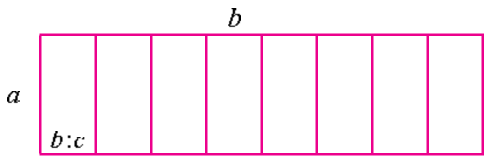
1) $a-(b+c+d)=a-b-c-d$;

2) $a-(b-c)=a-b+c$;

3) $(ab)c=a(bc)$;

4) $a-(b-c+d)=a-b+c-d$.

20. $(ab):c=a\cdot(b:c)$ formulani isbotlang. Bunda geometrik mulohazalardan va 4-rasmdagi shakldan foydalaning.

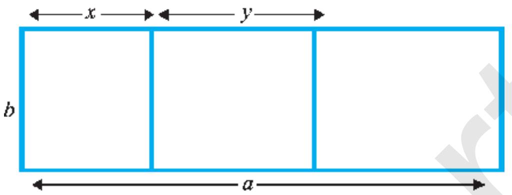


4-rasm.

2-§. Algebraik kasr. Kasrlarni qisqartirish

Algebraik kasr tushunchasiga olib keladigan ikkita masala ko‘ramiz.

1-masala. Tomonlari a va b bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchak shaklidagi taxtadan eni x va y bo‘lgan ikkita taxtacha arralab olindi (5-rasm).



5-rasm.

Berilgan taxta yuzi bu taxtachalar yuzlari yig‘indisidan necha marta katta?

△ Berilgan taxtaning yuzi $a \cdot b$ ga, arralab olingan taxtachalar yuzlari bx va by ga, ular yig‘indisi $(bx+by)$ ga teng. U holda berilgan taxta yuzi arralab olingan taxtachalar yuzlari yig‘indisidan necha marta kattaligini topish uchun $a \cdot b$ ni $(bx+by)$ ga bo‘lish kerak, ya’ni masalaning javobi $\frac{a \cdot b}{bx+by}$ kasr bo‘ladi. ▲

Shu bilan birga, arralab olingan taxtachalar yuzi $a \cdot b$ yuzning qancha qismini tashkil etishini bilish uchun esa $\frac{bx+by}{a \cdot b}$ kasrni hisoblash kerak. Bu kasrlar algebraik kasrlarga misol bo‘la oladi.

2-masala. Velosipedchining shamol yo‘q bo‘lgandagi tezligi a km/h ga, shamolning tezligi b km/h ga teng. Velosipedchining shamol yo‘nalishi bo‘yicha tezligi uning shamol yo‘nalishiga qarshi harakat tezligidan necha marta ortiq?

△ Velosipedchining shamol yo‘nalishi bo‘yicha tezligi $(a+b)$ km/h ga, shamol yo‘nalishiga qarshi tezligi $(a-b)$ km/h ga teng. Shunga ko‘ra, velosipedchining shamol yo‘nalishi bo‘yicha tezligi shamol yo‘nalishiga qarshi harakat tezligidan $a > b$ bo‘lganda $\frac{a+b}{a-b}$ marta ortiq bo‘ladi. ▲

$\frac{a+b}{a-b}$ ifoda *algebraik kasr* deyiladi, unda $a+b$ kasrning surati, $a-b$ esa uning maxraji.

Agar kasrning surat va maxraji algebraik ifodalar bo‘lsa, u *algebraik kasr* deyiladi.

Misollar:

$$\frac{x}{y};\quad \frac{x+y}{3};\quad \frac{m-n}{p};\quad \frac{a(x+y)}{b(a-x)};\quad \frac{a^2+a+1}{a+1}.$$

Agar kasrning surat va maxraji o‘zgarmas son bo‘lsa, uni, baribir, *algebraik kasr* deyilaveradi. Surat va maxrajlar o‘zgarmas bo‘lganda oddiy kasrga ega bo‘lamiz.

Agar algebraik kasrga kirgan harflar o‘rniga sonlar qo‘yilsa, zarur hisoblashlar bajarilgandan keyin biror son hosil bo‘ladi. Shu son *algebraik kasrning son qiymati* deyiladi.

Masalan: 1) $x=7$, $y=5$ bo‘lganda, $\frac{x+y}{x-y}$ algebraik kasrning son qiymati $\frac{7+5}{7-5}=\frac{12}{2}=6$ bo‘ladi;

2) $a-3{,}5$, $b-0{,}5$ bo‘lganda, $\frac{a+b}{(a-b)^2}$ algebraik kasrning son qiymatini topaylik: $\frac{3{,}5+0{,}5}{(3{,}5-0{,}5)^2}=\frac{4}{3^2}=\frac{4}{9}$.

$\frac{a+b}{a-b}$ algebraik kasrda a va b o‘rniga $a\neq b$ bo‘lgan istalgan sonni qo‘yish mumkin. Aks holda, $a-b=0$ bo‘ladi, nolga esa bo‘lish mumkin emas. Shuning uchun, har bir berilgan ko‘phadga kiruvchi harflar kasrning maxraji nolga aylanmaydigan qiymatlarni – *joiz qiymatlarni* qabul qiladi, deb kelishib olamiz.

Algebraik kasrning ham oddiy kasrning asosiy xossasiga o‘xshash xossasi bor.

Algebraik kasrning asosiy xossasi $\frac{a}{b}=\frac{na}{nb}$ kabi yoziladi, bu yerda $b\neq 0$, $n\neq 0$.

Bu xossa kasrning surat va maxraji bir xil algebraik ifodaga ko‘paytirilsa yoki bo‘linsa, berilgan kasrga teng kasr hosil bo‘lishini bildiradi.

Masalan: $\frac{a+b^2}{b}=\frac{(a+b^2)c}{bc}$, $c\neq 0$; $\frac{ab-2}{a}=\frac{(ab-2):d}{a:d}$, $d\neq 0$.

Kasrning asosiy xossasi kasrning surati va maxraji bir xil umumiy ko‘paytuvchiga ega bo‘lsa, surat va maxrajni shu umumiy ko‘paytuvchiga bo‘lish mumkinligini anglatadi.

Masalan:

1) $\frac{a(2b+c)}{a(2b-c)}=\frac{2b+c}{2b-c}$; 2) $\frac{a^2-b^2}{a-b}=\frac{(a-b)(a+b)}{a-b}=a+b$; 3) $\frac{4a+4b}{a+b}=\frac{4(a+b)}{a+b}=4$.

Ikkinchi va uchinchi misollardan kasrni qisqartirish uchun avval kasrning surati va maxrajining umumiy ko'paytuvchisini ajratish kerakligi kelib chiqadi.

3-masala. Kasrni qisqartiring: 1) $\frac{24a^2b}{8ab^2}$; 2) $\frac{m^3-n^3}{m^2-mn}$.

△ 1) $24a^2b$ va $8ab^2$ ifodalar $8ab$ umumiy ko'paytuvchiga ega. Kasrning surat va maxrajini $8ab$ ga bo'lamiz: $\frac{24a^2b}{8ab^2}=\frac{8ab\cdot 3a}{8ab\cdot b}=\frac{3a}{b}$.

2) m^3-n^3 va m^3-mn ko'phadlar $m-n$ umumiy ko'paytuvchiga ega, chunki

$$m^3-n^3-(m-n)(m^2+mn+n^2),\ m^2-mn-m(m-n).$$

Kasrning surat va maxrajini $m-n$ ga bo'lamiz:

$$\frac{m^3-n^3}{m^2-mn}=\frac{(m-n)(m^2+mn+n^2)}{m(m-n)}=\frac{m^2+mn+n^2}{m}. \ ▲$$

Shunday qilib, kasrlarni qisqartirish uchun kasrlarning surat va maxrajini ularning umumiy ko'paytuvchisiga bo'lish kerak.

Agar $\frac{a}{b}$ kasrning surati yoki maxrajidagi ishora qarama-qarshisiga o'zgartirilsa, u holda berilgan kasrga ishorasi qarama-qarshi bo'lgan kasr hosil bo'ladi: $\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}$; $\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b}$.

Misollar: $\frac{-3}{8}=-\frac{3}{8}$; $\frac{-a}{a-1}=-\frac{a}{a-1}=\frac{a}{1-a}$; $\frac{-(ax+b)}{x^2+4}=-\frac{ax+b}{x^2+4}$.

4-masala. $\frac{5m(x-y)}{m^2(y-x)}$ kasrni qisqartiring:

$$△\ \frac{5m(x-y)}{m^2(y-x)}=\frac{5m(x-y)}{-m^2(x-y)}=\frac{5m}{-m^2}=\frac{5}{-m}=-\frac{5}{m}. \ ▲$$

21. Savollarga javob bering:

1) Algebraik kasr deb nimaga aytiladi?
2) Algebraik kasrning qiymati deyilganda nima tushuniladi?
3) Algebraik kasrni qisqartirish uchun nima qilish kerak?

22. Surati x va y sonlarning yig‘indisiga, maxraji shu sonlarning ko‘paytmasiga teng algebraik kasrni yozing.

23. Surati x va y sonlarning ayirmasiga, maxraji shu sonlarning yig‘indisiga teng algebraik kasrni yozing.

24. Surati a va b sonlar kvadratlari yig‘indisiga, maxraji shu sonlar ayirmasiga teng algebraik kasrni yozing.

25. Surati a va b sonlar kublarining ayirmasiga, maxraji shu sonlar kvadratlari yig‘indisiga teng algebraik kasrni yozing.

26. Surati a va b sonlar yig‘indisining kvadratiga, maxraji shu sonlar ayirmasining kvadratiga teng algebraik kasrni yozing.

27. Algebraik kasrning son qiymatini toping:

1) $\frac{b-a}{2a+b}$, bunda $a=1\frac{1}{3}$, $b=4\frac{1}{3}$; 2) $\frac{a^2+3b}{a^2-b}$, bunda $a=1{,}5$, $b=0{,}25$.

28. Agar:

1) $\frac{x}{y}=4$ bo‘lsa, $\frac{x^2+xy-y^2}{x^2-xy+y^2}$; 2) $\frac{y}{x}=3$ bo‘lsa, $\frac{3y^2-2xy-x^2}{x^2+xy+y^2}$

ifodaning son qiymatini toping.

29. Agar $\frac{a+4b}{5a-7b}=2$ bo‘lsa,

1) $\frac{4a-5b}{3a+b}$; 2) $\frac{3a^2-2ab+b^2}{5a^2+2b^2}$; 3) $\frac{a^3-3ab^2}{4a^2b+3b^2}$; 4) $\frac{a^2-ab+b^2}{a^2+b^2}$

ifodaning son qiymatini toping.

Kasrni qisqartiring **(30 – 41)**:

30. 1) $\frac{-16}{48}$; 2) $\frac{-64}{-128}$; 3) $\frac{-169}{26}$; 4) $\frac{144}{-12}$.

31. 1) $\frac{14a}{22}$; 2) $\frac{3m}{8m}$; 3) $\frac{18n}{72n}$; 4) $\frac{5ab}{15ac}$; 5) $\frac{2a^3}{8a^2}$; 6) $\frac{3x^2}{x^3y}$.

32. 1) $\frac{6a}{4ab}$; 2) $\frac{15c}{48b}$; 3) $\frac{4a^2b}{16a^3}$; 4) $\frac{12a^4b^2}{18a^3b^3}$.

33. 1) $\frac{2(m-n)}{3(m-n)}$; 2) $\frac{3(m-n)}{27(m+n)(m-n)}$; 3) $\frac{4(a-b)}{3(b-a)}$; 4) $\frac{6(x-y)}{18(y-x)}$.

34. 1) $\frac{a+b}{(a+b)^2}$; 2) $\frac{(m-n)}{(m-n)^2}$; 3) $\frac{2m(1+x)^2}{4m^2(1+x)}$; 4) $\frac{3n(1-x)^2}{8n^2(x-1)^2}$.

35. 1) $\frac{m+n}{(m+n)^3}$; 2) $\frac{(3x-2y)^2}{(2y-3x)}$; 3) $\frac{10m^2n(m-n)^2}{5m^3n(n-m)^2}$; 4) $\frac{9mn^2(m+n)}{12m^2n^3(m+n)^2}$.

36. 1) $\frac{4x-4y}{8c}$; 2) $\frac{3a+3b}{6a-6b}$; 3) $\frac{ac+bc}{ac-bc}$; 4) $\frac{m+mn}{m-mn}$.

37. 1) $\frac{m^2}{m^2-mn}$; 2) $\frac{pq^2}{p^2q+pq^2}$; 3) $\frac{4a+6b}{2a+3b}$; 4) $\frac{3a-6b}{12b-6a}$.

38. 1) $\frac{a}{a^2+ab}$; 2) $\frac{p^2q}{p^2q-pq^2}$; 3) $\frac{2m^2-mn}{n^2-2mn}$; 4) $\frac{2xy-x^2}{2y^2-xy}$.

39. 1) $\frac{8x^2-20xy}{20x^2-8xy}$; 2) $\frac{2a^2-ab}{b^2-2ab}$; 3) $\frac{a-2b}{12b-6a}$; 4) $\frac{x^2-2xy}{2y^2-xy}$.

40. 1) $\frac{12x^2+30xy}{30x^2+12xy}$; 2) $\frac{36a^2-24ab}{24a^2-36ab}$; 3) $\frac{m^3+3m^2n}{3m^2n-3m^3}$; 4) $\frac{a-2a^2b}{2a^3b^2-a^4b}$.

41. 1) $\frac{a^2-1}{(a+1)^2}$; 2) $\frac{(m+n)^2}{m+n}$; 3) $\frac{1-4y+4y^2}{3-6y}$; 4) $\frac{9-2x}{4x^2-36x+81}$.

42. Kasrni qisqartiring:

1) $\frac{4c^2-9}{9-12c+4c^2}$; 2) $\frac{9x^2-24xy+16y^2}{16y^2-9x^2}$; 3) $\frac{16y^2-8xy+x^2}{4y-x}$.

43. Agar:
1) $2a-b=5$ bo‘lsa, $8a^3-b^3-30ab$ ifoda;
2) $a+2b=4$ bo‘lsa, a^3+8b^3+24ab ifoda nimaga teng?

44. a va b ning shunday qiymatlarini topingki, x ning barcha joiz qiymatlari uchun: 1) $\frac{ax^2-3x-b}{x-1}=2x-1$; 2) $\frac{ax^2+x+b}{2-x}=2x+3$ tenglik o‘rinli bo‘lsin.

45. To‘g‘ri to‘rtburchak va kvadrat berilgan. To‘g‘ri to‘rtburchak asosi kvadratning tomoni uzunligidan a cm ortiq, balandligi esa kvadrat tomonidan b cm qisqa ($a>b$). Shu to‘g‘ri to‘rtburchak va kvadratning yuzlari teng bo‘lsa, kvadratning tomoni uzunligini toping.

46. Bir qotishma tarkibida 60%, ikkinchisida esa 40% kumush bor. Ikkala qotishmani eritib, tarkibida 45% kumush bo‘lgan 2 kg massali qotishma olindi. Birinchi va ikkinchi qotishmalarning massasini toping.

47. Birinchi kvadratning tomoni ikkinchi kvadrat tomonidan 3 cm uzun, birinchi kvadrat yuzi ikkinchisinikidan 21 cm^2 ortiq. Birinchi kvadrat perimetrining ikkinchi kvadrat perimetriga nisbatini toping.

Kasrni qisqartiring **(48–50)**:

48. 1) $\frac{25b-49b^3}{49b^3-70b^2+25b}$; 2) $\frac{49a^2-a^4}{a^4+14a^3+49a^2}$; 3) $\frac{27a^3+b^3}{3ab^2+b^3}$; 4) $\frac{2ab-b}{8a^3-1}$.

49. 1) $\frac{x^5-x^4y-xy^4+y^5}{x^4-x^3y-x^2y^2+xy^3}$; 2) $\frac{a^2-(x-y)a-xy}{a^3+a^2y+ax+xy}$.

50. 1) $\frac{x^2-4a^2}{x^2+4ax+4a^2}$; 2) $\frac{(5a-4)^2+2(5a-4)\cdot(4-3a)+(3a-4)^2}{(2a+5)^2-2(2a+5)(5-3a)+(3a-5)^2}$.

51. a va b ning shunday qiymatlarini topingki, x ning barcha joiz qiymatlari uchun 1) $\frac{ax^2-x+b}{x-1}=2x+1$; 2) $\frac{ax^2+10x-2b}{12-2x}=x+1$ tenglik o‘rinli bo‘lsin.

52. Hisoblang:

1) $\left(2010\frac{1997}{1999}\right)^2-\left(2011\frac{1997}{1999}\right)\cdot\left(2009\frac{1997}{1999}\right)$;

2) $\left(2008\frac{2007}{2008}\right)^2-\left(2007\frac{2007}{2008}\right)\cdot\left(2009\frac{2007}{2008}\right)$;

3) $\left(2^2+1\right)\left(2^4+1\right)\left(2^8+1\right)\left(2^{16}+1\right)\left(2^{32}+1\right)\left(2^{64}+1\right)-\frac{1}{3}\cdot2^{128}$;

4) $\left(3^2+1\right)\left(3^4+1\right)\left(3^8+1\right)\left(3^{16}+1\right)\left(3^{32}+1\right)-\frac{1}{8}\cdot3^{64}$.

53. Kasrni qisqartiring:

1) $\frac{x^{16}-x^8+1}{x^{24}+1}$; 2) $\frac{x^3-1}{x^4+x^2+1}$; 3) $\frac{m^4-16}{m^4-4m^3+8m^2-16m+16}$.

Hisoblang **(54–55)**:

54. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{97\cdot 99}.$

55. $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{19^2}\right).$

Sonli ifodaning qiymatini hisoblang **(56–58)**:

56. $\frac{(7-6{,}35):6{,}5+9{,}9}{\left(1{,}2:36+1{,}2:0{,}25-1\frac{5}{16}\right):\frac{169}{24}}.$

57. $\left(\frac{(2{,}7-0{,}8)\cdot 2\frac{1}{3}}{(5{,}2-1{,}4):\frac{3}{70}}+0{,}125\right):2\frac{1}{3}+0{,}43.$

58. $\frac{\frac{5}{11}\cdot 0{,}0006\cdot 2\frac{1}{5}+1\frac{1}{8}\cdot 0{,}9954\cdot\frac{8}{9}}{25\cdot 0{,}0009+0{,}0001\cdot 25}.$

59. Soddalashtiring:

$$M=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\frac{8}{1+x^8}+\frac{16}{1+x^{16}}.$$

△ Avval birinchi va ikkinchi kasrlarni qo‘shamiz:

$$\frac{\overset{1+x\,\backslash}{1}}{1-x}+\frac{\overset{1-x\,\backslash}{1}}{1+x}=\frac{1+x+1-x}{1-x^2}=\frac{2}{1-x^2}.$$

Hosil bo‘lgan ifodaga ketma-ket $\frac{2}{1+x^2}$ ni, $\frac{4}{1+x^4}$ ni, $\frac{8}{1+x^8}$ ni, $\frac{16}{1+x^{16}}$ ni qo‘shib boramiz:

$$M=\frac{2}{1-x^2}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\frac{8}{1+x^8}+\frac{16}{1+x^{16}}=\frac{4}{1-x^4}+\frac{4}{1+x^4}+\frac{8}{1+x^8}+\frac{16}{1+x^{16}}=$$

$$\frac{8}{1-x^8}+\frac{8}{1+x^8}+\frac{16}{1+x^{16}}=\frac{16}{1-x^{16}}+\frac{16}{1+x^{16}}=\frac{32}{1-x^{32}}.$$

Shunday qilib, $M=\frac{32}{1-x^{32}}$. ▲

Soddalashtiring **(60–62)**:

60. $\frac{1}{b(abc+a+c)}-\frac{1}{a+\frac{1}{b+\frac{1}{b}}}:\frac{1}{a+\frac{1}{b}}.$

61. $\frac{2b+a-\frac{4a^2-b^2}{a}}{b^3+2ab^2-3a^2b}\cdot\frac{a^3b+2a^2b^2+ab^3-4a^2b^2}{a^2-b^2}.$

62. $P=\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{2c}{ab}\right)(a+b+2c)}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{2}{ab}-\frac{4c^2}{a^2b^2}}.$

△ Berilgan kasr ifodaning suratini va maxrajini alohida-alohida soddalashtiramiz:

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{2c}{ab}\right)(a+b+2c)=\frac{(b+a-2c)(a+b+2c)}{ab}=\frac{(a+b)^2-4c^2}{ab};$$

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{2}{ab}-\frac{4c^2}{a^2b^2}=\frac{b^2+a^2+2ab-4c^2}{a^2b^2}=\frac{(a+b)^2-4c^2}{a^2b^2}.$$

Endi surat va maxraj uchun topilgan ifodalarni bo‘lamiz:

$$P=\frac{(a+b)^2-4c^2}{ab}:\frac{(a+b)^2-4c^2}{a^2b^2}=\frac{(a+b)^2-4c^2}{ab}\cdot\frac{a^2b^2}{(a+b)^2-4c^2}=ab.$$ ▲

Hisoblang **(63–64)**:

63. $\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\left(1+\frac{1}{3^4}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{3^{32}}\right).$

64. $(1+a)(1+a^2)(1+a^4)\ldots(1+a^{32}).$

65. Ixtiyoriy natural son n da $\frac{n^3}{6}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{3}$ ifoda butun songa teng bo‘lishini isbotlang.

3-§. Kasrlarni umumiy maxrajga keltirish

Oddiy kasrlarni qo‘shish yoki ayirishda dastlab ularni umumiy maxrajga keltirib olinadi.

Jumladan, $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{7}{9}$ oddiy kasrlar uchun umumiy maxraj 90; $\frac{1}{3}, \frac{1}{12}, \frac{1}{18}$ oddiy kasrlar uchun umumiy maxraj 36 bo‘ladi. Birinchi misolda 2, 5, 9 maxrajlar o‘zaro tub, shuning uchun EKUK (2, 5, 9) = $= 2 \cdot 5 \cdot 9 = 90$ bo‘ladi. Ikkinchi misolda esa 3, 12, 18 maxrajlar o‘zaro tub emas.

Hisoblashlardan EKUK (3, 12, 18) = 36 ekani kelib chiqadi. Bu mulohazalar algebraik kasrlarni umumiy maxrajga keltirish jarayonida qo‘llaniladi.

Algebraik kasrlarning umumiy maxraji shu kasrlar maxrajlarining umumiy karralisidir.

Kasrlarni umumiy maxrajga keltirish uchun kasrning asosiy xossasidan foydalaniladi.

1-masala. $\frac{m}{2ab^2}, \frac{n}{3a^2b}$ va $\frac{p}{6ac}$ algebraik kasrni umumiy maxrajga keltiring.

△ Berilgan kasrning umumiy maxraji har bir kasrning maxrajiga bo‘linishi kerak. Avvalo u 2, 3, 6 ga bo‘linishi uchun EKUK(2, 3, 6)= = 6 ga, ab^2c esa ab^2, a^2b va ac ga bo‘linishi kerak. Demak, umumiy maxraj o‘rnida $6a^2b^2c$ ni olish mumkin. Bu umumiy maxrajni birinchi kasrning maxrajiga bo‘lib, natijani uning surat va maxrajiga ko‘paytiramiz, bu ko‘paytuvchi birhad bo‘ladi. U birinchi kasrning *qo‘shimcha ko‘paytuvchisi* deyiladi. Birinchi kasr uchun qo‘shimcha ko‘paytuvchi $3ac$ bo‘ladi, ikkinchi va uchinchi kasrlar uchun esa $2bc$ va ab^2 bo‘ladi. Shu jarayonni quyidagicha yozish mumkin:

$$\frac{{}^{3ac}/m}{2ab^2},\ \frac{{}^{2bc}/n}{3a^2b},\ \frac{{}^{ab^2}/p}{6ac}.$$

Kasrlarning surat va maxrajlarini mos qo‘shimcha ko‘paytuvchilarga ko‘paytirib, ularni $6a^2b^2c$ umumiy maxrajga keltiramiz:

$$\frac{m}{2ab^2}=\frac{3acm}{6a^2b^2c};\ \frac{n}{3a^2b}=\frac{2bcn}{6a^2b^2c};\ \frac{p}{6ac}=\frac{ab^2p}{6a^2b^2c}.$$

2- masala. Kasrlarni umumiy maxrajga keltiring:

$$\frac{a}{x^2-y^2};\ \frac{b}{2x^2+4xy+2y^2};\ \frac{c}{5x^2-10x+5y^2}.$$

Kasrlarning maxrajini ko‘paytuvchilarga ajratamiz:

$$x^2-y^2=(x-y)(x+y);\quad 2x^2+4xy+2y^2=2(x^2+2xy+y^2)=2(x+y)^2;$$
$$5x^2-10xy+5y^2=5(x^2-2xy+y^2)=5(x-y)^2.$$

Umumiy maxraj shunday ifodalarning ko‘paytmasidan iborat bo‘lishi kerakki, uning tarkibida $(x-y)(x+y)$, $2(x+y)^2$ va $5(x-y)^2$ ifodalar bo‘lishi lozim. Bundan umumiy maxraj $10(x-y)^2(x+y)^2$ ga teng bo‘lishi kelib chiqadi.

Endi berilgan kasrlarni quyidagicha yozib olish mumkin:

$$\frac{a}{x^2-y^2}=\frac{a\cdot 10(x-y)(x+y)}{10(x-y)^2\cdot(x+y)^2};\qquad \frac{b}{2x^2+4xy+2y^2}=\frac{b\cdot 5(x-y)^2}{10(x-y)^2\cdot(x+y)^2};$$

$$\frac{c}{5x^2-10x+5y^2}=\frac{2(x+y)^2\cdot c}{10(x-y)^2\cdot(x+y)^2}.$$ ▲

Shunday qilib, algebraik kasrni umumiy maxrajga keltirish uchun:

1) berilgan kasrlarning umumiy maxrajini topish;

2) har bir kasr uchun qo‘shimcha ko‘paytuvchini topish;

3) har bir kasrning suratini uning qo'shimcha ko'paytuvchisiga ko'paytirish;

4) har bir kasrni topilgan surat va umumiy maxraji bilan yozish kerak.

66. Savollarga javob bering. Topshiriqni bajaring:

1) Algebraik kasrlarni umumiy maxrajga keltirish uchun nimalar qilish kerak?

2) Kasrlarni umumiy maxrajga keltirishda muhim tushuncha – „qo'shimcha ko'paytuvchi" nima? U qanday topiladi? Misollar keltiring.

Misollar ko'raylik. Kasrlarni umumiy maxrajga keltiring:

1) $\frac{1}{3}$ va $\frac{3}{4}$. Umumiy maxraj 12. Shuning uchun $\frac{1\cdot4}{3\cdot4}$ va $\frac{3\cdot3}{4\cdot3}$, ya'ni $\frac{4}{12}$ va $\frac{9}{12}$;

2) $\frac{4}{7}$ va $\frac{5}{21}$. Umumiy maxraj 21. Shuning uchun $\frac{4\cdot3}{7\cdot3}$ va $\frac{5}{21}$, ya'ni $\frac{12}{21}$ va $\frac{5}{21}$;

3) $\frac{2m}{n}$ va $\frac{m}{2n}$. Umumiy maxraj $2n$. Shuning uchun $\frac{4m}{2n}$ va $\frac{m}{2n}$;

4) $\frac{x}{y}$ va $\frac{2x}{3y}$. Umumiy maxraj $3y$. Shuning uchun $\frac{3\cdot x}{3\cdot y}$ va $\frac{2x}{3y}$.

Kasrlarni umumiy maxrajga keltiring (**67 – 76**):

67. 1) $\frac{2}{3a}$, $\frac{7}{15b}$ va $\frac{8}{45ab}$; 2) $\frac{3}{a}$ va $\frac{4}{a^2}$.

68. 1) $2m$ va $\frac{n^2}{m}$; 2) $2m^2$ va $\frac{c}{3mn}$.

69. 1) $\frac{1}{3p^2}$, $\frac{1}{9pk}$ va $\frac{1}{4k^2}$; 2) $\frac{2b}{a^2}$, $\frac{5}{12a^2b}$ va $\frac{3}{16a^3b^4}$.

70. 1) $\frac{5a}{2a-3b}$ va $\frac{3b}{2a+3b}$; 2) $\frac{2c}{2c-5d}$ va $\frac{3d}{2c+5d}$.

71. 1) $\frac{2a}{16a^2-25}$ va $\frac{3a}{5-4a}$; 2) $\frac{5a}{27-8a^3}$ va $\frac{4a}{2a-3}$.

72. 1) $\frac{15x}{9x^2-4}$, $\frac{9x+2y}{9x^2+12x+4}$ va $\frac{2y-3x}{9x^2-12x+4}$;

2) $\frac{8b}{4b^2-12bc+9c^2}$, $\frac{2a}{3c-2b}$ va $\frac{1}{12a+12ab}$.

73. 1) $\frac{1}{4x^2-9y^2}$, $\frac{1}{4x^2y+12xy^2+9y^3}$ va $\frac{1}{3y-2x}$.

2) $\frac{2x}{8y^3-x^3}$, $\frac{3}{2x^2y-4xy}$ va $\frac{1}{2x^2y+4xy^2+4y^3}$.

74. 1) $\frac{1}{a-b}$, $\frac{1}{30a^2-30b^2}$ va $\frac{1}{5a+5b}$;

2) $\frac{1}{4a^2-9b^2}$, $\frac{1}{6ab-9b^2}$ va $\frac{1}{4a^2+6ab}$

75. 1) $\frac{1}{64a^3-27b^3}$, $\frac{1}{a(4a-3b)}$ va $\frac{1}{16a+12ab+9b^2}$;

2) $\frac{1}{a^2b+6ab^2+9b^3}$, $\frac{1}{b^2(a+3b)^3}$ va $\frac{1}{2ab+6b^2}$.

76. 1) $\frac{4c}{5a^3b^2}$, $\frac{3d}{10a^2b^2}$ va $\frac{2k}{15ab}$;

2) $\frac{2}{35a^4b^5}$, $\frac{3}{49a^5b^4}$ va $\frac{1}{28a^3b^6}$;

3) $\frac{1}{36-12a+a^2}$, $\frac{1}{36-a^2}$ va $\frac{1}{a+6}$;

4) $\frac{1}{27a^3-b^3}$, $\frac{1}{9a^2+3ab+b^2}$ va $\frac{1}{b-3a}$.

77. Savollarga javob bering. Topshiriqni bajaring:

1) Kasrlardan birortasining maxraji umumiy maxraj bo‘lib qolishi mumkinmi?
2) Umumiy maxraj berilgan barcha kasrlar maxrajlarining ko‘paytmasi bo‘lib qolishi mumkinmi?
3) Umumiy maxrajda kasrlar maxrajlaridagi harflar qanday darajada qatnashadi?
Har bir holat uchun 3 tadan misol tuzing.

4-§. Algebraik kasrlarni qo‘shish va ayirish

Oddiy kasrlarni bir xil maxrajli va turli maxrajli bo‘lgan hollarda qo‘shish va ayirish qoidalarini algebraik kasrlarni qo‘shish va ayirishga nisbatan ham aytish mumkin. Farqi shundaki, kasrlarning suratida va maxrajida ko‘phadlar turgan bo‘ladi. Bir xil maxrajli kasrlarni qo‘shish va ayirish qoidalarini bunday yozish mumkin:

$$\boxed{\frac{a}{k}+\frac{b}{k}=\frac{a+b}{k};} \qquad \boxed{\frac{a}{k}-\frac{b}{k}=\frac{a-b}{k}.}$$

1-masala. $\frac{a-b}{a+b}, \frac{a+3b}{a+b}, \frac{a-8b}{a+b}$ kasrlarni qo‘shing.

△ $\frac{a-b}{a+b}+\frac{a+3b}{a+b}+\frac{a-8b}{a+b}=\frac{a-b+a+3b+a-8b}{a+b}=\frac{3a-6b}{a+b}=\frac{a\,(a-2b)}{a+b}.$ ▲

2-masala. $\frac{a^2}{a+2b}$ va $\frac{4b^2}{a+2b}$ kasrlarning ayirmasini toping.

△ $\frac{a^2}{a+2b}-\frac{4b^2}{a+2b}=\frac{a^2-4b^2}{a+2b}=\frac{(a+2b)\,(a-2b)}{a+2b}=a-2b.$ ▲

Har xil maxrajli algebraik kasrlarni qo‘shish va ayirish uchun shu kasrlarni umumiy maxrajga keltirish va bir xil maxrajli kasrlarni qo‘shish yoki ayirish qoidasini qo‘llash kerak.

3-masala. $\frac{2}{a^3}$, $\frac{1}{2ab^2}$ va $\frac{3}{4a^2b}$ kasrlarni qo‘shing.

△ Berilgan kasrlarning umumiy maxraji $4a^3b^3$ ko‘paytma bo‘ladi.

$$\frac{2}{a^3}+\frac{1}{2ab^2}+\frac{3}{4a^2b}=\frac{2\cdot 4b^3+2a^2b+ab^2}{4a^3b^3}=\frac{8b^3+2a^2b+ab^2}{4a^3b^3}=\frac{8b^2+2a^2+ab}{4a^3b^2}.$$ ▲

4-masala. $\frac{b}{2a^2c}$ va $\frac{c}{8ab^2}$ kasrlar ayirmasini toping.

△ $\frac{b}{2a^2c}-\frac{c}{8ab^2}=\frac{{}^{4b^2}b}{2a^2c}-\frac{{}^{ac/}c}{8ab^2}=\frac{4b^3-ac^2}{8a^2b^2c}.$ ▲

Bu misolda qo‘shimcha ko‘paytuvchilar, mos ravishda, $4b^2$ va ac bo‘ladi.

5-masala. $\frac{2}{x^2-x}$ va $\frac{3}{x^2-1}$ kasrlarni qo‘shing.

△ Avvalo kasrlarning maxrajlarida turgan ko‘phadlarni ko‘paytuvchilarga ajratamiz:

$$x^2-x=x(x-1); \quad x^2-1=(x-1)(x+1).$$

Berilgan kasrlarning umumiy maxraji $x(x-1)(x+1)$ ko'paytma bo'ladi. Kasrlarni umumiy maxrajga keltirib, qo'shishni bajaramiz:

$$\frac{2}{x^2-x}+\frac{3}{x^2-1}=\frac{2}{x(x-1)}+\frac{3}{(x-1)(x+1)}=\frac{2(x+1)}{x(x-1)(x+1)}+\frac{3x}{x(x-1)(x+1)}=$$

$$=\frac{2(x+1)+3x}{x(x-1)(x+1)}=\frac{2x+2+3x}{x(x-1)(x+1)}=\frac{5x+2}{x(x-1)(x+1)}. \blacktriangle$$

Shunday qilib, turli maxrajli kasrlarni qo'shish va ayirishni ushbu tartibda bajarish lozim:
1) kasrlarning umumiy maxraji topiladi;
2) kasrlar umumiy maxrajga keltiriladi;
3) hosil bo'lgan kasrlar qo'shiladi;
4) mumkin bo'lsa, natija soddalashtiriladi.

6- masala. $\frac{3}{(m+3)^2}+\frac{4}{m^2(m^2+6m+9)}-\frac{3}{m(m+3)}$ ifodaning qiymatini $m=\frac{1}{3}$ bo'lganda hisoblang.

$\triangle$ Berilgan ifodani quyidagicha almashtirish mumkin:

$$\frac{3}{(m+3)^2}+\frac{4}{m^2(m^2+6m+9)}-\frac{3}{m(m+3)}=\frac{3}{(m+3)^2}+\frac{4}{m^2(m+3)^2}-\frac{3}{m(m+3)}=$$

$$=\frac{3m^2+4-3m^2-9m}{m^2(m+3)^2}=\frac{4-9m}{m^2(m+3)^2}.$$

Endi ifodaning son qiymatini topamiz: $\frac{4-9\cdot\frac{1}{3}}{\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}+3\right)^2}=\frac{4-3}{\frac{1}{9}\cdot\frac{10^2}{9}}=\frac{9\cdot 9}{10^2}=\frac{81}{100}.$ $\blacktriangle$

78. Savolga javob bering. Topshiriqni bajaring:

1) Algebraik kasrlarni qo'shish va ayirish amallarini qanday tartibda bajarish lozim?
2) Qo'shish va ayirish qoidalarini misollarda tushuntirib bering.

Kasrlarning yig'indisini (ayirmasini) toping **(79–88)**:

79. 1) $\frac{2a}{b^2}+\frac{3a}{b^2}$; 2) $\frac{4m}{3n^2}-\frac{2m}{3n^2}$; 3) $\frac{a}{a-b}+\frac{c}{a-b}$; 4) $\frac{x}{m+n}-\frac{y}{m+n}$.

80. 1) $\frac{c+d}{3a}+\frac{2c-d}{3a}$; 2) $\frac{m+2b}{2a^2}+\frac{5m-b}{2a^2}$; 3) $\frac{m+n}{2a}-\frac{m-n}{2a}$.

81. 1) $\frac{(a+1)^2}{4d}+\frac{(a-1)^2}{4d}$; 2) $\frac{(a+2)^2}{a^2b}-\frac{(2-a)^2}{a^2b}$.

82. 1) $\frac{8}{11}+\frac{3}{7}$; 2) $\frac{9}{11}-\frac{3}{7}$; 3) $\frac{3}{4a}+\frac{1}{a}$; 4) $\frac{c}{12a}+\frac{d}{4}$.

83. 1) $\frac{2}{b}-\frac{3}{7b}$; 2) $\frac{a}{5}-\frac{b}{15d}$; 3) $\frac{4}{a}+\frac{b}{5}$; 4) $11+\frac{3}{a}$.

84. 1) $7-\frac{1}{a}+\frac{3}{a^2}$; 2) $4+\frac{2}{c}-\frac{4}{c^2}$; 3) $b+\frac{c}{d}-\frac{c^2}{d^2}$; 4) $\frac{a}{b}-k+\frac{a^2}{b^2}$.

85. 1) $\frac{1}{ab}-\frac{1}{bc}$; 2) $\frac{1}{mn}+\frac{1}{mk}$; 3) $\frac{a}{bc}+\frac{a}{bd}$; 4) $\frac{4}{m^2}-\frac{5}{mn}$.

86. 1) $\frac{2a}{7b^4d}+\frac{5c}{2bd^3}$; 2) $\frac{2a}{5b^4}-\frac{6c}{7a^3b}$;

3) $\frac{3}{3y^3}+\frac{1}{6x^2y}-\frac{5}{12xy^2}$; 4) $\frac{3}{8x^2y}-\frac{3}{5xy^2}+\frac{13}{14x^2y^2}$.

87. 1) $\frac{a}{c^2}+\frac{b}{a^2}+\frac{c}{b^2}$; 2) $\frac{a}{c}+\frac{a}{c^2d}+\frac{a}{cd^2}$; 3) $\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}$; 4) $\frac{b}{c}-\frac{b}{cd^2}+\frac{b}{c^2d}$.

88. 1) $\frac{m}{p^2}+\frac{n}{q^2}+\frac{k}{n^2}$; 2) $\frac{a}{p}-\frac{b}{q}+\frac{c}{k}$; 3) $\frac{m}{p^2}+\frac{m}{pd}+\frac{m}{pd^2}$; 4) $\frac{a}{bc}-\frac{a}{cd}+\frac{ma}{bd}$.

Algebraik kasrlarni qo'shing va ayiring **(89–95)**:

89. 1) $\frac{x}{2(a-b)}+\frac{3x}{a-b}$; 2) $\frac{5x}{3(x-1)}-\frac{x}{x-1}$.

90. 1) $\frac{5}{x-1}+\frac{3}{2x-2}$; 2) $\frac{a}{2a+2b}-\frac{2a}{4a+4b}$.

91. 1) $\frac{2}{a^2+a}+\frac{a}{ab+b}$; 2) $\frac{a+y}{b^2+ab}-\frac{y-b}{ab+a^2}$.

92. 1) $\frac{2}{x}-\frac{3}{x+y}$; 2) $\frac{5}{a-1}-\frac{4}{a}$; 3) $\frac{1}{x(x+3)}-\frac{1}{x(x-3)}$; 4) $\frac{3}{5(a+b)}-\frac{1}{8(a-b)}$.

93. 1) $\frac{a}{1+b}+\frac{b}{1-b^2}$; 2) $\frac{3}{x+3}+\frac{2}{x^2-9}$; 3) $\frac{5+p^2}{6+p}-\frac{p}{p^2-36}$; 4) $\frac{2x}{x+4}-\frac{5x-2}{x^2-16}$.

94. 1) $\frac{2x}{x+4}+\frac{5x-2}{x^2-16}$; 2) $\frac{c^2-8}{2c-3}+\frac{16c-2c^3}{9-4c^2}$; 3) $\frac{12n+5}{n^2-49}-\frac{6}{7-n}$; 4) $\frac{21y^2+1}{1-9y^2}-\frac{1}{1-3y}$.

95. 1) $\frac{2y+8}{y^2+4y+4}-\frac{7}{y+2}$; 2) $\frac{4}{(m+n)^2}-\frac{7}{n+m}$; 3) $\frac{4+5x}{1+6x+9x^2}-\frac{2}{3x+1}$.

Amallarni bajaring (**96–107**):

96. 1) $\frac{10b-1}{12b^2-3}+\frac{2b+2}{4b+2}-\frac{2b+1}{2b-1}$; 2) $\frac{18a}{81a^2-1}+\frac{9a+1}{3-27a}+\frac{9a-1}{18a+2}$.

97. 1) $\frac{x^3}{2(x+1)^3}-\frac{x^2}{(x+1)^2}+\frac{x}{2(x+1)}$; 2) $\frac{2}{2x+3}+\frac{3}{3-2x}+\frac{2x+15}{4x^2-9}$.

98. 1) $\frac{1}{3a-2}+\frac{3}{3a+2}+\frac{6a}{(3a+2)^2}$; 2) $\frac{2}{4a-3}+\frac{3}{4a+3}-\frac{16a-6}{16a^2-9}$.

99. 1) $\frac{a+2b}{3a-3b}+\frac{3c-a}{2c-2a}-\frac{a^2-bc}{ab+ac-bc-a^2}$; 2) $\frac{x+2}{x^3-3x^2-4x+12}-\frac{3-x}{x^2-5x+6}$.

100. 1) $\frac{2}{a+4}-\frac{a-3}{a^2-4a+16}-\frac{a^2-9a}{a^3+64}$; 2) $\frac{1}{2a-3b}-\frac{2a+3b}{4a^2+6ab+9b^2}-\frac{6ab}{8a^3-27b^3}$.

101. 1) $\frac{1}{a^2-7a+12}+\frac{2a-1}{a^2-4a+3}-\frac{2a-5}{\left(a^2-5a+4\right)(a-3)}$; 2) $\frac{4}{2a+3b}+\frac{5}{2a-3b}-\frac{30b}{4a^2-9b^2}$.

102. 1) $\frac{a^2-(b-c)^2}{(a+b)^2-b^2}+\frac{b^2-(a-c)^2}{(a+b)^2-c^2}+\frac{c^2-(a-b)^2}{(b+c)^2-a^2}$;

2) $\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-a)(b-c)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}$.

103. $\frac{18a}{81a^2-1}+\frac{9a+1}{3-27a}+\frac{9a-1}{18a+2}$.

104. 1) $\frac{3a+2}{9a^2-6a+4}-\frac{18a}{27a^3+8}-\frac{1}{3a+2}$; 2) $\frac{m^2-mn}{m^2n+n^3}-\frac{2m^2}{n^3-mn^2+m^2n-m^3}$.

105. 1) $\frac{7}{2a+3b}+\frac{8}{2a-3b}-\frac{48b}{4a^2-9b^2}$; 2) $\frac{6}{3a-2b}+\frac{5}{3a+2b}-\frac{30a}{9a^2-4b^2}$.

106. 1) $\frac{5}{3x-5}-\frac{50}{9x^2-25}-\frac{4}{3x-5}$; 2) $\frac{7}{3x-4}-\frac{6}{3x+4}-\frac{48}{9x^2-16}$.

107. 1) $4x^2-\frac{8x^3+27y^3}{2x-3y}-9y^2$; 2) $\frac{2x^2-8x+8}{x^4-4x^3+16x-16}-\frac{x}{x^2-4}$.

108. Hovuzni bir quvur a soatda, ikkinchi quvur esa b soatda to‘ldiradi. Agar ikkala quvur bir vaqtda ochib qo‘yilsa, hovuz necha soatda to‘ladi?

109. Ikkita ishchi birgalikda ishlab vazifani a soatda bajardi. Birinchi ishchi ayni shu vazifani bir o‘zi ishlab k soatda bajardi. Ikkinchi ishchining bir o‘zi shu vazifani necha soatda bajardi?

110. $\frac{a-ab+c-cb}{1-3b+3b^2-b^3}$ ifodani soddalashtiring va uning $a=\frac{3}{4}$, $b=\frac{1}{2}$, $c=-\frac{1}{4}$ bo'lgandagi son qiymatini toping.

111. $\frac{a-ab+c-cb}{1-3b+3b^2-b^3}$ ifodani soddalashtiring va uning $x=\frac{1}{2}$, $y=-\frac{1}{3}$, $c=-\frac{1}{4}$ bo'lgandagi son qiymatini toping.

112. $\frac{72a^2}{27a^3-1}+\frac{3a+1}{9a^2+3a+1}$ ifodani soddalashtiring va uning $a-2$ bo'lgandagi son qiymatini toping.

Tenglikning to'g'riligini ko'rsating **(113–114)**:

113. 1) $\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\ldots+\frac{1}{(a+2012)(a+2013)}=\frac{2013}{a(a+2013)}$;

2) $\frac{a^3(c-b)+b^3(a-c)+c^3(b-a)}{a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)}=a+b+c.$

114. 1) $\frac{a^2-bc}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^2-ac}{(b+c)(a+b)}+\frac{c^2-ab}{(a+c)(b+c)}=0$;

2) $a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)=(a-b)(b-c)(c-a).$

Kasrlarni umumiy maxrajga keltiring **(115–126)**:

115. 1) $\frac{3}{4a}, \frac{5}{8b}$ va $\frac{7}{72ab}$; 2) $\frac{3x}{4y}, \frac{2}{xy}$ va $\frac{2y}{3x}$.

116. 1) $3a$ va $\frac{b^2}{2a}$; 2) $2a$ va $\frac{a^2}{4b}$.

117. 1) $\frac{1}{4p^2}, \frac{1}{12pk}$ va $\frac{1}{3k^2}$; 2) $\frac{1}{3b^2}, \frac{a^2+b^2}{4a^2b^2}$ va $\frac{b-3}{12ab^2}$.

118. 1) $\frac{3a}{a-2b}$ va $\frac{4b}{a+2b}$; 2) $\frac{5x}{2x-y}$ va $\frac{4y}{2x+y}$.

119. 1) $\frac{a}{4a^2-9}$ va $\frac{a}{3-2a}$; 2) $\frac{a}{64-27a^3}$ va $\frac{a}{4-3a}$.

120. $\frac{7x}{4x^2-9}, \frac{3x+4y}{4x^2+12x+9}$ va $\frac{3y-4x}{4x^2-12x+9}$.

121. $\frac{4}{9x^2-4y^2}$, $\frac{1}{9x^2-12xy-4y^2}$ va $\frac{1}{3x-2y}$.

122. 1) $\frac{1}{a+b}$, $\frac{1}{8a^2-8b^2}$ va $\frac{1}{a+b}$; 2) $\frac{a}{(2a+3b)^2}$, $\frac{1}{3(2a+3b)^2}$ va $\frac{b}{2(2a-3b)}$.

123. $\frac{1}{64b^3+27a^3}$, $\frac{1}{b(4b+3a)}$ va $\frac{1}{16b^2+12ab+9a^2}$.

124. 1) $\frac{3c}{8a^2b^3}$, $\frac{4d}{16a^2b^2}$ va $\frac{2k}{24ab}$; 2) $\frac{4}{24a^4b^5}$, $\frac{3}{35a^5b^4}$ va $\frac{1}{14a^3b^6}$.

125. 1) $\frac{a}{4a^2-b^2}$, $\frac{b}{2a+b}$ va $\frac{1}{2a-b}$; 2) $\frac{m+n}{(m+n)^2-p^2}$, $\frac{m-n}{m+n+p}$ va $\frac{1}{m+n-p}$.

126. 1) $\frac{a}{a+b}$, $\frac{b}{4(a-b)}$ va $\frac{ab}{3(a^2-b^2)}$; 2) $\frac{4}{5-5x}$, $\frac{5x}{1-x^2}$ va $\frac{1}{4x^2+4x}$.

Bir xil maxrajli kasrlarning yig'indisini (ayirmasini) toping **(127–128)**:

127. 1) $\frac{3a}{b^2}+\frac{b-3a}{b^2}$; 2) $\frac{3m}{2n^2}+\frac{2m}{2n^2}$; 3) $\frac{a}{a-b}+\frac{b}{a-b}$; 4) $\frac{2a}{m+n}-\frac{a}{m+n}$.

128. 1) $\frac{2c-3d}{3x}+\frac{c+3d}{3x}$; 2) $\frac{2m+b}{2a^2}+\frac{4m-2b}{2a^2}$; 3) $\frac{a+b}{2x}-\frac{a-b}{2x}$; 4) $\frac{6a-b}{n^3}-\frac{5a-b}{n^3}$.

Turli maxrajli kasrlarning yig'indisini (ayirmasini) toping **(129–133)**:

129. 1) $\frac{7}{9}+\frac{7}{2}$; 2) $\frac{7}{11}+\frac{2}{7}$; 3) $\frac{2}{3a}+\frac{1}{a}$; 4) $\frac{c}{6a}+\frac{d}{2a}$.

130. 1) $\frac{3}{b}-\frac{2}{9b}$; 2) $\frac{a}{3}-\frac{b}{9d}$; 3) $\frac{3}{a}+\frac{b}{4}$; 4) $8+\frac{2}{a}$.

131. 1) $5-\frac{1}{m}+\frac{2}{m^2}$; 2) $4+\frac{1}{c}-\frac{2}{c^2}$; 3) $b+\frac{2c}{d}-\frac{3c^2}{d^2}$; 4) $\frac{a}{b}-k+\frac{2a^2}{b^2}$.

132. 1) $\frac{3a}{4b^3d}+\frac{6c}{5bd^3}$; 2) $\frac{3a}{4b^4}-\frac{5cb}{7a^3}$.

133. 1) $\frac{2a}{p^2}+\frac{3b}{q^2}+\frac{k}{r^2}$; 2) $\frac{a}{p}+\frac{2b}{q}+\frac{c}{2k}$.

Algebraik kasrlarni qo'shing va ayiring **(134–136)**:

134. 1) $\frac{2x}{3(a+b)}+\frac{x}{a+b}$; 2) $\frac{x}{2(x-1)}-\frac{4x}{x-1}$; 3) $\frac{a^2}{a-1}+\frac{4a^2}{5(a-1)}$; 4) $\frac{2x}{3(y-3)}+\frac{3x}{2(y-3)}$.

135. 1) $\frac{3}{x-1}+\frac{4}{3x-3}$; 2) $\frac{a}{a+b}-\frac{2a}{3a+3b}$; 3) $\frac{4}{3b+3}+\frac{5}{6b+6}$; 4) $\frac{3x}{2x+3y}-\frac{5x}{4x+4y}$.

136. 1) $\frac{3}{a^2+a}+\frac{b}{ab+b}$; 2) $\frac{3}{ax+by}+\frac{2a}{bx+by}$; 3) $\frac{b+x}{b^2+ab}-\frac{x-a}{ab+a^2}$; 4) $\frac{x+b}{a^2-ab}-\frac{x+a}{ab-a^2}$.

Amallarni bajaring **(137–141)**:

137. 1) $\frac{7b}{2b-3}+\frac{b+1}{2b+1}-\frac{2b+1}{2b-1}$; 2) $\frac{1}{a^2-81}+\frac{9a+1}{27-3a}+\frac{9a-1}{18a+2}$.

138. 1) $\frac{3}{a+3}-\frac{a-2}{a^2-6a+9}-\frac{a^2-9a}{a^3+27}$; 2) $\frac{1}{3a+2b}-\frac{1}{9a^2+6ab+4b^2}-\frac{6ab}{27a^3-8b^3}$.

139. 1) $\frac{a^2-(b+c)^2}{(a-c)^2-b^2}+\frac{b^2+(a-c)^2}{(a-b)^2-c^2}+\frac{c^2-(a+b)^2}{(b-c)^2-a^2}$;

2) $\frac{1}{(a+b)(a+c)}+\frac{1}{(b+a)(b+c)}+\frac{1}{(c+a)(c+b)}$.

140. 1) $\frac{8}{2a-3b}+\frac{5}{2a+3b}-\frac{48b}{4a^2-9b^2}$; 2) $\frac{7}{4a-3b}+\frac{6}{4a+3b}-\frac{40a}{16a^2-9b^2}$.

141. 1) $\frac{1}{4x-3}-\frac{6}{16x^2-9}-\frac{1}{4x+3}$; 2) $\frac{7}{3x-4}-\frac{6}{3x+4}-\frac{3x}{9x^2-16}$.

142. Bir ishni usta 6 soatda, shogirdi esa o'sha ishni 8 soatda bajaradi. Agar ular birgalikda ishlasa, ishni necha soatda bajaradilar?

143. Ikkita ishchi birgalikda ishlab vazifani 8 soatda bajaradi. Birinchi ishchi ayni shu vazifani bir o'zi ishlab 10 soatda bajaradi. Ikkinchi ishchining bir o'zi shu vazifani necha soatda bajaradi?

144. $\frac{3a^2}{8a^3-1}+\frac{2a+1}{4a^2+2a+1}$ ifodani soddalashtiring va uning $a=2$ bo'lgandagi son qiymatini toping.

145. $\frac{a+ab+c+cb}{1+3b+3b^2+b^3}$ ifodani soddalashtiring va uning $a=\frac{3}{4}, b=\frac{1}{2},\ c=-\frac{1}{4}$ bo'lgandagi son qiymatini toping.

5-§. Algebraik kasrlarni ko‘paytirish va bo‘lish

Algebraik kasrlarni ko‘paytirish va bo‘lish ham oddiy kasrlarni ko‘paytirish va bo‘lish qoidalari bo‘yicha bajariladi:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd};\quad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}.$$

Bir nechta masala ko‘ramiz.

1-masala. Kasrlarni ko‘paytiring: $\frac{2}{3xy}$, $\frac{6x^3y^2}{5z}$, $\frac{15z^2}{3x^3}$.

$$\triangle\quad \frac{2}{3xy}\cdot\frac{6x^3y^2}{5z}\cdot\frac{15z^2}{3x^3}=\frac{2\cdot 6x^3y^2\cdot 15z^2}{3xy\cdot 5z\cdot 3x^3}=\frac{4yz}{x}.\quad \blacktriangle$$

2-masala. Kasrlarni ko‘paytiring: $\frac{a+b}{a^2-ab}$; $\frac{b^2-ab}{(a+b)^2}$.

$$\triangle\quad \frac{a+b}{a^2-ab}\cdot\frac{b^2-ab}{(a+b)^2}=\frac{(a+b)\cdot(b^2-ab)}{(a^2-ab)\cdot(a+b)^2}=\frac{(a+b)\cdot b\cdot(b-a)}{a\cdot(a-b)\cdot(a+b)^2}=-\frac{b\cdot(a-b)}{a\cdot(a-b)\cdot(a+b)}=-\frac{b}{a(a+b)}.\quad \blacktriangle$$

3-masala. $\frac{a-b}{4a^2b^3}$ va $\frac{a^2-b^2}{12ab^2}$ kasrlarni bo‘ling.

△ Kasrlarni bo‘lish deyilganda birinchi kasrni ikkinchi kasrga bo‘lish tushuniladi. Berilishi bo‘yicha $\frac{a-b}{4a^2b^3}$ – birinchi, $\frac{a^2-b^2}{12ab^2}$ – ikkinchi kasr. Endi bo‘lishni bajaramiz:

$$\frac{a-b}{4a^2b^3}:\frac{a^2-b^2}{12ab^2}=\frac{(a-b)\cdot 12ab^2}{4\cdot a^2b^3(a^2-b^2)}=\frac{3ab^2\cdot(a-b)}{a^2b^3\cdot(a+b)(a-b)}=\frac{3}{ab\cdot(a+b)}.\quad \blacktriangle$$

Agar birinchi va ikkinchi ko‘paytiruvchi bir xil bo‘lsa, u holda ko‘paytirishni bajarish uchun birinchi ko‘paytiruvchini kvadratga oshirish yetarli bo‘ladi.

Masalan: $a^3\cdot a^3-(a^3)^2-a^6$; $\quad (a+b)(a+b)-(a+b)^2$.

Agar bo‘linuvchi va bo‘luvchi bir xil darajada bo‘lsa, ularning nisbatini shu darajaga ko‘tarib qo‘yish mumkin.

Algebraik kasrni darajaga ko‘tarishda ushbu formuladan foydalaniladi:

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}.}$$

Masalan: $\left(\frac{4a^3}{b^2}\right)^2=\frac{16a^6}{b^4}$; $\quad \left(\frac{a+b}{5c}\right)^4=\frac{(a+b)^4}{625c^4}$.

146. Topshiriqlarni bajaring:

1) Kasrlarni ko‘paytirish va bo‘lish qoidalarini aytib bering.
2) Kasrlarni darajaga ko‘tarish formulasini yozing.

Kasrlarni ko‘paytiring **(147–152)**:

147. 1) $\frac{95}{16}\cdot\frac{64}{19}$; 2) $\frac{169}{121}\cdot\frac{11}{26}$; 3) $\frac{144}{24}\cdot\frac{49}{14}$; 4) $25\cdot\frac{6}{125}$.

148. 1) $\frac{5}{52}\cdot 13$; 2) $17\cdot\frac{3}{68}$; 3) $\frac{8}{25}\cdot 625$; 4) $729\cdot\frac{3}{27}$.

149. 1) $\frac{ab^3}{c}\cdot\frac{c^2}{b^4}$; 2) $\frac{m^2b}{k^2}\cdot\frac{k^3}{m^3b^2}$; 3) $\frac{3a}{4b}\cdot\frac{12c}{a}$; 4) $\frac{4m}{9n}\cdot\frac{36k}{20d}$.

150. 1) $\left(\frac{3a}{4b}\right)^2\cdot\frac{8b^2}{27a^3}$; 2) $\left(\frac{3a^2}{2b}\right)^3\cdot\frac{8b^3}{21a^4}$; 3) $\left(\frac{ak}{bc}\right)^3\cdot abc$; 4) $a^2\cdot b\cdot c^2\left(\frac{ab}{cd}\right)^2$.

151. 1) $\frac{4a^2b}{3c}\cdot\frac{27c^3}{5a^3b}$; 2) $\frac{4x^2y}{5ab^2}\cdot 5a^2b^2$; 3) $\frac{3-x}{a-b}\cdot\frac{a-b}{3-x}$; 4) $\frac{x+y}{4a}\cdot\frac{2b}{x+y}$.

152. 1) $\frac{a-1}{b}\cdot\frac{4b^2}{a^2-1}$; 2) $\frac{1+a}{4b^2}\cdot\frac{b^3}{1-a^2}$; 3) $\frac{a^2-b^2}{9b^2}\cdot\frac{3b}{a+b}$; 4) $\frac{5m}{m^2-n^2}\cdot\frac{m+n}{20m^3}$.

Kasrlarni bo‘ling **(153–156)**:

153. 1) $\frac{3}{4}:\frac{3}{5}$; 2) $\frac{7}{11}:\frac{2}{11}$; 3) $\frac{10}{9}:\frac{1}{3}$; 4) $\frac{15}{13}:\frac{30}{39}$.

154. 1) $\frac{a}{7}:\frac{1}{3}$; 2) $\frac{5}{c}:\frac{m}{13}$; 3) $\frac{a}{2}:\frac{5}{6}$; 4) $\frac{8}{35}:\frac{b}{14}$.

155. 1) $\frac{a}{b}:\frac{a}{b}$; 2) $\frac{2a}{5b}:\frac{a}{3b}$; 3) $\frac{3a}{2b}:\frac{6a^2}{bc}$; 4) $\frac{5m}{n^2}:\frac{15m^2}{n}$.

156. 1) $\frac{ab^2}{c^2}:\frac{a^2}{c}$; 2) $\frac{mn}{k}:\frac{m^3n^3}{k^3}$; 3) $\frac{3a}{4b}:\frac{9c}{20b}$; 4) $\frac{8m}{9n}:\frac{4k}{18d}$.

Ko‘rsatilgan amallarni bajaring **(157–165)**:

157. 1) $\frac{3bc}{5a^2b}\cdot\frac{10a^3b^2}{9c^2}$; 2) $\frac{6x}{7xy}\cdot\frac{14x^2}{18xy}$; 3) $\frac{35xy}{8y^2}\cdot\frac{16x^2y^3}{21x^4y}$; 4) $\frac{4ab^2}{9b^3}\cdot\frac{45a^4b^3}{32a^5b}$.

158. 1) $\frac{3-6x}{2x^2+4x+8}\cdot\frac{2x+1}{x^2+4x+4}\cdot\frac{8-x^3}{4x^2-1}$; 2) $\frac{a^2+ab}{5a-a^2+b^2-5b}\cdot\frac{a^2-b^2+25-10a}{a^2-b^2}$.

159. 1) $\dfrac{28a^2b}{33x^2y^3}:\dfrac{14ab^2}{11x^4y^4}$; 2) $\dfrac{45cd^2}{27ab^3}:\dfrac{15c^2d}{18a^2b^2}$.

160. 1) $\dfrac{27a^3-64b^3}{b^2-4}:\dfrac{9a^2+12ab+16b^2}{b^2+4b+4}$; 2) $\dfrac{2a^2+6ac-ab-3bc}{2ab-4a^2+bc-2ac}:\dfrac{2ac+ab+3bc+6c^2}{2ab+bc-4ac-2c^2}$.

161. 1) $\dfrac{8ab}{a^2-4b^2}:\left(\dfrac{a+2b}{a-2b}+1\right)$; 2) $\left(\dfrac{3a+1}{3a-1}-\dfrac{1}{9a^2-1}\right)\cdot\dfrac{3a+1}{3a+1}$.

162. 1) $\dfrac{36a^2-1}{a^2-25}\cdot\dfrac{(a+b)^2}{a^2-25}:\dfrac{6a+1}{(a-5)^2}$; 2) $\dfrac{3ab-4b-9a+12}{9a+12-3ab-4b}:\dfrac{9a-12-3ab+4b}{3ab+4b-9a-12}$.

163. 1) $\left(\dfrac{2-3a}{2+3a}-\dfrac{3a+2}{3a-2}\right):\left(\dfrac{2+3a}{2-3a}+\dfrac{3a-2}{3a+2}\right)$;

2) $\left(\dfrac{2x+3y}{2x-3y}-\dfrac{2x-3y}{2x+3y}\right):\left(\dfrac{2x-3y}{2x+3y}+\dfrac{2x+3y}{2x-3y}\right)$.

164. 1) $\dfrac{x^2}{x^2-1}+\dfrac{1}{x+1}:\left(\dfrac{1}{2-x}+\dfrac{2}{x^2-2x}\right)$, bunda $x-1{,}7$;

2) $\dfrac{a^3b+2a^2b-3ab}{a^3+5a^2+6a}:\dfrac{a^2-1}{a^2+3a+2}$, bunda $a=19{,}8$; $b=23{,}05$.

165. 1) $\dfrac{5a}{3(4-a)}+\dfrac{a+4}{8-3a}\cdot\left(\dfrac{a-1}{a+4}-\dfrac{a-3}{a-4}\right)$, bunda $a-2{,}8$;

2) $\dfrac{9a^2-24ab+16b^2-25}{3a-4b-5}$, bunda $a=\dfrac{1}{9}$, $b=2\dfrac{1}{3}$.

166. n ning qanday butun qiymatlarida $\dfrac{4n-5}{2n-1}$ kasr natural son bo‘ladi?

167. n ning qanday butun qiymatlarida $\dfrac{2n^2-n+1}{n+1}$ kasr butun son bo‘ladi?

168. n ning qanday butun qiymatlarida $\dfrac{n^2-7n+6}{n^2-1}$ kasr butun son bo‘ladi?

Amallarni bajaring (**169–170**):

169. 1) $\dfrac{3a-5}{16+24a+9a^2}\cdot\dfrac{(3a+4)^2}{9a^2-25}$; 2) $\dfrac{16x^2y^2-49}{16x^2y^2+8axy+a^2}\cdot\dfrac{4xy+a}{4xy-7}$.

170. 1) $\dfrac{1-4a^2}{(1+2ax)^2-(2a+x)^2}\cdot\dfrac{x+x^2}{1-x}$; 2) $\dfrac{3x^2+3xy}{4xy+6ay}\cdot\left(\dfrac{x}{ax+ay}+\dfrac{3}{2x+2y}\right)$.

Kasrlarni ko'paytiring (**171–176**):

171. 1) $\frac{102}{21}\cdot\frac{49}{17}$; 2) $\frac{144}{36}\cdot\frac{39}{13}$; 3) $\frac{225}{45}\cdot\frac{32}{256}$; 4) $\frac{441}{21}\cdot\frac{625}{25}$.

172. 1) $\frac{7}{65}\cdot 13$; 2) $16\cdot\frac{3}{96}$; 3) $\frac{7}{125}\cdot 625$; 4) $961\cdot\frac{5}{31}$.

173. 1) $\frac{a^2b^3}{c^2}\cdot\frac{c}{ab^2}$; 2) $\frac{m^3b^2}{k^3}\cdot\frac{k^2}{m^2b}$; 3) $\frac{a}{12b}\cdot\frac{9c}{4a}$; 4) $\frac{20m}{36k}\cdot\frac{9k}{4m}$.

174. 1) $\left(\frac{4a}{3b}\right)^2\cdot\frac{27b^2}{8a^3}$; 2) $\left(\frac{2a^2}{3b}\right)\cdot\frac{21b^3}{8a^4}$; 3) $\left(\frac{a^2k}{bc^2}\right)\cdot abc$; 4) $ab^2c^2\left(\frac{d}{abc}\right)^2$.

175. 1) $\frac{5a^3b}{27c^3}\cdot\frac{3c}{4a^2b}$; 2) $\frac{4xy^2}{5a^2b}\cdot 10ab^2$; 3) $\frac{x-2}{a-b}\cdot\frac{9b^2}{a^2-b^2}$; 4) $\frac{m^2-n^2}{4m}\cdot\frac{16m^3}{m+n}$.

176. 1) $\frac{a^2-1}{4b^2}\cdot\frac{b}{a-1}$; 2) $\frac{1-a^2}{a+1}\cdot\frac{4b^2}{b^3}$; 3) $\frac{a+b}{3b}\cdot\frac{9b^2}{a^2-b^2}$; 4) $\frac{m^2-n^2}{4m}\cdot\frac{16m^3}{m+n}$.

Kasrlarni bo'ling (**177–180**):

177. 1) $\frac{4}{3}:\frac{5}{3}$; 2) $\frac{11}{7}:\frac{11}{2}$; 3) $\frac{9}{10}:\frac{2}{5}$; 4) $\frac{14}{13}:\frac{28}{39}$.

178. 1) $\frac{7}{a}:\frac{3}{a}$; 2) $\frac{13}{c}:\frac{m}{11}$; 3) $\frac{a}{3}:\frac{5}{6}$; 4) $\frac{4}{35}:\frac{b}{12}$.

179. 1) $\frac{b}{a}:\frac{b}{a}$; 2) $\frac{3a}{4b}:\frac{a}{3b}$; 3) $\frac{3a}{4b}:\frac{6a}{bc}$; 4) $\frac{4m}{3n^2}:\frac{12m^3}{n}$.

180. 1) $\frac{a^2b}{c}:\frac{a}{c^2}$; 2) $\frac{m^3n^3}{k^3}:\frac{mn}{k}$; 3) $\frac{9c}{16b}:\frac{3a}{24b}$; 4) $\frac{5k}{18d}:\frac{8m}{9n}$.

Ko'rsatilgan amallarni bajaring (**181–182**):

181. 1) $\frac{a^2-2ab+b^2}{a^2-ab+b^2}:\frac{8a-8b}{a^3+b^3}$; 3) $\frac{n^3-m^3}{n^2-m^2}:\frac{n^2+nm+m^2}{n^2+2nm+m^2}$;

2) $\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2+ab+b^2}\cdot\frac{a^3-b^3}{7a+7b}$; 4) $\frac{m^2+2mn+n^2}{p^3+c^3}\cdot\frac{p+c}{2m+2n}$.

182. 1) $\frac{64x^2y^2}{x^2-4}\cdot\frac{(x+2)^2}{x^2-4}\cdot\frac{(x-2)^2}{8xy+1}$; 2) $\frac{x-6}{x^2+6x+9}\cdot\frac{x^2+4x+4}{(x^2+2)(x-2)}\cdot\frac{x^3-9x}{(x-6)(x+2)}$.

Soddalashtiring (**183–204**):

183. $\left(\frac{5m}{m+3}-\frac{14m}{m^2+6m+9}\right):\frac{5m+1}{m^2-9}+\frac{3(m-3)}{m+3}$.

184. 1) $\left(m^2-\frac{1+m^4}{m^2-1}\right):\frac{m^2+1}{m+1}$; 2) $\left(\frac{8xy+3}{8xy+1}-\frac{8xy+1}{8xy+3}\right):\frac{12xy+3}{32xy+12}$.

185. 1) $\left(b^2-\frac{1+b^4}{b^2+1}\right):\frac{1-b}{1+b^2}$; 2) $\left(\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(a-b)^2}\right):\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}\right)$.

186. $\left(\frac{3a}{a-4}+\frac{10a}{a^2-8a+16}\right):\frac{3a-2}{a^2-16}-\frac{4(a+4)}{a-4}$.

187. $\left(\frac{2x}{x-5}+\frac{x}{x^2-10x+25}\right):\frac{2x-9}{x^2-25}-\frac{5(x+5)}{x-5}$.

188. $\left(\frac{4a}{4-a^2}-\frac{a-2}{4+2a}\right)\cdot\frac{4}{a+2}-\frac{a}{2-a}$.

189. 1) $\frac{x^3-8}{x^2+2x+4}-\frac{x^2-4}{x-2}$; 2) $\frac{27x^3-64}{9x^2+12x+16}-\frac{9x^2-16}{3x-4}$.

190. 1) $\frac{x^3+8}{x^2-2x+4}$; 2) $\frac{27x^3+64}{9x^2-12x+16}$.

191. 1) $\frac{x}{1-x}-\frac{1-x^2}{1+x^2}\cdot\left(\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{x}{1-x^2}\right)$.

192. 1) $\frac{a^2+ab+b^2}{a^3-b^3}-\frac{a^2-ab+b^2}{a^3+b^3}$.

193. 1) $\frac{x^3+y^3}{x^2-xy+y^2}-\frac{x^2-y^2}{x+y}$; 2) $\frac{8x^3+27y^3}{4x^2-6xy+9y^2}-\frac{4x^2-9y^2}{2x+3y}$.

194. $\frac{5x+6}{x^2-4}-\frac{x}{x^2-4}:\frac{x}{x-2}-\frac{x+2}{x-2}$.

195. $\left(\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}\right)\cdot\frac{a^2+2a}{8}$.

196. 1) $\frac{x^3-2x^2}{3x+3}:\frac{x^2-4}{3x^2+6x+3}$; 2) $\left(\frac{3x+1}{3x-1}-\frac{1}{9x^2-1}\right)\cdot\frac{3x+1}{3x+2}$.

197. $\left(\frac{1}{m^2-m}-\frac{1}{m-1}\right)\cdot\frac{m}{m+2}+\frac{m}{m^2-4}$.

198. $\left(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3\right)\cdot(a+b):\left(\frac{a^3+b^3}{a+b}-ab\right)$.

199. $\dfrac{x^3+y^3}{x+y}:\left(x^2-y^2\right)+\dfrac{24}{x+y}-\dfrac{xy}{x^2-y^2}.$

200. $\dfrac{a^3-b^3}{a^2-b^2}:\dfrac{a^2+ab+b^2}{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}.$

201. $\left(2a+\dfrac{2ab}{a-b}\right)\cdot\left(\dfrac{ab}{a+b}-a\right):\dfrac{4{,}5a^2}{a^2-b^2}.$

202. $\dfrac{a^2}{a^2-1}+\dfrac{1}{a+1}:\left(\dfrac{1}{2-a}+\dfrac{2}{a^2-2a}\right).$

203. $\left(\dfrac{2}{1-x^2}-\dfrac{2}{(x-1)^2}\right)\cdot(1-x)^2-\dfrac{4}{1+x}.$

204. $\dfrac{abc}{bc+ac-ab}-\left(\dfrac{a-1}{a}+\dfrac{b-1}{b}-\dfrac{c-1}{c}\right):\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}\right).$

6-§. Kasr-ratsional ifodalarni ayniy almashtirish

Arifmetik amallar belgilari bilan birlashtirilgan bir nechta algebraik kasrlardan tuzilgan ifoda kasr-ratsional ifoda deyiladi. Kasr-ratsional ifodaning maxrajidagi ko'phad nolga teng bo'lmasligi lozim.

Kasr-ratsional ifodalarni algebraik kasrlar bo'ysunadigan qoidalardan foydalanib soddalashtirish, ular ustida *ayniy almashtirishlar* bajarish mumkin.

1-masala. Kasr-ratsional ifodani soddalashtiring:

$$R(x,y)=\frac{1+\frac{1}{x}}{\frac{6}{x}+\frac{6}{xy}+\frac{12}{y}}-\frac{\frac{xy}{6}}{2x+y+1},\quad x\neq 0,\quad y\neq 0.$$

△ Algebraik kasrlarni umumiy maxrajga keltirish va qo'shish qoidalariga muvofiq:

$$R(x,y)=\frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{6y+12x+6}{xy}}-\frac{\frac{xy}{6}}{2x+y+1}=$$

Algebraik kasrni bo'lish qoidasiga ko'ra:

$$=\frac{(x+1)xy}{x(12x+6y+6)}-\frac{xy}{6(2x+y+1)}=$$

Noldan farqli $(x \neq 0)$ songa qisqartiramiz va qavslarni ochamiz:

$$=\frac{(x+1)y}{12x+6y+6}-\frac{xy}{12x+6y+6}=$$

Algebraik kasrlarni ayirish qoidasiga ko‘ra:

$$=\frac{xy+y-xy}{12x+6y+6}=$$

O‘xshash hadlarni ixchamlaymiz va maxrajdagi umumiy ko‘paytuvchini qavsdan tashqariga chiqaramiz.

$$=\frac{y}{12x+6y+6}=\frac{y}{6(2x+y+1)}. \ ▲$$

2-masala. Ifodani soddalashtiring:

$$\left(\frac{4a}{4-a^2}-\frac{a-2}{4+2a}\right)\cdot\frac{4}{a+2}-\frac{a}{2-a}.$$

△ Avval qavs ichidagi ifodani soddalashtiraylik:

$$\frac{4a}{4-a^2}-\frac{a-2}{4+2a}=\frac{4a}{(2-a)(2+a)}+\frac{2-a}{2(2+a)}=\frac{8a+(2-a)^2}{2(2-a)(2+a)}=\frac{8a+4-4a+a^2}{2(2-a)(2+a)}=$$

$$=\frac{4+4a+a^2}{2(2-a)(2+a)}=\frac{(2+a)^2}{2(2-a)(2+a)}=\frac{2+a}{2(2-a)}.$$

Endi ko‘paytirish, so‘ngra ayirish amallarini bajaramiz:

$$\frac{2+a}{2(2-a)}\cdot\frac{4}{2+a}-\frac{a}{2-a}=\frac{2}{2-a}-\frac{a}{2-a}=\frac{2-a}{2-a}=1. \ ▲$$

3-masala. Amallarni bajaring: $\left(\frac{2x}{x-5}+\frac{x}{x^2-10x+25}\right):\frac{2x-9}{x^2-25}-\frac{5(x+5)}{x-5}.$

△ Bu holda avval qavs ichidagi ifodani soddalashtiramiz:

$$\frac{2x}{x-5}+\frac{x}{x^2-10x+25}=\frac{2x}{x-5}+\frac{x}{(x-5)^2}=\frac{2x(x-5)+x}{(x-5)^2}=\frac{x(2x-9)}{(x-5)^2}.$$

Endi bo‘lishni va ayirishni bajaramiz:

$$\frac{x(2x-9)}{(x-5)^2}:\frac{2x-9}{x^2-25}=\frac{x(x+5)}{x-5};\ \frac{x(x+5)}{x-5}-\frac{5(x+5)}{x-5}=\frac{(x+5)(x-5)}{x-5}=x+5. \ ▲$$

4-masala. Ota va o‘g‘il S gektar yerdan hosil yig‘ib olishi kerak. Ota bir o‘zi hosilni a kunda, o‘g‘li esa b kunda yig‘ib olishi mumkin. Agar ota va o‘g‘il birga ishlashsa, hosilni necha kunda yig‘ib olishadi?

△ Ota bir kunda $\frac{S}{a}$ ha, o'g'li esa $\frac{S}{b}$ ha yerdan hosil yig'a oladi. Agar ular birgalikda ishlasalar, bir kunda $\left(\frac{S}{a}+\frac{S}{b}\right)$ ha yerdan hosil yig'ib olishadi. Ular hosilni t kunda yig'ib olishadi, desak, unda ushbu $\left(\frac{S}{a}+\frac{S}{b}\right)\cdot t=S$ tenglik o'rinli bo'ladi. Bundan $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)t=1$, $\frac{a+b}{ab}\cdot t=1$, $t=\frac{ab}{a+b}$ (kun). ▲

205. Savolga javob bering. Topshiriqni bajaring:

1) Algebraik kasrlar ustida birgalikda qanday amallar bajarish mumkin?
2) Fikringizni misollarda tushuntiring.

Ko'rsatilgan amallarni bajaring **(206–209)**:

206. 1) $\left(\frac{a}{3}+\frac{a}{2}\right)\cdot\frac{1}{a^2}$; 2) $\frac{a^2}{5}\left(\frac{3}{a^2}+\frac{3}{a}\right)$; 3) $\frac{a+b}{a-b}\left(\frac{a}{3}-\frac{b}{3}\right)$;

4) $\frac{ab}{a+b}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)$; 5) $\left(2+\frac{2}{a}\right)$; 6) $b:\left(b+\frac{2}{b}\right)$.

207. 1) $\left(1-\frac{1}{a}\right):\left(1+\frac{1}{a}\right)$; 2) $\left(a-\frac{a}{b}\right):\left(a+\frac{a}{b}\right)$.

208. 1) $\left(1+\frac{a-b}{a+b}\right)\left(2-\frac{2b}{a-b}\right)$; 2) $\left(1+\frac{a+b}{a-b}\right)\left(2-\frac{2a}{a+b}\right)$.

209. 1) $\frac{a^2+ab}{a^2-b^2}:\left(\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}\right)$; 2) $\frac{ab+b^2}{a^2-b^2}:\left(\frac{a}{a+b}-\frac{b}{a-b}\right)$.

Amallarni bajaring **(210–214)**:

210. $\frac{3a-b}{3ab}\cdot\left(\frac{1}{3a}+\frac{1}{b}\right):\left[\frac{9a^2+b^2}{3ab}\cdot\left(\frac{1}{3a}-\frac{3}{b}\right)\right]$.

211. 1) $\frac{a^2+3ab}{6b}:\left(a^2-9b^2\right)\left[\frac{\left(a+3b^2\right)}{12ab}-1\right]$; 2) $\frac{9a^2+3ax}{2x}:\left(9a^2-x^2\right)\left[\frac{\left(3a+x^2\right)}{12x}-1\right]$.

212. $\left(2a+\frac{18ab}{a-9b}\right)\cdot\left(\frac{9ab}{a+9b}-a\right):\frac{4{,}5a^2}{a^2-81b^2}$.

213. 1) $\left(\frac{a}{a-a^2}-1\right):\left(a-\frac{1-2a^2}{1-a}+1\right)$; 2) $\left(a-\frac{a}{a-a^2}\right):\left(\frac{a}{a-1}+\frac{1}{a^2-2a+1}\right)$.

214. $\left(\frac{20b}{4-25b^2}-\frac{5b-2}{4+10b}\right)\cdot\frac{4}{5b+2}-\frac{5b}{2-5b}$.

215. Avtobus soatiga v km tezlik bilan harakat qilib, s km yo‘l bosib o‘tdi. Agar avtobusning tezligi soatiga u km bo‘lsa, shu vaqt ichida avtobus qancha yo‘l bosib o‘tadi?

216. Motorli qayiqning turg‘un suvdagi tezligi soatiga v km, daryo oqimining tezligi esa v_1 km. Qayiq oqim bo‘yicha harakat qilib, s km o‘tdi. Motorli qayiq oqimga qarshi shu vaqt ichida qancha masofani bosib o‘tgan?

217. (*Qadimgi masala.*) Ikki buyumdan birining 10 tasi bir dinor va ikkinchisining 15 tasi bir dinor. Bir dinorga ikkala buyumdan bir xil miqdorda necha donadan sotib olish mumkin?

Kasrlarni umumiy maxrajga keltiring **(218–219)**:

218. 1) $\frac{3a}{a^3-64}$, $\frac{a-4}{a^2+4a+16}$ va $\frac{1}{a-4}$; 2) $\frac{3}{x-2}$, $\frac{x+1}{x^3-8}$ va $\frac{x+2}{x^2+2x+4}$.

219. 1) $\frac{a}{a^2-16}$, $\frac{a-4}{x^2-4a+16}$ va $\frac{2}{a-4}$; 2) $\frac{5}{x+2}$, $\frac{x-1}{x^3+8}$ va $\frac{x-2}{x^2-2x+4}$.

Amallarni bajaring **(220–226)**:

220. 1) $\frac{ap^2-aq^2}{p^2+2pq+q^2}\cdot\frac{7p+7q}{ap^2+2apq+aq^2}$; 2) $\frac{ab-4b-2a+8}{2a+8-ab-4b}\cdot\frac{ab+4b-2a-8}{2a+8-ab+4b}$;

3) $\left(\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}\right):\left(\frac{x-y}{x+y}-\frac{x+y}{x-y}\right)$; 4) $\left(\frac{2-a}{2+a}-\frac{a+2}{a-2}\right):\left(\frac{2+a}{2-a}+\frac{a-2}{a+2}\right)$.

221. 1) $\left(\frac{2x}{3(a+b)}+\frac{x}{a+b}\right):\left(\frac{5x}{2(a+b)}-\frac{x}{a+b}\right)$;

2) $\left(\frac{a}{a+b}+\frac{2a}{3a+3b}\right):\left(\frac{3a}{2a+2b}-\frac{5a}{4a+4b}\right)$.

222. 1) $\left(\frac{b+x}{b^2+ab}+\frac{x-a}{ab+a^2}\right)\cdot\frac{ab}{2x}$; 2) $\left(\frac{b+x}{b^2+ab}+\frac{x-a}{ab+a^2}\right):\left(\frac{3a}{2a+2b}-\frac{5a}{4a+4b}\right)$.

223. 1) $\frac{1}{3x-2}-\frac{6x}{9x^2-4}+\frac{1}{3x+2}$; 2) $\frac{1}{3x-2}-\frac{4}{9x^2-4}-\frac{1}{3x+2}$.

224. 1) $\left(\frac{a}{2}-\frac{a}{3}\right)\cdot\frac{1}{a^2}$; 2) $\frac{a^2}{3}\cdot\left(\frac{2}{a}+\frac{2}{a^2}\right)$; 3) $\frac{a^2}{3}\cdot\left(\frac{2}{a}+\frac{2}{a^2}\right)$;

4) $\frac{ab}{a-b}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)$; 5) $2:\left(3-\frac{4}{a}\right)$; 6) $a:\left(a-\frac{1}{a}\right)$.

225. 1) $\left(1+\frac{1}{a}\right):\left(1-\frac{1}{a}\right):\frac{a+1}{a-1}$; 3) $\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+2\right):\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)\cdot\frac{1}{a+b}$;

2) $\left(a+\frac{a}{b}\right):\left(a-\frac{a}{b}\right):\frac{b+1}{b-1}$; 4) $\left(\frac{m}{n}+\frac{n}{m}-2\right)\cdot\left(1-\frac{m+n}{m-n}\right)\cdot\frac{m}{2(m-n)}$.

226. $\dfrac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}}\cdot\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right):\frac{b+c-a}{abc}$.

Soddalashtiring **(227–238)**:

227. $\dfrac{2\left(x^4+4x^2-12\right)+\left(x^4+11x^2+30\right)}{x^2+6}$.

228. $\dfrac{\frac{a-b}{2a-b}-\frac{a^2+b^2+a}{2a^2+ab-b^2}}{\left(4b^4+4ab^2+a^2\right)\cdot\left(2b^2+a\right)}\cdot\left(b^2+b+ab+a\right)$.

229. $\dfrac{(2p-a)^2+2q^2-3pq}{\frac{2}{p}+a^2}\cdot\dfrac{4p^2-3pq}{2+pq^2}$.

230. $\dfrac{3a^2+2ax-x^2}{(3x+a)(a+x)}-2+10\cdot\dfrac{ax-3x^2}{a^2-9x^2}$.

231. $\left[\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}\right):\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}\right)\right]:\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$.

232. $\left[\left(\frac{x^2}{y^3}+\frac{1}{x}\right):\left(\frac{x}{y^2}-\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)\right]:\dfrac{(x-y)^2+4xy}{1+\frac{y}{x}}$.

233. $\left(\frac{3}{2x-y}-\frac{2}{2x+y}-\frac{1}{2x-5y}\right):\dfrac{y^2}{4x^2-y^2}$.

234. $\left(x^2+2x-\frac{11x-2}{3x+1}\right):\left(x+1-\frac{2x^2+x+2}{3x+1}\right)$.

235. $\left(6a^2+5a-1+\frac{a+4}{a+1}\right):\left(3a-2+\frac{3}{a+1}\right).$

236. $\frac{(a-b)^2+ab}{(a+b)^2-ab}:\frac{a^5+b^5+a^2b^3+a^3b^2}{\left(a^3+b^3+a^2b+ab^2\right)\left(a^3-b^3\right)}.$

237. $\left(2-x+4x^2+\frac{5x^2-6x+3}{x-1}\right):\left(2x+1+\frac{2x}{x-1}\right).$

238. $\left[\frac{2-b}{b-1}+2\cdot\frac{a-1}{a-2}\right]:\left[b\cdot\frac{a-1}{b-1}+a\cdot\frac{2-b}{a-2}\right].$

239. Soddalashtiring: $\frac{p^3+4p^2+10p+12}{p^3-p^2+2p+16}\cdot\frac{p^3-3p^2+8p}{p^2+2p+6}.$

7-§. $y=\frac{k}{x}$ funksiya

Agar $k=0$ bo‘lsa, $y=0$, ya’ni abssissa o‘qining tenglamasi hosil bo‘ladi. Ko‘rinadiki, k parametr noldan farqli bo‘lgan hollarni o‘rganish lozim. Avval $k=1$ bo‘lganda $y=\frac{1}{x}$ funksiyani o‘rganamiz.

1-masala. $y=\frac{1}{x}$ funksiyaning grafigini chizing.

△ 1) Bu funksiyaning aniqlanish sohasi $x\neq 0$;

2) $y=\frac{1}{x}$ funksiya toq, chunki $x\neq 0$ da $\frac{1}{-x}=-\frac{1}{x}$;

3) funksiya $x>0$ bo‘lganda kamayuvchi, chunki $\frac{1}{x}=x^{-1}$;

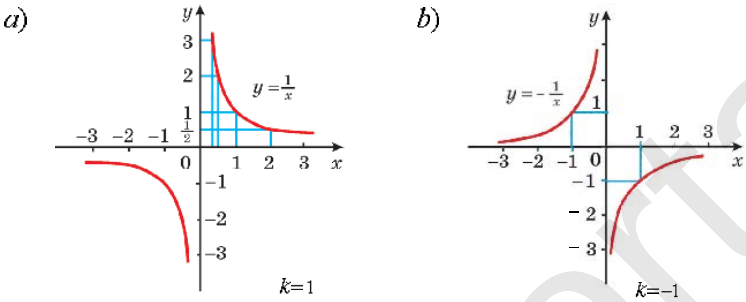
4) $x>0$ bo‘lganda $\frac{1}{x}>0$;

5) funksiya grafigiga tegishli bir necha nuqtalarni topamiz:

$$\left(\frac{1}{3};3\right),\left(\frac{1}{2};2\right),(1;1),\left(2;\frac{1}{2}\right).$$

Shu nuqtalar yordamida grafikning eskizini chizamiz (6-*a* rasm). So‘ngra $x<0$ bo‘lganda unga koordinata boshiga nisbatan simmetrik bo‘lgan egri chiziqni chizamiz. $k=-1$ bo‘lgan hol 6-*b* rasmda ko‘rsatilgan. ▲

$y=\frac{1}{x}$ funksiyaning grafigi *giperbola* deyiladi. U ikki qismdan iborat. Ular giperbolaning *tarmoqlari* deb ataladi. Bittasi I chorakda, ikkinchisi esa III chorakda joylashgan.



6-rasm.

2-masala. $y=\frac{2}{x}$ va $y=-\frac{2}{x}$ funksiyalarning grafigini chizing.

△ $y=\frac{1}{x}$ funksiya grafigini abssissalar o‘qidan ordinatalar o‘qi bo‘ylab 2 baravar *cho‘zish bilan* $y=\frac{2}{x}$ funksiya grafigi hosil qilinadi. $y=-\frac{2}{x}$ funksiya grafigi esa $y=\frac{2}{x}$ funksiya grafigiga Ox o‘qqa nisbatan simmetrikdir. ▲

Umuman, $k\neq 0$ bo‘lganda $y=\frac{k}{x}$ funksiyaning grafigi ham *giperbola* deyiladi. Giperbola 2 ta tarmoqqa ega. $k>0$ da tarmoqlar I va III choraklarda, $k<0$ da II va IV choraklarda joylashgan.

Endi $y=\frac{k}{x}$ funksiyaning xossalarini keltiramiz:

Agar $k>0$ bo‘lsa, $y=\frac{k}{x}$ funksiya:

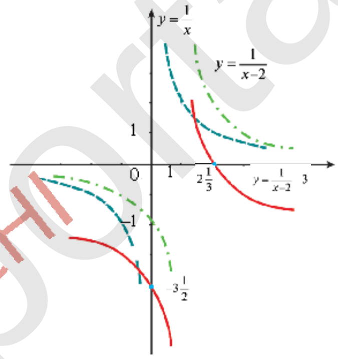
1) $x\neq 0$ da aniqlangan;
2) noldan boshqa barcha haqiqiy qiymatlarni qabul qiladi;
3) toq;
4) $x>0$ da musbat, $x<0$ da manfiy;
5) $x<0$ va $x>0$ da kamayuvchi.

Agar $k<0$ bo‘lsa, $y=\frac{k}{x}$ funksiyaning xossalari quyidagicha: 1, 2, 3- xossalar o‘rinli, $k>0$ holdagi kabi; 4) xossa: $x<0$ da musbat, $x>0$ da manfiy; 5) xossa: $x<0$ va $x>0$ da o‘suvchi.

$y=\frac{k}{x}$ funksiya $k>0$ bo‘lganda teskari proporsional bog‘lanishni ifoda etadi, deyiladi. Bunday bog‘lanish turli fanlarda uchraydi. Fizikada $v=\frac{s}{t}$, bunda s – berilgan musbat son (bosib o‘tilgan masofa), t – vaqt, v – tezlik; iqtisodiyotda talab bilan narx orasida chiziqli va chiziqsiz bog‘lanishlar bor. Agar x deb narxni, y deb talabni belgilasak, ular orasidagi bog‘lanish $y=\frac{a}{x}+b$ kabi yozilishi mumkin, bunda $a>0$, $b>0$. Agar narx istalgancha ortib borsa, talab kamayib b ga yaqinlashadi. Inson uchun talab hamma vaqt bor va eng kam talab b dan kam bo‘lmaydi.

3- masala. $y=\frac{1}{x-2}-3$ funksiya grafigini chizing.

△ $y=\frac{1}{x}$ funksiya grafigini Ox o‘qi bo‘ylab o‘ngga 2 birlik, so‘ngra Oy o‘qi bo‘ylab 3 birlik pastga suramiz. Natijada $y=\frac{1}{x-2}-3$ funksiya grafigi hosil bo‘ladi (7-rasm). ▲



7-rasm.

240. Savollarga javob bering.

1) To‘g‘ri proporsional, teskari proporsional miqdorlarga misollar keltiring.

2) $y=\frac{1}{x}$ funksiya xossalarini ayting.

3) $y=\frac{k}{x}$ $(k<0)$ funksiya xossalarini ayting.

4) $y=\frac{1}{x}$, $y=\frac{k}{x}$ $(k\neq 0)$ funksiyalarning grafigi nima deb ataladi?

5) Giperbola nechta tarmoqqa ega?

6) $y=\frac{k}{x}$, $k>0$ bo‘lganda tarmoqlar qaysi choraklarda yotadi?

7) $y=\frac{k}{x}$, $k<0$ bo‘lganda tarmoqlar qaysi choraklarda yotadi?

241. $y=\frac{3}{x}$ funksiya grafigini chizing. x ning qanday qiymatlarida:

1) $y(x)=6$; 2) $y(x)=-\frac{1}{3}$; 3) $y(x)=2$; 4) $y(x)=4$ bo‘ladi?

242. $y=\frac{4}{x}$ funksiya grafigini chizing. x ning qanday qiymatlarida

1) $y(x)=2$; 2) $y(x)=4$; 3) $y(x)=1$; 4) $y(x)=-2$ bo‘ladi?

243. $y=-\frac{2}{x}$ funksiya grafigini chizing. Agar 1) $x=1$; 2) $x=-1$; 3) $x=-\frac{1}{3}$; 4) $x=\frac{1}{2}$ bo‘lsa, y ni toping.

244. $y=-\frac{4}{x}$ ning grafigini chizing. Agar 1) $x=1$; 2) $x=2$; 3) $x=-\frac{1}{3}$; 4) $x=-1$ bo‘lsa, y ni toping.

245. Funksiyalarning grafiklarini chizing. Kesishish nuqtalari koordinatalarini toping:

1) $y=-\frac{2}{x}$ va $y=x-3$; 2) $y=\frac{3}{x}$ va $y=4-x$.

246. Funksiyalarning grafiklari kesishish nuqtalarini toping:

1) $y=\frac{7}{x}$ va $y--x^2+7x+1$; 2) $y-x^2$ va $y=\frac{1}{x}$;

247. Funksiyaning grafigini chizing:

1) $y=\frac{2}{x}-3$; 2) $y=\frac{3}{x}+2$; 3) $y=\frac{1}{x+3}-2$; 4) $y=\frac{2}{3-x}+1$.

248. $y=\frac{3}{x}$ bo‘lsa, 1) $x>1$; 2) $x>3$; 3) $x<-1$; 4) $x<-3$ bo‘lganda y qanday tengsizlikni qanoatlantiradi?

249. $y(x)=\frac{4}{x}$ funksiya uchun x ning qanday qiymatlarida quyidagi tengsizliklar to‘g‘ri bo‘ladi:

1) $y(x)>2$; 2) $y(x)\le -1$; 3) $y(x)\le 4$; 4) $y(x)>5$?

250. Funksiyalarning grafiklarini chizing. Kesishish nuqtalari koordinatalarini toping:

1) $y=-\frac{3}{x}$ va $y=-x+2$; 2) $y=\frac{-2}{x}$ va $y=x-3$.

251. k ning qanday qiymatlarida $y=\frac{k}{x}$ va $y=kx$ chiziqlar o‘zaro kesishadi? Nechta nuqtada?

252. a va k ning qanday qiymatlarida $y=\frac{a}{x}$ va $y=kx$ chiziqlar kesishadi? Qanday qiymatlarida o‘zaro kesishmaydi?

253. a ning qanday qiymatlarida $y=\frac{4}{x}$ va $y=-x+a$ chiziqlar o‘zaro urinadi (ya’ni bitta umumiy nuqtaga ega bo‘ladi).

254. a va b ning qanday qiymatlarida $y=ax^2-1$ va $y=bx^2$, $a\neq b$ parabolalar o‘zaro kesishmaydi?

8-§. Natural ko‘rsatkichli darajaning arifmetik ildizi va uning xossalari

Quyidagi masalani ko‘ramiz:

1-masala. Tenglamani yeching: $x^2=9$.

△ Tenglamani $x^2-9=0$ yoki $(x+3)(x-3)=0$ kabi yozib olamiz. Bundan $x_1=-3$, $x_2=3$. Demak, tenglama 2 ta haqiqiy ildizga ega. ▲

Ular 9 ning *kvadrat ildizlari*, musbat $x_2=3$ ildiz esa 9 ning *arifmetik ildizi* deyiladi. 9 ning arifmetik ildizini esa $\sqrt{9}=3$ kabi belgilanadi.

Matematikada arifmetik ildiz bilan ish ko‘riladi. Ravshanki, $3^2=9$.

Ta’rif. ***a nomanfiy sonning n = 2 natural ko‘rsatkichli arifmetik ildizi deb, 2-darajasi a ga teng bo‘lgan nomanfiy songa aytiladi va $\sqrt{a}$ kabi belgilanadi.***

Arifmetik ildizning ta’rifini bundan umumiyroq ko‘rinishda ham bayon etish mumkin.

Ta’rif. ***a nomanfiy sonning n ≥ 2 natural ko‘rsatkichli arifmetik ildizi deb, n-darajasi a ga teng bo‘lgan nomanfiy songa aytiladi va $\sqrt[n]{a}$ kabi belgilanadi.***

$\sqrt[n]{a}$ ifodani a dan olingan n-darajali ildiz deb o‘qiladi.

Ta’rifga ko‘ra $a\geq 0$ bo‘lsa,

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a,\ \sqrt[n]{a^n} = a$$

tengliklar o'rinli. $n=2$ bo'lsa, u holda $\sqrt[2]{a}$ o'rniga $\sqrt{a}$ yoziladi.

Masalan, $\left(\sqrt[3]{6}\right)^3 = 6;\ \sqrt[4]{17^4} = 17;\ \sqrt[4]{16} = \sqrt{16} = 4.$

Biror nomanfiy sonning n-darajali ildizini izlash amali n-darajali ildiz chiqarish deyiladi va u n-darajaga ko'tarish amaliga teskari amal bo'ladi.

Umuman, $\sqrt{a^2} = |a|,\ \sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|.$ $\sqrt[n]{a}$ ning b ga tengligini ko'rsatish uchun 1) $b \geq 0$; 2) $b^n = a$ ekanini ko'rsatish kerak.

2-masala. $x^3 = -27$ tenglamani yeching.

Tenglamani $-x^3 = 27$ yoki $(-x)^3 = 27$ kabi yozamiz, so'ngra $-x = y$ deb almashtirish bajaramiz: $y^3 = 27$. Bu tenglamaning faqat bitta ildizi bor: $y = 3$. Bundan $-x = 3$ yoki $x = -3$ kelib chiqadi. Berilgan $x^3 = -27$ tenglamaning yechimini qisqacha $x = -\sqrt[3]{27} = -3$ deb yozish mumkin.

Javob: $x = -3$.

Bu masaladan shunday xulosaga kelish mumkin:

Istalgan toq $2k+1$ natural son uchun $a<0$ bo'lganda $x^{2k+1} = a$ tenglama faqat bitta manfiy ildizga ega va u $x = \sqrt[2k+1]{a}$ kabi belgilanadi.

Masalan, $\sqrt[3]{-8} = -2;\ \sqrt[3]{-1} = -1;\ \sqrt[5]{-32} = -2.$

Agar $a<0$ bo'lsa, quyidagi tenglik o'rinli:

$$\sqrt[2k+1]{a} = -\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{|a|}.$$

Masalan, $\sqrt[3]{-64} = -\sqrt[3]{64} = -\sqrt[3]{|-64|} = -4.$

Sonning arifmetik kvadrat, arifmetik kub, n-darajali arifmetik ildizi deyish o'rniga, qisqacha, sonning kvadrat, kub, n-darajali ildizi deb aytamiz.

255. Savollarga javob bering:

1) Natural ko'rsatkichli darajaning arifmetik ildizi deb nimaga aytiladi?
2) Kvadrat ildiz nima?
3) n-darajali arifmetik ildiz chiqarish amali nima?

4) $a<0$ bo'lganda $x^{2k+1}-a$ tenglama nechta manfiy ildizga ega ($2k+1$ – toq son)?

5) $\sqrt[n]{a}-b$ tenglikni isbotlash uchun nimalarni tekshirib ko'rish kerak?

256. (Og'zaki.) Sonning kvadrat ildizini ayting:

1; 0; 9; 0,64; 144; $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{49}$; $\frac{1}{100}$; $\frac{1}{64}$.

257. (Og'zaki.) Sonning kvadrat ildizini ayting:

4; 9; 0,49; 1,69; 225; $\frac{1}{625}$; $\frac{1}{81}$; $\frac{1}{100}$.

258. Sonning kub ildizini toping:

1) 1; 0; 8; 0,027; 64; $\frac{1}{64}$; $\frac{1}{27}$; $\frac{1}{125}$; $\frac{1}{1000}$;

2) 8; 27; 125; $\frac{1}{8}$; 0,064; 0,125; $\frac{1}{27}$; $\frac{1}{216}$.

259. Sonning 4-darajali ildizini toping:

1; 0; 81; $\frac{16}{81}$; $\frac{81}{625}$; 0,0016; 0,0081.

Hisoblang **(260–263)**:

260. 1) $\sqrt[6]{4^3}$; 2) $\sqrt[8]{4^4}$; 3) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{16}\right)^2}$; 4) $\sqrt[4]{225^2}$.

261. 1) $\sqrt[3]{10^6}$; 2) $\sqrt[3]{9^6}$; 3) $\sqrt[4]{0,5^8}$; 4) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{5}\right)^8}$.

262. 1) $\sqrt[3]{-27}$; 2) $\sqrt[5]{-1}$; 3) $\sqrt[5]{-\frac{1}{243}}$; 4) $\sqrt[5]{-2^5}$.

263. 1) $\sqrt[6]{16^3}$; 2) $\sqrt[12]{4^3\cdot 4^2}$; 3) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{25}\right)^4}$; 4) $\sqrt[8]{225^8}$.

Tenglamani yeching **(264–265)**:

264. 1) $x^3=64$; 2) $x^5=-243$; 3) $2x^5=-64$; 4) $2x^7=256$.

265. 1) $3x^4=243$; 2) $x^3=-\frac{1}{27\cdot 64}$; 3) $3x^5=-96$; 4) $4x^6=256$.

Hisoblang **(266–267)**:

266. 1) $\sqrt[3]{-64}+\frac{1}{2}\sqrt[6]{64}$; 2) $\sqrt[4]{16}-\frac{1}{3}\sqrt[4]{81}$; 3) $\sqrt[3]{-27}+\sqrt[4]{64}$;

4) $\sqrt[5]{32}-\frac{1}{6}\sqrt[3]{-216}$; 5) $\sqrt[3]{-1000}+\frac{1}{4}\sqrt[4]{256}$; 6) $\sqrt[4]{81}-\sqrt[3]{27}$.

267. 1) $\sqrt{7+\sqrt{13}}\cdot\sqrt{7-\sqrt{13}}$; 2 $\sqrt{3+\sqrt{5}}\cdot\sqrt{3-\sqrt{5}}$.

268. 1) $\sqrt[3]{(x+2)^3}$ ifodani soddalashtiring.

2) a) $x\leq 3$; b) $x>3$ bo‘lganda, $\sqrt{(3-x)^2}$ ni soddalashtiring.

269. Hisoblang:

1) $\sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}}$; 2) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}-\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$.

270. $17<\sqrt{n}<18$ tengsizlikni qanoatlantiradigan nechta natural son n bor?

x ning qanday qiymatlarida ifoda ma’noga ega **(271–272)**:

271. 1) $\sqrt{2x-3}$; 2) $\sqrt[5]{3-x}$; 3) $\sqrt[3]{3x^2-2x-1}$; 4) $\sqrt{\frac{3-2x}{x-2}}$.

272. 1) $\sqrt[4]{3x-5}$; 2) $\sqrt[5]{x+5}$; 3) $\sqrt[3]{x^2+x+1}$; 4) $\sqrt[4]{\frac{3-4x}{2x-3}}$?

Arifmetik ildiz xossalarini keltiraylik. n-darajali arifmetik ildiz quyidagi xossalarga ega:

Agar $a\geq 0$, $b>0$ va p, q natural sonlar bo‘lib, $p\geq 2$, $q\geq 2$ bo‘lsa, quyidagi tengliklar o‘rinli bo‘ladi:

1) $\sqrt[p]{ab}=\sqrt[p]{a}\cdot\sqrt[p]{b}$; 3) $\left(\sqrt[p]{a}\right)^q=\sqrt[p]{a^q}$;

2) $\sqrt[p]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[p]{a}}{\sqrt[p]{b}}$; 4) $\sqrt[q]{\sqrt[p]{a}}=\sqrt[pq]{a}$.

Bu xossalarning har birini arifmetik ildizning ta’rifiga asoslanib isbot qilish mumkin. Biz 1-xossaning isbotini keltiramiz. Ta’rifga ko‘ra,

△ 1) $\sqrt[p]{a}\geq 0$, $\sqrt[p]{b}\geq 0$, chunki $a\geq 0$, $b\geq 0$;

2) $\left(\sqrt[p]{a}\cdot\sqrt[p]{b}\right)^p=ab$, chunki $\left(\sqrt[p]{a}\cdot\sqrt[p]{b}\right)^p=\left(\sqrt[p]{a}\right)^p\cdot\left(\sqrt[p]{b}\right)^p=ab$. ▲

Bundan 1-xossaning to‘g‘riligi kelib chiqadi.

Misollar. 1) $\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{9\cdot 3}=\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=3;$

2) $\sqrt[4]{\frac{64}{243}}:\sqrt[4]{\frac{4}{3}}=\sqrt[4]{\frac{64}{243}:\frac{4}{3}}=\sqrt[4]{\frac{64}{243}\cdot\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{\frac{16}{81}}=\sqrt[4]{\frac{2^4}{3^4}}=\frac{2}{3}.$

Masala. Ifodani soddalashtiring ($a>0$, $b>0$): $\dfrac{\left(\sqrt{a^2b^3}\right)^2}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{24}b^{12}}}}.$

△ Arifmetik ildizning xossalariga ko‘ra

$$\frac{\left(\sqrt{a^2b^3}\right)^2}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{24}b^{12}}}}=\frac{a^2b^3}{\sqrt[6]{\left(a^4\right)^6\cdot\left(b^2\right)^6}}=\frac{a^2b^3}{\sqrt[6]{\left(a^4\right)^6}\cdot\sqrt[6]{\left(b^2\right)^6}}=\frac{a^2b^3}{a^4b^2}=\frac{b}{a^2}.$$ **Javob:** $\frac{b}{a^2}$. ▲

273. Topshiriqni bajaring. Savolga javob bering:

1) Arifmetik ildizning xossalarini ayting. Misollar keltiring.
2) Arifmetik ildizning xossalaridan misollar yechishda qanday foydalanasiz?

Hisoblang **(274–277)**:

274. 1) $\sqrt[3]{125\cdot 0,125}$; 2) $\sqrt[3]{0,027}$; 3) $\sqrt[4]{16\cdot 0,0016}$; 4) $\sqrt[5]{32\cdot 100000}$.

275. 1) $\sqrt[3]{4^3\cdot 5^3}$; 2) $\sqrt[4]{9^4\cdot 7^4}$; 3) $\sqrt[5]{(0,3)^5\cdot 6^5}$; 4) $\sqrt[6]{\left(\frac{1}{2}\right)^6\cdot 12^6}$.

276. 1) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{4}$; 2) $\sqrt[3]{0,3}\cdot\sqrt[3]{0,09}$; 3) $\sqrt[4]{16\cdot\frac{1}{625}}$; 4) $\sqrt[3]{\frac{81}{3}}$.

277. 1) $\sqrt[4]{81}:\sqrt[4]{16}$; 2) $\frac{\sqrt[4]{48}}{\sqrt[4]{3}}$; 3) $\left(\sqrt[3]{\sqrt{8}}\right)^2$; 4) $\sqrt[3]{\frac{625}{100}}:\sqrt[3]{0,05}$.

278. Ildiz chiqaring ($a\geq 0$, $b>0$):

1) $\sqrt[3]{3a^2b}\cdot\sqrt[3]{9ab^2}$; 2) $\sqrt[4]{\frac{a^2b}{c^2}}\cdot\sqrt[4]{\frac{a^2c^2}{b}}$; 3) $\sqrt[3]{\frac{a^4b^5}{c^4}}\cdot\sqrt[3]{\frac{c}{ab^2}}$.

Hisoblang **(279–283)**:

279. 1) $\sqrt[3]{\frac{27}{8}}$; 2) $\sqrt[4]{\frac{81}{16}}$; 3) $\sqrt[3]{15\frac{5}{8}}$; 4) $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$; 5) $\sqrt[3]{1\frac{91}{125}}$.

280. 1) $\sqrt[4]{128}:\sqrt[4]{4}$; 2) $\sqrt[3]{81}:\sqrt[3]{3000}$; 3) $\frac{\sqrt[3]{32}}{\sqrt[3]{4}}$; 4) $\left(\sqrt{125}-\sqrt{45}\right):\sqrt{5}$.

281. 1) $\sqrt[3]{216\cdot 0,064}$; 2) $\sqrt[3]{3375\cdot 343}$; 3) $\sqrt[4]{256\cdot 0,0064}$.

282. 1) $\sqrt[5]{3^{10}\cdot 2^{15}}$; 2) $\sqrt[3]{3^3\cdot 4^6}$; 3) $\sqrt[4]{28\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^8}$; 4) $\sqrt[10]{4^{30}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{50}}$.

283. 1) $\frac{\sqrt[5]{256}}{\sqrt[5]{8}}$; 2) $\sqrt[3]{128}:\sqrt[3]{2000}$; 3) $\left(\sqrt{20}-\sqrt{45}\right):\sqrt{5}$.

Ifodani soddalashtiring **(284–285)**, bunda $a>0$, $b>0$, $x>0$, $y>0$:

284. 1) $\sqrt[3]{ab^2}:\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$; 2) $\sqrt[3]{\frac{y^2}{3x}}:\sqrt[3]{\frac{9x^2}{y}}$; 3) $\sqrt[4]{\frac{a}{4b}}:\sqrt[4]{\frac{a}{64b^5}}$.

285. 1) $\sqrt[3]{3a^2b^3}\cdot\sqrt[3]{9a^4b^3}$; 2) $\sqrt[3]{\frac{a^2b^3}{c}}\cdot\sqrt[3]{\frac{a^4c}{c^6}}$; 3) $\sqrt[3]{\frac{ab}{c^2}}\cdot\sqrt[3]{\frac{a^2b^5}{c}}$.

Hisoblang **(286–289)**:

286. 1) $\left(\sqrt[4]{6^2}\right)^2$; 2) $\left(\sqrt[6]{16}\right)^{-3}$; 3) $\left(\sqrt[10]{243}\right)^2$; 4) $\left(\sqrt[8]{4}\right)^{-4}$.

287. 1) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$; 2) $\sqrt{\sqrt{81}}$; 3) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}}\cdot\sqrt[9]{31}$; 4) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{25}}\cdot\sqrt[6]{5^5}$.

288. 1) $\left(\sqrt{x}\right)^4$; 2) $\left(\sqrt[3]{y^3}\right)^2$; 3) $\left(\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{b}\right)^6$; 4) $\left(\sqrt[3]{\sqrt[4]{27a^3}}\right)^4$.

289. 1) $\sqrt[4]{\frac{3}{4}}\cdot\sqrt[4]{6\frac{3}{4}}$; 2) $\sqrt[4]{17-\sqrt{33}}\cdot\sqrt[4]{17+\sqrt{33}}$.

290. Ifodani soddalashtiring ($a\geq 0$, $b\geq 0$, $c\geq 0$, $x>0$, $y>0$):

1) $\sqrt[4]{abc}\cdot\sqrt[4]{a^3b^2c}\cdot\sqrt[4]{b^5c^2}$; 3) $\sqrt[3]{\sqrt{x^6y^{12}}}-\left(\sqrt[5]{xy^2}\right)^5$;

2) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{x^2}}\right)^3+2\left(\sqrt[4]{\sqrt{x}}\right)^8$; 4) $\frac{\sqrt[4]{8x^2y^5}\cdot\sqrt[4]{4x^3y}}{\sqrt[4]{2xy^2}}$.

291. Isbot qiling:

1) $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2=2$; 2) $\left(\sqrt{10+\sqrt{51}}-\sqrt{10-\sqrt{51}}\right)^2=6$.

9-§. Ratsional ko‘rsatkichli daraja va uning xossalari

Yuqorida natural ko‘rsatkichli daraja va uning arifmetik ildizi tushunchalari bilan tanishdik. Endi ratsional ko‘rsatkichli daraja va uning xossalarini bayon etamiz. Avval bitta masala ko‘raylik:

Masala. $\sqrt[4]{3^{12}}$ ni hisoblang.

△ $3^{12}=(3^3)^4$ bo‘lgani uchun $\sqrt[4]{3^{12}}=\sqrt[4]{\left(3^3\right)^4}=3^3=27$. Demak,

$$\sqrt[4]{3^{12}}=3^{\frac{12}{4}}=3^3.$$

Javob: 27.

Shunga o‘xshash, $\sqrt[5]{4^{-10}}=4^{\frac{10}{5}}=4^{-2}=\frac{1}{4^2}=\frac{1}{16}$ tenglikni ham isbot qilish mumkin. ▲

Endi umumiy holni ko‘ramiz.

Agar $q\geq 2$, p – butun son va $\frac{p}{q}$ butun son bo‘lsa, $a>0$ bo‘lganda quyidagi tenglik to‘g‘ri bo‘ladi:

$$\sqrt[q]{a^p}=a^{\frac{p}{q}}. \tag{1}$$

△ $\frac{p}{q}$ – butun son, uni k deb belgilaymiz: $\frac{p}{q}=k$, bundan $p=kq$ kelib chiqadi. Daraja va arifmetik ildiz xossalarini qo‘llab, topamiz:

$$\sqrt[q]{a^p}=\sqrt[q]{a^{kq}}=\sqrt[q]{\left(a^k\right)^q}=a^k=a^{\frac{p}{q}}.$$ ▲

Agar $\frac{p}{q}$ butun son bo‘lmasa, $a^{\frac{p}{q}}$ $(a>0)$ daraja uchun (1) formula o‘rinli deb hisoblanadi. Shunday qilib, (1) formula istalgan butun p, istalgan natural $q\geq 2$ va $a>0$ uchun to‘g‘ri bo‘ladi. Masalan,

$$2^{\frac{6}{2}}=\sqrt{2^6}=2^3=8,\qquad 2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2},\qquad 27^{-\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{27^{-2}}=\sqrt[3]{\frac{1}{27^2}}=\frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{3^6}}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}.$$

Endi r – ratsional son bo‘lsin. Uni $r=\frac{p}{q}$, bunda p – butun son, q – natural son, deb yozish mumkin. (1) formula bo‘yicha

$a^r = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ deb yozamiz. Shunday qilib, daraja istalgan ratsional ko'rsatkich va istalgan musbat asos uchun aniqlanadi. Shu bilan birga, (1) formula $a=0$ bo'lganda ham o'rinli: $\sqrt[q]{0^p}=0$. Shuning uchun $r>0$ bo'lganda $0^r=0$ tenglik to'g'ri deb hisoblanadi.

(1) formula va ildizning xossalaridan

$$a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{pk}{qk}}$$

tenglik kelib chiqadi, bunda $a>0$, $p-$butun son, k va q lar natural sonlar.

Ratsional ko'rsatkichli va musbat asosli darajalar uchun quyidagi tengliklar o'rinli (p, $q-$ratsional sonlar; $a>0$, $b>0$):

1) $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$;

2) $a^p : a^q = a^{p-q}$;

3) $\left(a^p\right)^q = a^{pq}$;

4) $(ab)^p = a^p \cdot b^p$;

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$.

Ildizlarning xossalaridan foydalanib bu tengliklarni isbot qilish mumkin. Masalan, 1-xossani isbot qilamiz.

△ $p=\frac{m}{n}$, $q=\frac{k}{l}$ (n, l – natural sonlar, m va k – butun sonlar) deb belgilaymiz. Unda:

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{k}{l}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{k}{l}} \tag{2}$$

tenglikni isbotlash lozim.

$\frac{m}{n}$ va $\frac{k}{l}$ kasrlarni umumiy maxrajga keltiramiz: $\frac{ml}{nl}$ va $\frac{kn}{nl}$.

Ratsional ko'rsatkichli darajaning ta'rifidan, ildizning va butun ko'rsatkichli darajaning xossalaridan foydalanib, quyidagini hosil qilamiz:

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{k}{l}} = a^{\frac{ml}{nl}} \cdot a^{\frac{kn}{nl}} = \sqrt[nl]{a^{ml}} \cdot \sqrt[nl]{a^{kn}} = \sqrt[nl]{a^{ml} \cdot a^{kn}} = \sqrt[nl]{a^{ml+kn}} = a^{\frac{ml+kn}{nl}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{k}{l}}. \ ▲$$

Darajaning xossalarini qo'llanishga oid misollar:

1) $5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{2}{3}} = 5^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} = 5$;

2) $4^{\frac{2}{3}} : 4^{\frac{1}{6}} = 4^{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}} = 4^{\frac{4-1}{6}} = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$;

3) $24^{\frac{2}{3}} = \left(2^3\cdot 3\right)^{\frac{2}{3}} = 2^{3\cdot\frac{2}{3}}\cdot 3^{\frac{2}{3}} = 4\sqrt[3]{9}$; 4) $\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{8^{\frac{1}{3}}}{27^{\frac{1}{3}}} = \frac{2^{3\cdot\frac{1}{3}}}{3^{3\cdot\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3}$;

5) $7^{\frac{1}{6}}\cdot 7^{\frac{5}{6}} = 7^{\frac{1}{6}+\frac{5}{6}} = 7^{\frac{6}{6}} = 7$; 6) $8^{\frac{2}{3}}:8^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{2}{3}-\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}} = 2^{3\cdot\frac{1}{3}} = 2$.

292. Savolga javob bering. Topshiriqni bajaring:

1) Ratsional ko‘rsatkichli daraja qanday ta’riflanadi?
2) Ratsional ko‘rsatkichli daraja xossalarini ayting. 2–3 ta misolda bu xossalarning to‘g‘riligini tekshiring.

293. (Og‘zaki.) Ratsional ko‘rsatkichli daraja shaklida yozing ($x>0$, $a>0$, $b>0$):

1) $\sqrt{x}$; 2) $\sqrt[3]{a^2}$; 3) $\sqrt[4]{b^5}$; 4) $\sqrt[5]{x^2}$; 5) $\frac{1}{\sqrt{a}}$; 6) $\sqrt[6]{b^{-4}}$.

294. (Og‘zaki.) Ratsional ko‘rsatkichli daraja shaklida yozing ($x\ge 0$, $b>0$):

1) $\sqrt{x}$; 2) $\sqrt{x^3}$; 3) $\sqrt[3]{a^5}$; 4) $\sqrt[4]{b^5}$; 5) $\sqrt[3]{a}$; 6) $\sqrt[5]{b^{-4}}$.

Hisoblang (**295–299**):

295. 1) $16^{\frac{1}{2}}$; 2) $64^{\frac{1}{3}}$; 3) $27^{\frac{2}{3}}$; 4) $16^{\frac{3}{4}}$; 5) $16^{-0,75}$; 6) $9^{-1,5}$.

296. 1) $3^{\frac{4}{5}}\cdot 3^{\frac{11}{5}}$; 2) $4^{\frac{1}{3}}\cdot 4^{\frac{2}{3}}$; 3) $9^{\frac{2}{3}}:9^{\frac{1}{6}}$; 4) $\left(8^{-3}\right)^{\frac{2}{3}}$.

297. 1) $9^{\frac{1}{2}}$; 2) $4^{\frac{1}{2}}$; 3) $8^{-\frac{2}{3}}$; 4) $\left(\frac{1}{81}\right)^{\frac{3}{4}}$; 5) $16^{0,5}$; 6) $81^{-1,5}$.

298. 1) $2^{\frac{3}{4}}\cdot 2^{1}$; 2) $3^{\frac{2}{5}}\cdot 3^{\frac{8}{5}}$; 3) $7^{\frac{2}{3}}:4^{-\frac{5}{3}}$; 4) $5^{\frac{4}{3}}:5^{\frac{1}{3}}$.

299. 1) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} + \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}$; 2) $(0,04)^{1,5} - (0,125)^{-\frac{2}{3}}$.

300. Hisoblang:

1) $a=0,04$ bo‘lganda, $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[6]{a}$ ning qiymatini;
2) $b-8$ bo‘lganda, $\sqrt{b}:\sqrt[6]{b}$ ning qiymatini.

Ratsional ko'rsatkichli daraja shaklida yozing **(301–302)** ($a>0$, $b>0$, $y>0$):

301. 1) $a^{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{a}$; 2) $b^{\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{1}{3}}$; 3) $\sqrt[3]{b^2}:b^{\frac{1}{4}}$; 4) $y^{-3,8}:y^{2,3}\cdot\sqrt{y^3}$.

302. 1) $a^{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{a}$; 2) $b^{\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{1}{4}}\cdot\sqrt[12]{b^5}$; 3) $\sqrt[4]{b}:b^{\frac{1}{8}}$; 4) $y^{3,8}:y^{2,8}\cdot\sqrt{y^3}$.

303. Hisoblang:

1) $a-0,09$ bo'lganda $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[6]{a}$ ning qiymatini;
2) $a=64$ bo'lganda $\sqrt{a}:\sqrt[6]{a}$ ning qiymatini.

304. Ifodani soddalashtiring ($a>0$, $b>0$):

1) $\left(a^3\right)^{\frac{4}{3}}\cdot\left(b^{-\frac{3}{2}}\right)^4$; 2) $\dfrac{b^{\frac{1}{5}}\left(\sqrt[5]{b^4}-\sqrt[5]{b^{1}}\right)}{b^{\frac{2}{3}}\left(\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{b^{-2}}\right)}$.

305. Ifodani soddalashtiring ($a>0$, $b>0$):

1) $\left(a^{-3}b^2\right)^{-4}\cdot\left(\dfrac{a^{-2}}{3b^3}\right)^{-2}:\left(\dfrac{2a^{-1}}{b^{-2}}\right)^{-3}$; 2) $\left(a^3b^{-4}\right)^{-2}\cdot\left(\dfrac{a^{-3}}{3b^{-2}}\right)^3:\left(\dfrac{3a^4}{b^3}\right)^4$.

306. Hisoblang:

1) $\left(2^{\frac{5}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}-3^{\frac{5}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}\right)\cdot\sqrt[3]{6}$; 2) $\left(5^{\frac{1}{4}}:2^{\frac{3}{4}}-2^{\frac{1}{4}}:5^{\frac{3}{4}}\right)\cdot\sqrt[4]{1000}$.

307. Ifodani soddalashtiring ($x>0$, $y>0$, $x\neq y$, $a>0$, $b>0$, $a\neq b$):

1) $\dfrac{3xy-y^2}{x-y}-\dfrac{y\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\dfrac{y\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$; 2) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}-\dfrac{a+b}{a^{\frac{2}{3}}-\sqrt[3]{ab}+b^{\frac{2}{3}}}$.

10-§. Ratsional ko'rsatkichli daraja qatnashgan algebraik ifodalarni soddalashtirish

Bu mavzuga oid mashqlarni bajarishda algebraik kasrlar va ular ustida amallar, qisqa ko'paytirish formulalari va ratsional ko'rsatkichli darajaning xossalaridan foydalaniladi.

1- masala. Ifodani soddalashtiring:

$$\left[\frac{\left(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}\right)^2+\left(x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}}\right)^2}{x+(xy)^{\frac{1}{2}}}\right]^{-5}\cdot x^3\cdot\sqrt[3]{x\sqrt{x}},\ \ x>0,\ \ y>0.$$

△ 1) $\sqrt[3]{x\sqrt{x}}=\sqrt[3]{\sqrt{x^3}}=\sqrt[6]{x^3}=\sqrt{x};$

2) kvadrat qavslar ichidagi ifodaning suratini kvadratga oshiramiz va $x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$ ekanidan foydalanamiz:

$$\sqrt{x}+2\sqrt[4]{xy}+\sqrt{y}+\sqrt{x}-2\sqrt[4]{xy}+\sqrt{y}=2(\sqrt{x}+\sqrt{y});$$

3) o‘sha ifodaning maxrajida $\sqrt{x}$ ni qavsdan tashqariga chiqaramiz:

$$x+\sqrt{xy}=\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y});$$

4) u holda $\dfrac{2(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{y})}-\dfrac{2}{\sqrt{x}};$

5) $\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^5\cdot x^3\sqrt{x}=\dfrac{32}{x^2\sqrt{x}}\cdot x^3\sqrt{x}=32\cdot x.$ ▲

2- masala. Ifodani soddalashtiring va uning $x=0{,}16,\ y=25$ bo‘lgandagi son qiymatini toping:

$$\left(\frac{\sqrt[4]{x^3y}-\sqrt[4]{xy^3}}{\sqrt{y}-\sqrt{x}}+\frac{1+\sqrt{xy}}{\sqrt[4]{xy}}\right)^{-2}\cdot\left(1+2\sqrt{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}},\ \ x>0,\ \ y>0.$$

△ 1) $\dfrac{\sqrt[4]{x^3y}\quad\sqrt[4]{xy^3}}{\sqrt{y}\quad\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt[4]{xy}\cdot(\sqrt{x}\quad\sqrt{y})}{\sqrt{y}\quad\sqrt{x}}=-\sqrt[4]{xy};$

2) $-\sqrt[4]{xy}+\dfrac{1+\sqrt{xy}}{\sqrt[4]{xy}}=\dfrac{-\sqrt{xy}+1+\sqrt{xy}}{\sqrt[4]{xy}}=\dfrac{1}{\sqrt[4]{xy}};$

3) $\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{xy}}\right)^{-2}=\sqrt{xy};$

4) $\left(1+2\sqrt{\dfrac{y}{x}}+\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\left(1+\sqrt{\dfrac{y}{x}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}-1+\sqrt{\dfrac{y}{x}};$

5) $\sqrt{xy}\cdot\left(1+\sqrt{\frac{y}{x}}\right)=\sqrt{xy}+y$.

Agar $x=0{,}16$ va $y=25$ bo'lsa, $\sqrt{0{,}16\cdot 25}+25=\sqrt{4}+25=27$. ▲

3- masala. Ifodani soddalashtiring va uning $a=25$, $b=0{,}6561$ bo'lgandagi son qiymatini toping:

$$\frac{\left(\sqrt[8]{a}+\sqrt[8]{b}\right)^2+\left(\sqrt[8]{a}-\sqrt[8]{b}\right)^2}{a-\sqrt{ab}}:\frac{\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[8]{ab}+\sqrt[4]{b}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[8]{ab}+\sqrt[4]{b}\right)^2}{\sqrt[4]{a^3b}-b}.$$

△ 1) 1- kasrning suratini kvadratga oshiramiz, maxrajida $\sqrt{a}$ ni qavsdan tashqariga chiqaramiz. Soddalashtirishdan so'ng 1-kasr $\frac{2}{\sqrt{a}\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)}$ ga teng bo'ladi;

2) 2- kasrning surati qisqa ko'paytirish formulalaridan foydalanib, qavslarni ochgach, $\sqrt{a}+\sqrt[4]{ab}+\sqrt{b}$ ifodaga keladi;

3) maxrajida esa $\sqrt[4]{b}$ qavsdan tashqariga chiqariladi va kublar ayirmasi forulasi – $\left(x^3-y^3\right)$ ning yoyilmasidan foydalaniladi. 2-kasr shunda $\frac{1}{\sqrt[4]{b}\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)}$ ga teng bo'ladi;

4) nihoyat, 1-kasrni 2- kasrga bo'lish natijasi $\frac{2\sqrt[4]{b}}{\sqrt{a}}$ ifodaga teng bo'ladi. $a=25$, $b=0{,}6561$ bo'lsa, bu ifoda $\frac{2\cdot\sqrt[4]{0{,}6561}}{\sqrt{25}}=\frac{2}{5}\cdot 0{,}9=0{,}36$ ga teng.

Javob: $\frac{2\cdot\sqrt[4]{b}}{\sqrt{a}}$; 0,36. ▲

Ifodani soddalashtiring **(316–332):**

308. $\left[\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+5b^{\frac{1}{2}}\right)-\left(a^{\frac{1}{2}}+2b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}-2b^{\frac{1}{2}}\right)\right]:\left(2a+3a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}\right).$

309. $\left[\frac{\left(\sqrt{a}+1\right)^2-\frac{a-\sqrt{ax}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{a}+1\right)^3-a\sqrt{a}+2}\right]^{-3}.$

310. $\left[\dfrac{4a-9a^{-1}}{2a^{\frac{1}{2}}-3a^{-\frac{1}{2}}}+\dfrac{a-4+3a^{-1}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}\right]^2.$

311. $\left[(a-b)\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}+a-b\right]\left[(a-b)\left(\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}-1\right)\right].$

312. $\left(\sqrt{ab}-\dfrac{ab}{a+\sqrt{ab}}\right):\dfrac{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{b}}{a-b}.$

313. $\left(a+b^{\frac{3}{2}}:\sqrt{a}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}}+\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)^{-\frac{2}{3}}.$

314. $\left[\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}-4x^{-\frac{1}{2}}}+\dfrac{2\sqrt[3]{x}}{x\sqrt[3]{x}-4\sqrt[3]{x}}\right]^{-2}-\sqrt{x^2+8x+16}$, bu yerda $x\geq -4$.

315. $\left(\dfrac{\sqrt[4]{ax^3}-\sqrt[4]{a^3x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}+\dfrac{1+\sqrt{ax}}{\sqrt[4]{ax}}\right)^{-2}\sqrt{1+2\sqrt{\dfrac{a}{x}}+\dfrac{a}{x}}.$

316. $\dfrac{(a-b)\sqrt{3}-b\sqrt{3}\sqrt[3]{-8b^3}}{\sqrt{2\left(a-b^2\right)^2+\left(2b\sqrt{2a}\right)^2}}\cdot\dfrac{\sqrt{2a}-\sqrt{2c}}{\sqrt{\dfrac{3}{a}}-\sqrt{\dfrac{3}{c}}}.$

317. $\left[\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{a}\right)^{-1}+\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{a}\right)^{-1}\right]^{-2}:\dfrac{x-a}{4\sqrt{x}+4\sqrt{a}}.$

318. $\dfrac{\left(\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^3+2a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{3a^2+3b\sqrt{ab}}+\dfrac{\sqrt{ab}-a}{a\sqrt{a}-b\sqrt{a}}.$

319. $\dfrac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^3+2a^2:\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}+\dfrac{3\sqrt{ab}-3b}{a-b}.$

320. $\left(\dfrac{1}{\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)^{-2}}\left(\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}\right)^{-1}\right)(ab)^{-\frac{1}{2}}.$

321. $\left[\left(\dfrac{a^2-b\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt[3]{b}}+a\sqrt[3]{b}\right):\left(a+\sqrt[6]{a^3b^2}\right)-\sqrt[3]{b}\right]^2.$

322. $\left[\dfrac{a^2\sqrt[4]{x}+x\sqrt{a}}{a\sqrt[4]{x}+\sqrt{ax}}-\sqrt{a^2+x+2a\sqrt{x}}\right]^4.$

323. $\left[\dfrac{x\sqrt{x}-x}{\left(\dfrac{\sqrt[4]{x^3}-1}{\sqrt[4]{x}-1}-\sqrt{x}\right)\left(\dfrac{\sqrt[4]{x^3}+1}{\sqrt[4]{x}+1}-\sqrt{x}\right)}\right]^3.$

324. $\dfrac{\dfrac{a+x}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{x^2}}+\dfrac{\sqrt[3]{ax^2}-\sqrt[3]{a^2x}}{\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{x}}-\sqrt[6]{x}.$

Ratsional va irratsional sonlar. Radikallarning irratsionalligi

Ta'rif. $\frac{p}{q}$ kasr ko'rinishida ifodalanadigan son *ratsional son* deyiladi, bu yerda p – butun son, q esa natural son.

Ta'rif. Ratsional son bo'lmagan sonlar *irratsional* son deyiladi.

1-masala. $\sqrt{2}$ son irratsional son ekanligini isbotlang.

△ $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$ bo'lsin, bu yerda p – butun son, q esa natural son.

Umumiylikka zarar yetkazmasdan, $\frac{p}{q}$ ni qisqarmas kasr deb olamiz, aks holda, surat va mahrajini EKUB(p, q) ga bo'lib yuboramiz.

$\sqrt{2}=\frac{p}{q}$ tenglikdan $\left(\frac{p}{q}\right)^2=2$, ya'ni $p^2=2q^2$ tenglik kelib chiqadi. Bundan p va q o'zaro tub bo'lgani uchun, p son 2 ga karrali bo'lishi kerakligi kelib chiqadi. Demak, qandaydir natural m son uchun $p=2m$ bo'ladi. $p^2=2q^2$ tenglikdan $2m^2=q^2$ tenglik kelib chiqadi. Bundan m va q – o'zaro tub bo'lgani uchun, q sonning 2 ga karrali bo'lishi kerakligi kelib chiqadi. Bu esa $\frac{p}{q}$ qisqarmas kasr ekanligiga zid. Demak, $\sqrt{2}$ son irratsional ekan. ▲

Xuddi shunday, $\sqrt{m}$ ko'rinishdagi sonlar irratsional sonlar ekanligini isbotlash mumkin, bu yerda $m \neq k^2$.

1) Agar a va b sonlar ratsional sonlar bo'lsa, u holda ularning $a+b$ yig'indisi, $a-b$ ayirmasi, ab ko'paytmasi va $b \neq 0$ uchun $\frac{a}{b}$ bo'linmasi ratsional son bo'ladi.

2) Agar a va b sonlardan biri ratsional son, ikkinchisi esa irratsional son bo'lsa, u holda ularning $a+b$ yig'indisi, $a-b$ ayirmasi, ab ko'paytmasi va $b \neq 0$ uchun $\frac{a}{b}$ bo'linmasi irratsional son bo'ladi.

2-masala. 1) Ikkita irratsional sonning yig'indisi ratsional son bo'la oladimi? Ko'paytmasi-chi?

2) a^b son ratsional bo'ladigan a va b irratsional sonlar mavjudmi?

△ 1) Ikkita irratsional sonning yig'indisi va ko'paytmasi ratsional bo'la oladi. Masalan, $\sqrt{2}+\left(-\sqrt{2}\right)=0$, $\sqrt{2}\sqrt{2}=2$.

2) $A=\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}$ sonni qaraylik. Agar A ratsional son bo'lsa, masala yechildi ($\sqrt{2}$ soni irratsional). Agar A irratsional son bo'lsa, bu holda $A^{\sqrt{2}}=\left(\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}=\left(\sqrt{2}\right)^2=2$ soni ratsional, shuning uchun A va $\sqrt{2}$ izlanayotgan sonlar. ▲

3-masala. x, y va z sonlar uchun $x+yz$, $y+zx$ va $z+xy$ sonlarning uchalasi ratsional son. $x^2+y^2=1$ bo'lsa, xyz^2 ratsional son ekanligini isbotlang.

△ Ravshanki, $xyz^2=xyz^2+z-z=xyz^2+(x^2+y^2)z-z=(yz+x)(zx+y)-$ $-(xy+z)$.

Demak, $x+yz$, $y+zx$ va $z+xy$ sonlarning uchalasi ham ratsional son bo'lgani uchun, xyz^2 ham ratsional son bo'ladi. ▲

4-masala. $a+\sqrt{15}=m$ va $\frac{1}{a}-\sqrt{15}=n$ sonlar butun sonlar bo'ladigan a ning barcha qiymatlarini toping.

△ $a+\sqrt{15}=m$, $\frac{1}{a}-\sqrt{15}=n$, m va n – butun sonlar bo'lsin. Bu holda $\left(m-\sqrt{15}\right)\left(n+\sqrt{15}\right)=1$. Bundan $(m-n)\sqrt{15}=16-mn$.

$16-mn$ va $m-n$ butun sonlar. Agar $m \neq n$ bo'lsa, $\frac{16-mn}{m-n}$ ratsional son bo‘ladi. Demak, bu son $\sqrt{15}$ ga teng bo‘la olmaydi. Agar $m=n$ bo‘lsa, $16-mn=0$ bo‘ladi. Bu holda $m=n=\pm4$.

Javob: $a=\pm4-\sqrt{15}$. ▲

5-masala. Noldan farqli a va b sonlar $a^2b^2(a^2b^2+4)=2(a^6+b^6)$ tenglikni qanoatlantiradi. Shulardan biri irratsional bo‘lishini isbotlang.

△ Berilgan tenglikni $(a^4-2b^2)(b^4-2a^2)-0$ ko‘rinishda yozib $\left(\frac{a^2}{b}\right)^2=2$ yoki $\left(\frac{b^2}{a}\right)^2=2$ ekanligini hosil qilamiz. Bu ikkita tenglik a va b sonlar ratsional sonlar bo‘lganda bajarila olmaydi. ▲

Mashqlar

1. r ratsional son, α va β lar esa irratsional sonlar bo‘lsin. Quyidagi sonlar ratsional son bo‘ladimi? Agar bo‘lmasa, mos bo‘lgan misol keltiring:

1) $r+\alpha$; 2) $\alpha+r$; 3) 2α; 4) $\frac{\alpha}{2}$; 5) α^2;
6) $\alpha+\beta$; 7) $\alpha\beta$; 8) $\frac{\alpha}{\beta}$; 9) $\sqrt{\alpha}$; 10) $\sqrt{\alpha+r}$.

2. Sonlarning irratsionalligini isbotlang:

1) $1+\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$; 3) $2\sqrt{3}$; 4) $\frac{\sqrt{5}}{2}$;
5) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 6) $\sqrt{2+\sqrt{2}}$; 7) $\sqrt{5}+\sqrt{2}-1$; 8) $\sqrt{7}+\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

3. Agar a va b sonlardan biri ratsional son, ikkinchisi esa irratsional son bo‘lsa, u holda ularning $a+b$ yig‘indisi, $a-b$ ayirmasi, ab ko‘paytmasi va $b\neq0$ uchun $\frac{a}{b}$ bo‘linmasi irratsional son ekanligini isbotlang.

Ko‘phadning ratsional ildizlari haqidagi teoremalar

1-masala. $2x^3+x^2-5x-3=0$ tenglamaning barcha ratsional ildizlarini toping.

△ $\frac{p}{q}$ qisqarmas kasr tenglamaning ildizi bo‘lsin, bu yerda p – butun, q esa natural son. Bu holda

$$2\left(\frac{p}{q}\right)^3+\left(\frac{p}{q}\right)^2-5\left(\frac{p}{q}\right)-3=0.$$

Bu tenglikni q^3 ga ko‘paytirib,

$$2p^3+p^2q-5pq^2-3q^3-0 \qquad (1)$$

tenglikka ega bo‘lamiz. Bundan

$$2p^3=-p^2q+5pq^2+3q^3$$

tenglik hosil bo‘ladi. Demak, $2p^3$ son q ga bo‘linishi kelib chiqadi. p va q o‘zaro tub, aks holda, $\frac{p}{q}$ qisqarmas kasr bo‘lmaydi. Demak, 2 soni q ga bo‘linar ekan. Bundan q son yoki 1 ga, yoki 2 ga teng bo‘la olishi kelib chiqadi.

Endi (1) tenglikni boshqacha yozamiz:

$$3q^3=2p^3+p^3q-5pq^2.$$

Demak, $3q^3$ son p ga bo‘linar ekan. p va q o‘zaro tub bo‘lgani uchun 3 soni p ga bo‘linadi. Bundan p son yoki ±1 ga, yoki ±3 ga teng bo‘la olishi kelib chiqadi.

p va q sonlarning barcha kombinatsiyalarini qarasak, $\frac{p}{q}$ kasr quyidagi qiymatlarni qabul qila oladi, degan xulosaga kelamiz:

$$-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ -1,\ 1,\ -\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}.$$

Bulardan har birini $2x^3+x^2-5x-3=0$ tenglamaga qo‘yib, $-\frac{3}{2}$ soni uning yagona ratsional ildizi ekanligini hosil qilamiz (boshqa kasrlarning ildiz emasligini tekshirib chiqing):

$$2\left(-\frac{3}{2}\right)^3+\left(-\frac{3}{2}\right)^2-5\left(-\frac{3}{2}\right)-3=2\cdot\left(-\frac{27}{8}\right)+\frac{9}{4}+\frac{15}{2}-3=$$
$$=-\frac{27}{1}+\frac{9}{1}+\frac{15}{2}-3=-\frac{9}{2}+\frac{15}{2}-3=-\frac{6}{2}+3=0.$$

Javob: $-\frac{3}{2}$.

Umumiy holda ham shunday ish tutib, ko‘phadning ratsional ildizlari haqidagi teoremalar deb nomlanadigan 2 ta umumiy tasdiqni isbotlashimiz mumkin.

1-teorema. $P(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$ – koeffitsiyentlari butun bo‘lgan ko‘phad bo‘lsin. Agar $\frac{p}{q}$ qisqarmas kasr shu ko‘phadning ratsional ildizi bo‘lsa, u holda a_0 koeffitsiyent p ga, a_n koeffitsiyent esa q ga qoldiqsiz bo‘linadi.

○ $\frac{p}{q}$ kasr ko‘phadning ildizi, demak,

$$a^n\left(\frac{p}{q}\right)^n+\ldots+a_1\frac{p}{q}+a_0=0.$$

Bundan $a_0q^n=-(a_1pq^{n-1}+\ldots+a_np^n)$ tenglik hosil bo‘ladi.

O‘ng tarafdagi ifoda p ga bo‘linadi, demak, a_0q^n ham p ga bo‘linadi. p va q sonlar o‘zaro tub bo‘lgani uchun a_0 koeffitsiyent p ga qoldiqsiz bo‘linadi. a_n koeffitsiyent esa q ga qoldiqsiz bo‘linishini isbotlash uchun $f\left(\frac{p}{q}\right)=0$ shartni $a_np^n=-(a_0q^n+a_1pq^{n-1}+$ $+\ldots+a_{n-1}p^{n-1}q)$ ko‘rinishda yozib, yuqoridagi mulohazalarni takrorlash yetarli. ●

$P(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$ ko‘phadda a_n koeffitsiyent 1 ga teng bo‘lsa, 1-teoremaning muhim natijasiga ega bo‘lamiz.

2-teorema. $P(x)=x^n+\ldots+a_1x+a_0$ ko‘phadning barcha ratsional ildizlari (agar mavjud bo‘lsa) butun sonlar bo‘ladi.

○ $\frac{p}{q}$ qisqarmas kasr $P(x)=x^n+\ldots+a_1x+a_0$ ko‘phadning ratsional ildizi bo‘lsin. 1-teoremaga ko‘ra $a_n=1$ koeffitsiyent esa q ga qoldiqsiz bo‘linadi. Bundan $q=\pm1$ kelib chiqadi, ya’ni $\frac{p}{q}=\pm p$ – butun son. ●

Endi yuqoridagi teoremalarni masalalar yechishga qo‘llaymiz.

2-masala. $P(x)=x^4-x^2+x-10$ ko‘phadning barcha ratsional ildizlarini toping.

△ 2-teoremaga ko‘ra berilgan ko‘phadning barcha ratsional ildizlari (agar mavjud bo‘lsa) butun sonlar bo‘ladi. Bunda ular -10 sonning bo‘luvchilari bo‘lishi shart. Shu ±1, ±2, ±5, ±10 bo‘luvchilarni tekshirib chiqsak, -2 soni ko‘phadning yagona ildizi ekanligini hosil qilamiz. ▲

3-masala. $P(x)=2x^4+7x^3-12x^2-38x+21$ ko‘phadning barcha ratsional ildizlarini toping.

△ $\frac{p}{q}$ qisqarmas kasr ko‘phadning ildizi bo‘lsin, bu yerda p – butun son, q esa natural son.

1-teoremadan foydalanamiz.

1) 21 sonining barcha butun bo‘luvchilarini topamiz: $p-\pm1, \pm3, \pm7, \pm21$.

2) 2 sonining barcha natural bo‘luvchilarini topamiz: $p-1,\ 2$.

3) $\frac{p}{q}$ kasr quyidagi qiymatlarni qabul qila oladi:

$$\frac{1}{1};\ \frac{-1}{1};\ \frac{3}{1};\ \frac{-3}{1};\ \frac{7}{1};\ \frac{-7}{1};\ \frac{21}{1};\ \frac{-21}{1};\ \frac{1}{2};\ \frac{-1}{2};\ \frac{3}{2};\ \frac{-3}{2};\ \frac{7}{2};\ \frac{-7}{2};\ \frac{21}{2};\ \frac{-21}{2}.$$

Barcha kasrlarni tekshirsak, -3 va $\frac{1}{2}$ ratsional ildizlarni topamiz. ▲

4-masala. Koeffitsiyentlari butun bo‘lgan $x^2+p_1x+q_1$, x^2+p_2x+ $+q_2$ uchhadlar butun son bo‘lmagan umumiy ildizga ega bo‘lmasa, $p_1=p_2$ va $q_1=q_2$ ekanligini isbotlang.

△ 2-teoremaga ko‘ra $x^2+px+q-0$ uchhadning x_1 ildizi butun bo‘lmasa, u irratsional bo‘ladi.

Uchhadlarning umumiy ildizi $(p_1-p_2)x+(q_1-q_2)=0$ tenglamani qanoatlantiradi. Demak, $p_1\neq p_2$ da u ratsional sondir. Bundan, $p_1=p_2$.

Agar $q_1\neq q_2$ bo‘lsa, oxirgi tenglama umuman bajarilmaydi. Ziddiyat.

Yuqoridagi teoremalarni radikallarning irratsionalligini isbotlashga bevosita qo‘llasak bo‘ladi. Buning uchun mos ko‘phadni topish talab qilinadi.

5-masala. $\sqrt{17}$ soni irratsional son ekanligini isbotlang.

△ Mazkur son x^2-17 ko‘phadning ildizi bo‘ladi. Teskarisini faraz qilamiz, ya’ni $\sqrt{17}$ soni ratsional son bo‘lsin. 2-teoremaga ko‘ra u butun son bo‘lishi kerak. Ammo x^2-17 ko‘phad butun ildizlarga ega emas. Ziddiyat. ▲

6-masala. $x^2+ax+b=0$ tenglamaning ildizlaridan biri $1+\sqrt{3}$ ga teng. a va b sonlar ratsional bo’lsa, ularni toping.

△ $x=1+\sqrt{3}$ qiymatni tenglamaga qo‘ysak, $(4+a+b)+(a+2)\sqrt{3}=0$ tenglikni hosil qilamiz. $\sqrt{3}$ soni irratsional son bo‘lgani uchun bu tenglikning bajarilishi uchun bir vaqtda $4+a+b-0$ va $a+2-0$ tengliklar bajarilishi zarur va yetarli. Bundan $a-b--2$ ekani kelib chiqadi. ▲

Mashqlar

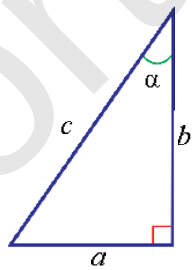
1. Sonlarning irratsional ekanligini isbotlang:

1) $\sqrt[3]{17}$; 2) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; 3) $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$; 4) $\sqrt[3]{3}-\sqrt{2}$.

2. Tenglamalarning ratsional ildizlarini toping:

1) $x^3+3x^2-4x-12=0$; 2) $x^3+5x^2-4x-20=0$;
3) $x^3-3x^2-2x+6-0$; 4) $x^3-7x-6-0$;
5) $x^3-5x^2-2x+10=0$; 6) $x^3-13x+12=0$.

Trigonometrik funksiyalar qiymatlarining irratsionalligi



To‘g‘ri burchakli uchburchakda α o‘tkir burchak qarshisidagi katetning gipotenuzaga nisbati $\frac{a}{c}$ shu burchakning *sinusi* deyiladi va bu nisbat $\sin\alpha$ kabi belgilanadi. α burchakka yopishgan katetning gipotenuzaga nisbati $\frac{b}{c}$ shu burchakning *kosinusi* deyiladi va $\cos\alpha$ kabi belgilanadi. α burchakning *tangensi* deb $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ nisbatga aytiladi.

$\sin 30°=\cos 60°=\frac{1}{2}$, $\sin 60°=\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ekanini ko‘rsatish oson. Bundan $\operatorname{tg} 30°=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\operatorname{tg} 60°=\sqrt{3}$.

1-masala. cos 20° sonining irratsional son ekanligini isbotlang.

△ $\cos3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$ ma’lum formuladan foydalansak, $\cos60°=$ $=4\cos^3 20°-3\cos20°$ tenglikni hosil qilamiz. Demak, $x-\cos 20°$ son

$$4x^3-3x=\frac{1}{2}$$

tenglamani qanoatlantiradi.

Bu tenglamani $8x^3-6x-1=0$ ko‘rinishda yozaylik. Bu tenglama ratsional ildizga ega emasligini ko‘rsatamiz.

$8x^3-6x-1=0$ tenglama $\frac{p}{q}$ qisqarmas kasr ko‘rinishdagi ratsional ildiziga ega bo‘lsin, bu yerda p – butun son, q esa natural son. Bu holda teoremaga ko‘ra 8 koeffitsiyent q ga, –1 koeffitsiyent esa p ga qoldiqsiz bo‘linadi. 8 ning natural bo‘luvchilarini yozamiz: 1, 2, 4, 8.

-1 ning butun bo‘luvchilari -1 va 1 bo‘lgani uchun, $\frac{p}{q}$ kasrning qiymatlari quyidagicha bo‘lishi mumkin:

$$-1;\ 1;\ -\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ -\frac{1}{4};\ \frac{1}{4};\ -\frac{1}{8};\ \frac{1}{8}.$$

Bu kasrlardan birortasi ham $8x^3-6x-1=0$ tenglamani qanoatlantirmaydi.

Izoh. Ravshanki, $y=\frac{1}{\cos 20^\circ}$ son $y^3+6x-8=0$ tenglamani qanoatlantiradi. Bu esa shu sonning irratsionalligini isbotlashga qulaylik tug‘diradi.

2- masala. $\cos\alpha$ son irratsional, barcha $\cos 2\alpha$, $\cos 3\alpha$, $\cos 4\alpha$, $\cos 5\alpha$ sonlar esa ratsional bo‘ladigan α son mavjudmi?

△ Bunday α son mavjud bo‘lsin. Bu holda $A=\cos\alpha+\cos 5\alpha$ son irratsional va ratsional sonlar yig‘indisi sifatida irratsional son bo‘ladi. Ammo $A=2\cos 2\alpha\cos 3\alpha$ va u uchta ratsional sonlar ko‘paytmasi sifatida ratsional. Ziddiyat.

Javob: mavjud emas. ▲

3- masala. $S-\sin 64x+\sin 65x$ va $C-\cos 64x+\cos 65x$ sonlardan ikkalasi ham ratsional sonlar bo‘lsin. Shu yig‘indilardan birida ikkala qo‘shiluvchi ham ratsional sonlar ekanligini isbotlang.

△ $S^2+C^2=(\sin^2 64x+\cos^2 64x)+(\sin^2 65x+\cos^2 65x)+2(\sin 64x\sin 65x+\cos 64x\cos 65x)=2+2\cos(65x-64x)=2+2\cos x$ son ratsional, shuning uchun $\cos x$ son ham ratsional bo‘ladi. $\cos 2a-2\cos^2 a-1$ formulaga ko‘ra $\cos 2^k a$ ko‘rinishdagi barcha sonlar, jumladan $\cos 64x$ son ham ratsional.

Masalaning berilishiga ko‘ra, $C=\cos 64x+\cos 65x$ son ratsional, demak, $\cos 65x$ son ham ratsional.

Mashqlar

Quyidagi sonlarning irratsional yoki ratsional ekanligini tekshiring:

1) $\sin 20^\circ$; 2) $\operatorname{tg} 10^\circ$; 3) $\cos 1^\circ$; 4) $\cos 10^\circ$; 5) $\operatorname{tg} 20^\circ$; 6) $\sin 1^\circ$.

Qo‘shma sonlar. Maxrajni irratsionallikdan qutqarish

Matematikada $\frac{c}{\sqrt{a}}$, $\frac{c}{\sqrt[n]{a^k}}$, $\frac{c}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}$, $\frac{c}{\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}}$ ko‘rinishdagi kasrlar maxrajida bo‘lgan ildizni yo‘qotish amali muhim rol o‘ynaydi. Bunday almashtirish trigonometriyada ham uchraydi. Masalan, $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Maxrajni irratsionallikdan qutqarish usullarini qaraylik.

$$\frac{c}{\sqrt{a}}. \tag{1}$$

Bu holda kasrning surat va maxrajini $\sqrt{a}$ ga ko‘paytiramiz:

$$\frac{c}{\sqrt{a}} = \frac{c \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}} = \frac{c \cdot \sqrt{a}}{a}.$$

1-masala. Maxrajni irratsionallikdan qutqaring: $\frac{5}{\sqrt{3}}$.

△ $\frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{3}$. ▲

$$\frac{c}{\sqrt[n]{a^k}}, \quad n > k. \tag{2}$$

Bu holda kasrning surat va maxrajini $\sqrt[n]{a^{n-k}}$ ga ko‘paytiramiz:

$$\frac{c}{\sqrt[n]{a^k}} = \frac{c \cdot \sqrt[n]{a^{n-k}}}{\sqrt[n]{a^k} \cdot \sqrt[n]{a^{n-k}}} = \frac{c \cdot \sqrt[n]{a^{n-k}}}{\sqrt[n]{a^n}} = \frac{c \cdot \sqrt[n]{a^{n-k}}}{a}.$$

2-masala. Maxrajni irratsionallikdan qutqaring: $\frac{6}{\sqrt[4]{2^3}}$.

$$\frac{6}{\sqrt[4]{2^3}} = \frac{6 \cdot \sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2^3} \cdot \sqrt[4]{2}} = \frac{6 \cdot \sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2^4}} = \frac{6 \cdot \sqrt[4]{2}}{2} = 3 \cdot \sqrt[4]{2}.$$

$$\frac{c}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}, \quad a \neq b. \tag{3}$$

Bu holda kasrning surat va maxrajini qo‘shma son deb ataluvchi $\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$ songa ko‘paytiramiz:

$$\frac{c}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \frac{c \cdot \left(\sqrt{a} \mp \sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a} \pm \sqrt{b}\right) \cdot \left(\sqrt{a} \mp \sqrt{b}\right)} = \frac{c \cdot \left(\sqrt{a} \mp \sqrt{b}\right)}{a - b}.$$

3-masala. Maxrajni irratsionallikdan qutqaring:

a) $\frac{7}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$; b) $\frac{5-4\sqrt{3}}{5\sqrt{3}-9}$.

△ a) $\frac{7}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{7 \cdot \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right) \cdot \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)} = \frac{7 \cdot \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{3-2} = 7 \cdot \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$;

b) $\frac{5-4\sqrt{3}}{5\sqrt{3}-9}=\frac{(5-4\sqrt{3})(5\sqrt{3}+9)}{(5\sqrt{3}-9)(5\sqrt{3}+9)}=\frac{25\sqrt{3}+45-60-36\sqrt{3}}{(5\sqrt{3})^2-9^2}=\frac{-11\sqrt{3}-15}{75-81}=\frac{15-11\sqrt{3}}{6}$. ▲

$$\frac{c}{\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}}. \qquad (4)$$

Bu holda kasrning surat va maxrajini ayirmaning (yig'indining) to'liqmas kvadratiga ko'paytiramiz:

$$\frac{c}{\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}}=\frac{c\cdot\left(\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}=\frac{c\cdot\left(\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{a\pm b}.$$

4- masala. Maxrajni irratsionallikdan qutqaring: $\frac{3}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}$.

△ $\frac{3}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}=\frac{3\cdot\left(\sqrt[3]{5^2}+\sqrt[3]{5\cdot2}+\sqrt[3]{2^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{5^2}+\sqrt[3]{5\cdot2}+\sqrt[3]{2^2}\right)}=\frac{3\cdot\left(\sqrt[3]{5^2}+\sqrt[3]{5\cdot2}+\sqrt[3]{2^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{5}\right)^3-\left(\sqrt[3]{2}\right)^3}=\sqrt[3]{5^2}+\sqrt[3]{5\cdot2}+\sqrt[3]{2^2}$. ▲

Endi maxrajni irratsionallikdan qutqarish yordamida ba'zi ifodalarni soddalashtiramiz.

5- masala. Ifodani soddalashtiring: $\frac{5}{\sqrt{12}+\sqrt{2}}-\sqrt{2,5}-\frac{1}{\sqrt{10}+2\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{2}}$.

△ $\frac{5}{\sqrt{12}+\sqrt{2}}-\sqrt{2,5}-\frac{1}{\sqrt{10}+2\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{5(\sqrt{12}-\sqrt{2})}{(\sqrt{12}+\sqrt{2})(\sqrt{12}-\sqrt{2})}-\sqrt{2,5}-$

$-\frac{\sqrt{10}-2\sqrt{3}}{(\sqrt{10}+2\sqrt{3})(\sqrt{10}-2\sqrt{3})}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{5(\sqrt{12}-\sqrt{2})}{10}-\sqrt{2,5}-\frac{\sqrt{10}-2\sqrt{3}}{-2}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=$

$=\frac{10\sqrt{3}}{10}-\frac{5\sqrt{2}}{10}-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{10}}{2}-\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{10}}{2}+\frac{\sqrt{10}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=0.$ ▲

6- masala. Hisoblang: $\frac{\sqrt{6-\sqrt{35}}}{\sqrt{6+\sqrt{35}}}+\sqrt{35}$.

△ $\frac{\sqrt{6-\sqrt{35}}}{\sqrt{6+\sqrt{35}}}+\sqrt{35}=\frac{\sqrt{6-\sqrt{35}}\cdot\sqrt{6-\sqrt{35}}}{\sqrt{6+\sqrt{35}}\cdot\sqrt{6-\sqrt{35}}}+\sqrt{35}=\frac{6-\sqrt{35}}{1}+\sqrt{35}=6.$ ▲

7- masala. Hisoblang: $\sqrt{\left(5-\sqrt{11}\right)^2}+\sqrt{\left(3-\sqrt{11}\right)^2}$.

△ Har bir qo'shiluvchini qaraylik:

$\sqrt{\left(5-\sqrt{11}\right)^2}=\left|5-\sqrt{11}\right|$, chunki $5=\sqrt{25}>\sqrt{11}$, bundan $\left|5-\sqrt{11}\right|=5-\sqrt{11}$;

$\sqrt{\left(3-\sqrt{11}\right)^2}=\left|3-\sqrt{11}\right|$, chunki $3=\sqrt{9}<\sqrt{11}$, bundan $\left|3-\sqrt{11}\right|=\sqrt{11}-3$. ▲

Ularni qo‘shib chiqamiz: $5-\sqrt{11}+\sqrt{11}-3=2$.

8-masala. Soddalashtiring: $\dfrac{\sqrt{21}+\sqrt{7}-\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}-\sqrt{7}$.

△ $\dfrac{\sqrt{21}+\sqrt{7}-\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}-\sqrt{7}=\dfrac{\sqrt{21}+\sqrt{7}-\sqrt{3}-1-\sqrt{21}-\sqrt{7}}{\sqrt{3}+1}=\dfrac{-\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=-1$. ▲

9-masala. Soddalashtiring: $\dfrac{\sqrt{11}-\sqrt{5}}{\sqrt{11}+\sqrt{5}}+\dfrac{\sqrt{11}+\sqrt{5}}{\sqrt{11}-\sqrt{5}}$.

△ Umumiy maxrajga keltiramiz:

$$\frac{\sqrt{11}-\sqrt{5}}{\sqrt{11}+\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{11}+\sqrt{5}}{\sqrt{11}-\sqrt{5}}=\frac{\left(\sqrt{11}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{11}-\sqrt{5}\right)+\left(\sqrt{11}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{11}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{11}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{11}-\sqrt{5}\right)}.$$

Suratda yig‘indi va ayirmaning kvadrati formulalarini, maxrajda esa kvadratlar ayirmasi formulasini qo‘llaymiz:

$$\frac{\left(\sqrt{11}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{11}-\sqrt{5}\right)+\left(\sqrt{11}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{11}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{11}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{11}-\sqrt{5}\right)}=\frac{11-2\sqrt{55}+5+11+2\sqrt{55}+5}{11-5}=\frac{32}{6}=5\frac{1}{3}.$$ ▲

Mashqlar

1. Hisoblang: 1) $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{50}}$; 2) $\dfrac{\sqrt{99}}{\sqrt{11}}$; 3) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{48}}$; 4) $\dfrac{\sqrt{52}}{\sqrt{13}}$.

2. Kasrning maxrajini irratsionallikdan qutqaring:

1) $\dfrac{1}{2\sqrt{5}}$; 2) $\dfrac{8}{\sqrt{7}-1}$; 3) $\dfrac{2}{3\sqrt{7}}$; 4) $\dfrac{4}{\sqrt{11}+3}$.

3. Kasrni qisqartiring:

1) $\dfrac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$; 2) $\dfrac{7+\sqrt{7}}{\sqrt{7}}$; 3) $\dfrac{\sqrt{10}-5}{\sqrt{10}-2}$; 4) $\dfrac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}$; 5) $\dfrac{5-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$.

4. Ifodaning qiymatini toping:

1) $\dfrac{2}{3\sqrt{5}+1}-\dfrac{2}{3\sqrt{5}-1}$; 2) $\left(4\sqrt{5}-\dfrac{6}{\sqrt{5}}\right)+\left(3\sqrt{5}-\dfrac{13}{\sqrt{5}}\right)$; 3) $\dfrac{4}{3+\sqrt{15}}-\dfrac{4}{3-\sqrt{15}}$;

4) $\left(\dfrac{13}{\sqrt{5}}-3\sqrt{5}\right)+\left(\dfrac{6}{\sqrt{5}}-4\sqrt{5}\right)$; 5) $\dfrac{7}{\sqrt{7}}-\dfrac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}+\dfrac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$.

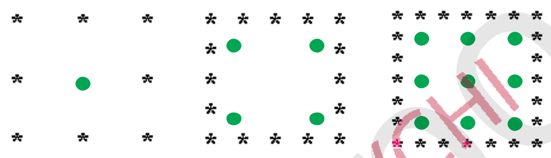
5. Ifodaning qiymatini hisoblang:

1) $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1599}+\sqrt{1600}}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{8}}$;

3) $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{81}}$.

Amaliy-tatbiqiy va fanlararo bog‘liq masalalar

325. Rasmdagi yashil nuqtalar bilan noyob navli mevali daraxtlar (masalan, noyob navli nok) belgilangan. Noklar o‘lchamlari $n \times n$ (m^2) bo‘lgan kvadratlarga ekilgan. Qizil yulduzchalar (*) orqali esa ihota daraxtlari belgilangan. Nokzor atrofidagi ihota daraxtlari kvadrat tomonlari bo‘ylab ekilgan (8-rasm)



8-rasm.

Savollarga javob bering:
1) 20 m × 20 m; 2) 25 m × 25 m o‘lchamli kvadratga ekilgan noklarni „o‘rab“ turuvchi ihota daraxtlari soni nechta?
3) Noklar soni bilan ularni „o‘rab“ turuvchi ihota daraxtlari soni orasida qanday bog‘lanish bor?

326. Yuqoridagi masala shartlarida n ning qanday qiymatlarida n-kvadratdagi noklar soni ularni „o‘rab“ turuvchi daraxtlar soniga:
1) teng; 2) katta; 3) kichik bo‘ladi?
4) Jadvalni to‘ldiring va tahlil qiling. Xulosa chiqaring.

Kvadrat tomonining uzunligi (m)	Noklar soni	Ihota daraxtlari soni
1	1	8
2	4	16
.	.	.
.	.	.
.	.	.
10	...	...

327. Avtomobillar reytingini aniqlashda quyidagilar hisobga olinadi: xavfsizligi (S), qulayligi (C), turli xil vazifalarni bajara olishi (F), sifati (Q) va dizayni (D). Bu ko‘rsatkichlarning har biri baholanadi (masalan, ball beriladi). Avtomobil reytingi ushbu formula bo‘yicha hisoblanadi: $R=\frac{3S+2C+2F+2Q+D}{50}$.

Jadvalda avtomobillarning 3 xil rusumi (shartli ravishda *X*, *Y*, *Z* rusumlar) uchun har xil ko‘rsatkichning bahosi keltirilgan.

Avtomobil rusumi	Xavfsizligi *S*	Qulayligi *C*	Turli vazifalarni bajarishi *F*	Sifati *Q*	Dizayni *D*
X	3	3	5	5	3
Y	4	5	3	4	3
Z	4	4	3	3	4

1) Qaysi rusumdagi avtomobil eng yuqori reytingga ega?
2) Avtomobil rusumlarini reytingining pasayib borishi tartibida joylashtiring.
3) Siz uchun qaysi ko‘rsatkich muhim? Nega?
4) Siz qanday reytingli avtomobilni tanlar edingiz? Nega?

328. Nafas olish, ovqatni hazm qilish, qon aylanishi uchun zarur energiya – asosiy almashinuv intensivligi (tezligi)dir.
Asosiy almashinuv intensivligini AAI deb belgilaylik. AAI kaloriyalarda o‘lchanadi, bunda kishi temperaturasi 23 °C bo‘lgan xonada xotirjam va tinch holatda yotgan bo‘lishi lozim. Ayollarda AAI quyidagi formula asosida hisoblanadi:

$$\text{AAI}= 9,74M+172,9P-4,737B+667,051, \qquad (*)$$

bunda M – ayolning massasi, P – bo‘yining uzunligi (metrlarda), B – yoshi (yillarda).
1) Agar $M=60$ kg, $P=1,7$ m, $B=35$ yil bo‘lsa, AAI ni hisoblang (eng yaqin butun songacha yaxlitlang);
2) (*) formuladan ayolning massasi, bo‘yi va yoshi AAI ga qanday ta’sir qilishini bilib olish mumkin.
3) Bir shifokor „Agar ikkita ayolning massasi, yoshi bir xil bo‘lib, bo‘ylarining farqi 10 cm bo‘lsa, ularning AAI orasidagi farq 17,29 kilokaloriya bo‘ladi“, – degan xulosaga keldi. Bu xulosa to‘g‘rimi? Uni (*) formula yordamida tekshirib ko‘ring.

Savollarga javob bering:
a) Yosh ortgan sari AAI ham ortadimi?
b) Bo‘yning baland-pastligi AAI ga qanday ta’sir qiladi?
d) 667,051 soni ayolning yoshiga, bo‘yiga, massasiga bog‘liqmi?

e) Agar ayolning massasi kamaysa (u ozsa), AAI bu ayolda o‘zgaradimi?

329. Bir dona buyumni tayyorlash vaqti bilan bir soatda tayyorlanadigan buyumlar soni orasidagi bog‘lanish teskari proporsional bog‘lanish bo‘ladi. Jadvalni to‘ldiring va tahlil qiling. Xulosa chiqaring.

Bitta buyumni tayyorlashga sarflangan vaqt (minut)	2	3		5	6		10	12	
Bir soatda ishlab chiqarilgan buyumlar soni (dona)	30		15			8	6		4

330. Daryoning ayrim joylaridagi ko‘ndalang kesim yuzi bilan shu joylarga mos o‘rtacha oqim tezligi teskari proporsional miqdorlardir. Jadvalni to‘ldiring. Qanday xulosaga keldingiz?

Ko‘ndalang kesim yuzi (m^2)	40	45		54	60		
Oqim tezligi (m/s)	0,9	0,8	0,75			0,5	0,4

331. Ikki metr uzunlikdagi xodalarni arrakashlar 4,5 soatda 0,5 m li g‘o‘lalarga bo‘lib tashladilar. Agar o‘sha xodalarni 40 cm li g‘o‘la qilib arralasalar, ularni qancha vaqtda arralab bo‘lardilar? Bu holda ish hajmi qanday nisbatda o‘zgargan bo‘lardi?

332. 1) Ikkita shkiv qayish bilan birlashtirilgan. Birinchi shkivning diametri 28 cm, ikkinchi shkivniki esa 42 cm. Birinchi shkiv minutiga 600 marta aylanadigan bo‘lsa, ikkinchi shkiv minutiga necha marta aylanadi?
2) Ikkita shkiv qayish bilan birlashtirilgan. Birinchi shkiv minutiga 560 marta, ikkinchisi esa 240 marta aylanadi. Birinchi shkivning aylanasi 0,36 m bo‘lsa, ikkinchi shkivning aylanasi uzunligini toping.

333. *A* va *B* shaharlar orasidagi masofa 360 km. Bu masofani yengil mashina 4 soatda, yuk mashinasi esa 6 soatda bosib o‘tadi. *A* dan *B* ga qarab yuk mashinasi yo‘lga chiqdi. Xuddi shu vaqtda *B* dan *A* ga qarab yengil mashina yo‘lga chiqdi. Ular *A* dan necha kilometr narida uchrashadilar?

△ Yengil va yuk mashinalarining tezliklari turlicha bo‘lgani uchun to‘g‘ri proporsional bog‘lanish yo‘q, binobarin, 360 km masofani 4 va 6 sonlariga to‘g‘ri proporsional bo‘lish bilan masalani hal qilib bo‘lmaydi.

Boshqa usulni qo‘llaymiz:

1 soatda yengil mashina AB masofaning $\frac{1}{4}$ qismini o‘tadi, yuk mashinasi esa $\frac{1}{6}$ qismini o‘tadi. Demak, uchrashish joyini aniqlash uchun 360 km masofani $\frac{1}{4}$ va $\frac{1}{6}$ sonlariga proporsional qilib bo‘lish kerak.

Ammo $\frac{1}{4}:\frac{1}{6}-\frac{3}{12}:\frac{2}{12}=3:2.$

Bundan $3+2=5$. Mashinalar A dan x km narida uchrashadilar desak,

$$x=\frac{360}{5}\cdot 2=144\ (\text{km}).$$

Javob: A dan 144 km narida. ▲

Sonni berilgan sonlarga teskari proporsional qilib bo‘lish uchun shu sonni berilgan sonlarga teskari bo‘lgan sonlarga to‘g‘ri proporsional qilib bo‘lish kerak.

334. 195 sonini 2, 3, 4 sonlariga teskari proporsional qilib uch qismga ajrating.

△ 2, 3, 4 sonlariga teskari sonlar, mos ravishda, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$.

Binobarin, 195 ni $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ sonlariga to‘g‘ri proporsional qilib uch qismga ajratish kerak. Ammo $\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{4}=\frac{6}{12}:\frac{4}{12}:\frac{3}{12}=6:4:3$.

Birinchi sonni a_1, ikkinchi sonni a_2, uchinchi sonni a_3 desak, u holda

$$a_1-\frac{195\cdot 6}{6+4+3}-\frac{195\cdot 6}{13}-15\cdot 6=90;\quad a_2-\frac{195\cdot 4}{13}-15\cdot 4=60;$$

$$a_3-\frac{195\cdot 3}{13}-15\cdot 3=45.$$

Javob: 90, 60, 45. ▲

335. 1) 4 480 sonini: a) $\frac{1}{3}$ va $\frac{3}{5}$; b) $\frac{3}{4}$ va $\frac{2}{9}$ sonlariga teskari proporsional qilib ikki qismga ajrating.
2) 987 sonini: a) 0,6 va 0,3; b) 0,4 va 0,(3) sonlariga teskari proporsional qilib ikki qismga ajrating.

336. 1) 2040 sonini $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ va $\frac{5}{6}$ sonlariga teskari proporsional bo‘lgan 3 ta qismga ajrating.
2) 4530 sonini $\frac{2}{3}$, 0,7 va $1\frac{1}{2}$ sonlariga teskari proporsional bo‘lgan 3 ta qismga ajrating.

337. 1) *A* va *B* shaharlar orasidagi masofa 465 km. Bu masofani yo‘lovchi poyezdi 10,5 soatda, yuk poyezdi esa 12 soatda o‘tadi. Poyezdlar *A* va *B* shaharlardan bir vaqtda bir-biriga qarab yo‘lga chiqsa, ularning har biri uchrashguncha necha kilometr yo‘l bosadi?
2) Birinchi sportchi 100 m masofani 12 s da, ikkinchisi esa 13 s da chopib o‘tadi. Ular bir-biridan 200 m masofada turib bir vaqtda bir-birlariga qarab yugura boshlashdi. Uchrashguncha ularning har biri necha metr masofani bosib o‘tadi?

338. 1) 36 tishli shesterna (moslama) 18 tishli shesterna bilan tishlashtirilgan. 18 tishli shesterna 60 marta aylansa, 36 tishli shesterna necha marta aylanadi? 18 tishli shesterna 24 marta aylanadigan bo‘lsa-chi?
2) Velosipedning pedallari biriktirilgan oldingi (yetaklovchi) shesternada 48 ta tish, orqa g‘ildirakka biriktirilgan shesternada 16 ta tish bor. Agar velosipedning pedalli shesternasi minutiga 40 marta aylansa, orqadagi g‘ildirak necha marta aylanadi? Pedalli shesterna 45 marta; 60 marta aylansa-chi? Agar velosiped g‘ildiragining diametri 70 cm bo‘lsa, yuqoridagi har qaysi hol uchun velosipedning tezligini toping.

339. 1) *Abu Rayhon Beruniy masalasi.* G‘ishtning o‘lchamlari 5, 4, 3 uzunlik birligiga teng. Bunday g‘ishtning 30 donasining narxi 60 dirham (pul birligi). O‘lchamlari 8, 6, 2 uzunlik birligiga teng 20 dona g‘ishtning narxi necha dirham bo‘ladi?
2) G‘ishtning bo‘yi, eni va balandligi 4 : 2 : 1 kabi nisbatda, deylik. Bo‘yi bilan 6 ta g‘isht qo‘yish mumkin bo‘lgan joyga eni bilan nechta va balandligi bilan nechta g‘isht qo‘yish mumkin?

II BOB TENGSIZLIKLAR

11-§. Sonli tengsizliklar

Ratsional sonlar va ularning xossalari haqida ma'lumot berib o'tamiz.

Ratsional son deb $\frac{k}{n}$ ko'rinishidagi songa aytiladi, bunda k – butun son, n – natural son.

Musbat ratsional son $\frac{k}{n}$ ko'rinishidagi son, bunda k va n – natural sonlar.

Manfiy ratsional son $-\frac{k}{n}$ ko'rinishidagi son, bunda k va n – natural sonlar.

Chekli o'nli kasrlar, davriy o'nli kasrlar ham ratsional sonlardir, ularni $\frac{k}{n}$ ko'rinishida tasvirlash mumkin.

Misollar:

1) $0,3=\frac{3}{10}$; $0,27=\frac{27}{100}$; $1,25=1\frac{25}{100}=\frac{125}{100}=\frac{5}{4}$; 2) $-7,5=-\frac{75}{10}=-\frac{15}{2}$;

3) $0,777...=0,(7)=\frac{7}{9}$; $0,212121...=0,(21)=\frac{21}{99}=\frac{7}{33}$;

4) $2,1333...=2,1(3)=2\frac{13-1}{90}=2\frac{12}{90}=2\frac{2}{15}=\frac{32}{15}$, ya'ni $2,1(3)=\frac{32}{15}$.

$a>0$ yozuv a sonning noldan kattaligini, ya'ni a son musbat ekanini anglatadi. $b<0$ yozuv esa b sonning noldan kichikligini, ya'ni b manfiy son ekanini anglatadi. „>“ va „<“ ***tengsizlik ishoralari qarama-qarshi ishoralar*** deyiladi. $1>0$ va $3>0$; $-3<0$ va $-7<0$ – bir xil ishorali; $5>0$ va $-6<0$ esa qarama-qarshi ishorali tengsizliklardir. Sonlarning muhim xossalarini jadval ko'rinishida keltiramiz.

Harflar yordamida ifodalanishi	So‘zlar yordamida ifodalanishi
1. Agar $a>0$ va $b>0$ bo‘lsa, u holda $a+b>0$, $ab>0$, $\frac{a}{b}>0$ bo‘ladi.	Ikkita musbat sonning yig‘indisi, ko‘paytmasi va bo‘linmasi musbat sonlar bo‘ladi.
2. Agar $a<0$ va $b<0$ bo‘lsa, u holda $a+b<0$, $ab>0$, $\frac{a}{b}>0$ bo‘ladi.	Manfiy sonlarning yig‘indisi manfiy son, ikkita manfiy sonning ko‘paytmasi va bo‘linmasi esa musbat sonlar bo‘ladi.
3. Agar $a>0$ va $b<0$ bo‘lsa, u holda $ab<0$, $\frac{a}{b}<0$, $\frac{b}{a}<0$ bo‘ladi.	Musbat son bilan manfiy sonning ko‘paytmasi va bo‘linmasi manfiy sonlar bo‘ladi.
4. Agar $ab>0$ bo‘lsa, u holda yoki $a>0$ va $b>0$, yoki $a<0$ va $b<0$ bo‘ladi. Agar $\frac{a}{b}>0$ bo‘lsa, u holda yoki $a>0$ va $b>0$, yoki $a<0$ va $b<0$ bo‘ladi.	Agar ikkita sonning ko‘paytmasi yoki bo‘linmasi musbat bo‘lsa, u holda bu sonlar bir xil ishoraga ega bo‘ladi (ya’ni ikkala son musbat yoki ikkalasi manfiy bo‘ladi).
5. Agar $ab<0$ bo‘lsa, u holda yoki $a>0$ va $b<0$, yoki $a<0$ va $b>0$ bo‘ladi. Agar $\frac{a}{b}<0$ bo‘lsa, u holda yoki $a>0$ va $b<0$, yoki $a<0$ va $b>0$ bo‘ladi.	Agar ikkita sonning ko‘paytmasi yoki bo‘linmasi manfiy bo‘lsa, u holda bu sonlar har xil ishoraga ega bo‘ladi (ya’ni ulardan biri musbat, ikkinchisi esa manfiy bo‘ladi).
6. Agar $ab=0$ bo‘lsa, u holda yoki $a-0$ va $b\neq0$, yoki $a\neq0$ va $b-0$, yoki $a=0$ va $b=0$ bo‘ladi.	Agar ikkita sonning ko‘paytmasi nolga teng bo‘lsa, u holda shu sonlardan aqalli bittasi nol bo‘ladi.
7. Agar $\frac{a}{b}=0$ bo‘lsa, u holda $a=0$ va $b\neq0$ bo‘ladi.	Agar kasr nolga teng bo‘lsa, u holda uning surati nol bo‘ladi, maxraji esa nolga teng bo‘lmaydi.

1-masala. $a>0$, $b<0$ bo‘lsa, $a^2\cdot b+b^3<0$ ekanini isbotlang.

△ $a>0$ bo‘lgani uchun $a^2=a\cdot a>0$ ekani ravshan. $a^2>0$ va $b<0$ bo‘lgani uchun, 3-xossaga ko‘ra $a^2\cdot b<0$ bo‘ladi. $b^3=b^2\cdot b$, ammo ikkita manfiy sonning ko‘paytmasi musbat son, musbat sonning manfiy songa ko‘paytmasi esa manfiy son (3-xossa), demak, $b^3<0$. Ikkita manfiy sonning yig‘indisi 2-xossaga muvofiq manfiy sondir. Shunday qilib, $a^2b+b^3<0$. ▲

2-masala. Tenglamani yeching: $(4x-1)(2x+5)-0$.

△ 6-xossaga muvofiq, ko‘paytuvchilardan hech bo‘lmaganda (aqalli) bittasi nolga teng bo‘lsa, u holda ko‘paytma nolga teng bo‘ladi. Demak, $4x-1-0$ yoki $2x+5-0$ bo‘lishi kerak. $4x-1-0$ tenglamani yechib, $x=\frac{1}{4}$ ekanini topamiz. $2x+5-0$ tenglamadan esa $x=-\frac{5}{2}$.

Javob: $x=\frac{1}{4}, x=-\frac{5}{2}$. ▲

3-masala. Tenglamani yeching: $\frac{x^2-9}{x-3}=0$.

△ 7-xossaga ko‘ra, $x^2-9=0$ va maxraj $x-3\neq 0$ bo‘lishi kerak, shunda berilgan kasr nolga teng bo‘ladi.

$x^2-9=(x-3)(x+3)=0$ tenglamadan $x_1=3$, $x_2=-3$. Agar $x=-3$ bo‘lsa, maxraj $x-3\neq 0$, ammo $x-3$ bo‘lganida, maxraj $x-3$ nolga aylanadi, ya’ni $x=3$ berilgan tenglamaning ildizi bo‘la olmaydi.

Javob: $x=-3$. ▲

1. Savollarga javob bering. Topshiriqlarni bajaring:

1) Musbat, manfiy son ta’riflarini ayting. Misollar keltiring.
2) Ratsional son deganda nimani tushunasiz? Javobingizni misollarda izohlang.
3) -2; $-1{,}5$; -1; 0; 1; 2; 3; $3{,}5$ sonlarini son o‘qida tasvirlang. Bu sonlarning eng kattasi qaysi? Eng kichigi-chi? Nima uchun?

2. 1) Bir xil ishorali; 2) har xil ishorali tengsizliklarga 5 tadan misol keltiring.

3. Agar: 1) $a+b>0$; 2) $a+b<0$; 3) $a-b>0$; 4) $a-b<0$ bo‘lsa, a va b sonlarning ishoralari haqida nima deyish mumkin? Misollarda tushuntiring.

4. Agar: 1) $ab>0$; 2) $ab<0$; 3) $\frac{a}{b}>0$; 4) $\frac{a}{b}<0$; 5) $\frac{b}{a}>0$; 6) $\frac{b}{a}<0$ bo‘lsa, a va b sonlarning ishoralari haqida nima deyish mumkin? Misollarda tushuntiring.

5. Agar: 1) $ab=0$; 2) $\frac{a}{b}=0$; 3) $\frac{b}{a}=0$ bo‘lsa, a va b sonlar haqida nima deyish mumkin? Misollarda tushuntiring.

6. Agar $a<0$ bo‘lsa, u holda $a^{2n}>0$, $a^{2n+1}<0$ bo‘lishini isbotlang, bunda n – natural son.

7. Ifodaning son qiymatini toping: 1) $a^5b^4c^3$, bunda $a--1$, $b-2$, $c--2$; 2) $a^3b^5c^9$, bunda $a--2$, $b-1$, $c--1$.

8. a ning istalgan qiymatida ifodaning qiymati musbat bo‘lishini isbotlang:

1) $(4+3a)^2-15a(a+16)$; 2) $(7a-4)^2-16a(3a-1{,}75)$.

9. a ning istalgan qiymatida ifodaning qiymati manfiy bo‘lishini ko‘rsating:

1) $(-2{,}7)^{2019}-2020a^2$; 3) $8a(3a-2{,}5)-(5a-2)^2$;
2) $(-7{,}2019)^3-(4-3a)^8$; 4) $9a(3a+4)-(6a+3)^2$.

10. Agar $a<0$, $b>0$ bo‘lsa, ifodaning ishorasini (musbat yoki manfiy ekanini) aniqlang:

1) $a^{2n+1}\cdot b^{2n}$, $n-$natural son; 2) $(8a-3b)(6b-5a)$; 3) $\frac{9b-8a}{12a-7b}$.

11. Tenglamaning katta va kichik ildizlari: a) yig‘indisini; b) ayirmasini; d) ko‘paytmasini; e) nisbatini toping:

1) $(3+x)(x+5)=0$; 2) $(x^2-1)(x^2-9)=0$;
3) $(x+1)(x+4)=0$; 4) $(x+3)(x^2-16)=0$.

12. Tenglamani yeching:

1) $\frac{x^2-25}{x-5}=0$; 2) $\frac{x^2-1}{x+1}=0$; 3) $\frac{x(x+1)}{x^2+2}=0$; 4) $\frac{x(x^2-4)}{x^2+4}=0$.

13. $a>0$, $b<0$ bo‘lsin. Isbotlang:

1) $3a-2b>0$; 2) $a^3b^3+7b<0$; 3) $4b-5a<0$; 4) $ab(a^2+b^2)<0$.

14. Ifodaning qiymati musbat yoki manfiymi ekanini hisoblashni bajarmasdan aniqlang:

1) $(-2{,}8)^4\cdot(-1)^{2015}$; 2) $(-1{,}1)^3\cdot(-1)^{2014}\cdot(-2)^{2013}$;
3) $(-10)^3\cdot(-5)^7\cdot(-1)^{16}$; 4) $(-15)^{71}\cdot(-3)^8\cdot(-2)^{12}$; 5) $(-1)^{1001}\cdot(-1)^3$.

12-§. Sonli tengsizliklarning asosiy xossalari

1. Sonli tengsizliklar

Sonlarni taqqoslash amaliyotda keng qo‘llaniladi. Masalan, fermer bu yilgi hosilni o‘tgan yildagi hosil bilan taqqoslaydi; shifokor bemor qon bosimini sog‘lom odamning qon bosimi bilan taqqoslaydi; sinf rahbari II chorakda fanlar bo‘yicha o‘zlashtirish sifatini I chorakdagi natija bilan taqqoslaydi. Bunga o‘xshash misollarni yana ko‘plab keltirish mumkin. Ularning hammasida sonlar o‘zaro taqqoslanadi. Sonlarni taqqoslash natijasida sonli tengsizliklar hosil bo‘ladi.

Agar $a-b$ ayirma musbat bo'lsa, a son b sondan katta bo'ladi.

Agar $a-b$ ayirma manfiy bo'lsa, a son b sondan kichik bo'ladi.

Agar a son b sondan katta bo'lsa, bu $a>b$ kabi yoziladi. Agar a son b sondan kichik bo'lsa, buni $a<b$ kabi yozamiz.

Demak, $a>b$ tengsizlik $a-b$ ayirma musbat, ya'ni $a-b>0$ ekanini anglatadi. Shuningdek, $a<b$ tengsizlik $a-b$ ayirma manfiy, ya'ni $a-b<0$ ekanini bildiradi.

Ixtiyoriy ikkita a va b sonlar uchun quyidagi uchta munosabatdan faqat bittasi o'rinli bo'ladi:

$$a>b, \quad a=b, \quad a<b.$$

a va b sonlarni taqqoslash deganda ular orasiga $>$, $=$, $<$ ishoralaridan qaysinisi qo'yilsa, to'g'ri munosabat hosil bo'lishini aniqlash tushuniladi.

Masalan, -6 va -9 sonlari orasiga $>$ belgisi qo'yilsa, to'g'ri munosabat hosil bo'ladi: $-6>-9$. Lekin $-6=-9$, $-6<-9$ munosabatlar to'g'ri emas.

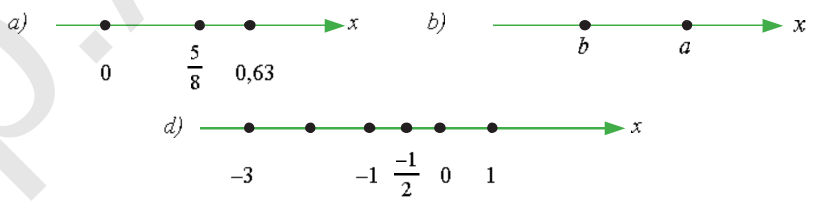
1-masala. 0,63 va $\frac{5}{8}$ sonlarini taqqoslang.

△ Bu sonlar ayirmasini hisoblaymiz:

$$0,63-\frac{5}{8}=0,63-0,625=0,005>0, \text{ demak, } 0,63>\frac{5}{8}.$$

Bu tengsizlik son o'qida 0,63 soni $\frac{5}{8}$ sonidan o'ngda yotishini anglatadi. Umuman, $a>b$ tengsizlik son o'qida a nuqta b nuqtadan o'ngda yotishini bildiradi. (9-*a* va *b* rasmlar). ▲

-3 nuqta son o'qida -1 nuqtadan chapda yotadi, chunki $-3<-1$. Shuningdek, $-\frac{1}{2}<0$, chunki $-\frac{1}{2}$ sonini 0 sonidan chapda yotadi. $0<1$, chunki 1 soni 0 sonidan o'ngda yotadi (9-*d* rasm).



9-rasm.

2-masala. Agar $a>b$ bo'lsa, u holda $b<a$ bo'lishini isbotlang.

△ $a>b$ tengsizlik $a-b$ ayirma musbat son ekanini anglatadi. Shu bilan birga, $b-a=-(a-b)$ – manfiy sondir, ya'ni $b-a<0$, bundan $b<a$ ekanligi ma'lum bo'ladi. ▲

3- masala. Agar $a\neq b$ bo'lsa, u holda $a^2+b^2>2ab$ bo'lishini isbotlang.

△ a^2+b^2-2ab ayirma musbat ekanini isbotlash kifoya. Chindan ham, $a^2+b^2-2ab-a^2-2ab+b^2-(a-b)^2$. Shartga ko'ra, $a\neq b$ bo'lgani uchun $(a-b)^2>0$. ▲

15. 1) $a>b$ tengsizlik geometrik nuqtayi nazardan nimani bildiradi? Bu tengsizlikda a va b sonlarning ishoralari qanday bo'lishi mumkin? Barcha hollarni qarang.

16. Agar a, b, c – musbat sonlar va $a>b$ bo'lsa, u holda

$$\frac{a+c}{b+c}<\frac{a}{b};\quad \frac{b+c}{a+c}>\frac{b}{a}$$

bo'lishini isbotlang. Xulosa chiqaring.

17. Agar k, n, m natural sonlar va $n>m$ bo'lsa, u holda

1) $\frac{m}{n}<\frac{m+k}{n+k}$; 2) $\frac{n}{m}>\frac{n+k}{m+k}$

bo'lishini isbotlang. Xulosa chiqaring.

18. Sonlarni taqqoslang:

1) -5 va 0; 2) 0 va -1; 3) 1 va -1;

4) $\frac{1}{6}$ va $0,166$; 5) $-\frac{5}{7}$ va $-0,714$; 6) $-\frac{2}{3}$ $-0,(6)$;

7) π va $3,14$; 8) 2π va $6,29$; 9) $-\pi$ va $-3,15$.

19. Agar:

1) $b-a=-2,71$; 2) $b-a=0,001$; 3) $a-b=-2^3$;

4) $a-b=-1\frac{1}{7}$; 5) $b-a=(-0,5)^2$; 6) $b-a=(-1,8)^3$

bo'lsa, a va b sonlarni taqqoslang.

20. a ning istalgan qiymatida tengsizlikning to'g'riligini isbotlang:

1) $(a+2)^2>(a+3)(a-3)+4a$;

2) $(a+4)(a+5)>(a+6)(a+3)$;

3) $(a-1)(a+5)<(a+3)(a+1)$;
4) $(2a+1)(3a-1)<(1{,}5a+1)(4a+3)-7{,}5a$.

21. $a-b$ ayirma: 1) $a+b$ yig'indidan katta; 2) $a+b$ yig'indidan kichik; 3) $a+b$ yig'indiga teng; 4) a dan katta; 5) b dan katta; 6) b ga teng bo'lishi mumkinmi? Misollar keltiring.

22. a ning istalgan qiymatida quyidagi tengsizlik to'g'ri ekanini isbotlang:
1) $8a^3-3<(2a-1)(4a^2+2a+1)$;
2) $27a^3<(3a+1)(9a^2-3a+1)$;
3) $(a-2)(a-3)>(a+1)(a-6)$;
4) $(2a+5)(3a+1)>(a+1)(15a+2)$.

2. *Sonli tengsizliklarning asosiy xossalari*

Tengsizliklarning quyida keltirilgan *asosiy xossalari*dan ularning boshqa xossalarini isbotlashda, turli masalalarni hal qilishda foydalaniladi.

1-xossa. Agar $a>b$ va $b>c$ bo'lsa, u holda $a>c$ bo'ladi. Chindan ham, $a-c=(a-b)+(b-c)$, ammo $a-b>0$, $b-c>0$. Ikkita musbat son yig'indisi musbat sondir. Demak, $a-c>0$, ya'ni $a>c$.

Son o'qida bu xossa (11-§ dagi jadval, 1-xossa)ni yaqqolroq tasvirlash mumkin. Son o'qida a nuqta b dan o'ngda, b nuqtaning o'zi esa son o'qida c dan o'ngda yotsa, u holda a nuqta c nuqtadan o'ngda yotadi (10-rasm).

10-rasm.

2-xossa. Agar tengsizlikning ikkala qismiga ayni bir son qo'shilsa, u holda tengsizlik ishorasi o'zgarmaydi.

2-xossadan shunday natija kelib chiqadi.

Natija. Istalgan qo'shiluvchini tengsizlikning bir qismidan ikkinchi qismiga shu qo'shiluvchining ishorasini qarama-qarshisiga almashtirib o'tkazish mumkin.

3-xossa. 1) Agar tengsizlikning ikkala qismi ayni bir musbat songa ko'paytirilsa (bo'linsa), u holda tengsizlik ishorasi o'zgarmaydi.

2) Agar tengsizlikning ikkala qismi ayni bir manfiy songa ko'paytirilsa (bo'linsa), u holda tengsizlik ishorasi qarama-qarshisiga o'zgaradi.

1-masala. Agar $a > b$ bo‘lsa, u holda $-a < -b$ bo‘lishini isbotlang.

△ $a > b$ tengsizlikning har ikki qismini manfiy son (-1) ga ko‘paytirib, $-a < -b$ ni hosil qilamiz. ▲

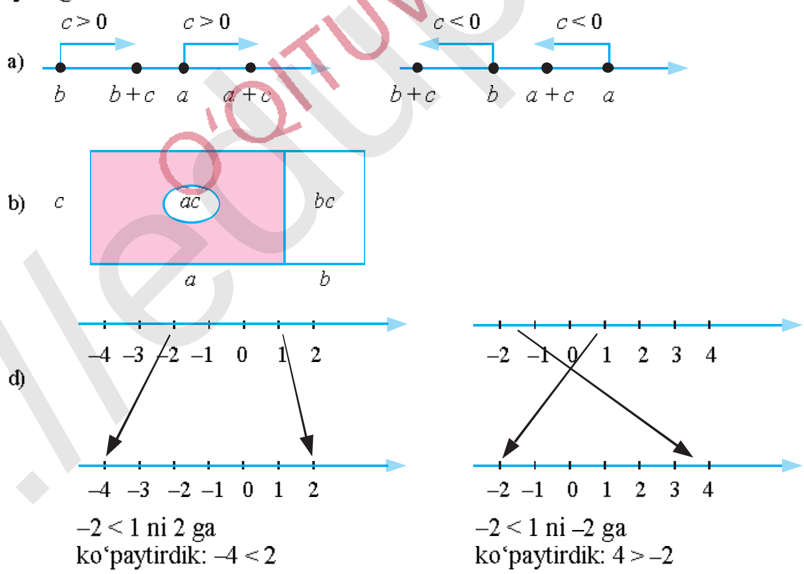
2-masala. Agar a va b – musbat sonlar va $a > b$ bo‘lsa, u holda $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ bo‘lishini isbotlang.

△ $b < a$ tengsizlikning ikkala qismini musbat son ab ga bo‘lamiz:

$b \cdot \frac{1}{ab} < a \cdot \frac{1}{ab}$, bundan $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$. ▲

Demak, sonlar orasida „>“ belgi bo‘lsa, ularning teskarilari orasida „<“ belgi bo‘ladi. Masalan, $15 > 11$, bundan $\frac{1}{15} < \frac{1}{11}$; $a < b$ bo‘lsa, u holda $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ bo‘ladi.

23. 1. 11-rasmda sonli tengsizlikning qanday xossalari ifodalanganini ayting:



11-rasm.

2) Tengsizlikning asosiy xossalarini misollarda tushuntiring.

24. $a<b$ bo'lsin. Sonlarni taqqoslang:

1) $-4,3a$ va $-4,3b$; 2) $-0,19a$ va $-0,19b$; 3) $\frac{a}{4}$ va $\frac{b}{4}$;

4) $-2(a+4)$ va $-2(b+4)$; 5) $\frac{2}{3}(a-5,2)$ va $\frac{2}{3}(b-5,2)$.

25. Isbotlang:

1) agar $5a-2b>2a+b$ bo'lsa, u holda $a>b$;
2) agar $4a-2b<2a+b$ bo'lsa, u holda $a<b$.

26. Isbotlang:

1) agar $(x-1)(x+2)>(x+1)(x-2)$ bo'lsa, u holda $x>0$;
2) agar $(x+1)(x-8)>(x+2)(x-4)$ bo'lsa, u holda $x<0$.

27. Isbotlang:

1) agar $y>0$ va $y\neq\frac{1}{2}$ bo'lsa, $4y+\frac{1}{y}>4$;

2) agar $x<0$ va $x\neq-\frac{1}{3}$ bo'lsa, $9x+\frac{1}{x}<-6$.

28. Agar:

1) $a>b>0$ bo'lsa, u holda $\frac{a}{b}>1$;

2) $\frac{a}{b}>1$ bo'lsa, u holda $a>b$ to'g'rimi? Misollarda tushuntiring.

29. Isbotlang:

1) agar $x+y>5$ va $x<2$ bo'lsa, u holda $y>3$;
2) agar $x-y<-3$ va $x>4$ bo'lsa, u holda $y>7$;
3) agar $a-3b<5$ va $a>-4$ bo'lsa, u holda $b>-3$;
4) agar $2a+3b>1$ va $a<2$ bo'lsa, u holda $b>-1$.

30. $a>b$ va a, b manfiy sonlar bo'lsin. Isbotlang:

1) agar $n-$ toq natural son bo'lsa, u holda $a^n>b^n$;
2) agar $n-$ juft natural son bo'lsa, u holda $a^n<b^n$.

31. Isbotlang:

1) agar $a-b\geq4a+5b$ bo'lsa, u holda $a\leq-2b$;
2) agar $a-2b\geq5a+4b$ bo'lsa, u holda $2a\leq-3b$.

32. x ning barcha qiymatlarida tengsizlik to'g'ri ekanini isbotlang:

1) $(x-1)(x+3)\leq(x+1)^2$; 2) $(x+2)^2\geq(x+1)(x+3)$.

33. Isbotlang:

x ning istalgan qiymatida $4x^2+1\geq4x$; 2) $a>0$ bo'lganida,

6-Algebra, 8-sinf (AFIDUM)

$a+\frac{1}{a}\geq2$.

34. Uchburchakning bir tomoni 8 cm ga, ikkinchi tomoni esa 13 cm ga teng.
1) Uchinchi tomonining uzunligi qanday eng kichik natural sondan iborat bo‘lgan santimetrlarda ifodalanishi mumkin?
2) Uchinchi tomonining uzunligi qanday eng katta natural sondan iborat bo‘lgan santimetrlarda ifodalanishi mumkin?

35. Toq sonning o‘zidan keyin keluvchi uchta toq son bilan yig‘indisi 49 dan katta. Shu shartni qanoatlantiruvchi eng kichik toq sonni toping.

36. Juft sonning o‘zidan keyin keluvchi juft sonning uchlangani bilan yig‘indisi 69 dan kichik. Shu shartni qanoatlantiruvchi eng katta juft sonni toping.

37. Musobaqada velosipedchilar 155 km yo‘l bosishi kerak. Velosipedchilar bir-biridan 5 minutga farq qilib navbat bilan start oldilar va ularning har biri o‘zgarmas tezlik bilan harakatlanmoqda. Birinchi velosipedchi 30 km/h tezlik bilan harakatlanmoqda. Uchinchi velosipedchi marraga birinchisiga qaraganda tezroq yetib kelishi uchun u qanday tezlik bilan harakatlanishi kerak?

13-§. Tengsizliklarni qo‘shish va ko‘paytirish

Tengsizliklarni qo‘shish va ko‘paytirishga olib keluvchi misollar keltiraylik.

1-masala. 1-qopda a kg guruch bor, bu qopdagi guruchning 60 kg dan ko‘proqligini bilamiz, ya’ni $a>60$. 2-qopda esa b kg guruch bor, bu qopdagi guruchning 70 kg dan ortiqligi aniq, ya’ni $b>70$. Ikkala qopda $(a+b)$ kg guruch bor va ikkala qopdagi guruch, ravshanki, $60+70=130$ (kg) dan ortiq bo‘ladi, ya’ni $a+b>130$.

2-masala. To‘g‘ri to‘rtburchakning bo‘yi x cm, eni esa y cm. Biz $x<25$, $y<12$ ekanini bilamiz. U holda to‘g‘ri to‘rtburchakning yuzi xy (cm^2) va u $25\cdot12=300$ (cm^2) dan kichik bo‘ladi, ya’ni $xy<300$. Bu va shunga o‘xshash masalalardan ushbu teoremalarga kela olamiz:

1-teorema. *Agar $a>b$ va $c>d$ bo‘lsa, u holda $a+c>b+d$ bo‘ladi, ya’ni bir xil ishorali tengsizliklarni qo‘shishda xuddi shu ishorali tengsizlik hosil bo‘ladi:*

Ravshanki, agar $a<b$ va $c<d$ bo'lsa, u holda $a+c<b+d$ bo'ladi.

Masalan: $$\begin{array}{r} 1{,}8<3{,}2 \\ +\; -2<-1{,}1 \\ \hline -0{,}2<2{,}1 \end{array}$$

2-teorema. *Agar $a>b$, $c>d$ va a, b, c, d – musbat sonlar bo'lsa, u holda $ac>bd$ bo'ladi, ya'ni: chap va o'ng qismlari musbat bo'lgan bir xil ishorali tengsizliklarni ko'paytirish natijasida ayni shu ishorali tengsizlik hosil bo'ladi.*

Masalan, $$\begin{array}{r} 4{,}5>2{,}4 \\ \times\; 4>3 \\ \hline 18>7{,}2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3{,}2<2{,}8 \\ \times\; 5<6 \\ \hline 16<16{,}8 \end{array}$$

38. Savollarga javob bering. Topshiriqlarni bajaring:
1) Tengsizliklarni hadlab qo'shish (ko'paytirish) deganda nimani tushunasiz? Misollarda tushuntiring.
2) Tengsizliklarni qo'shish, ko'paytirish geometrik nuqtayi nazardan nimani bildiradi? Misollar keltiring.

39. 1) Uchburchak ichida yotuvchi istalgan nuqtadan uning uchlarigacha bo'lgan masofalar yig'indisi shu uchburchakning yarim perimetridan katta ekanini isbotlang.
2) Qavariq ko'pburchak ichida yotuvchi ixtiyoriy nuqtadan uning uchlarigacha bo'lgan masofalar yig'indisi shu ko'pburchak yarim perimetridan katta ekanini isbotlang.

40. 1) To'g'ri to'rtburchakning bir tomoni a cm dan uzun, ikkinchi tomoni birinchisidan k marta uzun. To'g'ri to'rtburchakning perimetri $2a(k+1)$ cm dan uzun bo'lishini isbotlang.
2) Uchburchakning tomonlari a cm, b cm, c cm dan kam. Uning perimetri $(a+b+c)$ santimetrdan kam ekanini ko'rsating.

41. Tengsizliklarni qo'shing:

1) $2{,}5+3\frac{1}{7}>1{,}8+2\frac{3}{7}$ va $2{,}7-1\frac{2}{7}>1$;

2) $-2{,}8+1{,}5<2+7{,}4$ va $-1{,}8+1{,}1<1+9{,}6$.

42. Agar $a>3$ va $b>4$ bo'lsa, quyidagilarni isbotlang:
1) $a^2+b^2>25$; 2) $a^3+b^3>91$; 3) $(a+b)^2>49$;
4) $(a+b)^3>243$; 5) $7a+3b^2-10>59$; 6) $a^3b-8>100$.

43. $a>b>0$ bo'lsin. Isbotlang:

1) $a^3>b^3$; 2) $a^3>ab^2$; 3) $a^4>a^2b^2$; 4) $a^2b^2>b^4$.

44. Agar $x>-3$ va $y>1$ bo'lsa, isbotlang:

1) $\frac{1}{3}x+\frac{2}{7}y>-\frac{5}{7}$; 2) $\frac{2}{7}x+\frac{1}{3}y>-1$; 3) $2,7x+1,1y>-7$.

45. Avtobus 8 marta qatnashda 185 nafardan ko'p yo'lovchi, 15 marta qatnashda esa 370 nafardan kam yo'lovchi tashidi. Agar avtobus har safar unda nechta o'rin bo'lsa, ayni shunchadan yo'lovchini tashigan bo'lsa, avtobusda nechta o'rin bor?

46. Isbotlang:

1) faqat va faqat $a>b$ bo'lganidagina $2b-a<3a-2b$ bo'ladi;
2) faqat va faqat $a<b$ bo'lganidagina $a+2b>4a-b$ bo'ladi.

47. Tengsizliklarni qo'shing:

1) $a-2b>3$ va $2a+b>4$;
2) $2a^2+3b>5a-1$ va $5b-2a^2>3-a$;
3) $3a+b<2a+3b$ va $2b-3a<5-3b$;
4) $6<3a+b$ va $4<2a-b$.

48. Tengsizliklarni ko'paytiring:

1) $3>2a+1$ va $2>1$; 2) $2a+3b>4$ va $2a-3b>1$;
3) $1,8<2,4$ va $4<5$.

49. k ta ruchka va n ta daftar xarid qilindi. Ruchkaning narxi a so'mdan kam, daftarning narxi esa b so'mdan kam. Jami xarid $ak+bn$ so'mdan kamligini ko'rsating. a, b, k, n harflar o'rniga sonlar qo'yishingiz mumkin.

50. To'g'ri to'rtburchakning eni a cm dan uzun, bo'yi esa enidan k marta uzun. Shu to'g'ri to'rtburchakning yuzi $a^2\cdot k$ cm^2 dan ortiq ekanini ko'rsating. a va k o'rniga sonlar qo'yishingiz mumkin.

Qat'iy va noqat'iy tengsizliklar

$>$ (katta) va $<$ (kichik) ishorali tengsizliklar qat'iy tengsizliklar deyiladi.

Masalan: $\frac{2}{3}>\frac{1}{4}$; $0,75<0,9$; $a>b$; $c<d$ – qat'iy tengsizliklardir. Qat'iy tengsizliklarning $>$ va $<$ ishoralari bilan bir qatorda $\geq$ (katta yoki teng) va $\le$ (kichik yoki teng) ishorali tengsizliklardan ham foydalaniladi. Ular noqat'iy tengsizliklardir.

$a \le b$ tengsizlik $a < b$ yoki $a = b$ ekanini, ya'ni a son b dan katta emasligini bildiradi. Teatrdagi joylar soni 700 ta bo'lsa, u holda tomoshabinlar soni n 700 dan kam yoki 700 ga teng bo'lishi mumkin. Bu esa $n \le 700$ kabi yoziladi.

$a \ge b$ tengsizlik a son b dan katta yoki unga teng ekanini, ya'ni a son b dan kichik emasligini bildiradi. Agar b – ishchining bir ish kunida reja bo'yicha tayyorlashi lozim bo'lgan mahsulot soni bo'lsa, ishchi shu b songa teng yoki undan ortiq (rejadan ortiq) mahsulot tayyorlashi mumkin.

! $\ge$ ishorasi yoki $\le$ ishorasi qatnashgan tengsizliklar *noqat'iy tengsizliklar* deyiladi.

$15 \le 17$; $5 \ge 5$; $-3 \ge -3$; $a \le b$; $c \ge d$ – noqat'iy tengsizliklardir.

Qat'iy tengsizliklarning avvalgi paragrafda keltirilgan xossalari noqat'iy tengsizliklar uchun ham o'rinlidir. Noqat'iy tengsizliklar uchun $\ge$ va $\le$ ishoralar qarama-qarshi ishoralar sanaladi.

Masalan, 12-§ dagi 3-xossa shunday ifodalanishi mumkin:

3-xossa. Agar $a \ge b$ tengsizlikning ikkala qismi ayni bir musbat son c ga ko'paytirilsa (bo'linsa), u holda tengsizlik ishorasi o'zgarmaydi.

Agar $a \ge b$ tengsizlikning ikkala qismi ayni bir manfiy son $c < 0$ ga ko'paytirilsa (bo'linsa), u holda tengsizlik ishorasi qarama-qarshisiga o'zgaradi.

Masala. $\frac{n^2}{1+n^4} \le \frac{1}{2}$ bo'lishini isbotlang, bunda n – natural son.

△ Tengsizlikning ikkala qismini musbat son $2(1+n^4)$ ga ko'paytiramiz, bunda tengsizlik ishorasi o'zgarmaydi. U holda $2n^2 \le 1+n^4$, bundan $1+n^4-2n^2 \ge 0$, ya'ni: $(n^2-1)^2 \ge 0$. Bu tengsizlik ixtiyoriy natural n da to'g'ri. $n-1$ bo'lganda esa tenglik belgisi o'rinli bo'ladi. ▲

51. Savollarga javob bering. Topshiriqlarni bajaring:

? 1) Qat'iy tengsizliklar deganda nimani tushunasiz? Misollar keltiring.

2) Noqat'iy tengsizliklar nima? Misollarda tushuntiring.

3) 12-§ning 1- va 2-xossalarni noqat'iy tengsizliklar uchun isbotlang.

52. Ixtiyoriy a va b sonlar uchun isbotlang:

1) $a^2+b^2 \geq 2ab$; 2) $a^4+b^4+6a^2b^2 \geq 4ab(a^2+b^2)$.

53. a, b, c, d ixtiyoriy sonlar bo'lsa, $a^4+b^4+c^4+d^4 \geq 4\ abcd$ bo'lishini isbotlang.

54. Hajmi $8\,l$ bo'lgan eritmada 60 % kislota bor edi. Unga kislotasi 20 % bo'lgan eritmadan quya boshlandi. Aralashmadagi kislota 40 % dan ko'p bo'lmasligi, lekin 30 % dan kam bo'lmasligi uchun ikkinchi eritmadan birinchisiga qancha quyish mumkin?

55. Kraxmal hosil qilish uchun guruch bilan arpa olinadi, bunda arpa guruchdan 4 marta ko'p bo'lishi kerak. Guruch tarkibida 75 %, arpada 60 % kraxmal bo'lsa, 63 kg dan ortiq, lekin 126 kg dan ortiq bo'lmagan kraxmal hosil qilish uchun necha kilogramm guruch va necha kilogramm arpa olish kerak?

56. Isbotlang:

1) istalgan x da $9x^2+1 \geq 6x$;

2) $x>0$ bo'lganda $x+\frac{1}{16x} \geq \frac{1}{2}$.

57. Daryo oqimining tezligi soatiga a kilometr. Kater bekatlar orasidagi masofani daryo oqimi bo'yicha pastga, daryo oqimiga qarshi yuqoriga bosib o'tganiga qaraganda eng kamida 3 marta tezroq bosib o'tishi uchun suvga nisbatan qanday o'zgarmas tezlik bilan harakat qilishi kerak?

58. Hajmi $5\,l$ bo'lgan 30 % kislotali eritmaga 70 % kislotali eritma quya boshlandi. Aralashma 60 % dan kam bo'lmagan kislotaga ega bo'lishi uchun ikkinchi eritmadan birinchisiga qancha quyish kerak?

59. n sonning tengsizlikni qanoatlantiruvchi eng katta butun qiymatini toping:

1) $n \leq -14$; 2) $n \leq \pi$; 3) $n < 10\pi$; 4) $n \leq -0{,}8$.

60. n sonning tengsizlikni qanoatlantiruvchi eng kichik butun qiymatini toping:

1) $n \geq 6{,}1$; 2) $n \geq -7$; 3) $n \geq 3{,}8$; 4) $n \geq \pi$.

61. x sonning tengsizlikni qanoatlantiruvchi eng katta butun qiymatini toping:

1) $\frac{x-1}{3} \le 2$; 2) $\frac{x+2}{5} \le -1$; 3) $\frac{x-2\pi}{3} < \frac{3}{5}$; 4) $\frac{x+\pi}{2} < 1$.

62. Tengsizlik belgilaridan foydalanib, jumlalar mazmuniga mos tengsizlik yozing:
1) Toshkent shahrida havo temperaturasi t iyul oyida $30^{\circ}C$ dan kam emas.
2) Kuchli yomg'irdan so'ng daryoda suv sathi 15 cm dan kam bo'lmagan h cm balandlikka ko'tarildi.
3) Otabekning imtihonlardan olgan reytingi R 182 balldan kam emas, 195 balldan yuqori emas.

Masalalar yechish

63. Qavariq to'rtburchakning perimetri uning diagonallari yig'indisidan katta ekanini isbotlang.
Ko'rsatma: Uchburchak tengsizligidan foydalaning.

64. Jumlalarni tengsizlik ko'rinishida yozing:
1) a va b sonlar yig'indisining kvadrati ular kvadratlarining yig'indisidan katta.
2) Eng kattasi n bo'lgan ketma-ket kelgan uchta natural sonlar ko'paytmasi ularning kvadratlari yig'indisidan kichik.
3) Eng kichigi k bo'lgan ketma-ket kelgan to'rtta natural sonlar ko'paytmasi ularning uchlangan yig'indisidan katta.
4) c va d sonlar kublarining ayirmasi shu sonlar kvadratlari yig'indisining yarmidan katta.

65. Ifodalarni taqqoslang. Natijani tengsizlik ko'rinishida yozing:
1) $(a-1)(a+2)$ va $(a-3)(a+4)$; 3) $(a-2)^2$ va $4(1-a)$;
2) $(b+2)(b+4)$ va $(b+3)^2$; 4) a^2+16 va $9a$.

66. Agar:

1) $a<b$ bo'lsa, $a<\frac{a+b}{2}<b$ ekanini;

2) $a<b<c$ bo'lsa, $a<\frac{a+b+c}{3}<c$ ekanini isbotlang.

67. Agar: 1) $ab>0$; 2) $a^2b>0$; 3) $a^2b<0$; 4) $ab<0$ bo'lsa, a va b sonlar musbat yoki manfiy ekanini aniqlang. Javobingizni asoslang.

68. Agar: 1) $a<1$; 2) $a>4$; 3) $1<a<4$; 4) $a>5$ bo'lsa, $(a-1)(a-4)$ ifodaning ishorasini aniqlang.

69. 1) $a<b$ bo'lsa, 1) $\frac{a}{b}<1$; 2) $\frac{a}{b}>1$ bo'lsa, $a>b$; 3) $\frac{b}{a}<1$ bo'lsa, $\frac{b}{a}>1$ bo'lishi to'g'rimi?

70. Isbotlang: 1) agar $a>1$ va $b>1$ bo'lsa, u holda $ab+1>a+b$;
2) agar $a>b$ va $b<2$ bo'lsa, u holda $b(a+2)<b^2+2a$.

71. Agar $a>0$, $b>0$, $c>0$ bo'lsa, $ab(a+b-2c)+bc(b+c-2a)+ac(a+c-2b)\geq 0$ tengsizlikni isbotlang.

72. Sirojiddin tog'asinikiga borishda yo'lning birinchi yarmini soatiga 4 km tezlik bilan, ikkinchi yarmini esa soatiga 6 km tezlik bilan bosib o'tdi. Tog'asinikidan uyiga qaytishda u butun yo'lni 5 km/h tezlik bilan bosib o'tdi. Sirojiddin yo'lga qachon ko'p vaqt sarfladi: tog'asinikiga borishdami yoki uyiga qaytishdami?

73. Abduqodir qayiqda daryo oqimi bo'ylab soatiga 7 km tezlik bilan ja'mi n kilometrga suzdi. Manzilga qaytishda oqimga qarshi soatiga 4 km tezlik bilan suzdi. Ertasi kuni u ko'lda qayiqda soatiga 6 km tezlik bilan ja'mi 2,4 n kilometrga suzdi. Abduqodir qachon ko'p vaqt sarfladi: daryoda suzganidami yoki ko'lda suzganidami?

74. 1) Bir xil ma'noli to'g'ri va noto'g'ri tengsizliklarni qo'shganda o'sha ishorali (ma'noli) noto'g'ri tengsizlik hosil bo'ladi deyish to'g'rimi?
2) Bir xil ma'noli ikkita noto'g'ri tengsizlik qo'shilsa, o'sha ishorali (ma'noli) noto'g'ri tengsizlik hosil bo'lishi to'g'rimi? Misollar keltiring.

14-§. Sonli tengsizliklarni darajaga ko'tarish

Yuqorida sonli tengsizliklar va ularning asosiy xossalari, tengsizliklarni qo'shish va ko'paytirish kabi mavzular bayon etildi. Endi sonli tengsizliklarni darajaga ko'tarish amaliga to'xtalamiz.

! ***Agar $a>b>0$ va n natural son bo'lsa, $a^n>b^n$ tengsizlik to'g'ri bo'ladi.***

△ $a>0$, $b>0$ va $a>b$ bo‘lgani uchun n ta bir xil $a>b$ tengsizliklarni hadma-had ko‘paytirib, $a^n>b^n$ ni hosil qilamiz. ▲

1-masala. $(0{,}35)^7$ va $\left(\frac{6}{19}\right)^7$ sonlarni taqqoslang.

△ 0,001 aniqlik bilan $\frac{6}{19}\approx 0{,}316$. Shuning uchun $0{,}35>0{,}316$. Bundan $(0{,}35)^7>\left(\frac{6}{19}\right)^7$ tengsizlik kelib chiqadi. Endi quyidagi xossani bayon etish mumkin: ▲

Agar sonli tengsizlikning chap va o‘ng qismlari musbat bo‘lsa, tengsizlikni istalgan ratsional darajaga ko‘tarish mumkin:

1. $a>b>0$, $r>0$ bo‘lsa, $a^r>b^r$ (1) bo‘ladi;
2. $a>b>0$, $r<0$ bo‘lsa, $a^r<b^r$ (2) bo‘ladi.

△ (1) xossani isbotlaymiz. Dastlab $r=\frac{1}{n}$ (n – natural son) bo‘lsin. $n>1$, $a>0$, $b>0$ va shartga ko‘ra $a>b$; $a^{\frac{1}{n}}>b^{\frac{1}{n}}$ ekanini isbot qilamiz. Faraz qilaylik, bu tengsizlik bajarilmaydi va $a^{\frac{1}{n}}\le b^{\frac{1}{n}}$ bo‘lsin. U holda shu tengsizlikni n natural darajaga ko‘tarib, $a\le b$ ni hosil qilamiz, bu esa $a>b$ shartga zid. Demak, $a>b$ dan $a^{\frac{1}{n}}>b^{\frac{1}{n}}$ kelib chiqadi. ▲

△ Endi (1) ni umumiy, $r=\frac{m}{n}$ bo‘lgan holda isbotlaymiz, bunda m va n — natural sonlar. $a>b>0$ shartdan $a^{1/n}>b^{1/n}$ kelib chiqadi. Buni m natural darajaga ko‘tarsak, quyidagi tengsizlik hosil bo‘ladi:

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m>\left(b^{\frac{1}{n}}\right)^m,\ \text{ya'ni}\ a^{\frac{m}{n}}>b^{\frac{m}{n}}.$$ ▲

Masalan, $3^{\frac{4}{9}}>2^{\frac{4}{9}}$, chunki $3>2$; $4^{\frac{9}{10}}<5^{\frac{9}{10}}$, chunki $4<5$.

(2) xossa ham shunga o‘xshash isbotlanadi. Shu xossaga ko‘ra $(0{,}4)^{-7}<(0{,}3)^{-7}$, chunki $0{,}4>0{,}3$; $14^{-0{,}5}>15^{-0{,}5}$, chunki $14<15$.

Aslida (1) xossa istalgan musbat r haqiqiy son uchun, (2) xossa esa istalgan manfiy haqiqiy son uchun to‘g‘ri. Buning isboti oliy matematika kursida beriladi. Masalan,

$$\left(\frac{6}{7}\right)^{\sqrt{2}} > \left(\frac{5}{6}\right)^{\sqrt{2}}, \text{ chunki } \frac{6}{7} > \frac{5}{6}; \quad \left(\frac{8}{9}\right)^{\sqrt{5}} < \left(\frac{7}{8}\right)^{\sqrt{5}}, \text{ chunki } \frac{8}{9} > \frac{7}{8}.$$

Ta'kidlab o'tamizki, (1) va (2) xossalar noqat'iy tengsizliklar $a \geq b \geq 0$, $r > 0$ va $a \geq b \geq 0$, $r < 0$ uchun ham to'g'ri.

Endi quyidagi umumiy xossani keltiramiz:

Agar tengsizlikning ikkala qismi musbat bo'lsa, uni musbat darajaga ko'targanda tengsizlik belgisi saqlanadi, manfiy darajaga ko'targanda esa tengsizlik belgisi qarama-qarshisiga o'zgaradi.

2- masala. Sonlarni taqqoslang:

1) $\left(\frac{15}{16}\right)^{\frac{1}{2}}$ va $\left(\frac{16}{15}\right)^{\frac{1}{2}}$; 2) $\left(\frac{6}{7}\right)^{\sqrt{2}}$ va $(0,86)^{\sqrt{2}}$.

△ 1) $\frac{15}{16} < \frac{16}{15}$, shuning uchun $\left(\frac{15}{16}\right)^{\frac{1}{2}} < \left(\frac{16}{15}\right)^{\frac{1}{2}}$.

2) Ravshanki, $\frac{6}{7} = 0,857...$ bo'lgani uchun $\frac{6}{7} < 0,86$. Bundan $\left(\frac{6}{7}\right)^{\sqrt{2}} < (0,86)^{\sqrt{2}}$ kelib chiqadi. ▲

3- masala. Tenglamani yeching: $5^x - 1$.

△ Agar $x = 0$ bo'lsa, tenglama to'g'ri tenglikka aylanadi. Agar $x < 0$ bo'lsa, $5^x < 1$; $x > 0$ bo'lsa, $5^x > 1$ bo'ladi. Demak, $x = 0$ yagona yechim bo'ladi. ▲

$a^x = 1 (a > 0,\ a \neq 1)$ tenglama ham yagona $x = 0$ yechimga ega.

Shuningdek, $a^x = a^y$ (3) tenglama yagona $x = y$ yechimga ega, bunda $a > 0$, $a \neq 1$. Isbotlash uchun (3) tenglikni a^{-y} ga ko'paytiramiz: $a^{x-y} = 1$, bundan $x - y = 0$, ya'ni $x = y$ kelib chiqadi.

4- masala. $4^{2x+1} - 16$ tenglamani yeching.

△ $4^{2x+1} - 4^2$, bundan $2x + 1 - 2$, $x = \frac{1}{2}$. ▲

75. Topshiriqlarni bajaring:

1) Sonli tengsizliklarni darajaga ko'tarish qoidalarini ayting.
2) Tengsizlikni r ratsional darajaga, keyin ixtiyoriy haqiqiy musbat darajaga ko'tarish amallariga 2–3 tadan misol tuzing.

3) Qat'iy tengsizliklarni darajaga ko'tarishning xossalari noqat'iy tengsizliklar uchun ham o'rinli bo'lishini misollarda ko'rsating.

76. (Og'zaki.) Sonlarni taqqoslang:

1) $4^{\frac{1}{2}}$ va $5^{\frac{1}{2}}$; 2) $3^{-\frac{3}{4}}$ va $5^{-\frac{3}{4}}$; 3) $8^{\sqrt{3}}$ va $(7,9)^{\sqrt{3}}$; .

77. Sonlarni taqqoslang:

1) $(0,76)^{\frac{1}{4}}$ va $\left(\frac{16}{25}\right)^{\frac{1}{5}}$; 2) $\left(\frac{5}{12}\right)^{-\frac{1}{6}}$ va $(0,41)^{-\frac{1}{6}}$.

78. (Og'zaki.) Sonlarni taqqoslang:

1) $4^{\frac{1}{3}}$ va $5^{\frac{1}{3}}$; 2) $3^{-\frac{4}{5}}$ va $4^{-\frac{4}{3}}$; 3) $4^{\sqrt{3}}$ va $5^{\sqrt{3}}$; 4) $11^{-\sqrt{2}}$ va $15^{-\sqrt{2}}$.

79. Sonlarni taqqoslang:

1) $(0,88)^{\frac{1}{4}}$ va $\left(\frac{6}{11}\right)^{\frac{1}{4}}$; 2) $\left(\frac{5}{12}\right)^{-\frac{1}{6}}$ va $(0,41)^{\frac{1}{6}}$.

80. Tenglamani yeching **(80–81):**

1) $5^{2x}=5^{\frac{1}{5}}$; 2) $3^{x}-27$; 3) $6^{3x-1}-6^{-10}$;

4) $2^{2x+1}-32$; 5) $7^{2-x}-1$; 6) $\left(\frac{1}{5}\right)^{4x\ 3}=5$.

81. 1) $6^{2x}=36^{\frac{1}{2}}$; 2) $7^{x}=49$; 3) $3^{x+1}=27$; 4) $5^{3+x}=5^{0}$;

5) $2^{2x}=8^{\frac{1}{3}}$; 6) $8^{2x}=2^{6}$; 7) $4^{x+2}=16$; 8) $6^{x+5}=6^{0}$.

Sonlarni taqqoslang **(82–83):**

82. 1) $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)^{2}}$ va $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)^{2}}$; 2) $\sqrt[5]{\left(1\frac{1}{4}-1\frac{1}{4}\right)^{3}}$ va $\sqrt[3]{\left(1\frac{1}{6}-1\frac{1}{7}\right)^{3}}$.

83. 1) $\sqrt[5]{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)^{2}}$ va $\sqrt[5]{\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)^{2}}$; 2) $\sqrt[7]{\left(1\frac{1}{4}-1\frac{1}{5}\right)^{3}}$ va $\sqrt[7]{\left(1\frac{1}{5}-1\frac{1}{6}\right)^{3}}$.

Tenglamani yeching (**84–86**):

84. 1) $2^{y-2}=8$; 2) $3^{5-2x}=1$; 3) $4^{\frac{1}{2}x-1}=2$; 4) $27^{3-\frac{1}{3}y}-81=0$.

85. 1) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+4}=3^{5x+6}$; 3) $4^{x}\cdot 2^{x+3}=\frac{1}{8}$; 5) $3^{x-1}\cdot 9^{x+2}=\frac{1}{27}$;

2) $2^{3x+9}=\left(\frac{1}{2}\right)^{x\;6}$; 4) $\frac{25^{x\;\frac{1}{4}}}{\sqrt{5}}=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-6}$; 6) $\frac{49^{x-0,5}}{\sqrt{7}}=\left(\frac{1}{7}\right)^{x}$.

86. 1) $2^{4x-9}=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-4}$; 2) $\frac{25^{x\;2}}{\sqrt{5}}=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-7,5}$; 3) $\frac{9^{x+1}}{\sqrt{3}}=3^{x+1}$.

87. $3>2$ tengsizlikni:

1) 2; 2) –2; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{1}{2}$ darajaga ko‘taring. Qaysi hollarda tengsizlik belgisi qarama-qarshi belgiga almashadi? Nima uchun?

88. Tenglamani yeching:

1) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^{x-1}=\left(\frac{2}{\sqrt[3]{2}}\right)^{2x}$; 2) $\frac{8}{\left(\sqrt{2}\right)^{x}}=4^{3x-2}\cdot\sqrt{2}$.

Hisoblang (**89–94**):

89. 1) $(0,5)^{-2}+(0,1)^{-1}-(0,2)^{-3}$; 2) $(0,7)^{-1}+(0,3)^{-1}-\left(\frac{7}{4}\right)^{-1}$.

90. 1) $\frac{(0,6)^{-2}+(1,5)^{-2}}{(0,6+1,5)^{-2}}$; 2) $\frac{\left(\frac{1}{49}\right)^{-1}-\left(\frac{1}{8}\right)^{-1}}{41^{\;1}}$.

91. 1) $(0,4)^{-2}-(0,1)^{-2}+(0,2)^{-3}$; 2) $(-0,1)^{-3}+(0,2)^{2}-(-0,2)^{-2}$.

92. 1) $\frac{(0,5)^{-2}+4}{(0,4+1,6)^{\;2}}$; 2) $\frac{\left(\frac{1}{8}\right)^{-1}-\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}}{6^{-1}}$; 3) $\frac{(0,2)^{-2}+5}{(1,7-0,2)^{\;2}}$.

93. 1) $(0,75)^{0}+(0,49)^{\;2}-1^{\frac{4}{5}}$; 2) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\;2}+\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}+2\cdot 967^{0}$.

94. 1) $36 \cdot 10^{-5} : (3{,}2 \cdot 10^{-4})$; 2) $0{,}23 \cdot 10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^{5}$;

3) $2 \cdot 10^{-1} + \left(6^0 - \frac{1}{6}\right)^{-1} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{3} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{-1}$.

95. Ifodaning qiymatini toping:

1) $\left(\dfrac{x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{5}{6}}}{x^{\frac{1}{6}}}\right)^{-2}$, bunda $x = \frac{5}{7}$; 2) $\left(\dfrac{a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{9}}}{a^{-\frac{2}{9}}}\right)^{3}$, bunda $a = \frac{1}{2}$.

15-§. Bir noma’lumli tengsizliklar

Bir noma’lumli tengsizlikka olib keluvchi masalalarni ko‘raylik.

1-masala. *A* va *B* qishloqlardan bir vaqtning o‘zida bir-biriga qarab ikki velosipedchi bir xil o‘zgarmas tezlik bilan yo‘lga chiqdi. Ular yo‘lga chiqqanidan 1,5 soat keyin bosib o‘tilgan masofalar yig‘indisi 36 km dan kam bo‘lmasligi uchun velosipedchilar qanday tezlik bilan yurishlari kerak?

△ x km/h – velosipedchilarning tezligi, $1{,}5x$ (km) – 1,5 soatda har bir velosipedchi bosib o‘tgan yo‘l, $1{,}5x + 1{,}5x - 3x$ (km) – ikkala velosipedchi 1,5 soatda bosib o‘tgan masofalar yig‘indisi.

Masala shartiga ko‘ra, bu masofalar yig‘indisi 36 kilometrdan kam emas:

$1{,}5x + 1{,}5x \geq 36$, bundan $3x \geq 36$, $x \geq 12$.

Javob: har bir velosipedchining tezligi 12 km/h dan kam bo‘lmasligi kerak. ▲

2-masala. Olimning 10 000 so‘m puli bor. U bunga 4 ta daftar va 2 ta ruchka olmoqchi. Ruchka daftardan 500 so‘m qimmat ekan. Olim o‘zi reja qilgandek xarid qilishi uchun daftarning narxi necha so‘mdan ortiq bo‘lmasligi kerak?

△ Daftarning narxi x so‘m bo‘lsin, deylik. U holda ruchka $(x+500)$ so‘m bo‘ladi.

$4x$ (so‘m) – 4 ta daftarning narxi;

$2(x+500)$ (so‘m) – 2 ta ruchkaning narxi.

Masala shartiga muvofiq $4x + 2(x+500) \leq 10\,000$. Bundan $4x + 2x + 1000 \leq 10\,000$; $6x \leq 9000$; $x \leq 1500$.

Javob: daftarning narxi 1500 so‘mdan ortiq bo‘lmasligi kerak. ▲

Masalalarni yechish jarayonida hosil qilingan $3x \geq 36$, $6x \leq 9000$ tengsizliklarda x harfi bilan noma'lum son belgilangan. Bu tengsizliklar bir noma'lumli chiziqli tengsizliklarga misol bo'la oladi.

$$ax > b; \quad ax < b; \quad ax \geq b; \quad ax \leq b \tag{1}$$

ko'rinishidagi tengsizliklar ***bir noma'lumli chiziqli tengsizliklar*** *deyiladi, bunda a va b – berilgan sonlar, x esa noma'lum son.*

Tengsizlikning chap va o'ng qismlaridagi har bir qo'shiluvchi *tengsizlikning hadi* deyiladi.

Masalan, $5x+3 \leq 2x-9$ tengsizlikda $5x+3$ – chap qism; $2x-9$ – o'ng qismdir; $5x$; 3; $2x$; -9 – tengsizlikning hadlaridir.

Bir noma'lumli tengsizlikning yechimi deb, noma'lumning shu tengsizlikni to'g'ri sonli tengsizlikka aylantiradigan qiymatiga aytiladi. Tengsizlikni yechish – uning hamma yechimlarini topish yoki ularning yo'qligini aniqlash demakdir.

96. Savollarga javob bering. Topshiriqni bajaring:
1) Bir noma'lumli tengsizlikka olib keluvchi geometrik, fizik, iqtisodiy mazmundagi 2–3 talan masala tuzing.
2) Bir noma'lumli tengsizlikning yechimi deb nimaga aytiladi?
3) Bir noma'lumli tengsizlikni yechish deganda nimani tushunasiz?

97. 1) x ning qanday qiymatlarida: a) $y-2x-3$; b) $y-5x+2$; d) $y=-3x+4$; e) $y=-4x-7$ funksiyaning qiymatlari: 1) musbat; 2) nomanfiy; 3) manfiy; 4) –1 dan kichik; 5) –2 dan kichikmas; 6) –5 dan katta; 7) 3 dan katta bo'lishini tengsizlik belgilari yordamida yozing.

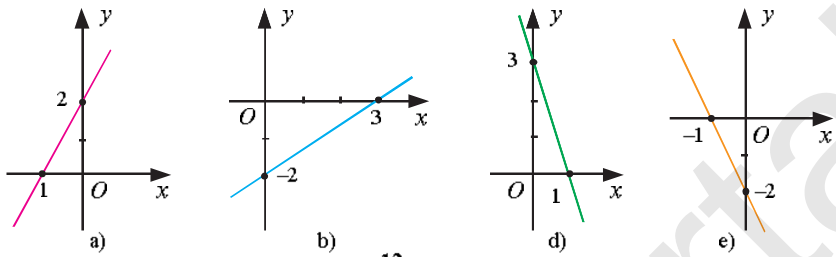
98. Tengsizlik ko'rinishida yozing:
1) $2x$ va 4,5 sonlarining yig'indisi 13,6 dan katta;
2) 28 va $17x$ sonlarining ayirmasi 4 dan kichik;
3) 5 va $(-x)$ sonlarining ko'paytmasi 4 dan katta emas.

99. -1; 0; 1; $\frac{1}{2}$; 3; 10 sonlaridan qaysilari tengsizlikning yechimi bo'ladi?

1) $7x-3>1$; 2) $\frac{1}{4}x+5 \geq 2-x$; 3) $4-x \geq 2+\frac{1}{2}x$.

100. Funksiya grafigini chizing va grafik bo'yicha x ning qanday qiymatlarida funksiya: musbat; nolga teng; 2 dan katta; -1 dan kichik qiymatlar qabul qilishini toping:
1) $y=5x+2$; 2) $y=2x-6$; 3) $y=-4x+5$; 4) $y=-3x-1$.

101. 12-rasmda $y-kx+b$ chiziqli funksiyaning grafigi tasvirlangan. 1) k va b ni toping; 2) $x \geq 0$; 3) $x<0$; 4) $x \geq 3$; 5) $x \leq -2$ bo'lganida, y funksiya qanday qiymatlar qabul qilishini tengsizlik belgisi yordamida yozing.



12-rasm.

102. Reja bo'yicha firma uch g'ildirakli bolalar velosipedidan 1 000 dona tayyorlashi kerak. Firma rejani 12 % dan ko'proq oshirib bajarishi uchun nechta velosiped tayyorlashi kerak?

103. Ekin maydoni to'g'ri to'rtburchak shaklida bo'lib, uning bo'yi 400 metrga teng. Ekin maydoni 10 gektardan kam bo'lmasligi uchun uning eni qancha bo'lishi kerak?

Bir noma'lumli tengsizliklarni yechish

Bir noma'lumli chiziqli tengsizliklarni yechish sonli tengsizliklarning xossalariga asoslangan.

1-masala. Tengsizlikni yeching: $4x+3>11+2x$. (1)

△ x son (1) tengsizlikning yechimi bo'lsin. U holda x son (1) tengsizlikni to'g'ri sonli tengsizlikka aylantiradi. (1) da $2x$ hadni tengsizlikning o'ng qismidan chap qismiga ishorasini qarama-qarshisiga o'zgartirib olib o'tamiz; 3 sonini esa tengsizlikning o'ng qismiga minus („–") ishorasi bilan o'tkazamiz. Natijada $4x-2x>11-3$ to'g'ri tengsizlikni hosil qilamiz. O'xshash hadlarini ixchamlaymiz: $2x>8$; bu tengsizlikning ikkala qismidagi sonlarni musbat son 2 ga bo'lib, $x>4$ javobni olamiz. x son berilgan tengsizlikning yechimi deb faraz qilib, $x>4$ javobni oldik. x ning 4 dan katta istalgan qiymati ham (1) tengsizlikning javobi bo'ladi.

Javob: $x>4$. ▲

$x>4$ tengsizlikni $(4; \infty)$ yoki $4<x<\infty$ ko'rinishida ham yozish mumkin.

Tengsizlikni yechishda uning ushbu asosiy xossalaridan foydalanamiz:

1-xossa. *Tengsizlikning istalgan hadini uning bir qismidan ikkinchi qismiga, shu hadning ishorasini qarama-qarshisiga o'zgartirgan holda o'tkazish mumkin, bunda tengsizlik ishorasi o'zgarmaydi.*

2-xossa. *Tengsizlikning ikkala qismini nolga teng bo'lmagan ayni bir songa ko'paytirish yoki bo'lish mumkin: agar bu son musbat bo'lsa, u holda tengsizlik ishorasi o'zgarmaydi; agar bu son manfiy bo'lsa, u holda tengsizlik ishorasi qarama-qarshisiga o'zgaradi.*

Bu xossalar yordamida berilgan tengsizlik ayni shunday yechimlarga ega bo'lgan boshqa tengsizlik bilan almashtiriladi.

Chiziqli tengsizlikka keltiriladigan bir noma'lumli tengsizliklarni yechish uchun:

1) noma'lum qatnashgan hadlarni chap tomonga, noma'lum qatnashmagan hadlarni esa o'ng tomonga o'tkazish (1-xossa);

2) o'xshash hadlarni ixchamlab, tengsizlikning ikkala qismini noma'lum oldidagi koeffitsiyentga (agar u nolga teng bo'lmasa) bo'lish (2-xossa) kerak.

2-masala. Tengsizlikni yeching: $9(x-5)-3(x+2)<4(x-3)+7$.

△ *1-qadam:* qavslarni ochib, tengsizlikning chap va o'ng qismlarini soddalashtiramiz: $9x-45-3x-6<4x-12+7$.

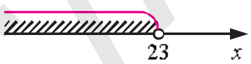
2-qadam: noma'lum x qatnashgan hadlarni tengsizlikning chap qismiga, ozod hadlarni (x qatnashmagan hadlarni) tengsizlikning o'ng qismiga, 1-xossaga muvofiq, o'tkazamiz:

$9x-3x-4x<45+6-12+7$.

3-qadam: o'xshash hadlarni ixchamlaymiz: $2x<46$.

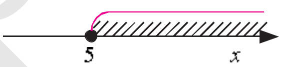
4-qadam: tengsizlikning ikkala qismini,

2-xossaga muvofiq, x oldidagi koeffitsiyent – musbat son 2 ga bo'lamiz va javobni olamiz: $x<23$. **Javob:** $x<23$. ▲



13-rasm.

$x<23$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi x sonlar to'plami son o'qida *nur* bilan tasvirlanadi. $x=23$ nuqta nurga tegishli emas, 13-rasmda u oq doiracha bilan belgilangan, nur esa qiya chiziqchalar (shtrix) bilan tasvirlangan.



14-rasm.

x sonlarning $x\geq 5$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi to'plami ham *nur* deyiladi. Bunda $x=5$ nuqta nurga tegishli va u 14-rasmda qora doiracha bilan tasvirlangan.

Tengsizlikning yechimi istalgan son bo‘lishi ham mumkin.

3-masala. Tengsizlikni yeching: $3(x+2)+7>5-(4-3x)$.

△ $3x+6+7>5-4+3x$, $3x-3x>5-4-13$, $0\cdot x>-12$.

Oxirgi tengsizlik x ning istalgan qiymatida to‘g‘ri bo‘laveradi, chunki ixtiyoriy x da bu tengsizlikning chap qismi nolga teng, o‘ng qismi esa manfiy son: $0>-12$.

Demak, x ning istalgan qiymati berilgan tengsizlikning yechimi bo‘ladi.

Javob: x – istalgan son. ▲

Tengsizlikning yechimi bo‘lmasligi ham mumkin.

4-masala. Tengsizlikni yeching: $4(x-5)-3>2(1+2x)-10$.

$4x-20-3>2+4x-10$, $4x-4x>2+3+20-10$, $0\cdot x>15$.

$0\cdot x>15$ tengsizlik yechimga ega emas, chunki bu tengsizlikning chap qismi ixtiyoriy x da nolga teng, $0>15$ tengsizlik esa noto‘g‘ri.

Demak, berilgan tengsizlik yechimga ega emas.

Javob: tengsizlikning yechimi yo‘q. ▲

104. Savollarga javob bering. Topshiriqlarni bajaring:

1) Tengsizliklarni yechishda qanday asosiy xossalardan foydalaniladi?

2) Tengsizliklarni yechish algoritmini 2–3 ta misol yordamida ko‘rsating.

3) Bir noma’lumli chiziqli tengsizliklarning yechimlari to‘plami qanday to‘plamlar bo‘lishi mumkin? Har bir hol uchun 3–4 tadan misol toping.

4) Yechimi ixtiyoriy son bo‘lgan tengsizliklarga;

5) Yechimi yo‘q tengsizliklarga 2 tadan misol tuzing.

105. 1) x ning qanday qiymatlarida $y-3x+4,5$ funksiya grafigining nuqtalari $y--2x+1$ funksiya grafigining nuqtalaridan yuqorida yotadi?

2) x ning qanday qiymatlarida $y-2x+3$ funksiya grafigining nuqtalari $y--2x+1$ funksiya grafigi nuqtalaridan pastda yotadi?

106. Tengsizlikni yeching va uning eng katta butun yechimini toping:

1) $\frac{3x-4}{4}+5<\frac{x-1}{5}+\frac{1-2x}{2}+\frac{1}{5}$; 2) $\frac{2x-5}{3}+\frac{5x-3}{2}<4-\frac{2-x}{3}$.

107. Tengsizlikni yeching va uning eng kichik butun yechimini toping:

1) $\frac{2x+5}{3}+\frac{x-1}{4}<\frac{5x-2}{2}+\frac{1-x}{3}$; 2) $\frac{3x-1}{4}+\frac{x-2}{2}>\frac{x-5}{2}-\frac{3-x}{4}$.

108. Quyidagi tengsizliklarning yechimi ixtiyoriy son ekanini ko‘rsating:

1) $3(x+0,5)+\frac{5}{2}>4x-(3+x)$; 2) $\frac{x+3}{4}+\frac{x-1}{3}>\frac{7x+1}{12}$.

109. Quyidagi tengsizliklarning yechimi yo‘qligini ko‘rsating:

1) $4\left(\frac{1}{5}+2x\right)-8\frac{3}{5}>5x-(4-3x)$; 2) $\frac{x+1}{2}-\frac{x-4}{3}<\frac{x+1}{6}$.

110. Qaysi holda kater ko‘proq vaqt sarflaydi: u 20 km daryo oqimi bo‘yicha va 20 km daryo oqimiga qarshi suzganidami yoki 40 km turg‘un suvda suzganidami?

111. Tomoni 20 cm ga teng kvadrat yuzini shunday perimetrli ixtiyoriy to‘g‘ri to‘rtburchakning yuzi bilan taqqoslang.

112. Uchburchakning bir tomoni 7 dm, ikkinchi tomoni esa 10 dm ga teng. Agar uchburchakning perimetri: 1) 29 dm dan kichik; 2) 21 dm dan katta bo‘lsa, uning uchinchi tomoni uzunligi qanday bo‘lishi mumkin?

113. Tengsizlikni yeching, yechimlar to‘plamini son o‘qida tasvirlang:

1) $\frac{x-3}{2}>\frac{7(x-3)}{2}+5(6-2x)+14$; 2) $5(x-2)-3\leq\frac{9(x-2)}{2}-3(2x-4)$.

114. Qayiqning turg‘un suvdagi tezligi 6 km/h, daryo oqimining tezligi 1,5 km/h. Fozil daryoda biror masofaga borish va qaytishga 8 soatdan kam vaqt sarfladi. U oqim bo‘yicha qanday masofaga bora olishi mumkin?

115. Do‘kon A va B firmalardan mahsulotlar olib keladi. Birinchi xil bitta mahsulotning A firmadan kelishi 10 000 so‘mga, ikkinchi xil bitta mahsulotning B firmadan kelishi 7 000 so‘mga tushadi. Do‘kon shartnomaga ko‘ra bir haftada A va B firmalardan birgalikda 72 dona mahsulot oladi. Mahsulotlarni olib kelish (yo‘l xarajatlari) uchun do‘kon 620 000 so‘mdan ortiq bo‘lmagan mablag‘ ajratgan. Har bir firmadan bir haftada do‘konga qancha mahsulot keltirilishi mumkin?

116. Temperaturasi 12°C bo‘lgan sovuq suv bilan temperaturasi 62°C bo‘lgan issiq suvni aralashtirib, temperaturasi 40°C dan oshmaydigan 100 litr suv hosil qilish uchun sovuq suvdan necha litr quyish mumkin?

117. To‘rtta ketma-ket kelgan butun son olinib, 1-va 4-sonlar ko‘paytmasidan 2-va 3-sonlar ko‘paytmasi ayirildi. Ayirma musbat bo‘lishi mumkinmi?

118. Toq natural sonning o‘zidan keyin keluvchi uchta toq son bilan yig‘indisi 47 dan katta. Shu shartni qanoatlantiruvchi eng kichik toq sonni toping.

119. Juft natural sonning o‘zidan keyin keluvchi juft sonning uchlangani bilan yig‘indisi 65 dan kichik. Shu shartni qanoatlantiruvchi eng katta juft sonni toping.

16-§. Bir noma’lumli tengsizliklar sistemalari. Sonli oraliqlar

1. Tengsizliklar sistemalari

Tengsizliklar sistemasiga olib keluvchi masalalar ko‘raylik.

Masala. Uchburchakning bir tomoni 10 cm, ikkinchi tomoni esa 15 cm ga teng. Uning perimetri 36 cm dan katta, 40 cm dan kichik bo‘lishi uchun uchinchi tomoni qancha bo‘lishi mumkin?

Uchburchakning uchinchi tomoni uzunligi x cm deylik. U holda, masala shartiga muvofiq, x ushbu $10+15+x>35$ va $10+15+x<40$ tengsizliklarni qanoatlantirishi kerak. 1-tengsizlikdan $x>10$, 2-tengsizlikdan $x<15$ ekani kelib chiqadi.

Javob: Uchburchakning uchinchi tomoni 10 cm dan katta, ammo 15 cm dan kichik bo‘lishi kerak. ▲

$10+15+x>35$ va $10+15+x<40$ tengsizliklardagi noma’lum son ayni bir son x ning o‘zidir. Shuning uchun bu tengsizliklar birgalikda qaraladi va ular ***tengsizliklar sistemasini tashkil qiladi*** deyiladi:

$$\begin{cases} 10+15+x>35, \\ 10+15+x<40. \end{cases} \qquad (1)$$

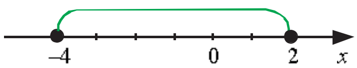
Katta qavs x ning (1) sistemaning ikkala tengsizligini ham to‘g‘ri sonli tengsizlikka aylantiruvchi qiymatlarini topish kerakligini bildiradi. (1) sistemani ixchamlab, quyidagicha yozib olamiz:

$$\begin{cases} x>10, \\ x<15. \end{cases} \qquad (2)$$

Bir noma'lumli tengsizliklar sistemasining yechimi deb, noma'lumning sistema tengsizliklarining barchasini to'g'ri sonli tengsizliklarga aylantiruvchi qiymatiga aytiladi.

Tengsizliklar sistemasini yechish – uning barcha yechimlarini topish yoki ularning yo'qligini aniqlash demakdir.

2. Sonli oraliqlar



15-rasm.

$x \geq -4$ va $x \leq 2$ tengsizliklarni *qo'sh tengsizlik* ko'rinishida yozish mumkin: $-4 \leq x \leq 2$. Son o'qida x ning $-4 \leq x \leq 2$ bo'ladigan son qiymatlari to'plami oxirlari –4 va 2 nuqtalarda bo'lgan kesma bilan tasvirlanadi (15-rasm).

$-4 \leq x \leq 2$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi x sonlar to'plami *kesma* deb ataladi va $[-4;\ 2]$ kabi belgilanadi.

Agar $a \leq b$ bo'lsa, $a \leq x \leq b$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi x sonlar to'plami *kesma* deyiladi va $[a;\ b]$ kabi belgilanadi.

Masalan, $[0;\ 3]$ kesma $0 \leq x \leq 3$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi x sonlar to'plamidir (16-*a* rasm).

Agar $a < b$ bo'lsa, u holda $a < x < b$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi x sonlar to'plami *interval* deyiladi va $(a;\ b)$ kabi belgilanadi.

Masalan, $(-1;\ 2)$ *interval* $-1 < x < 2$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi x sonlar to'plamidir (16-*b* rasm).

16-rasm.

$a \leq x < b$ yoki $a < x \leq b$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi x sonlar to'plami *yarimintervallar* deyiladi va mos ravishda $[a;\ b)$ va $(a;\ b]$ kabi belgilanadi.

Masalan, $[-2;\ 0)$ yariminterval $-2 \leq x < 0$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi x sonlar to'plamidir (17-*a* rasm). $(1;\ 3]$ yariminterval esa $1 < x \leq 3$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi x sonlar to'plamidir (17-*b* rasm).

17-rasm.

Kesmalar, intervallar, yarimintervallar va nurlar *sonli oraliqlar* deyiladi.

Demak, sonli oraliqlarni tengsizliklar ko‘rinishida berish mumkin ekan.

120. Savollarga javob bering. Topshiriqlarni bajaring:
1) Bir noma’lumli tengsizliklar sistemasiga geometrik, fizik, iqtisodiy mazmundagi misollardan 2 tadan keltiring.
2) Bir noma’lumli tengsizliklar sistemasining yechimi nima?
3) Tengsizliklar sistemasining yechimi deganda nimani tushunasiz?

121. 1) Kesma deb nimaga aytiladi? U qanday tengsizlik bilan beriladi? Son o‘qida qanday tasvirlanadi? Misollarda tushuntiring.
2) Interval, yarimintervallar nima? Ular qanday tengsizliklar bilan beriladi? Son o‘qida qanday tasvirlanadi? Misollar keltiring.
3) Sonli oraliqlar deb nimaga aytiladi? Qanday sonli oraliqlarni bilasiz?

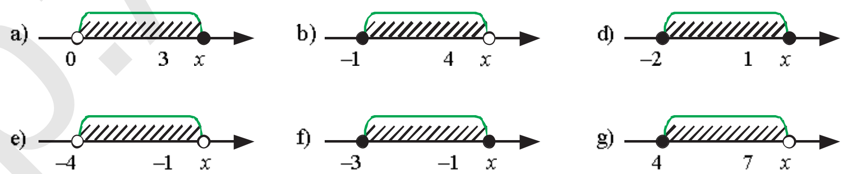
122. Tengsizliklar sistemasining yechimi bo‘la oladigan barcha butun sonlar yig‘indisini toping:

1) $\begin{cases} x > 3, \\ x < 15; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x \le 7, \\ x > -2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x \le 2,7, \\ x \ge -3,8; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x \ge 0, \\ x \le 9. \end{cases}$

123. Berilgan qo‘sh tengsizlikni qanoatlantiruvchi x sonlar to‘plamini sonli oraliqning belgilanishlari yordamida yozing va uni son o‘qida tasvirlang:
1) $-3 \le x \le 1$; 2) $1 \le x \le 4$; 3) $2 < x \le 5$; 4) $-4 < x < -1$.

124. Berilgan sonli oraliqqa tegishli x sonlar to‘plamini qo‘sh tengsizlik ko‘rinishida yozing va uni son o‘qida tasvirlang:
1) [0; 3]; 2) [–1; 2]; 3) (–2; 0); 4) (–3; 3); 5) [–1; 4).

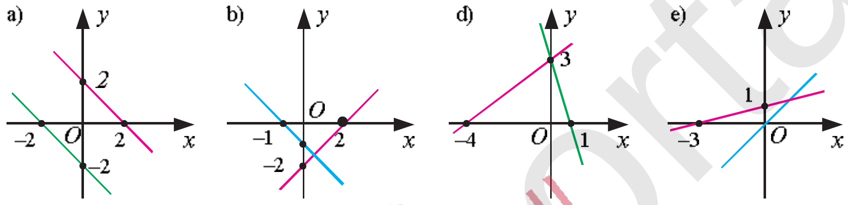
125. 18-rasmda tasvirlangan x sonlar to‘plamini qo‘sh tengsizlik ko‘rinishida, shuningdek, sonli oraliqning belgilanishlari yordamida yozing:



18-rasm.

126. 1) x ning qanday qiymatlarida $y=3x+2$ funksiya grafigining nuqtalari $y=-2x+3$ funksiya grafigining nuqtalaridan yuqorida yotadi?
2) x ning qanday qiymatlarida $y=4x+1$ funksiya grafigining nuqtalari $y=-4x-1$ funksiya grafigi nuqtalaridan pastda yotadi?

127. 19-rasmda bir koordinata tekisligida ikkita chiziqli funksiyaning grafiklari tasvirlangan. x ning qanday qiymatlarida ikkala funksiyaning qiymati bir vaqtda musbat bo‘ladi? Qanday qiymatlarida esa bir vaqtda manfiy bo‘ladi?



19-rasm.

128. Qo‘sh tengsizlikni: 1) yeching; 2) yechimni son o‘qida sxematik tarzda tasvirlang; 3) butun yechimlari yig‘indisini toping:
1) $-9<1-4x<11$; 2) $7<2x-5<21$; 3) $-12\le 5x+3\le 28$.

129. x ning qanday qiymatlarida: 1) $\frac{6x-7}{8}$ kasrning qiymati $(-3;\ 4)$;
2) $\frac{9-7x}{12}$ kasrning qiymati $[-2;\ 3)$ oraliqda bo‘ladi?

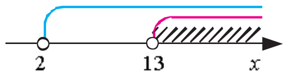
Tengsizliklar sistemasini yechishga oid mashqlar ko‘raylik.

1-masala. Tengsizliklar sistemasini yeching:

$$\begin{cases} 5\cdot(x-2)>4x+3, \\ 3\cdot(x+2)>x+10. \end{cases} \qquad (1)$$

△ Avval sistemaning birinchi tengsizligini yechamiz:
$5x-10>4x+3$, $\quad 5x-4x>3+10$; $\quad x>13$.
Birinchi tengsizlik $x>13$ bo‘lganda bajariladi. Yechimlarni son o‘qida tasvirlaylik (20-rasm).
Endi sistemaning ikkinchi tengsizligini yechamiz:
$3x+6>x+10$, $\quad 3x-x>10-6$; $\quad 2x>4$, $\quad x>2$.
Ikkinchi tengsizlik $x>2$ bo‘lganda bajariladi.
Birinchi tengsizlikning yechimlari $x>13$ nurning barcha nuqtalari,

ikkinchi tengsizlikning yechimlari esa $x>2$ nurning barcha nuqtalari bo‘ladi. (1) sistemaning yechimlari x ning ikkala nurga bir vaqtda tegishli bo‘lgan qiymatlaridan iboratdir. Bu nurlarning barcha umumiy nuqtalari to‘plami $x>13$ nur bo‘ladi.



20-rasm.

Javob: $x>13$. ▲

2-masala. Tengsizliklar sistemasini yeching:

$$\begin{cases} (x-5)^2-15\geq x^2-7x-38, \\ 4(x+7)-17\geq 1-x. \end{cases}$$

△ Birinchi tengsizlikni yechamiz: $x^2-10x+25-15\geq x^2-7x-38$;

$-10x+7x\geq -38-10$; $-3x\geq -48$; $x\leq 16$.

Endi sistemaning ikkinchi tengsizligini yechamiz:

$4x+28-17\geq 1-x$; $4x+x\geq 1-28+17$; $5x\geq -10$; $x\geq -2$.

Birinchi tengsizlikning yechimlari son o‘qida $x\leq 16$ nur bilan, ikkinchi tengsizlikning yechimlari esa $x\geq -2$ nur bilan tasvirlanadi (21-rasm).

Bu nurlarning umumiy qismi – umumiy nuqtalari to‘plami $-2\leq x\leq 16$ oraliq, ya’ni $[-2; 16]$ kesma bo‘ladi.

21-rasm.

Javob: $-2\leq x\leq 16$. ▲

130. Savollarga javob bering. Topshiriqlarni bajaring:

1) Tengsizliklar sistemasining yechimlari qanday to‘plamlar bo‘lishi mumkin? Har bir holga mos misollar keltiring.

2) Tengsizliklar sistemasi yechimga ega bo‘lmasligi ham mumkinmi? Misollar keltiring.

131. Tengsizliklar sistemasining barcha yechimlari to‘plamini qo‘sh tengsizliklar ko‘rinishida yozing va bu to‘plamni son o‘qida tasvirlang:

1) $\begin{cases} x>3, \\ x<5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x>1, \\ x<2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x\geq 0, \\ x\leq 2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x\geq -2, \\ x\leq -1; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x\geq 1, \\ x\leq 3. \end{cases}$

132. Tengsizliklar sistemasining barcha yechimlarini bitta tengsizlik bilan yozing va yechimlar to‘plamini son o‘qida tasvirlang:

1) $\begin{cases} x>0, \\ x<1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x>-1, \\ x<2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x\geq -1, \\ x<1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x\geq -2, \\ x\geq -3; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x<3, \\ x\leq 4. \end{cases}$

Tengsizliklar sistemasini: 1) yeching; 2) yechimlar to'plamini son o'qida tasvirlang; 3) tengsizliklar sistemasi nechta butun yechimga egaligini aniqlang; 4) butun yechimlari o'rta arifmetigini; 5) eng katta (eng kichik) butun yechimni toping **(133, 135, 136)**:

133. 1) $\begin{cases} 3x-2<13, \\ 4x+5>15; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -x-7<-3x-2, \\ -4x+5>4-7x; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 4x+5\le 2x+1, \\ 3x-2\le 4x+3. \end{cases}$

134. Shunday tengsizliklar sistemasini topingki, 1) 2,5 soni sistemaning yechimi bo'lsin, 2,4 soni esa uning yechimi bo'lmasin; 2) –0,5 soni sistemaning yechimi bo'lsin, –0,(6) soni esa uning yechimi bo'lmasin.

135. 1) $\begin{cases} 15x^2-(3x-5)(5x+4)<4x, \\ (4x-1)(3x+2)-12x^2\ge 2x-17; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (x+2)(x-3)<(x+3)(x-1), \\ \frac{x+1}{4}+\frac{x+5}{2}\le 6. \end{cases}$

136. 1) $\begin{cases} 3-2y<5y+3, \\ 1-3y>7+2y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3\cdot(2-5y)-2\cdot(3-2y)>y, \\ 6<y^2-y(y-8). \end{cases}$

137. x ning qanday qiymatlarida $y-3x+2$ va $y-3-2x$ funksiyalarning qiymatlari bir vaqtda: 1) musbat; 2) manfiy; 3) 4 dan katta; 4) –1 dan kichik bo'ladi?

138. x ning qanday qiymatlarida $y-x+2$ va $y-3-x$ funksiyalarning qiymatlari bir vaqtda: 1) nomanfiy; 2) nomusbat; 3) 2 dan kichik emas; 4) –2 dan katta emas bo'ladi?

139. Tengsizliklar sistemasini yeching:

1) $\begin{cases} \frac{3}{4}(x-1)+\frac{7}{8}<\frac{1}{4}(x-1)+\frac{5}{2}, \\ \frac{x}{4}-\frac{2x-3}{3}<2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{(x-4)^2-1}{5}+\frac{x}{2}<\frac{2\cdot(x-4)^2+3}{10}+\frac{x-1}{2}, \\ 1-x>\frac{0,5\cdot(x-1)-1}{2}-\frac{2\cdot(x-1)+4,5}{3}. \end{cases}$

140. Tengsizliklar sistemasining yechimi bo'ladigan oraliqning o'rtasini toping:

1) $\begin{cases} -\frac{13}{4}+\frac{3x}{4}\le\frac{x-1}{4}, \\ 2\ge\frac{x}{4}+\frac{3-2x}{3}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{3}{5}+\frac{3x-1}{10}\ge\frac{2-x}{5}-0,3, \\ 1\ge\frac{x-1}{3}+0,5(x+3). \end{cases}$

141. Ikkita idishdagi bir xil buyumlar soni birgalikda 29 tadan ko‘p. 1-idishdan 2 ta buyum olinganida, unda qolgan buyumlar 2- idishdagidan 3 baravardan-da ko‘proq bo‘ladi. 1- idishdagi buyumlarning 3 barobari bilan 2- idishdagi buyumlarning 2 barobari farqi 60 dan kam. Har bir idishda qanchadan buyum bor?

17- §. Sonning moduli. Modul qatnashgan tenglama va tengsizliklar

1. Sonning moduli

Sonning moduli ta’rifini eslatib o‘tamiz:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ agar } a \ge 0 \text{ bo‘lsa}, \\ -a, \text{ agar } a < 0 \text{ bo‘lsa}. \end{cases}$$

Ta’rifdan ko‘rinadiki: 1) musbat sonning moduli shu sonning o‘ziga teng;

2) manfiy sonning moduli unga qarama-qarshi songa teng;

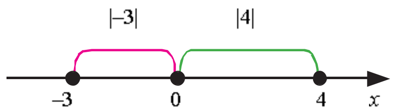
3) nolning moduli nolga teng: $|0| = 0$.

Masalan: $|5| = 5$; $|0,7| = 0,7$; $\left|3\frac{1}{7}\right| = 3\frac{1}{7}$; $|-3| = -(-3) = 3$; $\left|-\frac{4}{7}\right| = -\left(-\frac{4}{7}\right) = \frac{4}{7}$.

Son modulining geometrik ma’nosi: $|a|$ son – son o‘qida nol nuqtadan a sonni tasvirlovchi nuqtagacha bo‘lgan masofadir.

Chindan ham, $|4|=4$ bu son o‘qida 0 nuqtadan 4 nuqtagacha bo‘lgan masofa;

$|-3|=3$ esa son o‘qida 0 nuqtadan –3 nuqtagacha bo‘lgan masofadir (22-rasm).



22-rasm.

2. Noma’lum modul belgisi ostida qatnashgan tenglamalar

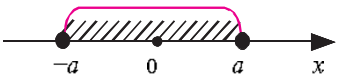
1-masala. $|5x-3|=2$ tenglamani yeching.

△ 1) $5x-3 \ge 0$ bo‘lsin. U holda sonning moduli ta‘rifiga muvofiq $|5x-3| = 5x-3$. Demak, $5x-3 = 2$ tenglamani yechishimiz kerak: $5x = 3+2$, $5x = 5$, $x = 1$.

2) $5x-3<0$ bo‘lsin. U holda sonning moduli ta’rifiga ko‘ra $|5x-3|=-(5x-3)--5x+3$. Demak, $-5x+3-2$ tenglamani yechishimiz lozim. $-5x-2-3$; $-5x--1$; $5x-1$; $x=\frac{1}{5}$.

Javob: x_1-1; $x_2=\frac{1}{5}$. ▲

3. Noma’lum modul belgisi ostida qatnashgan tengsizliklar



23-rasm.

$|x|\le a$ (bunda $a>0$) tengsizlikni son modulining geometrik ma’nosiga ko‘ra 0 nuqtadan a dan katta bo‘lmagan masofada yotuvchi barcha x nuqtalar, ya’ni $[-a;\,a]$ kesmaning nuqtalari qanoatlantiradi (23-rasm).

$[-a;\,a]$ kesma, kesmaning ta’rifiga ko‘ra, $-a\le x\le a$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi x sonlar to‘plamidir.

$|x|\le a$ tengsizlik $-a\le x\le a$ qo‘sh tengsizlikning ayni o‘zini anglatadi, $a>0$.

Masalan, $|x|\le 2$ tengsizlik $-2\le x\le 2$ qo‘sh tengsizlikni bildiradi; $|x|<1{,}3$ esa $-1{,}3<x<1{,}3$ ni bildiradi.

2- masala. $|x|\le 0$ tengsizlikni yeching ($a-0$ bo‘lgan hol).

△ Sonning moduli, ta’rifiga ko‘ra, manfiy emas: $|x|\ge 0$. Demak, $|x|\le 0$ tengsizlik $x=0$ dan iborat yagona (birgina) yechimga ega bo‘ladi.

Javob: $x=0$. ▲

3- masala. $|x|\le -1$ tengsizlikni yeching ($a<0$ bo‘lgan hol).

△ Sonning moduli, ta’rifiga ko‘ra, manfiy emas, demak, u manfiy songa teng yoki undan kichik bo‘la olmaydi. $|x|$ geometrik nuqtayi nazardan son o‘qida 0 nuqtadan koordinatasi x bo‘lgan nuqtagacha masofani bildiradi, masofa esa manfiy bo‘la olmaydi, ya’ni $a<0$ bo‘lganda $|x|<a$ tengsizlik yechimga ega bo‘lmaydi.

Javob: yechimga ega emas. ▲

4- masala. $|2x-3|<1$ tengsizlikni yeching.

△ ***1- usul.*** 1) Tengsizlikni $-1<2x-3<1$ qo‘sh tengsizlik ko‘rinishida yozib olamiz. 2) Tengsizlikning hamma qismiga 3 ni qo‘shamiz va natijani ixchamlaymiz:

$$-1+3<2x-3+3<1+3; \qquad 2<2x<4.$$

3) Tengsizlikning hamma qismini musbat son 2 ga bo‘lamiz, bunda tengsizlik ishorasi o‘zgarmaydi va javobni olamiz.

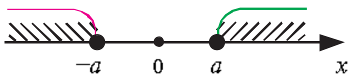
Javob: $1<x<2$ yoki $(1;\ 2)$.

2-usul. Berilgan tengsizlikni $-1<2x-3<1$ qo'sh tengsizlik ko'rinishida yozib olamiz. Bu qo'sh tengsizlikni tengsizliklarning ushbu

$$\begin{cases} 2x-3<1, \\ 2x-3>-1 \end{cases}$$

sistemasi kabi yozish mumkin. Sistemaning birinchi tengsizligini yechib, $x<2$ javobni, ikkinchisini yechib esa $x>1$ javobni olamiz.

Javob: $1<x<2$.



24-rasm

$|x|\geq a$ (bunda $a>0$) tengsizlikni ko'raylik. $|x|\geq a$ tengsizlikni son o'qida 0 nuqtadan a dan kichik bo'lmagan masofada yotuvchi barcha x nuqtalar to'plami, ya'ni $x\geq a$ va $x\leq -a$ nurlarning nuqtalari qanoatlantiradi (24-rasm).

Agar $|x|\geq a$ tengsizlikda $a=0$ yoki $a<0$ bo'lsa, u holda bu tengsizlikni ixtiyoriy x son qanoatlantiradi.

5-masala. $|4x-3|\geq 1$ tengsizlikni yeching.

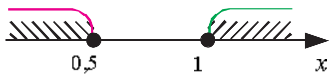
1) $4x-3\geq 0$ bo'lsin. U holda $|4x-3|=4x-3$ va biz ushbu sistemaga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} 4x-3\geq 0, \\ 4x-3\geq 1. \end{cases}$$

Bundan $x\geq \frac{3}{4}$ va $x\geq 1$ hosil bo'ladi. Bu sistemaning yechimi $x\geq 1$ bo'ladi.

2) $4x-3<0$ bo'lsin. U holda biz $\begin{cases} 4x-3<0 \\ 4x-3\leq -1 \end{cases}$, sistemani hosil qilamiz. Bundan $x<\frac{3}{4}$ va $x\leq \frac{1}{2}$ hosil bo'ladi. Bu sistemaning yechimi $x\leq \frac{1}{2}$ bo'ladi.

Demak, $|4x-3|\geq 1$ tengsizlikning yechimlari x ning $x\geq 1$ va $x\leq \frac{1}{2}$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlaridan iborat (25-rasm).



25-rasm.

Javob: $x\leq \frac{1}{2}$; $x\geq 1$. ▲

142. Savollarga javob bering. Topshiriqlarni bajaring:
1) Sonning moduli deb nimaga aytiladi?
2) Son modulining geometrik ma'nosini misollarda tushuntiring.
3) $|x| \le a$ tengsizlik va $-a \le x \le a$ qo'sh tengsizlik ayni bir ekanini misollarda ko'rsating.
4) $|x| \ge a$ tengsizlik bilan $x \ge a$ va $x \le -a$ tengsizliklar ayni bir ekanini misollarda ko'rsating.

143. 1) Noma'lum modul belgisi ostida bo'lgan: a) tenglamalar; b) tengsizliklar tuzing va ularni yeching.
2) Qachon $|x| \le a$ tengsizlik: a) yechimga ega emas? b) birgina yechimga ega?
3) Qachon $|x| \ge a$ tengsizlikning yechimi ixtiyoriy son bo'ladi?

Tenglamani yeching (**144–145**):

144. 1) $|-x|-3$; 2) $|x-1|-7$; 3) $|2-x|-3$; 4) $|x+5|-5$; 5) $|x-7{,}5|-0$.

145. 1) $|4x-7|=1$; 2) $|5-3x|=4$; 3) $\left|\frac{3}{2}x-1\right|=2$; 4) $|4-5x|=1$.

146. Modulli tengsizlikni qo'sh tengsizlik shaklida yozing:
1) $|x|<7$; 2) $|x-1|<3$; 3) $|x|\le 5$; 4) $|x+1|\le 2$.

147. Qo'sh tengsizlikni modulli bitta tengsizlik shaklida yozing:
1) $-1\le x\le 1$; 2) $-2\le x\le 2$; 3) $-2{,}8<x<2{,}8$; 4) $-0{,}7\le x\le 0{,}7$.

Tengsizlikni yeching (**148–149**):

148. 1) $|3x-7|\le 2$; 2) $|2{,}7x-3|\le 2{,}4$; 3) $|5-2x|<3$; 4) $|7x-2|<12$.

149. 1) $|2x-5|>1$; 2) $|3x-1|\ge 2$; 3) $|2{,}5x-2|\ge 1{,}5$; 4) $|7-4x|\ge 9$.

150. Agar $|x-a|=|x-b|$ bo'lsa, bunda $a<b$, u holda $x-[a; b]$ kesmaning o'rtasi ekanini isbotlang.

Tenglamani yeching (**151–152**):

151. 1) $|x - 1|=|x-2|$; 2) $|x-5|=|x-8|$; 3) $|x+6|=|x+10|$.

152. 1) $|x|-x=2$; 2) $||x|-2|=2$; 3) $||x|+2|=2$; 4) $||x|+2|=1$.

153. Tengsizlikni yeching:
1) $1<|x+2|\le 5$; 2) $x-1\le|3x-1|-(x-1)\le x+2$;
3) $2\le|3-x|<4$; 4) $2x-3\le|4-x|-(2x-3)\le 2x+4$.

Ko'rsatma: $a<|x|<b$ (bunda $a<b$) tengsizlikni yechish $|x|<b$ va $|x|>a$ tengsizliklarni yechishga keltiriladi. Ularning har biri yechilib, javoblarning umumiy qismi olinadi.

Masalalar yechish

154. 1-idishda yashil, 2-idishda esa oq sharlar bor. Yashil sharlar soni oq sharlar sonining $\frac{15}{19}$ qismini tashkil qiladi. Yashil sharlarning $\frac{3}{7}$ qismi, oq sharlarning 0,4 qismi idishlardan olingach, 1-idishda 1 000 donadan kam, 2-idishda 1 000 donadan ko'p shar qoldi. Dastlab har bir idishda qanchadan shar bo'lgan?

155. O'quvchilar har qatorda 8 nafardan saf tortishsa, qatorlardan bittasi to'liq bo'lmay qoladi. Agar har qatorda 7 nafardan bo'lishsa, qatorlar to'liq bo'ladi, ammo qatorlar soni 2 taga ortadi. Agar har qatorda 5 nafardan bo'lishsa, qatorlar soni yana 7 taga ortadi, ammo 1 ta qator to'liq bo'lmaydi. O'quvchilar sonini aniqlang.

Tenglamani yeching **(156–157)**:

156. 1) $|x+1|+|x-1|=2$; 2) $|x|-|x+1|=1$; 3) $|x|+|x+2|=3$.

157. 1) $|x-a|=|x-4|$; 2) $|3x-5|=|x+2|$; 3) $|x+4|=a$.

Tengsizlikni yeching (**158–160**):

158. 1) $1<|x|<2$; 2) $2<|x-3|\le 5$; 3) $-1<|2x-3|<7$; 4) $0<|2-3x|<1$.

159. 1) $||x-3|-2|\le 1$; 2) $||x-4|-2|<3$;
3) $||2x-1|-2|>3$; 4) $||3x-4|-5|>1$.

160. 1) $|x-1|<2x-4$; 2) $|x-3|\le 6-3x$; 3) $|x-4|>2x-1$.

161. Teng yonli uchburchakning asosi 50 cm ga teng, perimetri esa 120 cm dan kichik. Shu uchburchakning yon tomoni uzunligi qancha bo'lishi mumkin?

162. Teng yonli uchburchakning yon tomoni 40 cm ga teng, perimetri esa 130 cm dan uzun. Shu uchburchakning asosi uzunligi qancha bo'lishi mumkin?

18-§. Taqribiy hisoblashlar. Miqdorlarning taqribiy qiymatlari. Yaqinlashish xatoligi

Amaliy masalalarni yechishda, ko‘pincha, turli miqdorlarning taqribiy qiymatlari bilan ish ko‘rishga to‘g‘ri keladi.

Biror sonning taqribiy qiymatini a, aniq qiymatini A deb belgilaylik.

A sonning taqribiy qiymati a deb, aniq son A dan kam farq qiladigan va hisoblashlarda A sonni almashtiradigan songa aytiladi.

Agar $a<A$ bo‘lsa, u holda a son A sonning *kami bilan*, agar $a>A$ bo‘lsa, unda a son A sonning *ortig‘i bilan olingan taqribiy qiymati* deyiladi.

Masalan, 1,41 soni $\sqrt{2}$ sonining kami bilan, 1,42 soni ortig‘i bilan olingan taqribiy qiymati bo‘ladi, chunki $1,41<\sqrt{2}<1,42$.

Taqribiy qiymat aniq qiymatga qanchalik yaqinlashishini bilish muhim.

Taqribiy a sonning aniq son A ga *yaqinlashish xatoligi* deyilganda aniq son A bilan uning taqribiy qiymati ayirmasi tushuniladi. Shu ayirmani Δ_a deb belgilaymiz, ya’ni $\Delta_a=A-a$.

1-masala. Maktab o‘quvchilaridan biri maktabda nechta o‘quvchi o‘qishi haqidagi savolga: „2000 nafar“, deb javob berdi, ikkinchi o‘quvchi esa: „1760 nafar“, – dedi. Agar maktabda 1875 nafar o‘quvchi bo‘lsa, kimning javobi aniqroq?

△ Birinchi o‘quvchi 140 nafarga, ikkinchisi esa 125 nafarga adashdi. Demak, ikkinchi o‘quvchining javobi aniqroq. ▲

Miqdorning aniq qiymati bilan uning taqribiy qiymati ayirmasining moduli yaqinlashishning *absolut xatoligi* deyiladi.

Bu miqdorni Δ deb belgilasak, absolut xatolik bunday yoziladi: $\Delta=|A-a|=|\Delta_a|$.

Yaqinlashishning absolut xatoligi, ko‘pincha, xatolik deb qisqacha aytiladi.

2-masala. Kubning qirrasini o‘lchab, uning hajmini aniqlashdi: 67,921 m^3. Agar kubning qirrasi 4 m ekani ma’lum bo‘lsa, bu yaqinlashishning absolut xatoligi qanday?

△ Qirrasi 4 m bo‘lgan kubning hajmi 64 m^3. Shuning uchun $A=64$, $a=67,921$ miqdorlar bo‘yicha absolut xatolikni topamiz:

$$\Delta=|A-a|=|64-67,921|=3,921.$$

Javob: Δ – absolut xatolik 3,921 ga teng. ▲

3-masala. $\frac{4}{9}$ sonining 0,44 o‘nli kasrga yaqinlashish absolut xatoligini toping.

△ $\left|\frac{4}{9}-0,44\right|=\left|\frac{4}{9}-\frac{44}{100}\right|=4\cdot\left|\frac{1}{9}-\frac{11}{100}\right|=4\cdot\frac{100-99}{900}=4\cdot\frac{1}{900}=\frac{1}{225}$. ▲

4-masala. Beshburchak ichki burchaklarini transportir yordamida o‘lchab, natijalar qo‘shilganida: a) 542°; b) 537° hosil bo‘ldi. Bunday yaqinlashishning absolut xatoligi qanday?

△ a) beshburchak ichki burchaklari yig‘indisini $180°\cdot(n-2)$ formuladan $n=5$ bo‘lganida topamiz: $180°\cdot(5-2)=540°$. Shuning uchun

a) $|540°-542°|-|-2°|=2°$; b) $|540°-537°|-|-3°|-|3°|$. ▲

163. Savollarga javob bering. Topshiriqlarni bajaring:

1. Miqdorlarning taqribiy qiymatlari deganda nimani tushunasiz? Misollar keltiring.
2. Yaqinlashish xatoligi nima? Misollarda tushuntiring.
3. Nima uchun amaliyot masalalarida yaqinlashishning absolut xatoligi ishlatiladi?

164. Oltiburchak ichki burchaklarini transportir yordamida o‘lchab, natijalar qo‘shilganida a) 716°; b) 725° hosil qilindi. Bu yaqinlashishning xatoligi va absolut xatoligini toping.

165. Tarixiy obida minorasining balandligi 61,3 m. Sayyohlarga bu minoraning balandligi 60 m deyishdi. Yaqinlashish xatoligini toping.

166. 1) $\frac{4}{7}$ sonining 0,5714 o‘nli kasrga; 2) $\frac{5}{12}$ sonining 0,4167 o‘nli kasrga yaqinlashish xatoligini toping.

167. $\frac{3}{7}$ sonining: 1) 0,4286; 2) 0,429; 3) 0,4285; 4) 0,42857 soniga yaqinlashishining absolut xatoligini toping.

168. Quyidagi sonlarning yaqinlashish va absolut xatoligini toping:

1) 0,1975 sonining 0,198 soni bilan;
2) –3,254 sonining –3,25 soni bilan;
3) $-\frac{8}{17}$ sonining $-\frac{1}{2}$ soni bilan;
4) $\frac{22}{7}$ sonining 3,14 soni bilan.

169. 0,33 o‘nli kasr $\frac{1}{3}$ sonining absolut xatoligi 0,01 dan kichik taqribiy qiymati bo‘lishi to‘g‘rimi?

19-§. Xatolikni baholash

Ko‘p hollarda miqdorlarning aniq qiymati A noma’lum bo‘ladi. Shuning uchun taqribiy son a ning absolut xatoligini $\Delta=|A-a|=|\Delta_a|$ formula yordamida aniqlab bo‘lmaydi. Agar ortig‘i bilan va kami bilan yaqinlashishlar ma’lum bo‘lsa, absolut xatolikni baholash mumkin bo‘ladi.

1-masala. Bemorning arterial qon bosimini o‘lchashdi. Uning o‘ng qo‘lida 130 ga 90, chap qo‘lida esa 110 ga 70 chiqdi. Agar me’yordagi qon bosimi taqriban 120 ga 80 deb olinsa, yaqinlashishning absolut xatoligini toping.

△ Qon bosimining pastki chegarasini baholaylik. Uni p deb belgilasak, u $70\le p\le 90$ qo‘sh tengsizlikni qanoatlantiradi. Bosimning aniq qiymati bilan taqribiy qiymati orasidagi ayirmani, ya’ni $p-80$ ayirmani baholaymiz. Buning uchun qo‘sh tengsizlikning har bir qismidan 80 ni ayiramiz: $70-80\le p-80\le 90-80$, $-10\le p-80\le 10$, ya’ni $|p-80|\le 10$ ni hosil qilamiz. Demak, absolut xatolik 10 dan ortiq emas. Agar bosimning yuqori chegarasini q desak, $110\le q\le 130$. Qo‘sh tengsizlikning har bir qismidan 120 ni ayirsak, $-10\le q-120\le 10$ bo‘ladi, ya’ni $|q-120|\le 10$. Demak, bu holda ham absolut xatolik 10 dan katta emas.

Bu natijalarga asoslanib, bemorning arterial qon bosimi 10 gacha bo‘lgan aniqlikda o‘lchangan deyiladi va bunday yoziladi: $p-80\pm 10$, $q-120\pm 10$. ▲

Taqribiy son a ning absolut xatoligini yuqoridan chegaralaydigan baholashni ko‘rdik. Yuqori chegarani Δ_a desak, $\Delta=|A-a|\le\Delta_a$ tengsizlikni yozish mumkin. Bundan aniq A son ushbu $a-\Delta_a\le A\le a+\Delta_a$ oraliqda joylashgan bo‘lishi kelib chiqadi. Yuqorida ko‘rilgan masalada $A-80$, $a-70$, Δ_a-10; $A-120$; $a-90$, Δ_a-10.

Demak, $a-\Delta_a$ son A songa kami bilan yaqinlashishini, $a+\Delta_a$ esa A songa ortig‘i bilan yaqinlashishini anglatadi. Bu hol qisqacha $A=a\pm\Delta_a$ kabi yoziladi.

2- masala. 0,48 soni $\frac{17}{35}$ kasrning 0,006 gacha aniqlikdagi taqribiy qiymati ekanini isbotlang.

△ Bunda $\left|\frac{17}{35}-0,48\right| \le 0,006$ ekanini isbot qilish kerak. Ayirmani hisoblaymiz:

$$\frac{17}{35}-0,48=\frac{^{20/}17}{35}-\frac{^{7/}48}{100}=\frac{340-336}{700}=\frac{4}{700}=\frac{1}{175}=0,00571\approx 0,006.$$

Demak, $\left|\frac{17}{35}-0,48\right| \le 0,006 \approx 0,01.$ ▲

170. Savollarga javob bering. Topshiriqlarni bajaring:

1. Miqdorlarning aniq qiymatlari noma'lum bo'lsa, qanday shartlarda absolut xatolikni baholash mumkin? Misollarda izohlang.
2. Xatolikni baholash deganda nimani tushunasiz? Misollar keltiring.
3. O'lchash aniqligi nima bo'yicha hisoblanadi? Misollarda tushuntiring.

171. Quyidagi yozuv nimani anglatadi:

1) $x=4,2\pm 0,1$; 2) $x=-8\frac{3}{4}\pm\frac{1}{10}$; 3) $x=-15\pm 1$; 4) $x=\frac{5}{8}\pm\frac{1}{10}$?

172. Qo'sh tengsizlik ko'rinishida yozing:

1) $x=19\pm 0,5$; 2) $x=160\pm 0,2$;
3) $x=a\pm h$; 4) $x=k\pm 1$;
5) $x=385\pm 0,05$; 6) $x=-7,5\pm 0,1$.

173. x sonning kami bilan va ortig'i bilan olingan taqribiy qiymatlarini toping:

1) $x-4\pm 0,1$; 2) $x-22,7\pm 0,1$;
3) $x--0,6\pm 0,12$; 4) $x--5,9\pm 0,2$.

174. x sonning kami bilan va ortig'i bilan yaqinlashishlarning o'rta arifmetigiga teng taqribiy qiymatini ko'rsating:

1) $20\le x\le 22$; 2) $5\le x\le 6$;
3) $4,5\le x\le 4,8$; 4) $3,7\le x\le 4,1$;
5) $2,81\le x\le 2,83$; 6) $0,55\le x\le 0,6$.

175. Isbotlang:

1) 2,7 soni 2,7356 soning 0,5 gacha aniqlikdagi taqribiy qiymati;

2) 0,27 soni $\frac{11}{40}$ sonining 0,01 gacha aniqlikdagi taqribiy qiymati.

176. $(1+a)^2 \approx 1+2a$ taqribiy formuladan foydalanib hisoblang va xatolikni baholang:

1) $(1{,}01)^2$; 2) $(1{,}001)^2$; 3) $(1{,}99)^2$; 4) $(1{,}999)^2$.

177. 1) $\sqrt{a+b} \approx \sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}}$ taqribiy hisoblash formulasi o‘rinli, bunda $b<a$ va yaqinlashish xatoligi $\frac{b^2}{8\left(\sqrt{a}\right)^3}$ dan oshmaydi. Bu formuladan foydalanib, hisoblang.

1) $\sqrt{26}$; 2) $\sqrt{50}$; 3) $\sqrt{63}$; 4) $\sqrt{101}$; 5) $\sqrt{82}$; 6) $\sqrt{120}$.

178. $x=10{,}8 \pm 0{,}5$ bo‘lsa, x son quyidagiga teng bo‘lishi mumkinmi?

1) 11,3; 2) 10,3; 3) 10,9; 4) 10,1; 5) 12; 6) 11.

179. Yerning orbita bo‘ylab harakatlanish tezligi o‘rtacha 29,77 km/s bo‘lib, uning uchun $(29{,}77 \pm 0{,}5)$ km/s munosabat o‘rinli. Yerning orbita bo‘ylab tezligining kami bilan va ortig‘i bilan olingan taqribiy qiymatlarini toping.

180. Rasadxonadagi o‘lchash natijalariga ko‘ra: 1) Merkuriy sayyorasining radiusi $(2\,440 \pm 2)$ km ga; 2) Venera sayyorasining radiusi $(6\,050 \pm 5)$ km ga; 3) Saturn sayyorasi ekvatorining uzunligi $(377\,307 \pm 2)$ km ga teng. O‘lchash natijalarini qo‘sh tengsizlik ko‘rinishida yozing.

181. Texnik nazorat bo‘limida silindr diametri 0,1 mm gacha aniqlikda o‘lchanadi. Ko‘rsatma bo‘yicha silindr diametri $167{,}8 \le d \le 168{,}2$ oraliqda bo‘lsa, u yaroqli hisoblanadi. Agar o‘lchash natijasida silindr diametri 168,1 mm ga teng bo‘lsa, texnik nazorat bo‘limi uni yaroqsiz deb topadimi?

182. To‘rtburchak ichki burchaklari transportir yordamida o‘lchanib, natijalar qo‘shilganida: a) 355°; b) 364° hosil bo‘ldi. Bunday yaqinlashishlarning xatoligi va absolut xatoligini toping.

183. Beshburchak ichki burchaklarini transportir yordamida o‘lchab, natijalar qo‘shilganida a) 542°; b) 537° hosil bo‘ldi. Bunday yaqinlashishlarning absolut xatoligini toping.

184. Quyidagi sonlarning yaqinlashish va absolut xatoligini toping:
1) 0,1967 sonining 0,197 soni bilan;
2) –5,346 sonining –5,35 soni bilan.

185. a son A sonning taqribiy qiymati bo‘lsin. Agar
1) $A-3{,}456$, $a-3{,}4$; 2) $A-7{,}67$, $a-7{,}7$;
3) $A-24{,}8$, $a-25$; 4) $A-80{,}06$, $a-80$ bo‘lsa, yaqinlashish xatoligi va absolut xatoligini toping.

186. To‘g‘ri to‘rtburchakning bo‘yi 8 cm, eni 6 cm. Uning diagonalini chizg‘ich yordamida o‘lchash natijalari: a) 9,8 cm; b) 9,9 cm; c) 10,1 cm; d) 10,2 cm bo‘lsa, yaqinlashish xatoligi va absolut xatolikni toping.

187. Quyidagi yozuv nimani anglatadi:

1) $A=3{,}4\pm 0{,}1$; 2) $A=\frac{2}{3}\pm\frac{1}{10}$; 3) $A=\frac{13}{17}\pm\frac{1}{10}$?

188. Qo‘sh tengsizlik ko‘rinishida yozing:
1) $A=23\pm 0{,}5$; 2) $A=934\pm 4$;
3) $A=5{,}47\pm 0{,}05$; 4) $A=-6{,}7\pm 0{,}1$.

189. A ning kami bilan va ortig‘i bilan olingan taqribiy qiymatlarini toping:

1) $A=23\pm 0{,}5$; 2) $A=53{,}7\pm 0{,}1$; 3) $A=90\pm 1$; 4) $A=\frac{13}{17}\pm\frac{1}{10}$.

190. Isbotlang:
1) 2,8 soni 2,8246 sonining 0,5 gacha aniqlikdagi taqribiy qiymati;
2) 0,29 soni $\frac{12}{41}$ kasrning 0,01 gacha aniqlikdagi taqribiy qiymati.

191. $A=23{,}7\pm 0{,}5$ bo‘lsa, A son quyidagiga teng bo‘lishi mumkinmi:
1) 24,2; 2) 23,2; 3) 23,7; 4) 24,1?

192. „Obod“ mahallasi futbolga ishqiboz bolalarga atab 600 m² – 20 · 30 m² o‘lchamli yer maydoni ajratdi. O‘lchash natijasi 30,5 ·9,5 – 594,75 (m²) bo‘ldi. Ikkinchi marta o‘lchash amalga oshirildi, natija 29,5 · 20,5 – 604,75 (m²) bo‘lib chiqdi. Qaysi o‘lchash aniqroq? Absolut xatoliklar taqqoslansin.

193. Kubning qirrasini o‘lchab, uning hajmi 128 cm^3 ekanini aniqlashdi. Agar kubning qirrasi 5 cm bo‘lsa, bu yaqinlashishning absolut xatoligi qanday?

194. To‘g‘ri to‘rtburchakning eni va bo‘yini o‘lchab, uning yuzi 152 cm^2 ga teng deyishdi. Agar to‘g‘ri to‘rtburchakning yuzi 150 cm^2 ekani ma’lum bo‘lsa, yaqinlashish xatoligi va absolut xatolikni toping.

20-§. Sonlarni yaxlitlash

Sonlarni yaxlitlash qoidalari haqida dastlabki ma’lumotlar 5-sinf „Matematika“ darsligida keltirilgan. Endi sonlarni yaxlitlash haqida to‘laroq ma’lumot beramiz.

Odatda, sonni u yoki bu aniqlikda yaxlitlash deganda butun sonlarni va o‘nli kasrlarni yaxlitlash tushuniladi.

Biror a son berilgan bo‘lsin. Shu sonni biror aniqlikda yaxlitlash deganda a sonni unga qaraganda kamroq raqamli a_1 son bilan almashtirish kerakligi tushuniladi. Bunda yaxlitlash xatoligi $|a_1-a|$ eng kam bo‘ladigan hol nazarda tutiladi. Shu maqsadga olib keladigan yaxlitlash qoidalari bor.

Masala. To‘g‘ri to‘rtburchak shaklidagi bolalar maydonchasining yuzi 211,2 m^2, uning bo‘yi 20 m ga teng. Maydonchaning enini toping.

△ Maydonchaning eni $\frac{211,2}{20}=10,56(m)$.

Javob: maydonchaning eni 10,56 m. ▲

Amalda bu natijani 0,1 gacha aniqlikda aytish kerak bo‘lsa, tushirib qoldiriladigan raqam 6 soni 5 dan katta bo‘lgani uchun oxirgi qoldiriladigan 5 raqamiga 1 qo‘shiladi, ya’ni yaxlitlash ortig‘i bilan bajarilgan bo‘ladi: 10,56 → 10,6.

Shunday qilib, tushirib qoldiriladigan raqam 5 dan katta bo‘lsa, undan chapdagi raqamga 1 qo‘shiladi; undan o‘ngdagi raqamlar esa „tashlab“ yuboriladi; agar tushirib qoldiriladigan raqam 5 dan kichik bo‘lsa, undan chapdagi raqam o‘zgarmaydi.

Agar tushirib qoldiriladigan raqam 5 ga teng bo‘lsa, undan chapdagi raqamga 1 qo‘shiladi. Endi sonlarni yaxlitlash qoidalarini bayon qilamiz:

1-qoida. Agar birinchi tushirib qoldiriladigan (o‘chiriladigan) raqam 5 dan kichik bo‘lsa, undan chapda turgan raqamlar saqlanadi, ya’ni son kami bilan yaxlitlanadi.

2-qoida. Agar tashlab yuboriladigan raqam 5 ga teng yoki 5 dan katta bo‘lsa, undan chapda turgan saqlanadigan xonadagi raqamga 1 qo‘shiladi, ya’ni son ortig‘i bilan yaxlitlanadi. Chapdagi boshqa raqamlar o‘zgarishsiz qoldiriladi.

195. 1) Sonlarni yaxlitlash deganda nimani tushunasiz? Misollar keltiring.
2) a son x sonning taqribiy qiymati ekani qanday yoziladi?
3) Ortig‘i bilan yaxlitlash nima? Kami bilan yaxlitlash-chi? Misollarda tushuntiring.
4) Musbat sonlarni yaxlitlash qoidalarini ayting. Har bir qoidaga 1–2 tadan misol keltiring.
5) Yaxlitlash qoidalariga rioya qilinganida yaqinlashishning absolut qiymati eng kam bo‘lishini misollarda tushuntiring.

196. Sonlarni 0,001; 0,01 va 0,1 gacha aniqlikda yaxlitlang:
1) 2385,05483; 2) 2013,00854; 3) 1441,5227.

197. 285,75 va 367,45 sonlarini kami va ortig‘i bilan yaxlitlang. Har bir yaxlitlashning absolut xatoligini toping.

198. Yuk poyezdi 10,85 m/s tezlik bilan harakat qilmoqda. Uning shu tezligini km/h larda ifodalang. Natijani 1 km/h gacha aniqlik bilan yaxlitlang.

199. Ifodani soddalashtiring va uning son qiymatini 0,001 gacha aniqlik bilan toping:

$$\frac{a+b}{a+2b}:\left(\frac{a}{a-2b}+\frac{b^2}{a^2-4b^2}\right), \text{ bunda } a=3{,}78\cdot 10^4;\ b=4{,}23\cdot 10^4.$$

21-§. Nisbiy xatolik

Yaqinlashishning sifatini baholash uchun ***nisbiy xatolik*** tushunchasi kiritiladi.

Nisbiy xatolik deb, miqdorning absolut xatoligining uning taqribiy qiymati moduliga nisbatiga aytiladi.

Aniq son A ning taqribiy qiymati a bo‘lsa, u holda absolut xatolik $|A-a|$ga teng, nisbiy xatolik esa $\frac{|A-a|}{|a|}$ ga teng bo‘ladi.

Ko‘pincha, aniq son A noma’lum bo‘lgani uchun uni x deb ham belgilashadi. Shu holda absolut nisbiy xatolik uchun formula $\frac{|x-a|}{|a|}$ ko‘rinishida bo‘ladi. Nisbiy xatolik, odatda, foizlarda ifodalanadi. Shuning uchun $\frac{|x-a|}{|a|}\cdot 100\%$ ifoda nisbiy xatolik necha foiz ekanini anglatadi.

Masala. A shahardan B shahargacha bo‘lgan masofa (450 ± 1) km ga teng. To‘rt xonali uyning foydali yashash maydoni $(56\pm 0{,}3)$ m^2 ga teng. Shaharlar orasidagi masofa aniqroq hisoblanganmi, foydali yashash maydoni aniqroq o‘lchanganmi?

△ Birinchi holda absolut xatolik 1 km dan ortiq emas, ikkinchi holda esa $0{,}3\,m^2$ dan ortiq emas. Birinchi holda xatolik o‘lchanayotgan masofaning 0,2 % ini tashkil qiladi. Ikkinchi holda xatolik o‘lchanayotgan maydonning 0,56 % ini tashkil qiladi. Natijalarni taqqoslasak, shaharlar orasidagi masofa aniqroq o‘lchanganligi kelib chiqadi. ▲

200. Savollarga javob bering. Topshiriqlarni bajaring:
1) Nima uchun nisbiy xatolik tushunchasi kiritildi? Absolut xatolikning o‘zi yetarli emasmi? Nisbiy xatolik kiritilishi zarurligini taqozo etuvchi misollar keltiring.
2) Nisbiy xatolik deb nimaga aytiladi? U nimalarda ifodalanadi?

201. Sonni o‘ndan birgacha aniqlik bilan yaxlitlang va nisbiy xatoliklarni toping:
1) 3,35; 2) 12,58; 3) 34,362; 4) 0,783.

202. Berilgan son m ning n son bilan yaqinlashishining nisbiy xatoligini toping:

1) $m=3\frac{1}{7}$; $n=3{,}142$; 2) $m=\frac{5}{6}$; $n=0{,}8333$.

203. Vakuumda yorug‘lik tezligini o‘lchash 299 796 km/s natijani berdi, bunda o‘lchash aniqligi 4 km/s bo‘ldi. Nisbiy xatolikni toping.

204. 1) Toshkentdan Gulistongacha bo‘lgan masofa (120 ± 1) km ga teng.
2) Munisaning bo‘yi $(165\pm 0{,}5)$ cm ga teng.

Har bir o‘lchashning nisbiy xatoligini hisoblang. Qaysi o‘lchash aniqroq bajarilgan?

205. A sonning taqribiy qiymati b ga teng. Yaqinlashishning nisbiy xatoligi 0,1 %. Agar 1) $b=4{,}283$; 2) $b=2{,}4834$; 3) $b=0{,}398$; 4) $b=1{,}5672$; 5) $b=0{,}435$; 6) $b=5{,}345$ bo‘lsa, absolut xatolikni toping.

206. A sonning taqribiy qiymati a ga teng. Yaqinlashishning nisbiy xatoligi 0,1 %. Agar 1) $a-5{,}374$; 2) $a-3{,}3843$; 3) $a-0{,}487$; 4) $a=2{,}5762$; 5) $a=0{,}345$; 6) $a=7{,}435$ bo‘lsa, absolut xatolikni toping.

Masalalar yechish

207. Sonlarni kami bilan va ortig‘i bilan yaxlitlang:
1) 18,56; 2) 10,34; 3) 46,26; 4) 75,35.

208. Sonlarni 0,1 gacha aniqlikda yaxlitlang:
1) 35,4500; 2) 92,3500; 3) 26,250203.

209. 567,75 va 456,45 sonlarini kami va ortig‘i bilan yaxlitlang. Har bir yaxlitlashning absolut xatoligini toping.

210. Sonni 0,1; 0,01 gacha aniqlikda o‘nli kasr ko‘rinishida tasvirlang:

1) $\frac{13}{6}$; 2) $\frac{23}{29}$; 3) $\frac{8}{17}$; 4) $\frac{31}{43}$; 5) $\frac{29}{53}$; 6) $\frac{53}{67}$.

211. Yuk poyezdi 6,75 m/s tezlik bilan harakat qilmoqda. Uning shu tezligini km/soatlarda ifodalang. Natijani 1 km/soatgacha aniqlik bilan yaxlitlang.

212. A sonning taqribiy qiymati a ga teng. Yaqinlashishning nisbiy xatoligi 0,2 %. Agar 1) $a=2{,}384$; 2) $a=3{,}2843$; 3) $a=0{,}457$; 4) $a=1{,}748$ bo‘lsa, absolut xatolikni toping.

213. Ikki o‘quvchi uzunliklarni o‘lchashga doir amaliy ishlarni bajarishda biri (217 ± 4) mm va ikkinchisi (300 ± 1) cm natijani oldi. O‘quvchilardan qaysi biri ishni sifatli bajargan?

214. Qaysi o‘lchash aniqroq:
1) $a=(920\pm1)$ m mi yoki $b=(2{,}13\pm0{,}01)$ mi;
2) $p=(12{,}4\pm0{,}1)$ cm mi yoki $q=(1{,}54\pm0{,}01)$ mi?

215. Qo‘sh tengsizlik ko‘rinishida yozing:
1) $A-42\pm0{,}2$; 2) $A-36\pm1$; 3) $A-a\pm4$; 4) $A-a\pm0{,}1$.

Modul qatnashgan ifodalarni ayniy almashtirish

Ixtiyoriy haqiqiy a sonning absolut qiymati (moduli)

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{agar } a \geq 0 \\ -a, & \text{agar } a < 0 \end{cases}$$

deb ta'riflanganligi bizga ma'lum. Shu ta'rifdan foydalanib, masalalar yechaylik.

1- masala. Hisoblang: $\dfrac{|4-5\cdot|4-6|+4\cdot|3-6||}{|3-4\cdot|7-5||}$.

△ Modul ta'rifidan foydalanamiz:

$$\frac{|4-5\cdot|4-6|+4\cdot|3-6||}{|3-4\cdot|7-5||} = \frac{|4-5\cdot|-2|+4\cdot|-3||}{|3-4\cdot|2||} = \frac{|4-5\cdot2+4\cdot3|}{|3-8|} = \frac{|6|}{|-5|} = \frac{6}{5}.$$ ▲

2- masala. Sonlarni kamayish tartibida yozing:

$m = |4,8|$; $n = |-4,(8)|$; $p = \left|4\frac{3}{5}\right|$ va $q = |-3,2|$.

△ Modul ta'rifidan foydalanamiz:

$m = |4,8| = 4,8,$

$n = |-4,(8)| = 4,(8) = 4,8888...$

$p = \left|4\frac{3}{5}\right| = 4,6,$

$q = |-3,2| = 3,2.$

Demak, $n > m > p > q$. ▲

3- masala. Agar $m > n > k > 0$ bo'lsa, $|n-m| + |n+k| - |m-k|$ ni soddalashtiring.

△ $m > n > k > 0$ bo'lgani uchun $n - m < 0$ va $n + k > 0$. Shu sababli $|n-m| = -(n-m)$, $|m-k| = m-k$ bo'ladi. U holda $|n-m| + |n+k| - |m-k| =$

$= -(n-m) + n + k - (m-k) = -n + m + n + k - m + k = 2k$

Javob: $2k$. ▲

4- masala. Modulning xossalarini isbotlang:

1°. Modul doimo nomanfiy sondir, ya'ni $|a| \geq 0$.

2°. Qarama-qarshi sonlarning modullari o'zaro teng, ya'ni $|-a| = |a|$.

3°. Agar ikki sonning modullari teng bo‘lsa, ular faqat ishoralari bilan farqlanishi mumkin, ya’ni

$$|a| = |b| \Rightarrow a = \pm b.$$

4°. Ko‘paytmaning moduli modullar ko‘paytmasiga teng, ya’ni

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|.$$

5°. Bu xossadan quyidagi xossa bevosita kelib chiqadi (nega?):

$$|a|^2 = a^2.$$

6°. Nisbatning moduli modullar nisbatiga teng, ya’ni

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, \quad (b \neq 0)$$

7°. $a \leq |a|$.

8°. $|a + b| \leq |a| + |b|$.

9°. $|a - b| \leq |a| + |b|$.

△ 1°. $|a| \geq 0$.

Modul ta’rifini qo‘llaymiz.

Quyidagi ikkita hol vujudga kelishi mumkin: yo $a \geq 0$, yo $a < 0$. Bu hollarni alohida-alohida qaraylik.

1-hol. $a \geq 0$ bo‘lsin. U holda $|a| = a \geq 0$ bo‘ladi.

2-hol. $a < 0$ bo‘lsin. U holda $|a| = -a > 0$ bo‘ladi.

Ikkala holda ham $|a| \geq 0$.

2°. $|-a| = |a|$.

Xuddi oldingi isbotga o‘xshab ikki holni qaraylik:

1-hol. $a \geq 0$ bo‘lsin. U holda $|a| = a$ va $|-a| = a$ bo‘ladi. Demak, $|-a| = |a|$.

2-hol. $a < 0$ bo‘lsin. U holda $-a > 0$ bo‘lib, $|a| = -a$ va $|-a| = -a$ bo‘ladi. Demak, $|-a| = |a|$.

3°. $|a| = |b| \Rightarrow a = \pm b$.

Quyidagi hollar vujudga kelishi mumkin: $b = 0$, $b > 0$, $b < 0$. Bu hollarni alohida-alohida qaraylik.

1-hol. $b=0$ bo'lsin. U holda $|a|=|b|=|0|=0$ bo'ladi. Demak, $a=0$.

2-hol. $b>0$ bo'lsin. U holda $|a|=|b|=b$ bo'ladi. Demak, $a=\pm b$.

3-hol. $b<0$ bo'lsin. U holda $|a|=|b|=-|b|>0$ bo'ladi. Demak, $a=\pm b$.

4°. $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$.

Agar a va b sonlardan biri yo ikkalasi nolga teng bo'lsa, $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$ bo'ladi.

Agar a va b sonlarning ikkalasi ham nolga teng bo'lmasa, u holda ular yo bir xil ishoraga (ya'ni, ikkalasi ham manfiy yo ikkalasi ham musbat), yo turli ishoraga ega (ya'ni ulardan biri manfiy, ikkinchisi esa musbat) bo'ladi.

1) Agar $a>0$ va $b>0$ bo'lsa, $a\cdot b>0$ va $|a\cdot b|=a\cdot b=|a|\cdot|b|$ bo'ladi.

2) Agar $a<0$ va $b<0$ bo'lsa, $a\cdot b>0$ va $|a\cdot b|=a\cdot b=(-a)\cdot(-b)=$ $=|-a|\cdot|-b|=|a|\cdot|b|$ bo'ladi;

3) a va b sonlar turli ishorali bo'lsin. Aniqlik uchun $a>0$ va $b<0$ deb olamiz. Bu holda $a\cdot b<0$ va $|a\cdot b|=-(a\cdot b)=a\cdot(-b)=$ $=(a)\cdot|-b|=|a|\cdot|b|$.

6°. $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$, $(b\neq 0)$ xossa xuddi shunday mulohazalar yordamida isbotlanadi.

7°. $a\leq|a|$.

1) Agar $a\geq 0$ bo'lsa, $a=|a|$ bo'ladi.

2) Agar $a<0$ bo'lsa, $|a|=-a>0>a$ bo'ladi. Ya'ni bu holda ham $a<|a|$ bo'ladi.

8°. $|a+b|\leq|a|+|b|$.

Agar $a+b\geq 0$ bo'lsa, $|a+b|=a+b\leq|a|+|b|$ (7°-xossaga ko'ra).

Agar $a+b<0$ bo'lsa, $|a+b|=-(a+b)=(-a)+(b)\leq|-a|+|b|=|a|+|b|$ (4-masaladagi 2° va 7° xossalarga ko'ra).

Endi a va b sonlar turli ishorali bo'lsin. Aniqlik uchun $|a|\geq|b|$ deb olamiz.

1) Agar $a>0$ bo'lsa, $a+b=+(|a|-|b|)$ bo'ladi.

2) Agar $a<0$ bo‘lsa, $a+b=-(|a|-|b|)$ bo‘ladi.
U holda

$$|a+b|=|+(|a|-|b|)|=|a|-|b|\le|a|+|b|$$

va

$$|a+b|=|-(|a|-|b|)|=|a|-|b|\le|a|+|b|,$$

chunki $-|b|\le|b|$.
Demak, ixtiyoriy a va b sonlar uchun $|a+b|\le|a|+|b|$.
9° -xossa 8° -xossadan bevosita kelib chiqadi. Haqiqatan ham,

$$|a-b|=|a+(-b)|\le|a|+|-b|=|a|+|b|. \; ▲$$

Topshiriq. Yuqoridagi xossalarning aniq berilgan sonlar uchun o‘rinli ekanligini tekshiring. Har bir holni daftaringizda tasvirlang.

5-masala. Son o‘qidagi $A(x_1)$ va $B(x_2)$ nuqtalar orasidagi masofa uchun $AB=|x_1-x_2|$ formula o‘rinli ekanligini isbotlang.

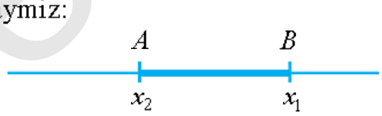
△ $A(x_1)$ va $B(x_2)$ nuqtalar uchun quyidagi uch hol bo‘lishi mumkin:

$x_1<x_2$, $x_1>x_2$ va $x_1=x_2$.

1-holni tasvirlaymiz:

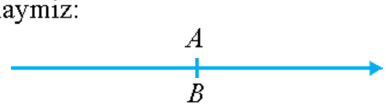
Demak, bu holda $AB=x_2-x_1=|x_1-x_2|$.

2-holni tasvirlaymiz:



Demak, bu holda $AB=x_1-x_2=|x_1-x_2|$.

3-holni tasvirlaymiz:



Demak, bu holda $AB=0=|x_1-x_2|$.

Barcha hol uchun $AB=|x_1-x_2|$ formula o‘rinli ekan. ▲

Ko‘p misollarda $\sqrt{a^2}$ qiymatni hisoblash yo soddalashtirish talab qilinadi. 4-masaladagi 5°-xossaga ko‘ra $|a|^2 = a^2$. Demak, $\sqrt{a^2} = |a|$ tenglik o‘rinli.

6-masala. $x < 2$ bo‘lganda $x + \sqrt{x^2 - 4x + 4}$ ifodaning qiymatini toping.

△ $x < 2$ bo‘lganda

$$\sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2| = 2 - x.$$

Demak, $x + \sqrt{x^2 - 4x + 4}$ ifodaning qiymati $x + 2 - x = 2$ ga teng.

Javob: 2. ▲

7-masala. $6 \le a \le 10$ bo‘lganda

$$\sqrt{(a-6)^2} + \sqrt{(a-10)^2}$$

ifodaning qiymatini toping.

△ $\sqrt{(a-6)^2} + \sqrt{(a-10)^2} = |a-6| + |a-10| = a - 6 + 10 - a = 4.$ ▲

Mashqlar

216. Sonlarni kamayish tartibida yozing:

$m = |8,(8)|$; $n = |-8,8|$; $p = \left|8\frac{7}{9}\right|$ va $q = \left|-8\frac{6}{7}\right|$.

217. Hisoblang: $\dfrac{|4 - 4 \cdot |3-6| - 8|}{|4 - |3-8| - 7|}$.

218. Agar $a > b > c$ bo‘lsa, $|a-b| + |c-a| - |b-c|$ ni soddalashtiring.

219. Agar $x > y > z$ bo‘lsa, $|x-y| - |z-y| - |z-x|$ ni soddalashtiring.

220. Agar $p > q > k > 0$ bo‘lsa, $|p+q| - |k-q| + |k-p|$ ni soddalashtiring.

221. m ning qanday qiymatlarida $|m+1| = m+1$ tenglik o‘rinli bo‘ladi?

222. x ning qanday qiymatlarida $|x^{13}| = |x|^{13}$ tenglik o‘rinli bo‘ladi?

223. a ning qanday qiymatlarida $|a+2|=-a-2$, $a^2|a|-a^2+2|a|-1=$
$=2a^2-|a|$ tengliklar o‘rinli bo‘ladi?

224. Agar bo‘lsa, $y^2>x>0$ tenglik $|x-y^2|+|x+9|-25=0$ ning qanday qiymatlarida o‘rinli bo‘ladi?

225. Quyidagi munosabatlardan qaysi biri noto‘g‘ri?

A) $|a^2+b^2|=a^2+b^2$; B) $a>0$ bo‘lsa, $|a+b^4|=a+b^4$;

C) $a<0$ bo‘lsa, $|a^3+b^2|\le a^3+b^2$;

D) $a<0$, $b<0$ bo‘lsa, $|a+b|=-a-b$;

E) $a<0$, $b<0$ bo‘lsa, $|a+b|=b-a$.

226. Agar $a\neq 0$ bo‘lsa, $|a+b|-|b|$ ifodaning qiymatini toping.

227. Agar $x>y>0$ bo‘lsa, $\left|\sqrt{xy}-\frac{x+y}{2}\right|+\left|\frac{x+y}{2}+\sqrt{xy}\right|$ ni soddalashtiring.

228. $a>0$; $b<0$; $|a|\neq|b|$ bo‘lganda quyidagi ifodalardan qaysi biri-ning qiymati musbat bo‘lmasligi mumkin?
A) $a-b$; B) $|a+b|$; C) a^3b^2; D) $|a-b|$; E) $|a-b|$;

229. Quyidagi munosabatlardan qaysi biri noto‘g‘ri?
1) $|a^2-b^2|\le a^2+b^2$ 2) $|a^5+b^5|\ge a^5+b^5$.

3) $|a^3+b^4|\ge a^3+b^4$ 4) $\sqrt{a^2}=|a|$.

230. Ixtiyoriy x uchun quydagi munosabatlarni isbotlang:
a) $|15x-16|=|16-15x|$; b) $|x^2-7|=|7-x^2|$;
d) $12x-1\le|1-12x|$; e) $x^2-2011\le|2011-x^2|$;
f) $|x^2-49|=|x-7|\cdot|x+7|$; g) $|x^2-3|=\frac{|x^4-9|}{|x^2+3|}$;
h) $|8+5x|\le|1+2x|+|7+3x|$; i) $|1+6x|\le|5x-11|+|12+x|$;
j) $|2+4x|\le|6+7x|+|4+3x|$; k) $|x-23|\le|12x-11|+|12+11x|$;

231. Hisoblang:

a) $\dfrac{|2{,}3-\sqrt{5}|}{\sqrt{9-4\sqrt{5}}-0{,}3}$; b) $\dfrac{|\sqrt{123}+\sqrt{125}-2\sqrt{124}|}{2\sqrt{1{,}24}-\sqrt{1{,}23}-\sqrt{1\frac{1}{4}}}$.

232. Hisoblang:

a) $\left|\sqrt{53-7}\right|+\left|\sqrt{53}-5\sqrt{3}\right|+\left|\sqrt{75}-9\right|$;

b) $\left|19-\sqrt{2}\right|+\left|19-2\sqrt{2}\right|+\left|19-3\sqrt{2}+\right|19-6\sqrt{2}\right|$

d) $\left|1-\sqrt{37}\right|+\left|2-\sqrt{37}\right|+\ldots+\left|6-\sqrt{37}\right|+6\cdot\left|7-\sqrt{37}\right|$;

e) $\left|\sqrt{131}-1\right|+\left|\sqrt{1371}-2\right|+\ldots+\left|\sqrt{131-10}\right|+\left|\sqrt{131}-11\right|+11\cdot\left|\sqrt{131}-12\right|$.

233. Ifodalarni soddalashtiring:

$(2|a|-3|b|)(2|a|+3|b|)$;

$\dfrac{3|a|+5|b|}{2|a|-7|b|}$, bu yerda $a=2,2b$ va $b\neq 0$;

$\dfrac{7|a|-2|b|}{8|a|+7|b|}$, bu yerda $b=-0,3a$ va $a\neq 0$;

$\dfrac{3|a|}{2|a|-7|b|}$, bu yerda $\dfrac{b}{2a+7b}=3$;

$\dfrac{a^2-3|a|\cdot|b|+b^2}{5a^2-2|a\cdot b|-|b|^2}$, bu yerda $3a^2-5ab-8b^2=0$ va $a+b\neq 0$;

$\dfrac{|a|-|b|}{|a|+|b|}+\dfrac{|a|+|b|}{|a|-|b|}$;

$(|a|-3|b|)^2+(3|a|+|b|)^2$.

234. Quyidagi tengliklar qachon o‘rinli bo‘ladi? Xulosa chiqaring.

a) $|a+b|=|a|+|b|$;

b) $|a+b|=|a|-|b|$;

d) $|a+b|=|b|-|a|$;

e) $|a+b|=a+b$;

f) $|a+b|=a-b$;

g) $|a+1|=b-a$;

h) $|a+b|=a$;

i) $|a+b|=-b$.

235. n ning qanday natural qiymatlarida k son ham natural bo‘ladi?

a) $k=|5-\sqrt{13}|+|\sqrt{13-n}|$;

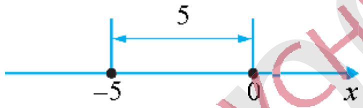
b) $k=|10-\sqrt{58,3}|+|n-\sqrt{58,3}|$;

d) $k=|5\sqrt{2}|-1+|\sqrt{2}-7|+|n\cdot\sqrt{2}-325|$;

e) $k=|7\sqrt{3}-11|+|\sqrt{3}-n|+|(n^2-5n+12)\cdot\sqrt{2}-97|$.

Modul qatnashgan tenglamalar

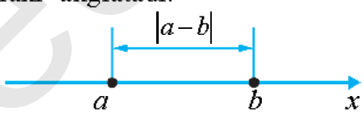
Son o‘qini tasvirlaylik. Sonning moduli shu sonni tasvirlaydigan nuqtadan 0 gacha bo‘lgan masofani anglatadi. Masalan, $|-5|=5$. Ya’ni -5 nuqtadan 0 gacha bo‘lgan masofa 5 ga teng.



Modulning bunday geometrik talqini modul qatnashgan tenglamalarni yechishga qulay.

Eng sodda $|x|=3$ tenglamani qaraymiz. Son o‘qida 0 gacha masofasi 3 ga teng bo‘lgan ikkita nuqta mavjud: 3 va -3. Demak, $|x|=3$ tenglama $x=3$ va $x=-3$ ikkita yechimga ega.

Umuman aytganda, a va b sonlar berilgan bo‘lsa, $|a-b|$ ifoda ular orasidagi masofani anglatadi:

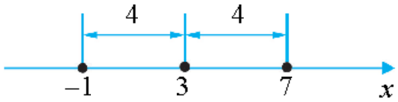


Ravshanki $|a-b|=|b|-|a|$.

$|x-3|=4$ tenglamani yechaylik. Bu tenglamani quyidagicha o‘qish mumkin:

x nuqtadan 3 nuqtagacha bo‘lgan masofa 4 ga teng.

Bu shartga bo‘ysinadigan nuqtalarni tasvirlaylik:



Ko‘rinib turibdiki, berilgan tenglama ikkita yechimga ega: -1 va 7.

1-masala. a ning qanday qiymatlarida $a^2+1=2|a|$ tenglik o‘rinli bo‘ladi?

A) $a\geq 0$; B) $a\leq 0$; C) $a\in(-\infty;\infty)$; D) $a=\pm 1$; E) $a=1$.

△ *1-usul.* Quyidagi ikkita hol vujudga kelishi mumkin: yo $a\geq 0$, yo $a<0$.

1-hol. $a\geq 0$ bo‘lsin. U holda $|a|=a$ va $a^2+1=2a$ bo‘ladi. Oxirgi tenglamani $(a-1)^2=0$ ko‘rinishda yozsak, $a=1$ qiymat kelib chiqadi.

2-hol. $a<0$ bo‘lsin. Bu holda $|a|=-a$ va $a^2+1=-2a$ bo‘ladi. Oxirgi tenglamani $(a+1)^2=0$ ko‘rinishda yozsak, $a=-1$ qiymat kelib chiqadi. Demak, $a=\pm 1$.

2-usul. Modulning xossalariga ko‘ra $|a|^2=a^2$. Demak, $a^2+1=2|a|$ tenglik $|a|^2+1=2|a|$ ko‘rinishni oladi. Bundan $(|a|-1)^2=0$, ya’ni $a=\pm 1$ bo‘ladi. ▲

Modul qatnashgan tenglamalarning turli ko‘rinishlari mavjud.

Modul ta’rifidan foydalanib, yechish mumkin bo‘lgan tenglamalarni qarab chiqaylik.

$|f(x)|=a$ ko‘rinishdagi tenglama

Modul nomanfiy qiymatlarga ega bo‘lganligi uchun bu tenglama faqat $a\geq 0$ bo‘lganda yechimga ega.

Modul ta’rifiga ko‘ra bu tenglama quyidagi ikkita tenglamaga ajraladi:

$$\left[\begin{array}{l} f(x)=a, \\ f(x)=-a. \end{array}\right.$$

Demak, $|f(x)|=a$ tenglamani yechishda quyidagi hollar mavjud:

a) $|f(x)|=a\,(a>0)\Rightarrow f(x)=\pm a$;

b) $|f(x)|=0\Rightarrow f(x)=0$;

d) $|f(x)|=-a\,(a>0)\Rightarrow x\in\varnothing$.

1-misol. $|x-3|=4$ tenglamani yeching.

△ Modul ta’rifiga ko‘ra bu tenglama quyidagi ikkita chiziqli tenglamaga ajraladi:

$$\left[\begin{array}{l} x-3=4, \\ x-3=-4; \end{array}\right.$$

Bundan $\left[\begin{array}{l} x=7, \\ x=-1. \end{array}\right.$

Javob: $x_1=7;\quad x_2=-1.$ ▲

$|f(x)|=g(x)$ ko'rinishdagi tenglama

Modul ta'rifiga ko'ra bu tenglama quyidagi ikkita tenglamalar sistemasiga ajraladi:

1) $\begin{cases} f(x)=g(x), \\ g(x)\ge 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} f(x)=-g(x), \\ g(x)\ge 0. \end{cases}$

3-misol. $|4x-7|=2x+5$ tenglamani yeching.

△ Modul ta'rifiga ko'ra bu tenglama quyidagi ikkita tenglamalar sistemalariga ajraladi:

1) $\begin{cases} 4x-7=2x+5, \\ 2x+5\ge 0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x-7=-2x-5, \\ 2x+5\ge 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x=12, \\ x\ge -2,5 \end{cases}$ $\begin{cases} 6x=2, \\ x\ge -2,5; \end{cases}$

$\begin{cases} x=6, \\ x\ge -2,5 \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{1}{3}, \\ x\ge -2,5; \end{cases}$

$x=6.$ $x=\frac{1}{3}.$

Javob: $x_1=6;\quad x_2=\frac{1}{3}.$ ▲

$|a_1x+b_1|+|a_2x+b_2|+...+|a_kx+b_k|=c$ ko'rinishdagi tenglamalar

Bunday tenglamalar quyidagi algoritm bo'yicha yechiladi:

1) $a_1x+b_1,\quad a_2x+b_2,\quad a_3x+b_3,\dots,a_kx+b_k$ ifodalarni nolga tenglab, $x_1=-\frac{b_1}{a_1},\quad x_2=-\frac{b_2}{a_2},\quad x_3=-\frac{b_3}{a_3},\quad \dots,\quad x_k=-\frac{b_k}{a_k}$ qiymatlar topiladi.

2) Topilgan $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \dots,x_k$ sonlarni son o'qida belgilaymiz. Aniqlik uchun $x_1<x_2<x_3<\dots<x_k$ bo'lsin.

3) Berilgan tenglama $(-\infty; x_1)$, $[x_1; x_2)$, $[x_2; x_3)$, ... $[x_k; \infty)$ oraliqlarda navbat bilan qaraladi.

Har bir oraliqda berilgan tenglama qandaydir chiziqli tenglama bo'ladi. Uni yechganimizda hosil bo'lgan ildizning qaralayotgan oraliqqa tegishli-tegishli emasligi tekshiriladi. Shulardan javobga qaralayotgan oraliqqa tegishli bo'lgan qiymatlarni yozamiz.

4- misol. $|x-3|-|x+2|=5$ tenglamani yeching.

△ $x-3=0,$ | $x+2=0,$
$x=3,$ | $x=-2.$

Bu nuqtalarni son o'qida belgilaymiz:

Berilgan tenglamani $(-\infty; -2)$, $[-2; 3)$, $[3; \infty)$ oraliqlarda navbat bilan qaraylik.

a) $\begin{cases} x<-2, \\ -x+3+x+2=5; \end{cases}$ $\begin{cases} x<-2, \\ 5=5; \end{cases}$ $x<-2,$

b) $\begin{cases} -2 \le x < 3, \\ -x+3-x-2=5; \end{cases}$ $\begin{cases} -2 \le x < -3, \\ x=-2; \end{cases}$ $x=-2,$

d) $\begin{cases} x \ge 3, \\ x-3-x-2=5; \end{cases}$ $\begin{cases} x \ge 3, \\ -5=5, \end{cases}$ ildiz yo'q.

Javob: $x \le -2.$ ▲

5*- misol. $|x-2019|+|2019-x|=2020$ tenglamani yeching.

△ *1- usul.* $|x-2019|=|2019-x|$ bo'lgani uchun $|x-2019|=1010$ tenglamani hosil qilamiz. Bundan $|x-2019|=\pm|1010|$, ya'ni $x=3029$ yoki $x=1009.$

2-usul. $x \ge 2019$ bo'lsa, $2(x-2019)=2020$ bo'ladi. Bundan $x=3029.$ $x<2019$ bo'lsa, $2(2019-x)=2020$ bo'ladi. Bundan $x=1009.$

Javob: 1009; 3029. ▲

6- misol. $|x-1|+|x+1|-|x-3|=5$ tenglamani yeching.

△ $x-1=0,\quad x+1=0\quad x-3=0,$

$x=1;\qquad x=-1;\qquad x=3.$

Bu nuqtalarni son o‘qida belgilaymiz:

Berilgan tenglamani $(-\infty;-1)$, $[-1;1)$, $[1;3)$, $[3;+\infty)$ oraliqlarda navbat bilan qaraylik.

a) $\begin{cases} x<-1, \\ -x-1-x+1+x-3=5; \end{cases}$ $\begin{cases} x<-1, \\ -x=8; \end{cases}$ $x=-8.$

b) $\begin{cases} -1\le x<1, \\ x+1-x+1+x-3=5; \end{cases}$ $\begin{cases} -1\le x-1, \\ x=6; \end{cases}$ ildiz yo‘q.

d) $\begin{cases} 1\le x<3, \\ x+1+x-1+x-3=5; \end{cases}$ $\begin{cases} 1\le x<3, \\ 3x=8; \end{cases}$ $x=\frac{8}{3}.$

e) $\begin{cases} x>3, \\ x+1+x-1-x+3=5; \end{cases}$ $\begin{cases} x>3, \\ x=2; \end{cases}$ ildiz yo‘q.

Javob: $x_1=-8;\ \ x_2=\frac{8}{3}.$ ▲

7-misol. $|x-2|+|x-1|+|x|+|x+1|+|x+2|=6$ tenglamani yeching.

△ $|x-a|$ ifoda son o‘qining x koordinatali nuqtasidan a koordinatali nuqtasigacha bo‘lgan masofani bildiradi. Shuning uchun $|x-2|+|x-1|+|x|+|x+1|+|x+2|$ yig‘indi son o‘qining x koordinatali nuqtasidan 2, 1, 0, –1, –2 koordinatali nuqtalargacha masofalarning yig‘indisini ifodalaydi. Ravshanki, ixtiyoriy nuqtadan A va B nuqtalargacha bo‘lgan masofalar yig‘indisi AB kesma uzunligidan kichik emas (tenglik nuqta AB kesmaga tegishli bo‘lgandagina bajariladi). Demak, ixtiyoriy x uchun $|x\mp 2|+|x+2|\ge 4,\quad |x-1|+|x+1|\ge 2.$

$|x-2|+|x-1|+|x|+|x+1|+|x+2|$ yig‘indi 2+4=6 ga teng bo‘lishi uchun $|x|=0$ bo‘lishi zarur. Demak, x son 0 ga teng bo‘lishi zarur. Shu bilan birga $x=0$ qiymat haqiqatan ham berilgan tenglamaning yechimi ekanligini tekshirish oson.

Javob: $x=0$. ▲

8- misol. $|x+1|-|x|+3|x-1|-2|x-2|=x+2$ tenglamani yeching.

△ *Ko'rsatma:* Agar $1 \le x < 2$ bo'lsa, bu oraliqda yechimga ega bo'lmagan $4x=8$ tenglamani hosil qilamiz.

Agar $0 \le x < 1$ bo'lsa, bu oraliqda yechimga ega bo'lmagan $-2x=2$ tenglamani hosil qilamiz.

Agar $-1 \le x < 0$ bo'lsa, $0=2$ ziddiyatli tenglikni hosil qilamiz.

Agar $x<-1$ bo'lsa, $x=-2$ yechimni hosil qilamiz.

Javob: $x=-2$ yoki $x \ge 2$. Agar $x \ge 2$ bo'lsa, ayniyatni hosil qilamiz. ▲

9- misol. a ning qanday qiymatlarida $|2x-4|=|x-a|$ tenglama yagona yechimga ega?

△ Ikkita sonning modullari teng bo'lishi uchun shu sonlar yo teng, yo qarama-qarshi sonlar bo'lishi zarur va yetarli. Shuning uchun berilgan tenglamaning ixtiyoriy yechimi yo 1) $2x-4=x-a$ tenglamaning, yo 2) $2x-4=-x+a$ tenglamaning ildizi bo'ladi.

Har qanday a uchun 1) tenglama yagona $x_1=4-a$ ildizga, 2) tenglama esa yagona $x_2=\frac{4+a}{3}$ ildizga ega.

Berilgan tenglama yagona ildizga teng bo'lishi uchun $x_1=x_2$ shart, ya'ni $4-a=\frac{4+a}{3}$ shart bajarilishi kerak. Bu tenglikni $a=2$ qiymat qanoatlantiradi. ▲

Mashqlar

Tenglamalarni yeching **(236–264)**:

236. 1) $|2x-3|=7$; 2) $|x+2|=5$. **237.** $|4x-3|=4x-3$.

238. $2-3|x-5|=-4$. **239.** $|2x-3|=3-2x$. **240.** $|1-|1-x||=0,5$.

241. $|x+1|=|2x-1|$. **242.** $|x|=|2x-5|$. **243.** $|2-3x|-|5-2x|=0$.

244. $|x-2|=3\cdot|3-x|$. **245.** $|x+1|=2|x-2|$. **246.** $|3x-1|=|5-x|$.

247. $|5-x|=2(2x-5)$. **248.** $|x-2|+3x=-6$. **249.** $|3-|2+x||=1$.

250. $2\cdot|x|=\frac{1}{2}x-1$. **251.** $|x-1|+|2x-3|=2$. **252.** $|x-2|+2|x+1|=9$.

253. $|x+2|+|x+3|=5.$ **254.** $|x-3|+2|x+1|=4.$ **255.** $||x-1|-7|=10.$

256. $|x-3|+|x-5|=2.$ **257.** $|x-5|-|2x+8|=-12.$

258. $|x+3|+|x-1|+|x-4|=6.$ **259.** $|x+4|+|x-2|+|x-3|=7.$

260. $|x-4|+|x-1|+|x+2|=6.$ **261.** $|x+2|+|x|+|x-2|=4.$

262. $|4x-1|-|2x-3|+|x-2|=0.$ **263.** $4|x+1|-1=3|2x+5|-2|x+5|.$

264. $|x-1|-2|x-2|+3|x-3|=4.$

265. a ning qanday qiymatlarida tenglama yagona yechimga ega:
a) $|3x-2|=|x-a|$; b) $-ax=|a|$?

266. $-4{,}8:|a|=-0{,}5$ tenglikni qanoatlantiruvchi a ning barcha qiymatlarini toping.

267. Ushbu $|m|\cdot(-0{,}6)=-5{,}4$ tenglamani qanoatlantiradigan m ning barcha qiymatlarini toping.

268. a ning qanday qiymatlarida $a^2|a|-a^2+2|a|-1=2a^2-|a|$ tenglik o‘rinli bo‘ladi?

269. Agar $y^2>x>0$ bo‘lsa, $|x-y^2|+|x+9|-25=0$ tenglik y ning qanday qiymatlarida o‘rinli bo‘ladi?

Amaliy-tatbiqiy va fanlararo bog‘liq masalalar

Tengsizliklarni, tengsizliklar sistemasini yechishga olib keladigan bir nechta masala ko‘raylik.

270. 4 ta qurut va 5 ta xo‘rozqand birgalikda 225 so‘mdan arzon. 3 ta qurut va 2 ta xo‘rozqand birgalikda 120 so‘mdan qimmat.
Nima arzon: 13 ta qurutmi yoki 10 ta xo‘rozqandmi?
△ 1 ta qurutning narxini x so‘m, 1 ta xo‘rozqandning narxini y so‘m, deylik. U holda masala shartiga muvofiq keladigan ushbu tengsizliklar sistemasiga ega bo‘lamiz:

$$\begin{cases} 4x+5y<225, \\ 3x+2y>120; \end{cases} \qquad (1)$$

Bundan

$$\begin{cases} 32x+40y<1800, \\ 45x+30y>1800; \end{cases}$$

ya’ni $45x+30y>32x+40y$, $\quad 13x-10y>0$.

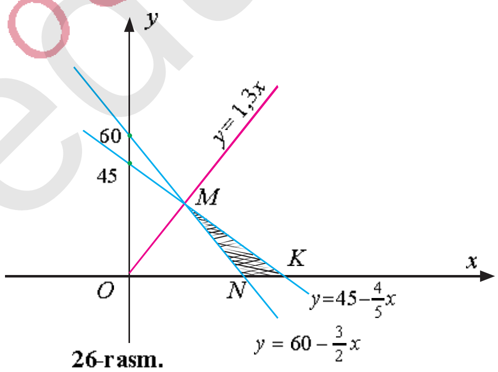
Demak, $13x>10y$.

Javob: 10 ta xo‘rozqand 13 ta qurutdan arzon. ▲

Masalaning geometrik talqini bilan tanishaylik.

Tekislikda qanday soha (1) tengsizliklar sistemasi bilan tasvirlanadi?

(1) sistemaning 1-tengsizligi $4x+5y=225$ ya’ni $y=45-\frac{4}{5}x$ to‘g‘ri chiziqdan *pastda* yotuvchi barcha nuqtalarni ifodalaydi; 2-tengsizlik esa $3x+2y=120$ ya’ni $y=60-\frac{3}{2}x$ to‘g‘ri chiziqdan *yuqorida* yotuvchi barcha nuqtalarni ifodalaydi (26-rasmga qarang).



26-rasm.

Bu ikkala yarimtekislikning kesishmasi, $x>0$, $y>0$, ekani hisobga olinsa, $\triangle MNK$ ni beradi. Qurut va xo‘rozqandning aniq narxini bilmaymiz, bu narxni ifodalovchi $(x;\ y)$ nuqta *MNK* uchburchak ichidagi ixtiyoriy nuqta bo‘lishi mumkin. Bu

uchburchak esa $13x - 10y$, ya'ni $y - 1{,}3x$ to'g'ri chiziqdan *pastda* joylashgan.
Demak, $y < 1{,}3x$, ya'ni $13x > 10y$. ▲

271. Imtihonda o'quvchilarning $\frac{1}{6}$ qismi „qoniqarli", 56% i „yaxshi" va 14 tasi „a'lo" baholar oldi. „A'lo" olganlar jami o'quvchilarning 4% idan ko'p, ammo 5% idan kam bo'lsa, jami o'quvchilar sonini toping.

△ Jami o'quvchilar sonini x deylik. U holda $\frac{x}{6}$ – „qoniqarli" baho, $\frac{56x}{100} = \frac{14}{25}x$ – „yaxshi" baho olgan o'quvchilar soni bo'ladi. Jami o'quvchilar soni 6 ga ham, 25 ga ham bo'linadi, demak, $x = 6 \cdot 25 \cdot n = 150 \cdot n$, n – natural son. Shartga ko'ra, „a'lo" baho olgan o'quvchilar soni $0{,}04x < 14 < 0{,}05x$ tengsizlikni qanoatlantiradi.
Bunga, $x = 150 \cdot n$ ni qo'yib, $6n < 14 < 7{,}5 \cdot n$, ya'ni $n = 2$ ekanini topamiz.
Javob: 300 o'quvchi. ▲

272. Ikkita idishdagi bir xil buyumlar soni birgalikda 29 tadan ko'p. 1-idishdan 2 ta buyum olinganda, unda qolgan buyumlar 2-idishdagidan 3 baravardan-da ko'proq bo'ladi. 1-idishdagi buyumlarning 3 baravari bilan 2-idishdagi buyumlarning 2 baravari farqi 60 dan kam. Har bir idishda qanchadan buyum bor?

273. Ikkita idishdagi buyumlar soni birgalikda 27 tadan ko'p. 2-idishdan 12 ta buyum olinganda, 1-idishdagi buyumlar soni 2-idishdagidan 2 martadan-da ko'proq bo'ladi. 1-idishdan 10 ta buyum olinganda, 2-idishdagi buyumlar soni 1-idishdagidan 9 martadan-da ko'proq bo'ladi. Har bir idishda qanchadan buyum bor?

274. 1-korxona 1 kunda 950 tadan ortiq bo'lmagan miqdorda mahsulot ishlab chiqaradi. 2-korxona avval 1-korxona chiqargan mahsulotning 95% ini chiqarar edi. Qo'shimcha stanoklar o'rnatilgach, 2-korxona ishlab chiqarishni 1-korxonaga qaraganda 23% ga oshirdi va 1 kunda 1 000 tadan ko'p mahsulot bera boshladi. 2-korxona qo'shimcha stanoklar olinguniga qadar, har bir zavod qancha mahsulot ishlab chiqarar edi? (Mahsulotlar soni natural sonlarda ifodalanadi.)

△ 1-korxona 1 kunda ishlab chiqargan mahsulotlar soni x ta bo‘lsin. U holda 2-korxona avval $\frac{95x}{100}$, qo‘shimcha stanoklar o‘rnatilgach esa $\left(\frac{95x}{100}+\frac{23x}{100}\right)$ ta mahsulot bergan. Masala mazmuniga mos tengsizliklar sistemasi shunday bo‘ladi:

$$\begin{cases} x \le 950, \\ \frac{95x}{100}+\frac{23x}{100} > 1000. \end{cases}$$

Bundan

$$847\frac{27}{59} < x \le 950.. \qquad (1)$$

Ammo $\frac{95x}{100}$ va $\frac{23x}{100}$ sonlari natural son bo‘lishi lozim, ya’ni x – 100 ga bo‘linishi kerak. (1) oraliqda 100 ga bo‘linadigan son 900. Demak, 1-zavod 1 kunda 900 ta mahsulot ishlab chiqargan. 2-zavod esa qo‘shimcha stanok o‘rnatilguncha $\frac{95}{100}\cdot 900 = 855$ dona mahsulot ishlab chiqargan.

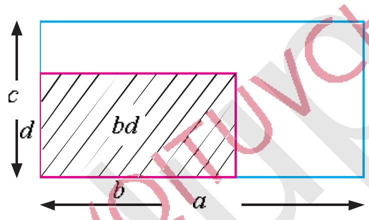
Javob: 900 dona, 855 dona.▲

275. 1-idishda yashil, 2-idishda esa oq sharlar bor. Yashil sharlar soni oq sharlar soning $\frac{15}{19}$ qismini tashkil qiladi. Yashil sharlarning $\frac{3}{7}$ qismi, oq sharlarning $\frac{2}{5}$ qismi idishlardan olingach, 1-idishda 1 000 donadan kam, 2-idishda 1 150 donadan ko‘p shar qoldi. Dastlab har bir idishda qanchadan shar bo‘lgan?

276. 80 t, 60 t, 50 t yuk sig‘adigan vagonlar bor. Agar yuk 80 t li vagonlarga ortilsa, vagonlardan 1 tasi to‘liq yuklanmay qoladi. Agar yuk 60 t li vagonlarga ortilsa, 8 ta ko‘p vagon kerak bo‘ladi va 1 ta vagon to‘liq yuklanmay qoladi. Agar yuk 50 t li vagonlarga ortilsa, yana 5 ta vagon kerak bo‘ladi va bu holda yuklar ham vagonlarning hammasini to‘ldiradi. Yuk necha tonna bo‘lgan?

277. O‘quvchilar har qatorda 8 nafardan bo‘lib saf tortishsa, qatorlardan bittasi to‘liq bo‘lmay qoladi. Agar har qatorda 7 nafardan bo‘lishsa, qatorlar to‘liq bo‘ladi, ammo qatorlar soni 2 taga ortadi. Agar har qatorda 5 nafardan bo‘lishsa, qatorlar soni yana 7 taga ortadi, ammo 1 ta qator to‘liq bo‘lmaydi. O‘quvchilar sonini aniqlang.

278. 1) a, b, c, d – musbat sonlar va $a > b$, $c > d$ bo‘lsa, u holda $ac > bd$ bo‘lishi darsligingizda isbotlangan. Bu tengsizlikka geometrik talqin bering va 27-rasmni izohlang.
2) Qavariq ko‘pburchak ichida yotuvchi ixtiyoriy nuqtadan uning uchlarigacha bo‘lgan masofalar yig‘indisi shu ko‘pburchak yarimperimetridan katta ekanini isbotlang.

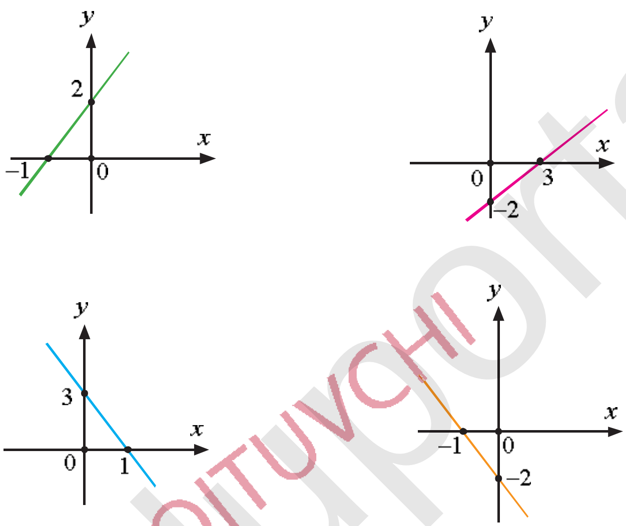


27-rasm.

279. Hajmi 8 l bo‘lgan eritmada 60% kislota bor edi. Unga kislotasi 20% bo‘lgan eritmadan quya boshlandi. Aralashmadagi kislota 40% dan ko‘p bo‘lmasligi, lekin 30% dan kam bo‘lmasligi uchun ikkinchi eritmadan birinchisiga qancha quyish mumkin?

280. 1) Ishchilar jamoasi 5 kunda 300 tadan kam, 10 kunda esa 500 tadan ortiq mahsulot tayyorladi. Agar jamoada 8 nafar kishi ishlab, ularning mehnat unumdorliklari bir xil bo‘lsa, har bir ishchi bir kunda nechta mahsulot tayyorlagan?
2) Avtobus 8 marta qatnashda 185 nafardan ko‘p yo‘lovchi, 15 marta qatnashda esa 370 nafardan kam yo‘lovchi tashidi. Agar avtobus har safar unda nechta o‘rin bo‘lsa, ayni shunchadan yo‘lovchini tashigan bo‘lsa, avtobusda nechta o‘rin bor?

281. 28-rasmda $y-kx+b$ chiziqli funksiyaning grafigi tasvirlangan. 1) k va b ni toping; 2) $x \geq 0$; 3) $x < 0$; 4) $x \geq 3$ 5); $7 \leq -2x$ bo‘lganda y funksiya qanday qiymatlar qabul qilishini tengsizlik belgisi yordamida yozing va hosil qilingan tengsizlikni yeching. Yechimni son o‘qida tasvirlang.



28-rasm.

III BOB **KVADRAT TENGLAMALAR**

22-§. Kvadrat tenglama va uning ildizlari

1-masala. To‘g‘ri to‘rtburchakning asosi balandligidan 9 cm ortiq, uning yuzi 70 cm^2 ga teng. To‘g‘ri to‘rtburchakning balandligini toping.

△ Balandlikni x cm deb belgilasak, u holda to‘g‘ri to‘rtburchakning asosi $(x+9)$ cm bo‘ladi. Shu to‘g‘ri to‘rtburchakning yuzi $x(x+9)$ cm^2 ga teng. Masalaning shartiga ko‘ra, $x(x+9)=70$.

Qavslarni ochib va 70 sonini qarama-qarshi ishora bilan tenglamaning chap qismiga o‘tkazib, quyidagini hosil qilamiz:

$$x^2+9x-70-0.$$

Tenglamaning chap qismini guruhlash usuli bilan ko‘paytuvchilarga ajratamiz:

$$x^2+9x-70=x^2+14x-5x-70=x(x+14)-5(x+14)=(x+14)(x-5).$$

Demak, tenglama

$$(x+14)(x-5)=0$$

ko‘rinishni oladi. Bu tenglama x_1--14 va x_2-5 ildizlarga ega. To‘g‘ri to‘rtburchakning balandligi – kesma, kesma esa manfiy son bo‘la olmaydi, shuning uchun izlanayotgan balandlik 5 cm ga teng bo‘ladi. ▲

Bu masalani yechishda kvadrat tenglama deb ataluvchi x^2+9x- $-70-0$ tenglama hosil qilindi.

! *Kvadrat tenglama* deb,

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (1)$$

ko‘rinishidagi tenglamaga aytiladi, bunda a, b, c – berilgan sonlar, $a\neq0$; x–noma’lum son.

Ba’zida $a\neq0$ bo‘lganida (1) ifoda *to‘la kvadrat tenglama* deb aytiladi. Bunda a, b, c lar kvadrat tenglamaning koeffitsiyentlari: a – bosh koeffitsiyent; b – ikkinchi koeffitsiyent; c – ozod had.

Masalan, $4x^2-x-3-0$ tenglama bosh koeffitsiyenti 4, ikkinchi koeffitsiyenti –1, ozod hadi –3 bo‘lgan to‘la kvadrat tenglamadir.

Matematika, fizika, texnika va iqtisodiyotda ko‘pgina masalalarni yechish kvadrat tenglamalarni yechishga keltiriladi.

2- masala. 400 km masofani tezyurar poyezd yuk poyezdiga qaraganda 1 soat tezroq bosib o‘tdi. Agar yuk poyezdining tezligi tezyurar poyezdnikidan 20 km/h kam bo‘lsa, har bir poyezdning tezligini toping?

△ Tezyurar poyezd masofani t soatda bosib o‘tgan desak, yuk poyezdi o‘sha masofani $t+1$ soatda bosib o‘tadi. Tezyurar poyezdning tezligini v_1, yuk poyezdinikini v_2 desak, $v_1=v_2+20$ bo‘ladi. $S=vt$ formulaga ko‘ra $400=v_1t$, $400=v_2(t+1)$ tengliklar o‘rinli.

Bundan $t=\frac{400}{v_1}$, $t=\frac{400}{v_2}-1$ hosil bo‘ladi. v_1-v_2+20 tenglikni hisobga olib topamiz:

$$\frac{400}{v_2+20}=\frac{400}{v_2}-1.$$

Tenglamani soddalashtiramiz: $v^2_2+20v_2-8000=0$. Bu kvadrat tenglama. Uning chap qismini guruhlash usuli bilan ko‘paytuvchilarga ajratamiz:

$$v^2_2+20v_2-8000=v^2_2+100v_2-80v_2-8000=v_2(v_2-80)+100(v_2-80)=$$
$$=(v_2-80)(v_2+100).$$

Endi hosil qilingan tenglama $(v_2-80)(v_2+100)=0$ ko‘rinishga keladi. Bundan v_2-80, $v_1-v_2+20-100$, masala javobi bo‘ladi. Shunday qilib, v_1-100 km/h, v_2-80 km/h. v_2--100 javob bo‘la olmaydi: tezlik musbat kattalik. ▲

Ko‘pgina masalalarni yechishda algebraik shakl almashtirishlar natijasida kvadrat tenglamalarga keltiriladigan tenglamalar hosil bo‘ladi. Masalan,

$$3x^2-5x=2x^2-4x+6$$

tenglamaning o‘ng qismidagi hadlarni chap qismiga o‘tkazib, o‘xshash hadlarni ixchamlagandan keyin u

$$x^2-x-6=0$$

ko‘rinishidagi tenglamaga keladi.

3-masala. Tenglamani yeching: x^2-49.

△ 49 ni tenglamaning chap qismiga olib o'tsak, $x^2-49=0$ kvadrat tenglama hosil bo'ladi. Tenglamaning chap qismini ko'-paytuvchilarga ajratamiz: $(x-7)(x+7)=0$.

Bu tenglama ikkita ildizga ega: $x_1=7$; $x_2=-7$. Bunda $x_1=7$ soni 49 ning arifmetik kvadrat ildizi. $x_2 - -7$ esa $x_1 - 7$ ga qarama-qarshi son ekanini ta'kidlaymiz:

$$x_1=\sqrt{49},\quad x_2=-\sqrt{49}.$$

Odatda, bu ikki munosabat birlashtirilib yoziladi:

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{49}=\pm 7. \ ▲$$

$x^2=49$ tenglama $x^2=d$ tenglamaning xususiy holidir.

Teorema. *Agar d ixtiyoriy musbat son bo'lsa, x^2-d* tenglama ikkita ildizga ega:

$$\boxed{x_1=\sqrt{d},\ x_2=-\sqrt{d}.}$$

$x^2=0$ tenglama bitta ildizga ega bo'ladi: $x=0$, chunki $x^2=0$ tenglamani $x\cdot x-0$ kabi yozish mumkin. Shuning uchun ba'zan x^2-0 tenglama ikkita o'zaro teng ildizga ega deyiladi: $x_{1,2}-0$.

Agar $d<0$ bo'lsa, $x^2=d$ tenglama haqiqiy ildizlarga ega emas, chunki haqiqiy sonning kvadrati manfiy bo'lishi mumkin emas. Masalan: $x^2=-4$; $x^2=-9$; $x^2=-36$; $x^2=-49$ tenglamalar haqiqiy ildizga ega emas.

1. Savollarga javob bering. Topshiriqlarni bajaring:
1) Kvadrat tenglama deb nimaga aytiladi? Misollar keltiring.
2) Kvadrat tenglamaga olib keladigan 2–3 ta masala yozing.
3) Berilgan sonlar kvadrat tenglamaning ildizi bo'lishi yoki bo'lmasligi qanday tekshiriladi?
4) $x^2=d$ tenglama: a) qachon ikkita ildizga; b) qachon bitta ildizga ega bo'ladi?
5) $x^2=d$ tenglama qachon haqiqiy ildizlarga ega bo'lmaydi?

2. (*Og'zaki.*) Quyida keltirilgan tenglamalardan qaysilari kvadrat tenglama bo'ladi?

1) $3x^2-14x+11=0$; 2) $\frac{4}{5}x^2+7=0$;

3) $-5x^2+13x-8=0$; 4) $23x+19=0$;

5) $-17x^4+35-0$; 6) $3x^2-x-x^2$;

7) $-4x+20=0$; 8) $2x^2-3x=4$.

3. (*Og'zaki.*) Kvadrat tenglama koeffitsiyentlarini va ozod hadini ayting:

1) $3x^2-5x+2-0$; 2) $-7x^2-11x+18-0$;

3) $\frac{3}{4}x^2+5=0$; 4) $2x^2+7x=0$;

5) $-3x^2+2x+\frac{1}{3}=0$; 6) $-4x^2-x=0$;

7) $5x^2-3x-2-0$; 8) $8x^2-7x-1-0$.

Koeffitsiyentlari berilgan kvadrat tenglamani yozing **(4–5):**

4. 1) $a--1,\ b-2,\ c--4$; 2) $a-3,\ b--5,\ c-6$;

3) $a=2,\ b=1,\ c=\frac{1}{2}$; 4) $a=\frac{2}{3},\ b=\frac{5}{8},\ c=-\frac{3}{4}$;

5) $a-8,\ b-10,\ c-1$; 6) $a-0{,}4,\ b--1{,}8,\ c--2{,}4$.

5. 1) $a=3,\ b=2,\ c=4$; 2) $a=5,\ b=-3,\ c=0$;

3) $a=-2,\ b=3,\ c=2$; 4) $a=4,\ b=0,\ c=-9$.

Berilgan tenglamani kvadrat tenglamaga keltiring **(6–9):**

6. 1) $(x-2)(x+1)=0$; 2) $(2x+1)(x-4)=0$; 3) $(3-x)(x+2)=0$.

7. 1) $(x+1)(x+2)=0$; 2) $(3-2x)(x+3)=0$; 3) $(2-x)(x+3)=0$.

8. 1) $4x(x+7)=(2x-1)(3x+2)$; 2) $\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x\right)x=0{,}5x(x^2-4x)+3x-1$.

9. 1) $(x-3)(x-2)=6$; 2) $3x(x-5)=x(x+1)-x^2$.

-6; -4; 3; -2; $0{,}1$; $5{,}9$ sonlardan qaysilari **10–11**-tenglamalarning ildizi bo'ladi?

10. 1) $x^2=0$; 2) $x^2=9$; 3) $x^2-6x+5=0$; 4) $x^2+9x+18=0$;

5) $x^2+5x+6=0$; 6) $x^2-10x+9=0$; 7) $x^2+10x+24=0$.

11. 1) x^2-1-0; 2) $(x+1)(x+3)-0$;

3) $x^2-3x-4-0$; 4) $(x+4)(x+3)-(x+6)(x+2)$.

-3, -2, 0, 1 sonlardan qaysilari **12–13**-tenglamalarning ildizi bo‘ladi?

12. 1) $x^2-16=0$; 2) $x^2+2x=0$;
3) $x^2+x-6=0$; 4) $x^2-5x+4=0$.

13. 1) $(x+2)(x-1)=0$; 2) $(x+1)(x-3)=x$;
3) $x^2+4x+4-0$; 4) $x^2+6x+9-0$.

Tenglamaning ildizlarini toping **(14–15):**

14. 1) $x^2=\frac{25}{36}$; 2) $9x^2=4$; 3) $\frac{5}{7}x^2=\frac{7}{5}$; 4) $x^2=12$.

15. 1) $x^2=\frac{9}{16}$; 2) $x^2=\frac{16}{49}$; 3) $x^2=1\frac{7}{9}$;
4) $x^2=2\frac{1}{4}$; 5) $x^2=5$; 6) $x^2+25=0$.

Tenglamani yeching **(16–17):**

16. 1) $x^2-6,25=0$; 2) $x^2-1,21=0$; 3) $3x^2-27=0$; 4) $8x^2=0$.

17. 1) $x^2-36=0$; 2) $x^2-225=0$; 3) $\frac{1}{5}x^2=0$; 4) $\frac{x^2}{3}=0$.

Kvadrat tenglamani uning chap qismini ko‘paytuvchilarga ajratib yeching **(18–20):**

18. 1) $3x^2-5x=0$; 2) $2x^2+7x=0$; 3) $x^2-4x=0$; 4) $7x^2-15x=0$.

19. 1) $x^2+10x+25=0$; 2) $\frac{1}{9}x^2+x+9=0$; 3) $\frac{1}{16}x^2-x+16=0$;.

20. 1) $2x^2-8x=0$; 2) $x^2+8x=0$; 3) $5x^2+3x=0$;
4) $11x^2+4x=0$; 5) $x^2+4x+4=0$; 6) $x^2-6x+9=0$.

Tenglamani yeching **(21–22):**

21. 1) $(3x+4)^2+(x-1)^2-17$; 2) $(2x-3)^2-(x+4)^2+7-0$.

22. 1) $12,25-3x^2=6x^2$; 2) $4-9(2-5x)^2=0$; 3) $\frac{2}{7}x^2=3,5$.

23-§. Chala kvadrat tenglamalar va ularni yechish

Agar $ax^2+bx+c=0$ kvadrat tenglamada b yoki c koeffitsiyentlardan kamida bittasi nolga teng bo‘lsa, u holda bu tenglama ***chala kvadrat tenglama*** deyiladi.

Uch hol yuz berishi mumkin: 1) $b=c=0$; 2) $b=0$, $c\neq 0$; 3) $b\neq 0$, $c=0$. Bu hollarda kvadrat tenglama quyidagi tenglamalardan biri ko‘rinishida bo‘ladi:

$$ax^2=0; \qquad (1)$$

$$ax^2+c=0, \quad c\neq 0; \qquad (2)$$

$$ax^2+bx=0, \quad b\neq 0. \qquad (3)$$

Shu tenglamalarda a koeffitsiyent nolga teng emasligi kvadrat tenglama ta’rifidan ma’lum.

Endi (1), (2) va (3) chala kvadrat tenglamalarni o‘rganamiz.

1- masala. Tenglamani yeching: $7x^2=0$.

△ Tenglamaning ikkala qismini 7 ga bo‘lamiz: x^2-0. Bundan $x=0$. ▲

2- masala. Tenglamani yeching: $4x^2-36=0$.

Tenglamaning ikkala qismini 4 ga bo‘lamiz: $x^2-9=0$.

Bu tenglamani quyidagicha yozish mumkin: $x^2=9$, bundan $x_{1,2}=\pm 3$.

3- masala. Tenglamani yeching: $2x^2+18=0$.

△ Bu tenglamada ozod had 18 ni o‘ng tomonga o‘tkazamiz: $2x^2=-18$, bundan $x^2=-9$ kelib chiqadi.

Hosil bo‘lgan tenglama haqiqiy ildizlarga ega emas, chunki x ning istalgan haqiqiy qiymatlarida $x^2\geq 0$, ammo $-\frac{9}{2}<0$. ▲

4- masala. Tenglamani yeching: $-5x^2+9x=0$.

△ Tenglamaning chap qismini ko‘paytuvchilarga ajratamiz: $x(-5x+9)-0$. Bundan $x_1=0$, $x_2=\frac{9}{5}$ kelib chiqadi.

Javob: x_1-0, $x_2-\frac{9}{5}$. ▲

23. Savollarga javob bering. Topshiriqlarni bajaring:

1) Chala kvadrat tenglama deb nimaga aytiladi? Misollar keltiring.

2) b va c koeffitsiyentlarning qanday qiymatlarida chala kvadrat tenglamalar hosil bo‘ladi?

3) Chala kvadrat tenglamalar qanday yechiladi? Misollarda tushuntiring.

Tenglamani yeching **(24–26):**

24. 1) $9x^2-81$; 2) $4x^2-36$; 3) $5x^2-625$; 4) $4x^2-81$.

25. 1) $\frac{x^2-4}{9}=5$; 2) $\frac{8x^2-7}{3}=14\frac{1}{3}$; 3) $9x^2=2\frac{7}{9}$; 4) $3x^2+12=0$.

26. 1) $11x^2=22$; 2) $25x^2=0,01$; 3) $\frac{x^2-1}{3}=5$; 4) $\frac{9-x^2}{5}=1$.

27. x ning qanday qiymatlarida kasrlar o‘zaro teng bo‘ladi:

1) $\frac{7x^2-5x}{3}$ va $\frac{x^2+4x}{6}$; 2) $\frac{-4x^2+3x}{5}$ va $\frac{x^2-6x}{8}$?

Tenglamani yeching **(28–31):**

28. 1) $8x^2+7x=10x^2-3x$; 2) $3x(x+1)=2x(x-1)$.

29. 1) $\frac{2x^2-3x}{4}=\frac{x^2+2x}{3}$; 2) $\frac{5x-x^2}{2}=\frac{x^2+3x}{5}$.

30. 1) $\frac{x}{x-5}+\frac{x}{x+5}=2\frac{2}{3}$; 2) $\frac{3x-2}{x-3}=\frac{x+2}{x+3}$.

31. Tenglamani yeching:

1) $x^2-5|x|=0$; 2) $3x^2+4|x|=0$; 3) $x^2-\frac{3x^2}{|x|}=0$; 4) $2x^2+\frac{x^2}{|x|}=0$.

Namuna. Tenglamani yeching: 1) $x^2-2|x|+3x=0$.

△ Tenglamani yechish uchun 3 holni ko‘rish kerak: $x<0$; $x=0$; $x>0$. Ravshanki, $x=0$ – yechim. Agar $x<0$ bo‘lsa, tenglama $x^2+2x+3x=0$ yoki $x^2+5x=0$ ko‘rinishni oladi. Uni $x(x+5)=0$ deb yozsak, $x<0$ bo‘lgani uchun, bundan $x=-5$ kelib chiqadi. Agar $x>0$

bo'lsa, tenglama $x^2-2x+3x-0$ yoki x^2+x-0 ko'rinishni oladi. Uni $x(x+1)=0$ deb yozsak, $x>0$ bo'lgani uchun tenglama yechimga ega bo'lmaydi. Shunday qilib, berilgan tenglama yechimlari $x=0$; $x=-5$ bo'ladi.

Javob: $x-0$; $x--5$.

2) $3x^2-\frac{2|x|}{x}=0$, bunda $x\neq 0$.

$x<0$ bo'lsin, unda tenglama $3x^2-\frac{2(-x)}{x}=0$ yoki $3x^2+2=0$ ko'rinishni oladi. Bu tenglama yechimga ega emas, chunki ixtiyoriy x uchun $x^2\geq 0$.

Nihoyat, $x>0$ bo'lgan holni ko'ramiz: bu holda tenglama $3x^2-\frac{2x}{x}=0$ yoki $3x^2-2=0$ ko'rinishni oladi. Bundan $x^2=\frac{2}{3}$, $x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ kelib chiqadi.

Javob: $x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$.

32. Savollarga javob bering. Topshiriqlarni bajaring:

1) Bitta ildizi nolga teng bo'lgan kvadrat tenglama umumiy holda qanday yoziladi?

2) Ikkala ildizi nolga teng bo'lgan kvadrat tenglama umumiy holda qanday yoziladi?

3) Ildizlarning modullari teng, ammo ishoralari qarama-qarshi bo'lgan kvadrat tenglama umumiy holda qanday yoziladi?

33. m ning qanday qiymatlarida tenglamaning ildizlaridan biri nolga teng bo'ladi:

1) $3x^2-2x+4m-9=0$; 2) $2x^2+7x-m^2+16=0$;
3) $4x^2-2mx+3m^2-4m-0$; 4) $x^2+(m+8)x+|m|-8-0$?

Namuna. Kvadrat tenglamaning ildizlaridan biri nolga teng bo'lishi uchun uning ozod hadi nolga teng bo'lishi kerak. Shunda ax^2+bx-0 ko'rinishdagi chala kvadrat tenglama hosil bo'ladi. Bu tenglamaning bitta ildizi $x=0$. Masalan, $4x^2-2mx+$ $+3m^2-4m-0$ tenglamaning ozod hadi $3m^2-4m$. Bu ifoda $m-0$ va $m-\frac{4}{3}$ bo'lganida nolga teng. Agar $m-0$ bo'lsa, kvadrat tenglamaning ikkala ildizi ham nolga teng. Ammo $m=\frac{4}{3}$ bo‘lsa, berilgan tenglamaning bitta ildizi nolga teng bo‘ladi.

34. m ning qanday qiymatlarida tenglamaning ikkala ildizi nolga teng bo‘ladi?

1) $5x^2+(m-3)x+9-m^2=0$; 2) $x^2+(3m^2+4m)x+9m^2-16=0$;

3) $2x^2+(3m^2-|m|)x-m^3-3m=0$; 4) $x^2+(16-m^4)x+m^3+8=0$.

35. To‘g‘ri burchak uchidan uning tomonlari bo‘ylab ikkita jism bir vaqtda yura boshladi. 1-jismning tezligi 5 cm/sek, 2-jismning tezligi 12 cm/s. Qancha vaqtdan keyin ular orasidagi masofa 81 cm bo‘ladi?

36. Ketma-ket kelgan 3 ta natural sonning ko‘paytmasi o‘rtadagi sondan 3 marta katta. Shu sonlarni toping.

Tenglamani yeching **(37–39):**

37. 1) $2x^2-|x|=0$; 2) $x^2+4|x|=0$; 3) $x^2+\frac{3x}{|x|}=0$; 4) $5x^2-\frac{|x|}{5x}=0$.

38. 1) $6x^2+5x=8x^2+x$; 2) $12x^2+7x=10x^2-3x$;

Masalalar yechish

39. (*Og‘zaki.*) Quyida keltirilgan tenglamalardan qaysilari kvadrat tenglama bo‘ladi:

1) $x^2+3x-7=0$; 2) $\frac{2}{3}x^2+5=0$; 3) $-4x^2+3x+7=0$; 4) $17x+20=0$;

5) $3x^4-27=0$; 6) $5x^2-2x=4x^2$; 7) $5x-7=0$; 8) $4x^2-5x+1=0$?

40. (*Og‘zaki.*) Kvadrat tenglama koeffitsiyentlarini va ozod hadini ayting:

1) $2x^2-3x-2=0$; 2) $-x^2+2x-1=0$; 3) $\frac{1}{2}x^2-2=0$;

4) $\frac{1}{3}x^2+1=0$; 5) $-4x^2+5x+\frac{1}{3}=0$; 6) $-5x^2+x=0$;

7) $7x^2+2x-7=0$; 8) $-9x^2+8x+1=0$.

41. Koeffitsiyentlari berilgan kvadrat tenglama yozing:

1) $a-1;\ b-2;\ c-3;$ 2) $a=\frac{1}{2};\ b=\frac{2}{3};\ c=-\frac{1}{4}.$

Berilgan tenglamani kvadrat tenglamaga keltiring **(42 – 43):**

42. 1) $(x+3)(x-1)-0;$ 2) $(3x-1)(x+4)-0.$

43. 1) $3x(x+4)=(2x+1)(3x-2);$ 2) $3(x^2-5x)=2(x+1)(x-1).$

44. Kvadrat tenglamaning koeffitsiyentlari yig‘indisini toping:

1) $3x^2+5x-8=0;$ 2) $5x^2-4x-7=0;$ 3) $\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x-\frac{1}{6}=0.$

45. Ushbu 4, 1, 2, 3 sonlaridan qaysilari tenglamaning ildizi bo‘ladi:

1) $x(x-3)=4;$ 2) $(x+1)(x+2)=6;$
3) $2x(3x-2)=8x-12;$ 4) $(5x-3)x=36$?

46. Tenglamaning ildizlarini toping:

1) $x^2=\frac{49}{60};$ 2) $4x^2=1;$ 3) $\frac{4}{5}x^2=\frac{5}{4}.$

47. Tenglamani yeching:

1) $x^2-4{,}41=0;$ 2) $x^2-0{,}16=0;$ 3) $2x^2-0{,}08=0;$ 4) $7x^2=0.$

Kvadrat tenglamani uning chap qismini ko‘paytuvchilarga ajratib yeching **(48 – 49):**

48. 1) $2x^2-3x=0;$ 2) $3x^2+5x=0;$ 3) $x^2-3x=0;$
4) $5x^2-15x=0;$ 5) $x^2-6x+9=0;$ 6) $x^2+14x+49=0.$

49. 1) $x^2-22x+121-0;$ 2) $x^2-24x+144-0;$ 3) $x^2+20x+100-0.$

Tenglamani yeching **(50 – 52):**

50. 1) $\frac{x^2}{6}=\frac{3x}{2};$ 2) $3(2x-3)2-8(2x-3);$ 3) $\frac{1}{2}(3x-2)^2=3x-2.$

51. 1) $\frac{x^2+9}{9}=5;$ 2) $8x^2=7+3\cdot\frac{43}{3};$ 3) $3x^2=\frac{75}{9};$ 4) $4x^2=\frac{8}{9}.$

52. 1) $9x^2=225;$ 2) $\frac{x^2-3}{4}=3;$ 3) $\frac{4-x^2}{4}=-3;$ 4) $\frac{x^2-6}{2}=5.$

53. x ning qanday qiymatlarida kasrlar o‘zaro teng bo‘ladi:

1) $\frac{3x^2-2}{3}$ va $\frac{4x^2+4}{4}$; 2) $\frac{x^2+4}{4}$ va $\frac{2x^2-7}{5}$?

Tenglamani yeching **(54–56):**

54. 1) $6x^2+4x-4x^2+8x$; 2) $4x(x+2)-3x(x-2)$.

55. 1) $\frac{2x-1}{2x+1}+\frac{2x+1}{2x-1}=\frac{5}{2}$; 2) $\frac{2+x}{6}-\frac{6}{2+x}=\frac{4}{x+2}-\frac{x+2}{4}$; 3) $\frac{x}{3}+\frac{3}{x}=\frac{x}{4}+\frac{4}{x}$.

56. 1) $x^2-6|x|=0$; 2) $7x^2+4|x|=0$;

3) $x^2+\frac{3x^2}{|x|}=0$; 4) $4x^2-\frac{2x^2}{|x|}=0$.

57. m ning qanday qiymatlarida tenglamaning ildizlaridan biri nolga teng bo‘ladi:

1) $5x^2-3x+3m-9=0$; 2) $7x^2+4x-5m+15=0$?

58. m ning qanday qiymatlarida tenglamaning ikkala ildizi nolga teng bo‘ladi:

1) $x^2+mx+(m-m^2)=0$; 2) $5x^2+(m-8)x+(m-8)^2=0$?

59. Tenglamani ko‘paytuvchilarga ajratish usuli bilan yeching:

1) $x(x+4)-21$; 2) $x(x-3)-10$; 3) $x(x+5)-14$; 4) $x(x-6)-7$.

60. Ketma-ket kelgan 3 ta natural sonning ko‘paytmasi o‘rtadagi sondan 8 marta katta. Shu sonlarni toping.

61. Ketma-ket kelgan 3 ta natural sonning yig‘indisi o‘rtadagi son kvadratiga teng. Shu sonlarni toping.

62. Agar $ax^2+x-2=0$ tenglamaning ildizlaridan biri 1 ga teng bo‘lsa, a ni toping va hosil bo‘lgan kvadrat tenglamani guruhlash usuli bilan yeching.

63. Agar $x^2+3x+b-0$ tenglama ildizlaridan biri 2 ga teng bo‘lsa, b ni toping va hosil bo‘lgan kvadrat tenglamani guruhlash usuli bilan yeching.

24-§. Kvadrat tenglama ildizlarini topish formulalari. Diskriminant

Kvadrat tenglamalarni yechish uchun eng umumiy usul ***to'la kvadratni ajratish usulidir***. Shu usulni tushuntirish uchun avval bir nechta misollar ko'ramiz.

1-masala. Kvadrat tenglamani yeching: $x^2-6x+5=0$.

△ Bu tenglama shaklini quyidagicha o'zgartiramiz:

$$x^2-2x\cdot 3=-5, \quad x^2-2x\cdot 3+3^2=-5+3^2, \quad (x-3)^2=4.$$

Bundan $x-3-2$ yoki $x-3--2$. Demak, x_1-5; x_2-1. Shu shakl almashtirishda uning chap qismida $(x-3)^2$ hosil bo'ldi, o'ng qismida esa noma'lum qatnashmadi. ▲

2-masala. Tenglamani yeching: $x^2+4x-12=0$.

△ Tenglamani $x^2+4x-12$ ko'rinishda yozib olamiz va uning ikkala qismiga 4 ni qo'shsak, chap qismi to'la kvadratga aylanadi: $x^2+4x+4-(x+2)^2$. Shuning uchun $x^2+4x+4-12+4$, $(x+2)^2=16$.

Bundan $x_1=-6$; $x_2=2$ kelib chiqadi. ▲

3-masala. $9x^2-18x+8=0$ tenglamani yeching.

$9x^2-18x--8$; $(3x)^2-2\cdot 3x\cdot 3--8$;

$(3x)^2-2\cdot 3x\cdot 3+3^2=-8+3^2$; $(3x-3)^2=1$.

$3x-3-1$ yoki $3x-3=-1$. Bundan $x_1=\frac{4}{3}$, $x_2=\frac{2}{3}$ kelib chiqadi. ▲

4-masala. $x^2+5x-36=0$ tenglamani yeching.

△ $x^2+5x=36$,

$$x^2+2\cdot x\cdot\frac{5}{2}+\left(\frac{5}{2}\right)^2=36+\left(\frac{5}{2}\right)^2, \qquad \left(x+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{169}{4},$$

$$x+\frac{5}{2}=\pm\frac{13}{2}, \quad x_1=-\frac{5}{2}-\frac{13}{2}=-9; \quad x_2=-\frac{5}{2}+\frac{13}{2}=\frac{8}{2}=4.$$

Javob: $x_2=-9$; $x_2=4$. ▲

64. Savollarga javob bering. Topshiriqlarni bajaring:

1) To'la kvadratni ajratish usulining mohiyati nimadan iborat? Misollarda tushuntiring.

2) 3-4 ta kvadrat tenglama tuzing. Ularni ikki usulda: a) to'la kvadratni ajratish usuli bilan; b) tenglamaning chap qismini ko'paytuvchilarga ajratish usuli bilan yeching.

Tenglamani to‘la kvadratni ajratish usuli bilan yeching **(65–66):**

65. 1) $x^2-8x+7=0$; 2) $x^2-7x+12=0$; 3) $x^2+6x+8=0$.

66. 1) $5x^2-4x-12-0$; 2) $4x^2-3x-22-0$; 3) $5x^2-4x-12-0$.

Shunday m sonni topingki, natijada berilgan ifoda yig‘indi yoki ayirmaning to‘la kvadrati bo‘lsin **(67–68):**

67. 1) x^2-4x+m; 2) x^2+2x+m; 3) x^2+6x+m.

68. 1) x^2-8x+m; 2) $9x^2-12x+m$; 3) $4x^2+4x+m$.

Namuna. m ning $25x^2-20x+m$ ifoda to‘la kvadrat bo‘ladigan qiymatini toping.

△ $25x^2-20x+m-(5x)^2-2\cdot 5x\cdot 2+2^2-2^2+m-(5x-2)^2-4+m$.
Bundan ifoda to‘la kvadrat bo‘lishi uchun $m = 4$ bo‘lishi kelib chiqadi.

Javob: $m=4$. ▲

Tenglamani to‘la kvadratni ajratish va guruhlash (ko‘paytuvchilarga ajratish) usullari bilan yeching **(69–72):**

69. 1) $x^2-6x+5=0$; 2) $x^2-5x+6=0$; 3) $x^2+9x+8=0$.

70. 1) $5x^2+7x+2=0$; 2) $7x^2-9x+2=0$; 3) $\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}x-1=0$.

71. 1) $9x^2+6x-8=0$; 2) $25x^2-10x-3=0$; 3) $x^2-3x-10=0$.

72. 1) $x^2+16x+48=0$; 2) $x^2+7x-18=0$; 3) $x^2+12x+27=0$.

Namuna. Ushbu $x^2-x-6=0$ tenglamani to‘la kvadratga keltirish va ko‘paytuvchilarga ajratish usullari bilan yeching.

△ Tenglamaning chap qismini o‘zgartiramiz:

$$x^2-x-6=x^2-2x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-6=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{25}{4}.$$

Tenglama $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$ ko‘rinishni oladi. Bundan $x-\frac{1}{2}=\pm\frac{5}{2}$, ya’ni $x_1=-2$; $x_2=3$ kelib chiqadi.

73. m ning qanday qiymatlarida tenglamaning idizlaridan biri nolga teng bo‘ladi:

1) $5x^2+2x+3m-7=0$; 2) $2x^2-5x+m^2-9=0$?

74. m ning qanday qiymatlarida tenglamaning ikkala ildizi nolga teng bo‘ladi:

1) $3x^2+(m-2)x+4-m^2=0;$ 2) $x^2-(3m^2+4m)x+9m^2-25=0?$

Kvadrat tenglamalarni yechish

23-§ paragrafda chala kvadrat tenglamalarning qanday yechilishini ko‘rsatdik. Shuningdek, yuqorida kvadrat tenglamalarni to‘la kvadrat ajratish usuli bilan yechish qaralgan edi. Shu usuldan umumiy ko‘rinishda berilgan kvadrat tenglamani yechish formulasini keltirib chiqarishda foydalanamiz.

Umumiy ko‘rinishdagi kvadrat tenglamani qaraymiz:

$$ax^2+bx+c=0, \text{ bunda } a\neq 0.$$

Tenglamaning ikkala qismini a ga bo‘lamiz:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

Bu tenglamani

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

kabi yozib olamiz. Endi shakl almashtirish yordamida tenglamaning chap qismida to‘la kvadrat ajratib olamiz:

$$x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2,$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}. \qquad (1)$$

Bunda b^2-4ac ifoda umumiy kvadrat tenglamaning *diskriminanti* deyiladi va $D=b^2-4ac$ deb belgilanadi.

(1) tenglikda uch hol ro‘y berishi mumkin: 1) $D>0$; 2) $D=0$; 3) $D<0$.

1) Agar $D\geq 0$ bo‘lsa, (1) ni quyidagicha yozamiz:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2.$$

Bundan ushbu natija kelib chiqadi:

$$x_{1,2}+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad x_{1,2}=\frac{-b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \qquad (2)$$

(2) formula umumiy ko‘rinishdagi kvadrat tenglamaning $D=b^2-4ac>0$ hol uchun yechimlari formulasi deyiladi. Bu holda kvadrat tenglama ikkita turli ildizlarga ega bo‘ladi.

2) Agar $D-0$ bo‘lsa, (1) formula $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$ ko‘rinishga keladi.

Bundan $x_{1,2}=-\frac{b}{2a}$, ya’ni kvadrat tenglamaning bitta (2 karrali) ildizga egaligi kelib chiqadi.

3) Agar $D<0$ bo‘lsa, $\sqrt{D}$ ning ma’nosi yo‘q. Shuning uchun bunday kvadrat tenglama haqiqiy ildizlarga ega emas deyiladi.

Shunday qilib, umumiy ko‘rinishdagi kvadrat tenglama:
1) $D>0$ bo‘lganida, ikkita turli ildizga ega;
2) $D=0$ bo‘lganida, bitta ildizga ega;
3) $D<0$ bo‘lganida, haqiqiy ildizlarga ega emas.
Agar, $D-0$ bo‘lib, $b-0$ bo‘lsa, ildiz nol bo‘ladi.

Teorema. *Umumiy ko‘rinishdagi kvadrat tenglama*

$$ax^2+bx+c-0, \quad a>0$$

ning ozod hadi $c<0$ bo‘lsa, tenglamaning ikkita turli ildizlari mavjud.

△ Shart bo‘yicha $c<0$. Shuning uchun $D=b^2-4ac>0$ bo‘ladi, chunki $-4ac>0$, $a>0$, $c<0$. ▲

1-masala. Tenglamani yeching:

$$x^2-\frac{13}{15}x+\frac{2}{15}=0.$$

△ Bunda $a-1$, $b=-\frac{13}{15}$, $c=\frac{2}{15}$. Endi diskriminantni hisoblaymiz:

$$D=b^2-4ac=\left(-\frac{13}{15}\right)^2-4\cdot1\cdot\frac{2}{15}=\frac{169}{225}-\frac{8}{15}=\frac{169-120}{225}=\frac{49}{225}>0.$$

Endi $x_{1,2}$ ni hisoblaymiz: $x_{1,2}=\dfrac{\frac{13}{15}\pm\sqrt{\frac{49}{225}}}{2}=\frac{13}{30}\pm\frac{7}{30}$; $x_1=\frac{1}{5}$, $x_2=\frac{2}{3}$.

Javob: $x_1=\frac{1}{5}$; $x_2=\frac{2}{3}$. ▲

2- masala. $9x^2-6x+1-0$ tenglamani yeching.

△ Bu tenglamada $a=9$, $b=-6$, $c=1$. Diskriminantni hisoblaymiz:

$$D=b^2-4ac=(-6)^2-4\cdot 9\cdot 1=36-36=0.$$

Demak, $D-0$. Shunday qilib, $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-6}{2\cdot 9}=\frac{6}{18}=\frac{1}{3}$.

Javob: $x=\frac{1}{3}$. ▲

3- masala. $x^2-x-12-0$ tenglamani yeching.

△ Bunda $a-1$; $b--1$; $c--12$. Ozod had $c--12$ manfiy. Demak, tenglama ikkita har xil ildizga ega. Uni topamiz:

$$D=1-4\cdot 1\cdot(-12)=49;$$

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{49}}{2}=-\frac{1\pm 7}{2};\ x_1=-3; x_2=4.$$

Javob: $x_1=-3$; $x_2=4$. ▲

4- masala. $3x^2-5x+20=0$ tenglamani yeching.

△ Bunda $a=3$, $b=-5$, $c=20$.

$D=(-5)^2-4\cdot 3\cdot 20=25-240=-215$; $D=-215<0$.

Demak, berilgan tenglama $3x^2-5x+20-0$ haqiqiy ildizlarga ega emas.▲

Chala kvadrat tenglamalarni ham (2) formula yordamida yechish mumkin, ammo ularni 6-§ da qaralgan usullardan foydalanib yechish oson va kamroq hisoblarni talab qiladi.

75. Savollarga javob bering. Topshiriqlarni bajaring:

1) Umumiy ko'rinishdagi kvadrat tenglama ($ax^2+bx+c=0$ tenglama) ildizlari formulasi qanday chiqariladi? O'zingiz tuzgan 2–3 ta misolda tushuntiring.
2) Diskriminant nima?
3) $ax^2+bx+c=0$ tenglamada $b=2k$ (k–haqiqiy son) bo'lsa, u holda ildizlarni topish formulasi qanday yoziladi (soddalashadimi)? Misollarda izohlang.

Kvadrat tenglamani yeching **(76–79)**:

76. 1) $2x^2-3x+1=0$; 2) $3x^2-2x-1=0$.

77. 1) $3x^2+4x-7-0$; 2) $3x^2-4x-7-0$;
3) $3x^2-11x+6=0$; 4) $4x^2-11x+6=0$.

78. 1) $\frac{1}{9}x^2-\frac{1}{6}x+\frac{1}{16}=0;$ 2) $\frac{1}{25}x^2+\frac{1}{5}x+\frac{1}{4}=0;$

79. 1) $x^2+2x+3-0;$ 2) $x^2-5x+7-0;$ 3) $x^2-4x+5-0.$

80. Tenglamaning diskriminantini hisoblang va uning nechta ildizi borligini aniqlang:

1) $x^2-12x+27-0;$ 2) $x^2+0{,}5x-3-0.$

Tenglamani yeching **(81–85)**:

81. 1) $\frac{2x-5}{x+5}+\frac{3x+4}{x+2}=1;$ 2) $\frac{3x+1}{x-3}+\frac{2x-3}{4x+3}=-\frac{7}{11}.$

82. 1) $\frac{x+3}{4x^2-9}-\frac{3-4}{4x^2+12x+9}=\frac{2}{2x-3};$ 2) $\frac{1-2x}{6x^2+3x}+\frac{2x+1}{14x^2-7x}=\frac{8}{12x^2-3}.$

83. 1) $\frac{30}{x^2-1}+\frac{7-18x}{x^3}=\frac{13}{x^2-x+1};$ 2) $\frac{1}{1-x}-\frac{2}{x^3+x+1}=\frac{2x+1}{1-x^2}.$

84. 1) $2x^2+|x|-1=0;$ 2) $2x^2-3|x|-2=0.$

85. 1) $|x^2+5|=6x;$ 2) $|x^2+x-3|=x;$
3) $|x^2-x-8|=-x;$ 4) $|x^2+2x+3|=3x+45.$

Tenglamaning diskriminantini hisoblang va uning nechta ildizi borligini aniqlang **(86–87)**:

86. 1) $x^2-12x+11=0;$ 2) $x^2+0{,}5x-1{,}5=0;$
3) $x^2+3x+2{,}25=0;$ 4) $x^2\ \ \frac{2}{3}x+\frac{1}{9}=0.$

87. 1) $x^2-2x+5=0;$ 2) $x^2+3x+4=0;$
3) $6x^2+7x-5=0;$ 4) $6x^2+7x+3=0.$

Tenglamani yeching **(88–91)**:

88. 1) $\frac{7}{x+1}-\frac{x+4}{2-2x}=\frac{3x^2-38}{x^2-1};$ 2) $\frac{x+0.5}{9x+3}+\frac{8x^2+3}{9x^2-1}=\frac{x+2}{3x-1}.$

89. 1) $\frac{2x-5}{x+5}+\frac{3x+4}{x+2}=1;$ 2) $\frac{3x+1}{x-3}+\frac{2x-3}{4x+3}=-\frac{7}{11}.$

90. 1) $|x^2+6|-7x;$ 2) $|x^2+x-5|-x;$
3) $|x^2-x-4|--x;$ 4) $|x^2+2x+3|-3x+33;$
5) $|x+3|-|2x^2+x-5|;$ 6) $|3x^2-3x+5|-|2x^2+6x-9|.$

91. Tenglamani yeching:

1) $x+\frac{1}{x}=\frac{a-b}{a+b}+\frac{a+b}{a-b}$; 2) $x-\frac{1}{x}=\frac{a}{b}-\frac{b}{a}$;

3) $x(m+n-x)=m+n-1$; 4) $x\sqrt{c}-\sqrt{2c}=\left(c-c\sqrt{2}\right)x$.

92. 1) Ikkita son ko‘paytmasining shu sonlar kvadratlari yig‘indisiga nisbati 0,3 ga teng. Shu sonlar nisbatini toping.
2) Ikkita son yig‘indisining kvadrati shu sonlar ayirmasi kvadratidan 3 marta katta. Shu sonlar nisbatini toping.
3) Ikkita musbat son o‘rta geometrigining shu sonlar o‘rta arifmetigiga nisbati 0,6 ga teng. Shu sonlar nisbatini toping.

Kvadrat tenglamani (2) formulalar yordamida yeching. **(93–95):**

93. 1) $12x^2-7x+1=0$; 2) $6x^2+5x+1=0$; 3) $8x^2+7x-1=0$.

94. 1) $x^2-5x+6=0$; 2) $x^2-3x-4=0$; 3) $3x^2-4x+1=0$.

95. 1) $2x^2-5x=0$; 2) $4x^2+7x-11=0$; 3) $7x^2-4x-20=0$.

Masalalar yechish

Tenglamani to‘la kvadrat ajratish usuli bilan yeching **(96–97):**

96. 1) $x^2+8x+7=0$; 2) $x^2+7x+12=0$.

97. 1) $5x^2+4x-12=0$; 2) $4x^2+3x-22=0$.

Shunday m sonni topingki, natijada berilgan ifoda yig‘indi yoki ayirmaning kvadrati bo‘lsin **(98–101):**

98. 1) x^2+4x+m; 2) x^2-2x+m.

99. 1) x^2+mx+9; 2) x^2-mx+4.

100. 1) $4x^2-20x+m$; 2) $25x^2+20x+m$.

101. 1) $4x^2+mx+9$; 2) $25x^2+mx+4$; 3) $9x^2+mx+16$; 4) $36x^2+mx+9$.

Tenglamani ikki usulda yeching **(102–104):**

102. 1) $3x^2+7y-6-0$; 2) $3x^2-2x-5-0$.

103. 1) $4x^2+12x+9-0$; 2) $25x^2+20x+4-0$.

104. 1) $9x^2-6x-8=0$; 2) $2x^2-3x-5=0$; 3) $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x-1=0$.

m ning qanday qiymatlarida tenglamaning ildizlaridan biri nolga teng bo'ladi **(105–106):**

105. 1) $3x^2-x+m-2=0$; 2) $2x^2-3x-m+5=0$; 3) $4x^2+x+2m-3=0$?

106. 1) $x^2+5x+m^2-1=0$; 2) $x^2-7x-m^2+4=0$; 3) $x^2+3mx+m^2-9=0$?

m ning qanday qiymatlarida tenglamaning ikkala ildizi nolga teng bo'ladi **(107–108):**

107. 1) $2x^2-mx+m(m-1)=0$; 2) $3x^2-2mx+m^2=0$?

108. 1) $6x^2+mx+m=0$; 2) $7x^2-2mx+3m=0$?

m ning qanday qiymatlarida tenglamaning ildizlaridan biri nolga teng bo'ladi **(109–110):**

109. 1) $5x^2-x+m-2-0$; 2) $3x^2-3x-m+5-0$?

110. 1) $3x^2+5x+m^2-1-0$; 2) $5x^2-7x-m^2+4-0$?

m ning qanday qiymatlarida tenglamaning ikkala ildizi nolga teng bo'ladi **(111–112):**

111. 1) $3x^2-mx+m(m-1)=0$; 2) $x^2-2mx+m^2=0$?

112. 1) $6x^2+mx-m=0$; 2) $x^2-2mx+3m=0$?

m ning qanday qiymatlarida tenglamaning ikkala ildizi moduli teng, ammo ishoralari qarama-qarshi bo'ladi **(113–114):**

113. 1) $2x^2-(3m-5)x-8=0$; 2) $3x^2+(4m-9)x-27=0$?

114. 1) $mx^2+(m+2)x+4-0$; 2) $mx^2-(m-3)x-9-0$?

Tenglamaning diskriminantini hisoblang **(115–116):**

115. 1) $2x^2-3x^2+1=0$; 2) $3x^2-2x-1=0$; 3) $2x^2-5x+2=0$;
4) $2x^2+7x+3=0$; 5) $4x^2+x-5=0$; 6) $5x^2-3x-2=0$.

116. 1) $3x^2+4x-7=0$; 2) $3x^2-4x-7=0$; 3) $3x^2+11x+6=0$;
4) $4x^2-11x+6=0$; 5) $6x^2-7x+1=0$; 6) $7x^2+5x-12=0$.

Kvadrat tenglamani yeching yoki yechimi yo'qligini ko'rsating **(117–120):**

117. 1) $6x^2+17x+5=0$; 2) $4x^2+x-3=0$; 3) $10x^2-x-21=0$;
4) $21x^2-25x-4=0$; 5) $2x^2-3x+5=0$; 6) $3x^2+5x+4=0$.

118. 1) $x^2+2x+2-0$; 2) $x^2-4x+6-0$; 3) $x^2-x+1-0$;
4) $x^2-2x+4-0$; 5) $x^2-3x+10-0$; 6) $x^2+2x+3-0$.

119. 1) $\frac{x^2-5}{11}+\frac{x+4}{4}=3$; 2) $\frac{7-x^2}{3}-\frac{x^2+4}{2}=-3$; 3) $\frac{10-x^2}{6}+\frac{x+10}{4}=4$.

120. 1) $\frac{x^2-5}{11}+\frac{x+4}{4}=3$; 2) $\frac{7-x^2}{3}-\frac{x^2+4}{2}=-3$; 3) $\frac{10-x^2}{6}+\frac{x+10}{4}=4$.

Tenglamani yeching **(121–123):**

121. 1) $\frac{2x-7}{x^2-9x+14}-\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{1}{x-1}$; 2) $\frac{2x+7}{x^2+5x-6}+\frac{3}{x^2+9x+18}=\frac{1}{x+3}$.

122. $\frac{6}{x^3-7x^2-7x+1}-\frac{8}{x^3-8x^2+x}=\frac{1}{x^2+x}$.

123. 1) $\frac{x^2+(3-a)x-3a}{x^2-x-12}=0$; 2) $\frac{x^2-(a+1)x+2a-2}{3x^2-7x+2}=0$;
3) $\frac{x^2-(3b-1)x+2b^2-2b}{x^2-7x+6}=0$; 4) $\frac{x^2+(1-4b)x+3b^2-b}{2x^2+3x-5}=0$.

Modul qatnashgan kvadrat tenglamani yeching **(124–125):**

124. 1) $x^2-7|x|+6=0$; 2) $x^2-4|x|-21=0$;
3) $(x-2)^2-8|x-2|+15=0$; 4) $(x+3)^2-|x+3|-30=0$.

125. 1) $x^2+2x+2|x+11|=7$; 2) $x^2-2x-5|x-1|+5=0$;
3) $4x^2-12x-5|2x-3|+15=0$; 4) $9x^2-24x-|3x-4|=4$.

Namuna: $x^2+17x=9x+4|x-3|$.

△ Bunda uch hol yuz berishi mumkin: 1) $x=3$; 2) $x<3$; 3) $x>3$.

1) $x=3$ bo'lsa, noto'g'ri tenglikka kelamiz: $x=3$ tenglamaning yechimi emas.

2) $x<3$. U holda tenglama $x^2+17x=9x-4(x-3)$ yoki $x^2+12x-12=0$ ko'rinishida bo'ladi.

3) $x>3$. Bu holda $x^2+17x-9x+4(x-3)$ yoki $x^2+4x-12-0$. Yechimlari: x_1--6; x_2-2. Ammo har ikki yechim ham 3 dan kichik. Demak, $x>3$ bo'lganida, tenglama yechimga ega emas. Shunday qilib, tenglama $x\geq 3$ bo'lganida yechimga ega emas, $x<3$ bo'lganida yechimlari:

$x_1=-6-4\sqrt{3},\ x_2=-6+4\sqrt{3}$. ▲

25-§. Viyet teoremasi. Kvadrat uchhadni chiziqli ko‘paytuvchilarga ajratish

Ushbu

$$x^2+px+q=0 \qquad (1)$$

ko‘rinishidagi tenglama ***keltirilgan kvadrat*** **tenglama** *deyiladi.*

Bu tenglamada bosh koeffitsiyent birga teng. $x^2+3x-4=0$; $x^2+4x-5=0$ tenglamalar keltirilgan kvadrat tenglamalardir.

Har qanday

$$ax^2+bx+c=0$$

kvadrat tenglamani uning ikkala qismini $a\neq0$ ga bo‘lib, (1) tenglama ko‘rinishiga keltirish mumkin:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

$p=\frac{b}{a}$, $q=\frac{c}{a}$ desak, keltirilgan kvadrat tenglama hosil bo‘ladi:

$$x^2+px+q=0.$$

Uning ildizlari uchun ushbu formula kelib chiqadi.

$$x_{1,2}=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$$

yoki

$$x_{1,2}=\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}. \qquad (2)$$

(2) formula *keltirilgan kvadrat tenglama ildizlari formulasi* deyiladi.

Keltirilgan kvadrat tenglama (1) uchun quyidagi teorema o‘rinli:

Viyet teoremasi: *Agar x_1 va x_2 lar $x^2+px+q=0$ tenglamaning ildizlari bo‘lsa, u holda*

$$x_1+x_2--p,$$

$$x_1\cdot x_2-q$$

formulalar o‘rinli.

○ (2) formula bo‘yicha

$$x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q},\quad x_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q},\quad x_1+x_2=-p,$$

$$x_1\cdot x_2=\left(-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)\cdot\left(-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q},\right)=$$

$$=-\left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}-\frac{p}{2}\right)\left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}+\frac{p}{2}\right)=-\left[\left(\frac{p}{2}\right)^2-q-\left(\frac{p}{2}\right)^2\right]=q.$$ ●

Masalan, $x^2-11x+24=0$ tenglama uchun $x_1=3$; $x_2=8$. Viyet teoremasi bo‘yicha $x_1+x_2=11=(-(-11))$; $x_1\cdot x_2=24$. Viyet teoremasi $x_1=x_2$ bo‘lganda ham o‘rinli. Bu holda $x_1=x_2=d$ desak, tenglama $x^2-2d\cdot x+d^2=0$ ko‘rinishda bo‘ladi.

1-masala. $x^2+px-15=0$ tenglamaning ildizlaridan biri 3. Shu tenglamaning p koeffitsiyentini va ikkinchi ildizi x_2 ni toping.

○ Viyet teoremasiga ko‘ra, $x_1\cdot x_2=-15$; $x_1+x_2=-p$.

$x_1=3$ bo‘lgani uchun $3\cdot x_2=-15$, bundan $x_2=-5$; $x_1+x_2=-p$ ga ko‘ra $p=-(x_1+x_2)=-(3-5)=2$ kelib chiqadi.

Javob: $x_2=-5$; $p=2$. ●

2-masala. Ildizlari $x_1=3$, $x_2=7$ bo‘lgan keltirilgan kvadrat tenglama tuzing.

△ Tenglama $x^2+px+q=0$ ko‘rinishida bo‘lgani uchun $p=-(x_1+x_2)=-(3+7)=-10$; $q=x_1\cdot x_2=3\cdot7=21$.

Javob: $x^2-10x+21-0$. ▲

3-masala. $4x^2+5x-26=0$ tenglamaning ildizlaridan biri musbat. Tenglamani yechmasdan ikkinchi ildizning ishorasini aniqlang.

△ Berilgan tenglama umimiy ko‘rinishda. Uning ikkala qismini 4 ga bo‘lib, keltirilgan kvadrat tenglama hosil qilamiz:

$$x^2+\frac{5}{4}x-\frac{13}{2}=0.$$

Viyet teoremasiga ko‘ra, $x_1\cdot x_2=-\frac{13}{2}<0$, bundan $x_1>0$ bo‘lgani uchun $x_2<0$ kelib chiqadi.

Javob: ikkinchi ildiz manfiy. ▲

Viyet teoremasiga teskari teorema ham ba’zi hollarda qo‘llaniladi.

Teorema: *Agar p, q, x_1, x_2 sonlar uchun*

$$x_1+x_2=-p,\ x_1\cdot x_2=q \qquad (4)$$

munosabatlar bajarilsa, u holda x_1 va x_2 sonlar

$$x^2+px+q=0$$

keltirilgan kvadrat tenglamaning ildizlari bo'ladi.

○ Tenglamaning chap qismidagi p o'rniga $-(x_1+x_2)$ ni, q o'rniga $x_1\cdot x_2$ ni qo'yamiz va guruhlash usulini qo'llaymiz:

$$x^2-(x_1+x_2)x+x_1\cdot x_2=x^2-x_1x-x_2x+x_1x_2=$$
$$=x(x-x_1)-x_2(x-x_1)=(x-x_1)(x-x_2).$$

Shunday qilib, x_1, x_2, p, q lar uchun (4) munosabatlar bajarilsa, istalgan x lar uchun

$$x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2)$$

tenglik bajariladi. Bundan esa x_1 va x_2 lar $x^2+px+q=0$ tenglamaning ildizlari ekani kelib chiqadi. ●

(4) munosabatlardan foydalanib keltirilgan kvadrat tenglamaning ildizlarini tanlash usuli bilan topish mumkin.

4-masala. *Tanlash usuli bilan* $x^2-12x+35=0$ tenglamaning ildizlarini toping.

△ Tenglamada $p=-12$, $q=35$, x_1 va x_2 sonlarini

$$x_1+x_2=12,\ x_1\cdot x_2=35$$

tengliklar bajariladigan qilib tanlaymiz. $35=5\cdot 7$ va $5+7=12$ ekanini e'tiborga olib, teskari teoremaga ko'ra $x_1=5$, $x_2=7$ ga ega bo'lamiz. Bu esa $x_1=5$, $x_2=7$ sonlari $x^2-12x+35=0$ keltirilgan kvadrat tenglamaning ildizlari ekanini anglatadi. ▲

5-masala. $\frac{x^2-2x-15}{x^2-5x}$ ifodani soddalashtiring, bunda $x\neq 5$, $x\neq 0$.

△ Kasrning surat va maxrajini ko'paytuvchilarga ajratamiz: x^2-2x+
$+5=x^2+3x-5x-15=x(x+3)-5(x+3)=(x+3)(x-5)$; $x^2-5x=x(x-5)$.

Demak, $\frac{x^2-2x-15}{x^2-5x}=\frac{(x+3)(x-5)}{x(x-5)}=\frac{x+3}{x}$. ▲

ax^2+bx+c uchhad *kvadrat uchhad* deyiladi, bunda $a\neq 0$.

5-masalani yechishda $x^2-2x-15$ kvadrat uchhad guruhlash usuli bilan ko'paytuvchilarga ajratildi. Uni quyidagi teoremadan foydalanib ham ko'paytuvchilarga ajratish mumkin.

Teorema: *Agar x_1 va x_2 sonlar $ax^2+bx+c=0$ kvadrat tenglamaning ildizlari bo'lsa, u holda barcha x lar uchun quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi:*

$$\boxed{ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)} \qquad (5)$$

(5) tenglikning o'ng qismida turgan ifodaning shaklini almashtiramiz:

$$a(x-x_1)(x-x_2)=ax^2-ax\cdot x_1-ax\cdot x_2+ax_1\cdot x_2=ax^2-a(x_1+x_2)\cdot x+ax_1\cdot x_2. \quad (6)$$

Shartga ko'ra x_1 va x_2 lar – $ax^2+bx+c-0$ tenglamaning, ya'ni $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ tenglamaning ildizlari. Shuning uchun, Viyet teoremasiga ko'ra,

$$x_1\cdot x_2=-\frac{b}{a},\ x_1\cdot x_2=-\frac{c}{a},$$

bundan $a(x_1+x_2)=-b$, $ax_1x_2=c$ kelib chiqadi. Bu ifodalarni (6) ga qo'yib, (5) formulani hosil qilamiz.

(5) formula kvadrat uchhadning chiziqli ko'rinishda yozilgan formulalari deyiladi. (5) formulada $(x-x_1)$ va $(x-x_2)$lar *chiziqli ko'paytuvchilar* deyiladi.

6-masala. $\frac{3x^2+5x-2}{x^2-x-6}$ ifodani soddalashtiring.

Kasrning surat va maxrajini ko'paytuvchilarga ajratamiz:

1) $3x^2+5x-2=0$ tenglama ikkita ildizga ega: $x_1=-2$; $x_2=\frac{1}{3}$.

Isbot qilingan teoremaga ko'ra, $3x^2+5x-2=3(x+2)\left(x-\frac{1}{3}\right)$.

2) x^2-x-6 tenglama ham ikkita ildizga ega: $x_1-\!-2$; x_2-3, ya'ni $x^2-x-6-(x+2)(x-3)$.

Shunday qilib,

$$\frac{3x^2+5x-2}{x^2-x-6}=\frac{3(x+2)\left(x-\frac{1}{3}\right)}{(x+2)(x-3)}=\frac{3x-1}{x-3}.$$

126. Savollarga javob bering. Topshiriqlarni bajaring:

1. Keltirilgan kvadrat tenglama nima? Uning ildizlarini topish formulasini yozing.
2. Viyet teoremasini ayting. 2–3 ta misolda teoremaning to'g'riligini tekshirib ko'ring.
3. Viyet teoremasiga teskari teoremani ayting. Misollarda tushuntiring.
4. Kvadrat uchhad nima? Uni chiziqli ko'paytuvchilarga qanday ajratiladi? Misollar keltiring.
5. Kvadrat tenglama yechimini topishning tanlash usuli nima? Misollarda tushuntiring.

127. Keltirilgan kvadrat tenglamani yeching:

1) $x^2-4x+3=0$; 2) $x^2+6x-7=0$; 3) $x^2+8x-9=0$.

128. (*Og'zaki.*) Keltirilgan kvadrat tenglama ildizlarining yig'indisi va ko'paytmasini ayting:

1) $x^2+x-2=0$; 2) $x^2+5x-6=0$; 3) $x^2-3x+2=0$;
4) $x^2-3x+2=0$; 5) $x^2+7x-8=0$; 6) $x^2+9x-10=0$.

129. (*Og'zaki.*) $x^2-17x+16=0$ tenglamaning ildizlaridan biri 1 ga teng. Uning ikkinchi ildizini ayting.

130. (*Og'zaki.*) Tenglamani yechmasdan uning ildizlari ishoralarini aniqlang:

1) $x^2-4x+3=0$; 2) $x^2+5x-3=0$; 3) $x^2-5x+3=0$; 4) $x^2-8x-7=0$.

131. Ildizlari x_1 va x_2 bo'lgan keltirilgan kvadrat tenglamani yozing:

1) x_1--2; x_2-1; 2) x_1-4; x_2--5; 3) x_1--4; x_2-3;
4) x_1--3; x_2--2; 5) x_1-2; x_2-3; 6) x_1-4; x_2-7.

132. Keltirilgan kvadrat tenglamaning ildizlarini tanlash usuli bilan toping:

1) $x^2+5x+6-0$; 2) $x^2-5x+6-0$; 3) $x^2-6x+5-0$; 4) $x^2-8x+7-0$.

133. Kvadrat uchhadni chiziqli ko'paytuvchilarga ajrating:

1) x^2-8x-3; 2) x^2-6x+5; 3) x^2-3x-2; 4) x^2+x-1.

134. Kvadrat tenglama ildizlarini tanlash usuli bilan toping:

1) $x^2-1009x+2014=0$; 2) $x^2-674x+2013=0$;
3) $x^2-507x+2012=0$; 4) $x^2-969x+1934=0$.

135. Kvadrat uchhadni chiziqli ko'paytuvchilarga ajrating:

1) $42x^2-53x+15$; 2) $15x^2+47x+28$; 3) $12x^2-29x+15$;
4) $26x^2-40{,}5x+10$; 5) $x^2-18x+1$; 6) $x^2+\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)x-\sqrt{6}$.

136. Kasrni qisqartiring:

1) $\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}$; 2) $\frac{x^2+6x+8}{x^2+5x+6}$; 3) $\frac{x^2-3x-4}{x^2-2x+1}$; 4) $\frac{x^2-10x+25}{2x^2-9x-5}$.

137. Agar x_1 va x_2 sonlar $x^2+px+q-0$ tenglamaning ildizlari bo'lsa, quyidagi tengliklarni isbotlang:

1) $x_1^2+x_2^2=p^2-2q$; 2) $x_1^3+x_2^3=-p\left(p^2-3q\right)$;

3) $x_1^4+x_2^4=\left(p^2-2q\right)^2-2q^2$; 4) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=-\frac{p}{q}$;

5) $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{p^2-2q}{q^2}$; 6) $\frac{1}{x_1^3}+\frac{1}{x_2^3}=\frac{3pq-p^3}{q^3}$.

138. 1) $x^2-7x+q=0$ tenglamaning ildizlaridan biri 5 ga teng bo'lsa, tenglama kichik ildizining katta ildiziga nisbatini toping.
2) $x^2-14x+13=0$ tenglama katta ildizining kichik ildiziga nisbatini toping.

139. Tenglamani yeching:

1) $x^2-2011x+10030=0$; 2) $x^2-2019x+20090=0$;

3) $2009x^2-4019x+2-0$; 4) $10030x^2-2011x+1-0$.

140. Ildizlaridan biri: 1) $7-4\sqrt{3}$ ga; 2) $3+2\sqrt{2}$ ga; 3) $1-\sqrt{2}$ ga; 4) $4-\sqrt{15}$ ga teng bo'lgan butun koeffitsiyentli kvadrat tenglama tuzing.

141. 1) a ning qanday qiymatlarida $ax^2+2x-1-0$ kvadrat tenglamaning ildizlaridan biri -1 ga teng bo'ladi?
2) $3x^2+bx-41=0$ tenglama b ning istalgan qiymatlarida turli ishorali x_1 va x_2 ildizlarga ega bo'lishini isbotlang.

3) $7x^2+50x-c^2-3-0$ tenglama c ning istalgan qiymatlarida musbat ildizlarga ega bo‘lishini isbotlang.

Kvadrat tenglamani yechishning al-Xorazmiy usuli

Al-Xorazmiyning „Al-jabr val-muqobala“ asaridan olingan ushbu masalani ko‘raylik: „Agar biror kvadratga uning o‘nta ildiziga teng narsani qo‘shsang, o‘ttiz to‘qqiz hosil bo‘ladi“. Bu masalani yechish (hozirgi belgilarda) $x^2+10x=39$ tenglamani yechish demakdir. Al-Xorazmiy shu tenglamani yechish qoidasini quyidagicha tushuntiradi: „1) ildizlar sonini ikkiga bo‘l, bu masalada 5 hosil bo‘ladi $(10:2-5)$; 2) uni o‘ziga teng (son)ga ko‘paytir, yigirma besh bo‘ladi $(5\cdot5-25)$; 3) uni o‘ttiz to‘qqizga qo‘sh, oltmish to‘rt bo‘ladi $(25+39=64)$; 4) undan kvadrat ildiz chiqar, sakkiz bo‘ladi $\left(\sqrt{64}=8\right)$; 5) undan ildizlar sonining yarmini, ya’ni beshni ayir, uch qoladi $(8-5=3)$. Mana shu son sen izlagan kvadrat ildiz bo‘ladi“.

Hozirgi yozuvda al-Xorazmiyning yechimi qisqacha bunday ko‘rinishni oladi:

$$x=\sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2+39}-\frac{10}{2}=\sqrt{25+39}-5=\sqrt{64}-5=8-5=3.$$

Javob: $x=3$.

(Ammo $x^2-10x-39$ tenglamaning ikkinchi $x=-13$ ildizi ham bor. Al-Xorazmiy musbat ildizlarni qaraydi).

142. Topshiriqni bajaring:

Quyidagi tenglamalarni al-Xorazmiy usuli bilan yeching. Ular olimning „Al-jabr val-muqobala“ asaridan olingan. Mos shakllar chizing:

1) $x^2+10x-56$; 2) $x^2+5x-24$; 3) $x^2+21-10x$; 4) $3x+4-x^2$.

Masala. $x^2+8x=48$ tenglamani al-Xorazmiy usuli bilan yeching.

Al-Xorazmiy ko‘rsatgan hisoblarni bajaramiz:

1) $8:2=4$; 2) $4\cdot4=16$; 3) $16+48=64$; 4) $\sqrt{64}=8$; 5) $8-4=4$.

Javob: musbat ildiz $x=4$.

Kvadrat tenglamani al-Xorazmiy usuli bilan yeching **(143 – 144):**

143. 1) $x^2+x=6$; 2) $x^2+x=12$; 3) $x^2+x=2$; 4) $x^2+x=20$.

144. 1) x^2+x-30; 2) x^2+x-42; 3) x^2+x-56; 4) x^2+x-72.

26-§. Bikvadrat tenglama. Kvadrat tenglamalarga keltiriladigan tenglamalar

Ba'zi hollarda noma'lumni yoki noma'lum qatnashgan ifodalarni almashtirish yordamida tenglamani yangi noma'lumga nisbatan kvadrat tenglamaga keltirish mumkin.

1- masala. Tenglamani yeching: x^4-7x^2+10-0.

△ x^2-t deb almashtiramiz. Bu holda tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:

$$t^2-7t+10=0.$$

Viyet teoremasiga ko'ra bu tenglamaning ildizlari:

$$t_1-2,\ t_2-5.$$

Berilgan tenglamani yechish ikkita tenglamani yechishga keldi: $x^2=2$, $x^2=5$.

Bundan $x_{1,2}=\pm\sqrt{2}$, $x_{3,4}=\pm\sqrt{5}$ kelib chiqadi

Javob: $x_{1,2}=\pm\sqrt{2}$, $x_{3,4}=\pm\sqrt{5}$. ▲

$ax^4+bx^2+c=0$ ko'rinishdagi tenglama **bikvadrat tenglama** deyiladi, bunda $a\neq 0$.

Bu tenglama x^2-t almashtirish bilan kvadrat tenglamaga keltiriladi.

2- masala. Bikvadrat tenglamani yeching: $6x^4+7x^2-124=0$.

△ $x^2=t$ deb almashtiramiz. Bu holda $6t^2+7t-124=0$.

Tenglamaning yechimlari: $t_1=-\frac{31}{6}<0$; $t_2=4$.

$x^2=4$ tenglama $x_{1,2}=\pm 2$ ildizlarga ega, $x^2=-\frac{31}{6}$ tenglama esa haqiqiy ildizlarga ega emas.

Shunday qilib, berilgan tenglama ikkita haqiqiy ildizga ega.

Javob: $x_{1,2}=\pm 2$. ▲

3-masala. Tenglamani yeching:

$$\left(\frac{x-1}{2}\right)^4+\left(\frac{x-1}{2}\right)^2-2=0$$

△ $\left(\frac{x-1}{2}\right)^2=t$ deb belgilaymiz. Bu holda $t^2+t-2=0$. Bu tenglamaning ildizlari: $t_1=-2$; $t_2=1$.

$\left(\frac{x-1}{2}\right)^2=t$ tenglamaning ildizlari x_1--1, x_2-3.

$\left(\frac{x-1}{2}\right)^2=-2$ tenglama haqiqiy ildizga ega emas.

Javob: $x_1=-1$; $x_2=3$. ▲

4-masala. Tenglamani yeching:

$$\frac{8}{x+1}-\frac{1}{x-2}=1.$$

Tenglamadagi kasrlarning umumiy maxraji $(x+1)\cdot(x-2)$.

Agar $x+1\neq0$, $x-2\neq0$ bo‘lsa, u holda tenglamaning ikkala qismini $(x+1)\cdot(x-2)$ ga ko‘paytirib, quyidagini hosil qilamiz: $8(x-2)-$ $-(x+1)-(x+1)(x-2)$.

Qavslarni ochib chiqib, soddalashtiramiz: $8x-16-x-1=x^2-x-2$, $7x-17=x^2-x-2$, $x^2-8x+15=0$.

Bu kvadrat tenglamaning ildizlari: $x_1=3$, $x_2=5$.

Noma’lum son kasr maxrajida qatnashgan tenglamalarni yechganda, albatta, tekshirish o‘tkazish kerak, chunki ularning ichida maxrajni nolga aylantiradiganlari bo‘lishi mumkin.

Agar shundaylari bor bo‘lsa, ular *chet ildizlar* deyiladi va ildizlar qatoridan chiqarib tashlanadi.

5-masala. Tenglamani yeching:

$$\frac{1}{x+2}-\frac{3}{x-2}=\frac{4}{4-x^2}+1.$$

△ Tenglamadagi kasrlarning umumiy maxraji $(x+2)(x-2)$.

Tenglamaning ikkala qismini $(x+2)(x-2)$ ga ko‘paytiramiz: $x-2-3(x+2)=-4-(4-x^2)$, $x-2-3x-6=-8+x^2$, $-2x-8=-8+x^2$, x^2+2x-0, $x(x+2)-0$.

Bu tenglamaning ildizlari: $x_1=0$, $x_2=-2$. Agar $x_2=-2$ bo‘lsa, chap va o‘ng qismdagi kasrlardan ikkitasining maxraji nolga aylanadi. Shu $x_2=-2$ son – chet ildiz. Demak, berilgan tenglamaning ildizi $x_1=0$ bo‘ladi.

Javob: $x_1=0$. ▲

145. Savollarga javob bering. Topshiriqlarni bajaring:

1) Kvadrat tenglamaga keltiriladigan tenglamalarga 3–4 ta misol keltiring.
2) Bikvadrat tenglama nima? Qanday almashtirish bajarilsa, u kvadrat tenglamaga keladi? Misollarda tushuntiring.
3) Chet ildiz nima? Nima uchun noma’lum son kasr maxrajida qatnashgan tenglamalarni yechganda tekshirish o‘tkazish zarurati tug‘iladi? 2–3 ta misolda tushuntiring.

Tenglamani yeching **(146–149):**

146. 1) $x^4-8x^2+7=0$; 2) $x^4-10x^2+21=0$; 3) $x^4-11x^2+24=0$.

147. 1) $x^4-6x^2-40=0$; 2) $x^4+3x^2-28=0$; 3) $x^4+5x^2-6=0$.

148. 1) $\frac{10}{x-3}-\frac{8}{x}=1$; | 2) $\frac{1}{x-5}+\frac{7}{x}=\frac{3}{2}$; | 3) $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}=\frac{1}{6}$; | 4) $\frac{40}{x-20}-\frac{40}{x}=1$.

149. 1) $\frac{x+5}{x+2}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}$; 2) $\frac{x^2-2x-5}{(x-3)(x-1)}+\frac{1}{x-3}=1$.

Tenglamani yeching **(150–154):**

150. 1) $x^4-5x^2+4=0$; 2) $x^4-8x^2-9=0$;
3) $9x^4+23x^2-12=0$; 4) $16x^4+409x^2+225=0$.

151. 1) $x=5+4\sqrt{x}$; 2) $x-12\sqrt{x+35=0}$;
3) $2x-1=3\sqrt{2x-1}$; 4) $3x-5-2\sqrt{3x-5}=0$.

152. 1) $(x+3)^4-13(x+3)^2+36=0$; 2) $(2x-1)^4-13(2x-1)^2+12=0$.

153. 1) $(x^2+6x)^2+8(x^2+6x)-9=0$; 2) $(x^2-2x)^2-14(x^2-2x)-15=0$.

154. 1) $(x+3)^4-13(2x-1)^2-12=0$; 2) $(x+3)^4-13(2x-1)^2-12=0$.

Masalalar yechish

155. Keltirilgan kvadrat tenglamani Viyet teoremasi yordamida yeching:

1) $x^2+4x+3-0$; 2) $x^2-6x-7-0$;
3) $x^2-8x-9=0$; 4) $x^2-6x-91=0$.

156. Keltirilgan kvadrat tenglama ildizlarining yig'indisi va ko'paytmasini ayting:

1) $x^2-x-2=0$; 2) $x^2-5x-6=0$;
3) $x^2+3x+2=0$; 4) $x^2+2x-8=0$.

157. $x^2+17x+16=0$ tenglamaning ildizlaridan biri -1 ga teng. Uning ikkinchi ildizini ayting.

158. $3x^2+bx-1-0$ tenglamaning ildizlaridan biri $\frac{1}{3}$ ga teng bo'lsa, b ni toping.

159. Kvadrat uchhadni chiziqli ko'paytuvchilarga ajrating:

1) $42x^2-53x+15$; 2) $15x^2+47x+28$;
3) $15x^2+47x+28$; 4) $26x^2-40,5x+10$.

160. *Namuna.* $x^2-8x+12$ kvadrat uchhadni chiziqli ko'paytuvchilarga ajrating.

△ Viyet teoremasiga ko'ra, $x_1\cdot x_2=12$, $x_1+x_2=8$ tengliklar o'rinli bo'lishi uchun $x_1=2$; $x_2=6$ bo'ladi. Shuning uchun $x^2-8x+12=(x-2)(x-6)$.

161. Ildizlaridan biri: 1) $\frac{1}{7+\sqrt{5}}$; 2) $\frac{3}{3-\sqrt{2}}$; 3) $\frac{2}{1+\sqrt{5}}$; 4) $\frac{4}{1-\sqrt{2}}$ ga teng bo'lgan butun koeffitsiyentli kvadrat tenglama tuzing.

Namuna. Masalani $x_1=\frac{1}{7+\sqrt{5}}$ uchun yechamiz.

△ Viyet teoremasiga ko'ra, $x_1\cdot x_2=\frac{1}{7+\sqrt{5}}\cdot x_2$. Bu ifoda ratsional son bo'lishi uchun $x_2=\frac{1}{7-\sqrt{5}}$. bo'lishi kerak. Shuning uchun

$x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{7+\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{7-\sqrt{5}} = \frac{1}{49-5} = \frac{1}{44}$. Endi $x_1 + x_2$ ni hisoblaymiz:

$$\frac{1}{7+\sqrt{5}} + \frac{1}{7-\sqrt{5}} = \frac{7-\sqrt{5}+7+\sqrt{5}}{44} = \frac{14}{44} = \frac{7}{22}.$$

Kvadrat tenglamani tuzamiz: $x^2 - \frac{7}{22}x + \frac{1}{44} = 0$. Bundan izlangan kvadrat tenglamani hosil qilamiz: $44x^2 - 14x + 1 = 0$. ▲

162. Kasrni qisqartiring:

1) $\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}$; 2) $\frac{x^2+6x+8}{x^2+5x+6}$; 3) $\frac{x^2-3x-4}{x^2-2x+1}$; 4) $\frac{x^2+10x+25}{2x^2-9x-5}$.

163. $x^2 - 4x - 7 = 0$ tenglamaning ildizlari $x_1$va x_2 bo‘lsa,

1) $x_1^2 + x_2^2$; 2) $x_1^3 + x_2^3$; 3) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; 4) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$ ni toping.

164. Kvadrat tenglama: 1) ildizlaridan biri ikkinchisidan 2 marta katta.

2) ildizlari kvadratlarining yig‘indisi $6\frac{13}{36}$ ga teng bo‘lsa, c ni toping.

165. 1) $12x^2 + bx + 2 = 0$ tenglama katta ildizi kvadrati bilan kichik ildizi kvadratining ayirmasi $\frac{55}{144}$ ga teng. b ni toping.

2) $4x^2 + bx + c = 0$ tenglamaning ildizlaridan biri $\frac{1}{4}$ ga, ikkinchisi esa ozod had c ga teng. b va c orasidagi bog‘lanishni toping.

3) $x^2 + px + q = 0$ tenglamaning p va q koeffitsiyentlari uning ildizlari bo‘lsa, p va q ni toping.

166. Keltirilgan kvadrat tenglama $x^2 + px + q = 0$ ning ildizlari x_1 va x_2 bo‘lsa, quyidagilarni p va q orqali ifodalang:

1) $x_1^2 + x_2^2$; 2) $(x_1 + x_2)^2$; 3) $x_1^2 - x_2^2$; 4) $x_1^3 + x_2^3$; 5) $x_1^3 - x_2^3$; 6) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$;

7) $\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}$; 8) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$; 9) $\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3}$; 10) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$; 11) $x_1^4 + x_2^2$; 12) $x_1^4 - x_2^4$.

167. 1) $2x^2+15x+c=0$ tenglamaning x_1 va x_2 ildizlari uchun $x_2=-4x_1$ tenglik o'rinli bo'lsa, c ni toping.

2) $12x^2+bx+10=0$ tenglamaning x_1 va x_2 ildizlari uchun $3x_1+$ $+4x_2=7$ tenglik o'rinli bo'lsa, b ni toping.

168. a ning qanday qiymatlarida $ax^2+2x-1=0$ tenglamaning ildizlaridan biri 1 ga teng bo'ladi?

169. $ax^2-(a+c)x+c=0$ tenglamaning ildizlaridan biri 1 ga teng ekanini isbotlang.

170. $3x^2+bx-41=0$ tenglama b ning istalgan qiymatlarida turli ishorali x_1 va x_2 ildizlarga ega bo'lishini isbotlang.

171. $6x^2+bx-6=0$ tenglamaning katta ildizidan kichik ildizi ayirilsa, $\frac{13}{6}$ chiqadi. b ni toping.

172. 1) $x=5+4\sqrt{x}$; 2) $x-12\sqrt{x}+35=0$; 3) $2x-1=3\sqrt{2x-1}$.

173. 1) $x^4-5x^2+4=0$; 2) $x^4-8x^2-9=0$; 3) $9x^4+23x^2-12=0$.

174. 1) $\left(x^2+3x+1\right)\left(x^2+3x+3\right)+1=0$; 2) $\left(x^2-5x+2\right)\left(x^2-5x-1\right)=28$.

Namuna. Tenglamani yeching: $(x-2)(x-3)(x+2)(x-7)+36=0$.

$$\left(x^2-5x+6\right)\left(x^2-5x-14\right)+36=0$$

△ Tenglamani ko'rinishida yozib olamiz. Endi $x^2-5x=y$ deb belgilasak, $(y+6)(y-14)+36-0$ yoki $y^2-8y-84+36=0$, $y^2-8y-48=0$ tenglamaga kelamiz. Bu y ga nisbatan keltirilgan kvadrat tenglama. Uning ildizlari: $y_1=-4$, $y_2=12$. Endi ikkita 1) $x^2-5x=-4$; 2) $x^2-5x=12$ tenglamalarni yechamiz.

1) $x^2-5x=-4$, bunda $x_1=1$, $x_2=4$;

2) $x^2-5x=12$ yoki $x^2-5x-12=0$. Bu tenglamaning ildizlari $x_{3,4}=\frac{5\pm\sqrt{73}}{2}$. **Javob:** $x_1=1$, $x_2=4$; $x_{3,4}=\frac{5\pm\sqrt{73}}{2}$. ▲

Tenglamani yeching **(175–176):**

175. 1) $\frac{x+4}{x-4}+\frac{x-4}{x+4}=3\frac{1}{3}$; 2) $\frac{x^2-21x}{4x-3}+5=\frac{16x-12}{2x-x^2}$.

176. 1) $\left(\frac{5x+1}{2x-3}\right)^2+\left(\frac{3-2x}{5x+1}\right)^2=\frac{82}{9}$; 2) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3\left(x+\frac{1}{x}\right)-4=0$.

Tenglamani yeching **(177–179):**

177. 1) $a^2x^4-\left(a^2b^2+1\right)x^2+b^2=0$; 2) $a^2b^2x^4-\left(a^4+b^4\right)x^2+a^2b^2=0$.

178. 1) $\left(x^2-8\right)^2+4\left(x^2-8\right)=5$; 2) $x^4-2x^3-13x^2+14x+24=0$;

179. 1) $x^2+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2=8$; 2) $1+\frac{3a}{x-3b}=\frac{18a^2}{(x-3b)^2}$.

m ning qanday qiymatida ifoda to‘la kvadrat bo‘ladi **(180 – 181):**

180. 1) $x(x+3a)(x+b)(x+3a+b)+\frac{9m^2}{16}$.

181. 1) $x(x+3a)(x+b)(x+3a+b)+\frac{m^2}{4}$.

Namuna: Parametr m ning qanday qiymatlarida $x(x+2)(x+3)(x+5)+m^2$ ifoda to‘la kvadrat bo‘ladi?

△ Ifodani $\left(x^2+5x\right)\left(x^2+5x+6\right)+m^2$ ko‘rinishida yozib olamiz va $x^2+5x=y$ deb belgilaymiz: $y(x+6)+m^2$, y^2+6y+m^2 ifodada to‘la kvadrat ajratamiz:

$$y^2+6y+m^2=y^2+2y\cdot3+9-9+m^2=(y+3)^2-9+m^2.$$

Bundan $m=\pm3$ bo‘lganda ifoda to‘la kvadrat bo‘lishi kelib chiqadi.

Javob: $m=\pm3$. ▲

27-§. Kvadrat tenglamalar yordamida masalalar yechish

Kvadrat tenglamalar yordamida yechiladigan masalalar hayotimizning turli sohalarida uchraydi. Kvadrat tenglamalarga olib keladigan bir nechta masalani yechaylik.

1-masala. Fermer xo‘jaligi 200 ha yerga ma’lum muddatda kartoshka ekib bo‘lishi kerak edi. Ammo xo‘jalik har kuni rejadagidan 5 ha ortiq yerga kartoshka ekib, ishni muddatidan 2 kun oldin tugatdi. Kartoshka ekish necha kun davom etgan?

△ Kartoshkani ekib bo‘lish x kunda tugatilishi kerak edi, deylik. Bunda bir kunda $\frac{200}{x}$ ha yerga ekish mo‘ljallangan bo‘ladi. Har kuni 5 ha ortiqcha ekilgan va $(x-2)$ kunda ekib bo‘lingan. Demak, $(x-2)$ kunda $\frac{200}{x-2}$ ha yerga ekilgan bo‘lsa, $\frac{200}{x-2}-\frac{200}{x}=5$ tenglik to‘g‘ri bo‘ladi. Tenglamani umumiy maxrajga keltiramiz:

$$200x-200(x-2)=5x(x-2),$$
$$5x^2-10x-200x-200x+400,$$
$$5x^2-10x=400.$$

Bundan ushbu $x^2-2x-80-0$ kvadrat tenglamani hosil qilamiz. Uning ildizlari: $x_{1,2}=1\pm9$; $x_1=-8$, $x_2=10$. Ammo belgilashga ko‘ra, ma’nosi bo‘yicha $x>0$. Demak, $x-10$.

Javob: kartoshka ekish 8 kun davom etgan. ▲

2-masala. Shaxtaga tosh tashlandi va uning shaxta tubiga urilganida chiqargan ovozi 9 sekunddan keyin eshitildi. Tovush tezligini 320 m/s, og‘irlik kuchining tezlanishini esa $g=10$ m/s^2 deb hisoblab, shaxtaning chuqurligini aniqlang.

△ Shaxtaning chuqurligini topish uchun toshning shaxta tubiga tushish vaqtini aniqlash yetarli, chunki shaxtaning chuqurligi erkin tushish qonuniga ko‘ra $\frac{gt^2}{2}$ metrga teng. Shart bo‘yicha $g=10$ m/s^2. Shuning uchun shaxtaning chuqurligi $5t^2$ metrga teng.

Ikkinchi tomondan, shaxtaning chuqurligini tovush tezligi 320 m/s ni toshning shaxta tubiga borib tekkan ondan to zarba ovozi eshitilgunicha o‘tgan vaqtga, ya’ni $(9-t)$ sekundga ko‘paytirib topish ham mumkin. Demak, shaxtaning chuqurligi $320\cdot(9-t)$ metrga teng.

Shaxtaning chuqurligini aniqlash uchun topilgan ikki ifodani tenglashtirib, $5t^2=320(9-t)$ kvadrat tenglamani hosil qilamiz. Uni yechamiz:

$$t^2-64(9-t),$$
$$t^2+64t-64\cdot9=0.$$

Bu tenglamaning ildizlarini topamiz:

$$t_{1,2} = -32 \pm \sqrt{32^2 + 64 \cdot 9} = -32 \pm \sqrt{32 \cdot (32+18)} =$$
$$= -32 \pm \sqrt{32 \cdot 50} = -32 \pm \sqrt{16 \cdot 100} = -32 \pm 40,$$
$$t_1 = -72, \ t_2 = 8.$$

Toshning tushish vaqti musbat bo‘lgani uchun $t-8$ s bo‘ladi. Demak, shaxtaning chuqurligi $5t^2 = 5 \cdot 8^2 = 320$ metr.

Javob: 320 metr. ▲

3-masala. Buyumning narxi 12 000 so‘m edi. Bu narx ketma-ket ikki marta bir xil foizga arzonlashtirilganidan so‘ng buyum narxi 9 720 so‘m bo‘ldi. Har gal buyum narxi necha foizga arzonlashgan?

△ Buyumning narxi har gal a % ga arzonlashgan, deylik. Unda birinchi arzonlashganidan keyin buyum narxi $12000 - \frac{12000 \cdot a}{100}$ so‘m bo‘ladi. Ikkinchi marta arzonlashganidan keyin esa

$$\left(12000 - \frac{12000 \cdot a}{100}\right) - \left(12000 - \frac{12000 \cdot a}{100}\right) \cdot \frac{a}{100} =$$
$$= 12000 \cdot \left(1 - \frac{a}{100}\right) - 12000 \cdot \left(1 - \frac{a}{100}\right) \cdot \frac{a}{100} = 12000 \cdot \left(1 - \frac{a}{100}\right)^2.$$

Shartga ko‘ra

$$12000 \cdot \left(1 - \frac{a}{100}\right)^2 = 9720.$$

Bundan

$$\left(1 - \frac{a}{100}\right)^2 = \frac{9720}{12000} \qquad \left(1 - \frac{a}{100}\right)^2 = \frac{9720}{12000} = \frac{81}{100} = \left(\frac{9}{10}\right)^2.$$

Bu a ga nisbatan kvadrat tenglama, unda to‘la kvadrat ajratib qo‘yilgan. Shuning uchun

$$1 - \frac{a}{100} = \pm \frac{9}{10}.$$

Bundan $\frac{a}{100} = 1 \pm \frac{9}{10}$, $a = 100 \pm 90$, $a_1 = 10\%$, $a_2 = 190\%$ hosil bo‘ladi.

$a_2 = 190\%$ masalaning ma’nosiga to‘g‘ri kelmaydi. Demak, $a = 10\%$.

Javob: 10 %. ▲

4-masala. Ikki guruh mutaxassislar birgalikda ishlab, qishloqda yangi qurilgan bolalar shifoxonasini zamonaviy tibbiyot asbob-uskunalari bilan jihozlash va ularni sozlash ishlarini 12 kunda tamomladi. Agar guruhlardan biri bu ishni ikkinchisiga qaraganda 10 kun kam vaqtda uddalay olsa, har bir guruh alohida ishlab, uni necha kunda bajara oladi?

△ Guruhlardan birinchisi ishni x kunda, ikkinchisi $x+10$ kunda bajaradi deylik. Birinchi guruh bir kunda ishning $\frac{1}{x}$ qismini, ikkinchi guruh esa bir kunda ishning $\frac{1}{x+10}$ qismini bajaradi. Ular birgalikda bir kunda ishning $\frac{1}{12}$ qismini bajarsa,

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+10}=\frac{1}{12}$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu tenglamani yechish uchun uning chap qismini umumiy maxrajga keltiramiz.

$$\frac{x+10+x}{x(x+10)}=\frac{1}{12}; \quad \frac{2x+10}{x(x+10)}=\frac{1}{12},$$

$$24x+120=x^2+10x,$$

$$x^2-14x-120=0.$$

Bu keltirilgan kvadrat tenglama. Uni yechamiz:

$$x_{1,2}=7\pm\sqrt{49+120}=7\pm\sqrt{169}=7\pm13.$$

Demak, $x_{1,2}=7\pm13$; $x_1=-6$, $x_2=20$.

Bunda $x_1=-6<0$, x esa kunlarni ifodalaydi, u manfiy bo'la olmaydi. Shuning uchun $x=20$ masalaga to'g'ri keladi.

Javob: 20 kunda; 30 kunda. ▲

182. Savollarga javob bering. Topshiriqlarni bajaring:

1. Kvadrat tenglamalar yordamida masalalar qanday yechiladi? Yechish bosqichlari nimadan iborat bo'lishini ayta olasizmi?
2. Kvadrat tenglamaning ikkala ildizi ham masala mazmuniga mos kelaveradimi?
3. Kvadrat tenglama tuzishga olib keladigan 2–3 ta masala tuzing. Tuzgan masalangizni yeching va javobini tekshiring.

183. Ko'paytmasi: 1) 552; 2) 650 ga teng bo'lgan ikkita ketma-ket natural sonni toping.

184. Bog' to'g'ri to'rtburchak shaklida bo'lib, bo'yi enidan 45 m uzun. Agar bog'ning yuzi 22 750 m² bo'lsa, uning perimetrini toping.

185. 630 km masofani tezyurar poyezd yuk poyezdiga qaraganda 1 soat tezroq bosib o'tdi. Agar yuk poyezdining tezligi tezyurar poyezdnikidan 25 km/h kam bo'lsa, har bir poyezdning tezligini toping.

186. 30 km li masofani velosipedchilardan biri ikkinchisiga qaraganda 20 minut tezroq bosib o'tdi. Birinchi velosipedchining tezligi ikkinchisinikidan 3 km/h ortiq edi. Har bir velosipedchining tezligini toping.

187. Kema daryo oqimi bo'yicha A bekatdan B bekatga bordi. Kema yarim soat to'xtaganidan keyin orqasiga jo'nadi va A dan chiqqanidan 8 soat keyin yana A bekatga qaytib keldi. A va B bekatlar orasidagi masofa 36 km, daryo oqimining tezligi esa 2 km/h bo'lsa, kemaning turg'un suvdagi tezligini toping.

188. Qavariq ko'pburchakning tomonlari soni bilan diagonallari sonining yigindisi 15 ga teng. Ko'pburchak tomonlari soni topilsin.

189. To'g'ri burchakli uchburchakning yuzi 255 cm^2. Agar katetlaridan biri ikkinchisidan 13 cm uzunroq bo'lsa, uchburchakning katetlarini toping.

190. Kislota bilan to'la idish bor. Bu idishdan 2 litr kislota olindi va idishga 2 litr suv quyildi. Aralashmadan 2 l olindi va yana 2 l suv qo'shildi. Bu aralashmadan 2 l olindi va yana 2 l suv quyildi. Natijada idishdagi suv hajmi kislota hajmidan 3 l ko'p bo'lib qoldi. Hozir idishda necha litr kislota va necha litr suv bor?

191. Avtomobil 280 km masofani ma'lum bir tezlikda bosib o'tdi. Keyin u tezligini soatiga 10 km ga oshirib, 160 km yo'l yurdi. Jami yo'lga 6 soat sarflagan bo'lsa, avtomobilning dastlabki tezligini toping.

192. Har xil quvvatga ega bo'lgan ikkita traktor 3 kun birgalikda ishlab, dalaning $\frac{5}{8}$ qismini haydadi. Agar birinchi traktor bilan butun dalani ikkinchisiga qaraganda 4 kun tezroq haydash mumkin bo'lsa, butun dalani har bir traktor alohida-alohida necha kunda hayday oladi?

193. Ikkita paxta terish mashinasi birgalikda maydondagi paxtani faqat birinchi mashinaning yolg‘iz o‘zidan 8 kun tezroq terib bo‘lishi mumkin va faqat ikkinchi mashinaning yolg‘iz o‘zidan 2 kun tez terib tugatishi mumkin. Har bir mashina maydondagi paxtani necha kunda terib olishi mumkin?

Amaliy-tatbiqıy va fanlararo bog‘liq masalalar

194. 1) Quduqqa tosh tashlandi. Tosh quduq tubiga urilganda chiqqan tovush kuzatuvchiga tosh tashlangandan 4 sekunddan keyin eshitildi. Tovushning tezligi sekundiga 330 metr, erkin tushayotgan jismning t sekundda o‘tgan yo‘lini $s=\frac{gt^2}{2}$, $g\approx 10\text{m/s}^2$ deb olib, quduqning chuqurligini toping.

2) Sekundiga 300 metr tezlik bilan otilgan o‘q necha sekunddan keyin yerdan 2500 metr balandlikda bo‘ladi? (Havoning qarshiligi hisobga olinmasin.)

△ 1) Tosh t minutda quduq ostiga tushgan va $s=\frac{gt^2}{2}$ masofani o‘tgan. Tovush quduq ostidan $(4-t)$ sekundda $330(4-t)$m masofani o‘tib chiqqan: $\frac{gt^2}{2}-330(4-t)$. Bu tenglamadan $t\approx 3{,}78$ s; $4-t\approx 0{,}22$ s; $s\approx 330\cdot 0{,}22=72{,}6$ (m).

Javob: $\approx 72{,}6$ m.

2) t sekunddan keyin jism yerdan $300\,t$ m balandlikda bo‘lgan. $300\,t-\frac{10t^2}{2}=2500$ yoki $t^2-60t+500-0$, bunda $t-10$ yoki $t-50$.

Javob: 10 s va 50 s. ▲

195. Har birining sig‘imi 30 litrdan bo‘lgan ikki idishda birgalikda 30 litr spirt bor edi. 1-idishga to‘lgunicha suv quyilib, bu aralashmadan 2-idishga to‘lgunicha quyildi. Keyin 2-idishdan 1-idishga 12 litr aralashma olib quyildi. Shundan so‘ng 2-idishdagi spirt 1-idishdagiga qaraganda 2 litr kam bo‘ldi. Dastlab har qaysi idishda qanchadan spirt bo‘lgan?

196. Shunday to‘rt xonali son topingki, uning minglar xonasidagi va o‘nlar xonasidagi raqamlari o‘zaro teng bo‘lsin, yuzlar xonasidagi raqam birlar xonasidagi raqamdan bitta ortiq bo‘lsin va izlanayotgan son butun sonning kvadrati bo‘lsin.

(*Ko'rsatma:* $x^2 = 1010a + 101b + 100$ tenglamaga keling, bunda x^2 – izlanayotgan son, a – minglar, b – birlar xonasidagi raqam).

197. A qishloqdan B qishloqqa qarab yuk mashinasi yo'lga chiqdi. 1 soatdan so'ng A dan o'sha yo'nalishda yengil mashina yo'lga chiqdi va B ga yuk mashinasi bilan bir vaqtda yetib keldi. Agar bu mashinalar A va B qishloqlardan bir vaqtda bir-birlariga qarab yo'lga chiqqanlarida edi, ular yo'lga chiqqan vaqtdan 1 soat-u 12 minut o'tgach uchrashar edilar. Yuk mashinasi A dan B ga kelish uchun qancha vaqt sarfladi?

198. Vagondan yukni ishchilarning ikkita guruhi tushiradigan bo'ldi. Yukni 1-guruhning yolg'iz o'zi tushiradigan vaqt bilan o'sha yukni 2-guruhning yolg'iz o'zi tushiradigan vaqt yig'indisi 12 soatga teng. Bu vaqtlar ayirmasi ikkala guruh birgalikda ishlab yukni tushiradigan vaqtning 45% iga teng. 1-guruh yolg'iz o'zi va 2-guruh yolg'iz o'zi ishlab yukni qancha vaqtda tushiradi?

199. Ikki usta bir buyumni yasash uchun buyurtma oldi. Avval birinchi usta 1 soat ishladi, keyin ikkala usta 4 soat birga ishladi; shunda buyurtmaning 40% i bajarildi. Agar buyurtmani birinchi ustaning yolg'iz o'zi bajarishi uchun ikkinchisiga qaraganda 5 soat ortiq vaqt kerak bo'lsa, har bir usta buyurtmani necha soatda bajarishi mumkin?

200. Poyezd A va B shaharlar orasidagi yo'l o'rtasida 20 minut to'xtab qoldi. Mashinist B ga jadvalga muvofiq yetib kelish uchun poyezdning dastlabki tezligini 12 km/h ga oshirdi. A va B shaharlar orasidagi masofa 240 km bo'lsa, poyezdning dastlabki tezligini toping.

201. Poyezd 840 km yo'l bosishi kerak edi. Yo'lning yarmida 30 minut to'xtab qoldi. Kechikmaslik uchun tezligini soatiga 2 km oshirdi. Poyezd butun yo'lga qancha vaqt sarf qilgan?

△ Poyezd butun yo'lni x soatda bosishi kerak edi; yo'l yarmini soatiga $\frac{840}{x}$ km tezlikda yurgan; keyin soatiga $\left(\frac{840}{x}+2\right)$ km tezlik bilan yo'lning yarmini $\frac{420}{\frac{840}{x}+2} = \frac{210x}{420+x}$ soatda o'tadi.

Yo‘lning birinchi yarmini $\frac{x}{2}$ soatda yurgan edi. Shunga ko‘ra: $\frac{210x}{420+x}-\frac{x}{2}\ \frac{1}{2}$. Tenglamani yechsak, $x - 21$ soat ekanini topamiz. Masalani boshqa usulda yechish ham mumkin.

Javob: 21 soat. ▲

202. Bir son uchta ketma-ket butun sonlar ko‘paytmasidan iborat. Bu sonni berilgan ketma-ket uchala sonning har biriga bo‘lishdan hosil bo‘lgan bo‘linmalar yig‘indisi 74 ga teng. Shu sonni toping.

203. To‘g‘ri burchakli uchburchak tomonlarining uzunliklari: a) ketma-ket natural sonlar bilan; b) ketma-ket juft natural sonlar bilan; d) ketma-ket toq natural sonlar bilan ifodalanishi mumkinmi?

204. Ikki xil eritmaning birida 800 g, ikkinchisida 600 g tuz bor. Ikkala eritmadan 10 kg li yangi eritma hosil qilindi. Birinchi eritmadagi tuzning protsent miqdori ikkinchi eritmadagi tuzning protsent miqdoridan 10 taga ortiq bo‘lsa, aralashmada har qaysi eritmadan necha kilogramm bor?

205. Ikkita metall parchasidan birining massasi 880 g, ikkinchisining massasi 858 g. 1-parchaning hajmi 2-sining hajmidan 10 sm^3 kam. 1-metall parchasining solishtirma og‘irligi 2-sinikidan 1 g/sm^3 ortiq bo‘lsa, har qaysi metall parchasining solishtirma og‘irligini toping.

206. Ikkita idishda bir-biridan 1 kg ga farq qiluvchi suv bor. Idishlardagi suvga 88 kaloriya issiqlik berildi. Massasi ko‘p bo‘lgan suv massasi kam bo‘lgan suvga qaraganda $\frac{4}{5}$ gradus kamroq isigani ma’lum bo‘lsa, har qaysi idishdagi suv massasini aniqlang.

207. *A* va *B* sharlar orasidagi masofa temiryo‘l bilan 66 km, suv yo‘li bilan esa 80,5 km. Poyezd kemaga qaraganda 4 soat keyin yo‘lga chiqib, *B* ga kemadan 15 minut oldin yetib keldi. Agar poyezdning tezligi kemaning tezligidan soatiga 30 km ortiq bo‘lsa, ularning tezliklarini toping.

208. Ekin maydonining $\frac{2}{3}$ qismini turli quvvatli ikkita traktor birgalikda 4 kunda haydaydi. Agar yerni 1-traktorning yolg'iz o'zi 2-traktorning yolg'iz o'zidan 5 kun tez haydab bo'lishi ma'lum bo'lsa, ekin maydonini har bir traktorning yolg'iz o'zi necha kunda haydab bo'ladi?

△ Ishni bir birlik deb qabul qilamiz. Butun yerni ikkinchi traktorning o'zi x kunda haydasin, deylik. U holda birinchisining yolg'iz o'zi $(x-5)$ kunda haydab tamomlaydi. Birinchi traktor bir kunda butun yerning $\frac{1}{x-5}$ qismini, ikkinchisi esa $\frac{1}{x}$ qismini, ikkala traktor birgalikda $\frac{2}{3}:4=\frac{1}{6}$ qismini haydaydi. Ikkala traktor bir kunda ekin maydonining $\frac{1}{x-5}+\frac{1}{x}$ yoki $\frac{1}{6}$ qismini haydaydi. Demak:

$$\frac{1}{x-5}+\frac{1}{x}=\frac{1}{6}.$$

Bu tenglamaning ildizlari $x_1=15$ yoki $x_2=2$. Masala mazmuniga ko'ra $x>5$ bo'lishi kerak. Shuning uchun $x_2=2$ masalaga javob bo'la olmaydi.

Javob: birinchi traktorning yolg'iz o'zi bilan 10 kunda, ikkinchisining yolg'iz o'zi bilan 15 kunda haydab bo'ladi. ▲

209. Rejadagi ishni bajarish uchun 1-guruh 3,5 kun ishladi. Qolgan ishni 2-guruh 6 kunda tamomladi. Rejadagi ishni 2-guruhning yolg'iz o'zi 1-guruhning yolg'iz o'ziga qaraganda 5 kun keyin tamomlaydi. Har qaysi guruhning yolg'iz o'zi rejadagi ishni necha kunda tamomlaydi?

210. Kema daryo oqimi bo'yicha 69 km masofaga borib, 34 km orqasiga qaytish uchun 5 soat vaqt sarfladi. Oqim tezligi soatiga 3 km bo'lsa, kemaning turg'un suvdagi tezligini toping.

211. *A* qishloqdan daryo oqimi bo‘yicha sol oqizildi. Sol oqizilgandan 4 soat o‘tgach, shu qishloqdan daryo oqimi bo‘yicha motorli qayiq yo‘lga chiqib, 15 km yurgach solga yetib oldi. Motorli qayiq soldan soatiga 12 km ortiq yursa, solning (daryo oqimining) tezligini toping.

212. O‘nliklar raqami birliklardan 4 ta kam bo‘lgan ikki xonali son bilan shu sonning raqamlarining o‘rinlarini almashtirish natijasida hosil bo‘lgan sondan 2 birlik kichik bo‘lgan sonning ko‘paytmasi 2 627 ga teng. Shu ikki xonali sonni toping.

213. Ikki xonali sonning o‘nliklar raqami birliklaridan 4 marta ortiq. Shu sondan 2 ni ayirib, raqamlari izlanayotgan son raqamlarining teskari tartibda yozilishidan hosil bo‘lgan songa 2 ni qo‘shsak va natijalarni ko‘paytirsak, 2 400 chiqadi. Shu ikki xonali sonni toping.

214. Uch guruh ishchilar binoni birgalikda ma’lum muddatda ta’mirladi. Ta’mirlashni faqat 1-guruh bajarsa, bu muddatdan 10 kun ortiq kerak bo‘ladi. Agar ishni faqat 2-guruh bajarsa, 20 kun ortiq, faqat 3-guruh bajarsa, muddatdan 6 marta ko‘p vaqt kerak bo‘ladi. Har qaysi guruh yolg‘iz o‘zi ishlasa, binoni necha kunda ta’mirlab bo‘ladi?

215. Buyumning narxi 12 000 so‘m edi. Bu narx ketma-ket ikki marta bir xil protsentga arzonlashtirilgandan so‘ng buyumning narxi 9 720 so‘m bo‘lgan. Har gal buyumning narxi necha protsentga arzonlashgan?

216. Ikki yil ichida shahar aholisi 2 million kishidan 2 million 205 ming kishiga yetdi. Bu shahar aholisining yillik o‘rtacha ko‘payish protsentini toping.

217. Ikki yo‘lovchi *A* va *B* qishloqlardan bir-biriga qarab kelmoqda. Ular uchrashganda biri ikkinchisidan 2 km ortiq yurgani ma’lum bo‘ldi. Uchrashgandan keyin yurishni davom ettirib, 40 minutdan keyin 1- yo‘lochi *B* ga keldi. 1,5 soatdan keyin esa 2- yo‘lovchi *A* ga keldi. *AB* masofani toping.

218. Shaxmat musobaqasida qatnashuvchilarning har biri qolganlari bilan bir martadan o‘ynadi. Hammasi bo‘lib 120 ta o‘yin o‘ynalgan bo‘lsa, musobaqada necha nafar kishi qatnashgan?

219. 11-sinfni bitiruvchi o‘quvchilar bir-birlari bilan rasmlarini almashtirdilar. Agar 1 190 ta rasm almashtirilgan bo‘lsa, shu sinfda necha nafar o‘quvchi bo‘lgan?

220. Oralaridagi masofa 900 km bo‘lgan ikki shahardan bir-biriga qarab ikki poyezd yo‘lga chiqdi. Poyezdlar yo‘lning o‘rtasida uchrashishdi. Agar 1-poyezd 2-sidan 1,5 soat kech yo‘lga chiqqan bo‘lsa va unga qaraganda tezligi soatiga 10 km ortiq bo‘lsa, har qaysi poyezdning tezligini toping.

221. Poyezd 220 km yo‘lni ma’lum vaqtda bosib o‘tishi kerak edi. U 2 soat yurganidan keyin 10 minut to‘xtab qoldi; keyin tezligini soatiga 5 km ga oshirdi va manzilga mo‘ljallangan vaqtda yetib keldi. Poyezdning boshlang‘ich tezligini toping.

IV BOB MA'LUMOTLAR TAHLILI

28-§. Ma'lumotlar tahlili. Ma'lumotlarni tasvirlash

Turli firmalar, kompaniyalar ishlab chiqarayotgan mahsulotlarning sifat va miqdoriy *belgilari,* ko'rsatkichlari (tarkibi, massasi, o'lchamlari, rangi, ta'mi, ...) qabul qilingan me'yorlarga (standartlarga) mos kelishi (yoki kelmasligi)ni qanday bilamiz? Qanday nazorat qilamiz, sinaymiz?

Tayyorlangan mahsulotlarning (masalan: sut, don, go'sht mahsulotlari; turli ichimliklar; kiyim-kechaklar; dori-darmonlar; elektr asbob-uskunalari va h.k.) miqdori juda ko'p bo'lsa, ularning hammasini bittadan sinovdan, nazoratdan o'tkazish iqtisodiy jihatdan ham maqbul emas. Bunday hollarda jami mahsulotlar to'plamidan bir nechta mahsulot *tasodifiy* ravishda, tavakkaliga tanlab olinadi va shularning o'zigina birma-bir sinovdan o'tkaziladi.

! Sinalishi kerak bo'lgan barcha obyektlar to'plami *bosh to'plam* deyiladi. Bosh to'plamdan tanlab olingan obyektlar *tanlanma to'plam* (qisqacha: *tanlanma*) deb ataladi. Obyekt deganda nimalarni sinash kerak bo'lsa, shular tushuniladi.

1-masala. Firma lampochkalar (uy yoritgichlari) ishlab chiqaradi, deylik. Ularning necha foizi yaroqsiz (yonmaydi)? Buni qanday tekshirasiz?

△ Firma chiqarayotgan yuz minglab lampochkalarning yonish-yonmasligini bittalab sinab chiqishning imkoniyati yo'q. Shuning uchun bunday hollarda lampochkalarning bir nechtasi tasodifiy ravishda (tavakkaliga) tanlab olinadi. Tanlangan hamma lampochkalar sinovdan o'tkaziladi. Sinov natijasiga ko'ra firma chiqarayotgan mahsulot haqida ma'lum bir xulosaga kelinadi.

Masalan, 1000 dona lampochka sinovdan o'tkazilgan bo'lib, ulardan 10 tasi yaroqsiz bo'lsa (yonmasa), u holda jami lampochkalarning ham $\frac{10}{1000}=0,01$ qismi (ya'ni 1% i) yaroqsiz degan xulosaga kelinadi. ▲

Bu misolda firma ishlab chiqargan jami lampochkalar *bosh to‘plamdir*. Sinash uchun tasodifiy ravishda tanlab olingan 1000 ta lampochka *tanlanma to‘plamni* tashkil etadi.

2-masala. Paxtazorda ochilgan ko‘saklarning o‘rtacha massasini aniqlang.

△ Ochilgan ko‘saklarning hammasini yig‘ib olib, ularning massasini bittama-bitta aniqlash ma’noga ega emas. Ko‘sakning o‘rtacha massasini bilish uchun, ularning bir nechtasini dalaning turli joylaridan tasodifiy ravishda tanlangan g‘o‘za tuplaridan uzib olinadi. Hosil bo‘lgan tanlanmadagi ko‘saklarning massalari o‘lchanadi va ularning o‘rta arifmetigi hisoblanadi. Bu o‘rta arifmetik qiymat paxtazorda ochilgan ko‘saklarning o‘rtacha massasi sifatida qabul qilinadi. ▲

Bu misolda bosh to‘plam – paxtazordagi barcha ko‘saklar; tanlanma to‘plam esa massasini o‘lchash uchun dalaning turli joylaridan uzib olingan ko‘saklardir.

Tasodifiy ravishda tanlab olingan n dona obyektning sinash (o‘lchash, kuzatish) natijalari x_1, x_2, ..., x_n deylik. n son *tanlanmaning hajmi* deyiladi. Tanlanmaning hadlari, odatda, *variantalar* deyiladi. Variantalarni ortib borish tartibida yozib chiqaylik:

$$x_1^* \le x_2^* \le x_3^* \le \ldots \le x_n^*. \qquad (1)$$

(1) qator *variatsion qator* deyiladi.

3-masala. Pilla uzunligini o‘lchashda shunday qiymatlar (santimetrlarda) olindi:

3,40; 3,34; 3,24; 3,40; 3,62; 3,45; 3,43; 3,35; 3,50; 3,56.

Shu qiymatlarga mos variatsion qator tuzing.

△ Bu qiymatlarning eng kichigi 3,24; eng kattasi 3,62. Sonlarni o‘sish tartibida joylashtirib, ushbu variatsion qatorni hosil qilamiz:

3,24; 3,34; 3,35; 3,40; 3,40; 3,43; 3,45; 3,50; 3,56; 3,62. ▲

4-masala. Tasodifiy ravishda 10 tup g‘o‘za tanlandi. Ulardagi g‘unchalar soni sanaldi va shunday natijalar olindi: 15, 11, 10, 15, 17, 15, 16, 16, 17, 18. Shu qiymatlarga mos variatsion qator tuzing.

△ Berilgan sonlarning eng kichigi 10, eng kattasi 18. Sonlarni o‘sish tartibida yozib, ushbu variatsion qatorni hosil qilamiz:

10; 11; 15; 15; 15; 16; 16; 17; 17; 18. ▲

x_1, x_2, ..., x_k tanlanmada x_1 varianta n_1 marta,..., x_k varianta n_k marta takrorlangan (kuzatilgan), deylik. n_1, n_2,... n_k sonlar *chastotalar* deyiladi. Ravshanki, $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$.

$W_1 = \frac{n_1}{n}$, $W_2 = \frac{n_2}{n}$, ..., $W_k = \frac{n_k}{n}$ nisbatlar *nisbiy chastotalar* deyiladi.

Ravshanki, $W_1+W_2+...+W_k=1$. Shunday jadvallar tuzaylik (1- va 2-jadvallar):

1-jadval

Sinash natijalari	x_1	x_2	...	x_k
Chastota	n_1	n_2	...	n_k

2-jadval

Sinash natijalari	x_1	x_2	...	x_k
Nisbiy chastota	W_1	W_2	...	W_k

1- va 2-jadvallarni x_1, x_2, ..., x_k tanlanmaning, mos ravishda, chastotalar bo'yicha hamda nisbiy chastotalar bo'yicha *taqsimoti* deymiz.

4-masala uchun chastotalar jadvali va nisbiy chastotalar jadvali quyida berilgan (mos ravishda, 3- va 4-jadvallar).

3-jadval

Sinash natijalari	10	11	15	16	17	18
Chastota	1	1	3	2	2	1

4-jadval

Sinash natijalari	10	11	15	16	17	18
Nisbiy chastota	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$

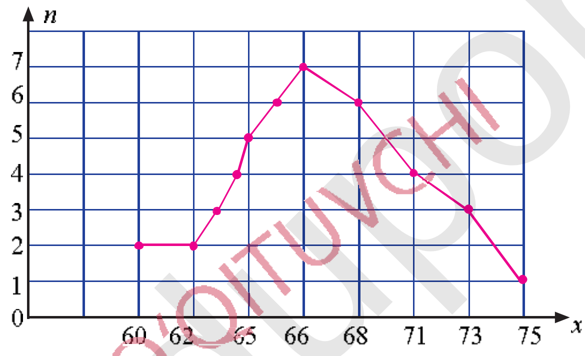
5-masala. „Harakat xavfsizligi“ oyligida DAN xodimi 30 ta avtomobilning tezligini o‘lchadi. Ma’lumotlar chastotalar jadvalida keltirilgan:

O‘lchash natijalari (km/h)	60	62	65	66	68	71	73	75
Chastotalar	2	2	5	7	6	4	3	1

Shu ma’lumotlarni tekislikda tasvirlang.

△ Koordinata tekisligida koordinatalari (60; 2), (62; 2), (65; 5), ..., (75; 1) bo‘lgan nuqtalarni tasvirlaymiz va ularni kesmalar bilan ketma-ket tutashtiramiz (29-rasm).

Hosil bo‘lgan siniq chiziq *chastotalar poligoni* deyiladi. ▲



29-rasm.

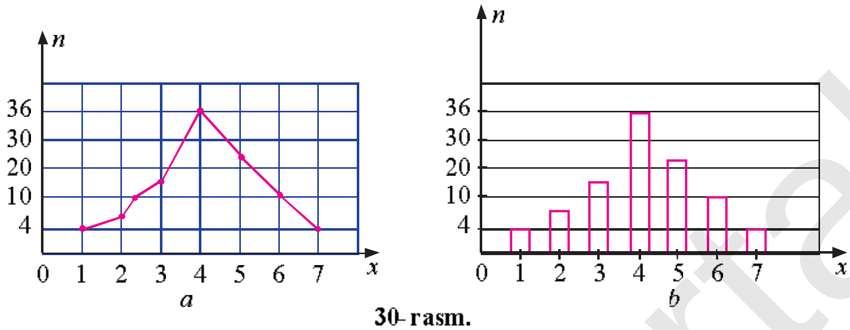
Agar tanlanmaning hajmi katta bo‘lsa, uning chastotalar bo‘yicha taqsimotini topish uchun tanlanma *sinflarga* ajratiladi. Sinflarning o‘lchami (kattaligi, uzunligi,...) bir xil bo‘lishi kerak.

Misol. DAN xodimlari „Harakat xavfsizligi“ oyida 100 ta avtomobilni texnik ko‘rikdan o‘tkazish jarayonida ularning o‘tgan 6 oy mobaynida necha kilometr yo‘l yurganini ham aniqlashdi. Bu ma’lumotlarning chastotalar bo‘yicha taqsimoti quyidagi jadvalda berilgan. Tanlanmalar 7 ta sinfga bo‘lingan. Sinflarning o‘lchami (uzunligi) bir xil.

Sinflar	8001–9000	9001–10000	10001–11000	11001–12000	12001–13000	13001–14000	14001–15000
Sinf tartib raqami	1	2	3	4	5	6	7
Chastotalar	4	6	18	36	22	10	4

$n_1+n_2+n_3+n_4+n_5+n_6+n_7=100$ ekani ravshan.

Jadvaldagi ma'lumotlarni chastotalar poligoni yoki ustunli diagramma ko'rinishida tasvirlash mumkin (30-*a*, *b* rasmlar).



30-rasm.

Mashqlar

1. Tasodifiy ravishda tanlangan 30 tup g'o'za o'simligidagi g'unchalar soni quyidagi jadvalda keltirilgan:

15	17	15	10	18	11	15	17	16	16
17	10	14	15	16	15	14	13	15	13
16	17	16	14	12	14	15	14	17	13

1) Tanlanmaning chastotalar jadvalini tuzing.
2) Tanlanmaning chastotalar poligonini yasang.

2. Sinf rahbari sinfdagi 30 nafar o'quvchidan dam olish kuni har bir o'quvchi necha soat televizor ko'rgani haqida ma'lumot oldi. Ular jadvalda aks etgan:

3	2	5	4	5	3	6	0	2	1	3	3	4	3	3
3	1	3	4	4	2	4	3	2	5	2	4	2	0	4

Ma'lumotlar asosida: 1) chastotalar jadvalini tuzing; 2) chastotalar poligonini yasang.

3. Harbiy xizmatga chaqirilgan yigitlardan 100 nafarining oyoq kiyimlari o'lchami quyidagi chastotalar jadvalida berilgan:

O'lchami	38	39	40	41	42	43	44	45
Chastota	4	4	19	27	23	14	6	3

Ma’lumotlarga ko‘ra: 1) nisbiy chastotalar jadvalini tuzing; 2) chastotalar poligonini yasang; 3) nisbiy chastotalar poligonini yasang.

4. 8-sinflarning 50 nafar o‘quvchi qizlarining oyoq kiyimlari o‘lchamlari jadvalda berilgan:

O‘lchami	34	35	36	37	38	39	40
Chastota	5	7	10	15	7	4	2

Ma’lumotlar asosida: 1) nisbiy chastotalar jadvalini tuzing; 2) chastotalar poligonini yasang; 3) nisbiy chastotalar poligonini yasang.

5. 8-sinf o‘quvchilaridan 20 nafarining kiyimlari (pidjak-shim) o‘lchamlari jadvalda berilgan:

38	42	40	44	40	48	46	42	44	46
48	46	44	50	46	44	48	44	48	44

Ma’lumotlar asosida: 1) chastotalar jadvalini tuzing; 2) nisbiy chastotalar jadvalini tuzing; 3) chastotalar poligonini yasang; 4) nisbiy chastotalar poligonini yasang.

6. Testda 10 ta topshiriq bor edi. Sinfdagi 30 nafar o‘quvchining test natijalari (to‘g‘ri javoblar soni) jadvalda berilgan:

5	8	2	6	5	9	7	6	10	9	8	7	9	3	7
7	3	7	8	9	10	5	7	7	5	5	7	5	4	5

Ma’lumotlarga muvofiq: 1) chastotalar jadvalini tuzing; 2) chastotalar poligonini yasang.

7. Sport guruhida qatnashayotgan 150 nafar yigitning 1 minut 30 sekund mobaynida necha marta „o‘tirib-turishi“ kuzatildi. „O‘tirib-turish“lar soni 40 tadan 74 tagacha bo‘ldi: [40;74]. Bu kesma har birining uzunligi 5 ga teng bo‘lgan oraliqlarga bo‘lindi. Har bir oraliqqa tushgan kuzatishlar soni hisoblandi va ushbu chastotalar jadvali tuzildi:

„O‘tirib-turish“lar soni	Chastotasi
40 dan 44 gacha	11
45 dan 49 gacha	20

50 dan 54 gacha	28
55 dan 59 gacha	36
60 dan 64 gacha	24
65 dan 69 gacha	19
70 dan 74 gacha	12
Jami	150

Ma'lumotlarga mos: 1) chastotalar poligonini yasang; 2) ustunli diagramma yasang.

29-§. O'rta qiymat. Moda. Mediana

O'rta qiymat tushunchasi bilan tanishsiz. Agar variantalar x_1, x_2, ..., x_n bo'lsa, tanlanmaning *o'rta qiymati* deb

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

songa aytiladi.

Agar tanlanmada x_1 varianta n_1 marta, x_2 varianta n_2 marta, ..., x_k varianta n_k marta takrorlangan (kuzatilgan) bo'lsa,

$$\overline{x} = \frac{n_1 x_1 + \ldots + n_k x_k}{n_1 + \ldots + n_k}$$

son tanlanmaning *vaznli o'rta qiymati* deyiladi. n_1, n_2, ..., n_k sonlar mos variantalarning chastotalari ekanini eslatib o'tamiz.

1-masala. Xo'jalik 100 ha yerga chigit ekib, ma'lum bir nav paxtadan gektar boshiga 33 sr dan hosil ko'tardi. 50 ha boshqa yerga ekilgan o'sha nav paxtadan esa 30 sr dan hosil oldi. Xo'jalik 1 gektar yerdan o'rtacha qancha hosil olgan?

△ Bu yerda $x_1 - 33$, $n_1 - 100$; $x_2 - 30$, $n_2 - 50$.

$$\overline{x} = \frac{100 \cdot 33 + 50 \cdot 30}{100 + 50} = \frac{3300 + 1500}{150} = \frac{4800}{150} = 32 \text{ (sr)}.$$

Javob: 32(sr). ▲

2-masala. Sportchi balandlikka 7 marta sakradi va shunday natijalarni ko'rsatdi (metr hisobida):

2,1; 1,97; 2,44; 1,85; 1,97; 1,96; 2,06.

Sportchi o'rtacha necha metr balandlikka sakragan?

△ Bu yerda 1,97 varianta ikki marta, qolgan variantalar bir marta qayd etilgan. Bundan

$$\bar{x} = (2{,}1 + 2 \cdot 1{,}97 + 2{,}44 + 1{,}85 + 1{,}96 + 2{,}06) : 7 = 14{,}35 : 7 = 2{,}05 \text{ (m)}.$$

Javob: 2,05 metr. ▲

O‘rta qiymat ma’lumotlar qatorining *markazini* ifodalaydigan son deyish mumkin.

Moda. Moda tushunchasiga olib keluvchi masala ko‘raylik.

3- masala. Maktab hamshirasi 8- sinf o‘quvchilaridan 10 nafarining bo‘yini o‘lchab, quyidagi natijalarni oldi (santimetr hisobida):

166; 168; 170; 165; 164; 168; 169; 163; 168; 162.

Tanlanmada qaysi varianta eng ko‘p takrorlangan?

△ Variatsion qator tuzaylik:

162; 163; 164; 165; 166; <u>168</u>; <u>168</u>; <u>168</u>; 169; 170.

Bu variatsion qatorda o‘rganilayotgan belgi – o‘quvchi bo‘yining balandligi – 168 cm eng ko‘p – 3 marta qayd etilgan, boshqa variantalar esa 1 yoki 2 marta. Bu variatsion qator uchun 168 soni *moda* bo‘ladi. ▲

Berilgan variatsion qatorda o‘rganilayotgan belgining eng ko‘p uchraydigan qiymati *moda* deyiladi va M_0 kabi belgilanadi.

Moda va o‘rta qiymat o‘zaro teng bo‘lmasligi ham, teng bo‘lishi ham mumkin. Shu masalada o‘quvchilarning o‘rtacha balandligi $\bar{x} - (2 \cdot 163 + 164 + 165 + 166 + 3 \cdot 168 + 169 + 170) : 10 - 1664 : 10 - 166{,}4$ (cm) bo‘ladi.

Bu masalada moda va o‘rta qiymat o‘zaro teng bo‘lmadi: $168 \neq 166{,}4$.

4- masala. Alining „Algebra“ fanidan jurnaldagi baholari: 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5.

Shu tanlanmaning modasi va o‘rta qiymatini toping.

△ $M_0 = 4$ ekani ravshan, chunki 4 varianta tanlanmada eng ko‘p uchraydi:

$$\bar{x} = \frac{2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 5}{2 + 3 + 2} = \frac{28}{7} = 4.$$

Bu masalada $M_0 = \bar{x} = 4$.

Tanlanmaning modasi bo‘lmasligi ham mumkin. Masalan, polizdan uzilgan 5 ta qovunning massasi o‘lchanganda (kg larda) 3,8; 4; 4,5; 5,2; 4,9 natijalar olindi. Bu tanlanmaning modasi yoq. ▲

Mediana.

Variatsion qator hadlarining soni toq bo‘lsa, bu qator o‘rtasida joylashgan had *mediana* deyiladi va M_e kabi belgilanadi.

Masalan, 20, 23, 24, 27, 29, 31, 34 qator uchun mediana 27 bo‘ladi, chunki 27 soni bu variatsion qatorning o‘rtasida joylashgan. Undan chap tomonda ham, o‘ng tomonda ham qatorning 3 tadan hadi bor. Variantalar soni juft bo‘lgan holni qaraylik.

12, 14, 17, 21, 23, 29, 32, 37 qatorda 8 ta had bor, bunday holda variatsion qatorning medianasi o‘rtada turgan ikkita sonning o‘rta arifmetigi kabi ta’riflanadi:

$$M_e = \frac{21+23}{2} = \frac{44}{2} = 22.$$

Kenglik.

Variatsion qatorning eng katta hadi x_n^* bilan eng kichik hadi x_1^* orasidagi farq (ayirma), ya’ni $x_n^* - x_1^*$ son $x_1, x_2, ..., x_n$ tanlanmaning *kengligi* deyiladi.

U, odatda, r harfi bilan belgilanadi.

Tanlanmaning kengligi $x_1, x_2, ..., x_n$ sonlar qanchalik tarqoq ekanini bildiruvchi o‘lchovlardan biridir. Masalan,

$$5,\ 6,\ 8,\ 16,\ 18,\ 19 \qquad (1)$$

qator uchun kenglik $r-19-5-14$ ga teng.

$$10,\ 10,\ 12,\ 13,\ 13,\ 14 \qquad (2)$$

qator uchun esa kenglik $r-14-10-4$ ga teng. Holbuki, har ikkala qatordagi hadlar soni 6 tadan, o‘rta qiymatlari esa o‘zaro teng $(\bar{x}=12)$.

$14 > 4$ tengsizlik (1) qatordagi hadlar (2) qatordagi hadlarga qaraganda o‘rta qiymatga nisbatan tarqoq joylashganini, (1) qatorda *o‘zgaruvchanlik* katta ekanini bildiradi.

Mashqlar

8. 10 ta o‘yinda maktab futbol jamoasining raqib darvozasiga kiritgan to‘plarining chastotalar jadvali quyidagicha bo‘ldi:

x – to‘plar soni	0	1	2	3
n – chastota	4	2	3	1

Shu ma’lumotlarga ko‘ra: 1) variatsion qator tuzing; 2) tanlanmaning: o‘rta qiymatini; modasini; medianasini; kengligini toping; 3) chastotalar poligonini yasang; 4) nisbiy chastotalar jadvalini tuzing; 5) nisbiy chastota jadvaliga mos diagramma yasang.

Tanlanmalarning: 1) o‘rta qiymati; 2) modasi; 3) medianasi; 4) kengligini toping **(9 – 11)**:

9. 1) 12, 14, 9, 13, 15;
2) 16, 14, 13, 17;
3) 15, 13, 13, 14, 16, 14;
4) 5, 8, 13, 12, 12.

10. 1) 6, 8, 10, 11, 10;
2) 3, 6, 8, 4, 9;
3) 8, 10, 12, 11, 14;
4) 6, 3, 2, 7, 5, 7.

11. 1) –3, 4, 5, – 4, 1, 2, 4, –3, –2, 3, –3, 2;
2) –3, –3, 4, 4, 4, 6, 6, –3, –2, 4, 5, –4.

12. To‘qqiz kishidan iborat hakamlar hay’ati 10 ballik shkalada ikkita raqqosaning raqsini baholadi. Kuzatish natijalari jadvalda keltirilgan:

Raqqosaning tartib raqami	Hakamlarning tartib raqamlari va natijalari								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	8,8	9,6	8,9	9,2	8,7	8,9	8,9	8,8	8,7
2	9,1	8,2	9,0	8,9	9,0	9,1	9,0	9,1	9,0

Har bir raqqosa uchun qo‘yilgan baholarning: 1) o‘rta qiymatini; 2) modasini; 3) medianasini; 4) kengligini toping.

13. Maktabdagi 40 nafar o‘qituvchining ish staji haqidagi ma’lumotlar quyidagi chastotalar jadvalida keltirilgan:

Ish staji	1	2	4	5	7	9	10	12	15	18	20	22	23	25
O‘qituvchilar soni	3	1	4	3	4	2	3	1	2	6	3	3	3	2

Shu tanlanmaning: 1) o‘rta qiymatini; 2) modasini; 3) medianasini; 4) kengligini toping; 5) chastotalar poligonini yasang.

14. Kuzatish kameralarini tekshirayotib, tasodifiy ravishda 50 ta avtomobil tanlandi va har birining tezligi (km/hlarda) aniqlandi. Natijalar jadvalda keltirilgan:

62	54	56	73	78	63	68	70	66	54
58	65	55	57	69	67	61	64	53	56
58	76	57	48	57	68	82	78	72	75
65	67	64	54	58	62	67	80	87	69
74	78	70	76	46	60	63	68	74	67

Shu tanlanmaning;
1) kengligini aniqlang;
2) oraliq uzunligini 5 deb olib, tanlanmani sinflarga (guruhlarga) ajrating (45–49; 50–54; 55–59;...) va chastotalar jadvalini tuzing;
3) tanlanmaning o‘rta qiymatini; modasini; medianasini hisoblang;
4) chastotalar poligonini yasang;
5) nisbiy chastotalar jadvalini tuzing;
6) nisbiy chastotalar jadvaliga mos diagramma yasang;
7) necha protsent avtomobilning tezligi 70 km/h dan ortiq ekan?

15. Nayza (kopyo) otish bo‘yicha musobaqada qatnashgan 40 nafar kishining ko‘rsatgan natijalari (1 metr aniqligida) quyidagi jadvalda berilgan:

28	31	31	38	43	38	34	52	36	38
35	48	34	45	41	35	42	42	42	41
27	32	29	33	49	37	48	40	47	39
26	25	37	40	28	37	37	44	44	43

1) Ma'lumotlarni sinflarga (guruhlarga) ajrating (25–29; 30–34; ...) va chastotalar jadvalini tuzing;
2) chastotalar poligonini yasang;
3) tanlanmaning: o'rta qiymatini, modasini; medianasini toping.

30-§. Tanlash usuli bilan kombinatorik masalalarni yechish

Ko'pgina hayotiy masalalarning yechimi bir nechta bo'lishi mumkin. Yechimlar ichidan o'zimizga eng maqbulimi olishimiz tabiiy. Yechimlar sonini hisoblashda hamma variantlar (usullar, imkoniyatlar) dan birortasi ham „qolib ketmasligi“, „yo'qolmasligi“ uchun *tanlash* (sanab chiqish) usulidan foydalanishadi. Bu usulning mohiyati misollar yechish jarayonida ochiladi.

1-masala. 2, 3, 5 raqamlari yordamida nechta ikki xonali son tuzish mumkin?

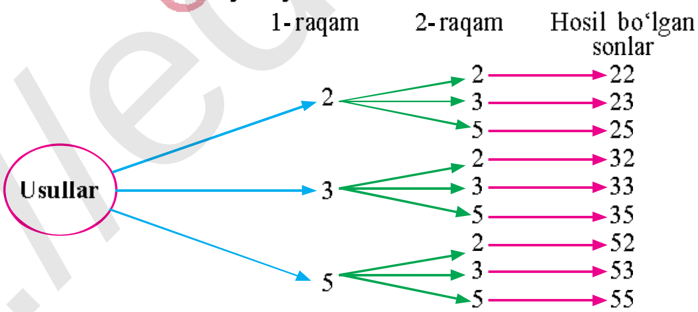
△ Javoblardan birortasini tushirib qoldirmaslik, ularni takror yozib qo'ymaslik uchun sonlarni, masalan, o'sish tartibida yozib chiqamiz: avval 2 raqami bilan, so'ngra 3 raqami bilan, keyn 5 raqami bilan boshlanadigan sonlardan masalaga mosini *tanlab* yozamiz:

22, 23, 25; 32, 33; 35, 52, 53, 55.

Javob: 9 ta ikki xonali son tuzish mumkin. ▲

1-masalani yechishning yana bir usulini ko'raylik.

△Ushbu chizmani yasaymiz:

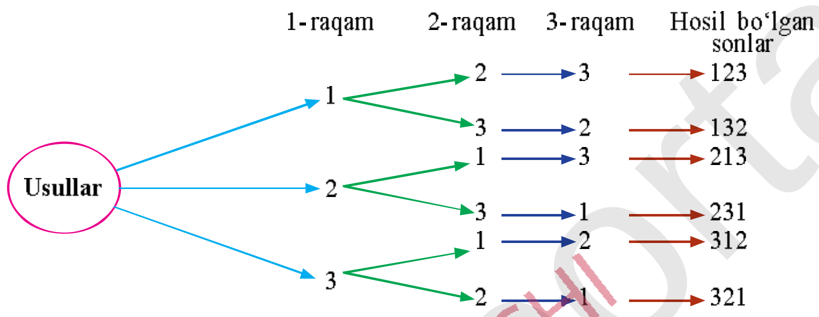


Javob: jami 9 ta. ▲

Bu chizma daraxtga o'xshaydi, shuning uchun ham bunday chizmalar mumkin bo'lgan *variantlar* (usullar, tanlashlar) *daraxti* deyiladi. Berilgan 2, 3, 5 raqamlaridan ikki xonali son tuzish uchun avval 1-raqam tanlanadi, buning esa 3 ta usuli bor, shuning uchun daraxtdagi „ildiz“ – usullardan 3 ta shox chiqqan. Keyin 2-raqam tanlanadi, buning ham 3 ta usuli bor, shuning uchun 1-raqam bo‘lishga da’vogar 3 ta raqamning har biridan 3 tadan shoxcha chiqqan. Natijada 9 ta turli ikki xonali son hosil qilinadi.

2-masala. 1, 2, 3 raqamlaridan, ularni takrorlamay, jami nechta turli 3 xonali son tuzish mumkin?

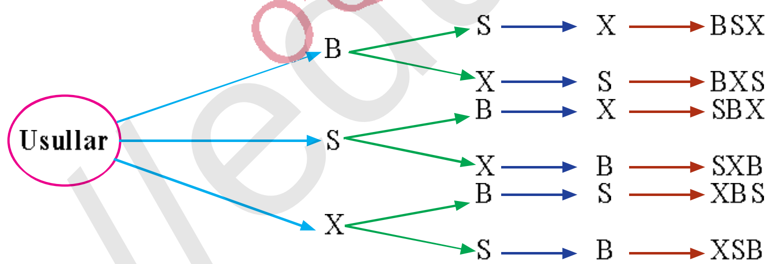
△ Variantlar daraxtini tuzamiz:



Javob: 6 ta.▲

3-masala. Sayyohlik firmasi Buxoro, Samarqand, Xiva shaharlariga sayohat uyushtirmoqchi. Bunday marshrutning jami nechta turli varianti (usullari) bor?

△ Belgilashlar kiritamiz: Buxoro – B, Samarqand – S, Xiva – X. Variantlar daraxtini tuzamiz:



Javob: jami 6 ta marshrut.▲

4-masala. 1) 1, 2 va 3; 2) 0, 1, 2 va 3 raqamlaridan foydalanib mumkin bo‘lgan barcha ikki xonali sonlarni yozing. Ularning soni N nechaga teng ekan?

△ Kombinatorik masalalarni yechish vositalaridan biri *variantlar jadvali*dir. Bunday vosita yordamida hisoblashda elementlar kombinatsiyasining „yo‘qolib“ qolishi bo‘lmaydi. Masalani variantlar jadvali yordamida yechib ko‘raylik. Shunday jadvallar tuzamiz:

1-raqam	2-raqam		
	1	2	3
1	11	12	13
2	21	22	23
3	31	32	33

$N = 3 \cdot 3 = 9.$

Javob: 1) $N = 9.$

1-raqam	2-raqam			
	0	1	2	3
1	10	11	12	13
2	20	21	22	23
3	30	31	32	33

$N = 3 \cdot 4 = 12.$

Javob: 2) $N = 12.$

Mashqlar

16. Alisher, Bahrom, Salim futbol o'yinini ko'rish uchun 3 ta chipta sotib olishdi. Chiptaga ko'ra ular 1- qatorning 1; 2; 3- o'rinlarini egallashlari kerak. Ular bu 3 ta o'rinni necha usulda egallashlari mumkin? Masalaga mos variantlar daraxtini chizing.

17. 0, 4, 5 raqamlaridan, raqamlar takrorlanishi mumkin bo'lsa, jami nechta 3 xonali turli son tuzish mumkin? Masalaga mos variantlar daraxtini chizing

18. 4, 5, 8 raqamlaridan, raqamlar takrorlanishi mumkin bo'lsa, nechta 3 xonali son tuzish mumkin?

19. Do'konda olma, nok, uzum bor. Iroda va Nasiba xolalar bu mevalardan bittasini tanlashmoqchi. Bunday tanlashning jami nechta varianti bor? Variantlar daraxtini chizing.

20. 2, 4, 6, 8 raqamlaridan turli to'rt xonali sonlarni tuzing. Raqamlar takrorlanmaydi. Bu sonlarning nechtasi: 1) 4 ga; 2) 8 ga bo'linadi?

21. A'zamxon onasi va singlisiga berish uchun ikkita guldasta olmoqchi. Gul do'konida oq atirgul, qizil atirgul, chinni gullardan iborat guldastalar bor ekan. A'zamxon ikkita guldastani necha xil usulda tanlashi mumkin? Variantlar daraxtini chizing.

22. Alijon quyoniga sabzi, karam, lavlagi beradi. U shu sabzavotlardan ikkitasini tanlashi kerak. Alijon buni necha xil usulda amalga oshira oladi?

23.. Seyfning shifrida 3 ta – A, B, C harflar bor. Shu harflar yordamida jami nechta shifr tuzish mumkin? Ikki holni qarang: 1) harflar takrorlanmaydi; 2) harflar takrorlanadi.

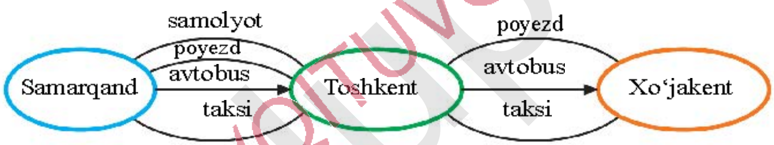
24. Taqsimchada 2 ta olma, 2 ta nok, 2 ta shaftoli bor. Nodira va Nozima bu mevalardan 3 tasini tanlashmoqchi. Tanlashning nechta usuli (varianti) bor?

25. Oltita bola 3 ta ikki o'rinli qayiqda sayr qilishmoqchi. Bolalarni bu qayiqlarga necha xil usulda taqsimlash mumkin? Variantlar daraxtini yasang.

31-§. Kombinatorikaning asosiy qoidasi va uni masalalar yechishda qo'llash

Aziz o'quvchi! Siz 6-sinfda kombinatorikaning qo'shish va ko'paytirish qoidalariga oid dastlabki tushunchalar bilan tanishgansiz.

1-masala. Samarqanddan Toshkentga 4 xil yo'l bilan kelish mumkin: samolyot, poyezd, avtobus va yengil mashina (taksi). Toshkentdan Xo'jakentga 3 xil transport vositasi olib boradi: poyezd, avtobus, taksi. Samarqanddan Xo'jakentga necha xil usulda kelish mumkin (31-rasm)?



31-rasm.

△ Samarqanddan Toshkentga kelishning jami 4 ta yo'li bor. Mavjud 4 ta yo'ldan bittasini tanlab, Toshkentga keldik, deylik. Endi Xo'jakentga borishning 3 ta yo'li – imkoniyati bor. Shunday qilib, Samarqanddan Toshkent orqali Xo'jakentga borishning jami $4 \cdot 3 = 12$ xil usuli bor.

Bu usullarni yozib ham chiqish mumkin. Belgilash kiritaylik: samolyot (s), poyezd (p), avtobus (a), taksi (t). Masalan, sp yozuv Samarqanddan Toshkentga samolyotda kelish va Toshkentdan Xo'jakentga poyezdda borishni bildiradi. Bu belgilashlar yordamida Samarqanddan Toshkent orqali Xo'jakentga borishning jami usullari (variantlari, yo'llari, imkoniyatlari) quyidagicha bo'ladi:

sp	pp	ap	tp
sa	pa	aa	ta
st	pt	at	tt

Jami usullar soni: $4 \cdot 3 = 12$ ta.

Javob: 12 xil. ▲

A tanlash *m* xil usulda, *B* tanlash *n* xil usulda, *A* va *B* tanlash $m \cdot n$ xil usulda amalga oshiriladi

Bu qoida *ko'paytirish qoidasidir* va u kombinatorikaning asosiy qoidasi hisoblanadi.

2- masala. „Makro“ supermarketining „Hammasi uy uchun“ bo'limida 5 xil piyola, 6 xil taqsimcha, 4 xil choy qoshiq bor. Nargiza xola turli nomdagi ikkita buyum sotib olmoqchi. U buni necha xil usulda amalga oshirishi mumkin?

△ 1) Piyolani tanlashning 5 ta usuli bor. Taqsimchani tanlashning 6 ta usuli bor. Piyola tanlashning har bir usuliga taqsimcha tanlashning 6 ta usuli mavjud. Demak, ko'paytirish qoidasiga muvofiq piyola va taqsimcha juftligini tanlashning $5 \cdot 6 = 30$ ta usuli bor. Xuddi shunday mulohaza yuritib: 2) piyola va qoshiqni $5 \cdot 4 = 20$ usulda; 3) taqsimcha va qoshiqni $6 \cdot 4 = 24$ xil usulda tanlab olish mumkinligini topamiz. Demak, turli nomdagi ikkita buyumni $30 + 20 + 24 = 74$ xil usulda tanlab olish mumkin ekan.

Javob: 74 xil usulda. ▲

3- masala. Nechta uch xonali sonda faqatgina bitta 7 raqami bor?

△ 7 raqami 1-, 2-, 3-o'rinda (yuzlar, o'nlar, birlar xonasida) bo'lishi mumkin.

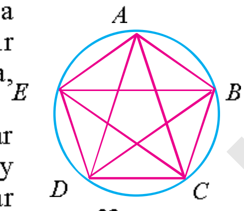
Agar 7 raqami 1-o'rinda turgan bo'lsa, 2- va 3-o'rinlarni 9 ta raqam (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9) yordamida $9 \cdot 9 = 81$ usulda to'ldirish mumkin.

Agar 7 raqami 2-o'rinda bo'lsa, u holda 1-o'rinda 0 va 7 raqamlaridan boshqa ixtiyoriy raqam turishi mumkin. 1-o'rinni egallashning $10 - 2 = 8$ ta imkoniyati bor. Bu holda 3-o'rinda 7 raqamidan boshqa ixtiyoriy raqam tura oladi; demak, imkoniyatlar soni $8 \cdot 9 = 72$ ta.

Agar 7 raqami 3-o'rinda tursa, u holda 1-o'rinni olish uchun 8 ta, 2-o'rinni olish uchun esa 9 ta imkoniyat bor. Shunday qilib, o'nli yozuvida faqatgina bitta 7 raqami bor uch xonali sonlar jami $81 + 72 + 72 = 225$ ta ekan.

Javob: 225 ta. ▲

4- masala. Aylanada olingan 5 ta nuqta A, B, C, D, E harflari bilan belgilangan. Har bir nuqta qolgan har bir nuqta bilan tutashtirilsa, nechta kesma hosil bo‘ladi (32-rasm)?



32-rasm.

△ Aylanada olingan 5 ta nuqtaning har biridan 4 tadan kesma o‘tkaziladi. Bunday kesmalar soni $5 \cdot 4 = 20$ ta, ammo kesmalar sonini hisoblashda har bir kesma ikki marta sanalgan. Demak, biz 20 ni 2 ga bo‘lishimiz kerak: $20 : 2 = 10$. ▲

5- masala. 3, 4, 5, 6, 8, 9 raqamlari yordamida hammasi bo‘lib: 1) raqamlar takrorlanmasa; 2) raqamlar takrorlanishi mumkin bo‘lsa, nechta uch xonali son tuzish mumkin?

△ 1) Berilgan raqamlar 6 ta. Ularning xohlagan bittasi 3 xonali sonning birinchi raqami bo‘lishi mumkin. Demak, 3 xonali sonning birinchi raqamini *tanlash imkoniyati* 6 ta bo‘ladi. U holda 2-raqam qolgan 5 ta raqamning ixtiyoriy bittasi bo‘lishi mumkin, ya’ni 2-raqamni tanlash imkoniyatlarimiz 5 ta. Shunga o‘xshash, 3-raqamni tanlash imkoniyatlarimiz 4 ta.

Demak, raqamlar takrorlanmasa, jami uch xonali sonlar soni $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ ta bo‘lar ekan.

Javob: 120 ta. ▲

△ 2) Raqamlar takrorlanadigan bo‘lsa, uch xonali sonning 1-, 2-, 3-xonalariga yoziladigan raqamni *tanlash imkoniyatlari* 6 tadan bo‘ladi, chunki berilgan raqamlar soni 6 ta. Bu holda jami 3 xonali sonlar soni $6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3 = 216$ ta bo‘ladi.

Javob: 216 ta. ▲

Mashqlar

26. Onasi Nargizaga supermarketdan 3 xil meva xarid qilishni aytdi. Supermarketda 6 xil olma, 4 xil nok, 5 xil uzum bor. Nargiza mevalarning har bir xilidan 1 kg dan olib, nechta turli to‘plam tuza oladi?

27. Nechta 4 xonali sonda faqatgina bitta 5 raqami bor?

28. Aylanada: a) 10 ta; b) 100 ta; d) n ta nuqta belgilangan. Har bir nuqta qolgan har bir nuqta bilan tutashtirilsa, har bir holda jami nechta kesma hosil bo‘ladi?

29. 1) 3; 2) 4; 3) 5; 4) 6; 5) 8; 6) 15 nafar do‘stlar o‘zaro qo‘l berib ko‘rishishdi. Har bir holda qo‘l berishlar soni nechta bo‘lgan?

30. 10 nafar o‘rtoq o‘zaro shaxmat turniri o‘tkazishmoqchi. Bunda har bir bola qolgan har bir bola bilan bir partiya shaxmat o‘ynaydi. Bu turnirda jami nechta partiya o‘ynaladi?

*Ayting-chi, **31–33**-masalalarning o‘xshashligi nimada?*

31. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 raqamlari yordamida hammasi bo‘lib: 1) raqamlar takrorlanmasa; 2) raqamlar takrorlanishi mumkin bo‘lsa, nechta uch xonali son tuzish mumkin?

32. 1, 2, 3, 4, 5 raqamlari yordamida nechta: a) ikki xonali; b) uch xonali; d) to‘rt xonali sonlar yozish mumkin?
Raqamlar: takrorlanmaydigan; takrorlanadigan hollarni alohida ko‘ring.

33. Futbol bo‘yicha jahon chempionatida oltin, kumush, bronza medallari uchun bo‘ladigan o‘yinlarda 16 ta jamoa qatnashmoqda. Medallar jamoalar orasida necha xil usul bilan taqsimlanishi mumkin?

34. Bir mamlakatda 4 ta shahar bor ekan: *A*, *B*, *C* va *D*. *A* shahardan *B* ga 6 ta yo‘l, *B* shahardan *C* ga 4 ta yo‘l olib borarkan. *A* dan *D* ga 2 ta yo‘l, *D* dan *C* ga 3 ta yo‘l bilan borish mumkin ekan. *A* shahardan *C* shaharga necha xil yo‘l bilan borish mumkin?

35. Agar natural sonning yozuvida faqat toq sonlar qatnashsa, bunday sonni „yoqimtoy“ son deymiz. Nechta: 1) 3 xonali; 2) 4 xonali „yoqimtoy“ son mavjud?

36. Yozuvida hech bo‘lmaganda bitta juft raqam qatnashgan 6 xonali sonlar nechta?
Ko‘rsatma: Yozuvida faqat toq sonlar qatnashgan 6 xonali sonlar soni $5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5=5^6=15\,625$ ta. Jami 6 xonali sonlar esa 900 000 ta. Masala shartini qanoatlantiradigan 6 xonali sonlar soni $900\,000-15\,625=884\,375$ ta.

37. 4 ta turli xatni 4 ta turli konvertga necha xil usulda joylash mumkin?

38. 5 nafar o‘quvchidan 2 nafarini „Bilimlar bellashuvi“ da qatnashish uchun tanlab olish kerak. Buni necha xil usulda bajarish mumkin?

39. Doskada 12 ta ot, 8 ta fe’l va 7 ta sifat yozilgan. Gap tuzish uchun har bir so‘z turkumidan bittadan olish kerak. Buni necha xil usul bilan amalga oshirish mumkin?

40. Shaxmat taxtasida oq va qora ruxni bir-birini ololmaydigan („ura olmaydigan“) qilib necha xil usulda joylashtirish mumkin (33-rasm)?

33-rasm.

41. Shaxmat taxtasiga oq va qora farzinlarni, ular bir-birini „ura olmaydigan“ qilib necha xil usulda joylashtirish mumkin?

42. Shaxmat taxtasiga oq va qora shohlarni, o‘yin qoidalarini buzmagan holda, necha xil usulda qo‘yish mumkin?
Ko‘rsatma: 3 ta holni qarang:
1) oq shoh burchakda turibdi;
2) oq shoh taxtaning chetida (lekin burchakda emas) turibdi;
3) oq shoh taxtaning chetida emas.

43. Maktab oshxonasida oq non, qora non va uch xil kolbasa bor. Ulardan necha xil buterbrod tayyorlash mumkin? Barcha variantlarni yozib chiqing.

44. Ba’zi mamlakatlarning bayroqlari turli rangdagi 3 ta gorizontal yoki 3 ta vertikal „yo‘l“ lardan iborat. Oq, yashil, ko‘k rangli matolar yordamida shunday bayroqlardan necha xilini tikish mumkin?

45. Bo‘sh joylarga 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 raqamlaridan birini yozish mumkin bo‘lsa, ◯ + □ + △ = 10 „tenglama“ nechta yechimga ega bo‘ladi? Raqamlar takrorlanishi mumkin. Ikki holni qarang (masalan: 1) 1, 1, 8; 1, 8, 1; 8, 1, 1 turli yechim; 2) bitta yechim deb qaraladigan hollar).

46. Nodirning chamadoni kod bilan ochiladi. Bu kod uchta turli raqamdan iborat bo‘lib, har bir raqam 3 dan katta emas. Kodda 13 soni qatnashmaydi (masalan, kodlar ro‘yxatida 0, 13, 213... kodlar yo‘q). Nodir kodni unutib qo‘ygan bo‘lsa, kodni topish uchun u ko‘pi bilan necha marta „urinishi“ lozim bo‘ladi?

47. Ko‘p qavatli uyda yo‘lak eshigidagi qulf kod bilan ochiladi. Kod 0 va 1 raqamlaridan tuzilgan 4 xonali son (0000 va 1111 sonlar kod emas deb hisoblangan.) Qulf kodini unutgan bo‘lsangiz, eshikni eng ko‘pi bilan nechta urinishda ocha olasiz?
Ko‘rsatma: Avval bitta 1 qatnashgan kodlarni, keyin ikkita 1 bo‘lgan kodlarni va nihoyat, uchta 1 bo‘lgan kodlarni sinash kerak.

48. 20 kg guruchni 1 kg, 2 kg, 5 kg li toshlar yordamida pallali tarozida necha xil usulda tortish mumkin?

△ Bu ishni quyidagicha bajarish mumkin:
1) faqat 1 kg li tosh yordamida 1 ta usul;
2) faqat 2 kg li tosh yordamida 1 ta usul;
3) faqat 5 kg li tosh yordamida 1 ta usul;
4) 1 kg va 2 kg li toshlar yordamida 9 ta usul bilan:

1 kg li tosh	18	16	14	12	10	8	6	4	2
2 kg li tosh	1	2	3	4	5	6	7	8	9

5) 1 kg va 5 kg li toshlar yordamida 3 ta usul bilan:

1 kg li tosh	15	10	5
5 kg li tosh	1	2	3

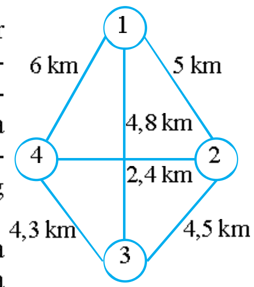
6) 2 va 5 kg li tosh yordamida 1 ta usul: 5 ta 2 kg va 2 ta 5 kg;
7) 1 kg, 2 kg va 5 kg li toshlar yordamida 13 ta usul bilan:

	Usullar soni												
Toshlar, kg	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1 kg	1	3	5	7	9	11	13	8	6	4	2	3	1
2 kg	7	6	5	4	3	2	1	1	2	3	4	1	2
5 kg	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3

Demak, jami $1+1+1+9+3+1+13-29$ ta usul.
Javob: 29 ta usul. ▲

49. Firmaga 4 ta do‘kon tegishli. Inkassator (do‘kondagi pullarni yig‘ib bankka topshiruvchi xodim) 1-do‘kondan boshlab hamma do‘konlarni aylanib chiqadi va yana 1-do‘konga qaytib keladi. Mumkin bo‘lgan marshrutlardan eng qisqasini toping (34-rasm).

Ko‘rsatma: Har bir marshrut uchun 5 ta raqamli kod tuzing. Kodning birinchi va oxirgi raqami 1 bo‘lsin. Masalan, 12431 marshrutning uzunligi:
$5+2{,}4+4{,}3+4{,}8=16{,}5$ (km).



34-rasm.

Mashqlar

50. Quyidagi tanlanma berilgan:
18, 19, 17, 18, 14, 13, 17, 19, 18, 18, 20, 22, 19, 15, 24,
14, 18, 15, 13, 17, 20, 22, 21, 19, 18, 16, 13, 13, 15, 14.
Tanlanmaning: 1) chastotalar jadvalini tuzing; 2) o‘rta qiymatini; 3) modasini; 4) medianasini; 5) kengligini toping; 6) chastotalar poligonini yasang.

51. Tanlanmaning: 1) variatsion qatorini tuzing; 2) o‘rta qiymatini; 3) modasini; 4) medianasini; 5) kengligini toping:
–5, –4, –3, –2, 0, 3, 6, 6, 5, 5, 5, 7, 8, 8, 6, 7.

52. Jadvaldagi ma’lumotlarga ko‘ra tanlanmaning: 1) o‘rta qiymatini; 2) modasini; 3) medianasini; 4) kengligini toping; 5) chastotalar poligonini chizing; 6) nisbiy chastotalar jadvalini tuzing va unga mos diagramma yasang:

Kuzatish natijalari	7	8	9	10	12	14	15
Chastota	6	7	8	9	10	6	4

53. 100 metrli masofaga yugurishda 8-sinfning 20 nafar o‘quvchisi shunday natijalarni ko‘rsatdi (sekundlarda):

14,3	16,1	14,7	16,9	24,1	22,4	19,8	14,2	17,4	14,5
20,8	19,9	15,4	18,4	20,2	18,3	20,1	18,4	18,3	16,2

Tanlanmaning: 1) variatsion qatorini; 2) chastotalar jadvalini tuzing; 3) o‘rta qiymatini; 4) modasini; 5) medianasini; 6) kengligini hisoblang; 7) chastotalar poligonini yasang.

54. 8-sinfdagi bir o‘quvchining „Algebra“ fanidan ikki chorak davomida olgan baholari quyidagicha ekan:
4, 3, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 4, 4, 3, 2, 3, 4.
Tanlanmaning: 1) o‘rta qiymatini; 2) modasini; 3) medianasini toping; 4) chastotalar jadvalini tuzing; 6) chastotalar poligonini chizing.

55. Agar: 1) raqamlar takrorlanmasa; 2) raqamlar takrorlanishi mumkin bo‘lsa, 0, 1, 2, 3, 4, 5 raqamlaridan jami nechta 4 xonali son tuzsa bo‘ladi?

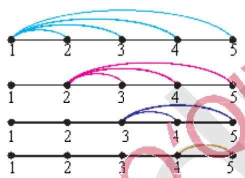
56. 0, 3, 4, 5, 6, 7 raqamlaridan jami nechta 4 xonali toq son tuzish mumkin?

57. Odatda, uchburchakning uchlari lotin alifbosining katta harflari bilan belgilanadi. Lotin alifbosida 26 ta harf bor. Uchburchakning uchlarini necha xil usulda belgilash mumkin?

58. 8 ta stulga 3 nafar o‘quvchini necha xil usulda o‘tqazsa bo‘ladi?

59. Mijozning uy telefoni 7 raqamli bo‘lib, 218 dan boshlanadi. Mijoz a’zo bo‘lgan bu telefon stansiyasi nechta mijozga xizmat ko‘rsata oladi?

60. Necha xil usulda 5 nafar qilichbozdan 2 tasini musobaqada qatnashish uchun tanlab olish mumkin?
Alining yechimi: 5 nafar qilichbozdan bittasini tanlash imkoniyati 5 ta. 4 nafar qilichboz qoladi. Ulardan bittasini 4 usulda tanlasa bo‘ladi. Demak, $5 \cdot 4 - 20$.
Javob: $5 \cdot 4 - 20$ xil usul bor.
Nozimaning yechimi: 5 nafar qilichbozni „nomerlab“ chiqamiz va ulardan 2 kishilik guruhlar tuzamiz: 12; 13; 14; 15; 23; 24; 25; 34; 35; 45.
Javob: 10 xil usulda tanlash mumkin.



Mubinabonuning yechimi:
4 ta juftlik: 12; 13; 14; 15;
3 ta juftlik: 23; 24; 25;
2 ta juftlik: 34; 35;
1 ta juftlik: 45.

Jami $4+3+2+1=10$. **Javob:** 10 xil usulda.
Kimning yechimi to‘g‘ri? Kimning yechimi sizga yoqdi? Nimasi bilan yoqdi?

61. Sizning tengdoshingiz bo‘lgan bir bola: „Hozircha men bir havaskor bolaman, katta bo‘lsam katta shoir bo‘laman“, deb yaxshi niyat qilib she’r yozib yurarkan. She’rlarining biriga „Lola“ deb sarlavha qo‘yibdi. Bu she’rning 1-qatori „Navbahorda qirda ochildi lola“ ekan. Qolgan qatorlar 1-qatordagi so‘zlarning o‘rnini almashtirish natijasida hosil bo‘lgan. Bu „she’r“da eng ko‘pi bilan nechta qator bor?

62. To‘g‘ri chiziqda: 1) 4 ta; 2) 6 ta; nuqta belgilandi. Har bir holda nechta kesma hosil bo‘ladi?

63. „Rayhon“ kafesining taomnomasida 3 xil somsa, 4 xil 1-taom, 5 xil 2-taom bor ekan. 3 xil turdagi taomga buyurtmani nechta usulda berish mumkin?

64. 2 ta olma, 2 ta nok, 2 ta shaftoli bor. 3 nafar o‘rtoq mevalarni har biri 2 ta turli meva oladigan qilib bo‘lib olishmoqchi. Buni jami nechta usulda bajarsa bo‘ladi?

Amaliy-tatbiqiy va fanlararo bog‘liq masalalar

65. Harbiy xizmatga chaqirilayotgan yigitlardan 50 nafarining bo‘yini santimetrlarda o‘lchashdi. O‘lchash natijalari jadvalda keltirilgan:

159	156	160	154	155	154	158	163	158	180
156	157	155	158	159	158	159	154	167	158
158	156	175	156	164	162	168	157	159	162
164	169	158	167	172	166	175	177	183	182
172	170	172	166	171	174	162	167	169	173

1) ma’lumotlarni sinflarga ajrating (guruhlang): 154–158, 159–163, 164–168, 169–173, 174–178, 179–183.
Har bir sinfga ma’lumotlardan nechtasi tegishli ekanini aniqlang;
2) ustunli diagramma yasang;
3) chastotalar poligonini yasang.

66. Tasodifiy ravishda tanlangan 30 tup g‘o‘za o‘simligida ochilgan ko‘saklar soni jadvalda berilgan:

7	4	7	6	4	4	4	4	3	5	7	4	3	3	4
3	6	5	4	7	6	4	4	3	4	3	4	4	3	5

ma’lumotlarga ko‘ra:
1) chastotalar jadvalini tuzing;
2) chastotalar poligonini yasang.

67. O‘zbek yozuvchisining o‘zbek tilidagi biror asarini tanlang. (Masalan: X. To‘xtaboyevning „Sariq devni minib“; A. Qodiriyning „O‘tkan kunlar“ asarlari.) Asarning tasodifiy ravishda tanlangan, masalan, 2 betidagi harflarni sanang. O‘zbek alifbosidagi har bir harf siz tanlagan betlarda necha martadan uchradi? Harflarning: 1) chastotalar bo'yicha; 2) nisbiy chastotalar bo'yicha taqsimotini tuzing; 3) chastotalar poligonini yasang.

68. 8-sinf o'quvchilari orasida Alisher Navoiy g'azallarini yoddan ifodali aytish bo'yicha musobaqa bo'lib o'tdi. Unda 10 nafar qiz bo'la va 9 nafar o'g'il bola qatnashdi.
x – qiz bolalar yodlagan g'azallar soni,
y – o'g'il bolalar yodlagan g'azallar soni bo'lsin. x va y sonlarining chastotalar bo'yicha taqsimoti quyidagi jadvallarda berilgan:

x – g'azallar soni	4	5	6	8	12
n – chastota	3	2	3	1	1

y – g'azallar soni	4	5	6	8	9
n – chastota	2	4	1	1	1

Jadvalga ko'ra x va y miqdorlarning:
1) modalarini; 2) medianalarini toping; 3) jadvallarga mos chastotalar poligonini yasang.

△ x va y miqdorlarning jadval ko'rinishida berilgan taqsimotini variantalarning quyidagi qatori ko'rinishida yozish ham mumkin:

x: 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 8, 12 (1)

y: 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 8, 9 (2)

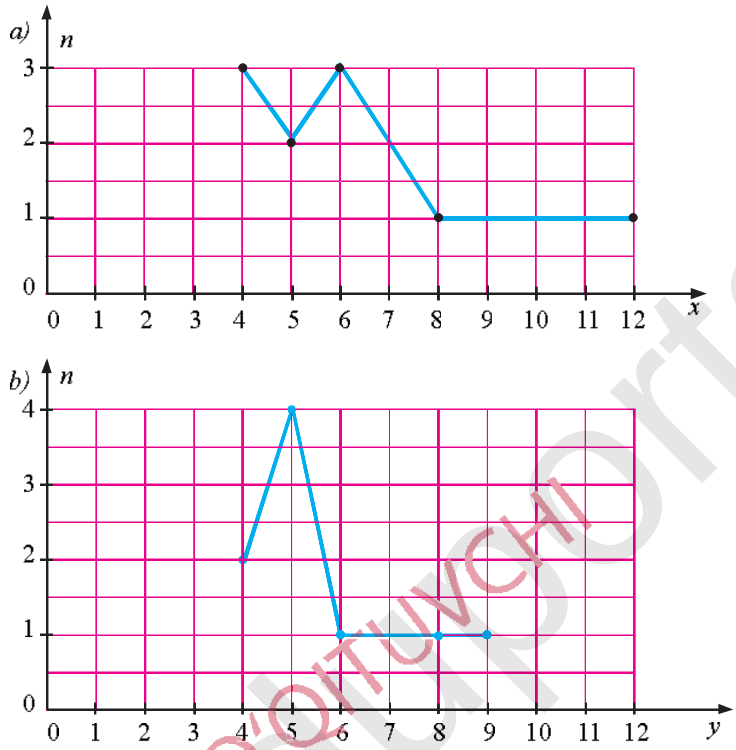
(1) tanlanmada 2 ta moda bor: $M_{0_1}=4$ va $M_{0_2}=6$. (2) tanlamada esa moda bitta: $M_0=5$.
(1) qatorda 10 ta (juft sondagi) had bor. Bu holda mediana markazdagi ikkita hadning o'rta arifmetigiga teng:

$$M_e=\frac{5+6}{2}=\frac{11}{2}=5,5.$$

(2) qatorda 9 ta (toq sondagi) had bor. Bu holda medananing qiymati markazdagi hadga teng: M_e-5.
Mediana variatsion qatorni teng ikkiga bo'ladi: medianadan chap tomonda ham, o'ng tomonda ham variatsion qatorning elementlari soni bir xil, o'zaro teng bo'ladi.

Javob: 1) (1) qator uchun $M_{01}-4$; $M_{02}-6$; (2) qator uchun M_0-5;

2) (1) qator uchun $M_e=5{,}5$, (2) qator uchun $M_e=5$;
3) x va y miqdorlarning chastotalar poligoni 35-*a*, *b* rasmlarda berilgan. ▲



35-rasm.

69. Har bir 8-sinf uchun, masalan, I va II choraklar natijalariga mos:
1) chastotalar jadvalini tuzing; 2) chastotalar poligonini yasang; 3) poligonlarni taqqoslang va xulosa chiqaring. Ma'lumotlarni sinf jurnallaridan o'qituvchilaringiz yordamida oling.
Masalani qanday hal qilishingizni bayon qiling.

70. Maktabingizning: 1) 5-; 2) 8-; 3) 11-sinflari o'quvchilarining har bir sinflar uchun: a) bo'ylarining o'rtacha uzunliklarini; b) o'rtacha massalarini toping. Ma'lumotlarni maktab hamshirasidan olasiz. Mos chastotalar poligonini yasang.

71. Kuzatishingiz natijalari asosida maktabingizda 1 kunda o'rtacha necha gramm bo'r ishlatilishini aniqlang. 1 kunda, 1 oyda Respublikamiz maktablarida necha tonna bo'r ishlatilishini chamalang. Respublikamizda oliy o‘quv yurtlari, litseylar va maktablar soni birgalikda (hisoblashingiz oson bo‘lishi uchun) 10000 ta deb oling.

72. 3 gektar yerga qovun ekilgan. Ular yetilib qoldi. 1 gektar yerdan o‘rtacha necha tonna hosil olinishini baholang. Bu ishni qanday amalga oshirishingizni qadam-baqadam bayon qiling.

73. Avtomashinalarni davlat ro‘yxatidan o‘tkazishda 3 ta raqam, 3 ta harfdan va shahar yoki viloyat uchun belgilangan koddan foydalaniladi. Masalan, avtomashina nomeridagi 01 kod – mashina Toshkentdan ro‘yxatga o‘tganini bildiradi. Nima deb o‘ylaysiz, Toshkentda eng ko‘pi bilan nechta avtomashina ro‘yxatdan o‘tishi mumkin?

△ Nomerlashda 24 ta harf qatnashadi, deylik. Nomer 6 ta „joy“ni egallaydi. 1-„joy“da 10 ta raqamdan ixtiyoriy biri bo‘lishi mumkin. 2-„joy“ni 10 ta raqamdan biri egallaydi. 3-„joy“da 9 ta raqamdan ixtiyoriy biri bo‘ladi. (3 ta bir xil raqamli nomer berilmaydi, bunday nomerlar auksionda sotiladi.) Nomerdagi 1-harf ham, 2-harf ham, 3-harf ham 24 ta harfning ixtiyoriy biri bo‘lishi mumkin. Demak, Toshkentda ro‘yxatdan o‘tishi mumkin bo‘lgan jami avtomashinalar soni $10 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 24 = 24^3 \cdot 900 = 12\,441\,600$ ta.
Bu hisoblashda harflarning nomerdagi 3 xonali sondan „bitta harf – 3 xonali son – 2 ta harf“ yoki „3 xonali son – 3 ta harf“ ko‘rinishida bo‘lishining farqi yo‘q.
Javob: 12 441 600 ta.▲

74. 2, 4, 7, 9 raqamlaridan ularni takrorlamasdan nechta 4 xonali son tuzish mumkin? Ularning nechtasi: 2 ga, 4 ga, 11 ga bo‘linadi?

75. Tug‘ilgan kuningizga taklif etilgan 4 ta do‘stingizni 4 ta stulga necha xil usulda o‘tkaza olasiz?

76. Taqsimchada 8 ta yong‘oq bor edi. Abbos ixtiyoriy 3 tasini olmoqchi bo‘ldi. Buni u necha xil usulda amalga oshirishi mumkin?

77. Zalda 2 ta bo‘sh joy bor. 3 nafar kishidan 2 tasini shu joyga necha xil usulda o‘tqazish mumkin?

Arifmetikaning asosiy teoremasi. Tub ko'paytuvchilarga yoyish

Tub va murakkab sonlar, o'zaro tub sonlar, natural sonlarning EKUBi va EKUKi haqida tushunchalarga egasiz.

Teorema (tub bo'luvchi haqida teorema).

a) *Agar a son berilgan p tub songa bo'linmasa, u holda a, p sonlari* ***o'zaro tub sonlar*** *bo'ladi.*

b) *Agar bir nechta sonlarning ko'paytmasi p tub songa bo'linsa, u holda ko'paytuvchilardan kamida bittasi p ga bo'linadi.*

△ a) Teskarisini faraz qilamiz, ya'ni a son berilgan p tub songa bo'linmasdan, u bilan 1 dan farqli umumiy bo'luvchiga ega bo'lsin. Bu esa p sonining tub son ekanligiga zid.

b) Agar ko'paytma p tub songa bo'linib, ko'paytuvchilarning barchasi p ga bo'linmasa, a) xossaga ko'ra ularning barchasi p tub son bilan o'zaro tub bo'ladi. Demak, berilgan ko'paytma ham p tub soni bilan o'zaro tub. Ziddiyatga keldik. ▲

1-masala. Alisher va Murod o'yin o'ynashmoqda: Alisher Murodga biror sonni aytadi, Murod esa bu sonni doskaga yozadi. So'ng Murod yozgan sonni o'chirib, uning o'rniga ko'paytmasi bu songa teng bo'lgan ikkita sonni (ular ikkalasi ham 1 dan farqli) yozadi. Keyingi qadamda Murod yozilgan ikkita sonning biri bilan xuddi shunday ish qiladi, ya'ni ko'paytmasi unga teng bo'lgan ikkita son (ular ikkalasi ham 1 dan farqli) ga almashtiradi. Va hokazo.

Alisher dastlab shunday sonni topmoqchi, bunda Murod:

a) birorta ham qadamni amalga oshira olmaydi;

b) qadamlarni cheksiz davom ettira oladi.

Alisher bunday sonni topa oladimi?

△ a) Ha, topa oladi. Murod birorta ham qadamni amalga oshira olmasligi uchun Alisher tub sonni aytishi yetarli. Haqiqatan ham, har qanday tub son 1 dan farqli bo'lgan hech qanday ikkita sonning ko'paytmasi bo'la olmadi.

b) Yo'q. Murod qandaydir qadamda doskada tub sonni hosil qildi, deylik. Xuddi a) holdagidek, bu tub son hech qachon o'chirilmaydi. Agar bu son murakkab bo'lsa, ta'rifga ko'ra u ikkita 1 dan farqli ko'paytuvchiga ajraladi. Bunda yozilgan sonlar har qadamda kamayib boraveradi. Bu sonlar 1 dan kichik bo'la olmasligi bois, jarayon qachondir to‘xtaydi. Bunda doskada Alisher aytgan son tub sonlar ko‘paytmasi ko‘rinishida ifodalanadi. ▲

Misol uchun, 360 sonini qaraylik.

△ Bu son qanday eng kichik tub songa bo‘linadi? Ravshanki, 2 ga: $360=2\cdot180$. 180 soni esa qanday eng kichik tub songa bo‘linadi? U ham 2 ga bo‘linadi: $180=2\cdot90$. Demak, $360=2\cdot2\cdot90$. 90 soni esa qanday eng kichik tub songa bo‘linadi? Yana 2 ga: $90=2\cdot45$. Demak, $360=2\cdot2\cdot2\cdot45$. 45 soni esa qanday eng kichik tub songa bo‘linadi? 3 ga: $45=3\cdot15$ Demak, $360=2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot15$. Nihoyat $15=3\cdot5$, $360=2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot5$. Barcha hosil bo‘lgan ko‘paytuvchilar tub sonlar bo‘lgani uchun jarayon to‘xtaydi. ▲

Xuddi shu ishni ixtiyoriy son uchun amalga oshirish mumkin ekan. Umumiy holda *arifmetikaning asosiy teoremasi* deb nomlanadigan tasdiq o‘rinli:

Teorema. (Arifmetikaning asosiy teoremasi.)

1 dan farqli bo‘lgan har qanday natural son tub sonlar ko‘paytmasi ko‘rinishida ifodalanadi.

Agar natural son tub sonlar ko‘paytmasi ko‘rinishida ikki usulda ifodalansa, bunday ifodalanishlar faqat ko‘paytuvchilarning yozilish tartibi bilan farqlanadi.

△ a) Xuddi yuqoridagi 1-masaladek ish tutaylik. Agar berilgan son tub son bo‘lsa, tasdiq o‘rinli bo‘ladi. Agar berilgan son murakkab bo‘lsa, ta’rifga ko‘ra u ikkita (kichikroq) sonlar ko‘paytmasi ko‘rinishida ifodalanadi. Shu sonlardan biri (balki, ikkalasi ham) murakkab bo‘lsa, uni yana ikkita kichikroq sonlar ko‘paytmasi ko‘rinishida ifodalaymiz. Barcha hosil bo‘lgan sonlar natural bo‘lib, ular kamayib borgani tufayli, qaysidir qadamda jarayon to‘xtaydi, natijada tub sonlar hosil bo‘ladi.

b) Natural son tub sonlar ko‘paytmasi ko‘rinishida ikki usulda ifodalansin:

$$p_1p_2\ \dots p_n = q_1\ q_2\ \dots q_m.$$

Birinchi ifoda p_1 tub songa bo‘lingani uchun ikkinchi ifoda ham p_1 ga bo‘linadi. Tub ko‘paytuvchi haqidagi teoremaga ko‘ra q_1, q_2, …, q_m sonlardan biri p_1 ga bo‘linadi. Bu sonlarning barchasi tub bo‘lgani uchun bu son p_1 ga teng bo‘lishi shart: $q_s=p_1$ bo‘lsin. Ikkala ifodani ham $p_1=q_s$ ga bo‘lamiz va yuqoridagi mulohazalarni davom ettiramiz. Shunday qilib, bir necha qadamdan so‘ng 1=1 tenglikni hosil qilamiz. Shuning uchun bunday ikki xil ifodalanishlar faqat ko‘paytuvchilarning yozilish tartibi bilan farqlanadi. ▲

1 dan farqli bo‘lgan har qanday natural sonni tub sonlar ko‘paytmasi ko‘rinishida ifodalash uni *tub ko‘paytuvchilarga yoyish* deb ham yuritiladi.

Odatda, sonning tub ko‘paytuvchilarga yoyilmasi $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$ ko‘rinishda yoziladi, bu yerda $p_1 < p_2 < \dots < p_n$. Bunday yozuv sonning tub ko‘paytuvchilarga *kanonik yoyilmasi* deb nomlanadi.

Yuqorida 360 sonini $360 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$ ko‘rinishda tub ko‘paytuvchilarga yoygan edik. Uning kanonik yoyilmasi $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ ko‘rinishda bo‘ladi.

Kanonik yoyilma qator masalalarni yechishning samarali usuli ekan. Jumladan, bunday ko‘rinish berilgan sonning barcha ko‘paytuvchilarini topishga imkon beradi.

Misol uchun $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ yoyilmaga qarab, biz uning, masalan, $2^3 - 8$ ga, $2^2 \cdot 3 - 12$ ga, $2 \cdot 3^2 \cdot 5 - 90$ ga bo‘linishi (chunki bu sonlar kanonik yoyilmada uchraydi) hamda, masalan, 7 ga, $33 = 3 \cdot 11$ ga bo‘linmasligi (chunki 7 va 11 sonlar kanonik yoyilmaga kirmaydi) haqida xulosa chiqara olamiz.

Ravshanki, 1, 2, 2^2, 2^3, 2^4 va 2^5 sonlari 2^5 sonining barcha natural bo‘luvchilari bo‘ladi. Demak, 2^5 sonining barcha natural bo‘luvchilari soni $6 - 1 + 5$ bo‘ladi.

Xuddi shunday, p^{α} sonining barcha natural bo‘luvchilari soni $(1+\alpha)$ ga teng bo‘ladi (nega?).

Umumiy holda, $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$ sonning barcha natural bo‘luvchilari soni

$$(1+\alpha_1)(1+\alpha_1)\dots(1+\alpha_n)$$

formula bo‘yicha hisoblanadi.

Misol. 360 sonining barcha natural bo‘luvchilari sonini toping.

△ $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ bo‘lgani uchun yuqoridagi formulaga ko‘ra, barcha natural bo‘luvchilar soni $(1+3)(1+2)(1+1) = 24$ ekan. ▲

2-masala. Hech biri 10 ga bo‘linmaydigan ikkita son ko‘paytmasi 1000 ga teng. Ularning yig‘indisini toping.

△ $1000 = 10^3 = (5 \cdot 2)^3 = 5^3 \cdot 2^3$ bo‘lgani uchun 1000 ning tub sonlarga yoyilmasida faqat 2 va 5 sonlari uchraydi. Ammo 2 va 5 sonlarning ikkalasi ham bir paytda ikkala sonda uchrashi mumkin emas. Demak, shu sonlardan biri 5^3, ikkinchisi esa 2^3 ga teng ekan. Bu sonlar yig‘indisi esa $5^3 + 2^3 = 125 + 8 = 133$ bo‘ladi. ▲

3-masala. a) 1980; b) 1990; d) 2000; sonlarining bir xonali tub sonlarga yoyilmasi mavjudmi?

△ 1980 sonini tub sonlarga yoyganimizda ikki xonali 11 tub son, 1990 sonini tub sonlarga yoyganimizda uch xonali 199 tub son uchragani bois, na 1980, na 1990 sonlarini so'ralgan ko'rinishga yoyish mumkin emas. 2000 sonining kanonik yoyilmasini yozaylik: $2000-2^4 5^3$.

Javob: a) mavjud emas; b) mavjud emas; d) mavjud. ▲

4-masala. Son uning raqamlari yig'indisiga ko'paytirilganda 2008 soni hosil bo'ldi. Bu sonni toping.

△ Izlanayotgan son $2008 = 2^3 \cdot 251$ sonining bo'luvchisi bo'ladi. 2008 sonining barcha bo'luvchilarini yozaylik: 1, 2, 4, 8, 251, 502, 1004, 2008.

Har birining raqamlari yig'indisini hisoblab, masala sharti faqat 251 soni uchun bajarilishiga amin bo'lamiz ($2008 = 251 \cdot (2+5+1)$).

Javob: 251. ▲

5-masala. Rebusni yeching: $AX \times YX - 2001$.

△ $2001 = 3 \cdot 23 \cdot 29$. Shuning uchun 2001 soni ikkita ikki xonali soning ko'paytmasi shaklida quyidagicha ifodalanishi mumkin: $69 \cdot 29$ yoki $23 \cdot 87$. Shulardan birinchisi rebusga mos keladi.

Javob: $29 \cdot 69 - 69 \cdot 29 - 2001$. ▲

6-masala. Chorak oxirida Valijon matematika fanidan olgan baholarini bir qatorga yozib, ayrimlari orasiga ko'paytirish amalini qo'yib chiqdi. Natijada 2007 son hosil bo'ldi. Valijonning chorak bahosi qanday bo'ladi? (Matematika o'qituvchisi „1“ baho qo'ymas ekan.)

△ $2007 = 3 \cdot 3 \cdot 223 = 9 \cdot 223 = 3 \cdot 669$. „9“ va „6“ baholar mavjud emas, demak, faqat birinchi hol ($3 \cdot 3 \cdot 223$) bo'lishi mumkin. „3“ baholar soni (3 ta) „2“ baholar sonidan (2 ta) ko'proq bo'lgani uchun Valijonning chorak bahosi „3“ bo'ladi.

Javob: „3“ baho. ▲

7-masala. 2, 5, 9 va 11 sonlariga bo'linadigan va raqamlari turli bo'lgan eng katta to'rt xonali sonni toping.

△ 2, 5, 9 va 11 sonlari uchun umumiy bo'luvchi mavjud emas. Shuning uchun izlanayotgan son ularning har biriga, ya'ni $2 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 11 = 990$ soniga bo'linadi. 990 soniga bo'linadigan to'rt xonali sonlarni yozaylik: 1980, 2970, 3960, 4950, 5940, 6930, 7920, 8910, 9900.

Shulardan raqamlari turli bo‘lgan eng katta son 8910 ekanligini topamiz.

Javob: 8910. ▲

8-masala. $n!$ soni 990 ga bo‘linadi. n soni eng kamida nechaga teng bo‘lishi mumkin.

△ 990 sonining tub ko‘paytuvchilarga yoyilmasiga 11 tub soni kiradi. Shuning uchun n soni 11 dan kichik bo‘la olmaydi. Boshqa tomondan $n=11$ soni masala shartini qanoatlantiradi (tekshiring).

Javob: $n-11$. ▲

9-masala. 50! soni qanday eng kichik natural songa bo‘linmaydi?

△ 53 tub soni 50! sonining kanonik yoyilmasiga kirmaydi. Shuning uchun 50! soni 53 ga bo‘linmaydi. Boshqa tomondan 50! soni $3\cdot17=51$ va $4\cdot13=52$ ga bo‘linadi.

Javob: 53. ▲

Izoh. Ravshanki, umumiy holda $n!$ soni p tub soniga bo‘linishi uchun $n>p$ bo‘lishi zarur.

10-masala. 100! soni nechta nol bilan tugaydi?

△ Oxiridagi 0 raqamlar sonini topish uchun 100! sonining tub ko‘paytuvchilarga yoyilmasida nechta 2 va 5 tub sonlari juftliklari borligini sanash yetarli (chunki ularning ko‘paytmasi bitta 0 raqamni beradi). Ravshanki, bu yoyilmada 2 lar soni 5 lar sonidan ko‘p. Shuning uchun 100! sonining kanonik yoyilmasida 5 ning darajasini topish yetarli bo‘ladi.

1 dan 100 gacha sonlar ichida 20 tasi yoyilmadagi 5 larni hosil qiladi $(100:5=20)$, bunda $25=25\cdot1$, $50=25\cdot2$, $75=25\cdot3$ va $100=25\cdot4$ sonlar ikkitadan 5 ni hosil qiladi. $100:25=4$ bo‘lgani uchun izlanayotgan daraja $20+4=24$ bo‘ladi.

Javob: 24 ta nol. ▲

Mashqlar

1. 111, 1111, 11111, 111111, 1111111 sonlarini tub ko‘paytuvchilarga yoying.

2. Rebusni yeching: BAO×BA×B=2002.

3. MA·TE·MA·TI·KA=2016000 rebusning biror yechimini toping.

4. Sonning kanonik yoyilmasini toping:
a) 20; b) 680; d) 946; e) 2019; f) 3125; g) 4500;
h) 13860; i) $63\cdot10^{11}\cdot15^{27}$; j) $20^3\cdot250^{13}\cdot75^{28}$; k) 5!;
l) 10! m) 37!; n) 41!

5. Sonning natural bo'luvchilari sonini toping:
a) 1; b) 12; d) 45; e) 47; f) 80; g) 120;
h) 3^{10}; i) $2^{13}\cdot 5$; j) $2^{99}\cdot 3^{99}$; k) $2^5\cdot 3^9\cdot 5^6$; l) $2^5\cdot 6^7\cdot 12^{11}$;
m) 4^{17}; n) 1001^{99}; o) 120^{11}.

6. Aynan beshta natural bo'luvchiga ega bo'lgan qandaydir to'rt xonali sonni toping.

7. Natural son 2001 ta natural bo'luvchiga ega bo'lsa, shu son to'la kvadrat ekanligini isbotlang. Natijani umumiylashtirib ko'ringchi!

8. 2019! soni 3^{77} soniga bo'linadimi? 3^{80} ga-chi? Berilgan sonning kanonik yoyilmasidagi 3 ning darajasini toping.

9. 2019! soni nechta nol bilan tugaydi?

10. Qanday n uchun $5^n\cdot 2019!$ sonining oxirida eng ko'p nol bo'ladi?

11. Yarmi – biror sonning kvadrati, uchdan biri – kubi, beshdan biri esa – biror sonning beshinchi darajasi bo'lgan eng kichik natural sonni toping.

EKUB uchun Yevklid algoritmi

a va b natural sonlar berilgan bo'lsin, bu yerda $a>b$.

Ravshanki, a va b sonlarning har qanday bo'luvchisi $a-b$ ayirmani ham bo'ladi. Bundan tashqari, b va $a-b$ sonlarning har qanday bo'luvchisi $a=b+(a-b)$ sonni ham bo'ladi.

Shuning uchun

$$\boxed{\text{EKUB}(a,\ b)\ =\ \text{EKUB}(a-b,\ b)} \qquad (1)$$

tenglik o'rinli.

Mazkur tenglikni quyidagicha izohlash mumkin: a va b sonlar juftligining umumiy bo'luvchilari to'plami $a-b$ va b sonlar juftligining umumiy bo'luvchilari to'plami bilan bir xil bo'lgani sababli, shu umumiy bo'luvchilaridan eng kattalari ham bir xil bo'ladi.

Sonlar nazariyasida eng mashhur algoritm hisoblangan Yevklid algoritmi (1) tenglikka asoslangan bo'lib, u quyidagicha ifodalanadi:

Har qadamda a va b sonlar juftligidan (bu yerda $a>b$) $a-b$ va b sonlar juftligiga o'tiladi, ya'ni kattaroq sondan kichigi ayiriladi.

Jarayonni davom ettiramiz. Barcha hosil bo‘lgan sonlar natural sonlar bo‘lib, ular kamayib boraverganidan bu jarayon qachondir to‘xtaydi. Bu onda juftlikdagi sonlar bir xil bo‘ladi. Bunday vaziyatda EKUBni topish qiyinchilikni tug‘dirmaydi.

1-masala. EKUB(32, 12) ni Yevklid algoritmi yordamida toping.
△ EKUB(32, 12) = EKUB(32 – 12, 12) = EKUB(20, 12) = EKUB(20 – 12, 12) = EKUB(8, 12) = EKUB(8, 12 – 8) = EKUB(8, 4) = EKUB(8 – 4, 4) = EKUB(4, 4) = 4. ▲

2-masala. EKUB(451, 287) ni Yevklid algoritmi yordamida toping.
△ EKUB(451, 287) = EKUB(287, 164) = EKUB(164, 123) = EKUB(123, 41) = EKUB(82, 41) = EKUB(41, 41) = 41. ▲

EKUB ni hisoblash uchun keltirilgan usulni ratsional (qulay) usul deb bo‘lmaydi. Masalan, EKUB(100, 2) ni topish 50 marta ayirish amalini bajarishni talab qiladi.

Eng katta umumiy bo‘luvchini topishni tezlashtirish uchun quyidagi g‘oya yordam beradi: kattaroq sondan kichigini bir necha marta ayiraylik (masalan, $a-b$, $a-2b$, $a-3b$). Qandaydir qadamda ayirma manfiy bo‘lib qolsa, to‘xtaymiz. Masalan, $a-4b<b$ bo‘lsin, bu holda $a=4b+(a-4b)$ tenglik $a-4b$ son a ni b ga bo‘lganda qoldiq ekanligini bildiradi.

Shuning uchun $a-b$, $a-2b$, $a-3b$ sonlarni yozmasdan, a ning o‘rniga uni b ga bo‘lganda chiqqan qoldiq yoziladi.

Demak, hisob-kitoblarni tezlashtirish uchun ayirish amali o‘rniga qoldiqni topish maqsadga muvofiq. Ya’ni bunday tasdiqdan foydalaniladi:

! $a-bq+r$ bo‘lsin, u holda
$$\text{EKUB}(a,\ b)-\text{EKUB}(b,\ r) \tag{1}$$
tenglik o‘rinli.

Misollar ko‘raylik.

3-masala. 7 462 va 6 279 sonlarning eng katta umumiy bo‘luvchisini toping.

EKUB(7462, 6279) –	$7462-6279\cdot1+1183$
=EKUB(6279, 1183)=	$6279=1183\cdot5+364$
=EKUB(1183, 364)=	$1183=364\cdot3+91$
=EKUB(364, 91)=	$364=91\cdot4$
=91.	

Ko'rinib turibdiki, Yevklid algoritmini qo'llaganimizda 7 462 va 6 279 sonlarining kanonik yoyilmalaridan foydalanmadik. Bu misolda yoyilmani topish ham murakkabroq (chunki berilgan sonlar 7, 13, 23, 41 kabi tub ko'paytuvchilarga ega). ▲

Masalalarni yechganimizda, har gal qoldiqni yozmasa ham bo'ladi.

4-masala. 1 381 955 va 690 713 sonlarining eng katta umumiy bo'luvchisini toping.

$$\triangle\ \text{EKUB}(1\,381\,955,\ 690\,713)=\text{EKUB}(690\,713,\ 529)=$$
$$\text{EKUB}(529,368)=\text{EKUB}(368,\ 161)=\text{EKUB}(161,46)=$$
$$=\text{EKUB}(46,\ 23)=\text{EKUB}=23.\ ▲$$

Endi murakkabroq masalalarni ko'raylik.

5-masala. Ixtiyoriy natural n soni uchun $2n+13$ va $n+7$ sonlarining eng katta umumiy bo'luvchisini toping.

$\triangle$ $\text{EKUB}(2n+13,\ n+7)=\text{EKUB}(n+7,\ n+6)=\text{EKUB}(n+6,\ 1)=1.$ ▲

6-masala. Ixtiyoriy natural n soni uchun $\frac{12n+1}{30n+2}$ kasr qisqarmas kasr ekanligini isbotlang.

$\triangle$ $\text{EKUB}(30n+2,\ 12n+1)-\text{EKUB}(12n+1,\ 6n)-\text{EKUB}(6n,\ 1)-1.$ ▲

7-masala. $\frac{11m+3}{13m+4}$ kasr qisqaradigan kasr bo'ladigan barcha natural m larni toping.

$\triangle$ $\text{EKUB}(13m+4,\ 11m+3)-\text{EKUB}(11m+3,\ 2m+1)-\text{EKUB}(2m+1,\ m-2)-\text{EKUB}(m-2,\ 5)$

$\text{EKUB}(m-2,\ 5)\neq 1$ bo'lishi uchun $m-2$ son 5 ga bo'linishi kerak. Demak, $m=5k+2$, bu yerda k – butun son.

Javob: $m=5k+2$, bu yerda k – butun son. ▲

8-masala. $m\neq n$ bo'lsa, $\text{EKUB}\ (2^m-1,\ 2^n-1)=2^{\text{EKUB}(m,\ n)}-1$ ekanligini isbotlang.

$\triangle$ $m\geq n$ bo'lsin. Bu holda

$$(2^m-1,\ 2^n-1)=(2^m-2^n,\ 2^n-1)=(2^{m-n}-1,\ 2^n-1).$$

Shuning uchun 2^m-1 va 2^n-1 sonlar uchun Yevklid algoritmi m va n darajalar uchun Yevklid algoritmiga „parallel" ravishda ketyapti. Oxirgi algoritm $\text{EKUB}(m,\ n)$ da to'xtaydi, demak, birinchi algoritm $2^{\text{EKUB}(m,\ n)}-1$ sonini hosil qiladi.

Mashqlar

12. Yevklid algoritmi yordamida quyidagi sonlarning EKUBini toping:

a) 33 va 44; b) 198 va 126; d) 11475 va 19125;
e) 481 va 555; f) 1404 va 936; g) 48 va 36;
h) 816 va 918; i) 104 va 168; j) 2835 va 7425.

13. Ixtiyoriy natural n son uchun quyidagi kasrlar qisqarmas kasrlar ekanligini isbotlang:

a) $\frac{2n^2-1}{n+1}$; b) $\frac{n^2-n+1}{n^2+1}$.

14. $m \neq n$ va $a>1$ bo‘lsa, EKUB $(a^m-1,\ a^n-1)=a^{\text{EKUB}(m,\ n)}-1$ ekanligini isbotlang.

15. $\underbrace{1...1}_{m}$, $\underbrace{1...1}_{n}$ ko‘rinishdagi sonlarning EKUBini toping.

Bir nechta sonlar uchun EKUB va EKUK

EKUB va EKUK tushunchalarini bir nechta sonlar uchun ham kiritish mumkin.

Berilgan sonlarning har biri bo‘linadigan eng katta son shu sonlarning *eng katta umumiy bo‘luvchisi* deyiladi.

Shunday qilib, bir nechta sonning eng katta umumiy bo‘luvchisini topish sonlarni umumiy bo‘luvchilarini topib, shulardan eng kattasini tanlash yo‘li bilan aniqlanadi.

1-usul. Bir nechta sonning eng katta umumiy bo‘luvchisini topish uchun berilgan sonlarning kanonik yoyilmasidan foydalaniladi.

Masalan, EKUB(56, 84, 96) ni hisoblaylik.

$56-2\cdot 2\cdot 2\cdot 7-2^3\cdot 7$;

$96-2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3-2^5\cdot 3$;

$84-2\cdot 2\cdot 3\cdot 7-2^2\cdot 3\cdot 7$.

Bu holda EKUB(56, 84, 96) -2^2-4

Barcha hisob-kitoblarni jadval ko‘rinishida yozish maqsadga muvofiq:

56=	$2\times2\times2\times7=$	2^3	$\times$	1	$\times$	7
96–	$2\times2\times2\times2\times2\times3=$	2^5	$\times$	3	$\times$	1
84–	$2\times2\times3\times7=$	2^2	$\times$	3	$\times$	7
		↓		↓		↓
EKUB–		2^2	$\times$	1	$\times$	1

1-masala. 60, 180 va 210 sonlarining eng katta umumiy bo‘luvchisini toping.

60	$2\times2\times3\times5=$	2^2	$\times$	3	$\times$	5	$\times$	1
180=	$2\times2\times3\times3\times5=$	2^2	$\times$	3^2	$\times$	5	$\times$	1
210–	$2\times3\times5\times7=$	2	$\times$	3	$\times$	5	$\times$	7
		$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$
EKUB=		2	$\times$	3	$\times$	5	$\times$	1

Natijada EKUB(60, 180, 210)=30 ni hosil qilamiz.

Ravshanki, agar berilgan sonlar orasida o‘zaro tub sonlar juftligi topilsa, u holda berilgan sonlarning EKUBi 1 ga tengligi ravshan.

Shuning uchun ham, masalan, 3, 25412, 3251, 7841, 25654, 7 sonlarining EKUBini hisoblamasdan u 1 ga teng ekanligini bevosita aytishimiz mumkin. Bu tasdiq 3 va 7 sonlari o‘zaro tub bo‘lganidan kelib chiqadi.

Biz quyidagi usuldan ham foydalanishni tavsiya etamiz. Bunda kanonik yoyilmadan foydalanilmaydi.

2	**60**	**180**	**210**
3	30	90	105
5	10	30	35
$\downarrow$	2	6	7 $\leftarrow$

2, 6, 7 sonlarining umumiy bo‘luvchisi 1, ya’ni bu sonlar o‘zaro tub. Shu yerda to‘xtang!

EKUB – 2×3×5 – 30.

Natijada EKUB(60, 180, 210) – 30 ni hosil qilamiz.

! Berilgan sonlarning har biriga bo‘linadigan eng kichik son shu sonlarning eng kichik umumiy karralisi (EKUK) deyiladi.

Shunday qilib, eng kichik umumiy karralini topish sonlarning umumiy karralilarini topib, shulardan eng kichigini tanlash yo‘li bilan aniqlanadi.

Ammo biz quyidagi ikki usuldan foydalanishni tavsiya etamiz.

2-masala. 18, 24 va 36 sonlarining eng kichik karralisini toping.

18–	$2\times3\times3=$	2	$\times$	3
24–	$2\times2\times2\times3=$	2^3	$\times$	3
36–	$2\times2\times3\times3=$	2^2	$\times$	3^2
		$\downarrow$		$\downarrow$
EKUK=		2^3	$\times$	3^2

Har bir ustundagi sonlardan eng kattasini olamiz va ularni ko‘paytirib chiqamiz

Natijada EKUK(18, 24, 36) – 72 ni hosil qilamiz.

Boshqa usulda topaylik.

2-usul.

2	18	24	36
3	9	12	18
2	3	4	6
3	↓		
	3	2	3
↓ →	1	2	1

4 va 6 sonlarining umumiy bo‘luvchisi 2ga ega. Ularni 2 ga bo‘lamiz va keyingi qatorga yozamiz. 3 ning tagiga 3 ni yozamiz. Hosil bo‘lgan qatordagi ikkita 3 ni 3 ga bo‘lamiz va natijalarni keyingi qatorga yozamiz. 2 ning tagiga esa 2 ni yozamiz. Hosil bo‘lgan sonlar juftliklari o‘zaro tub bo‘lsa, hisoblashlarni to‘xtatamiz.

EKUK $= 2 \times 3 \times 2 \times 3 \times 1 \times 2 \times 1 = 72$.

3-masala. Alisher, Barno va Bobur uchalasi kutubxonada uchrashib suhbatlashishdi. Suhbat jarayonida Alisher maktab kutubxonasiga har uch kunda, Barno – har 5 kunda, Bobur esa – har 7 kunda borishi aniqlandi. Keyingi safar ular qachon uchrashadilar?

△ Bugundan boshlab kunlarni nomerlab, sanaymiz. Alisher borgan kunlari nomerlari 3 ga karrali: 3, 6, 9 va h.k., Barnoniki 5 ga: 5, 10, 15 va h.k., Boburniki esa 7 ga: 7,14,21 va h.k. Demak, ularning uchrashish kunlari nomerlari 105 ga bo‘linishi kerak: 105, 210, 315 va h.k. Demak, ular keyingi safar 105-kuni uchrashadilar (ya’ni uchrashish kunigacha ular 3 oydan ko‘proq kutubxonaga borishlari kerak).

Javob: EKUB (3, 5, 7) = 105. ▲

4-masala. 8-„A“ sinfda olingan nazorat ishi tekshirilganda quyidagi natijalar qayd etildi. O‘quvchilarning yettidan bir qismi „5“ baho, uchdan biri – „4“ baho, yarmi esa „3“ baho olishdi. Qolgan ishlar qoniqarli baho olmadi. Sinfdagi o‘quvchilar soni 50 nafardan kam ekanligi ma’lum bo‘lsa, qoniqarsiz baho olgan o‘quvchilar nechta?

△ O‘quvchilar sonini topaylik. Masala shartiga ko‘ra, bu son 50 dan kichik natural son bo‘lib, bir vaqtda 7, 3 va 2 ga bo‘linadi.

EKUK(2, 3, 7) = 42 bo‘lgani uchun sinfda 42 nafar o‘quvchi borligini aniqlaymiz. Shulardan 6 nafari (42:7 = 6) – „5“ baho; 14 nafari (42:3 = 14) – „4“ baho; 21 nafari esa (42:21 = 2) – „3“ baho olishdi. Qoniqarli baho olganlar soni 6 + 14 + 21 + 41 nafar o‘quvchini tashkil etadi. Demak, qoniqarsiz baholanganlar soni 42 – 41 = 1 ekan.

Javob: bir nafar. ▲

5-masala. O‘rta arifmetigi eng katta umumiy bo‘luvchisidan 6 marta katta bo‘lgan o‘zaro teng bo‘lmagan 10 ta natural son mavjudmi? 5 marta-chi?

△ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 15 sonlarini qaraylik. Ularning o‘rta arifmetigi 6 ga, EKUBi esa 1 ga teng.

Endi o‘rta arifmetigi eng katta umumiy bo‘luvchisidan 5 marta katta bo‘lgan $a_1 < a_2 < \ldots < a_{10}$ natural son mavjud emasligini ko‘rsatamiz.

Ularning EKUBi d bo‘lsin. Bu holda $a_1 \geq d$, $a_2 \geq 2d$, ..., $a_{10} \geq 10d$. Demak, $a_1 + a_2 + \ldots + a_{10} \geq d + 2d + \ldots + 10d = 55$, ya’ni sonlarning o‘rta arifmetigi $5{,}5d$ dan kichik emas. ▲

6-masala. 10 ta natural sonlar yig‘indisi 1001 ga teng. Shu sonlarning eng katta umumiy bo‘luvchisi ko‘pi bilan nechaga teng bo‘lishi mumkin?

△ Dastlab shu sonlarning EKUBini baholaymiz, ya’ni EKUB 91 dan katta bo‘lgan qiymatni qabul qila olmasligini isbotlaymiz.

10 ta sondan har biri EKUBga karrali son bo‘lgani uchun, $1001 - 7 \cdot 11 \cdot 13$ soni EKUBga bo‘linadi. Boshqa tarafdan, 10 ta sondan eng kichigi $1001 : 10$ dan, ya’ni 101 dan katta bo‘la olmaydi. Bu son qolgan sonlar singari EKUBga karrali son bo‘lgani uchun, EKUB ham 101 dan katta bo‘la olmaydi. Ko‘rinib turibdiki, 1001 ning bo‘luvchilari orasida 91 soni bu shartni qanoatlantiradigan eng katta sondir.

Endi EKUB haqiqatan ham 91 ga teng bo‘lishi mumkinligini ko‘rsatadigan misol keltiramiz. Buning uchun yig‘indisi 91 ga teng bo‘lgan 9 ta son va 182 ga teng bo‘lgan bitta sonni qaraylik. Ularning yig‘indisi 1001 ga teng.

Javob: 91. ▲

Mashqlar

16. Quyidagi sonlarning EKUBini toping.

1) 385 va 490; 2) 3420 va 3800;
3) 4620 va 5460; 4) 475; 570 va 741;
5) 980; 1176 va 1225; 6) 112; 124; 420;
7) 250; 320; 810; 490; 8) 660; 1080; 1200; 1500.

17. Quyidagi sonlarning EKUKini toping.

1) 2; 3; 5; 2) 2; 7; 9; 3) 3; 8; 25;
4) 2; 4; 8; 16; 5) 10; 40; 50; 80; 6) 5; 7; 10; 35;
7) 15; 30; 45; 180; 8) 11; 45; 55; 110; 9) 27; 18; 60; 90.

18. Yig'indisi eng kichik umumiy karralisiga teng bo'lgan 100 ta natural son mavjudmi? (Sonlar orasida o'zaro teng bo'ladiganlari ham bor bo'lishi mumkin.)

19. Ixtiyoriy ikkitasining ko'paytmasi ularning yig'indisiga bo'linadigan 6 ta turli natural sonlarni toping.

20. Dastlabki uchtasining EKUKi keyingi uchtasining EKUKidan katta bo'lgan ketma-ket kelgan natural sonlar mavjudmi?

21. $a_1 < a_2 < \ldots < a_{10}$ natural sonlarning eng kichik umumiy karralisi $10a_1$ dan kichik emasligini isbotlang.

22. EKUB(a, b, c)=EKUB(a, EKUB (b, c)) va EKUK(a, b, c)= =EKUK(a, EKUK (b, c)) tengliklarni isbotlang.

Umumiy holda EKUB $(a_1, a_2, \ldots, a_n) =$ EKUB $(a_1, \text{EKUB}(a_2, \ldots a_n))$ va EKUK $(a_1, a_2, \ldots, a_n) =$ EKUK $(a_1, \text{EKUK}(a_2, \ldots, a_n))$; tengliklar o'rinli bo'ladimi?

23. $a_1, a_2, \ldots, a_{49}$ natural sonlar uchun $a_1 + a_2 + \ldots + a_{49} = 540$ bo'lsin. Shu sonlarning eng katta umumiy bo'luvchisi ko'pi bilan nechaga teng bo'lishi mumkin?

EKUB va EKUKlarning ko'paytmasi haqida teorema

1-masala. $a=132$, $b=90$ sonlarning kanonik yoyilmalaridan foydalanib, EKUB $(a, b)\cdot$EKUK (a, b) ko'paytmani topaylik va ab ko'paytma bilan solishtiraylik.

△ $a=132=2^2\cdot3\cdot11$ va $b=90=2\cdot3^2\cdot5$ bo'lgani uchun EKUB $(a, b)=$ $=2\cdot3=6$, $\text{EKUK}(a,b)=2^2\cdot3^2\cdot5\cdot11=1980$. Demak,

$$\text{EKUB }(a, b)\cdot\text{EKUK }(a, b)-6\cdot1980-11880.$$

Shu bilan birga $ab-132\cdot90-11880$.

Demak, berilgan a, b sonlar uchun EKUB$(a, b)\cdot$EKUK$(a, b)-$ $-ab$ tenglik o'rinli ekan. ▲

Yuqoridagi misolni tahlil qilaylik. EKUB ta'rifiga ko'ra ixtiyoriy a, b sonlarning ikkalasi ham EKUB(a, b) ga bo'linadi. Bizning holda:

$$a=132=2^2\cdot3\cdot11=(2\cdot3)(2\cdot11)=(2\cdot11)\cdot\text{EKUB}(a,b) \quad (1)$$

$$b=90=2\cdot3^2\cdot5=(2\cdot3)(3\cdot5)=(3\cdot5)\cdot\text{EKUB}(a,b) \quad (2)$$

Bundan tashqari, EKUK(a, b) son a, b sonlarning ikkalasiga ham bo'lingani uchun EKUK(a, b) son EKUB (a, b) ga bo'linadi.

Bizning holda

$$\text{EKUK}(a,\ b)=(2\cdot3)\cdot2\cdot3\cdot5\cdot11-(2\cdot3)\cdot(2\cdot3\cdot5\cdot11),\ \text{ya'ni}$$

$$\text{EKUK}(a,\ b)-(2\cdot3\cdot5\cdot11)\ \text{EKUB}\ (a,\ b) \qquad (3)$$

(3) ni (1) va (2) bilan solishtirsak, $\text{EKUB}\ (a,\ b)\cdot\text{EKUK}(a,\ b)=$ $=ab$ tenglik o'rinli ekanligini kuzatamiz.

Umumiy holda ham quyidagi teorema o'rinli:

Teorema. *Ixtiyoriy natural a, b sonlar uchun*

$$\text{EKUB}\ (a,\ b)\cdot\text{EKUK}(a,\ b)=ab \qquad (*)$$

tenglik o'rinli.

△ $d-\text{EKUB}\ (a,\ b)$ belgilashni kiritamiz. EKUB ta'rifiga ko'ra a, b sonlarning ikkalasi ham d songa bo'linadi, ya'ni:

$$a-md,\ \ b-nd,$$

bu yerda m, n – o'zaro tub sonlar. Bundan tashqari, EKUK ta'rifiga ko'ra

$$\text{EKUK}(a,\ b)=\text{EKUK}(md,\ nd)=mnd.$$

Demak,

$$\text{EKUB}(a,\ b)\cdot\text{EKUK}(a,\ b)=d\ (mnd).$$

Ko'paytuvchilarni guruhlab va yuqoridagi $a=md$, $b=nd$ tengliklardan foydalanib

$$\text{EKUB}\ (a,\ b)\cdot\text{EKUK}(a,\ b)-d(mnd)-(md)(nd)-ab$$

tenglikni hosil qilamiz. ▲

2- masala. Uchta a, b, c natural sonlar uchun

$$\text{EKUB}(a,\ b,\ c)\cdot\text{EKUK}(a,\ b,\ c)=abc$$

tenglik doimo o'rinli bo'ladimi?

△ 6, 10, 15 sonlarni qaraylik.

$$\text{EKUB}(6,\ 10,\ 15)\cdot\text{EKUK}(6,\ 10,\ 15)-1\cdot60<6\cdot10\cdot15$$

bo'lgani uchun

$$\text{EKUB}(a,\ b,\ c)\cdot\text{EKUK}(a,\ b,\ c)=abc$$

tenglik doimo o'rinli emas.

Javob: yo'q. ▲

Izoh. Uchta a, b, c natural sonlar uchun

$$\text{EKUB}(a,\ b,\ c)\cdot\text{EKUK}(a,\ b,\ c)\ \le\ abc$$

o'rinli ekan.

3-masala.

$$\text{EKUK}\left(a,b\right)-\text{EKUB}(a,b)=\frac{ab}{5}$$

tenglikni qanoatlantiradigan barcha natural a, b sonlarni toping.

△ EKUB (a, b) belgilashni kiritamiz.

Teoremaga ko‘ra $d \cdot \text{EKUK}(a, b) - ab$. Bundan tashqari, EKUK $(a, b) - kd$ bo‘lgani uchun (bu yerda k – natural son) $5(kd - d) = kd^2$ tenglik o‘rinli. Soddalashtiramiz:

$$5k - 5 - kd;$$
$$5k - kd - 5;$$
$$k(5 - d) - 5,$$

ya’ni k va $(5 - d)$ sonlar 5 ning bo‘luvchilari bo‘ladi.

Ularning barchasini tekshirib chiqsak, $k = 5$ va $d = 4$ tengliklarni hosil qilamiz. Bundan

$$\begin{cases} \text{EKUB}(a, b) = 4 \\ \text{EKUK}(a, b) = 20 \\ ab = 80 \end{cases}$$

munosabatlarni hosil qilamiz.

Sonlardan ikkalasi 4 ga karrali bo‘lgani uchun, ular 4 dan kichik emas. Bundan tashqari, ularning ko‘paytmasi tub son 5 ga karrali bo‘lgani uchun tub bo‘luvchi haqidagi teoremaga ko‘ra, ulardan kamida biri 5 ga bo‘linadi. Demak, bu son 20 ga teng bo‘lib, ikkinchisi esa 4 ga teng bo‘ladi.

Javob: (4, 20), (20, 4). ▲

4-masala.

a) $\begin{cases} \text{EKUB}(a, b) = 5, \\ \text{EKUK}(a, b) = 10; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \text{EKUB}(a, b) = 1, \\ \text{EKUK}(a, b) = 4; \end{cases}$ d) $\begin{cases} \text{EKUB}(a, b) = 5, \\ \text{EKUK}(a, b) = 31. \end{cases}$

sistemani qanoatlantiradigan barcha natural a, b sonlarni toping.

△ a) a, b sonlarning ikkalasi ham 5 soniga karrali hamda 10 soni ularning ikkalasiga ham bo‘linadi.

Bundan tashqari, a, b sonlar o‘zaro teng emas. Haqiqatan ham, $a - b$ bo‘lsin. * ga ko‘ra

$$\text{EKUB}(a, b)\ \text{EKUK}(a, b) - 50 - ab^2.$$

Ravshanki, bunday $a = b$ sonlar yo‘q.

Demak, a, b sonlardan biri 5 ga, ikkinchisi esa 10 ga teng.

b) Yuqoridagi teoremaga ko‘ra

$$ab = \text{EKUB}\ (a, b)\ \text{EKUK}(a, b) = 4$$

bo‘lib, ular 4 sonini bo‘ladi. 4 ni ko‘paytuvchilarga quyidagicha yoya olamiz: $4 = 1 \cdot 4 = 2 \cdot 2$.

EKUB$(a,\ b)-1$ bo‘lgani uchun $a,\ b$ sonlardan biri 1 ga, ikkinchisi esa 4 ga teng.

d) EKUK$(a,\ b)$ soni EKUB$(a,\ b)$ ga bo‘linisi kerak.

Ammo 31 soni 5 ga bo‘linmaydi. Demak, berilgan sistema yechimga ega emas.

Javob: a) (5, 10), (10, 5); b) (1, 4), (4, 1); d) mavjud emas. ▲

Mashqlar

24. Qanday natural $a,\ b$ sonlar uchun EKUK$(a,\ b)-ab$ tenglik o‘rinli bo‘ladi?

25. a) EKUB $(a,\ b)-7,\ a\cdot b-1470$;
b) EKUK $(a,\ b)-105,\ a\cdot b-525$;
d) EKUB $(a,\ b)-3,\ a:b-17:14$;
e) EKUK $(a,\ b)-180,\ a:b-4:5$;
f) EKUB $(a,\ b)-5$, EKUK $(a,\ b)-105$
bo‘lsa, natural $a,\ b$ sonlarni toping.

26. EKUB$(a,\ b)\cdot$EKUK$(a,\ b)-1456$ ekanligi ma’lum. Agar b son a sondan 30 ga kichik bo‘lsa, b ni toping.

27. a) $\begin{cases}\text{EKUB}(a,b)=5,\\ \text{EKUK}(a,b)=30;\end{cases}$ b) $\begin{cases}\text{EKUB}(a,b)=1,\\ \text{EKUK}(a,b)=30;\end{cases}$ d) $\begin{cases}\text{EKUB}(a,b)=3,\\ \text{EKUK}(a,b)=71\end{cases}$

sistemani qanoatlantiradigan barcha natural $a,\ b$ sonlarni toping.

28. Quyidagi xossalar o‘rinli ekanligini isbotlang:
EKUB(ac,bc)$=c$EKUB$(a,\ b)$;
EKUK(ac,bc)$=c$EKUK$(a,\ b)$.

29. m va n natural sonlar EKUK$(m,\ n)=$EKUB $(m,\ n)=m=n$ tenglikni qanoatlantirsa, m va n sonlardan biri ikkinchisiga bo‘linishini isbotlang.

30. Ixtiyoriy natural $a,\ b,\ c$ sonlar uchun

$$\text{EKUB}(a,\ b,\ c)\ \text{EKUK}(ab,\ ac,\ bc)-abc,$$
$$\text{EKUK}(a,\ b,\ c)\ \text{EKUB}(ab,\ ac,\ bc)-abc$$

tengliklarni isbotlang.

V BOB 8-SINF „ALGEBRA" KURSINI TAKRORLASH UCHUN MASHQLAR

1. Hisoblang:

1) $\frac{27}{32}\cdot\frac{8}{162}\cdot\frac{72}{69}$; 2) $\frac{38}{147}\cdot\frac{91}{152}:\frac{65}{264}$;

3) $\left(\frac{5}{8}+\frac{7}{12}\right)\cdot\left(3\frac{23}{58}-2\frac{9}{58}\right)$; 4) $\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{9}\right)\cdot\left(2\frac{23}{56}-3\frac{15}{56}\right)$;

5) $34{,}17:1{,}7+(2\frac{3}{4}+0{,}15):\frac{4}{5}-23\frac{3}{8}$; 6) $5{,}86-3\frac{5}{6}\cdot\frac{15}{23}+\frac{15}{28}:4\frac{2}{7}$.

2. Ikki sondan biri a ga teng, ikkinchisi undan 7 ta ortiq. Shu sonlar ko'paytmasining ikkilanganini toping. Shu ko'paytmaning qiymatini $a=\frac{1}{2}$; 2 bo'lganda hisoblang.

3. Ikki sonning yig'indisi 30 ga teng. Sonlardan biri a. Shu sonlarning ikkilangan ko'paytmasini yozing. Shu ko'paytmaning qiymatini $a=-2$ bo'lganda hisoblang.

4. a ta yuzlik, b ta o'nlik va c ta birlikdan tuzilgan natural sonda nechta birlik borligini ko'rsatuvchi formula tuzing. Xuddi shu raqamlar yordamida, lekin teskari tartibda yozilgan sonda nechta birlik bor?

5. a kilogramm va c gramm necha grammni tashkil qiladi? Grammlar sonini x harfi bilan belgilab, javobni formula bilan yozing.

Amallarni bajaring **(6–9):**

6. 1) $\left(\frac{2n}{k+2n}-\frac{4n^2}{k^2+4nk+4n^2}\right):\left(\frac{2n}{k^2-4n^2}+\frac{1}{2n-k}\right)$;

2) $\left(\frac{2q}{2q+m}-\frac{4q^2}{4q^2+4mq+m^2}\right):\left(\frac{2q}{4q^2-m^2}+\frac{1}{m-2q}\right)$.

7. 1) $1+a-\frac{a-1}{a}+\frac{a-1}{2a}-\frac{3a}{2}$; 2) $\frac{m+1}{m^2+m+1}-\frac{2}{1-m}+\frac{3m^2+2m+4}{1-m^3}$;

3) $\frac{m+n}{3}-m+2n$; 4) $m+n-\frac{2m-n}{5}-\frac{m+n}{2}$.

8. 1) $\frac{a^3+2a^2}{a^2-1}\cdot\frac{(a+1)^3(a-1)}{a^2(a+2)}$; 2) $\frac{(a^2+ab)^2}{a^2-b^2}:\frac{(a+b)^2}{(ab-b^2)^2}$.

9. $\frac{x+3a}{x+a}-\frac{x}{x-a}+\frac{2a^2-ax+x^2}{a^2x^2}:\frac{x^2-a^2}{a^2x^2}$.

10. Agar $x>\frac{1}{2}$ va $y>4$ bo'lsa, u holda

1) $4x+3y>14$; 2) $2xy-3>1$; 3) $x^2y>1$; 4) $x^3+y^2>16$

ekanini isbotlang.

11. (Og'zaki.) Tengsizlikni qanoatlantiruvchi eng katta butun sonni toping:
1) $n\le-7$; 2) $n<-3,6$; 3) $n\le 4,8$; 4) $n\le-5,6$.

12. (Og'zaki.) Tengsizlikni qanoatlantiruvchi eng kichik butun sonni toping:
1) $n>-12$; 2) $n\ge-5,2$; 3) $n\ge8,1$; 4) $n\ge-8,1$.

13. Tengsizlikni yeching:
1) $x+4>3-2x$; 2) $5(y+2)\ge8-(2-3y)$;
3) $2(0,4+x)-2,8\ge2,3+3x$; 4) $7(x+5)+10>17$.

14. Agar
1) $0\le x\le 7,2$; 2) $-5\frac{1}{3}\le x\le0$; 3) $4<\frac{1}{3}x<5$;
4) $11<3x<13$; 5) $-3,1<x\le 4$; 6) $12<5x<21$
bo'lsa, x qanday butun qiymatlarni qabul qila oladi?

15. Tengsizliklar sistemasini yeching:

1) $\begin{cases}5x-2\ge6x-1,\\4-3x>2x-6;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}7(x+1)-2x>9-4x,\\3(5-2x)-1\ge4-5x.\end{cases}$

16. Tengsizliklar sistemasining yechimlari bo'lgan butun sonlarni toping:

1) $\begin{cases}\frac{2x-5}{4}-2\le\frac{3-x}{4},\\\frac{5x+1}{5}>\frac{4-x}{4};\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\frac{10x-1}{3}-\frac{2-5x}{4}<\frac{5-3x}{6},\\\frac{2x+1}{2}\ge\frac{3+7x}{4}-\frac{5+4x}{5}.\end{cases}$

17. Tenglamani yeching:

1) $|x-2|=3,4$; 2) $|3-x|=5,1$; 3) $|2x+1|=5$;
4) $|1-2x|=7$; 5) $|3x+2|=5$; 6) $|7x-3|=3$.

18. Tengsizlikni yeching:

1) $|x-2|\le 5,4$; 2) $|x-2| \ge 5,4$; 3) $|2-x|<5,4$;
4) $|3x+2|\ge 5$; 5) $|2x+3|<5$; 6) $|3x-2,8| \ge 3$.

19. Ildizdan chiqaring:

1) $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}}$; 2) $\sqrt{5\frac{4}{9}}$; 3) $\sqrt[3]{\frac{8b^6}{343a^9}}$, $a \ne 0$; 4) $\sqrt[4]{\frac{16x^8}{81y^4}}$, $y>0$.

20. Soddalashtiring:

1) $(3\sqrt{20}+7\sqrt{15}-\sqrt{5}):\sqrt{5}$; 2) $(\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{14}+\sqrt[3]{56}):\sqrt[3]{7}$;

3) $2\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{6}-3\sqrt{\frac{2}{3}}$; 4) $7\sqrt{1\frac{3}{4}}-\sqrt{7}+0,5\sqrt{343}$.

21. Ifodalarning qiymatlarini taqqoslang:

1) $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{-1/3}$ va $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{-1/2}$; 2) $(2\sqrt{0,5})^{0,3}$ va $(2\sqrt{0,5})^{0,37}$.

22. Ifodani soddalashtiring:

1) $\frac{\sqrt[6]{a\sqrt[3]{a^{-1}}}}{a^{-\frac{2}{9}}}$; 2) $\frac{\sqrt[4]{x^3\sqrt[3]{x}}}{x^{\frac{1}{3}}}$; 3) $(16a^{-4})^{-\frac{3}{4}}$; 4) $(27b^{-6})^{\frac{2}{3}}$.

23. Ko'paytuvchini ildiz belgisi ostidan chiqaring:

1) $\sqrt{9a^2b}$, bunda $a<0$; 2) $\sqrt{25a^2b^3}$, bunda $a>0, b>0$;

3) $\sqrt{8a^3b^5}$, bunda $a<0$, $b<0$; 4) $\sqrt{12a^3b^3}$, bunda $a<0$, $b<0$.

24. Ko'paytuvchini ildiz belgisi ostiga kiriting:

1) $x\sqrt{5}$, bunda $x \ge 0$; 2) $x\sqrt{3}$, bunda $x<0$;

3) $-a\sqrt{3}$, bunda $a \ge 0$; 4) $-a\sqrt{5}$, bunda $a<0$.

25. Hisoblang:

1) $\sqrt[3]{1000}\cdot(0{,}0001)^{0{,}25}+(0{,}027)^{\frac{1}{3}}\cdot 7{,}1^{0}-\left(\frac{10}{13}\right)^{-1}$;

2) $\left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}:\frac{1}{\sqrt{11\frac{1}{9}}}+(6{,}25)^{\frac{1}{2}}:(-4)^{-1}$.

26. Ifodaning qiymatini toping:

1) $\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}-\frac{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}{a-b}\right)\cdot\frac{a-2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b}{a}$, bunda $a=3, b=12$;

2) $\frac{m+2\sqrt{mn}+n}{n}\cdot\frac{\sqrt{mn}+n}{m-n}-\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}$, bunda $m=5, n=20$.

27. Tenglamani yeching:

1) $x^{\frac{1}{2}}=2$; 2) $x^{-\frac{1}{2}}=3$; 3) $x^{-3}=8$; 4) $x^{\frac{5}{2}}=0$; 5) $x^{-\frac{1}{3}}=27$.

28. $y=-\frac{25}{x}$ funksiyaning grafigiga:

1) $A(\sqrt{5};-5\sqrt{5})$; 2) $B(-5\sqrt{2};5\sqrt{2})$; 3) $C(0{,}1;\ 250)$

nuqta tegishli bo‘lish yoki bo‘lmasligini aniqlang.

29. Funksiyaning grafigini yasang:

1) $y=\frac{4}{x}$; 2) $y=-\frac{6}{x}$.

Funksiyaning qaysi oraliqlarda o‘sishi, kamayishini grafik bo‘yicha aniqlang; funksiyaning juft yoki toqligini aniqlang.

30. Ifodani soddalashtiring:

1) $\left(\frac{\sqrt{a}}{b+\sqrt{ab}}-\frac{\sqrt{a}}{b-\sqrt{ab}}\right)\cdot\frac{b-a}{2\sqrt{ab}}$; 2) $\left(\frac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{a-b}-\frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}\right)\cdot\frac{a-b}{\sqrt{ab}}$.

Ifodani soddalashtiring (**31 – 32**):

31. 1) $\sqrt{5+\sqrt{21}}$; 2) $\sqrt{4+\sqrt{7}}$; 3) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$; 4) $\sqrt{8-2\sqrt{15}}$.

32. 1) $\frac{1}{\sqrt{5}}\left[4(a+1)+(\sqrt[3]{a\sqrt{a}}-1)^2-\left(\frac{\sqrt[6]{ab^2}+\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}+\sqrt[3]{a}\right)^3\right]^{\frac{1}{2}}$, bunda $0<a\leq 1$;

2) $\frac{a^{-1}b^{-2}-a^{-2}b^{-1}}{a^{-\frac{5}{3}}b^{-2}-b^{-\frac{5}{3}}a^{-2}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}$; 3) $\frac{a^{-2}\cdot b^{-3}-a^{-1}\cdot b^{-2}}{a^{-\frac{9}{2}}\cdot b^{-\frac{11}{2}}-a^{-\frac{11}{2}}\cdot b^{-\frac{9}{2}}}$.

Tenglamani yeching (**33** – **34**):

33. 1) x^2-7; 2) x^2-11; 3) x^2+6x-0;
4) x^2+5x-0; 5) x^2-8x; 6) x^2-12x.

34. 1) $1{,}5x-4x^2-6{,}3x-x^2$; 2) $11y-15-(y+5)(y-3)$;

3) $3x(x+2)=2x(x-2)$; 4) $\frac{1}{4}(3x^2+1)-\frac{40x+3}{6}=\frac{x-3}{12}$.

35. Agar
1) $(y-3)^2>(3+y)(y-3)$ bo‘lsa, u holda $y<3$ bo‘lishini;
2) $(3a+b)^2<(3a-b)^2$ bo‘lsa, u holda $ab<0$ bo‘lishini isbotlang.

36. Agar $x<\frac{a+b}{2}$, $y<\frac{a+c}{2}$, $z<\frac{b+c}{2}$ bo‘lsa, u holda $x+y+z<a+b+c$ bo‘lishini isbotlang.

37. To‘g‘ri burchakli parallelepipedning balandligi 15 cm dan ortiq, eni 2 cm dan, bo‘yi esa 0,3 m dan ortiq. Uning hajmi 0,9 dm^3 dan katta ekanini isbotlang.

38. y ning istalgan qiymatida
1) $(y-3)(y-1)+5$; 2) $(y-4)(y-6)+3$
ifoda musbat bo‘lishini isbotlang.

39. k ning $4y^2-3y+k-0$ tenglama haqiqiy ildizlarga ega bo‘lmagan qiymatlari to‘plamini toping.

40. k ning qanday qiymatlarida –2 soni $(k-2)x^2-7x-2k^2=0$ tenglamaning ildizi bo‘ladi?

41. Tenglamani yeching:

1) $3x^2+8x+5=0$; 2) $5x^2+4x-12=0$;

3) $\frac{6}{4x^2-1}-\frac{x}{2x-1}=\frac{5}{2x+1}$; 4) $\frac{5}{x-1}+\frac{3x-3}{2x+2}=\frac{2x^2+8}{x^2-1}$.

42. Tengsizlikni yeching:

1) $(x+2)^2<(x-3)^2-8(x-5)$; 2) $\frac{2+x}{9}-x\leq\frac{2x\quad 5}{3}-(4-x)$.

43. Yaqinlashish xatoligini toping:

1) 0,2781 ning 0,278 bilan; 2) –2,154 ning –2,15 bilan;

3) $-\frac{7}{18}$ ning $-\frac{1}{3}$ bilan; 4) $\frac{3}{11}$ ning 0,272 bilan.

44. 3,5 soni 3,5478 sonining 0,05 gacha aniqlik bilan olingan taqribiy qiymati ekanini isbotlang.

45. $\frac{7}{9}$ sonining 0,777 soni bilan yaqinlashishining nisbiy xatoligini toping.

46. Tasodifiy ravishda tanlangan 60 tup g‘o‘za o‘simligining asosiy poyasidagi bo‘g‘inlar soni quyidagi jadvalda berilgan:

10	11	10	10	10	9	9	11	9	9
11	11	11	7	9	10	10	10	10	10
10	10	11	11	11	10	10	11	10	10
9	10	9	9	9	9	10	9	10	10
10	10	10	10	11	9	11	9	9	12
9	10	8	11	10	10	9	10	10	11

Tanlanmaning: 1) chastotalar jadvalini tuzing; 2) o‘rta qiymatini; 3) modasini; 4) medianasini; 5) kengligini hisoblang; 6) chastotalar poligonini yasang.

47. Nechta 4 xonali sonda faqat bitta 0 raqami bor?

48. 0, 1, 2, 3, 5, 8 raqamlaridan ularni takrorlamasdan jami nechta 3 xonali son tuzsa bo‘ladi?

49. 6 nafar mehmonni 6 ta stulga necha xil usulda o‘tqazish mumkin?

MASHQLARGA JAVOBLAR

I BOB. 1. 2) 0; 4) 5. **2.** 2) –2; 4) 0. **3.** $(7m)$t; 168t. **4.** 1) $(60m)$ min; 2) $\frac{p}{60}$ min; 3) $(60m+l+\frac{p}{60})$ min. **5.** $3(x-y)$; 2) 4,5; 4) 2,5. **6.** $(x+y)(x-y)$; 2) $-\frac{11}{64}$; 4) 0,104. **7.** 2) $-1\frac{2}{3}$. **8.** 2) 4. **9.** 1, 3, 15, 21. **10.** 2) $(m-1)m$; 2) $(2p+1)(2p+3)(2p+5)$. **12.** $(p-q)$ t; 1) 5t; 2) q son p dan katta bo'lmaydi; q son p ga teng bo'lishi mumkin. **13.** $400n+500m$; 155000; 155000. **15.** 187200 m^3, $(37440m)$ m^3. **16.** $s=3\frac{1}{6}c+1\frac{2}{3}a+2\frac{1}{2}b$, 53 km. **23.** $\frac{x-y}{x+y}$. **24.** $\frac{a^2+b^2}{a-b}$. **25.** $\frac{a^3-b^3}{a^2+b^2}$. **26.** $\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}$. **27.** 1) $\frac{5}{11}$; 4) 1,5. **28.** 2) $1\frac{9}{13}$. **29.** 2) $\frac{9}{22}$; 4) $\frac{3}{5}$. **30.** 2) $\frac{1}{2}$; 4) –12. **32.** 2) $\frac{5c}{16b}$; 4) $\frac{2a}{3b}$. **33.** 2) $\frac{1}{9(m+n)}$; 4) $-\frac{1}{3}$. **34.** 2) $\frac{1}{m-n}$; 4) $\frac{3}{8n}$. **36.** 2) $\frac{a+b}{2a-2b}$; 4) $\frac{1+n}{1-n}$. **38.** 2) $\frac{p}{p-q}$; 4) $\frac{x}{y}$. **40.** 2) $\frac{3a-2b}{2b-3b}$; 4) $\frac{1-2ab}{a^2b(2b-a)}$. **41.** 2) $m+n$; 4) $\frac{1}{9-2x}$. **42.** 2) $\frac{4y-3x}{4y+3x}$. **43.** 2) 64. **44.** 2) $a=-2$, $b=6$. **45.** $\frac{ab}{a-b}$. **46.** 0,5 kg; 1,5 kg. **47.** 5:2. **48.** 2) $\frac{7-a}{7+a}$; 4) $\frac{b}{4a^2+2a+1}$. **49.** 1) $\frac{x^2+y^2}{x}$. **50.** 1) $\frac{x-2a}{x+2a}$. **51.** 2) $a=-2$; $b=-6$. **52.** 2) 1; 4) $-\frac{1}{8}$. **53.** 2) $\frac{x-1}{x^2-x+1}$. **54.** $\frac{49}{99}$. **55.** $\frac{10}{19}$. **56.** 20. **57.** 0,5. **58.** 40. **60.** –1. **61.** $\frac{a-b}{a+b}$. **63.** $\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^{64}}\right)$. **64.** $\frac{1}{1-a}\left(1-a^{64}\right)$. **72.** 2) $\frac{96a(1+b)}{12a(2b-3c)^2\cdot(1+b)}$, $\frac{24a^2(3c-2b)(1+b)}{12a(2b-3c)^2\cdot(1+b)}$ va $\frac{(2b-3c)^2}{12a(2b-3c)^2\cdot(1+b)}$. **74.** 1) $\frac{30(a+b)}{30a^2-30b^2}$, $\frac{1}{30a^2-30b^2}$ va $\frac{6(a-b)}{30a^2-30b^2}$. **79.** 2) $\frac{2m}{3n^2}$; 4) $\frac{x-y}{m+n}$. **80.** 2) $\frac{6m+b}{2a^2}$; 3) $\frac{n}{a}$. **81.** 2) $\frac{8}{ab}$. **82.** 2) $\frac{30}{77}$; 4) $\frac{c+3ad}{12a}$. **83.** 2) $\frac{3ad-b}{15d}$; 4) $\frac{11a+3}{a}$. **84.** 2) $\frac{4c^2-2c-4}{c^2}$; 4) $\frac{ab-b^2k+a^2}{b^2}$. **85.** 2) $\frac{k+n}{mnk}$; 4) $\frac{bd-ab}{acd}$; 6) $\frac{3n^2+2m}{mn}$. **87.** 2) $\frac{acd^2+ad+ca}{c^2d^2}$; 4) $\frac{bcd^2-bc+bd}{c^2d^2}$. **89.** 2) $\frac{2x}{3(x-1)}$; 4) $\frac{8y+25x}{10(y-3)}$. **90.** 2) 0. **93.** 4) $\frac{2x^2-13x+2}{x^2-16}$. **95.** 2) $\frac{4-7(m+n)}{(m+n)^2}$. **96.** 2) $\frac{9a+1}{6(9a-1)}$. **99.** 2) $\frac{1}{x-3}$. **101.** 2) $\frac{9}{2a+3b}$. **102.** 2) 0. **104.** 2) $\frac{m}{n(m-n)}$. **105.** 2) $\frac{1}{3a-2b}$. **108.** $\frac{ab}{a+b}$. **142.** $3\frac{3}{7}$ soatda. **143.** 40 soatda. **147.** 2) $\frac{13}{22}$; 4) $\frac{6}{5}$. **148.** 2) $\frac{3}{4}$; 4) 81. **149.** 2) $\frac{k}{mb}$; 4) $\frac{4mk}{5nd}$. **151.** 2) $4ax^2y$; 4) $\frac{b}{2a}$.

152. 2) $\frac{b}{4(1-a)}$; 4) $\frac{1}{4m^2(m-n)}$. **153.** 2) $\frac{7}{2}$; 4) $\frac{3}{2}$. **154.** 2) $\frac{65}{cm}$; 4) $\frac{16}{5b}$. **155.** 2) $\frac{6}{5}$; 4) $\frac{1}{3nm}$. **157.** 2) $\frac{2x}{y^2}$; 4) $\frac{5b}{8}$. **159.** 2) $\frac{2ad}{bc}$; 4) $\frac{14b^2d^2}{15ac}$. **161.** 2) $\frac{3a}{3a-1}$. **163.** 2) $\frac{12xy}{4x^2+9y^2}$. **164.** 2) $b(a-1)$; 433,34. **166.** 1) 0; –1. **169.** 2) $\frac{4xy+7}{4xy+a}$. **171.** 1) 2; 2) 12; 4) 525. **176.** 2) $\frac{4(1-a)}{b}$; 4) $4m^2(m-n)$. **184.** 1) $\frac{1}{1-m}$. **185.** 2) $a+4$. **188.** 1. **191.** $x+2$. **192.** $\frac{2b}{a^2+b^2}$. **193.** 2) $2y$. **196.** 1) $\frac{x^2(x+1)}{x+2}$. **198.** $(a-b)(a+b)^2$. **200.** $(a+b)^2$. **204.** 1. **206.** 2) $\frac{3}{5}(1+a)$; 4) 1; 6) $\frac{b^2}{b^2+2}$. **215.** $u\frac{s}{v}$. **216.** $\frac{v-v_0}{v+v_0}s$. **217.** 6 tadan. **222.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{4(a+b)x}{(ab)^2}$. **223.** 1) 0;

2) 0. **225.** 2) 1; 4) –1. **227.** $3x^2+1$. **228.** $\frac{b+1}{(b-2a)(a+2b^2)^2}$. **229.** $p-q$. **230.** 1. **231.** $\frac{2bc}{(b+c-a)^2}$. **233.** $\frac{24}{5y-2x}$. **234.** $3x-2$. **235.** $2a+3$. **236.** $a-b$. **237.** $2x-1$. **239.** p. **241.** 2) –9: 4) $\frac{3}{4}$. **242.** 2) 1; 4) –2. **243.** 2) 2; 4) –4. **244.** 2) –2; 4) 4. **245.** 2) (1; 3), (3; 1). **246.** 2) (1; 1). **250.** 2) (1; –2), (2; –1). **251.** $k \neq 0$ ning istalgan qiymatida 2 ta nuqtada kesishadi; 2) $a<0$, $k>0$ da kesishmaydi; 3) $a<0$, $k<0$ da 2 ta nuqtada kesishadi; 4) $k<0$, $a>0$ da kesishmaydi. **253.** $a=\pm 4$. **258.** 2) 2; 3; 5; $\frac{1}{2}$; 0,4; 0,5; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{6}$. **259.** 1; 0; 3; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{5}$; 0,2; 0,3. **260.** 2) 2; 4) 15. **261.** 2) 81; 4) $\frac{1}{25}$. **262.** 2) –1; 4) –2. **263.** 2) 2; 4) 225. **264.** 2) $x=-3$; 4) $x=2$. **265.** 2) $x=-\frac{1}{12}$; 4) $x=2$. **266.** 2) 3. **267.** 2) 2. **268.** 2) a) $3-x$; b) $-3+x$. **269.** 2) 2. **270.** 34. **272.** 2) istalgan x uchun. **274.** 2) 0,3; 4) 20. **275.** 2) 63; 4) 6. **276.** 2) 0,3; 4) 3. **277.** 2) 2; 4) 5. **279.** 2) $\frac{3}{2}$; 4) $\frac{3}{2}$. **280.** 2) $\frac{3}{10}$; 4) 2. **281.** 2) 105. **282.** 2) 48; 4) 2. **283.** 2) $\frac{2}{5}$. **286.** 2) $\frac{1}{4}$; 4) $\frac{1}{2}$. **287.** 2) 3; 4) 5. **288.** 2) y^2. **295.** 2) 4; 4) 8; 6) $\frac{1}{27}$. **296.** 2) 4; 4) 64. **297.** 2) 2; 4) $\frac{1}{27}$; 6) $\frac{1}{729}$. **298.** 2) 9; 4) 5. **299.** 1) 24; 2) 121. **300.** 2) 2. **301.** 2) $b^{\frac{5}{6}}$; 4) $y^{-\frac{23}{5}}$. **302.** 2) b; 4) $y^{\frac{5}{2}}$. **306.** 2) 3. **307.** 2) 0. **308.** $3\cdot\sqrt{\frac{b}{a}}$. **309.** 27. **310.** $9a$. **311.** $2b(a-b)$. **314.** $-4\sqrt{x}$. **316.** $-\sqrt{ab}$. **317.** $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x}}$. **318.** 0. **319.** 3. **320.** 1. **321.** a. **323.** $-x^3$. **324.** $\sqrt[3]{a}$.

II BOB. 12. 2) $x=1$; 4) $x=0$; $x=\pm 2$. **18.** 7) $\pi>3{,}14$. **34.** 1) 6; 2) 20. **35.** 11. **36.** 18. **45.** 24 ta. **59.** 4) $n=-1$. **60.** $n=4$. **61.** 4) $x=-2$. **72.** Borishga ko‘p vaqt sarflagan. **106.** 1) $x<-2\frac{8}{31}$; $x=-3$;

2) $x<2\frac{5}{17}$; $x=2$. **107.** 1) $x>1\frac{2}{3}$; $x=2$; 2) $x>-4$; $x=-3$. **111.** Kvadratning yuzi katta. **115.** A firmadan 32 donadan ko‘p emas; B firmadan 40 donadan kam emas. **129.** 2) $-3\frac{6}{7}<x\le 4\frac{5}{7}$. **133.** 1) $2,5<x<5$; 2 ta; 2) $-\frac{1}{3}<x<2,5$; 3 ta. **136.** 1) $\varnothing$; 2) $\varnothing$. **140.** 0,925; 2) –0,5. **141.** 1-idishda 24 ta, 2-idishda 7 ta buyum bor. **148.** 4) $-\frac{10}{7}<x<2$. **149.** 2) $x\ge 1$; $x\le -\frac{1}{3}$. **151.** 2) $x=6,5$; 4) $x=1$; 6) $x=-8$. **152.** 1) $x=-1$; 2) $x=-4$; 0; 4; 3) $x=-0$; 4) yechimi yo‘q. **156.** 1) $-1\le x\le 1$; 4) $-\infty<x\le -1$; 3) $x=-\frac{5}{2}$; $x=\frac{1}{2}$. **157.** 1) $a\ne 4$ da $x=\frac{a+4}{2}$; $a=4$ da x – ixtiyoriy son; 2) $x=\frac{3}{4}$; $x=\frac{7}{2}$; $a<0$ bo‘lsa, yechimi yo‘q; $a=0$ bo‘lsa, $x=-4$; $a>0$ bo‘lsa, $x=a-4$ va $x=-a-4$. **158.** 1) $-2<x<-1$, $1<x<2$; 2) $-2<x<1,5<x\le 8$; 3) $-2<x<5$; 4) $\frac{1}{3}<x<1$; $x\ne\frac{2}{3}$. **159.** 1) $0\le x\le 2$, $4\le x\le 6$; 2) $-1<x<9$; 3) $x<-2$, $x>3$; 4) $x<-\frac{2}{3}$, $0<x<\frac{8}{3}$; $x>\frac{10}{3}$. **160.** 1) $x>3$; 2) $x<1,5$; 3) $x<\frac{5}{3}$. **165.** 1,3 m. **166.** 2) 0,0001. **168.** 2) –0,004; 0,004; 4) 0,003; 0,003. **172.** 2) $159,8\le x\le 160,2$; 4) $k-1\le x\le k+1$; 6) $-7,6\le x\le -7,4$. **173.** 2) 22,6; 22,8; 4) –6,1; –5,7. **174.** 2) 5,5; 4) 3,9. **176.** 2) 1,002; 3) 1,998. **185.** 2) –0,02; 0,02; 2) 0,6; 0,06. **187.** 2) $\frac{17}{30}\le A\le\frac{23}{30}$; 4) $\frac{113}{170}\le A\le\frac{147}{170}$. **196.** 2) 2013,09; 2013,01; 2013. **217.** 2. **219.** $2(z-y)$. **221.** $m\ge 1$. **222.** $x\ge 0$. **224.** $y=\pm 4$. **227.** $x+y$. **231.** Ifoda aniqlanmagan. **232.** 2) $76-12\sqrt{12}$; 4) 132. **233.** 2) $-\frac{68}{13}$, $b\ge 0$ bo‘lsa, $-\frac{8}{5}$, $b\ge 0$ bo‘lsa; 4) –30. **235.** 2) $n=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$. **236.** 1) $x_1=-7$, $x_1=3$. **238.** $x_1=3$, $x_2=7$. **239.** $x\le\frac{3}{2}$. **240.** $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=\frac{1}{2}$, $x_3=\frac{3}{2}$, $x_4=\frac{5}{2}$. **241.** $x_1=0$, $x_2=2$. **242.** $x_1=\frac{5}{3}$, $x_2=5$. **243.** $x_1=-3$, $x_2=\frac{7}{5}$. **244.** $x_1=\frac{11}{4}$, $x_2=\frac{7}{2}$. **245.** $x_1=1$, $x_2=5$. **247.** $x=3$. **248.** $x=-4$. **249.** $x_1=-6$, $x_2=-4$, $x_3=0$, $x_4=2$. **250.** Yechim yo‘q. **251.** $x_1=\frac{2}{3}$, $x_2=2$. **253.** $x_1=-5$, $x_2=0$.

III BOB. **4.** 2) $3x^2-5x+6=0$; 4) $\frac{2}{3}x^2+\frac{5}{8}x-\frac{3}{4}=0$; 6) $0,4x^2-1,8x-2,4=0$. **6.** 2) $2x^2-7x-4=0$. **8.** 1) $2x^2-27x-2=0$; 2) $1\frac{1}{3}x^2+3x-1=0$. **16.** 2) $x_{1,2}=1,1$; 4) $x_{1,2}=0$. **18.** 2) $x_1=0$; $x_2=-\frac{7}{2}$; 4) $x_1=0$; $x_2=\frac{15}{7}$. **21.** 2) $x=0$, $x=\frac{20}{3}$. **24.** 2) $x_{1,2}=\pm 3$; 4) $x_{1,2}=\pm\frac{9}{2}$. **27.** 2) $x_1=0$; $x_2=\frac{54}{37}$. **31.** 2) $x=0$; 4) $\varnothing$. **33.** 2) $m=\pm 4$; 4) $m=8$. **34.** 2) $m=-\frac{4}{3}$; 4) $m=-2$. **37.** 2) $x=0$; 4) $x=\frac{1}{5}$. **44.** 2) –6.

49. 2) $x_{1,2}=12$; 3) $x_{1,2}=-10$. **57.** 2) $m=3$. **58.** 2) $m=8$. **59.** 2) $x_1=-2$; $x_2=5$; 4) $x_1=-1$; $x_2=7$. **61.** 2; 3; 4. **63.** $b=-10$; $x_1=-2$; $x_2=5$. **66.** 2) $x_1=-2$; $x_2=\frac{11}{4}$. **68.** 2) $m=4$. **71.** 2) $x_1=-\frac{1}{5}$; $x_2=\frac{3}{5}$; 3) $x_1=-2$; $x_2=5$. **73.** 2) $m=\pm3$. **74.** 2) $m=-\frac{5}{3}$. **77.** 2) $x_1=-1$; $x_2=\frac{7}{3}$; 4) $x_1=\frac{3}{4}$; $x_2=2$. **79.** 2) $\varnothing$; 3) $\varnothing$. **84.** 2) $x_1=-2$; $x_2=2$. **87.** 2) $\varnothing$; 4) $\varnothing$. **91.** 2) $x_1=-\frac{b}{a}$; $x_2=\frac{a}{b}$. **92.** $2-\sqrt{3}$; $2+\sqrt{3}$. **94.** 2) $x_1=-1$; $x_2=4$. **95.** 2) $x_1=-\frac{11}{4}$; $x_2=1$. **96.** 2) $x_1=-4$; $x_2=-3$. **99.** 2) $m=1$. **101.** 2) $m=20$; 4) $m=36$. **106.** 2) $m=\pm2$. **108.** 2) $m=0$; 4) $|m|=1$. **113.** 2) $m=\frac{9}{4}$. **116.** 2) $D=100$. **117.** 2) $x_1=-1$; $x_2=\frac{3}{4}$; 4) $x_1=-\frac{1}{7}$; $x_2=\frac{4}{3}$. **120.** 2) $x_{1,2}=\pm2$. **123.** 2) $x_1=a-1$. **127.** 2) $x_1=-7$; $x_2=1$; 3) $x_1=1$; $x_2=-9$. **131.** 1) $x^2+x-2=0$; 2) $x^2+x-20=0$; 4) $x^2+5x+6=0$; 6) $x^2-11x+28=0$. **133.** 2) $(x-1)(x-5)$; 4) $\left(x+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$. **136.** 2) $\frac{x+4}{x+3}$; 4) $\frac{x-5}{2x+1}$. **138.** 1) $\frac{2}{5}$; 2) 13. **140.** 2) $x^2-6x+1=0$; 4) $x^2-8x+1=0$. **143.** 2) $x_1=-4$, $x_2=3$; 4) $x_1=-5$; $x_2=4$. **144.** 2) $x_1=-7$; $x_2=6$; 4) $x_1=-9$; $x_2=8$. **147.** 2) $x_{1,2}=\pm2$. **150.** 2) $x_{1,2}=\pm3$; 4) $\varnothing$. **153.** 2) $x_1=-3$, $x_2=1$, $x_3=5$. **155.** 2) $x_1=-1$; $x_2=7$; 4) $x_1=-7$; $x_2=13$. **157.** 2) $x_1=-16$; $x_2=-1$. **165.** 2) $b=-4c-1$. **177.** 2) $x_{1,2}=\pm\left|\frac{b}{a}\right|$; $x_{3,4}=\pm\left|\frac{a}{b}\right|$. **183.** 2) 25; 26. **188.** 17;30. **191.** 70 km/h. **195.** 20 litr va 10 litr. **198.** $6\frac{2}{3}$ soat, $5\frac{1}{3}$ soat. **201.** 21 soat. **203.** a) mavjud; b) mavjud; d) mavjud emas. **204.** 4 kg, 6 kg. **205.** 8,8 g/cm^3. **206.** 10 kg, 11 kg. **207.** 44 km/h, 14 km/h. **208.** 10 kunda, 15 kunda. **209.** 7 kunda. **210.** 20 km/h. **211.** 3 km/h. **212.** 37. **213.** 82. **214.** 20 kun, 30 kun, 60 kun. **215.** 10%. **216.** 5%. **217.** 10 km. **218.** 16 nafar. **219.** 35 nafar. **220.** 60 km/h va 50 km/h. **221.** 55 km/h.

IV BOB. **16.** 6 ta. **17.** 18 ta. **18.** 27 ta. **19.** 9 ta. **21.** 9 ta. **25.** 15 ta. **26.** 120. **28.** d) $n(n-1):2$. **30.** 45. **31.** 2) 900. **33.** $16\cdot15\cdot14=3\,360$. **34.** 30. **35.** 1) 125; 2) 625. **37.** 24. **38.** 10. **39.** $12\cdot8\cdot7=672$. **40.** $64\cdot49=3\,136$. **42.** 1) $4\cdot60$; 2) $24\cdot58$; 3) $36\cdot55$; jami 3612 usul. **43.** 6. **44.** 12. **46.** 20. **47.** 14. **55.** 1) $5\cdot5\cdot4\cdot3=300$; 2) $5\cdot6\cdot6\cdot6=1\,080$. **56.** $5\cdot6\cdot6\cdot3=540$. **57.** $26\cdot25\cdot24=15\,600$; **58.** $8\cdot7\cdot5=280$. **59.** 10 000. **61.** 24 ta. **62.** 1) 6; 2) 15; 3) 45; 4) $n\cdot(n-1):2$. **63.** $3\cdot4\cdot5=60$. **64.** 4.

V BOB **1.** 2) $\frac{22}{35}$; 4) $-\frac{5}{6}$; 6) 3,485. **2.** $7\frac{1}{2}$; 36. **3.** $2a(30-a)$; -128. **4.** $a\cdot100+b\cdot10+c, c\cdot100+b\cdot10+$

$+a$ ta. **5.** $x = 1000a + c$. **6.** 1) $\frac{2n(2n-k)}{2n+k}$; 2) $\frac{2q(m-2q)}{m+2q}$. **7.** 4) $\frac{m+7n}{10}$. **9.** 1. **13.** 2) $y \geq -2$; 4) $x > -4$. **14.** 2) $-5; -4; -3; -2; -1; 0$; 4) 4. **15.** 2) $\frac{2}{9} < x \leq 32$. **16.** 2) $-15; -14; ...; -1; 0$. **17.** 2) $x_1 = 8{,}1$, $x_2 = -2{,}1$; 4) $x_1 = 4$, $x_2 = -3$; 6) $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{6}{7}$. **18.** 2) $x \leq -3{,}4$; $x \geq 7{,}4$; 4) $x \leq -2\frac{1}{3}$; $x \geq 1$. **19.** 2) $2\frac{1}{3}$; 4) $\frac{2x^2}{3y}$. **20.** 2) $3-\sqrt[3]{2}$; 4) $6\sqrt{7}$. **21.** 2) $2\left(\sqrt{0{,}5}\right)^{0,3} < \left(2\sqrt{0{,}5}\right)^{0,37}$. **22.** 2) $\sqrt{x}$; 4) $9b^{-4}$. **23.** 2) $5ab\sqrt{b}$. **24.** 2) $-\sqrt{3x^2}$; 4) $\sqrt{5a^2}$. **25.** 2) $-8\frac{1}{8}$. **26.** 2) $-4\frac{5}{6}$. **27.** 2) $x = \frac{1}{9}$; 4) $x = 0$. **28.** 2) Yo‘q. **30.** 1) $-\frac{\sqrt{a}}{b}$; 2) $\sqrt{a} + \sqrt{b}$. **31.** 1) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$; 2) $\frac{1+\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$. **32.** 2) $a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}$. **33.** 2) $x_{1,2} = \pm 11$; 4) $x_1 = 0, x_2 = -5$; 6) $x_1 = 0$, $x_2 = =12$. **34.** 2) $y_1 = 0, y_2 = 9$; 4) $x_1 = 0, x_2 = 9$; 6) $x_{1,2} = \pm 1{,}5$. **39.** $k > \frac{9}{16}$. **40.** $k_1 = 3, k_2 = -1$. **41.** 2) $x_1 = 1{,}2$, $x_2 = -2$; 4) $x = 3$. **43.** 2) 0,004; 4) **45.** $\approx 0{,}1\%$.

Chuqurlashtirishga oid mavzular

Ratsional va irratsional sonlar. Radikallarning irratsionalligi

1. 1) Yo‘q; 2) yo‘q; 3) yo‘q; 4) yo‘q; 5) $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$; 6) $-\sqrt{3} + \sqrt{3} = 0$.

Qo‘shma sonlar. Maxrajni irratsionallikdan qutqarish

1. 2) 3; 4) 2. **2.** 2) $\frac{4\left(\sqrt{7}+1\right)}{3}$; 4) $\frac{\sqrt{11}-3}{2}$. **3.** 2) $\sqrt{7}+1$; 5) $\sqrt{5}-1$. **4.** 2) $\frac{28\sqrt{5}}{5}$; 4) $-\frac{16}{5}$. **5.** 2) 1; 3) 8.

Arifmetikaning asosiy teoremasi. Tub ko‘paytuvchilarga yoyish

1. $111 = 3 \cdot 37$, $1111 = 11 \cdot 101$, $11111 = 41 \cdot 271$, $111111 = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$, $1111111 = 239 \cdot 4\,649$. **2.** $143 \cdot 14 \cdot 1 = 2\,002$. **3.** $10 \cdot 24 \cdot 10 \cdot 28 \cdot 30 = 2\,016\,000$ yoki $10 \cdot 28 \cdot 10 \cdot 24 \cdot 30 = 2\,016\,000$. **11.** $215 \cdot 310 \cdot 56$.

EKUB uchun Yevklid algoritmi

12. EKUB (33; 34)=11. EKUB (198; 126)=18. EKUB (11 475; 19 125)=3 825. EKUB (481; 555)=37. EKUB (1 404; 936)=468. EKUB (48; 36)=12. EKUB (816; 918)=102. EKUB (104; 168)=8. EKUB (2 835; 7 425)=135. **13.** $2n^2 - 1 - 2(n+1)(n-1) = 1$, demak, EKUB $\left(2n^2 - 1, n+1\right) = 1$. $n^2 + 1 - \left(n^2 - n + 1\right) = n$, EKUB $\left(n^2 + 1, n\right) = 1$, demak, EKUB $\left(n^2 + 1, n^2 - n + 1\right) = 1$.

Bir nechta sonlar uchun EKUB va EKUK

18. Ha. Misol: 1, 1, ..., 2, 2, ..., 4, 5, 6 (89 ta 1, 8 ta 2). **19.** Masalan, 27 720, 55 440, 83 160, 110 880, 138 600, 166 32. **20.** Ha. Misol: 17, 18, 19 va 20, 21, 22. Bunda EKUK (17, 18, 19)=$17\cdot18\cdot19 = 5\,814$, EKUK(20, 21, 22) =$10\cdot21\cdot22 = 4\,620$. 8. 10.

EKUB va EKUK larning ko'paytmasi haqida

25. 7 va 210, 14 va 105, 21 va 70, 35 va 42; $a=17\cdot3 = 51$, $b=14\cdot3 = 42$; $a=36$ va $b=45$; 5 va 105, 15 va 35. **26.** 26. **27.** (5, 30) (30, 5), (10, 15), (15, 10); (1, 30), (30, 1), (2, 15), (15, 2), (3, 10), (10, 3), (5, 6), (6, 5). **29.** $m=kd$, $n=ld$, $d=EKUB\,(m, n)$. Demak, $EKUK\,(m, n)=kld$ va $kld=d=kd=ld$. Bundan $(k-1)(l-1)=0$, ya'ni $k=1$ yoki l=1. Birinchi holda $m=d$ va n soni m ga bo'linadi. Ikkinchi holda – aksincha.

MUNDARIJA

22.1ya72
A 45

Mirzaahmedov, Mirfozil Abdulhaqovich
Algebra: Aniq fanlarga ixtisoslashtirilgan Davlat umumta'lim maktablarining 8-sinfi uchun darslik / M. Mirzaahmedov va b. – Toshkent: «O'qituvchi» NMIU, 2019. – 240 bet.

ISBN 978-9943-22-403-2

UO'K: 51(075.3)
KBK 22.1ya72

M. A. Mirzaxmedov, G. Nasritdinov, Sh. N. Ismailov, F. R. Usmonov, F. S. Rahimova, Sh. R. Aripova

ALGEBRA

Aniq fanlarga ixtisoslashtirilgan Davlat umumta'lim maktablarining 8-sinfi uchun darslik

Qayta ishlangan va to'ldirilgan 2- nashri

„O'qituvchi" nashriyot-matbaa ijodiy uyi
Toshkent – 2019

Muharrir *Normat G'oipov*
Badiiy muharrir va rassom *Dilnoza Do'smatova*
Texnik muharrir *Nazokat Niyozmuhamedova*
Musahhih *Nargiza Giyasova*
Kompyuterda sahifalovchi *Muslima Mirpo'latova*

Nashriyot litsenziyasi AI № 012. 20.07.2018.
Original-maketdan bosishga ruxsat etildi 01.07.2019. Bichimi 70×100 $^1/_{16}$.
Kegli 12 shponli. Ofset bosma usulida bosildi. Ofset qog'ozi.
Shartli b. t. 19,35. Hisob-nashriyot t. 15,0.
Adadi 9494 nusxa. Buyurtma №

O'zbekiston Respublikasi Prezidenti Administratsiyasi huzuridagi Axborot va ommaviy kommunikatsiyalar agentligining «O'qituvchi» nashriyot-matbaa ijodiy uyi.
Toshkent shahri, Yangishahar ko'chasi, 1-uy.
Shartnoma № 19-19.

Ijaraga beriladigan darslik holatini ko‘rsatuvchi jadval

№	O‘quvchining ismi va familiyasi	O‘quv yili	Darslikning olingandagi holati	Sinf rahbarining imzosi	Darslikning topshirilgandagi holati	Sinf rahbarining imzosi
1.						
2.						
3.						
4.						
5.						
6.						

Darslik ijaraga berilib, o‘quv yili yakunida qaytarib olinganda yuqoridagi jadval sinf rahbarlari tomonidan quyidagi baholash mezonlariga asosan to‘ldiriladi:

Yangi	Darslikning birinchi marotaba foydalanishga berilgandagi holati.
Yaxshi	Muqova butun, darslikning asosiy qismidan ajralmagan. Barcha varaqlari mavjud, yirtilmagan, ko‘chmagan, betlarida yozuv va chiziqlar yo‘q.
Qoniqarli	Muqova ezilgan, birmuncha chizilib, chetlari yedirilgan, darslikning asosiy qismidan ajralish holati bor, foydalanuvchi tomonidan qoniqarli ta’mirlangan. Ko‘chgan varaqlari qayta ta’mirlangan, ayrim betlariga chizilgan.
Qoniqarsiz	Muqovaga chizilgan, yirtilgan, asosiy qismidan ajralgan yoki butunlay yo‘q, qoniqarsiz ta’mirlangan. Betlari yirtilgan, varaqlari yetishmaydi, chizib, bo‘yab tashlangan. Darslikni tiklab bo‘lmaydi.