Ш. А. АЛИМОВ, О. Р. ХАЛМУХАМЕДОВ, М. А. МИРЗААХМЕДОВ

АЛГЕБРА

ЖАЛПЫ ОРТО БИЛИМ БЕРҮҮЧҮ МЕКТЕПТЕРДИН
8-КЛАССЫ ҮЧҮН ОКУУ КИТЕБИ

Кайра иштелген 4-басылышы

*Өзбекстан Республикасынын Элге билим берүү министрлиги
сунуш кылган*

"O'QITUVCHI" БАСМА-ПОЛИГРАФИЯЛЫК ЧЫГАРМАЧЫЛЫК ҮЙҮ
ТАШКЕНТ – 2019

УЎК 512(075.3)=512.154
КБК 22.14я72
А 39

Рецензенттер:

М.М. Шаниязова – *Ташкент шаары Сергели районундагы 300-мектептин математика предмети мугалими;*

И.Б. Соибова – *Ташкент шаары Яшнабад районундагы предметтерге адистешти-рилген 307-мектептин математика предмети мугалими;*

Г.П. Мухамедова – *Низами атындагы ТМПУнин жалпы математика кафедрасынын доценти, педагогика илимдеринин кандидаты;*

Н.Ш. Каршибаева – *Низами атындагы ТМПУнин окуу-методикалык башкармасынын методисти.*

Окуу китебиндеги шарттуу белгилер:

△ – маселени чыгаруу башталды

▲ – маселени чыгаруу аяктады

○ – математикалык тастыкты негиздөө же формуланы келтирип чыгаруу башталды

● – негиздөө же келтирип чыгаруу аяктады

– кызыктуу маселелер

16, 18,... – татаалыраак маселелер

– билүү зарыл жана эстеп калуу пайдалуу болгон текст

ӨЗҮҢДҮ ТЕКШЕРИП КӨР! – негизги материал боюнча билимдерди текшерүү үчүн өз алдынча иш

– сыноо көнүгүүлөрү – тесттер

– тарыхый маселелер

– тарыхый маалыматтар

– практикалык жана предметтер аралык маселелер.

Республикалык максаттуу китеп фондунун каражаттары эсебинен басылды.

ISBN 978–9943–5750-0-4

7-КЛАССТЫН „АЛГЕБРА“ КУРСУН КАЙТАЛОО

Кымбаттуу окуучу! 7-класстын „Алгебра“ курсунан алган билимдериңди эске салуу максатында сага бир нече көнүгүүнү сунуш кылабыз.

1. Туюнтманын сандык маанисин тап:

1) $S = 2(ab + ac + bc)$, мында $a = 5$, $b = 4$, $c = 10$;

2) $V = \frac{h}{3}(a^2 + b^2 + ab)$, мында $h = 12$, $a = 10$, $b = 8$;

3) $S = \frac{(a+b)n}{2}$, мында $a = 10$, $b = 40$, $n = 16$;

4) $V = \frac{1}{3}abh$, мында $a = 30$, $b = 20$, $h = 25$.

2. Кашааларды ач жана жөнөкөйлөштүр:

1) $7a - (5a + 4b)$; 2) $9x - (7y - 4x)$;

3) $-(2a - 3b) - (-a + 3b)$; 4) $8x - (3y + 5x) - (-2y - x)$.

3. Эгерде:

1) $v = 60$; 2) $v = 75$; 3) $v = 90$;

4) $v = 100$; 5) $v = 20{,}4$; 6) $v = 28{,}5$

болсо, $S = \frac{1}{5}v + \frac{1}{200}v^2$ туюнтманын сандык маанисин тап.

4. Ар бир туура жооп үчүн: эне тили жана адабияттан n балл, математикадан k балл, англис тилинен m балл коюлат. Надыра эне тили жана адабияттан c, математикадан a, англис тилинен b суроого туура жооп берди.

1) Надыра чогулткан бардык баллды эсептөө үчүн туюнтма түз;

2) эгерде $a = 35$, $b = 34$, $c = 36$; $k = 3{,}1$; $m = 2{,}1$ жана $n = 1{,}1$ болсо, ал бардыгы болуп канча балл чогулткан?

5. Теңдемени чыгар (**5–6**):

1) $2x + 15 = 3x - 11$; 2) $7 - 5x = x - 2$;

3) $2(x - 3) = 3(2 - x)$; 4) $-3(4 - x) = 2(x - 5)$.

6. 1) $3{,}2x + 1{,}8x = 6x - 3{,}5$; 2) $7{,}5x - 2{,}5x = 7x - 10$;

3) $0{,}5\,(0{,}4x - 8) = 5\,(0{,}2x - 1)$; 4) $2{,}4\,(5x - 3) = -0{,}8(10 - 5x)$.

7. Саякатчы 3 км жана калган жолдун $\frac{1}{3}$ бөлүгүн өткөндөн кийин, эсептеп көрсө, бардык жолдун жарымына жетиши үчүн дагы 1 км аралык калыптыр. Бардык жол канча километр экен?

8. Узундугу 9,9 м болгон зымды эки бөлүккө бөлүштү. Эгерде:
1) бөлүктөрдөн бири экинчисинен 20 % га кыска болсо;
2) бөлүктөрдөн бири экинчисинен 20 % га узун болсо, ар бир бөлүктүн узундугун тап.

9. 1) Бир сан экинчи сандын 45 % ын түзөт. Сандардан бири экинчисинен 66 га чоң болсо, ошол сандарды тап.
2) Бир сан экинчи сандын 30 % ын түзөт. Сандардан бири экинчисинен 35 ке аз болсо, ошол сандарды тап.

10. Бир айылдан экинчи айылга жөө адам 4 км/саат ылдамдык менен жолго чыкты. Арадан 2 саат өткөндөн кийин, 10 км/саат ылдамдык менен велосипедчи да жолго чыкты. Ал экинчи айылга жөө адамдан 1 саат мурда жетип келди. Айылдардын ортосундагы аралыкты тап.

11. Эсепте:

1) $\frac{3\cdot4^{10}-5\cdot2^{19}}{2^{15}}$; 2) $\frac{2^3\cdot(4\cdot3^{15}-7\cdot3^{14})}{3^{16}+5\cdot3^{15}}$; 3) $\frac{2^{15}\cdot a^{16}}{4^7\cdot a^{15}}$.

12. Бир мүчөнү стандарттык формада жаз, сандык маанисин эсепте:

1) $ba\cdot 8ac$, мында $a=\frac{1}{2}, b=-3, c=2$;

2) $\frac{4}{5}x\cdot 8y^2\cdot\frac{5}{16}x^2y$, мында $x=3, y=\frac{1}{9}$.

13. Көп мүчөнү стандарттык формага келтир:

1) $1,2ab+0,8b^2-0,2ab+2,2b^2+2ab$;

2) $3a^2 2a^2+3b^2 4a^2-2a^2 5b^2-3a2ab^2-a^3 2a$.

14. Амалдарды аткар (**14–15**):

1) $(3a^2-2ab-b^2)-(2a^2-3ab-2b^2)$;

2) $(7a^2-13ab+10b^2)+(-3a^2+10ab-7b^2)$;

3) $(a^2+3ab-b^2)\cdot ab$; 4) $abc\cdot(2a^2b-3abc)$.

15. 1) $(x+y)(a-b)$; 2) $(a-b+c)(a-c)$;

3) $(a^2-b^2)(a+b)$; 4) $(a-3)(a-2)-(a-1)(a-4)$.

16. Туюнтманы жөнөкөйлөштүр:

1) $4a^3:a-(2a)^2+a^4:3a^2$;

2) $(5a^4+\frac{1}{3}a^3):a^2-(4a^3):(2a)+(2a)^2$;

3) $(0,1b^4-2b^3+0,4b^2+0,02b):(0,1b)$;

4) $\left(\frac{3}{8}a^3b^2+\frac{9}{10}a^2b^3-\frac{15}{16}ab^4\right):\left(\frac{3}{4}ab^2\right)$.

17. Көбөйтүүчүлөргө ажырат (**17–18**):

1) $5a^2-15a^4+10a^6$; 2) $9a^3+12a^2-6a$;

3) $a(x+y)-b(x+y)$; 4) $(x-1)-a(1-x)$;

5) $4(a-3)+a(3-a)$; 6) $a^2(1-a)+4(a-1)$.

18. 1) $ay+zy-2ap-2zp$; 2) $5ac-6bd+5ad-6bc$;

3) $a(5a-4b)-10a+8b$; 4) $4ab-6cd-12ad+2bc$.

19. Эсепте:

1) $49^2+51\cdot 98+51^2$; 2) $58^2-116\cdot 33+33^2$;

3) $\frac{19^2+38\cdot 11+11^2}{19^2-11^2}$; 4) $\frac{53^2-53\cdot 94+47^2}{53^2-47^2}$;

5) $\frac{183^3-93^3}{183^2+183\cdot 93+93^2}$; 6) $\frac{43,73^2-43,73\cdot 56,27+56,27^2}{43,73^3+56,27^3}$.

20. Ишкер өндүргөн продукциясынын 1 килограммын 19 800 сумдан сатса, 162 800 сум киреше алат. Эгерде ошол продукциясынын 1 килограммын 16 500 сумдан сатса, 81 400 сум зыян көрөт. Продукция канча килограмм экен?

21. Сыноодо окуучуга 60 суроо берилди. Ар бир туура жооп 5 баллга бааланды. 4 туура эмес жооп үчүн айып иретинде бир туура жооп жокко чыгарылды. Бул сыноодо бардык суроолорду белгилеген бир окуучу 225 балл чогулткан болсо, ал канча суроого туура жооп берген?

22. Үч орундуу сандын цифралары бирден азайып отурат. Ошол сандан цифралары ага тескери тартипте жазылган санды кемитүүнүн натыйжасында алынган сан 2 ге, 9 га, 11 ге бөлүнөт. Ушуну далилде.

23. Автомобиль 60 км/саат ылдамдык менен 4 саат жүрдү. Ошол жолго 1 саат аз убакыт сарптоо үчүн ал ылдамдыгын канча пайызга чоңойтууга тийиш?

24. Эки айылдын ортосундагы аралыкты бир саякатчы 2 саатта, экинчи саякатчы болсо 3 саатта өтөт. Эгерде алар бул айылдардан бири-бирин карай бир убакытта жолго чыгышса, канча убакыттан кийин жолугушат?

25. Продукциянын наркы a сум эле. Бул нарк q%га арзандады. Белгилүү убакыт өткөндөн кийин, жаңы нарк p%га кымбаттады. Учурда ошол продукция канча сумдан сатылып жатат?

26. Тик бурчтуктун туурасы a га, узуну b га барабар. Анын туурасы p %га узайтылды, узуну болсо q % га азайтылды. Алынган тик бурчтуктун аянтын эсепте.

27. Машина v_1 км/саат ылдамдык менен n саат, v_2 км/саат ылдамдык менен m саат жол жүрдү.

1) Машина бардыгы болуп канча километр жол жүргөн?

2) Анын орточо ылдамдыгы кандай болгон?

28. 5 тонна жана 10 тонна жүк көтөргөн 50 машина менен 405 тонна жүктү ташышты. Жүк ташууда канча 5 тонналуу жана канча 10 тонналуу машина катышкан?

I ГЛАВА АЛГЕБРАЛЫК БӨЛЧӨКТӨР ЖАНА АЛАРДЫН ҮСТҮНДӨ АМАЛДАР

1- §. АЛГЕБРАЛЫК ТУЮНТМАЛАР

Төмөнкү маселени карап көрөбүз.

1-маселе. Кандайдыр санды ойло, аны 3 кө көбөйт, алынган натыйжага 6 ны кош, табылган сумманы 3 кө бөл жана ойлонгон санды кемит. Кандай сан алынат?

△ Алсак, ойлонгон сан 8 болсун. Бардык амалдарды маселенин шартында көрсөтүлгөн тартипте аткарабыз:

$$1)\,8\cdot3=24;\quad 2)\,24+6=30;\quad 3)\,30:3=10;\quad 4)\,10-8=2.$$

2 саны алынды.

Бул чыгарылышты мааниси 2 ге барабар болгон $(8\cdot3+6):3-8$ сандуу туюнтма түрүндө жазууга болот.

Эгерде 5 саны ойлонгон болсо, анда мааниси дагы 2 ге барабар болгон $(5\cdot3+6):3-5$ сандуу туюнтма алынмак.

Биз кандай санды ойлосок да, натыйжада 2 саны чыга берет экен го, деген ой туулат. Муну текшерип көрөбүз. Ойлонгон санды a тамгасы менен белгилейбиз жана амалдарды кайра маселенин шартында көрсөтүлгөн тартипте жазабыз:

$$(a\cdot3+6):3-a.$$

Арифметикалык амалдардын бизге белгилүү болгон касиеттеринен пайдаланып, бул туюнтманы жөнөкөйлөштүрөбүз:

$$(a\cdot3+6):3-a=a+2-a=2. \ ▲$$

Маселени чыгарууда каалагандай санды билдирген a тамгасы, 3 жана 6 сандары, амал белгилери жана кашаалардан турган $(a\cdot3+6):3-a$ туюнтма алынды. Бул *алгебралык туюнтма*га мисал болот жана ал маселенин шартын математикалык тилге өткөрүүнүн үлгүсү саналат.

Дагы алгебралык туюнтмаларга мисалдар келтиребиз:

$$2(m+n),\ \ 3a+2ab-7,\ \ (a+b)(a-b),\ \ \frac{x+y}{a}.$$

Алгебралык туюнтма сандар жана тамгалардан түзүлүп, амал белгилери менен бириктирилген туюнтма эсептелет.

Эгерде алгебралык туюнтмага кирген тамгалардын ордуна кандайдыр сан коюлуп, көрсөтүлгөн амалдар аткарылса, алынган санга *берилген алгебралык туюнтманын сандык мааниси* дейилет.

Мисалы, $a=2$, $b=3$ болгондо,

$$3a+2b-7$$

алгебралык туюнтманын мааниси 5 ке барабар, анткени $3\cdot2+2\cdot3-7=5$; ал эми анын мааниси $a=1$; $b=0$ болгондо, -4 кө барабар, анткени

$$3\cdot1+2\cdot0-7=-4.$$

a нын каалагандай маанисинде

$$(a\cdot3+6):3-a$$

алгебралык туюнтманын мааниси 2 ге барабар.

2-маселе. $\dfrac{(3a+7)b}{a-b}$ туюнтманын маанисин $a=10$, $b=5$ болгондо тап.

$$\triangle\ \frac{(3\cdot10+7)\cdot5}{10-5}=\frac{37\cdot5}{5}=37.\ \blacktriangle$$

Кошуу, кемитүү жана көбөйтүү белгилеринан жардамында бириктирилген бир нече көп мүчөлөрдөн турган алгебралык туюнтмага *бүтүн туюнтма* дейилет.

Каалагандай бүтүн туюнтма стандарттык көрүнүштөгү көп мүчөгө келтирилиши мүмкүн.

Мисал: $P(a,b)=30a^3b^2-(6a^2b+a)(5ab-2)$ бүтүн туюнтманы стандарттык көрүнүштөгү көп мүчөгө келтир.

$$\triangle\ P(a,b)=30a^3b^2-30a^2b\cdot ab-5ab\cdot a+12a^2b+2a=$$

$$=30a^3b^2-30a^3b^2-5a^2b+12a^2b+2a=7a^2b+2a.$$

Жообу: $7a^2b+2a.\blacktriangle$

Көнүгүүлөр

1. Алгебралык туюнтманын маанисин тап:

1) $3a-2b$, мында $a=\frac{1}{3}, b=1$;

2) $2a+3b$, мында $a=3$, $b=-2$;

3) $0,25a-4c^2$, мында $a=4, c=3$;

4) $\left(2a^2-\frac{1}{3}b\right)$, мында $a=2, b=9$.

2. Алгебралык туюнтманын маанисин тап:

1) $\frac{1}{4}x-\frac{3}{7}y$, мында $x=8, y=-14$;

2) $\frac{2}{3}x+\frac{4}{5}y$, мында $x=9$, $y=-10$;

3) $\frac{a-3b}{a+3b}$, мында $a=4$, $b=-2$;

4) $\frac{a+3c}{2a-c}$, мында $a=3$, $c=-1$.

3. Мунайдын ноосунан 1 саатта 7 т мунай агат, m саатта ноодон канча тонна мунай агып өтөт? Бир суткадачы?

4. 1) m саатта; 2) p секундда; 3) m саат l минут жана p секундда канча минут бар?

5. x жана y сандары айырмасынын үч эселенгенин жаз. Ошол туюнтманын:

1) $x=-0,37$, $y=-0,42$;

2) $x=-2,98$, $y=-4,48$;

3) $x=-\frac{5}{6}$, $y=-\frac{9}{4}$;

4) $x=\frac{2}{15}$, $y=-0,7$

болгондогу сандык маанисин тап.

6. x жана y сандарынын суммасы менен алардын айырмасынын көбөйтүндүсүн жаз. Алынган алгебралык туюнтманын:

1) $x=-\frac{1}{8}$, $y=\frac{1}{4}$;

2) $x=-\frac{5}{8}, y=\frac{3}{4}$;

3) $x=0,15$, $y=-0,75$;

4) $x=1,32$, $y=-1,28$

болгондогу сандык маанисин тап.

Алгебралык туюнтмалардын сандык маанисин тап (**7–8**):

7. 1) $\frac{2mn(n+k)}{n-k}$, мында $m=k=\frac{1}{3}$, $n=\frac{1}{2}$;

2) $\frac{(3p+1)\cdot 2p}{p-l}+\frac{1}{3}$, мында $p=\frac{1}{3}$, $l=1$.

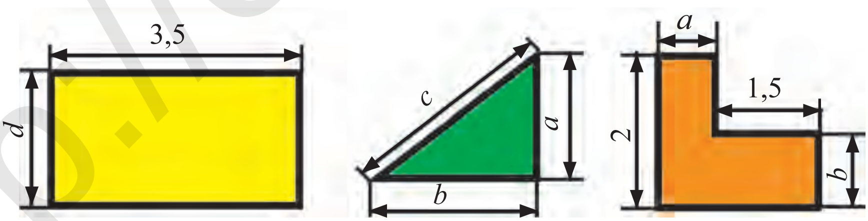
8. 1) $\frac{3(x-y)}{2p+q}$, мында $x=8,31$; $y=2,29$; $p=2,01$; $q=2$;

2) $\frac{5(bc+m)}{2q+4\frac{1}{4}}$, мында $b=\frac{2}{3}$; $c=6$; $q=\frac{1}{2}$, $m=\frac{1}{5}$.

9. Так сандын формуласы $n=2k+1$ ден пайдаланып, $k=0$, $k=1$, $k=7$, $k=10$ болгондо n дин маанисин тап.

10. Алгебралык туюнтма түрүндө жаз:
1) кичинеси n ге барабар болгон эки удаалаш натуралдык сандын суммасы; 2) чоңу m ге барабар болгон эки удаалаш натуралдык сандын көбөйтүндүсү; 3) кичинеси $2k$ га барабар болгон үч удаалаш жуп натуралдык сандын суммасы; 4) кичинеси $2p+1$ ге барабар болгон үч удаалаш так натуралдык сандын көбөйтүндүсү.

11. Фигуралардын периметрин жана аянтын алгебралык туюнтма көрүнүшүндө жаз (1-сүрөт):



1-сүрөт.

12. Үйдү ысытуу үчүн p тонна көмүр камдалды; андан q тонна сарпталды. Канча тонна көмүр калды? 1) $p=20$, $q=15$ болгондо эсепте; 2) q саны p санынан чоң болушу мүмкүнбү? p га барабар болушучу?

13. Күрөш мелдешин көрүү үчүн ар бири 400 сумдан n чыпта жана ар бири 500 сумдан m чыпта сатылды. Бардык чыпталардан канча акча түшкөн? Тиешелүү туюнтма түз жана аны $n=200$, $m=150$; $n=100$, $m=230$ болгондо эсепте.

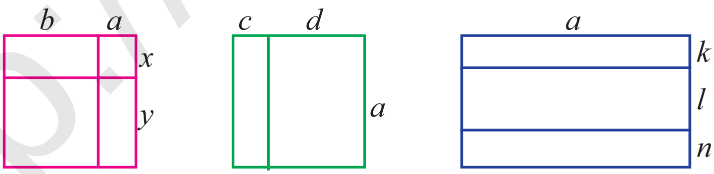
14. Бир альбомдун баасы 200 сум, бир дептердин баасы 40 сум, бир ручканын баасы 60 сум. c альбом, a дептер жана b ручканын жалпы (сумдагы) баасын p тамгасы менен белгилеп, аны формула көрүнүшүндө жаз. Эгерде $c=9$, $a=21$, $b=4$ болсо, бул формула боюнча p ны эсепте.

15. Жылуулук берүү станциясынын газ ноосу аркылуу минут сайын 26 $м^3$ газ өтөт. 5 суткада; m суткада ноодон канча куб метр газ өтөт?

16. Геологдор өз багыты боюнча аракеттенип, атта саатына c километр ылдамдык менен 3 саат 10 минут жүрүштү; агымынын ылдамдыгы саатына a километр болгон дарыяда агым боюнча 1 саат 40 минут салда сүзүштү жана саатына b километр ылдамдык менен 2 саат 30 минут жөө жүрүштү. Багыттын (км деги) узундугун s тамгасы менен белгилеп, геологдор басып өткөн жолдун формуласын жаз. Эгерде $a=3{,}3$ км/саат, $b=5{,}7$ км/саат, $c=10{,}5$ км/саат болсо, багыттын узундугун эсепте.

17. Аралаш сан $a+\frac{b}{c}$ көрүнүшүндө жазылган. Аралаш санды буруш бөлчөккө айландыруунун эрежесин тамгалардын жардамында жаз.

18. 1) 2-сүрөттөгү фигуранын (тик бурчтуктун) аянтын жана периметрин эсептөө үчүн формулаларды түз:



2-сүрөт.

2) Фигуранын жардамында:

а) $(a+b)(x+y)=ax+bx+ay+by$;

б) $a(c+d)=ac+ad$;

в) $a \cdot (k + l + n) = ak + al + an$

барабардыктарын далилде. Бул формулалардын маанисин ач.

19. Төмөнкү барабардыктарга алып келген *турмуштук маселелер* түз:

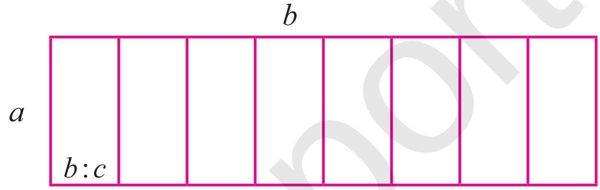
1) $a - (b + c + d) = a - b - c - d$;

2) $a - (b - c) = a - b + c$;

3) $(ab)c = a(bc)$;

4) $a - (b - c + d) = a - b + c - d$.

20. $(ab):c=a\cdot(b:c)$ формуласын далилде. Герметриялык түшүнүктөрдөн жана 3-сүрөттөгү фигурадан пайдалан.



3- сүрөт.

2-§. АЛГЕБРАЛЫК БӨЛЧӨК. БӨЛЧӨКТӨРДҮ КЫСКАРТУУ

1-маселе. Катердин туруктуу суудагы ылдамдыгы саатына a километрге, дарыя агымынын ылдамдыгы саатына b километрге барабар. Катердин дарыянын агымы боюнча кыймыл ылдамдыгы анын дарыянын агымына каршы кыймыл ылдамдыгынан канча эсе чоң?

△ Катернин дарыянын агымы боюнча ылдамдыгы саатына $(a+b)$ километрге барабар; агымга каршы ылдамдыгы саатына $(a-b)$ километрге барабар. Ошондуктан дарыянын агымы боюнча кыймыл ылдамдыгы агымга каршы кыймыл ылдамдыгынан

$$\frac{a+b}{a-b}$$

эсе чоң болот. ▲

$\frac{a+b}{a-b}$ туюнтмага *алгебралык бөлчөк* дейилет. Бул бөлчөктүн алымы $a+b$, бөлүмү болсо $a-b$.

Жалпысынан алганда, *алымы менен бөлүмү алгебралык туюнтмалар болгон бөлчөккө алгебралык бөлчөк* дейилет.

Алгебралык бөлчөктөргө тиешелүү дагы бир нече мисал келтиребиз:

$$\frac{a}{b};\ \frac{2}{x+y};\ \frac{a-b}{c};\ \frac{x(b+c)}{y(a-c)}.$$

Эгерде алгебралык бөлчөккө кирген тамгалардын ордуна кандайдыр сандар коюлса, анда зарыл эсептөөлөр аткарылгандан кийин ошол алгебралык бөлчөктүн *сандык мааниси* алынат.

Мисалы, $a=10,\ b=8$ болгондо, $\frac{a+b}{a-b}$ алгебралык бөлчөктүн сандык мааниси $\frac{10+8}{10-8}=\frac{18}{2}=9$ га барабар болот.

$\frac{a+b}{a-b}$ алгебралык бөлчөгүндө a менен b нын ордуна өз ара барабар эмес ($a\neq b$) каалагандай санды коюуга болот, анткени $a=b$ болгондо, бөлчөктүн бөлүмү нөлгө айланат, нөлгө бөлүүгө болбойт.

Мындан ары алгебралык бөлчөккө кирген тамгалар жол коюлган (зарыл) маанилерди гана, б. а. ошол бөлчөктүн бөлүмү нөлгө барабар болбогон маанилерди гана кабыл алат, деп келишебиз.

Мисалы, $\frac{a}{a(a-1)}$ бөлчөк үчүн зарыл маанилер a нын $a=0$ жана $a=1$ ден башка бардык маанилери болот.

Бөлчөктүн негизги касиетин минтип жазууга болот:

$$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{ma}{mb},}$$

бул жерде $b\neq 0,\ m\neq 0.$

Демек, бөлчөктүн алымы жана бөлүмү бирдей алгебралык туюнтмага көбөйтүлсө же бөлүнсө, анда ага барабар бөлчөк алынат экен, маселен:

$$\frac{3}{4}=\frac{3\cdot 5}{4\cdot 5}=\frac{15}{20},\ \frac{a+b}{b}=\frac{(a+b)\cdot c}{bc}.$$

Бөлчөктүн негизги касиетинен пайдаланып, алгебралык бөлчөктү анын алымы жана бөлүмүнө бир убакытта кирген жалпы көбөйтүүчүгө кыскартууга болот, маселен:

$$\frac{a(b+c)}{a(b-c)}=\frac{b+c}{b-c},\ \frac{(a+b)c}{(a+b)d}=\frac{c}{d}.$$

Бөлчөктөрдү жөнөкөйлөштүрүү үчүн баштап алардын алымы жана бөлүмүнүн жалпы көбөйтүүчүсүн ажыратып алуу керек. Ушуга тиешелүү мисалдар келтиребиз.

2-маселе. Бөлчөктөрдү кыскарт:

1) $\frac{12a^2b}{4ab^2}$; 2) $\frac{m^2-n^2}{m^2+mn}$.

△ 1) $12a^2b$ жана $4ab^2$ бир мүчөлөр $4ab$ жалпы көбөйтүүчүгө ээ. Бөлчөктүн алымын жана бөлүмүн $4ab$ га бөлөбүз:

$$\frac{12a^2b}{4ab^2}=\frac{4ab\cdot 3a}{4ab\cdot b}=\frac{3a}{b}.$$

2) m^2-n^2 жана m^2+mn көп мүчөлөр $m+n$ жалпы көбөйтүүчүгө ээ, анткени $m^2-n^2=(m+n)(m-n)$, $m^2+mn=m(m+n)$. Бөлчөктүн алымы менен бөлүмүн $m+n$ ге бөлөбүз:

$$\frac{m^2-n^2}{m^2+mn}=\frac{(m+n)(m-n)}{m(m+n)}=\frac{m-n}{m}.$$ ▲

Бөлчөктөрдү кыскартуу үчүн бул бөлчөктөрдүн алымы менен бөлүмүн алардын жалпы көбөйтүүчүсүнө бөлүү керек.

Эгерде $\frac{a}{b}$ бөлчөктүн алымы же бөлүмүндөгү белги карама-каршысына өзгөртүлсө, анда берилген бөлчөккө карама-каршы бөлчөк алынышын белгилей кетебиз.

$\frac{-a}{b}$ жана $\frac{a}{b}$; $\frac{a}{-b}$ жана $\frac{a}{b}$ – карама-каршы бөлчөктөр. Ошону менен бирге $\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b}$; $\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}$.

Мисалы, $\frac{-3}{7}=-\frac{3}{7}$; $\frac{-a}{1-a}=-\frac{a}{1-a}=\frac{a}{a-1}$.

3-маселе. $\frac{3a(y-x)}{a^2(x-y)}$ бөлчөгүн кыскарт:

$$\triangle\ \frac{3a(y-x)}{a^2(x-y)}=\frac{-3a(x-y)}{a^2(x-y)}=\frac{-3}{a}=-\frac{3}{a}.\ \blacktriangle$$

Көнүгүүлөр

21. Алымы x жана y сандарынын көбөйтүндүсүнө, бөлүмү болсо алардын суммасына барабар алгебралык бөлчөктү жаз.

22. Алымы p жана q сандарынын айырмасына, бөлүмү болсо алардын көбөйтүндүсүнө барабар болгон алгебралык бөлчөктү жаз.

23. Алымы a жана b сандары квадраттарынын айырмасына, бөлүмү болсо ошол сандар айырмасынын квадратына барабар болгон алгебралык бөлчөктү жаз.

24. Алымы c жана d сандары кубдарынын суммасына, бөлүмү болсо ошол сандар көбөйтүндүсүнүн эки эселенгенине барабар болгон алгебралык бөлчөктү жаз.

25. Алгебралык бөлчөктүн сандык маанисин тап:

1) $\frac{1}{a}$, мында $a=2\frac{3}{5}$;
4) $\frac{a-b}{a+2b}$, мында $a=16$, $b=-3$;
2) $\frac{b+1}{b-1}$, мында $b=1,5$;
5) $\frac{5a+b^2}{a^2-5b}$, мында $a=2$, $b=8$;
3) $\frac{a^2+1}{2a}$, мында $a=-3$;
6) $\frac{-7ab}{3b^2-a^3}$, мында $a=3$, $b=4$.

26. 1) $S=vt$ формуладан v ны;
2) $p=\frac{m}{V}$ формуладан V ны;
3) $C=2\pi R$ формуладан R ди;
4) $P=2(a+b)$ формуладан a ны тап.

27. Ар бир жүк машинасына a тоннадан картошка жүктөш мүмкүн болсо, ар биринде p килограммдан картошка болгон n кап картошканы ташып кетүү үчүн канча жүк машинасы (x) керек болот? x ти $n=90$, $p=50$, $a=1,5$ болгондо тап.

28. Машина саатына орточо c метр линолеум иштеп чыгарат. Эгерде машина күндө n сааттан иштесе, ал a метр линолеумду канча күндө иштеп чыгарат? Изделген убакытты m менен белгилеп, m ди $c=47$, $a=11280$ жана $n=16$ болгондо тап.

29. Берилген эки бөлчөктүн барабардыгын көрсөт:

1) $\frac{6}{7}$ жана $\frac{18}{21}$; 3) $\frac{2}{3}$ жана $\frac{2a}{3a}$; 5) $\frac{m-n}{m+n}$ жана $\frac{m^2-n^2}{(m+n)^2}$;

2) $\frac{-3}{5}$ жана $\frac{27}{-45}$; 4) $\frac{2a}{7b}$ жана $\frac{2a^2b}{7ab^2}$; 6) $\frac{a+3b}{c}$ жана $\frac{(a+3b)c}{c^2}$.

Бөлчөктү кыскарт (**30–45**):

30. 1) $\frac{-48}{-56}$; 2) $\frac{-64}{-80}$; 3) $\frac{-121}{55}$; 4) $\frac{28}{-14}$.

31. 1) $\frac{12a}{20}$; 2) $\frac{2c}{3c}$; 3) $\frac{7b}{21b}$;

4) $\frac{4ab}{8ac}$; 5) $\frac{a^2}{2a}$; 6) $\frac{5x}{x^3y}$.

32. 1) $\frac{a^2}{a^3}$; 2) $\frac{b^3}{b^7}$;

3) $\frac{a^5}{a^4}$; 4) $\frac{b^6}{b^4}$.

33. 1) $\frac{6ab}{4a}$; 2) $\frac{14c}{49c}$; 3) $\frac{a^4b}{ab^3}$;

4) $\frac{3a^2b}{9a^3}$; 5) $\frac{12a^4b^2}{18a^3b^3}$; 6) $\frac{25a^3bc^2}{125ac^3}$.

34. 1) $\frac{4(m+n)}{5(m+n)}$; 3) $\frac{2b(m-n)}{8b(m-n)(m-n)}$; 5) $\frac{2(a-b)}{b-a}$;

2) $\frac{7a(a-b)}{5(a-b)}$; 4) $\frac{3a(a+b)}{9a(a+b)(a-b)}$; 6) $\frac{5(x-y)}{15(y-x)}$.

35. 1) $\frac{(a-b)^2}{a-b}$; 3) $\frac{m-n}{(n-m)^2}$; 5) $\frac{3m(1-x)^2}{9m^2(x-1)^2}$;

2) $\frac{m+n}{(m+n)^4}$; 4) $\frac{(2x-3y)^2}{3y-2x}$; 6) $\frac{8a^2b(a-b)}{4a^3b(b-a)^2}$.

36. 1) $\frac{3x+3y}{6c}$; 3) $\frac{2a+2b}{4a-4b}$; 5) $\frac{ac-bc}{ac+bc}$;

2) $\frac{8a}{4m-4n}$; 4) $\frac{12a-3}{6a+9}$; 6) $\frac{a+ab}{a-ab}$.

37. 1) $\frac{a^2}{a^2+ab}$; 3) $\frac{7a+14b}{3a+6b}$; 5) $\frac{3a-6b}{12b-6a}$;

2) $\frac{pq^3}{p^2q-pq^2}$; 4) $\frac{2m^2-mn}{2mn-n^2}$; 6) $\frac{x^2-2xy}{2y^2-xy}$.

38. 1) $\frac{12x^2-30xy}{30x^2-12xy}$; 2) $\frac{36a^2+24ab}{24a^2+36ab}$; 3) $\frac{m^3-3m^2n}{3m^2n-3m^3}$; 4) $\frac{a^3-2a^2b}{2a^3b^2-a^4b}$.

39. 1) $\frac{a^2-b^2}{a+b}$; 3) $\frac{4c^2-9x^2}{2c-3x}$; 5) $\frac{3a(a-b)}{6a^2(b-a)}$;

2) $\frac{a-b}{a^2-b^2}$; 4) $\frac{25-x^2}{5-x}$; 6) $\frac{5a(c^2-4)}{10a^2(2-c)}$.

40. 1) $\frac{8-3c}{9c^2-64}$; 3) $\frac{2y-10}{25-y^2}$; 5) $\frac{b^2-c^2}{b^4n-c^4n}$;

2) $\frac{100-49b^2}{7b+10}$; 4) $\frac{5y-y^2}{25-y^2}$; 6) $\frac{5a^3b+5ab^3}{a^4-b^4}$.

41. 1) $\frac{d^2-6d+9}{d-3}$; 2) $\frac{b+7}{b^2+14b+49}$; 3) $\frac{9-6a+a^2}{3-a}$; 4) $\frac{1-2p}{1-4p+4p^2}$.

42. 1) $\frac{4y^2-4y+1}{4y^2-1}$; 3) $\frac{3a^2-6ab+3b^2}{6a^2-6b^2}$;

2) $\frac{16a^2-1}{16a^2-8a+1}$; 4) $\frac{50m^2+100mn+50n^2}{15m^2-15n^2}$.

43. 1) $\frac{1-a^2}{(a-1)^2}$; 2) $\frac{(m-n)^2}{n-m}$; 3) $\frac{4y^2-4y+1}{2-4y}$; 4) $\frac{5-2x}{4x^2-20x+25}$.

44. 1) $\frac{9c^2-16}{16-24c+9c^2}$; 4) $\frac{36c-c^3}{c^3+12c^2+36c}$;

2) $\frac{16x^2-24xy+9y^2}{9y^2-16x^2}$; 5) $\frac{25b-49b^3}{49b^3-70b^2+25b}$;

3) $\frac{4x^2-4xy+y^2}{y^2-4x^2}$; 6) $\frac{4b^2-12bc+9c^2}{-2ab+3ac}$.

45. 1) $\frac{2a^5-128a^2}{(2a^2+8a+32)(a^4-4a^3)}$; 3) $\frac{3a^3+ab^2-6a^2b-2b^3}{9a^5-ab^4-18a^4b+2b^5}$;

2) $\frac{2a^4+3a^3+2a+3}{(a^2-a+1)(2a+3)}$; 4) $\frac{3ac^2+3bc^2-3ab^2-3b^3}{6ac^2+6bc^2-6ab^2-6b^3}$.

3-§. БӨЛЧӨКТӨРДҮ ЖАЛПЫ БӨЛҮМГӨ КЕЛТИРҮҮ

Жөнөкөй бөлчөктөрдү кошууда адегенде бөлчөктөр жалпы бөлүмгө келтирилет. Мисалы, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{25}$, $\frac{7}{10}$ бөлчөктөр үчүн жалпы бөлүм 100 саны болот, бул сан 4, 25, 10 сандарынын эң кичине жалпы эселүүсү.

! Алгебралык бөлчөктөрдүн жалпы бөлүмү ошол бөлчөктөр бөлүмдөрүнүн эң кичине жалпы эселүүсү. Бөлчөктөрдү жалпы бөлүмгө келтирүүдө бөлчөктүн негизги касиетинен пайдаланылат.

1-маселе. $\frac{m}{3a^2b}$, $\frac{n}{6ab^2}$ жана $\frac{p}{4ac}$ алгебралык бөлчөктөрүн жалпы бөлүмгө келтир.

△ Берилген бөлчөктөрдүн жалпы бөлүмү ар бир бөлчөктүн бөлүмүнө бөлүнүүгө тийиш. Демек, ал 3 кө, 6 га, 4 кө, б. а. 12 ге; a^2 ка, a га, б. а. a^2 ка; b га жана b^2 ка, б. а. b^2 ка; c га бөлүнүүгө тийиш.

Ошентип, бөлчөктөрдүн жалпы бөлүмү 12, a^2, b^2 жана c көбөйтүүчүлөрдү өз ичине алууга тийиш. Жалпы бөлүм иретинде $12a^2b^2c$ көбөйтүндүнү алуу керек болот. Бул жалпы бөлүмдү биринчи бөлчөктүн бөлүмүнө бөлүп, анын алымы жана бөлүмүн көбөйтүү керек болгон бир мүчөнү табабыз. Бул бир мүчөгө берилген *бөлчөктүн кошумча көбөйтүүчүсү* дейилет. Биринчи бөлчөк үчүн мындай бир мүчө $4bc$ га барабар. Куду ушундай жол менен экинчи жана үчүнчү бөлчөктөр үчүн кошумча көбөйтүүчүлөрдү табабыз: $2ac$ жана $3ab^2$.

Биринчи, экинчи жана үчүнчү бөлчөктөрдүн алымы менен бөлүмүн, тиешелүү түрдө, $4bc$, $2ac$ жана $3ab^2$ ка көбөйтүп, аларды $12a^2b^2c$ жалпы бөлүмгө келтиребиз:

$$\frac{m}{3a^2b}=\frac{4mbc}{12a^2b^2c},\quad \frac{n}{6ab^2}=\frac{2nac}{12a^2b^2c},\quad \frac{p}{4ac}=\frac{3pab^2}{12a^2b^2c}. \ \blacktriangle$$

2-маселе. Бөлчөктөрдү жалпы бөлүмгө келтир:

$$\frac{a}{x^2-y^2};\quad \frac{b}{2x^2-4xy+2y^2};\quad \frac{c}{3x^2+6xy+3y^2}.$$

$\triangle$ Бөлчөктөрдүн бөлүмүн көбөйтүүчүлөргө ажыратабыз. Жалпы бөлүм берилген бөлчөктөрдүн ар биринин бөлүмүнө бөлүнүүгө тийиш:

$$x^2-y^2=(x-y)(x+y);$$

$$2x^2-4xy+2y^2=2\left(x^2-2xy+y^2\right)=2(x-y)^2;$$

$$3x^2+6xy+3y^2=3\left(x^2+2xy+y^2\right)=3(x+y)^2.$$

Жалпы бөлүм биринчи бөлчөктүн бөлүмүнө бөлүнүшү үчүн анын курамында $(x-y)(x+y)$ көбөйтүндү болууга тийиш.

Андан кийин, жалпы бөлүм экинчи бөлчөктүн бөлүмүнө бөлүнүүгө тийиш жана ал үчүн анда $2(x-y)^2$ көбөйтүүчү болууга тийиш. Демек, биринчи бөлчөктүн бөлүмүнө дагы $2(x-y)$ көбөйтүүчүнү да жазып коюу керек, б. а. жалпы бөлүмдүн курамында

$$2(x-y)^2(x+y)$$

көбөйтүндү болушу керек.

Жалпы бөлүм үчүнчү бөлчөктүн $3(x+y)^2$ бөлүмүнө бөлүнүшү үчүн алынган көбөйтүндүгө $3(x+y)$ көбөйтүүчүнү жазып коюу керек. Демек, үч бөлчөктүн жалпы бөлүмү

$$6(x-y)^2(x+y)^2$$

ка барабар болот.

Бөлчөктөрдү жалпы бөлүмгө келтирүү үчүн алардын алымы менен бөлүмүн кошумча көбөйтүүчүлөргө көбөйтүү керек, алар болсо жалпы бөлүмдү ар бир бөлчөктүн бөлүмүнө бөлүү жолу менен табылат; берилген бөлчөктөр үчүн алар тиешелүү түрдө төмөнкүлөргө барабар:

$$6(x-y)(x+y),\ 3(x+y)^2,\ 2(x-y)^2.$$

Демек, берилген бөлчөктөрдү мындайча жазып алууга болот:

$$\frac{a}{x^2-y^2}=\frac{6a(x-y)(x+y)}{6(x-y)^2(x+y)^2};\qquad \frac{b}{2x^2-4xy+2y^2}=\frac{3b(x+y)^2}{6(x-y)^2(x+y)^2};$$

$$\frac{c}{3x^2+6xy+3y^2}=\frac{2c(x-y)^2}{6(x-y)^2(x+y)^2}.\ ▲$$

! Алгебралык бөлчөктөрдү жалпы бөлүмгө келтирүү үчүн:
1) берилген бөлчөктөрдүн жалпы бөлүмүн табуу;
2) ар бир бөлчөк үчүн кошумча көбөйтүүчүнү табуу;
3) ар бир бөлчөктүн алымын анын кошумча көбөйтүүчүсүнө көбөйтүү;
4) ар бир бөлчөктү табылган алым жана жалпы бөлүм менен жазуу керек.

Көнүгүүлөр

Төмөнкү көнүгүүлөрдө бөлчөктөрдү жалпы бөлүмгө келтир (**46–53**):

46. 1) $\frac{1}{2}$ va $\frac{2}{3}$; 3) $\frac{5}{7}$ va $\frac{3}{14}$; 5) $\frac{x}{2y}$ va $\frac{x}{3y}$;

2) $\frac{1}{a}$ va $\frac{2}{b}$; 4) $\frac{a}{b}$ va $\frac{a}{2b}$; 6) $\frac{8}{15}$ va $\frac{5}{12}$.

47. 1) $\frac{3}{4a}$, $\frac{1}{5b}$ жана $\frac{7}{20ab}$; | 2) $\frac{3x}{4y}$, $\frac{6}{xy}$ жана $\frac{4y}{3x}$; | 3) $\frac{7}{a^2}$ жана $\frac{8}{a^3}$; | 4) $\frac{a}{2x}$ жана $\frac{b}{4x^3}$.

48. 1) a жана $\frac{b^2}{a}$; | 2) $3b$ жана $\frac{a^2}{2b}$; | 3) a^2 жана $\frac{c}{2ab}$; | 4) $\frac{b}{3a}$, $\frac{3c}{2b}$ жана ab.

49. 1) $\frac{1}{2p^2}$, $\frac{1}{6pk}$ жана $\frac{1}{3k^2}$;

3) $\frac{2a}{b^2}$, $\frac{4}{15a^2b}$ жана $\frac{3}{20a^3b^4}$;

2) $\frac{1}{6b^2}$, $\frac{a^2+b^2}{9a^2b^2}$ жана $\frac{3-a^2}{18ab^2}$;

4) $\frac{7}{20x^4y}$, $\frac{31}{6xy^3}$ жана $\frac{4}{3x^2y^4}$.

50. 1) $\frac{3}{x+y}$ жана $\frac{5}{x}$;

3) $\frac{7x}{2(x-1)}$ жана $\frac{5x}{x-1}$;

2) $\frac{6}{a-1}$ жана $\frac{2}{a}$;

4) $\frac{2a^2}{3(a+1)}$ жана $\frac{5a^2}{4(a+1)}$.

51. 1) $\frac{1}{x-y}$ жана $\frac{1}{x+y}$;

3) $\frac{5x}{2x-2}$ жана $\frac{3}{4x-4}$.

2) $\frac{7a}{3x-y}$ жана $\frac{6b}{3x+y}$;

4) $\frac{3x}{4x+4y}$ жана $\frac{x}{8x+8y}$.

52. 1) $\frac{3b}{b-2}$ жана $\frac{4}{b^2-4}$;

3) $\frac{1}{1-a}$, $\frac{2a}{1+a}$ жана $\frac{a^2}{1-a^2}$;

2) $\frac{7a}{x^2-9}$ жана $\frac{a}{x+3}$;

4) $\frac{6x}{x-y}$, $\frac{7xy}{x+y}$ жана $\frac{3}{x^2-y^2}$.

53. 1) $\frac{m}{2m+2n}$, $\frac{n}{8m-8n}$ жана $\frac{mn}{6m^2-6n^2}$; | 2) $\frac{2c}{5b-5c}$, $\frac{3a^2}{35b^2-35c^2}$ жана $\frac{7b}{14b+14c}$;

3) $\frac{1}{a^2-4b^2}$, $\frac{1}{3a^2+6ab}$ жана $\frac{1}{2ab-a^2}$; | 4) $\frac{5}{4x-4}$, $\frac{4x}{1-x^2}$ жана $\frac{1}{3x^2+3x}$.

№1 ***Бир курт жерден дарактын чокусуна чыкмак болот. Ал даракты бойлой түнкүсүн 2 м бийиктикке чыккандан кийин, күндүзү 1 м ге ылдый түшөт экен. 9-суткада ал чокуга чыгып алыптыр. Дарактын бийиктиги канча метр экен?***

4-§. АЛГЕБРАЛЫК БӨЛЧӨКТӨРДҮ КОШУУ ЖАНА КЕМИТҮҮ

Бөлүмү бирдей бөлчөктөрдү кошуу жана кемитүүнүн эрежелерин төмөнкүдөй жазууга болот:

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{m}=\frac{a+b}{m}; \qquad \frac{a}{m}-\frac{b}{m}=\frac{a-b}{m}.$$

1-маселе. $\frac{a-b}{a+b}$, $\frac{2a-b}{a+b}$ жана $\frac{a-2b}{a+b}$ бөлчөктөрүн кош.

$$\triangle\ \frac{a-b}{a+b}+\frac{2a-b}{a+b}+\frac{a-2b}{a+b}=\frac{a-b+2a-b+a-2b}{a+b}=\frac{4a-4b}{a+b}=\frac{4(a-b)}{a+b}.\ \blacktriangle$$

2-маселе. $\frac{a^2}{a+b}$ жана $\frac{b^2}{a+b}$ бөлчөктөрүнүн айырмасын тап.

$$\triangle\ \frac{a^2}{a+b}-\frac{b^2}{a+b}=\frac{a^2-b^2}{a+b}=\frac{(a+b)(a-b)}{a+b}=a-b.\ \blacktriangle$$

Бөлүмү түрдүүчө бөлчөктөрдү кошуу же кемитүү үчүн аларды жалпы бөлүмгө келтирүү жана бөлүмү бирдей бөлчөктөрдү кошуу же кемитүү эрежесинен пайдалануу керек.

3-маселе. $\frac{1}{a^3}$, $\frac{1}{2a^2b}$ жана $\frac{1}{3ab^2}$ бөлчөктөрүн кош.

△ Берилген бөлчөктөрдүн жалпы бөлүмү $6a^3b^2$ көбөйтүндү болот. Демек,

$$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{2a^2b}+\frac{1}{3ab^2}=\frac{6b^2}{6a^3b^2}+\frac{3ab}{6a^3b^2}+\frac{2a^2}{6a^3b^2}=\frac{2a^2+3ab+6b^2}{6a^3b^2}.\ \blacktriangle$$

4-маселе. $\frac{a}{3b^2c}$ жана $\frac{c}{15ab^2}$ бөлчөктөрүнүн айырмасын тап.

$$\triangle\ \frac{a}{3b^2c}-\frac{c}{15ab^2}=\frac{5a^2}{15ab^2c}-\frac{c^2}{15ab^2c}=\frac{5a^2-c^2}{15ab^2c}.\ \blacktriangle$$

5-маселе. $\frac{1}{x^2-x}$ жана $\frac{3}{x^2-1}$ бөлчөктөрүн кош.

△ Бөлчөктөрдүн бөлүмдөрүндөгү көп мүчөлөрдү көбөйтүүчүлөргө ажыратабыз:

$$x^2-x=x(x-1),\ x^2-1=(x-1)(x+1).$$

Бөлчөктөрдүн жалпы бөлүмү $x(x-1)(x+1)$ көбөйтүндү болот. Бөлчөктөрдү жалпы бөлүмгө келтирип, табабыз:

$$\frac{1}{x^2-x}+\frac{3}{x^2-1}=\frac{1}{x(x-1)}+\frac{3}{(x-1)(x+1)}=\frac{x+1}{x(x^2-1)}+\frac{3x}{x(x^2-1)}=$$

$$=\frac{x+1+3x}{x(x^2-1)}=\frac{4x+1}{x(x^2-1)}.$$ ▲

Бөлүмү түрдүүчө болгон бөлчөктөрдү кошуу же кемитүүнү төмөнкү тартипте аткарууга болот:
1) бөлчөктөрдүн жалпы бөлүмү табылат;
2) бөлчөктөр жалпы бөлүмгө келтирилет;
3) алынган бөлчөктөр кошулат;
4) мүмкүн болсо, натыйжа жөнөкөйлөштүрүлөт.

6-маселе. $\frac{1}{a^2+4a+4}-\frac{4}{a^4+4a^3+4a^2}+\frac{4}{a^3+2a^2}$ туюнтманын сандык маанисин $a=0{,}5$ болгондо эсепте.

△ Берилген туюнтманы төмөнкүдөй алмаштырууга болот:

$$\frac{1}{(a+2)^2}-\frac{4}{a^2(a^2+4a+4)}+\frac{4}{a^2(a+2)}=\frac{1}{(a+2)^2}-\frac{4}{a^2(a+2)^2}+\frac{4}{a^2(a+2)}=$$

$$=\frac{a^2-4+4(a+2)}{a^2(a+2)^2}=\frac{a^2+4a+4}{a^2(a+2)^2}=\frac{1}{a^2}.$$

Демек, туюнтманын изделген сандык мааниси:

$$\frac{1}{0{,}5^2}=\frac{1}{0{,}25}=\frac{100}{25}=4.$$ ▲

Көнүгүүлөр

Амалдарды аткар (**54–60**):

54. 1) $\frac{p}{q^2}+\frac{3p}{q^2}$; 2) $\frac{8a}{b^3}-\frac{3a}{b^3}$; 3) $\frac{a}{a+b}+\frac{c}{a+b}$; 4) $\frac{x}{n+a}-\frac{y}{n+a}$.

55. 1) $\frac{c+d}{2a}+\frac{2c-d}{2a}$; 2) $\frac{a+2b}{3c^2}+\frac{5a-2b}{3c^2}$; 3) $\frac{a+b}{2c}-\frac{a-b}{2c}$;

4) $\frac{10a-b}{a^3}-\frac{3a-b}{a^3}$; 5) $\frac{(1+b)^2}{5d}+\frac{(1-b)^2}{5d}$; 6) $\frac{(2+a)^2}{a^2b}-\frac{(2-a)^2}{a^2b}$.

56. 1) $\frac{2}{5}+\frac{3}{7}$; 3) $\frac{2}{3a}+\frac{1}{a}$; 5) $\frac{c}{15a}+\frac{d}{3}$;

2) $\frac{4}{7}-\frac{5}{28}$; 4) $\frac{1}{b}-\frac{2}{5b}$; 6) $\frac{a}{4}-\frac{b}{12d}$.

57. 1) $\frac{m}{2}-\frac{1}{n}$; 2) $\frac{3}{a}+\frac{b}{5}$; 3) $5-\frac{1}{a}$; 4) $\frac{2}{b}+7$.

58. 1) $5-\frac{2}{b}+\frac{3}{b^2}$; 2) $\frac{2}{c}+4-\frac{3}{c^2}$;

3) $d-\frac{c}{d}+\frac{c^2}{d^2}$; 4) $\frac{m}{n}-k+\frac{m^2}{n^2}$.

59. 1) $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}$; 3) $\frac{a}{bc}-\frac{a}{bd}$; 5) $\frac{3}{m^2}+\frac{4}{mn}$;

2) $\frac{1}{mn}-\frac{1}{mk}$; 4) $\frac{b}{ac}+\frac{b}{cd}$; 6) $\frac{2}{mn}-\frac{3}{n^3}$.

60. 1) $\frac{3c}{4a^3b}+\frac{5d}{6ab^3}$; 3) $\frac{2}{3y^3}-\frac{1}{6x^2y}+\frac{5}{12xy^2}$; 5) $\frac{a}{b^2}+\frac{b}{c^2}+\frac{c}{a^2}$;

2) $\frac{2a}{9b^4}-\frac{7c}{6a^3b}$; 4) $\frac{5}{7x^2y}-\frac{3}{4xy^2}+\frac{11}{14x^2y^2}$; 6) $\frac{b}{c}+\frac{b}{c^2d}+\frac{b}{cd^2}$;

Алгебралык бөлчөктөрдү кош жана кемит (**61–72**):

61. 1) $\frac{2x}{3(a-b)}+\frac{x}{a-b}$; 3) $\frac{2a^2}{3(a+1)}+\frac{5a^2}{4(a+1)}$;

2) $\frac{7x}{2(x-1)}-\frac{5x}{x-1}$; 4) $\frac{4y}{5(y-3)}-\frac{5x}{2(y-3)}$.

62. 1) $\frac{5}{2x-2}+\frac{3}{4x-4}$; 3) $\frac{a}{3a+3b}-\frac{2a}{6a+6b}$;

2) $\frac{7}{5b+5}-\frac{3}{10b+10}$; 4) $\frac{3x}{4x+4y}-\frac{x}{8x+8y}$.

63. 1) $\frac{3}{a^2+a}+\frac{5a}{ab+b}$; 3) $\frac{y+a}{b^2+ba}+\frac{y-b}{ab+a^2}$;

2) $\frac{5b}{ax+ay}-\frac{2a}{bx+by}$; 4) $\frac{y-b}{a^2-ab}-\frac{y-a}{ab-b^2}$.

64. 1) $\frac{3}{x+y}-\frac{5}{x}$; 3) $\frac{1}{x(x-3)}+\frac{1}{x(x+3)}$;

2) $\frac{6}{a}-\frac{10}{a-1}$; 4) $\frac{4}{5(a-b)}-\frac{7}{8(a+b)}$.

65. 1) $\frac{a}{1-b^2}+\frac{1}{1+b}$; 3) $\frac{5+p^2}{p^2-36}-\frac{p}{6+p}$;

2) $\frac{2}{x^2-9}+\frac{1}{x+3}$; 4) $\frac{2x}{x-4}-\frac{5x-2}{x^2-16}$.

66. 1) $\frac{2x}{x-4}-\frac{5x-2}{16-x^2}$; 3) $\frac{c^2-8}{2c+3}-\frac{16c-2c^3}{9-4c^2}$;

2) $\frac{12n-5}{n^2-49}+\frac{6}{7-n}$; 4) $\frac{21y^2+1}{1-9y^2}-\frac{y}{3y-1}$.

67. 1) $\frac{3}{a+2}+\frac{2a}{(a+2)^2}$; 2) $\frac{a}{(3a+1)^2}+\frac{4}{3a+1}$.

68. 1) $\frac{2y+8}{y^2-4y+4}-\frac{7}{y-2}$;

2) $\frac{4-5x}{1+6x+9x^2}-\frac{2}{3x+1}$;

3) $\frac{7}{(a-b)^2}-\frac{5}{b-a}$;

4) $\frac{4}{(m-n)^2}-\frac{7}{n-m}$;

5) $\frac{2a}{25-10a+a^2}+\frac{10}{a^2-25}$;

6) $\frac{1}{x^2-6x+9}+\frac{1}{(x+3)^2}$.

69. 1) $a+\frac{a}{a-1}$;

2) $b-\frac{b}{b-2}$;

3) $c+1-\frac{c^2}{c-1}$;

4) $\frac{a^2}{a+1}-a+1$.

70. 1) $\frac{7}{a+b}+\frac{8}{a-b}-\frac{16b}{a^2-a^2}$;

2) $\frac{6x}{x^2-y^2}-\frac{3}{x-y}-\frac{4}{x+y}$;

3) $\frac{3}{a+3}+\frac{2}{3-a}-\frac{6}{a^2-9}$;

4) $\frac{3}{4a^2-9}-\frac{8}{2a+3}-\frac{7}{3-2a}$.

71. 1) $\frac{a+b}{a}-\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a^2-ab}$;

2) $\frac{5b-1}{3b^2-3}+\frac{b+2}{2b+2}-\frac{b+1}{b-1}$;

3) $\frac{6a}{9a^2-1}+\frac{3a+1}{3-9a}+\frac{3a-1}{6a+2}$;

4) $\frac{7}{m}-\frac{4}{m-2n}-\frac{m-n}{4n^2-m^2}$;

5) $x-\frac{xy}{x+y}-\frac{x^3}{x^2-y^2}$;

6) $a-2+\frac{4a}{2+a}-\frac{a^3+b}{a^2+2a}$.

72. 1) $\frac{a+1}{a^3-1}-\frac{1}{a^2+a+1}$;

2) $\frac{a^2+4}{a^3+8}-\frac{1}{a+2}$;

3) $\frac{a+b}{a^2-ab+b^2}-\frac{1}{a+b}$;

4) $\frac{m^2-3m+9}{m^3-27}-\frac{1}{m-3}$.

73. Туюнтманы жөнөкөйлөштүрүп, анын сандык маанисин тап:

1) $\dfrac{8a^2}{a^3-1}+\dfrac{a+1}{a^2+a+1}$, мында $a=2$;

2) $\dfrac{3c^2-c+3}{c^3-1}-\dfrac{c-1}{c^2+c+1}+\dfrac{2}{1-c}$, мында $c=1\dfrac{1}{2}$.

5-§. АЛГЕБРАЛЫК БӨЛЧӨКТӨРДҮ КӨБӨЙТҮҮ ЖАНА БӨЛҮҮ

Алгебралык бөлчөктөрдү көбөйтүү жана бөлүү да жөнөкөй бөлчөктөрдү көбөйтүү жана бөлүү эрежелери боюнча аткарылат:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}; \qquad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}.$$

1-маселе. Бөлчөктөрдү көбөйтүр:

$$\frac{1}{2xy},\ \frac{4x^2y^3}{5z}\ \text{va}\ \frac{10z^2}{3x^3}.$$

△ $\dfrac{1}{2xy}\cdot\dfrac{4x^2y^3}{5z}\cdot\dfrac{10z^2}{3x^3}=\dfrac{1\cdot 4x^2y^3\cdot 10z^2}{2xy\cdot 5z\cdot 3x^3}=\dfrac{4y^2z}{3x^2}$. ▲

2-маселе. $\dfrac{a-b}{a^2+ab}$ жана $\dfrac{b^2+ab}{(a-b)^2}$ бөлчөктөрүн көбөйтүр.

△ Көбөйтүүчүлөргө ажыратып, табабыз:

$$\frac{a-b}{a^2+ab}\cdot\frac{b^2+ab}{(a-b)^2}=\frac{(a-b)\,b\,(a+b)}{a(a+b)\,(a-b)^2}=\frac{b}{a(a-b)}.\ ▲$$

3-маселе. $\dfrac{m+n}{9m^2n^3}$ жана $\dfrac{m^2-n^2}{27mn^2}$ бөлчөктөрүн бөл.

△ $\dfrac{m+n}{9m^2n^3}:\dfrac{m^2-n^2}{27mn^2}=\dfrac{(m+n)\cdot 27mn^2}{9m^2n^3\left(m^2-n^2\right)}=\dfrac{(m+n)\,3}{mn\,(m-n)\,(m+n)}=\dfrac{3}{mn\,(m-n)}$. ▲

Алгебралык бөлчөктү даражага көтөрүүдө ушул $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ формуладан пайдаланууну эскерте кетебиз.

Мисалы,

$$\left(\frac{4a^2}{b}\right)^2 = \frac{16a^4}{b^2}; \quad \left(\frac{a+b}{3c}\right)^3 = \frac{(a+b)^3}{27c^3}.$$

Бөлчөктөрдү көбөйтүр (**74–75**):

74. 1) $\frac{85}{24}\cdot\frac{72}{17}$; 2) $\frac{256}{169}\cdot\frac{13}{64}$; 3) $50\cdot\frac{7}{625}$; 4) $\frac{5}{26}\cdot 39$.

75. 1) $\frac{a^3b}{c}\cdot\frac{c^2}{a^4}$; 3) $\frac{6a}{5b}\cdot\frac{15c}{2d}$; 5) $\frac{2a}{3b}\cdot 3c$;

2) $\frac{m^2n^2}{k}\cdot\frac{k^3}{m^3n^3}$; 4) $\frac{4m}{9n}\cdot\frac{27k}{16d}$; 6) $14a^2\cdot\frac{b^2}{7c^3}$.

76. Бөлчөктөрдү бөл:

1) $\frac{3}{5}:\frac{3}{7}$; 3) $\frac{a}{8}:\frac{1}{3}$; 5) $\frac{2}{a}:\frac{6}{7}$;

2) $\frac{11}{12}:\frac{2}{5}$; 4) $\frac{6}{c}:\frac{m}{13}$; 6) $\frac{9}{35}:\frac{b}{5}$.

77. Бөлчөктөрдү бөл:

1) $\frac{8}{17}:\frac{8}{17}$; 3) $\frac{3a}{7b}:\frac{a}{b}$; 5) $\frac{2a}{3b}:\frac{a^2}{bc}$;

2) $\frac{a}{b}:\frac{a}{b}$; 4) $\frac{c}{2d}:\frac{4c^2}{5d}$; 6) $\frac{5m}{n^2}:\frac{10m^3}{n}$.

78. Бөлчөктөрдү бөл:

1) $\frac{17}{12}:\frac{34}{39}$; 3) $\frac{4}{13}:5$; 5) $12:\frac{8}{9}$;

2) $\frac{54}{25}:\frac{81}{75}$; 4) $\frac{a}{b}:c$; 6) $a:\frac{b}{c}$.

79. Бөлчөктөрдү бөл:

1) $\frac{a^2b}{c} : \frac{a^4}{c^2}$; 3) $\frac{4a}{5b} : \frac{12c}{25d}$; 5) $\frac{6a}{5b} : (5c)$;

2) $\frac{mn}{k} : \frac{m^2n^2}{k^3}$; 4) $\frac{8m}{9n} : \frac{16k}{27d}$; 6) $12a^2 : \frac{4d}{5c^2}$.

Көрсөтүлгөн амалдарды аткар (**80–86**):

80. 1) $\left(\frac{5a}{7b}\right)^2 \cdot \frac{14b^2}{25a^3}$; 2) $\left(\frac{3a^2}{2b}\right)^3 \cdot \frac{16b^3}{21a^4}$; 3) $\frac{2a^2}{5b^2} : \frac{12a^2}{15b^2}$;

4) $\frac{3a^3}{7b} : \frac{9a^4}{21b}$; 5) $\left(\frac{ab}{cd}\right)^2 \cdot acd$; 6) $abc^2 \cdot \left(\frac{ab}{cd}\right)^2$.

81. 1) $\frac{8a^2b}{9c} \cdot \frac{36c^3}{5a^3b}$; 3) $\frac{16x^2y}{7z} : \frac{20xy^3}{21z^2}$; 5) $\frac{18m^3n^5}{7k} : (9n^2)$;

2) $\frac{7b^4}{9c^5y} : \frac{35b^4c^2}{18c^4y^2}$; 4) $\frac{46d^3c}{15a} : \frac{23dc^2}{5a^3}$; 6) $24k^2 : \frac{12m^4k^2}{11p^3n}$.

82. 1) $\frac{3x^2y}{4a^2b} \cdot 4a^2b$; 3) $15xy : \frac{30xy}{7a^2b}$;

2) $\frac{5a^2b}{7xy^2} \cdot 14xy^2$; 4) $\frac{7x^2y}{2a^2b} : (14x^2y)$.

83. 1) $\frac{7-x}{a+b} \cdot \frac{a-b}{7-x}$; 3) $\frac{c+d}{c-d} : \frac{c}{c-d}$; 5) $\frac{a^2-ab}{b} \cdot \frac{b}{a}$;

2) $\frac{x-y}{2a} \cdot \frac{4b}{x-y}$; 4) $\frac{a-b}{2b} : \frac{a-b}{6b^2}$; 6) $\frac{a^2-ab}{b} \cdot \frac{b}{a}$;

84. 1) $\frac{a+1}{b} \cdot \frac{4b^2}{a^2-1}$; 4) $\frac{5m}{m^2-n^2} : \frac{15m^3}{m-n}$;

2) $\frac{1-a}{3b^2} \cdot \frac{b^3}{1-a^2}$; 5) $\frac{3(x+y)}{4y^2(x^2+y^2)} \cdot \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$;

3) $\frac{a^2-b^2}{9b^2} : \frac{a+b}{3b}$; 6) $\frac{5(a-b)}{3(a^2+b^2)} : \frac{(a-b)^2}{a^2+b^2}$.

85. 1) $\frac{a^2-b^2}{3a+3b}\cdot\frac{3a^2}{5b-5a}$; 4) $\frac{3n^2-3m^2}{n^2+np}\cdot\frac{6m-6n}{n+p}$;

2) $\frac{5x^2-5y^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{3x^2}{10y-10x}$; 5) $\frac{a^2+b^2}{x^3+x^2y}\cdot\frac{x^2-y^2}{a^4-b^4}$;

3) $\frac{a^2-25}{a^2-3a}:\frac{a+5}{9-a^2}$; 6) $\frac{a^2+b^2}{a^2-ab}:\frac{a^4b-b^5}{a^2b-ab^2}$.

86. 1) $\frac{a-5}{a^2+6a+9}\cdot\frac{(a+3)^2}{a^2-25}$; 3) $\frac{a^2-49}{a^2+2ab+b^2}\cdot\frac{a+b}{a-7}$;

2) $\frac{b^2-8b+16}{b+3}:\frac{(b-4)^2}{b^2-9}$; 4) $\frac{a^2-2a+1}{2a+1}:\frac{a-1}{4a^2-1}$.

6-§ БӨЛЧӨК-РАЦИОНАЛДУУ ТУЮНТМАЛАРДЫ ОКШОШ АЛМАШТЫРУУ

Арифметикалык амал белгилери менен бириктирилген бир нече алгебралык бөлчөктөрдөн түзүлгөн туюнтмага *бөлчөк-рационалдуу* туюнтма дейилет. Бөлчөк-рационалдуу туюнтманын бөлүмүндөгү көп мүчө нөлгө барабар болбоого тийиш.

Бөлчөк-рационалдуу туюнтмаларды алгебралык бөлчөктөр баш ийген эрежелерден пайдаланып жөнөкөйлөштүрүүгө, алардын үстүндө *окшош алмаштырууларды* аткарууга болот.

1-маселе. Бөлчөк-рационалдуу туюнтманы жөнөкөйлөштүр:

$$R(x,y)=\frac{1+\frac{1}{x}}{\frac{6}{x}+\frac{6}{xy}+\frac{12}{y}}-\frac{\frac{xy}{6}}{2x+y+1},\ x\neq0,\ y\neq0.$$

△ Алгебралык бөлчөктөрдү жалпы бөлүмгө келтирүү жана кошуунун эрежелери боюнча:

$$R(x,y)=\frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{6y+12x+6}{xy}}-\frac{\frac{xy}{6}}{2x+y+1}=$$

Алгебралык бөлчөктөрдү бөлүүнүн эрежеси боюнча:

$$=\frac{(x+1)xy}{x(12x+6y+6)}-\frac{xy}{6(2x+y+1)}=$$

Нөлдөн айырмалуу ($x\neq 0$) санына кыскартып, кашааларды ачабыз:

$$=\frac{(x+1)y}{12x+6y+6}-\frac{xy}{12x+6y+6}=$$

Алгебралык бөлчөктөрдү кемитүүнүн эрежеси боюнча:

$$=\frac{xy+y-xy}{12x+6y+6}=$$

Окшош мүчөлөрдү тегеректейбиз жана бөлүмдөгү жалпы көбөйтүүчүнү кашаадан тышка чыгарабыз:

$$=\frac{y}{12x+6y+6}=\frac{y}{6(2x+y+1)}.$$

Жообу: $R(x,y)=\dfrac{y}{6(2x+y+1)}$. ▲

2-маселе. Туюнтманы жөнөкөйлөштүр: $\left(\dfrac{a+1}{2a-2}-\dfrac{1}{2a^2-2}\right)\cdot\dfrac{2a+2}{a+2}$.

△ Кашаанын ичиндеги туюнтмаларды жөнөкөйлөштүрөлү:

$$\frac{a+1}{2a-2}-\frac{1}{2a^2-2}=\frac{a+1}{2(a-1)}-\frac{1}{2(a^2-1)}=\frac{(a+1)^2-1}{2(a^2-1)}=$$

$$=\frac{(a+1-1)(a+1+1)}{2(a^2-1)}=\frac{a(a+2)}{2(a+1)(a-1)}.$$

Көбөйтүндүнү табабыз:

$$\frac{a(a+2)}{2(a+1)(a-1)}\cdot\frac{2a+2}{a+2}=\frac{a(a+2)\,2(a+1)}{2(a+1)(a-1)(a+2)}=\frac{a}{a-1}.\ \blacktriangle$$

3-маселе. Көрсөтүлгөн амалдарды аткар:

$$\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}\right):\left(\frac{a+b}{a-b}-1\right).$$

△ Биринчи кашаанын ичиндеги амалды аткарабыз:

$$\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{(a-b)(a+b)}=\frac{(a+b+a-b)(a+b-a+b)}{a^2-b^2}=$$

$$=\frac{2a\cdot 2b}{a^2-b^2}=\frac{4ab}{a^2-b^2}.$$

Экинчи кашаанын ичиндеги амалды аткарабыз:

$$\frac{a+b}{a-b}-1=\frac{a+b-a+b}{a-b}=\frac{2b}{a-b}.$$

Бөлөбүз:

$$\frac{4ab}{a^2-b^2}:\frac{2b}{a-b}=\frac{4ab(a-b)}{(a^2-b^2)2b}=\frac{2a}{a+b}.\ \blacktriangle$$

4-маселе. Бассейн биринчи ноо аркылуу a саатта, экинчиси аркылуу b саатта толот. Эгерде бир убакытта эки ноо ачып коюлса, бассейн канча саатта толот?

△ Бассейнндин көлөмү V болсун, дейли. Бир саатта биринчи ноо $\frac{V}{a}$ га барабар көлөмдү, экинчиси $\frac{V}{b}$ га барабар көлөмдү толтурат, эки ноо болсо бир саатта $\frac{V}{a}+\frac{V}{b}$ га барабар көлөмдү толтурат. Изделген убакыт m болсун. m саатта эки ноо бассейнди толук толтурууга тийиш, б. а.

$$\left(\frac{V}{a}+\frac{V}{b}\right)t=V.$$

Барабардыктын эки бөлүгүн V га бөлүп,

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)t=1$$

ди алабыз. Кашаанын ичиндеги бөлчөктөрдүн суммасы $\frac{a+b}{ab}$ га барабар. Ошондуктан $\frac{a+b}{ab}t=1$, мындан $t=\frac{ab}{a+b}$. ▲

Көнүгүүлөр

Көрсөтүлгөн амалдарды аткар (**87–92**):

87. 1) $\left(\frac{a}{2}-\frac{a}{3}\right)\cdot\frac{1}{a^2}$; 3) $\frac{a-b}{a+b}\left(\frac{a}{5}+\frac{b}{5}\right)$; 5) $1:\left(1+\frac{1}{a}\right)$;

2) $\frac{a^2}{3}\cdot\left(\frac{2}{a}+\frac{2}{a^2}\right)$; 4) $\frac{ab}{a-b}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)$; 6) $b:\left(b+\frac{1}{b}\right)$.

88. 1) $\left(1+\frac{1}{a}\right):\left(1-\frac{1}{a}\right)$; 3) $\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}-2\right):\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)$;

2) $\left(a+\frac{a}{b}\right)\left(a-\frac{a}{b}\right)$; 4) $\left(\frac{m}{n}+\frac{n}{m}+2\right)\left(1+\frac{m-n}{m+n}\right)$.

89. 1) $\left(1-\frac{a-b}{a+b}\right)\left(2+\frac{2b}{a-b}\right)$; 3) $\left(\frac{6}{a-b}-\frac{5}{a+b}\right)\cdot\frac{a-b}{a+11b}$;

2) $\left(1+\frac{a+b}{a-b}\right)\left(2-\frac{2a}{a+b}\right)$; 4) $\left(\frac{3}{c}+\frac{3}{c+d}\right)\cdot\frac{c}{18(2c+d)}$.

90. 1) $\left(\frac{2m+1}{2m-1}-\frac{2m-1}{2m+1}\right):\frac{4m}{10m-5}$; 3) $\frac{y-1}{y}:\left(\frac{y^2+1}{y^2+2y}-\frac{2}{y+2}\right)$;

2) $\left(\frac{z+6}{3z+9}-\frac{1}{z+3}\right):\frac{z+2}{27z}$; 4) $\frac{m-2}{m-5}:\left(\frac{m^2+24}{m^2-25}-\frac{4}{m-5}\right)$.

91. 1) $\frac{a^2+ab}{a^2+b^2}\cdot\left(\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}\right)$;

3) $\left(\frac{c+d}{c}-\frac{2c}{c-d}\right)\cdot\frac{d-c}{c^2+d^2}$;

2) $\frac{ab-b^2}{a^2+b^2}\cdot\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}\right)$;

4) $\left(\frac{2c}{c+d}+\frac{d-c}{c}\right)\cdot\frac{c+d}{c^2+d^2}$.

92. 1) $\left(\frac{a+1}{2a-1}+\frac{6}{2a^2-2}-\frac{a+3}{2a+2}\right)\cdot\frac{4a^2-4}{3}$;

2) $\left(\frac{b}{a^2+ab}+\frac{2}{a+b}+\frac{a}{b^2+ab}\right):\frac{a^2-b^2}{4ab}$;

3) $\frac{a^2-c^2}{a+b}\cdot\frac{a^2-b^2}{ac+c^2}\cdot\left(a+\frac{ac}{a-c}\right)$;

4) $\frac{c^2-ac}{a^2-b^2}\cdot\frac{a-b}{c^2-a^2}:\left(c-\frac{ac}{a+c}\right)$.

93. Көлөмү V болгон муз бөлүгүнүн массасы p килограммга барабар. Көлөмү V_1 болгон бөлүктүн массасы эмнеге барабар?

94. Автомобиль саатына v километр ылдамдык менен аракеттенип, s километр жол жүрдү. Эгерде мотоциклчинин ылдамдыгы саатына u километр болсо, ошол убакыттын ичинде ал канча жол жүрөт?

95. Моторлуу кайыктын туруктуу суудагы ылдамдыгы саатына v километр, дарыя агымынын ылдамдыгы болсо v_1 километр. Кайык агым боюнча аракеттенип, s километр жүрдү. Моторлуу кайык агымга каршы ошол убакыттын ичинде канча аралыкты басып өтөт?

96. *(Абу Райхан Берунийнин маселеси.)* Эки буюмдан биринин 10 у бир динар (акча бирдиги) жана экинчисинин 15 и бир динар. Бир динарга эки буюмдан бирдей санда канча даанадан сатып алууга болот?

7- §. $y=\frac{k}{x}$ ФУНКЦИЯСЫ. КАСИЕТТЕРИ, ГРАФИГИ

1 - маселе. $y=\frac{1}{x}$ функциясынын графигин түз.

△ 1) аныкталуу облусу – нөлдөн башка бардык жөнөкөй;

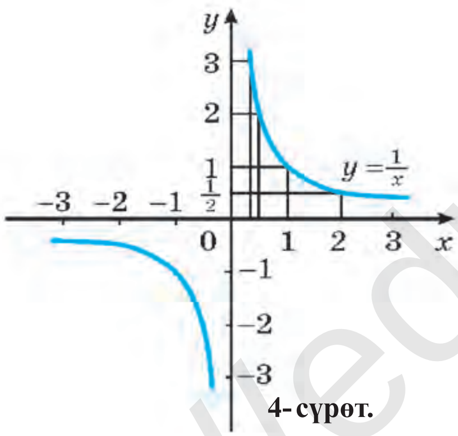
2) функция – так, анткени $x\neq 0$ болгондо $\frac{1}{-x}=-\frac{1}{x}$;

3) функция $x > 0$ аралыкта терс көрсөткүчтүү даражалуу функциянын касиети боюнча азаят, анткени $\frac{1}{x} = x^{-1}$;

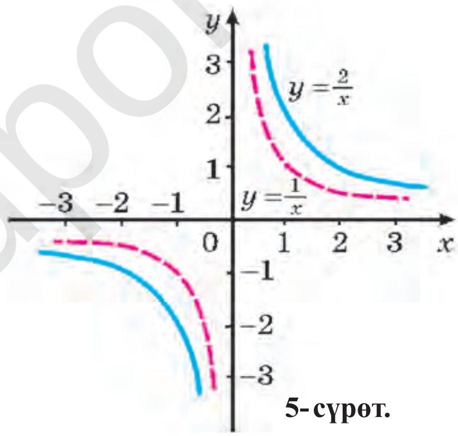
4) $x > 0$ болгондо функция оң маанилерди кабыл алат;

5) графикке тиешелүү бир нече, мисалы, $(\frac{1}{3}; 3)$, $(\frac{1}{2}; 2)$, $(1; 1)$, $(2; \frac{1}{2})$ чекиттерин таап, $x > 0$ дүн маанилери үчүн графиктин бир бөлүгүн түзөбүз жана андан кийин симметриянын жардамында $x<0$ үчүн калган бөлүгүн түзөбүз (4-сүрөт). ▲

$y = \frac{1}{x}$ функциянын графигине *гипербола* дейилет. Ал *тармактар* деп аталган эки бөлүктөн түзүлгөн. Тармактардан бири биринчи чейректе, экинчиси болсо үчүнчү чейректе жайлашкан.



4-сүрөт.



5-сүрөт.

2-маселе. $k = 2$ жана $k = -2$ болгондо $y = \frac{k}{x}$ функциянын графигин түз.

△ Аргументтин окшош бирдей маанилеринде $y = \frac{2}{x}$ функциясынын маанилери $y = \frac{1}{x}$ функциясынын маанилерин 2 ге көбөйтүү менен алынышын эскертебиз. Бул болсо $y = \frac{2}{x}$ функциясынын графиги $y = \frac{1}{x}$ функциясынын графигин абсциссалар огунан ординаталар огун бойлой эки эсе созуу менен алынат, дегенге жатат (5-сүрөт).

$y=-\frac{2}{x}$ функциясынын маанилери $y=\frac{2}{x}$ функциясынын маанилеринен белгиси менен гана айырмаланат. Демек, $y=-\frac{2}{x}$ функциясынын графиги $y=\frac{2}{x}$ функциясынын графигине абсциссалар огуна салыштырмалуу симметриялуу (6-сүрөт). ▲

Каалагандай $k\neq 0$ дө $y=\frac{k}{x}$ функциясынын графигине да *гипербола* дейилет. Ал *эки тармакка ээ.* Алар, эгерде $k>0$ болсо, биринчи жана үчүнчү чейректе, эгерде $k<0$ болсо, экинчи жана төртүнчү чейректе жатат.

$y=\frac{k}{x}$ (мында $k>0$) функциясы $y=\frac{1}{x}$ функциясынын бардык *касиеттерине* ээ, алсак, бул функция:

1) $x\neq 0$ *болгондо аныкталган;*
2) *нөлдөн башка бардык чыныгы маанилерди кабыл алат;*
3) *так;*
4) $x>0$ болгондо *оң* маанилерди жана $x<0$ болгондо *терс* маанилерди кабыл алат;
5) $x<0$ жана $x>0$ аралыктарда *азаят.*

Эгерде $k<0$ болсо, анда $y=\frac{k}{x}$ функциясы 1–3-касиеттерге ээ болот; 4–5-касиеттер болсо мындайча туюнтулат:

4′) $x<0$ болгондо *оң* маанилерди жана $x>0$ болгондо *терс* маанилерди кабыл алат;

5′) $x<0$ жана $x>0$ аралыктарда *чоңоёт.*

$y=\frac{k}{x}$ функциясы $k>0$ болгондо x жана y тердин ортосундагы *тескери пропорциялаш байланышты* туюнтат, дейилет. Сандар ортосундагы мындай байланыштар көбүнесе физика, техника жана башка багыттарда кездешет.

Мисалы, v туруктуу ылдамдык менен айлана боюнча бир калыпта аракеттенгенде тело $a=\frac{v^2}{r}$ ге барабар (бул жерде r – айлананын радиусу) борборго умтулуучу ылдамдануу менен аракеттенет, б. а. бул учурда ылдамдануу айлананын радиусуна тескери пропорциялаш.

3-маселе. Ай жерден $3{,}84 \cdot 10^8$ м аралыкта. Ай 27,3 суткада Жердин айланасын бир жолу айланып чыгат. Айдын борборго умтулуучу ылдамдануусун эсепте.

△ a ылдамданууну $a = \frac{v^2}{r}$ формуласы менен эсептейбиз, мында $v = \frac{C}{t}$, $C = 2\pi r$, $t = 27{,}3 \cdot 24 \cdot 3600$ с, $r = 3{,}84 \cdot 10^8$.

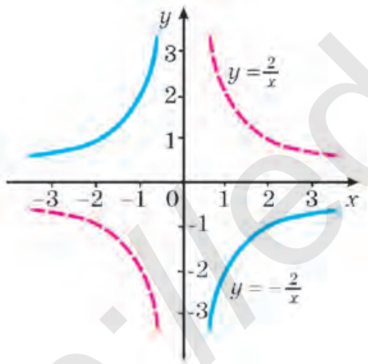
Анда:

$$a = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot 3{,}84 \cdot 10^8}{(27{,}3 \cdot 24 \cdot 3600)^2} \approx 2{,}72 \cdot 10^{-3}.$$

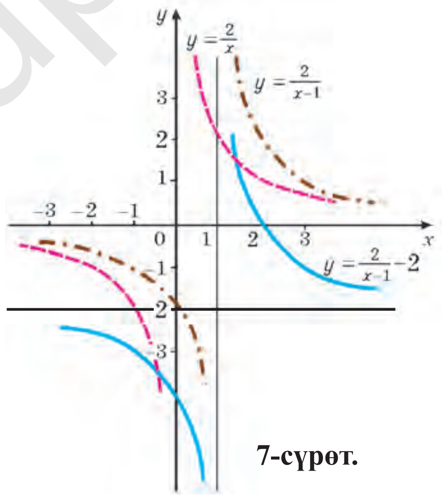
Жообу: $2{,}72 \cdot 10^{-3}$ м/с². ▲

4-маселе. $y = \frac{2}{x-1} - 2$ функциясынын графигин түз.

△ $y = \frac{2}{x}$ функциясынын графигин (6-сүрөт) Ox огу боюнча оңго бир бирдик жана Oy огу боюнча эки бирдик ылдыйга жылдыруу менен $y = \frac{2}{x-1} - 2$ функциясынын графигин алууга болот (7-сүрөт). ▲



6-сүрөт.



7-сүрөт.

Көнүгүүлөр

97. $y = \frac{2}{x}$ функциясынын графигин түз. x тин кандай маанилеринде:

1) $y(x) = 4$; 2) $y(x) = -\frac{1}{2}$; 3) $y(x) > 4$; 4) $y(x) \leq 1$

болушун аныкта.

98. Бир координаталар тегиздигинде $y=\frac{1}{x}$ жана $y=x$ функцияларынын графиктерин түз. x тин кандай маанилеринде:

1) бул функциялар графиктеринин кесилишин аныкта;
2) биринчи функциянын графиги экинчи функциянын графигинен жогоруда (ылдыйда) жатышын аныкта.

99. Функциялардын графиктерин түзбөстөн, алардын кесилишүү чекиттерин тап:

1) $y=\frac{12}{x}, y=3x$; 2) $y=-\frac{8}{x}, y=-2x$;

3) $y=\frac{2}{x}, y=x-1$; 4) $y=\frac{6}{x+1}, y=x+2$.

100. Функциялардын графиктерин түзүп, алардын кесилишүү чекиттерин болжолдуу тап:

1) $y=\frac{3}{x}, y=x+1$; 2) $y=-\frac{3}{x}, y=1-x$;

3) $y=\frac{2}{x}, y=x^2+2$; 4) $y=\frac{1}{x}, y=x^2+4x$.

101. Цилиндрде поршендин астында газ туруктуу температурада турат. Газдын V (литрлерде) көлөмү p (атмосфера) басымда $V=\frac{12}{p}$ формуласы боюнча эсептелет.

1) Басым 4 атм; 5 атм; 10 атм болгондо газ ээлеген көлөмдү тап; 2) кандай басымда газ 3 л; 5 л; 15 л көлөмдү ээлешин эсепте; 3) газдын көлөмү анын басымынан көз карандылыгынын графигин түз.

102. Реостаттагы I ток күчү (амперде) $I=\frac{U}{R}$ формуласы менен өлчөнөт, мында U – чыңалуу (вольтто), R – каршылык (омдо).

1) $U=6$ болгондо, $I(R)$ көз карандылыгынын графигин түз.

2) График боюнча болжолдуу тап: а) R каршылык 6, 12, 20 Ом болгондо ток күчүн; б) ток күчү 10, 5, 1,2 А болгондо реостаттын каршылыгын.

103. Автомобиль жолдун радиусу 150 м болгон айланма бөлүгү боюнча 60 км/саат ылдамдык менен аракеттенүүдө. Автомобилдин борборго умтулуучу ылдамдануусун тап. Эгерде автомобилдин ылдамдыгы мурдагыйдай калып, жолдун айланма бөлүгүнүн радиусу чоңойсо, борборго умтулуучу ылдамдануу чоңоёбу же азаябы?

104. Функциянын графигин түз:

1) $y=\frac{3}{x}-2$; 2) $y=\frac{2}{x}+1$; 3) $y=\frac{2}{x+2}-1$; 4) $y=\frac{3}{1-x}+1$.

8-§. НАТУРАЛДЫК КӨРСӨТКҮЧТҮҮ ДАРАЖАНЫН АРИФМЕТИКАЛЫК ТАМЫРЫ ЖАНА АНЫН КАСИЕТТЕРИ

Орто азиялык белгилүү математикалык жана астроном **Жамшид ибн Маъсуд ибн Махмуд Гиясиддин ал-Каший** (болжолдуу 1430-жылы кайтыш кылган) сандардан каалагандай n-даражалуу тамыр чыгаруу амалын ачты. Анын „Арифметиканын ачкычы“ аттуу чыгармасынын бешинчи главасында бул жөнүндө сөз болот.

Төмөнкү маселени көрөлү.

1 - маселе. Теңдемени чыгар: $x^4=81$.

△ Теңдемени $x^4-81=0$ же $(x^2-9)(x^2+9)=0$ көрүнүштө жазып алабыз. $x^2+9\neq 0$ болгондуктан $x^2-9=0$ болот, мындан болсо

$$x^2-9=(x-3)(x+3)=0,\ x_1=3,\ x_2=-3. \ ▲$$

Ошентип, $x^4=81$ теңдеме эки чыныгы тамырга ээ: $x_1=3$, $x_2=-3$. Аларга 81 санынын 4-*даражалуу тамырлары*, оң тамырга (3 саны) болсо 81 санынын 4-*даражалуу арифметикалык тамыры* дейилет жана мындайча белгиленет: $\sqrt[4]{81}$. Ошентип, $\sqrt[4]{81}=3$.

$x^n=a$ теңдеме (мында n – натуралдык сан, a – терс эмес сан) жалгыз терс эмес тамырга ээ экендигин далилдөөгө болот. Бул тамырга *a санынын n-даражалуу арифметикалык тамыры* дейилет.

Аныктама. *a терс эмес санынын $n\geq 2$ натуралдык көрсөткүчтүү арифметикалык тамыры деп, n-даражасы a га барабар болгон терс эмес санга айтылат.*

a сандын n-даражалуу арифметикалык тамыры мындайча белгиленет: $\sqrt[n]{a}$. a санга тамыр астындагы туюнтма дейилет. Эгерде $n=2$ болсо, анда $\sqrt[2]{a}$ нын ордуна $\sqrt{a}$ жазылат.

Экинчи даражалуу арифметикалык тамырга *квадрат тамыр* да дейилет, 3-даражалуу тамырга болсо *куб тамыр* дейилет.

Сөз n-даражалуу арифметикалык тамыр жөнүндө жүрүп жаткандыгы анык болгон учурларда кыскача „n-даражалуу тамыр“ дейилет.

> *Аныктамадан пайдаланып, $\sqrt[n]{a}$ нын b га барабардыгын далилдөө үчүн:* 1) $b \geq 0$; 2) $b^n = a$ *экендигин көрсөтүү керек.*

Мисалы, $\sqrt[3]{64} = 4$, анткени $4>0$ жана $4^3=64$.

> *Арифметикалык тамырдын аныктамасынан, эгерде $a \geq 0$ болсо, анда*
>
> $$\boxed{(\sqrt[n]{a})^n = a, \quad \sqrt[n]{a^n} = a}$$
>
> *болушу келип чыгат.*

Мисалы, $\left(\sqrt[5]{7}\right)^5 = 7$, $\sqrt[6]{13^6} = 13$.

n-даражалуу тамыр изделген амалга *n-даражалуу тамыр чыгаруу амалы* дейилет. Ал n-даражага көтөрүү амалына тескери амал эсептелет.

2-маселе. $x^3=-8$ теңдемесин чыгар.

△ Бул теңдемени $-x^3=8$ же $(-x)^3=8$ сыяктуу жазууга болот. $-x=y$ деп белгилейбиз, анда $y^3=8$ болот.

Бул теңдеме бир тамырга ээ: $y = \sqrt[3]{8} = 2$. $y^3=8$ теңдеме терс тамырга ээ эмес, анткени $y<0$ болгондо $y^3<0$ болот. $y=0$ саны да бул теңдеменин тамыры боло албайт.

Ошентип, $y^3=8$ теңдемеси бир гана $y=2$ тамырга ээ, демек, $x^3=-8$ теңдемеси да бир гана тамырга ээ: $x=-y=-2$.

Жообу: $x=-2$. ▲

$x^3=-8$ теңдемесинин чыгарылышын кыскача минтип жазууга болот:

$$x = -\sqrt[3]{8} = -2.$$

> Жалпысынан алганда, каалагандай так $2k+1$ натуралдык сан үчүн $a<0$ болгондо $x^{2k+1}=a$ теңдеме бир гана терс тамырга ээ. Бул тамыр арифметикалык тамыр сыяктуу мындайча белгиленет: $\sqrt[2k+1]{a}$. *Ага терс сандын так даражалуу тамыры дейилет.*

Мисалы, $\sqrt[3]{-27}=-3,\ \sqrt[5]{-32}=-2$.

Терс a санынын так даражалуу тамыры менен $-a=|a|$ санынын арифметикалык тамырынын ортосунда төмөнкү барабардык бар:

$$\sqrt[2k+1]{a}=-\sqrt[2k+1]{-a}=-\sqrt[2k+1]{|a|}.$$

Мисалы, $\sqrt[5]{-243}=-\sqrt[5]{243}=-3$.

Көнүгүүлөр

105. (Оозеки.) 1) Сандын арифметикалык квадрат тамырын тап:

$$1;\quad 0;\quad 16;\quad 0{,}81;\quad 169;\quad \frac{16}{121};\quad \frac{49}{144}.$$

2) Сандын арифметикалык куб тамырын тап:

$$1;\quad 0;\quad 5;\quad \frac{1}{27};\quad 0{,}027;\quad 0{,}064;\quad 0{,}729;\quad \frac{1}{343}.$$

3) Сандын төртүнчү даражалуу арифметикалык тамырын тап:

$$0;\quad 1;\quad 16;\quad \frac{16}{81};\quad \frac{256}{625};\quad 0{,}0016;\quad \frac{625}{1296}.$$

Эсепте (**106–108**):

106. 1) $\sqrt[6]{36^3}$; 2) $\sqrt[12]{64^2}$; 3) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{25}\right)^2}$; 4) $\sqrt[8]{225^4}$; 5) $\sqrt[7]{2\cdot 4^3}$.

107. 1) $\sqrt[3]{10^6}$; 2) $\sqrt[3]{3^{12}}$; 3) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^{12}}$; 4) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{3}\right)^{16}}$; 5) $\sqrt[5]{32^2}$.

108. 1) $\sqrt[3]{-8}$; 2) $\sqrt[15]{-1}$; 3) $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}$;

4) $\sqrt[5]{-1024}$; 5) $\sqrt[3]{-34^3}$; 6) $\sqrt[7]{-8^7}$.

109. Теңдемени чыгар:

1) $x^4=81$; 2) $x^5=-\frac{1}{32}$; 3) $5x^5=-160$; 4) $2x^6=128$.

110. x тин кандай маанилеринде туюнтма мааниге ээ болот:

1) $\sqrt[6]{2x-3}$; 2) $\sqrt[3]{x+3}$; 3) $\sqrt[3]{2x^2-x-1}$; 4) $\sqrt[4]{\frac{2-3x}{2x-4}}$?

Эсепте (**111–112**):

111. 1) $\sqrt[3]{-125}+\frac{1}{8}\sqrt[6]{64}$; 2) $\sqrt[5]{32}-0,5\sqrt[3]{-216}$;

3) $-\frac{1}{3}\sqrt[4]{81}+\sqrt[4]{625}$; 4) $\sqrt[3]{-1000}-\frac{1}{4}\sqrt[4]{256}$;

5) $\sqrt[4]{0,0001}-2\sqrt{0,25}+\sqrt[5]{\frac{1}{32}}$; 6) $\sqrt[5]{\frac{1}{243}}+\sqrt[3]{-0,001}-\sqrt[4]{0,0016}$.

112. 1) $\sqrt{9+\sqrt{17}}\cdot\sqrt{9-\sqrt{17}}$; 2) $\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2$;

3) $\left(\sqrt{5+\sqrt{21}}+\sqrt{5-\sqrt{21}}\right)^2$; 4) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

113. 1) a) $x\geq 2$; b) $x<2$ болгондо $\sqrt[3]{(x-2)^3}$ ду жөнөкөйлөштүр;

2) a) $x\leq 3$; b) $x>3$ болгондо $\sqrt{(3-x)^6}$ ын жөнөкөйлөштүр.

114. $1987<\sqrt{n}<1988$ болгон канча натуралдык сан n бар?

9-§. РАЦИОНАЛДУУ КӨРСӨТКҮЧТҮҮ ДАРАЖА ЖАНА АНЫН КАСИЕТТЕРИ

1-маселе. Эсепте: $\sqrt[4]{5^{12}}$.

△ $5^{12}=(5^3)^4$ болгондуктан $\sqrt[4]{5^{12}}=\sqrt[4]{(5^3)^4}=5^3=125$. ▲

Ошентип, $\sqrt[4]{5^{12}}=5^{\frac{12}{4}}$.

Ушуга окшош, $\sqrt[5]{7^{-15}}=7^{-\frac{15}{5}}$ экендигин көрсөтүүгө болот.

Жалпысынан алганда, эгерде n – натуралдык сан, $n\geq 2$, m – бүтүн сан жана $\frac{m}{n}$ бүтүн сан болсо, анда a>0 болгондо төмөнкү барабардык туура болот:

$$\boxed{\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}.} \qquad (1)$$

Шарт боюнча, $\frac{m}{n}$ – бүтүн сан, б. а. m ди n ге бөлүүдө k бүтүн сан алынат. Анда $\frac{m}{n}=k$ барабардыгынан $m=kn$ экендиги келип чыгат. Даражанын жана арифметикалык тамырдын касиеттерин колдоп, төмөнкүнү алабыз:

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n]{a^{kn}}=\sqrt[n]{\left(a^k\right)^n}=a^k=a^{\frac{m}{n}}.$$

Эгерде $\frac{m}{n}$ бүтүн сан болбосо, анда $a^{\frac{m}{n}}$ (мында $a>0$) даража (1) формула туура бойдон кала турган кылып мүнөздөлөт, б. а. бул учурда

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}} \qquad (2)$$

деп эсептелет.

Ошентип, (2) формула каалагандай бүтүн m жана каалагандай натуралдык $n\geq 2$ жана $a>0$ сан үчүн туура болот. Мисалы,

$$16^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{16^3}=\sqrt[4]{2^{12}}=2^3=8; \qquad 7^{\frac{5}{4}}=\sqrt[4]{7^5}=\sqrt[4]{7^4\cdot 7}=7\sqrt[4]{7};$$

$$27^{-\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{27^{-2}}=\sqrt[3]{\frac{1}{27^2}}=\frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{3^6}}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}.$$

r рационалдуу сан – бул $\frac{m}{n}$ көрүнүшүндөгү сан экендигин, мында m – бүтүн сан, n – натуралдык сан, б. а. $r=\frac{m}{n}$ болушун эскерте кетебиз. Анда (2) формула боюнча $a^r=a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ ын алабыз. Ошентип, даража каалагандай рационалдуу көрсөткүч жана каалагандай оң негиз үчүн аныкталды. Эгерде $r=\frac{m}{n}>0$ болсо, анда $\sqrt[n]{a^m}$ туюнтма жалаң $a>0$ болгондо гана эмес, $a=0$ болгондо да мааниге ээ болот. $a=0$ болсо, $\sqrt[n]{0^m}=0$. Ошондуктан $r>0$ болгондо $0^r=0$ барабардык орундуу эсептелет.

(1) жана (2) формулалардан пайдаланып, рационалдуу көрсөткүчтүү даражаны тамыр түрүндө, жана тескерисинче, сүрөттөөгө болот.

(2) формуладан жана тамырдын касиеттеринен

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mk}{nk}}}$$

барабардык келип чыгышын белгилей кетебиз, мында $a > 0$, m – бүтүн сан жана n, k – натуралдык сандар.

Мисалы, $7^{\frac{3}{4}} = 7^{\frac{6}{8}} = 7^{\frac{9}{12}}$.

Натуралдык көрсөткүчтүү даражанын бардык касиеттери каалагандай рационалдуу көрсөткүчтүү жана оң негиздүү даражалар үчүн туура болушун көрсөтүүгө болот. *Алсак, каалагандай рационалдуу p жана q сандар жана каалагандай $a > 0$ жана $b > 0$ үчүн төмөнкү барабардыктар туура болот:*

1) $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$;

2) $a^p : a^q = a^{p-q}$;

3) $(a^p)^q = a^{pq}$;

4) $(ab)^p = a^p b^p$;

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$.

Бул касиеттер тамырлардын касиеттеринен келип чыгат. Мисалы, $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ касиетин далилдейли.

○ Алсак, $p = \frac{m}{n}$, $q = \frac{k}{l}$ (мында n жана l — натуралдык сандар, m жана k – бүтүн сандар) болсун.

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{k}{l}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{k}{l}} \qquad (3)$$

экендигин далилдөө керек.

$\frac{m}{n}$ жана $\frac{k}{l}$ бөлчөктөрүн жалпы бөлүмгө келтирип, (3) барабардыктын сол бөлүгүн

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{k}{l}} = a^{\frac{ml}{nl}} \cdot a^{\frac{kn}{nl}}$$

көрүнүшүндө жазабыз.

Рационалдуу көрсөткүчтүү даражанын аныктамасынан, тамыр жана бүтүн көрсөткүчтүү даражанын касиеттеринен пайдаланып, төмөнкүнү алабыз:

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{k}{l}} = a^{\frac{ml}{nl}} \cdot a^{\frac{kn}{nl}} = \sqrt[nl]{a^{ml}} \cdot \sqrt[nl]{a^{kn}} =$$

$$= \sqrt[nl]{a^{ml} \cdot a^{kn}} = \sqrt[nl]{a^{ml+kn}} = a^{\frac{ml+kn}{nl}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{k}{l}}.$$

Рационалдуу көрсөткүчтүү даражанын калган касиеттери да ушуга окшош далилденет.

Даражанын касиеттерин колдоого мисалдар келтиребиз.

1) $7^{\frac{1}{4}} \cdot 7^{\frac{3}{4}} = 7^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 7;$ $\quad 5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{2}{3}} = 5^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} = 5^{1} = 5;$

2) $9^{\frac{2}{3}} : 9^{\frac{1}{6}} = 9^{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}} = 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3;$ $\quad 8^{\frac{2}{3}} : 8 = 8^{\frac{2}{3}-1} = 8^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2};$

3) $\left(16^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{9}{4}} = 16^{\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{4}} = 16^{\frac{3}{4}} = (2^4)^{\frac{3}{4}} = 2^{4\cdot\frac{3}{4}} = 2^3 = 8;$

4) $24^{\frac{2}{3}} = (2^3 \cdot 3)^{\frac{2}{3}} = 2^{3\cdot\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} = 4\sqrt[3]{3^2} = 4\sqrt[3]{9};$

5) $\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{8^{\frac{1}{3}}}{27^{\frac{1}{3}}} = \frac{(2^3)^{\frac{1}{3}}}{(3^3)^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3};$ $\quad \left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{2^4}{3^4}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{4\cdot\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}.$

2- маселе. Эсепте: $25^{\frac{1}{5}} \cdot 125^{\frac{1}{5}}$.

$$\triangle\ 25^{\frac{1}{5}} \cdot 125^{\frac{1}{5}} = (25 \cdot 125)^{\frac{1}{5}} = (5^5)^{\frac{1}{5}} = 5.\ \blacktriangle$$

3- маселе. Туюнтманы жөнөкөйлөштүр: $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}b + ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}$.

$$\triangle\ \frac{a^{\frac{4}{3}}b + ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} = \frac{ab\left(a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}} = ab.\ \blacktriangle$$

4- маселе. Туюнтманы жөнөкөйлөштүр: $\dfrac{a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{7}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{4}{3}}}-\dfrac{a^{-\frac{1}{3}}-a^{\frac{5}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}}$.

$$\triangle\ \frac{a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{7}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{4}{3}}}-\frac{a^{-\frac{1}{3}}-a^{\frac{5}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}}=\frac{a^{\frac{1}{3}}(1-a^2)}{a^{\frac{1}{3}}(1-a)}-\frac{a^{-\frac{1}{3}}(1-a^2)}{a^{-\frac{1}{3}}(1+a)}=$$

$$=1+a-(1-a)=2a.\ \blacktriangle$$

$3^{\sqrt{2}}$ мисалында *иррационалдуу көрсөткүчтүү даражаны* кантип киргизүүгө болорун көрсөтөбүз. $\sqrt{2}$ нин болжолдуу маанилерин 0,1; 0,01; 0,001; ... ге чейин аныктык менен удаалаш жазып чыгабыз. Анда төмөнкү удаалаштык алынат:

$$1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ 1{,}4142;\ \ldots$$

3 санынын даража көрсөткүчтөрү удаалаштыгын ошол рационалдуу көрсөткүчтөр менен жазып чыгабыз:

$$3^{1,4};\ 3^{1,41};\ 3^{1,414};\ 3^{1,4142};\ \ldots$$

Бул даражалар $3^{\sqrt{2}}$ сыяктуу белгиленген кандайдыр чыныгы сандын удаалаш болжолдуу маанилери экендигин көрсөтүүгө болот:

$$3^{1,4}=\underline{4},\ 6555355,$$

$$3^{1,41}=\underline{4{,}7}069644,$$

$$3^{1,414}=\underline{4{,}72}76942,$$

$$3^{1,442}=\underline{4{,}728}7329,$$

$$3^{\sqrt{2}}\approx\underline{4{,}7288033}.$$

Оң *a* негиздүү жана каалагандай иррационалдуу көрсөткүчтүү a^b даража ушуга окшош мүнөздөлөт. Ошентип, эми оң негиздүү даража каалагандай чыныгы көрсөткүч үчүн мүнөздөлдү. Чыныгы көрсөткүчтүү даражанын касиеттери рационалдуу көрсөткүчтүү даражанын касиеттери сыяктуу болот.

Көнүгүүлөр

115. (Оозеки). Рационалдуу көрсөткүчтүү даража түрүндө жаз:

1) $\sqrt{x^3}$; 2) $\sqrt[3]{a^4}$; 3) $\sqrt[4]{b^3}$; 4) $\sqrt[5]{x^{-1}}$; 5) $\sqrt[6]{a}$; 6) $\sqrt[7]{b^{-3}}$.

116. (Оозеки). Бүтүн көрсөткүчтүү даражанын тамыры түрүндө жаз:

1) $x^{\frac{1}{4}}$; 2) $y^{\frac{2}{5}}$; 3) $a^{-\frac{5}{6}}$; 4) $b^{-\frac{1}{3}}$; 5) $(2x)^{\frac{1}{2}}$; 6) $(3b)^{-\frac{2}{3}}$.

Эсепте (**117–120**):

117. 1) $64^{\frac{1}{2}}$; 2) $27^{\frac{1}{3}}$; 3) $8^{\frac{2}{3}}$;

4) $81^{\frac{3}{4}}$; 5) $16^{-0,75}$; 6) $9^{-1,5}$.

118. 1) $2^{\frac{4}{5}} \cdot 2^{\frac{11}{5}}$; 2) $5^{\frac{2}{7}} \cdot 5^{\frac{5}{7}}$; 3) $9^{\frac{2}{3}} : 9^{\frac{1}{6}}$; 4) $4^{\frac{1}{3}} : 4^{\frac{5}{6}}$;

5) $\left(7^{-3}\right)^{-\frac{2}{3}}$; 6) $\left(8^{\frac{1}{12}}\right)^{-4}$; 7) $8^{\frac{4}{5}} : 8^{\frac{7}{15}}$; 8) $\left(5^{-4}\right)^{-\frac{3}{4}}$.

119. 1) $9^{\frac{2}{5}} \cdot 27^{\frac{2}{5}}$; 2) $7^{\frac{2}{3}} \cdot 49^{\frac{2}{3}}$; 3) $144^{\frac{3}{4}} : 9^{\frac{3}{4}}$; 4) $150^{\frac{3}{2}} : 6^{\frac{3}{2}}$.

120. 1) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} + \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}$; 2) $(0,04)^{-1,5} - (0,125)^{-\frac{2}{3}}$;

3) $8^{\frac{9}{7}} : 8^{\frac{2}{7}} - 3^{\frac{6}{5}} \cdot 3^{\frac{4}{5}}$; 4) $\left(5^{-\frac{2}{5}}\right)^{-5} + \left((0,2)^{\frac{3}{4}}\right)^{-4}$.

121. Эсепте:

1) $a = 0,09$ болгондо $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[6]{a}$ нын маанисин;

2) $b = 27$ болгондо $\sqrt{b} : \sqrt[6]{b}$ нын маанисин;

3) $b = 1,3$ болгондо $\dfrac{\sqrt{b} \cdot \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[6]{b}}$ нын маанисин;

4) $a = 2,7$ болгондо $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[12]{a^5}$ нын маанисин.

122. Рационалдуу көрсөткүчтүү даража түрүндө жаз:

1) $a^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{a}$; 2) $b^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{b}$; 3) $\sqrt[3]{b} : b^{\frac{1}{6}}$;

4) $a^{\frac{4}{3}} : \sqrt[3]{a}$; 5) $x^{1,7} \cdot x^{2,8} : \sqrt{x^5}$; 6) $y^{-3,8} : y^{-2,3} \cdot \sqrt{y^3}$.

Туюнтманы жөнөкөйлөштүр (**123–124**):

123. 1) $(a^4)^{-\frac{3}{4}} \cdot \left(b^{-\frac{2}{3}}\right)^{-6}$; 2) $\left(\left(\frac{a^6}{b^{-3}}\right)^4\right)^{\frac{1}{12}}$; 3) $(a^{-7})^{-\frac{5}{7}} \cdot \left(b^{-\frac{3}{4}}\right)^{-4}$.

124. 1) $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}\left(a^{-\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{3}{4}} + a^{-\frac{1}{4}}\right)}$; 2) $\dfrac{b^{\frac{1}{5}}\left(\sqrt[5]{b^4} - \sqrt[5]{b^{-1}}\right)}{b^{\frac{2}{3}}\left(\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{b^{-2}}\right)}$; 3) $\dfrac{a^{\frac{5}{3}}b^{-1} - ab^{-\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2}}$;

4) $\dfrac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b} + b^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}}$; 5) $\dfrac{a^{-\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{4}{3}}\right)}{a^{\frac{2}{5}}\left(a^{\frac{8}{5}} - a^{-\frac{2}{5}}\right)}$; 6) $\dfrac{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}}{\sqrt[6]{a} - \sqrt[6]{b}}$.

125. Эсепте:

1) $\left(2^{\frac{5}{3}} \cdot 3^{-\frac{1}{3}} - 3^{\frac{5}{3}} \cdot 2^{-\frac{1}{3}}\right) \cdot \sqrt[3]{6}$; 2) $\left(5^{\frac{1}{4}} : 2^{\frac{3}{4}} - 2^{\frac{1}{4}} : 5^{\frac{3}{4}}\right) \cdot \sqrt[4]{1000}$.

126. Туюнтмаларды жөнөкөйлөштүр:

1) $a^{\frac{1}{9}}\sqrt[6]{a\sqrt[3]{a}}$; 2) $b^{\frac{1}{12}}\sqrt[3]{b\sqrt[4]{b}}$; 3) $\left(\sqrt[3]{ab^{-2}} + (ab)^{-\frac{1}{6}}\right)\sqrt[6]{ab^4}$;

4) $(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} - \sqrt[3]{ab})$; 5) $\dfrac{x-y}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}$; 6) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}}$;

7) $\dfrac{m^{\frac{1}{2}}+n^{\frac{1}{2}}}{m+2\sqrt{mn}+n}$; 8) $\dfrac{c-2c^{\frac{1}{2}}+1}{\sqrt{c}-1}$; 9) $(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})(a^{\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{ab} + b^{\frac{2}{3}})$.

Туюнтманы жөнөкөйлөштүр (**127–129**):

127. 1) $\left(1-2\sqrt{\frac{b}{a}}+\frac{b}{a}\right) : \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)^2$; 2) $\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right) : \left(2 + \sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)$;

3) $\dfrac{a^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{9}{4}}}{a^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{5}{4}}}-\dfrac{b^{-\frac{1}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}-b^{-\frac{1}{2}}}$; 4) $\dfrac{\sqrt{a}-a^{-\frac{1}{2}}b}{1-\sqrt{a^{-1}b}}-\dfrac{\sqrt[3]{a^2}-a^{-\frac{1}{3}}b}{\sqrt[6]{a}+a^{-\frac{1}{3}}\sqrt{b}}$.

128. 1) $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\dfrac{ab^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}-\dfrac{2a^2-4ab}{a-b}$; 2) $\dfrac{3xy-y^2}{x-y}-\dfrac{y\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\dfrac{y\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$;

3) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}-\dfrac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}{a^{\frac{2}{3}}-\sqrt[3]{ab}+b^{\frac{2}{3}}}$; 4) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}-\dfrac{a-b}{a^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{ab}+b^{\frac{2}{3}}}$.

129. 1) $\dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}-\dfrac{a+b}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}$; 2) $\dfrac{a+b}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}-\dfrac{a-b}{a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}$;

3) $\dfrac{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}{a-b}-\dfrac{1}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}$; 4) $\dfrac{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}{a+b}+\dfrac{1}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}$.

10-§. РАЦИОНАЛДУУ КӨРСӨТКҮЧТҮҮ ДАРАЖА КАТЫШКАН АЛГЕБРАЛЫК ТУЮНТМАЛАРДЫ ЖӨНӨКӨЙЛӨШТҮРҮҮ

Бул тема боюнча көнүгүүлөрдү аткарууда алгебралык бөлчөктөр жана алар үстүндө амалдардан, кыска көбөйтүүнүн формулаларынан жана рационалдуу көрсөткүчтүү даражанын касиеттеринен пайдаланылат.

1-маселе. Туюнтманы жөнөкөйлөштүр:

$$\left[\frac{(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}})^2+(x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}})^2}{x+(xy)^{\frac{1}{2}}}\right]^5\cdot x^3\cdot\sqrt[3]{x\sqrt{x}},\ x>0,\ y>0.$$

△ 1) $\sqrt[3]{x\sqrt{x}}=\sqrt[3]{\sqrt{x^3}}=\sqrt[6]{x^3}=\sqrt{x}$;

2) квадрат кашаалардын ичиндеги туюнтманын алымын квадратка чоңойтобуз жана $x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$ экендигинен пайдаланабыз:

$$\sqrt{x}+2\sqrt[4]{xy}+\sqrt{y}+\sqrt{x}-2\sqrt[4]{xy}+\sqrt{y}=2(\sqrt{x}+\sqrt{y});$$

3) ошол туюнтманын бөлүмүндө $\sqrt{x}$ ти кашаадан тышка чыгарабыз:

$$x+\sqrt{xy}=\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y});$$

4) анда $\frac{2(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{y})}=\frac{2}{\sqrt{x}};$

5) $\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^5\cdot x^3\sqrt{x}=\frac{32}{x^2\sqrt{x}}\cdot x^3\sqrt{x}=32\cdot x$

Жообу: $32\cdot x$. ▲

2-маселе. Туюнтманы жөнөкөйлөштүр жана анын $x=0{,}16$, $y=25$ болгондогу сандык маанисин тап:

$$\left(\frac{\sqrt[4]{x^3y}-\sqrt[4]{xy^3}}{\sqrt{y}-\sqrt{x}}+\frac{1+\sqrt{xy}}{\sqrt[4]{xy}}\right)^{-2}\cdot\left(1+2\sqrt{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}},\ x>0,\ y>0.$$

△ 1) $\frac{\sqrt[4]{x^3y}-\sqrt[4]{xy^3}}{\sqrt{y}-\sqrt{x}}=\frac{\sqrt[4]{xy}\cdot(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{y}-\sqrt{x}}=-\sqrt[4]{xy};$

2) $-\sqrt[4]{xy}+\frac{1+\sqrt{xy}}{\sqrt[4]{xy}}=\frac{-\sqrt{xy}+1+\sqrt{xy}}{\sqrt[4]{xy}}=\frac{1}{\sqrt[4]{xy}};$

3) $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{xy}}\right)^{-2}=\sqrt{xy};$

4) $\left(1+2\sqrt{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\left(1+\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}=1+\sqrt{\frac{y}{x}};$

5) $\sqrt{xy}\cdot\left(1+\sqrt{\frac{y}{x}}\right)=\sqrt{xy}+y.$

Эгерде $x=0{,}16$ жана $y=25$ болсо, $\sqrt{0{,}16\cdot25}+25=\sqrt{4}+25=27$.

Жообу: $\sqrt{xy}+y$; 27. ▲

3-маселе. Туюнтманы жөнөкөйлөштүр жана анын $a = 25$, $b = 0{,}6561$ болгондогу сандык маанисин тап:

$$\frac{(\sqrt[8]{a}+\sqrt[8]{b})^2+(\sqrt[8]{a}-\sqrt[8]{b})^2}{a-\sqrt{ab}}:\frac{(\sqrt[4]{a}+\sqrt[8]{ab}+\sqrt[4]{b})\cdot(\sqrt[4]{a}-\sqrt[8]{ab}+\sqrt[4]{b})}{\sqrt[4]{a^3b}-b}.$$

△ 1) 1-бөлчөктүн алымын квадратка чоңойтобуз, бөлүмүндө $\sqrt{a}$ ны кашаадан тышка чыгарабыз. Жөнөкөйлөштүрүүдөн кийин 1-бөлчөк $\frac{2}{\sqrt{a}\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)}$ га барабар болот;

2) 2-бөлчөктүн алымы кыска көбөйтүүнүн формулаларынан пайдаланып кашааларды ачканда $\sqrt{a}+\sqrt[4]{ab}+\sqrt{b}$ туюнтмага келет;

3) бөлүмүндө болсо $\sqrt[4]{b}$ кашаадан тышка чыгарылат жана $\left(x^3-y^3\right)$ дун жайылмасынан пайдаланылат. 2-бөлчөк $\frac{1}{\sqrt[4]{b}\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)}$ га барабар болот;

4) аягында, 1-бөлчөктү 2-бөлчөккө бөлүүнүн натыйжасы $\frac{2\sqrt[4]{b}}{\sqrt{a}}$ туюнтмага барабар болот. $a = 25$, $b = 0{,}6561$ болсо, туюнтма $\frac{2\cdot\sqrt[4]{0{,}6561}}{\sqrt{25}}=\frac{2}{5}\cdot 0{,}9=0{,}36$ га барабар.

Жообу: $\frac{2\cdot\sqrt[4]{b}}{\sqrt{a}}$; 0,36. ▲

Көнүгүүлөр

Туюнтманы жөнөкөйлөштүр (**130–146**):

130. $\left[\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+5b^{\frac{1}{2}}\right)-\left(a^{\frac{1}{2}}+2b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}-2b^{\frac{1}{2}}\right)\right]:\left(2a+3a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}\right).$

131. $\left[\frac{\left(\sqrt{a}+1\right)^2-\frac{a-\sqrt{ax}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{a}+1\right)^3-a\sqrt{a}+2}\right]^{-3}.$

132. $\left[\dfrac{4a-9a^{-1}}{2a^{\frac{1}{2}}-3a^{-\frac{1}{2}}}+\dfrac{a-4+3a^{-1}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}\right]^2.$

133. $\left[(a-b)\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}+a-b\right]\left[(a-b)\left(\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}-1\right)\right].$

134. $\left(\sqrt{ab}-\dfrac{ab}{a+\sqrt{ab}}\right):\dfrac{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{b}}{a-b}.$

135. $\left(a+b^{\frac{3}{2}}:\sqrt{a}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}}+\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)^{-\frac{2}{3}}.$

136. $\left[\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}-4x^{-\frac{1}{2}}}+\dfrac{2\sqrt[3]{x}}{x\sqrt[3]{x}-4\sqrt[3]{x}}\right]^{-2}-\sqrt{x^2+8x+16}.$

137. $\left(\dfrac{\sqrt[4]{ax^3}-\sqrt[4]{a^3x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}+\dfrac{1+\sqrt{ax}}{\sqrt[4]{ax}}\right)^{-2}\sqrt{1+2\sqrt{\dfrac{a}{x}}+\dfrac{a}{x}}.$

138. $\dfrac{(a-b^2)\sqrt{3}-b\sqrt{3}\sqrt[3]{-8b^3}}{\sqrt{2\left(a-b^2\right)^2+\left(2b\sqrt{2a}\right)^2}}\cdot\dfrac{\sqrt{2a}-\sqrt{2c}}{\sqrt{\dfrac{3}{a}}-\sqrt{\dfrac{3}{c}}}.$

139. $\left[\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{a}\right)^{-1}+\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{a}\right)^{-1}\right]^{-2}:\dfrac{x-a}{4\sqrt{x}+4\sqrt{a}}.$

140. $\dfrac{\left(\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^3+2a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{3a^2+3b\sqrt{ab}}+\dfrac{\sqrt{ab}-a}{a\sqrt{a}-b\sqrt{a}}.$

141. $\dfrac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^3+2a^2:\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}+\dfrac{3\sqrt{ab}-3b}{a-b}.$

142. $\left(\dfrac{1}{\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)^{-2}}\left(\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}\right)^{-1}\right)(ab)^{-\frac{1}{2}}.$

143. $\left[\left(\dfrac{a^2-b\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt[3]{b}}+a\sqrt[3]{b}\right):\left(a+\sqrt[6]{a^3b^2}\right)-\sqrt[3]{b}\right]^2.$

144. $\left[\dfrac{a^2\sqrt[4]{x}+x\sqrt{a}}{a\sqrt[4]{x}+\sqrt{ax}}-\sqrt{a^2+x+2a\sqrt{x}}\right]^4.$

145. $\left[\dfrac{x\sqrt{x}-x}{\left(\dfrac{\sqrt[4]{x^3}-1}{\sqrt[4]{x}-1}-\sqrt{x}\right)\left(\dfrac{\sqrt[4]{x^3}+1}{\sqrt[4]{x}+1}-\sqrt{x}\right)}\right]^3.$

146. $\dfrac{\dfrac{a+x}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{x^2}}+\dfrac{\sqrt[3]{ax^2}-\sqrt[3]{a^2x}}{\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{x}}-\sqrt[6]{x}.$

I глава боюнча көнүгүүлөр

Бөлчөктөрдү жалпы бөлүмгө келтир:

147. 1) $\dfrac{5a}{a^3-27}$, $\dfrac{a-3}{a^2+3a+9}$ жана $\dfrac{1}{a-3}$; 2) $\dfrac{3}{x+2}$, $\dfrac{x+1}{x^3+8}$ жана $\dfrac{x+2}{x^2-2x+4}$.

Амалдарды аткар (**148–149**):

148. 1) $\dfrac{a+3}{5}+\dfrac{7+a}{10}+\dfrac{a-3}{2}$; 3) $\dfrac{a-2}{45}-\dfrac{a+5}{15}-\dfrac{a-9}{9}$;

2) $\dfrac{b-7}{4}+\dfrac{5b-2}{3}+\dfrac{3b-1}{8}$; 4) $\dfrac{b}{12}-\dfrac{3b+1}{9}-\dfrac{2b-1}{4}$.

149. 1) $\dfrac{y}{n-2}+\dfrac{z}{2-n}$;

3) $\dfrac{2m}{3-5n}-1+\dfrac{7n-4}{5n-3}$;

2) $\dfrac{p+2q}{3p-q}-\dfrac{5q-2p}{q-3p}$;

4) $4-\dfrac{3a}{5-2b}+\dfrac{5(a-10)}{2b-5}$.

Көрсөтүлгөн амалдарды аткар (**150–152**):

150. 1) $\dfrac{a^2-2ab+b^2}{a^2-ab+b^2}:\dfrac{8a-8b}{a^3+b^3}$;

2) $\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^2+ab+b^2}\cdot\dfrac{a^3-b^3}{7a+7b}$.

151. 1) $\dfrac{64x^2-1}{x^2-4}\cdot\dfrac{(x+2)^2}{x^2-4}\cdot\dfrac{(x-2)^2}{8x+1}$;

2) $\dfrac{x-6}{x^2+6x+9}\cdot\dfrac{x^2+4x+4}{(x^2+2)(x-2)}\cdot\dfrac{x^3-9x}{(x-6)(x+2)}$;

3) $\dfrac{am^2-an^2}{m^2+2mn+n^2}:\dfrac{am^2+2amn+an^2}{3m+3n}$;

4) $\dfrac{ab-4b-2a+8}{2a+8-ab-4b}:\dfrac{2a-8-ab+4b}{ab+4b-2a-8}$.

152. 1) $(x^2-1)\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{1+x}+1\right)$;

3) $\left(\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}\right):\left(\dfrac{x-y}{x+y}+\dfrac{x+y}{x-y}\right)$;

2) $\left(1+a-\dfrac{a^2+3}{a+1}\right)(1-a^2)$;

4) $\left(\dfrac{2-a}{2+a}-\dfrac{a+2}{a-2}\right):\left(\dfrac{2+a}{2-a}+\dfrac{a-2}{a+2}\right)$.

Эсепте (**153–154**):

153. 1) $(0{,}175)^0+(0{,}36)^{-2}-1^{\frac{4}{3}}$;

2) $1^{-0{,}43}-(0{,}008)^{\frac{1}{3}}+(15{,}1)^0$;

3) $\left(\dfrac{4}{5}\right)^{-2}-\left(\dfrac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}}+4\cdot 379^0$;

4) $(0{,}125)^{\frac{1}{3}}+\left(\dfrac{3}{4}\right)^2-(1{,}85)^0$.

154. 1) $9{,}3\cdot 10^{-6}:(3{,}1\cdot 10^{-5})$;

2) $1{,}7\cdot 10^{-6}\cdot 3\cdot 10^{7}$;

3) $8{,}1\cdot 10^{16}\cdot 2\cdot\quad 10^{-14}$;

4) $6{,}4\cdot 10^{5}:(1{,}6\cdot 10^{7})$;

5) $2\cdot 10^{-1}+\left(6^{0}-\dfrac{1}{6}\right)^{-1}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{3}\cdot\left(-\dfrac{1}{4}\right)^{-1};$

6) $3\cdot 10^{-1}-\left(8^{0}-\dfrac{1}{8}\right)^{-1}\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-3}\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^{4}\cdot\left(\dfrac{5}{7}\right)^{-1}.$

155. Туюнтманын маанисин тап:

1) $\left(\dfrac{x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{5}{6}}}{x^{\frac{1}{6}}}\right)^{-2}$, мында $x=\dfrac{7}{9}$; $\left(\dfrac{a^{\frac{2}{3}}\cdot a^{\frac{1}{9}}}{a^{-\frac{2}{9}}}\right)^{-3}$, мында $a=0{,}1.$

156. Туюнтманы жөнөкөйлөштүр:

1) $(\sqrt[3]{125x}-\sqrt[3]{8x})-(\sqrt[3]{27x}-\sqrt[3]{64x});$

2) $(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{16x})+(\sqrt[4]{81x}-\sqrt[4]{625x});$

3) $\left(\dfrac{3}{\sqrt{1+a}}+\sqrt{1-a}\right):\dfrac{3+\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}};$

4) $\left(1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}\right):(\sqrt{x^2-y^2}-x).$

157. Эсепте:

1) $\left(\dfrac{1}{16}\right)^{-0,75}+10000^{0,25}-\left(7\dfrac{19}{32}\right)^{\frac{1}{5}};$

2) $(0{,}001)^{-\frac{1}{3}}-2^{-2}\cdot 64^{\frac{2}{3}}-8^{-1\frac{1}{3}};$

3) $27^{\frac{2}{3}}-(-2)^{-2}+\left(3\dfrac{3}{8}\right)^{-\frac{1}{3}};$

4) $(-0{,}5)^{-4}-625-\left(2\dfrac{1}{4}\right)^{-1\frac{1}{2}}.$

158. x тин кандай маанилеринде туюнтма мааниге ээ болот:

1) $\sqrt[4]{x^2-4};$ 2) $\sqrt[3]{x^2-5x+6};$ 3) $\sqrt[6]{\dfrac{x-2}{x+3}};$

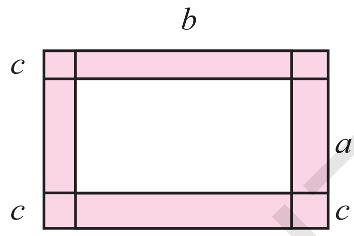
4) $\sqrt[4]{x^2-5x+6};$ 5) $\sqrt[8]{x^3-x};$ 6) $\sqrt[6]{x^3-5x^2+6x}$?

159. Туюнтманы жөнөкөйлөштүр:

1) $\dfrac{a^{\frac{1}{4}}-a^{-\frac{7}{4}}}{a^{\frac{1}{4}}-a^{-\frac{3}{4}}};$ 2) $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}-a^{-\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}-a^{-\frac{2}{3}}};$ 3) $\dfrac{b^{\frac{5}{4}}+2b^{\frac{1}{4}}+b^{-\frac{3}{4}}}{b^{\frac{3}{4}}-b^{-\frac{1}{4}}};$

4) $\dfrac{a^{-\frac{4}{3}}b^{-2}-a^{-2}b^{-\frac{4}{3}}}{a^{-\frac{5}{3}}b^{-2}-b^{-\frac{5}{3}}a^{-2}};$ 5) $\dfrac{\sqrt{a^3b^{-1}}-\sqrt{a^{-1}b^3}}{\sqrt{ab^{-1}}-\sqrt{a^{-1}b}};$ 6) $\dfrac{a^{\frac{3}{4}}b^{-\frac{1}{4}}-a^{-\frac{1}{4}}b^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{1}{4}}b^{-\frac{1}{4}}-a^{-\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}}.$

160. 1) Берилген өлчөмдөр боюнча боёлгон аянтты эсептөө формуласын чыгар (8 - сүрөт);



8 - сүрөт.

2) $2bc+2c(a-2c)=2ac+2c(b-2c)$ барабардыктын тууралыгын фигуранын жардамында көрсөт;

3) штрихтелген аянтты эки тик бурчтуктун аянттарынын айырмасы иретинде сүрөттө. Мындан пайдаланып, $ab-(b-2c)(a-2c)=2ac++2c\cdot(b-2c)$ барабардыгын далилде.

161. Барабардыктардын тууралыгын текшер, аларга геометриялык түшүндүрмө бер. Тиешелүү фигураларды чий:

1) $(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd$;

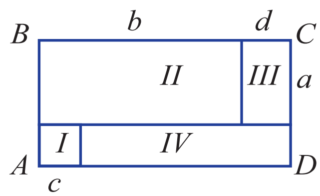
2) $(a+b)(c-d)=ac+bc-ad-bd$;

3) $(a+b+c)(d+l)=ad+bd+cd+al+bl+cl$.

162. 1) Барабардыктардын тууралыгын далилде:

$$c^2+b(a-c)+(b+d-c)c+d(a-c)=a(b+d).$$

2) $ABCD$ тик бурчтугунун аянтын эсептөө үчүн эки туюнтма түз (9 - сүрөт). $ABCD$ тик бурчтугунун аянты I, II, III, IV тик бурчтуктарынын аянттары суммасына барабардыгынан пайдалан жана 1-барабардыкка геометриялык түшүндүрмө бер.



9- сүрөт.

№2

N санынын цифраларынын суммасы 2006 га барабар. N санын эки өз ара барабар сандардын көбөйтүндүсү көрүнүшүндө сүрөттөөгө болобу?

ӨЗҮҢДҮ ТЕКШЕРИП КӨР!

1. Тамгалардын бөлчөк мааниге ээ болгон маанилерин тап:

$$\frac{a}{b};\ \frac{3}{c-1};\ \frac{k}{d+2}.$$

2. Амалдарды аткар:

1) $4a+\frac{1-4a^2}{a}$; 2) $\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}$;

3) $\frac{2a-4}{3b}\cdot\frac{6b}{a-2}$; 4) $\frac{a^2-b^2}{b^2}:\frac{a+b}{b}$.

3. Туюнтманы жөнөкөйлөштүр жана анын $x=2\frac{2}{3}$ болгондогу сандык маанисин тап:

$$\frac{1+2x}{x-3}-\frac{x^2+3x}{5}\cdot\frac{10}{x^2-9}.$$

4. Эсепте:

1) $3^{-5}:3^{-7}-2^{-2}\cdot2^4+\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\right)^3$; 2) $\sqrt[5]{3^{10}\cdot32}-\frac{\sqrt[3]{48}}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{3}}$;

3) $25^{\frac{3}{2}}\cdot25^{-1}+(5^3)^{\frac{2}{3}}:5^3-48^{\frac{2}{3}}:6^{\frac{2}{3}}$; 4) $4^{-7}:4^{-10}-3^{-2}\cdot3^5+\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$.

5. Туюнтмаларды жөнөкөйлөштүр:

1) $\frac{3x^{-9}\cdot2x^5}{x^{-4}}$; 2) $(x^{-1}+y^{-1})\left(\frac{1}{xy}\right)^{-2}$; 3) $\frac{2a^{-8}\cdot4a^3}{16\cdot a^{-5}}$.

6. $\frac{a^{\frac{5}{3}}}{\sqrt[3]{a^5}\cdot a^{-\frac{3}{4}}}$ туюнтманы жөнөкөйлөштүр жана $a=81$ болгондо анын сандык маанисин тап.

I глава боюнча сыноо көнүгүүлөрү – тесттер

1. Бөлчөктү кыскарт: $\dfrac{27a^2-36ab+12b^2}{9a^2-4b^2}$.

A) $\dfrac{3(3a-2b)}{3a+2b}$; B) $\dfrac{3a-2b}{3a+2b}$; C) $\dfrac{39-36ab}{5}$; D) $\dfrac{3a^2-36ab+3b^2}{a^2-b^2}$.

2. Бөлчөктү кыскарт: $\dfrac{7a^2(ab^2-9a)}{3a(21a-7ab)}$.

A) $\dfrac{7a(ab^2-9a)}{3(21a-7ab)}$; B) $\dfrac{-a(b+3)}{3}$; C) $\dfrac{7(ab^2-9a)}{3(21-7b)}$; D) $\dfrac{a(b-3)}{3}$.

3. Амалдарды аткар: $\dfrac{4}{a+b}+\dfrac{5}{a-b}-\dfrac{10b}{a^2-b^2}$.

A) $\dfrac{9}{a-b}$; B) $\dfrac{9}{a+b}$; C) $\dfrac{-9}{a+b}$; D) $\dfrac{9(a+b)}{a-b}$.

4. Бөлчөктөн бөлчөктү кемит: $\dfrac{a^2+9}{a^3+27}-\dfrac{1}{a+3}$.

A) $\dfrac{1}{a^2+9}$; B) $\dfrac{3}{a^2+9}$; C) $\dfrac{a}{a^3+9}$; D) $\dfrac{3a}{a^3+27}$.

5. Бөлчөктөрдү көбөйтүр: $\dfrac{9a^2-16b^2}{6a+8b}\cdot\dfrac{6a^2}{12b-9a}$.

A) a^2; B) $-a^2$; C) $\dfrac{a^2}{3a-4b}$; D) $\dfrac{6}{3a+4b}$.

6. Бөлчөктөрдү бөл: $\dfrac{4a^2-20ab+25b^2}{5b+4}:\dfrac{(2a-5b)^2}{25b^2-16}$.

A) $\dfrac{5b+4}{2a-5b}$; B) $\dfrac{2a-5b}{5b-4}$; C) $5b-4$; D) $5b+4$.

7. Бөлчөктү кыскарт: $\frac{8a^2-22ab+15b^2}{16a^2-25b^2}$.

A) $\frac{2a-3b}{4a+5b}$; B) $\frac{2a+3b}{4a-5b}$; C) $\frac{4a-5b}{4a+5b}$; D) $\frac{4a+3b}{2a-5b}$.

8. Бөлчөктөрдү кемит: $\frac{9x^2+16}{27x^3+64}-\frac{1}{3x+4}$.

A) $\frac{9x^2+16}{3x+4}$; B) $\frac{-12x}{27x^3+64}$; C) $\frac{12x}{27x^3+64}$; D) $\frac{9x^2+4}{27x^3-64}$.

9. Амалдарды аткар: $\frac{4}{3a+2b}-\frac{2}{2b-3a}+\frac{8b}{4b^2-9a^2}$.

A) $\frac{6}{3a-2b}$; B) $\frac{6}{3a+2b}$; C) $\frac{12a}{9a^2-4b^2}$; D) $\frac{12b}{2b-3a}$.

10. Эсепте: $(-8)^2-(-5)^3-(12)^{-1}$.

A) $188\frac{11}{12}$; B) $-61\frac{1}{12}$; C) $189\frac{1}{12}$; D) $61\frac{1}{12}$.

11. Эсепте: $(-0,2)^{-3}+(0,2)^{-2}-(-2)^{-2}$.

A) $-150\frac{1}{4}$; B) $-100\frac{1}{4}$; C) $99\frac{1}{4}$; D) 11,25.

12. Эсепте: $\frac{\sqrt[3]{-16}+\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{128}}{\sqrt[3]{-250}}$.

A) $\sqrt[3]{2}$; B) 1; C) –1; D) $\frac{9}{5}$.

13. Эсепте: $\sqrt[4]{\frac{(4,15)^3-(1,61)^3}{2,54}+4,15\cdot1,61}$.

A) 3,4; B) 5,76; C) 24; D) 2,4.

14. Эсепте: $\sqrt[3]{\frac{(2,08)^3+(2,016)^3}{4,096}-2,08\cdot2,016}$.

A) 0,16; B) 4,096; C) 1,6; D) 0,8.

15. Эсепте: $\sqrt{2\sqrt{2}+1}\cdot\sqrt[4]{9-4\sqrt{2}}$. *Көрсөтмө:* $\sqrt{a}\cdot\sqrt[4]{b}=\sqrt[4]{a^2\cdot b}$.

A) $\sqrt{7}$; B) $2\sqrt{15}$; C) $3-2\sqrt{2}$; D) 7.

16. Эсепте: $\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[6]{7+4\sqrt{3}}$. *Көрсөтмө:* $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[6]{b}=\sqrt[6]{a^2\cdot b}$.

A) -1; B) 1; C) $3+2\sqrt{3}$; D) $5+3\sqrt{3}$.

17. Эсепте: $\dfrac{\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}\cdot(3-\sqrt{2})}{11-6\sqrt{2}}$. *Көрсөтмө:* $\sqrt[3]{a}\cdot b=\sqrt[3]{a\cdot b^3}$.

A) $5-\sqrt{2}$; B) $5\sqrt{2}$; C) -1; D) 1.

18. Эсепте: $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$.

A) 2; B) $\sqrt{2}$; C) $2\sqrt{2}$; D) -2.

19. Эсепте: $\dfrac{\sqrt[3]{98}\cdot\sqrt[3]{-112}}{\sqrt[3]{500}}$.

A) $-\sqrt[3]{4}$; B) 2,84; C) $-2,8$; D) $-1,4$.

20. $a=125$ болгондо $\sqrt{a}:\sqrt[6]{a}$ туюнтманын сандык маанисин тап:

A) -25; B) 15; C) -5; D) 5.

21. $a=0,04$ болгондо $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[6]{a}$ туюнтманын сандык маанисин тап:

A) 0,2; B) $\sqrt[3]{0,4}$; C) 0,4; D) $-0,2$.

22. Туюнтманы жөнөкөйлөштүр: $\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\cdot\left(a^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{ab}+b^{\frac{2}{3}}\right)$.

A) $a+b$; B) $a-b$; C) a^3+b^3; D) a^3-b^3.

Тарыхый маалыматтар

Кыска көбөйтүүнүн формулалары, алгебралык бөлчөктөр боюнча маалымат байыркы китептерде кездешет. Мисалы, **ал-Каражинин** „Ал-Фахри“, Египет окумуштуусу **Абу Камил** (850—930) дин „Китаб ал-жабр вал-мукабала“ чыгармаларында да алгебралык бөлчөктөр үйрөнүлгөн. Абу Камил ал-Харезмийден кийин алгебра боюнча китеп жазган биринчи окумуштуу болуп саналат. Ал өзүнүн чыгармасында

$$\left(\frac{a}{b}\right)\cdot b=a,\quad \frac{a}{b}=\frac{a^2}{ab},\quad \frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1,\quad \frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{a^2+b^2}{ab}$$

сыяктуу жөнөкөй катыштарга да көңүл бурат.

Алгебралык бөлчөктөргө И. Ньютондун „Жалпы арифметика“ китебинде да жетиштүү орун берилген. „$\frac{a}{b}$ бөлчөк a ны b га бөлүүнүн натыйжасында алынган чоңдук. Куду ушундай, $\frac{aa-bb}{a+x}$ чоңдук $ab-bb$ ны $a+x$ ке бөлүүнүн натыйжасында алынат“, – дейт Ньютон.

Рационалдуу көрсөткүчтүү даража **И. Ньютон** (1643–1727) тарабынан киргизилген. Каалагандай α чыныгы сан үчүн a^{α}, $a>0$, даража түшүнүгү **Л. Эйлер** (1707–1783)дин „Анализге киришүү“ чыгармасында берилген.

Абу Райхан Беруний өзүнүн белгилүү „Кануни Маъсудий“ чыгарм асы нда „айлана узундугунун анын диаметрине катышы иррационалдуу сан“ экендигин айтат. Байыркы Грецияда „эгерде квадраттын жагы чен бирдиги кылып алынса, анын диагоналын рационалдуу сан менен туюнтууга боболстугу“ далилденген. Б. з. ч. V–IV кылымдарда эле байыркы грек окумуштуулары толук квадрат болбогон каалагандай n натуралдык сан үчүн $\sqrt{n}$ сандын иррационалдуу экендигин далилдешкен.

Гиясиддин Жамшид ал-Кашийнин „Арифметиканын ачкычы“ чыгармасында натуралдык сандан тамыр чыгаруунун жалпы усулу баяндалат. $\sqrt[n]{a^n+r}$ тамырды ал-Каший болжолдуу $\sqrt[n]{a^n+r}\approx a+\frac{r}{(a+1)^n-a^n}$ көрүнүшүндө туюнт, мында a – натуралдык сан жана $r<(a+1)^n-a^n$

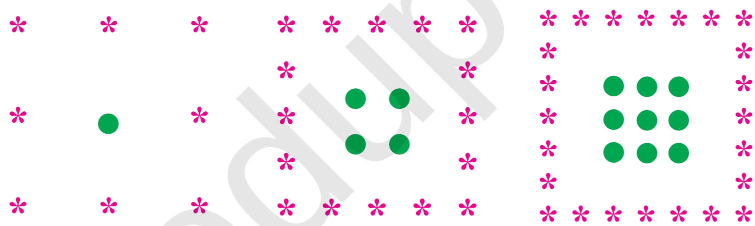
Ал-Каший тамырды тагыраак эсептөө үчүн тамыр астындагы санды 10 дун тиешелүү даражасына көбөйтүүнү сунуштайт: $\sqrt[n]{N}=\dfrac{\sqrt[n]{10^{mn}\cdot N}}{10^{m}}$. Бөлчөктөн тамыр чыгарууда болсо төмөнкү эрежеден пайдаланат: $\sqrt[n]{\dfrac{M}{N}}=\dfrac{\sqrt[n]{M\cdot N^{n-1}}}{N}$.

Ошону менен бирге, ал-Каший тамырлардын көбөйтүндүсүн жалпы көрсөткүчкө келтирүүнүн эрежесин баяндаган:

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[k]{b}=\sqrt[kn]{a^{k}}\cdot\sqrt[kn]{b^{n}}=\sqrt[kn]{a^{k}\cdot b^{n}}.$$

Практикалык жана предметтер аралык маселелер

163. Сүрөттөгү жашыл чекиттер менен сейрек сорттуу мөмөлүү дарактар (мисалы, сейрек сорттуу алмурут) белгиленген. Алмуруттар өлчөмдөрү $n\times n$ (м^2) болгон квадраттарга тигилген. Кызыл жылдызчалар (*) аркылуу болсо тосмо дарактар белгиленген.



Алмурутзардын айланасындагы тосмо дарактар квадраттын жактарын бойлой тигилген.

Суроолорго жооп бер:
1) 20 м × 20 м; 2) 25 м × 25 м өлчөмдүү квадратка тигилген алмуруттарды „курчап“ турган тосмо дарактардын саны канча?
3) Алмуруттардын саны менен аларды „курчап“ турган тосмо дарактардын саны ортосунда кандай көз карандылык бар?

164. Жогорудагы маселенин шарттарында n дин кандай маанилеринде n-квадраттагы алмуруттардын саны аларды „курчап“ турган дарактардын санына:
1) барабар; 2) чоң; 3) кичине болот?

4) Жадыбалды толтур жана үйрөн. Корутунду чыгар.

Квадрат жагынын узундугу (м)	Алмуруттардын саны	Тосмо дарактардын саны
1	1	8
2	4	16
.	.	.
.	.	.
.	.	.
10	...	...

165. Автомобилдер рейтингин аныктоодо төмөнкүлөр эсепке алынат: коопсуздугу (S), ыңгайлуулугу (C), ар түрдүү милдеттерди аткара алышы (F), сапаты (Q) жана дизайны (D). Бул көрсөткүчтөрдүн ар бири бааланат (мисалы, балл берилет). Автомобилдин рейтинги төмөнкү формула боюнча эсептелет:

$$R = \frac{3S+2C+2F+2Q+D}{50}.$$

Жадыбалда автомобилдердин 3 түрдүү маркасы (шарттуу түрдө *A, B, D* маркалар) үчүн түрдүү көрсөткүчтүн баасы келтирилген.

Автомобиль маркасы	**Коопсуздук *S***	**Ыңгайлык *C***	**Түрдүү милдеттерди аткаруу *F***	**Сапат *Q***	**Дизайн *D***
A	3	3	5	5	3
B	4	5	3	4	3
D	4	4	3	3	4

1) Кайсы маркадагы автомобиль эң чоң рейтингге ээ?
2) Автомобиль маркаларынын рейтингин азайып баруу тартибинде жайлаштыр.
3) Сен үчүн кайсы көрсөткүч маанилүү? Эмне үчүн?
4) Сен кандай рейтингдүү автомобилди тандайт элең? Эмне үчүн?

166. Дем алуу, тамакты сиңирүү, кан айланышы үчүн зарыл энергия– негизги алмашуунун интенсивдүүлүгү (ылдамдыгы).

Негизги алмашуунун интенсивдүүлүгүн (НАИ) деп белгилейли. НАИ калорияларда өлчөнөт, мында адам температурасы 23 °C болгон бөлмөдө бейпил жана тынч абалда жаткан болууга тийиш. Аялдарда НАИ төмөнкү формуланын негизинде эсептелет:

$$\text{НАИ}=\ 9,74M+172,9P-4,737B+667,051, \qquad (*)$$

мында M – аялдын массасы, P – боюнун бийиктиги (метрде), B – жашы (жылдарда).

1) Эгерде $M = 60$ кг, $P = 1,7$ м, $B = 35$ жыл болсо, анда НАИ эсепте (эң жакынкы бүтүн санга чейин тегеректе);

2) (*) формуладан аялдын массасы, бою жана жашы НАИнө кандай таасирин тийгизишин билип алууга болот.

Суроолорго жооп бер:

а) Жаш улгайган сайын НАИ да чоңоёбу?
б) Бойдун бийик-төмөндүгү НАИ нө кандай таасир тийгизет?
в) 667,051 саны аялдын жашынан, боюнан, массасынан көз карандыбы?
г) Эгерде аялдын массасы азайса (ал азса), НАИ бул аялда өзгөрөбү?
д) Бир дарыгер „Эгерде эки аялдын массасы, жашы бирдей болуп, бойлорунун айырмасы 10 см болсо, алардын НАИ ортосундагы айырма17,29 килоокалория болот", деген тыянак чыгарды. Бул тыянак туурабы? Аны (*) формула жардамында текшерип көр.

167. Бир даана буюмду даярдоонун убакыты менен бир саатта даярдалган буюмдар санынын ортосундагы көз карандылык тескери пропорциялаш болот. Жадыбалды толтур жана үйрөн. Корутунду чыгар.

Бир буюмду даярдоого сарпталган убакыт (минут)	2	3		5	6		10	12	
Бир саатта өндүрүлгөн буюмдардын саны (даана)	30		15			8	6		4

168. Дарыянын айрым жерлериндеги туурасынан кесилиш аянты менен ошол жерлерге тиешелүү орточо агымдын ылдамдыгы тескери пропорциялаш сандар. Жадыбалды толтур. Кандай тыянак чыгардың?

Туурасынан кесилиш аянты (кв. м)	40	45		54	60		
Агымдын ылдамдыгы (м/с)	0,9	0,8	0,75			0,5	0,4

169. Эки метр узундуктагы жыгачтарды araaчылар 4,5 саатта 0,5 м лүү гололорго араалап салышты. Эгерде ошол жыгачтарды 40 см лүү голо кылып араалашса, аларды канча убакытта араалап бүтүрүшөт? Анда жумуштун көлөмү кандай катышта өзгөрмөк?

170. 1) Эки шкив кайыш менен бириктирилген. Биринчи шкивдин диаметри 28 см, экинчи шкивдики болсо 42 см. Биринчи шкив минутуна 600 жолу айланса, экинчи шкив минутуна канча жолу айланат?

2) Эки шкив кайыш менен бириктирилген. Биринчи шкив минутуна 560 жолу, экинчиси болсо 240 жолу айланат. Биринчи шкивдин айланасы 0,36 м болсо, экинчи шкив айланасынын узундугун тап.

171. *A* жана *B* шаарларынын ортосундагы аралык 360 км. Бул аралыкты жеңил машина 4 саатта, жүк машинасы болсо 6 саатта өттү. *A* дан *B* га карай жүк машинасы жолго чыкты. Ошол убакытта *B* дан *A* га карай жеңил машина жолго чыкты. Алар *A* дан канча километр алыста жолугушат?

△ Жеңил жана жүк машиналарынын ылдамдыктары түрдүүчө болгондуктан түз пропорциялаш байланыш жок, демек, 360 км аралыкты 4 жана 6 сандарына түз пропорциялаш бөлүү менен маселени чечүүгө болбойт.

Башка усулду колдойбуз:

1 саатта жеңил машина *AB* аралыктын $\frac{1}{4}$ бөлүгүн өтөт, жүк машинасы болсо $\frac{1}{6}$ бөлүгүн өтөт. Демек, жолугушуу жерин анык үчүн 360 км аралыкты $\frac{1}{4}$ жана $\frac{1}{6}$ сандарына пропорциялаш кылып бөлүү керек.

Бирок $\frac{1}{4}:\frac{1}{6}=\frac{3}{12}:\frac{2}{12}=3:2$.

Мындан $3+2=5$. Машиналар A дан x км алыста жолугушат десек,

$x=\frac{360}{5}\cdot 2=144$ (км).

Жообу: A дан 144 км алыста. Маселеде 360, 4, 6 сандары берилген. Маселени чечүү жараянында $\frac{1}{4}$ жана $\frac{1}{6}$ сандарын (4 жана 6 га тескери сандарды) киргиздик. Демек, мындай маселени чечүү үчүн 360 ты 4 жана 6 сандарына тескери ($\frac{1}{4}$ жана $\frac{1}{6}$ сандарына түз) пропорциялаш кылып бөлүү керек экен. Мындан ушундай эрежеге келебиз:

Санды берилген сандарга тескери пропорциялаш кылып бөлүү үчүн ошол санды берилген сандарга тескери болгон сандарга түз пропорциялаш кылып бөлүү керек. ▲

172. 195 санын 2, 3, 4 сандарына тескери пропорциялаш кылып үч бөлүккө ажырат.

△ 1) 2, 3, 4 сандарына тескери сандар, тиешелүү түрдө, $\frac{1}{2}$. Демек, 195 ти $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ сандарына түз пропорциялаш кылып үч бөлүккө ажыратуу керек. Бирок $\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{4}=\frac{6}{12}:\frac{4}{12}:\frac{3}{12}=6:4:3$. Биринчи санды a_1, экинчи санды a_2, үчүнчү санды a_3 десек, анда

$$a_1=\frac{195\cdot 6}{6+4+3}=\frac{195\cdot 6}{13}=15\cdot 6=90\,;\quad a_2=\frac{195\cdot 4}{13}=15\cdot 4=60\,;$$

$$a_3=\frac{195\cdot 3}{13}=15\cdot 3=45\,.$$

Жообу: 90, 60, 45.

Текшерүү: 1) $90+60+45=195$.

2) $90:60:45=6:4:3=\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{4}$ (катыштын мүчөлөрүн баштап 15 ке, андан кийин 12 ге бөлдүк). ▲

173. 1) 4480 санын: а) $\frac{1}{3}$ жана $\frac{3}{5}$; б) $\frac{3}{4}$ жана $\frac{2}{9}$ сандарына тескери пропорциялаш кылып эки бөлүккө ажырат.
2) 987 санын: а) 0,6 жана 0,3; б) 0,4 жана 0,(3) сандарына тескери пропорциялаш кылып эки бөлүккө ажырат.

174. 1) 2040 санын $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ жана $\frac{5}{6}$ сандарына тескери пропорциялаш болгон 3 бөлүккө ажырат.
2) 4530 санын $\frac{2}{3}$, 0,7 жана $1\frac{1}{2}$ сандарына тескери пропорциялаш болгон 3 бөлүккө ажырат.

175. 1) *A* жана *B* шаарларынын ортосундагы аралык 465 км. Бул аралыкты жүргүнчү поезди 10,5 саатта, жүк поезди болсо 12 саатта өтөт. Поезддер *A* жана *B* шаарларынан бир убакытта бири-бирин карай жолго чыкса, алардын ар бири жолугушканга чейин канча километр жол жүрөт?
2) Биринчи спортчу 100 м аралыкты 12 с да, экинчиси болсо 13 с да чуркап өтөт. Алар бири-биринен 200 м аралыкта туруп бир убакытта бири-бирин карай жүгүрө башташты. Жолугушканга чейин алардын ар бири канча метр аралыкты өтөт?

176. 1) 36 тиштүү шестерня 18 тиштүү шестерня менен маташтырылган. 18 тиштүү шестерня 60 жолу айланса, 36 тиштүү шестерня канча жолу айланат? 18 тиштүү шестерня 24 жолу айлансачы?
2) Велосипеддин педалдары бириктирилген алдыңкы (жетекчи) шестерняда 48 тиш, арткы дөңгөлөккө бириктирилген шестерняда 16 тиш бар. Эгерде велосипеддин педалдуу шестернясы минутуна 40 жолу айланса, аркадагы дөңгөлөк канча жолу айланат? Педалдуу шестерня 45 жолу; 60 жолу айлансачы? Эгерде велосипед дөңгөлөгүнүн диаметри 70 см болсо, анда жогорудагы ар бир учур үчүн велосипеддин ылдамдыгын тап.

177. 1) *Абу Райхан Берунийнин маселеси*. Кыштын өлчөмдөрү 5, 4, 3 узундук бирдигине барабар. Мындай кыштын 30 даанасынын наркы 60 дирхам (акча бирдиги). Өлчөмдөрү 8, 6, 2 узундук бирдигине барабар 20 даана кыштын наркы канча дирхам болот?
2) Кыштын узуну, туурасы жана бийиктиги 4 : 2 : 1 сыяктуу катышта, дейли. Узуну менен 6 кыш коюуга мүмкүн болгон жерге туурасы менен канча жана бийиктиги менен канча кыш коюуга болот?

II ГЛАВА БАРАБАРСЫЗДЫКТАР

11- §. САНДУУ БАРАБАРСЫЗДЫКТАР

Сандарды салыштыруу турмушта кеңири колдонулат. Мисалы, экономист планда каралган көрсөткүчтөрдү аткарылган көрсөткүчтөр менен, врач оорулуунун температурасын соо адамдын температурасы менен, слесарь жонуп жаткан буюмунун өлчөмдөрүн үлгү менен салыштырат.

Бул үч учурда кандайдыр сандар өз ара салыштырылат. Сандарды салыштыруунун натыйжасында сандуу барабарсыздыктар алынат.

Мисалы, $\frac{4}{5}$ жана $\frac{3}{4}$ сандарын салыштыралы. Ал үчүн алардын айырмасын табабыз:

$$\frac{4}{5}-\frac{3}{4}=\frac{16-15}{20}=\frac{1}{20}.$$

Демек, $\frac{4}{5}=\frac{3}{4}+\frac{1}{20}$, б. а. $\frac{4}{5}$ саны $\frac{3}{4}$ санына $\frac{1}{20}$ оң санды кошуунун натыйжасында алынат. Бул болсо $\frac{4}{5}$ саны $\frac{3}{4}$ санынан $\frac{1}{20}$ ге чоң экендигин билдирет. Ошентип, $\frac{4}{5}$ саны $\frac{3}{4}$ төн чоң, анткени алардын айырмасы оң.

Аныктама. ***Эгерде $a-b$ айырма оң болсо, анда a саны b санынан чоң болот. Эгерде $a-b$ айырма терс болсо, анда a саны b санынан кичине болот.***

Эгерде a саны b санынан чоң болсо, бул $a>b$ сыяктуу; эгерде a саны b санынан кичине болсо, бул $a<b$ сыяктуу жазылат.

Ошентип, $a>b$ барабарсыздыгы $a-b$ айырма оң, б. а. $a-b>0$ экендигин, $a<b$ барабарсыздыгы болсо $a-b<0$ экендигин билдирет.

1-маселе. Эгерде $a>b$ болсо, анда $b<a$ болушун далилде.

△ $a>b$ барабарсыздыгы $a-b$ оң сан экендигин билдирет. Анда $b-a=-(a-b)$ — терс сан, б. а. $b<a$. ▲

Каалагандай эки a жана b саны үчүн төмөнкү үч катыштан бири гана туура болот:

$$a>b,\ a=b,\ a<b.$$

Мисалы, –5 жана –3 сандары үчүн $-5<-3$ барабарсыздыгы туура болот, $-5=-3$ жана $-5>-3$ катыштар болсо туура болбойт.

❗ *a жана b сандарын салыштыруу*, алардын ортосуна >, = же < белгилеринен кайсынысы коюлса туура катыш алынышын табуу дегенге жатат. Муну $a-b$ айырманын белгисин аныктоо менен аткарууга болот.

2-маселе. 0,79 жана $\frac{4}{5}$ сандарын салыштыр.

△ Алардын айырмасын табабыз:

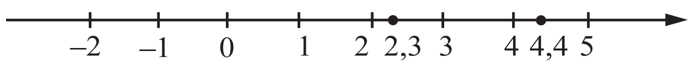
$$0,79-\frac{4}{5}=0,79-0,8=-0,01.$$

$0,79-\frac{4}{5}<0$ болгондуктан $0,79<\frac{4}{5}$. ▲

$a>b$ барабарсыздыгы *геометриялык көз караштан* a чекити сан огунда b чекитинен оңдо жатышын билдирет (10-сүрөт).

10-сүрөт.

Мисалы, $\frac{4}{5}$ чекити 0,79 чекитинен оңдо жатат, анткени $\frac{4}{5}>0,79$; 2,3 чекити 4,4 чекитинен солдо жатат, анткени $2,3<4,4$ (11-сүрөт).



11-сүрөт.

3-маселе. Эгерде $a \neq b$ болсо, анда $a^2+b^2>2ab$ болушун далилде.

△ a^2+b^2-2ab айырма оң экендигин далилдейбиз. Чындыгында да, $a^2+b^2-2ab=(a-b)^2>0$, анткени $a \neq b$. ▲

4-маселе. Эгерде $a>0$ жана $a \neq 1$ болсо, анда $a+\frac{1}{a}>2$ болушун далилде.

△ $a+\frac{1}{a}-2$ айырма оң экендигин далилдейбиз. Чындыгында да,

$$a+\frac{1}{a}-2=\frac{a^2+1-2a}{a}=\frac{(a-1)^2}{a}>0,$$

анткени $a>0$ жана $a \neq 1$. ▲

5-маселе. Эгерде $\frac{n}{m}$ дуруш бөлчөк болсо, анда $\frac{n}{m}<\frac{n+1}{m+1}$ болушун далилде.

△ $\frac{n}{m}$ бөлчөк $n<m$ болгондо (n жана m – натуралдык сандар) дуруш бөлчөк деп аталышын эскерте кетебиз.

$\frac{n}{m}-\frac{n+1}{m+1}=\frac{n(m+1)-m(n+1)}{m(m+1)}=\frac{n-m}{m(m+1)}$ айырма нөлдөн кичине, анткени

$n-m<0$, $m>0$, $m+1>0$. Демек, $\frac{n}{m}<\frac{n+1}{m+1}$. ▲

Көнүгүүлөр

178. Сандуу барабарсыздык аныктамасы жардамында сандарды салыштыр:

1) $0{,}3$ жана $\frac{1}{5}$; 2) $\frac{1}{3}$ жана $0{,}3$; 3) $\frac{13}{40}$ жана $0{,}35$;

4) $-\frac{5}{8}$ жана $-0{,}7$; 5) $\frac{22}{7}$ жана $3{,}14$; 6) $\frac{4}{9}$ жана $0{,}44$.

179. Эгерде:

1) $b-a=-1{,}3$; 2) $b-a=0{,}01$; 3) $a-b=(-5)^4$;

4) $a-b=-5^4$; 5) $a-b=0{,}8$; 6) $b-a=(-2)^3$

болсо, a жана b сандарын салыштыр.

180. a нын каалагандай маанисинде:

1) $a^2 > (a+1)(a-1)$; 2) $(a+2)(a+4) > (a+1)(a+5)$

барабарсыздыгынын тууралыгын далилде.

181. a нын каалагандай маанисинде барабарсыздык туура болушун далилде:

1) $a^3 < (a+1)(a^2-a+1)$; 2) $(a+7)(a+1) < (a+2)(a+6)$;

3) $1+(3a+1)^2 > (1+2a)(1+4a)$; 4) $(3a-2)(a+2) < (1+2a)^2$.

182. a жана b нын каалагандай маанисинде төмөнкү барабарсыздык туура болушун далилде:

1) $a(a+b) > ab-2$; 2) $2ab-1 < b(2a+b)$;

3) $3ab-2 < a(3b+a)$; 4) $b(a+2b) > ab-3$.

183. Эки бала бирдей санда дептер сатып алды. Биринчиси дептерлердин бардыгын 150 сумдан, экинчиси дептерлердин жарымын 130 сумдан, калгандарын 160 сумдан сатып алды. Кимиси көбүрөөк акча сарптаган?

12-§. САНДУУ БАРАБАРСЫЗДЫКТАРДЫН НЕГИЗГИ КАСИЕТТЕРИ

Бул параграфта сандуу барабарсыздыктардын адатта *негизги* деп аталган *касиеттери* каралат, анткени алардан барабарсыздыктардын башка касиеттерин далилдөөдө жана маселелерди чыгарууда пайдаланылат.

1-теорема. ***Эгерде $a>b$ жана $b>c$ болсо, анда $a>c$ болот.***

Шарт боюнча $a>b$ жана $b>c$. Бул $a-b>0$ жана $b-c>0$ экендигин билдирет. $a-b$ жана $b-c$ оң сандарын кошуп, $(a-b)+(b-c)>0$ дү алабыз, б. а. $a-c>0$.

Демек, $a>c$.

1-теореманын *геометриялык түшүндүрмөсү:* эгерде сан огунда a чекити b чекитинен ондо жатса жана b чекити c чекитинен ондо жатса, анда a чекити c чекитинен ондо жатат (12-сүрөт).

12-сүрөт.

2-теорема. ***Эгерде барабарсыздыктын эки бөлүгүнө окшош бир сан кошулса, анда барабарсыздык белгиси өзгөрбөйт.***

○ $a>b$ болсун. Анда каалагандай c сан үчүн

$$a+c>b+c$$

барабарсыздыгынын аткарылышын далилдөө талап кылынат.

Төмөнкү

$$(a+c)-(b+c)=a+c-b-c=a-b$$

айырманы карап көрөбүз. Бул айырма оң, анткени маселенин шарты боюнча $a>b$. Демек, $a+c>b+c$. ●

Натыйжа. ***Каалагандай кошулуучуну барабарсыздыктын бир бөлүгүнөн экинчи бөлүгүнө ошол кошулуучунун белгисин карама-каршысына алмаштырган түрдө көчүрүүгө болот.***

○ $a>b+c$ болсун. Бул барабарсыздыктын эки бөлүгүнө – c санын кошуп, $a-c>b+c-c$ ны алабыз, б. а. $a-c>b$. ●

3-теорема. ***Эгерде барабарсыздыктын эки бөлүгү окшош бир оң санга көбөйтүлсө, анда барабарсыздык белгиси өзгөрбөйт. Эгерде барабарсыздыктын эки бөлүгү окшош бир терс санга көбөйтүлсө, анда барабарсыздык белгиси карама-каршысына өзгөрөт.***

○ 1) $a>b$ жана $c>0$ болсун. $ac>bc$ экендигин далилдейбиз.

Шарт боюнча $a-b>0$ жана $c>0$. Ошондуктан $(a-b)c>0$, б. а. $ac-bc>0$. Демек, $ac>bc$.

2) $a>b$ жана $c<0$ болсун. $ac<bc$ экендигин далилдейбиз.

Шарт боюнча $a-b>0$ жана $c<0$. Ошондуктан $(a-b)c<0$, б. а. $ac-bc<0$. Демек, $ac<bc$. ●

Мисалы, $\frac{1}{5}<0,21$ барабарсыздыгынын эки бөлүгүн 3 кө көбөйтүп, $\frac{3}{5}<0,63$ тү алабыз, $\frac{1}{5}<0,21$ барабарсыздыгынын эки бөлүгүн -4 кө көбөйтүп болсо $-\frac{4}{5}>-0,84$ барабарсыздыгын алабыз.

Эгерде $c \neq 0$ болсо, анда c жана $\frac{1}{c}$ сандар бирдей белгиге ээ болушун белгилей кетебиз. c га бөлүүнү $\frac{1}{c}$ ге көбөйтүү менен алмаштырууга болгондуктан, 3-теоремадан төмөнкү тастык келип чыгат.

Натыйжа. ***Эгерде барабарсыздыктын эки бөлүгү окшош бир оң санга бөлүнсө, анда барабарсыздык белгиси өзгөрбөйт. Эгерде барабарсыздыктын эки бөлүгү окшош бир терс санга бөлүнсө, анда барабарсыздык белгиси карама-каршысына өзгөрөт.***

Мисалы, $0{,}99<1$ барабарсыздыгынын эки бөлүгүн 3 кө бөлүп, $0{,}33<\frac{1}{3}$ ди алабыз, $0{,}99<1$ барабарсыздыгынын эки бөлүгүн –9 га бөлүп болсо $-0{,}11>-\frac{1}{9}$ ди алабыз.

1-маселе. Эгерде $a>b$ болсо, анда $-a<-b$ болушун далилде.

△ $a>b$ барабарсыздыгынын эки бөлүгүн –1 терс санга көбөйтүп, $-a<-b$ ны алабыз. ▲

Мисалы, $1{,}9<2{,}01$ барабарсыздыгынан $-1{,}9>-2{,}01$ барабарсыздыгы келип чыгат, $0{,}63<\frac{3}{5}$ барабарсыздыгынан $-0{,}63<-\frac{3}{5}$ барабарсыздыгы келип чыгат.

2-маселе. Эгерде a жана b – оң сандар жана $a>b$ болсо, анда $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ болушун далилде.

△ $b<a$ барабарсыздыгынын эки бөлүгүн ab оң санга бөлүп, $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ барабарсыздыгын алабыз. ▲

Барабарсыздыктардын бул параграфта каралган бардык касиеттери > (чоң) белгилүү барабарсыздык үчүн далилденгенин белгилей кетебиз. Алар < (кичине) белгилүү барабарсыздыктар үчүн да куду ушундай далилденет.

Көнүгүүлөр

184. Төмөнкү тастыктарды далилде:

1) эгерде $a-2<b$ жана $b<0$ болсо, анда $a-2$ – терс сан;
2) эгерде $a^2-5>a$ жана $a>1$ болсо, анда $a^2-5>1$.

185. Эгерде:

1) $a>b$ жана $b>1$;
2) $a<b$ жана $b<-2$;
3) $a-1<b$ жана $b<-1$;
4) $a+1>b$ жана $b>1$

болсо, анда a оң сан болобу же терс сан болобу?

186. $-2<4$ барабарсыздыгынын эки бөлүгүнө: 1) 5; 2) -7 санын кошуунун натыйжасында алынган барабарсыздыкты жаз.

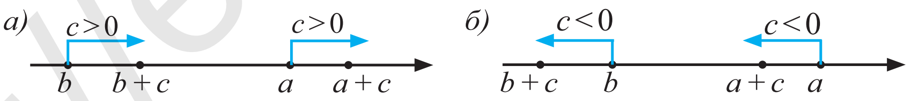
187. $2a+3b>a-2b$ барабарсыздыгынын эки бөлүгүнө: 1) $2b$; 2) $-a$ санды кошуунун натыйжасында алынган барабарсыздыкты жаз.

188. $3>1$ барабарсыздыгынын эки бөлүгүнөн: 1) 1; 2) -5 санын кемитүүнүн натыйжасында алынган барабарсыздыкты жаз.

189. $a-2b<3a+b$ барабарсыздыгынын эки бөлүгүнөн: 1) a; 2) b санды кемитүүнүн натыйжасында алынган барабарсыздыкты жаз.

190. $a<b$ болсун. Төмөнкү сандарды салыштыр:

1) $a+x$ жана $b+x$;
2) $a-5$ жана $b-5$.
3) 13 жана 14-сүрөттөрдө сандуу барабарсыздыктын кандай касиеттери туюнтулганын айт.



13-сүрөт.

14-сүрөт.

Берилген барабарсыздыктын эки бөлүгүн көрсөтүлгөн санга көбөйт (**191–192**):

191. 1) $3{,}35<4{,}5$ ти 4 кө; 2) $3{,}8>2{,}4$ түү 5 ке;

3) $\frac{5}{6}>\frac{2}{3}$ ни -12 ге; 4) $\frac{3}{4}<\frac{7}{8}$ ни -16 га.

192. 1) $2a > 1$ ди $0,5$ ке; 2) $4a < -1$ ди $0,25$ ке;
3) $-4a < -3$ тү $0,25$ ке; 4) $-2a > -4$ тү $-0,5$ ке.

Берилген барабарсыздыктын эки бөлүгүн көрсөтүлгөн санга бөл (**193–194**):

193. 1) $-2 < 5$ ти 2 ге; 2) $4,5 > -10$ ди 5 ке;
3) $-25 > -30$ ду -5 ке; 4) $-20 < -12$ ни -4 кө.

194. 1) $1,2a < 4,8$ ди $1,2$ ге; 2) $2,3a < -4,6$ ни $2,3$ кө;

3) $-\frac{2}{3}x < -\frac{1}{4}$ ди $\frac{2}{3}$ ге; 4) $-\frac{3}{4}x > \frac{1}{3}$ ди $-\frac{3}{4}$ кө.

13-§. БАРАБАРСЫЗДЫКТАРДЫ КОШУУ ЖАНА КӨБӨЙТҮҮ

Түрдүү маселелерди чыгарууда көбүнесе барабарсыздыктарды кошуу же көбөйтүүгө, б. а. барабарсыздыктардын сол жана оң бөлүктөрүн башка-башка кошуу же көбөйтүүгө туура келет. Мындай учурларда кээде барабарсыздыктар мүчөлөп кошулуп же көбөйтүлүп жатат, дейилет.

Мисалы, эгерде саякатчы биринчи күнү 20 км ден көбүрөөк, экинчи күнү болсо 25 км ден көбүрөөк жол жүргөн болсо, анда ал эки күндүн ичинде 45 км ден көбүрөөк жол жүрдү, деп айтууга болот.

Куду ушундай, эгерде тик бурчтуктун узуну 13 см ден аз, туурасы 5 см ден аз болсо, анда ошол тик бурчтуктун аянты 65 см^2 ден аз, деп айтууга болот.

Бул мисалдарда *барабарсыздыктарды кошуу жана көбөйтүү жөнүндөгү төмөнкү теоремалар* колдонулду.

1-теорема. ***Бирдей белгилүү барабарсыздыктарды кошууда куду ошол белгилүү барабарсыздык алынат: эгерде $a>b$ жана $c>d$ болсо, анда $a+c>b+d$ болот.***

○ Шарт боюнча $a-b>0$ жана $c-d>0$. Төмөнкү айырманы карап көрөбүз:

$$(a+c)-(b+d) = a+c-b-d = (a-b)+(c-d).$$

Оң сандардын суммасы оң болгондуктан, $(a+c)-(b+d)>0$, б. а. $a+c>b+d$.

Мисалдар:

1) $\begin{array}{r} +\ 3>2{,}5 \\ 5>4 \\ \hline 8>6{,}5 \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} +\ 1{,}2<1{,}3 \\ -3<-2 \\ \hline -1{,}8<-0{,}7 \end{array}$ 3) $\begin{array}{r} +\ 4{,}8>2{,}3 \\ -1{,}2>-1{,}3 \\ \hline 3{,}6>1 \end{array}$

2-теорема. ***Сол жана оң бөлүктөрү оң болгон бирдей белгилүү барабарсыздыктарды көбөйтүүнүн натыйжасында куду ошол белгилүү барабарсыздык алынат: эгерде $a>b$, $c>d$ жана a, b, c, d – оң сандар болсо, анда $ac>bd$ болот.***

Айырманы карап көрөбүз:

$$ac-bd=ac-bc+bc-bd=c(a-b)+b(c-d).$$

Шарт боюнча $a-b>0, c-d>0, b>0, c>0$. Ошондуктан $c(a-b)+$ $+b(c-d)>0$, б. а. $ac-bd>0$, мындан $ac>bd$.

Мисалдар:

1) $\begin{array}{r} \times\ 3{,}2>3{,}1 \\ 3>2 \\ \hline 9{,}6>6{,}2 \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} \times\ 1{,}8<2{,}1 \\ 4<5 \\ \hline 7{,}2<10{,}5 \end{array}$ 3) $\begin{array}{r} \times\ 2{,}4<3{,}5 \\ 3<4 \\ \hline 7{,}2<14 \end{array}$

1-маселе. Эгерде a, b – оң сандар жана $a>b$ болсо, анда $a^2>b^2$ болот.

△ $a>b$ барабарсыздыгын өзүн-өзүнө көбөйтүп, төмөнкүнү алабыз: $a^2>b^2$. ▲

Ушуга окшош, a, b — оң сандар жана $a>b$ болсо, анда каалагандай натуралдык n үчүн $a^n>b^n$ экендигин далилдөөгө болот.

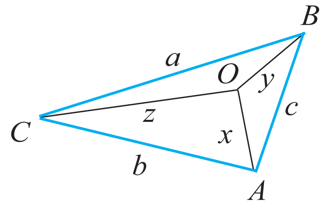
Мисалы, $5>3$ барабарсыздыгынан $5^5>3^5$, $5^7>3^7$ сыяктуу барабарсыздыктар келип чыгат.

2-маселе. Үч бурчтуктун ичинде жаткан каалагандай чекиттен анын чокуларына чейин болгон аралыктардын суммасы ошол үч бурчтуктун жарым периметринен чоң экендигин далилде.

△ 15-сүрөттү карап көрөбүз. x, y, z — ABC үч бурчтугунун ички O чекитинен анын чокуларына чейин болгон аралыктар болсун.

AOB, AOC, BOC үч бурчтуктарынан үч бурчтуктун эки жагынын суммасы жөнүндөгү теорема боюнча:

$$x+y>c,$$
$$x+z>b,$$
$$y+z>a.$$



15-сүрөт.

Бул барабарсыздыктарды мүчөлөп кошуп, $2x+2y+2z>a+b+c$ ны алабыз, мындан

$$x+y+z>\frac{a+b+c}{2}.\blacktriangle$$

Көнүгүүлөр

195. (Оозеки.) Туурабы:
1) эгерде $x>7$ жана $y>4$ болсо, анда $x+y>11$;
2) эгерде $x>5$ жана $y>8$ болсо, анда $xy<40$;
3) эгерде $x<-7$ жана $y<7$ болсо, анда $x+y<0$;
4) эгерде $x<2$ жана $y<5$ болсо, анда $xy<10$?

196. Барабарсыздыктарды кош:
1) $5>-8$ жана $8>5$; 2) $-8<2$ жана $3<5$;
3) $3x+y<2x+1$ жана $3y-2x<14-2a$;
4) $3x^2+2y>4a-2$ жана $5y-3x^2>3-4a$.

197. Барабарсыздыктарды көбөйт:
1) $2\frac{2}{3}>1\frac{1}{3}$ жана $12>6$; 2) $6\frac{1}{4}<9\frac{2}{3}$ жана $4<6$;
3) $x-2>1$ жана $x+2>4$; 4) $4<2x+1$ жана $3<2x-1$.

198. Эгерде $a>2$ жана $b>5$ болсо, анда
1) $3a+2b>16$; 2) $ab-1>9$; 3) $a^2+b^2>29$;
4) $a^3+b^3>133$; 5) $(a+b)^2>35$; 6) $(a+b)^3>340$;
7) $2a+3b>19$; 8) $6ab-5>55$; 9) $ab(a+b)>70$
болушун далилде.

199. Үч бурчтуктун жактары, тиешелүү түрдө, 73 см, 1 м 15 см жана 1 м 11 см ден аз. Анын периметри 3 м ден аз экендигин далилде.

200. 4 жалпы дептер жана 8 чөнтөк дептер сатып алынды. Жалпы дептердин наркы 200 сумдан аз, чөнтөк дептердики болсо 150 сумдан аз. Бардык сумма 2000 сумдан аз экендигин көрсөт.

201. Тик бурчтуктун бир жагы 7 см ден узун, экинчи жагы биринчисинен 3 эсе узун. Тик бурчтуктун периметри 56 см ден узун экендигин далилде.

202. Тик бурчтук формасындагы талаанын узуну туурасынан 5 эсе узун, туурасы болсо 4 м ден узун. Анын аянты 80 м^2 ден чоңдугун далилде.

203. Тик бурчтук ичинде жаткан каалагандай чекитинен анын чокуларына чейин болгон аралыктардын суммасы ошол тик бурчтуктун жарым периметринен чоң экендигин далилде.

Анык жана анык эмес барабарсыздыктар. > (чоң) жана < (кичине) белгилүү барабарсыздыктарга *анык барабарсыздыктар* дейилет. Мисалы, $\frac{5}{6} > \frac{1}{2}, \frac{3}{4} < 1, a > b, c < d$ – *анык барабарсыздыктар.*

Анык барабарсыздыктардын > жана < белгилери менен бир катарда ≥ (чоң же барабар) жана ≤ (кичине же барабар) белгилүү барабарсыздыктардан да пайдаланылат. Аларга *анык эмес барабарсыздыктар* дейилет.

$a \leq b$ барабарсыздыгы $a < b$ же $a = b$ экендигин, б. а. a саны b дан чоң эместигин билдирет.

Мисалы, эгерде самолёттогу орундардын саны 134 болсо, анда a жүргүнчүнүн саны 134 төн аз же ага барабар болушу мүмкүн. Анда $a \leq 134$ сыяктуу жазылат.

Ушуга окшош, $a \geq b$ барабарсыздыгы a саны b дан чоң же ага барабар экендигин, б. а. a саны b дан кичине эместигин билдирет.

≥ белгиси же ≤ белгиси катышкан барабарсыздыктарга *анык эмес барабарсыздыктар* дейилет. Мисалы, $18 \geq 12$, $11 \leq 12$, $7 \geq 7$, $4 \leq 4$, $a \geq b$, $c \leq d$ – анык эмес барабарсыздыктар.

Анык барабарсыздыктардын 12–13-§ тарда туюнтулган бардык касиеттери анык эмес барабарсыздыктар үчүн да орундуу. Эгерде анык барабарсыздыктар үчүн > жана < белгилер карама-каршы белгилер деп эсептелсе, анык эмес барабарсыздыктар үчүн ≥ жана ≤ белгилери карама-каршы белгилер эсептелет.

Мисалы, 12-§ тагы 2-теореманы анык эмес барабарсыздыктар үчүн минтип туюнтууга болот: эгерде $a \geq b$ болсо, анда каалагандай c саны үчүн $a+c \geq b+c$ болот. Чындыгында да, $a>b$ болгон учур үчүн бул теорема 12-§ та далилденген, $a=b$ үчүн болсо бул тастык барабардыктын бизге белгилүү болгон касиетин туюнтат.

Маселе. Каалагандай a жана b лар үчүн

$$a^2+b^2 \geq 2ab \qquad (1)$$

барабарсыздыгынын туура экендигин далилде.

△ a^2+b^2-2ab айырма каалагандай a жана b лар үчүн нөлдөн кичине эместигин далилдейбиз. Чындыгында да, $a^2+b^2-2ab=(a-b)^2 \geq 0$. Демек, (1) барабарсыздык a жана b лардын каалагандай маанилеринде туура болот, ошону менен бирге барабардык белгиси $a=b$ болгондо гана орундуу. ▲

Көнүгүүлөр

204. n сандын барабарсыздыкты канааттандырган эң чоң бүтүн маанисин тап:

1) $n \leq -2$; 2) $n \leq 3$; 3) $n < 4$; 4) $n < -5$;
5) $n \leq 0,2$; 6) $n \leq -0,3$; 7) $n < -\pi$; 8) $n < \pi$.

205. n сандын барабарсыздыкты канааттандырган эң кичине бүтүн маанисин тап:

1) $n \geq -3$; 2) $n \geq 6$; 3) $n \geq -6$; 4) $n > -4$;
5) $n > -4,21$; 6) $n \geq 3,24$; 7) $n \geq \pi - 1$; 8) $n \geq -\pi + 1$.

206. x сандын барабарсыздыкты канааттандырган эң чоң бүтүн маанисин тап:

1) 1) $\frac{x}{6} \leq 1$; 2) $\frac{x}{4} < -2$; 3) $\frac{x}{10} \leq -3,14$; 4) $\frac{x}{7} \leq 0,15$.

207. Барабарсыздык белгилеринен пайдаланып, жаз:
1) Бүгүн Фергана өрөөнүндө (t °C) температура 20°C тан жогору эмес.
2) Суу 5 м ден аз болбогон (h м) бийиктикке көтөрүлдү.
3) Нормалдуу басымдагы суунун суюк абалдагы (t °C) температурасы 0°C тан аз эмес; 100 °C тан чоң эмес.

4) Шаарда автомобиль транспортунун (v км/саат) кыймыл ылдамдыгы 70 км/саат тан чоң эмес.

208. $a \le b$ болсун. Барабарсыздык туурабы:

1) $a-3 \le b-3$; 2) $5a \le 5b$; 3) $a+2,5 < b+2,5$;
4) $a-4 > b-4$; 5) $a-4 \le b+1$; 6) $a-3,1 \le b+0,1$?

209. $a \ge b$ болсун. Барабарсыздык туурабы:

1) $-2a > -2b$; 2) $-3a \le -3b$; 3) $\frac{a}{12} \ge \frac{b}{12}$;
4) $\frac{a}{15} < \frac{b}{15}$; 5) $0,5a \ge 0,4b$; 6) $-2a \le -b$?

14- §. САНДУУ БАРАБАРСЫЗДЫКТАРДЫ ДАРАЖАГА КӨТӨРҮҮ

11-§ та сол жана оң бөлүктөрү оң болгон бирдей белгилүү барабарсыздыктар мүчөлөп көбөйтүлгөндө ошол белгилүү барабарсыздык алынышы көрсөтүлгөн эле.

Мындан, эгерде $a > b > 0$ жана n натуралдык сан болсо, анда $a^n > b^n$ болушу келип чыгат.

Шарт боюнча $a > 0$, $b > 0$. n бирдей $a > b$ барабарсыздыгын мүчөлөп көбөйтүп, алабыз: $a^n > b^n$.

1- маселе. $(0,43)^5$ жана $\left(\frac{3}{7}\right)^5$ сандарын салыштыр.

△ 0,001 ге чейин аныктык менен $\frac{3}{7} \approx 0,428$ болгондуктан $0,43 > \frac{3}{7}$ болот. Ошондуктан $(0,43)^5 > \left(\frac{3}{7}\right)^5$. ▲

Сол жана оң бөлүктөрү оң болгон барабарсыздыкты каалагандай рационалдуу даражага көтөрүүгө болот:

эгерде $a > b > 0$, $r > 0$ болсо, анда

$$a^r > b^r \text{ болот;} \quad (1)$$

эгерде $a>b>0$, $r<0$ болсо, анда

$$a^r<b^r \quad (2)$$

болот.

1-касиетин далилдейбиз.

Адегенде (1) касиетинин $r=\frac{1}{n}$ болгондо тууралыгын, андан кийин болсо жалпы учур үчүн, $r=\frac{m}{n}$ болгондо тууралыгын далилдейбиз.

а) Алсак, $r=\frac{1}{n}$ болсун, мында n–бирден чоң натуралдык сан, $a>0$, $b>0$. Шарт боюнча $a>b$. $a^{\frac{1}{n}}>b^{\frac{1}{n}}$ экендигин далилдөө керек. Элестетели, бул туура эмес, б. а. $a^{\frac{1}{n}}\le b^{\frac{1}{n}}$ болсун. Анда бул барабарсыздыкты n натуралдык даражага көтөрүп, $a\le b$ ны алабыз, бул болсо $a>b$ шартка каршы. Демек, $a>b>0$ дөн $a^{\frac{1}{n}}>b^{\frac{1}{n}}$ экендиги келип чыгат.

б) Алсак, $r=\frac{m}{n}$ болсун, мында m жана n – натуралдык сандар. Анда $a>b>0$ шартынан, далилдегенибиз боюнча $a^{\frac{1}{n}}>b^{\frac{1}{n}}$ экендиги келип чыгат. Бул барабарсыздыкты m натуралдык даражага көтөрүп, алабыз:

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m>\left(b^{\frac{1}{n}}\right)^m, \text{ б. а. } a^{\frac{m}{n}}>b^{\frac{m}{n}}.$$

Мисалы, $5^{\frac{2}{7}}>3^{\frac{2}{7}}$, анткени $5>3$; $2^{\frac{3}{4}}<4^{\frac{3}{4}}$, анткени $2<4$; $\sqrt[5]{7^2}>\sqrt[5]{6^2}$ анткени $7>6$.

Эми (2) касиетин далилдейбиз.

Эгерде $r<0$ болсо, анда $-r>0$ болот. (1) касиет боюнча $a>b>0$ шартынан $a^{-r}>b^{-r}$ экендиги келип чыгат. Бул барабарсыздыктын эки бөлүгүн оң a^rb^r санына көбөйтүп, $b^r>a^r$ ди алабыз, б. а. $a^r<b^r$.

Мисалы, $(0,7)^{-8}<(0,6)^{-8}$, анткени $0,7>0,6$; $13^{-0,6}>15^{-0,6}$, анткени $13<15$; $\sqrt[4]{8^{-3}}<\sqrt[4]{7^{-3}}$, анткени $8>7$.

Жогорку математика курсунда (1) касиет каалагандай оң r чыныгы сан үчүн, (2) касиет болсо каалагандай терс r чыныгы сан үчүн туура экендиги далилденет. Мисалы,

$$\left(\frac{8}{9}\right)^{\sqrt{2}} > \left(\frac{7}{8}\right)^{\sqrt{2}}, \text{ анткени } \frac{8}{9} > \frac{7}{8}; \qquad \left(\frac{7}{8}\right)^{-\sqrt{3}} < \left(\frac{6}{7}\right)^{-\sqrt{3}}, \text{ анткени } \frac{7}{8} > \frac{6}{7}.$$

Анык барабарсыздыктарды (> же < белгилүү) даражага көтөрүүнүн каралган касиеттери анык эмес барабарсыздыктар (≥ же ≤ белгилүү) үчүн да туура болушун белгилей кетебиз.

Ошентип, *эгерде барабарсыздыктын эки бөлүгү оң болсо, анда аны оң даражага көтөргөндө барабарсыздык белгиси сакталат, ал эми терс даражага көтөргөндө болсо барабарсыздык белгиси карама-каршысына өзгөрөт.*

Анык барабарсыздыктар үчүн > жана < белгилери, анык эмес барабарсыздыктар үчүн болсо ≥ жана ≤ белгилери карама-каршы белгилер болушун эскерте кетебиз.

2- маселе. Сандарды салыштыр:

1) $\left(\frac{17}{18}\right)^{-\frac{1}{3}}$ жана $\left(\frac{18}{17}\right)^{-\frac{1}{3}}$; 2) $\left(\frac{6}{7}\right)^{\sqrt{2}}$ жана $(0,86)^{\sqrt{2}}$.

△ 1) $\frac{17}{18} < 1$ жана $\frac{18}{17} > 1$ болгондуктан $\frac{17}{18} < \frac{18}{17}$ болот.

Бул барабарсыздыкты терс $\left(-\frac{1}{3}\right)$ даражага көтөрүп, алабыз: $\left(\frac{17}{18}\right)^{-\frac{1}{3}} > \left(\frac{18}{17}\right)^{-\frac{1}{3}}$.

2) Даражалардын негиздерин салыштырабыз. $\frac{6}{7} = 0,857...$ болгондуктан $\frac{6}{7} < 0,86$ болот. Бул барабарсыздыкты оң $\sqrt{2}$ даражага көтөрүп, төмөнкүнү алабыз:

$$\left(\frac{6}{7}\right)^{\sqrt{2}} < 0,86^{\sqrt{2}}. \blacktriangle$$

3- маселе. Теңдемени чыгар: $10^x = 1$.

△ $x = 0$ саны бул теңдеменин тамыры болот, анткени $10^0 = 1$. Башка тамырлары жоктугун көрсөтөбүз.

Берилген теңдемени $10^x = 1^x$ көрүнүшүндө жазабыз.

Эгерде $x > 0$ болсо, анда $10^x > 1^x$ жана, демек, теңдеме оң тамырларга ээ эмес.

Эгерде $x < 0$ болсо, анда $10^x < 1^x$ жана, демек, теңдеме терс тамырларга ээ эмес.

Ошентип, $x = 0$ берилген $10^x = 1$ теңдеменин жалгыз тамыры экен. ▲

Ушуга окшош, $a^x = 1$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ теңдеме жалгыз $x = 0$ тамырга ээ болушу далилденет. Мындан,

$$a^x = a^y \tag{3}$$

барабардык $x = y$ болгондо гана туура болушу келип чыгат, мында $a > 0$, $a \neq 1$.

○ (3) барабардыкты a^{-y} ке көбөйтүп, $a^{x-y} = 1$ ди алабыз, мындан $x = y$. ●

4- маселе. $3^{2x-1} = 9$ теңдемени чыгар.

△ $3^{2x-1} = 3^2$, мындан $2x - 1 = 2$, $x = 1{,}5$. ▲

$a^x = b$ теңдемени карап көрөбүз, мында $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$.

Бул теңдеме жалгыз x_0 тамырга ээ экендигин далилдөөгө болот. *x_0 санына a негиз боюнча b санынын логарифми дейилет жана $\log_a b$ сыяктуу белгиленет.* Мисалы, $3^x = 9$ теңдеменин тамыры 2 саны болот, б. а. $\log_3 9 = 2$. Куду ушундай, $\log_2 16 = 4$, анткени $2^4 = 16$, $\log_5 \frac{1}{5} = -1$, анткени $5^{-1} = \frac{1}{5}$;; $\log_{\frac{1}{3}} 27 = -3$,анткени $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 27$.

b санынын 10 негизи боюнча логарифмине *ондук логарифм* дейилет жана $\lg b$ сыяктуу белгиленет. Мисалы, $\lg 100 = 2$, анткени $10^2 = 100$; $\lg 0{,}001 = -3$, анткени $10^{-3} = 0{,}001$.

Көнүгүүлөр

210. (Оозеки). Сандарды салыштыр:

1) $2^{\frac{1}{3}}$ жана $3^{\frac{1}{3}}$; | 2) $5^{-\frac{4}{5}}$ жана $3^{-\frac{4}{5}}$; | 3) $5^{\sqrt{3}}$ жана $7^{\sqrt{3}}$; | 4) $21^{-\sqrt{2}}$ жана $31^{-\sqrt{2}}$.

211. Сандарды салыштыр:

1) $(0,88)^{\frac{1}{6}}$ жана $\left(\frac{6}{11}\right)^{\frac{1}{6}}$; 2) $\left(\frac{5}{12}\right)^{-\frac{1}{4}}$ жана $(0,41)^{-\frac{1}{4}}$;

3) $(4,09)^{\sqrt[3]{2}}$ жана $\left(4\frac{3}{25}\right)^{\sqrt[3]{2}}$; 4) $\left(\frac{11}{12}\right)^{-\sqrt{5}}$ жана $\left(\frac{12}{13}\right)^{-\sqrt{5}}$.

212. Теңдемелерди чыгар:

1) $6^{2x}=6^{\frac{1}{5}}$; 2) $3^x=27$; 3) $7^{1-3x}=7^{10}$;

4) $2^{2x+1}=32$; 5) $4^{2+x}=1$; 6) $\left(\frac{1}{5}\right)^{4x-3}=5$.

213. Сандарды салыштыр:

1) $\sqrt[7]{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^2}$ жана $\sqrt[7]{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)^2}$; 2) $\sqrt[5]{\left(1\frac{1}{4}-1\frac{1}{5}\right)^3}$ жана $\sqrt[5]{\left(1\frac{1}{6}-1\frac{1}{7}\right)^3}$.

Теңдемени чыгар (**214–216**):

214. 1) $3^{2-y}=27$; 2) $3^{5-2x}=1$;

3) $9^{\frac{1}{2}x-1}-3=0$; 4) $27^{3-\frac{1}{3}y}-81=0$.

215. 1) $\left(\frac{1}{9}\right)^{2x-5}=3^{5x-8}$; 2) $2^{4x-9}=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-4}$; 3) $8^x4^{x+13}=\frac{1}{16}$;

4) $\frac{25^{x-2}}{\sqrt{5}}=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-7,5}$; 5) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-4}=2^{x+2}$; 6) $3^x\cdot 9^{x-1}=\frac{1}{27}$.

216. 1) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2x+1}=(3\sqrt{3})^x$; 2) $(\sqrt[3]{2})^{x-1}=\left(\frac{2}{\sqrt[3]{2}}\right)^{2x}$;

3) $9^{3x+4}\sqrt{3}=\frac{27^{x-1}}{\sqrt{3}}$; 4) $\frac{8}{(\sqrt{2})^x}=4^{3x-2}\sqrt{2}$.

217. Эсепте:

1) $\log_7 49$; 2) $\log_2 64$; 3) $\log_{\frac{1}{2}} 4$;

4) $\log_3 \frac{1}{27}$; 5) $\log_7 \frac{1}{7}$.

218. Теңдемени чыгар:

1) $7^{5x-1}=49$; 2) $(0{,}2)^{1-x}=0{,}04$; 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x+3}=3^{2x}$;

4) $3^{5x-7}=\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$; 5) $(0{,}3)^{2-3x}=0{,}027$; 6) $\left(\frac{1}{6}\right)^{2x-3}=6^{x}$.

15-§. БИР БЕЛГИСИЗДҮҮ БАРАБАРСЫЗДЫКТАР

1-маселе. Эки шаардан бир убакытта бири-бирин карай эки поезд бирдей туруктуу ылдамдык менен жөнөдү. Кыймыл башталгандан 2 саат өтүп алар өткөн аралыктардын суммасы 200 км ден аз болбостугу үчүн поезддер кандай ылдамдык менен аракеттенүүгө тийиш?

△ Саатына x км – поезддер кыймылынын изделген ылдамдыгы болсун. Эки саатта поезддерден ар бири $2x$ километр жол жүрөт. Маселенин шарты боюнча поезддердин 2 саатта өткөн аралыктарынын суммасы 200 км ден аз болбоого тийиш:

$$2x+2x\geq 200.$$

Мындан $4x\geq 200$, $x\geq 50$.

Жообу: ар бир поезддин кыймыл ылдамдыгы 50 км/саттан аз болбоого тийиш. ▲

$4x\geq 200$ барабарсыздыгында x тамгасы менен белгисиз сан белгиленген. Бул *бир белгисиздүү сызыктуу барабарсыздыкка мисал* болот.

Төмөнкү

$$ax>b,\ ax<b,\ ax\geq b,\ ax\leq b$$

барабарсыздыктарга бир белгисиздүү сызыктуу барабарсыздыктар дейилет, мында a жана b – берилген сандар, x болсо белгисиз.

Көптөгөн, мисалы,

$$4(3-x)>5+2x,\quad \frac{x-3}{2}\leq\frac{x-2}{3},\quad 1-\frac{x}{2}<3(x+4)$$

сыяктуулар бир белгисиздүү сызыктуу барабарсыздыкка келтирилет.

Барабарсыздык белгисинин сол жана оң жактарындагы туюнтмаларга *барабарсыздыктын сол жана оң бөлүктөрү* дейилет. Анын сол жана оң бөлүктөрүндөгү ар бир кошулуучуга *барабарсыздыктын мүчөсү* дейилет.

Мисалы, $2x-5\geq4+3x$ барабарсыздыгында $2x-5$ – сол бөлүк, $4+3x$ – оң бөлүк, $2x$, –5, 4 жана $3x$ – барабарсыздыгынын мүчөлөрү.

Эгерде маселеде алынган $2x+2x\geq200$ барабарсыздыгына $x=50$, $x=51$, $x=60$ ты койсок, анда туура сандуу барабарсыздыктар алынат:

$$2\cdot50+2\cdot50\geq200;\ 2\cdot51+2\cdot51\geq200;$$
$$2\cdot60+2\cdot60\geq200.$$

50, 51, 60 тын ар бирине $2x+2x\geq200$ барабарсыздыгынын чыгарылышы дейилет.

Бир белгисиздүү ***барабарсыздыктын чыгарылышы*** *деп, белгисиздин аны туура сандуу барабарсыздыкка айландырган маанисине айтылат.*

Барабарсыздыкты чыгаруу *анын бардык чыгарылыштарын табуу же алардын жоктугун аныктоо дегенди билдирет.*

Барабарсыздыктагы белгисиз сан каалагандай тамга менен белгилениши мүмкүн. Мисалы, төмөнкү

$$3(y-5)<2(4-y),\qquad 2t-1\geq4(t+3),\qquad 5-\frac{z}{2}>\frac{z}{3}-4$$

барабарсыздыктарда белгисиздер, тиешелүү түрдө, *y, m, z* тамгалары менен белгиленген.

Барабарсыздыктарды чыгарууга мисалдар келтиребиз.

2-маселе. Барабарсыздыкты чыгар:

$$x+1>7-2x.$$

△ x саны берилген барабарсыздыктын чыгарылышы, б. а. x саны $x+1>7-2x$ ти туура барабарсыздыкка айландырат, деп элестетебиз.

$-2x$ мүчөнү барабарсыздыктын оң бөлүгүнөн сол бөлүгүнө анын белгисин карама-каршысына өзгөрткөн түрдө өткөрөбүз, 1 санын болсо барабарсыздыктын оң бөлүгүнө „–“ белгиси менен өткөрөбүз.

Натыйжада төмөнкү

$$x+2x>7-1$$

туура барабарсыздыгын алабыз.

Бул барабарсыздыктын эки бөлүгүндө окшош мүчөлөрдү тегеректейбиз:

$$3x>6.$$

Эми барабарсыздыктын эки бөлүгүн 3 кө бөлүп,

$$x>2$$

экендигин табабыз.

Ошентип, x ти берилген барабарсыздыктын чыгарылышы, деп элестетип, биз $x>2$ ни алдык. x тин 2 ден чоң каалагандай мааниси барабарсыздыктын чыгарылышы болушуна ишеним пайда кылуу үчүн бардык пикирди тескери тартипте жүргүзүү жетиштүү.

Алсак, $x>2$ болсун. Туура сандуу барабарсыздыктардын касиеттерин колдоп, удаалаш төмөнкүлөрдү алабыз:

$$3x>6,$$
$$x+2x>7-1,$$
$$x+1>7-2x.$$

Демек, 2 ден чоң каалагандай x саны берилген барабарсыздыктын чыгарылышы болот.

Жообу: $x>2$. ▲

Барабарсыздыктын чыгарылышын жазганда түшүндүрмөлөрдү келтирүү шарт эмес. Мисалы, 1-маселенин чыгарылышын минтип жазууга болот:

$$x+1>7-2x,$$
$$3x>6,$$
$$x>2.$$

Ошентип, барабарсыздыкты чыгарууда анын төмөнкү *негизги касиеттеринен* пайдаланылат:

1-касиет. ***Барабарсыздыктын каалагандай мүчөсүн анын бир бөлүгүнөн экинчи бөлүгүнө, ошол мүчөнүн белгисин карама-каршысына өзгөрткөн түрдө өткөрүүгө болот, мында барабарсыздык белгиси өзгөрбөйт.***

2-касиет. ***Барабарсыздыктын эки бөлүгүн нөлгө барабар болбогон окшош бир санга көбөйтүү же бөлүүгө болот; эгерде бул сан оң болсо, анда барабарсыздык белгиси өзгөрбөйт, эгерде бул сан терс болсо, анда барабарсыздык белгиси карама-каршысына өзгөрөт.***

Бул касиеттер берилген барабарсыздыкты башка, куду ушундай чыгарылышка ээ барабарсыздык менен алмаштыруу мүмкүнчүлүгүн берет.

Сызыктуу барабарсыздыкка келтирилип жаткан бир белгисиздүү барабарсыздыктарды чыгаруу үчүн:

1) белгисиз катышкан мүчөлөрдү сол жакка, белгисиз катышпаган (эркин) мүчөлөрдү болсо оң жакка өткөрүү (1-касиет);

2) окшош мүчөлөрдү тегеректеп, барабарсыздыктын эки бөлүгүн белгисиздин алдындагы коэффициентке (эгерде ал нөлгө барабар болбосо) бөлүү (2-касиет) керек.

3-маселе. Барабарсыздыкты чыгар:

$$3(x-2)-4(x+1)<2(x-3)-2.$$

△ Барабарсыздыктын сол жана оң бөлүктөрүн жөнөкөйлөштүрөбүз. Кашааларды ачабыз:

$$3x-6-4x-4<2x-6-2.$$

Белгисиз катышкан мүчөлөрдү барабарсыздыктын сол, белгисиз катышпаган (эркин) мүчөлөрдү болсо оң бөлүгүнө алып өтөбүз (1-касиет):

$$3x-4x-2x<6+4-6-2.$$

Окшош мүчөлөрдү тегеректейбиз:

$$-3x<2$$

жана барабарсыздыгынын эки бөлүгүн –3 кө бөлөбүз (2-касиет):

$$x>-\frac{2}{3}.$$

Жообу: $x>-\frac{2}{3}$. ▲

Бул чыгарылышты кыскача минтип жазууга болот:

$$3(x-2)-4(x+1)<2(x-3)-2,$$
$$3x-6-4x-4<2x-6-2,$$
$$-x-10<2x-8,$$
$$-3x<2,$$
$$x>-\frac{2}{3}.$$

$x > -\frac{2}{3}$ барабарсыздыгын канааттандырган x сандар жыйнагы сан огунда *шоола* менен сүрөттөлөт (16-сүрөт). $x = -\frac{2}{3}$ чекит бул шоолага тиешелүү эмес, 16-сүрөттө ал *ак тегерекче* менен, шоола болсо жантык сызыкчалар менен берилген.

x сандардын, мисалы, $x \geq 2$ барабарсыздыгын канааттандырган жыйнагына да *шоола* дейилет. $x = 2$ чекити ошол шоолага тиешелүү. 17-сүрөттө бул чекит *кара тегеректе* менен сүрөттөлгөн.

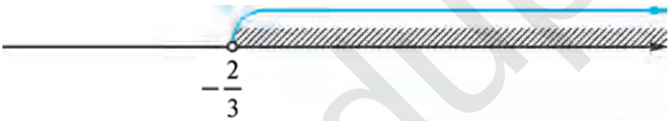
4-маселе. Барабарсыздыкты чыгар:

$$\frac{x-5}{6} + 1 \geq \frac{5x}{2} - \frac{x-3}{3}.$$

△ Барабарсыздыктын эки бөлүгүн 6 га көбөйтөбүз:

$$6 \cdot \frac{x-5}{6} + 6 \cdot 1 \geq 6 \cdot \frac{5x}{2} - 6 \cdot \frac{x-3}{3},$$

$$(x-5) + 6 \geq 15x - 2(x-3).$$



16-сүрөт.

17-сүрөт.

Кашааларды ачабыз жана окшош мүчөлөрдү тегеректейбиз:

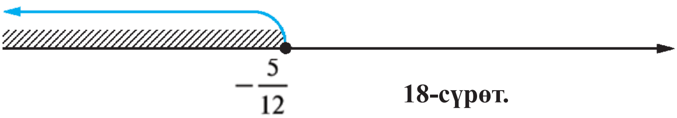
$$x - 5 + 6 \geq 15x - 2x + 6,$$

$$x + 1 \geq 13x + 6,$$

мындан

$$-12x \geq 5, \ x \leq -\frac{5}{12}. \ ▲$$

Бул барабарсыздыктын чыгарылыштары жыйнагы, б. а. $x \leq -\frac{5}{12}$ сандар жыйнагы 18-сүрөттө берилген.



18-сүрөт.

Каралган мисалдарда барабарсыздыктар жөнөкөйлөштүрүлгөндөн кийин белгисиздин алдындагы коэффициент нөлгө барабар болбогон сызыктуу барабарсыздыкка келтирилди. Айрым учурларда бул коэффициент нөлгө барабар болушу мүмкүн.

Ушундай барабарсыздыктарга мисалдар келтиребиз.

5-маселе. Барабарсыздыкты чыгар:

$$2(x+1)+5>3-(1-2x).$$

△ Барабарсыздыктын эки бөлүгүн жөнөкөйлөштүрөбүз:

$$2x+2+5>3-1+2x,$$
$$2x+7>2+2x,$$

мындан

$$2x-2x>2-7,$$
$$0\cdot x>-5.$$

Акыркы барабарсыздык x тин каалагандай маанисинде туура, анткени анын сол бөлүгү каалагандай x те нөлгө барабар жана $0>-5$. Демек, x тин каалагандай мааниси берилген барабарсыздыктын чыгарылышы болот.

Жообу: x – каалагандай сан. ▲

6-маселе. Барабарсыздыкты чыгар:

$$3(2-x)-2>5-3x.$$

△ Барабарсыздыктын сол бөлүгүн жөнөкөйлөштүрөбүз:

$$6-3x-2>5-3x,$$
$$4-3x>5-3x,$$

мындан

$$-3x+3x>5-4,$$
$$0\cdot x>1.$$

Акыркы барабарсыздык чыгарылышка ээ эмес, анткени анын сол бөлүгү x тин каалагандай маанисинде нөлгө барабар жана $0>1$ барабарсыздык туура эмес. Демек, берилген барабарсыздык чыгарылышка ээ эмес.

Жообу: чыгарылыштары жок. ▲

Көнүгүүлөр

219. Тастыкты барабарсыздык көрүнүшүндө жаз:

1) x жана 17 сандарынын суммасы 18 ден чоң;
2) 13 жана x сандарынын айырмасы 2 ден кичине;
3) 17 жана x сандарынын көбөйтүндүсү 3 төн кичине эмес;
4) x жана –3 сандары суммасынын экиленгени 2 ден чоң эмес;
5) x жана 3 сандары суммасынын жарымы алардын көбөйтүндүсүнөн чоң эмес;
6) x жана -4 сандары көбөйтүндүсүнүн экиленгени алардын айырмасынан кичине эмес.

220. 10, $\frac{1}{2}$, 0, –1 сандарынан кайсылары барабарсыздыктын чыгарылышы болот:

1) $3x+4>2$; 2) $3x+4\le x$; 3) $\frac{1}{2}x-3>\le 1-x$;

4) $3-x\ge\frac{1}{2}x$; 5) $0,8x+5>7$; 6) $0,2x-4\le -2$?

221. y тин кандай маанилеринде барабарсыздык туура болот:

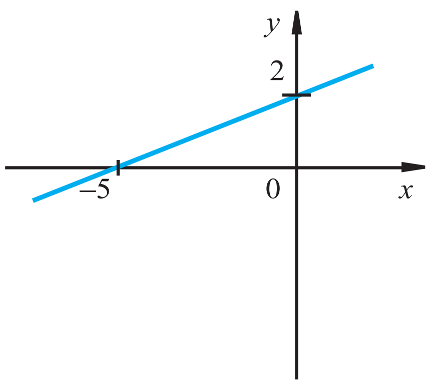
1) $-2y>0$; 2) $-3y<0$; 3) $y^2+1\ge 0$;

4) $2y^2+3\le 0$; 5) $(y-1)^2\le 0$; 6) $(y+2)^2\ge 0$?

222. 19-сүрөттө $y=kx+b$ сызыктуу функциясынын графиги берилген.

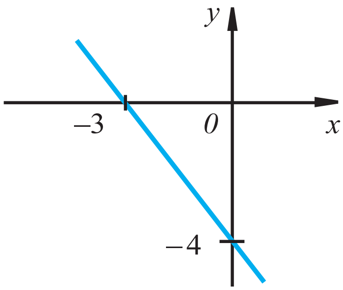
1) $x\ge 0$; 2) $x<0$;
3) $x>-5$; 4) $x\le -5$

болгондо y кандай маанилерди кабыл алышын барабарсыздык аркылуу жаз.



19-сүрөт.

223. 20-сүрөттө $y=kx+b$ сызыктуу функциянын графиги берилген. x тин кандай маанилеринде y функциянын маанилери: 1) оң; 2) терс эмес; 3) терс; 4) -4 төн кичине; 5) -4 төн кичине эмес; 6) -4 төн чоң болушун барабарсыздык жардамында жаз.



20-сүрөт.

224. Функциянын графигин түз жана график боюнча x тин кандай маанилеринде функция: 1) оң; 2) терс; 3) нөлгө барабар; 4) 1 ден чоң; 5) 1 ден кичине маанилерди кабыл алышын тап:

1) $y = 2x + 4$; 2) $y = 3x - 9$;

3) $y = -2x - 8$; 4) $y = -3x + 6$.

Барабарсыздыкты чыгар (**225–226**):

225. 1) $x + 2 \geq 15$; 2) $x - 6 < 8$; 3) $3 \leq y + 6$;

4) $-4 > 5 - y$; 5) $2z \geq z - 7$; 6) $3z \leq 2z + 4$.

226. 1) $12x > -36$; 2) $-7x \leq 56$; 3) $\frac{y}{4} \leq 7$;

4) $-5 < \frac{z}{3}$; 5) $7{,}2z > -27$; 6) $-4{,}5x \geq 9$.

Барабарсыздыкты чыгар жана анын чыгарылыштарынын жыйнагын сан огунда сүрөттө (**227–228**):

227. 1) $2x - 16 > 0$; 2) $18 - 3x > 0$; 3) $3x - 15 < 0$;

4) $25 - 5x < 0$; 5) $9 - 3x \geq 0$; 6) $2x + 4 \leq 0$;

7) $6 - 2x \leq 0$; 8) $1{,}8 + 3x \geq 0$; 9) $-4x + 2 \leq 0$.

228. 1) $3(x + 1) \leq x + 5$; 2) $4(x - 1) \geq 5 + x$;

3) $2(x - 3) + 4 < x - 2$; 4) $x + 2 < 3(x + 2) - 4$;

5) $\frac{x-1}{3} \geq \frac{3x-3}{5}$; 6) $\frac{3x-2}{4} \geq \frac{2x-1}{3}$.

229. x тин кандай маанилеринде туюнтма оң болушун аныкта:

1) $\frac{3}{8}x + 4$; 2) $\frac{5}{2} - 4x$; 3) $2(x+3)+3x$;

4) $3(x-5)-8x$; 5) $\frac{1}{3} - 2(x + 4)$; 6) $\frac{1}{2} - 3(x - 5)$.

230. y тин кандай маанилеринде туюнтма терс болушун аныкта:

1) $5-\frac{2}{3}y$;   2) $\frac{3}{4}-2y$;   3) $\frac{y-2}{3}+\frac{1}{3}$;

4) $\frac{8y-3}{5}-\frac{2}{5}$;   5) $\frac{3y-5}{2}-\frac{y}{2}$;   6) $\frac{4-5y}{6}-\frac{y}{6}$.

231. Барабарсыздыктын чыгарылышы болгон эң кичине бүтүн санды тап:

1) $4(y-1)<2+7y$;

2) $4y-9\geq 3(y-2)$;

3) $3(x-2)-2x<4x+1$;

4) $6x+1\geq 2(x-1)-3x$.

232. Барабарсыздыктын чыгарылышы болгон эң чоң бүтүн санды тап:

1) $5-2x>0$;   2) $6x+5\leq 0$;

3) $3(1-x)>2(2-x)$;   4) $4(2-x)<5(1-x)$.

233. 1) a нын кандай маанилеринде $\frac{a}{3}$ бөлчөк $\frac{a+1}{4}$ бөлчөгүнөн чоң болот?

2) b нын кандай маанилеринде $\frac{b+3}{2}$ бөлчөк $\frac{b-1}{5}$ бөлчөгүнөн кичине болот?

3) x тин кандай маанилеринде $\frac{3x-5}{6}$ бөлчөк $\frac{6x-7}{15}$ va $\frac{3-x}{9}$ бөлчөктөрдүн айырмасынан чоң болот?

4) x тин кандай маанилеринде $\frac{2-5x}{4}$ жана $\frac{7x-3}{6}$ бөлчөктөрүнүн суммасы $\frac{2x+5}{18}$ бөлчөгүнөн кичине болот?

Барабарсыздыкты чыгар (**234–236**):

234. 1) $3(x-2)+x<4x+1$;   2) $5(x+2)-x>3(x-1)+x$;

3) $\frac{3x+6}{4}-\frac{x}{4}>\frac{x+2}{2}$;   4) $\frac{2x-1}{5}-4<x-\frac{3x+1}{5}$.

235. 1) $5(x+2)+2(x-3)<3(x-1)+4x$;

2) $3(2x-1)+3(x-1)>5(x+2)+2(2x-3)$;

3) $\frac{5x+3}{2}-1\geq 3x-\frac{x-7}{2}$; 5) $\frac{3x+2}{4}-1\leq 2x+\frac{x-5}{2}$;

4) $2-\frac{x-4}{3}\leq 2x-\frac{7x-4}{3}$; 6) $3-\frac{x-1}{2}\geq 3x-\frac{5x-3}{3}$.

236. 1) $\frac{2}{3x+6}<0$; 2) $\frac{3}{2x-4}>0$; 3) $\frac{-1,7}{0,5x-2}>0$;

4) $\frac{-2,3}{0,4x+8}<0$; 5) $\frac{-1,7}{2,1+6,3x}<0$; 6) $\frac{-3,8}{3,2-6,4x}>0$.

237. x тин кандай маанилеринде $y=2,5x-4$ функциясынын мааниси: 1) оң; 2) терс; 3) 1 ден чоң; 4) -4 төн кичине?

238. x тин кандай маанилеринде $y=3,5-0,5x$ функциясынын мааниси: 1) оң; 2) терс эмес; 3) 3,5 тен чоң эмес; 4) 1 ден кичине эмес?

239. $y=3-2x$ функциясынын графигин түз. Графиктин жардамында x тин графиктик чекиттери: 1) абсциссалар огунан жогоруда; 2) $y=2$ түз сызыктан жогоруда; 3) абсциссалар огунан ылдыйда; 4) $y=4$ түз сызыктан ылдыйда жайлашкан маанилерин тап.
Натыйжаларды тиешелүү барабарсыздыктарды чыгаруу менен текшер.

240. Усталар план боюнча 40 бешик даярдоого тийиш. Алар планды 10 % дан көбүрөөк ашырып аткаруу үчүн канча бешик даярдоого тийиш?

16- §. БИР БЕЛГИСИЗДҮҮ БАРАБАРСЫЗДЫКТАР СИСТЕМАЛАРЫ. САНДУУ АРАЛЫКТАР

1. Барабарсыздыктар системалары.

Маселе. Сыйымдуулугу 4000 л болгон бош бассейн суу менен толтурула башталды. Бассейндин 4 сааттан кийин жарымынан көбүрөөгү толушу жана 5 сааттан кийин ал толуп, ташып кетпестиги үчүн бассейнге саатына канча литрден суу куюу керек?

△ x литр — бассейнге 1 сааттын ичинде куюлган суунун саны болсун. Маселенин шарты боюнча $4x>2000$, $5x\leq 4000$.

Биринчи барабарсыздыктан $x>500$, экинчи барабарсыздыктан болсо $x\leq 800$ келип чыгат.

Жообу: бассейнге саатына 500 л ден көп, бирок 800 л ден көп болбогон көлөмдө суу куюу керек. ▲

$4x>2000$ жана $5x\leq 4000$ барабарсыздыктарындагы белгисиз сан окшош бирдей x саны болот. Ошондуктан бул барабарсыздыктар чогуу каралат жана алар *барабарсыздыктар системасын* түзөт, дейилет:

$$\begin{cases} 4x > 2000, \\ 5x \leq 4000. \end{cases} \qquad (1)$$

Чоң кашаа x тин (1) системанын эки барабарсыздыгын да туура сандуу барабарсыздыкка айландырган маанилерин табуу керектигин билдирет.

(1) система — *бир белгисиздүү сызыктуу барабарсыздыктар системасы*.

Дагы сызыктуу барабарсыздыктар системасына келтирилип жаткан бир белгисиздүү барабарсыздыктар системаларына мисалдар келтиребиз:

$$\begin{cases} 3(x+1) > 5, \\ 4(x-1) > x-2; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x-1 \geq 3x, \\ 5(x-1) \leq 8, \\ x-1 > 5. \end{cases}$$

***Бир белгисиздүү барабарсыздыктар системасынын чыгарылышы** деп, белгисиздин система барабарсыздыктарынын бардыгын туура сандуу барабарсыздыктарга айландырган маанисине айтылат.*

***Барабарсыздыктар системасын чыгаруу** — бул анын бардык чыгарылыштарын табуу же алардын жоктугун аныктоо.*

Мисалы, $x=1$ төмөнкү

$$\begin{cases} 2x \geq -4, \\ 3x \leq 9 \end{cases} \qquad (2)$$

системанын чыгарылышы болот, анткени $x=1$ болгондо (2) системанын эки барабарсыздыгы да туура болот:

$$\begin{cases} 2\cdot 1 \geq -4, \\ 3\cdot 1 \leq 9. \end{cases}$$

(2) система биринчи барабарсыздыгынын эки бөлүгүн 2 ге, экинчи барабарсыздыгынын эки бөлүгүн болсо 3 кө бөлүп,

$$\begin{cases} x \geq -2, \\ x \leq 3 \end{cases}$$

тү алабыз. Демек, (2) системанын чыгарылыштары x тин -2 ден кичине болбогон жана 3 төн чоң болбогон бардык маанилеринен турат.

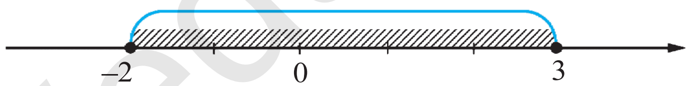
$x \geq -2$ va $x \leq 3$ барабарсыздыктарын *кош барабарсыздык* көрүнүшүндө жазууга болот:

$$-2 \leq x \leq 3.$$

2. Сандуу аралыктар.

Бир белгисиздүү барабарсыздыктар системаларынын чыгарылыштары түрдүү сандуу жыйнактар болот. Бул жыйнактар өздөрүнүн аттарына ээ.

Мисалы, сан огунда x тин $-2 \leq x \leq 3$ болгон сандык маанилери жыйнагы акыры –2 жана 3 чекиттерги кесинди менен берилет (21-сүрөт).



21-сүрөт.

Ошондуктан $-2 \leq x \leq 3$ барабарсыздыгын канааттандырган x сандар жыйнагы кесинди деп аталат жана [–2; 3] сыяктуу белгиленет.

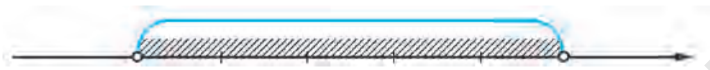
Эгерде $a < b$ болсо, анда $a \leq x \leq b$ барабарсыздыгын канааттандырган x сандар жыйнагына ***кесинди*** *дейилет жана [a; b] сыяктуу белгиленет.*

Мисалы, [4; 7] кесинди – $4 \leq x \leq 7$ барабарсыздыгын канааттандырган x сандар жыйнагы.

$2 < x < 7$, $-1 \leq x < 2$, $4 < x \leq 7$ көрүнүштөгү барабарсыздыктарды канааттандырган сандар жыйнагы үчүн да өз алдынча термин киргизилет.

Эгерде $a<b$ болсо, анда $a<x<b$ барабарсыздыгын канааттандырган x сандар жыйнагына ***интервал*** *дейилет жана $(a;\ b)$ сыяктуу белгиленет.*

Мисалы, (–2; 3) интервал – ушул $-2<x<3$ барабарсыздыгын канааттандырган x сандар жыйнагы (22-сүрөт).



22-сүрөт.

$a \le x < b$ же $a < x \le b$ барабарсыздыктарды канааттандырган x сандар жыйнагына ***жарым интервалдар*** *дейилет жана тиешелүү түрдө $[a;\ b)$ жана $(a;\ b]$ сыяктуу белгиленет.*

Мисалы, [–1; 2) жарым интервал — ушул $-1 \le x < 2$ барабарсыздыгын канааттандырган x сандар жыйнагы; (4; 7] жарым интервал — $4<x\le 7$ барабарсыздыгын канааттандырган x сандар жыйнагы (23-сүрөт).

23-сүрөт.

Кесинди, интервал, жарым интервал, шоолага *сандуу аралыктар* дейилет. Ошентип, сандуу аралыктарды барабарсыздыктар түрүндө берүүгө болот. *Барабарсыздыктар системаларын чыгаруу* боюнча мисалдарды көрөбүз.

1-маселе. Барабарсыздыктар системасын чыгар:

$$\begin{cases} 5x-1>3(x+1), \\ 2(x+4)>x+5. \end{cases} \qquad (1)$$

△ Биринчи барабарсыздыкты чыгарабыз:

$$5x-1>3x+3,$$
$$2x>4,\ \ x>2.$$

Ошентип, биринчи барабарсыздык $x>2$ болгондо аткарылат.

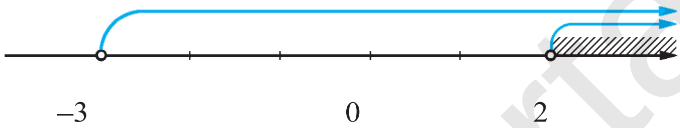
Экинчи барабарсыздыкты чыгарабыз:

$$2x+8>x+5,\ \ x>-3.$$

Ошентип, (1) системанын экинчи барабарсыздыгы $x>-3$ болгондо аткарылат.

Сан огунда (1) системанын биринчи жана экинчи барабарсыздыктарынын чыгарылыштары жыйнактарын сүрөттөйбүз.

Биринчи барабарсыздыктын чыгарылыштары $x>2$ шооланын бардык чекиттери, экинчи барабарсыздыктын чыгарылыштары $x>-3$ шооланын бардык чекиттери болот (24-сүрөт).



24-сүрөт.

(1) системанын чыгарылыштары x тин эки шоолага бир убакытта тиешелүү болгон маанилери болот. Сүрөттөн көрүнүп тургандай, бул шоолалардын бардык жалпы чекиттери жыйнагы $x>2$ шоола болот.

Жообу: $x>2$. ▲

2-маселе. Барабарсыздыктар системасын чыгар:

$$\begin{cases}3(x-1)\le 2x+4,\\ 4x-3\ge 13.\end{cases} \tag{2}$$

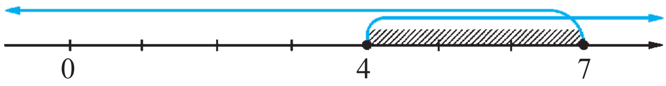
△ Биринчи барабарсыздыкты чыгарабыз:

$$3x-3\le 2x+4,$$
$$x\le 7.$$

(2) системанын экинчи барабарсыздыгын чыгарабыз:

$$4x\ge 16,$$
$$x\ge 4.$$

Сан огунда (2) системанын биринчи жана экинчи барабарсыздыктарынын чыгарылыштары жыйнактарын сүрөттөйбүз. Биринчисини чыгарылыштары $x\le 7$ шоола, экинчисинин чыгарылыштары $x\ge 4$ шоола болот (25-сүрөт).



25-сүрөт.

Сүрөттөн көрүнүп тургандай, бул шоолалардын жалпы чекиттеринин жыйнагы $[4; 7]$ кесинди болот.

Жообу: $4 \le x \le 7$. ▲

3-маселе. Барабарсыздыктар системасын чыгар:

$$\begin{cases} \frac{5x}{12} + \frac{4}{3} \ge \frac{x+1}{3}, \\ 2 - \frac{5x}{14} < \frac{2-x}{2}. \end{cases} \qquad (3)$$

△ (3) системанын биринчи барабарсыздыгын чыгарабыз:

$$5x + 16 \ge 4x + 4,$$

$$x \ge -12.$$

Экинчи барабарсыздыгын чыгарабыз:

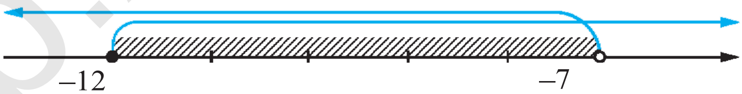
$$28 - 5x < 14 - 7x,$$

$$2x < -14,$$

$$x < -7.$$

Сан огунда $x \ge -12$ va $x < -7$ шоолаларын сүрөттөйбүз (26-сүрөт). Сүрөттөн көрүнүп тургандай, бул шоолалардын жалпы чекиттеринин жыйнагы [12; –7) жарым интервал болот.

Жообу: $-12 \le x < -7$. ▲



26-сүрөт.

4-маселе. Төмөнкү

$$\begin{cases} 2(1 - x) < 4 - 3x, \\ 10 - 3x < 1 \end{cases} \qquad (4)$$

барабарсыздыктар системасы чыгарылышка ээ эместигин көрсөт.

△ Биринчи барабарсыздыкты чыгарабыз:

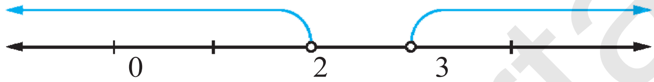
$$2-2x<4-3x, \quad x<2.$$

(4) системанын экинчи барабарсыздыгын чыгарабыз:

$$-3x<-9,$$
$$x>3.$$

Сан огунда $x<2$ жана $x>3$ шоолаларын сүрөттөйбүз (27-сүрөт).

Сүрөттөн көрүнүп тургандай, бул шоолалар жалпы чекиттерге ээ эмес. Демек, (4) система чыгарылышка ээ эмес. ▲



27-сүрөт.

Көнүгүүлөр

241. –3; 0; 5 сандарынан кайсылары барабарсыздыктар системасынын чыгарылыштары болот:

1) $\begin{cases} 5-x\le 9, \\ 2-3x>-4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{1}{3}x-2>1, \\ 5-2x>-25; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 0,5x+3>4, \\ 7-x>1? \end{cases}$

242. –2; 0; 1 сандарынан кайсылары барабарсыздыктар системасынын чыгарылыштары болот:

1) $\begin{cases} 12x-1<11, \\ -3-x\le 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x-1\ge 4-x, \\ x+6>2? \end{cases}$

243. Барабарсыздыктар системасынын чыгарылышы боло алган бардык бүтүн сандарды тап:

1) $\begin{cases} x>2, \\ x<7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x\le 3, \\ x>-1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x\le 2,7, \\ x\ge 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x\ge -5,1, \\ x<5,1. \end{cases}$

244. Берилген кош барабарсыздыкты канааттандырган x сандар жыйнагын сандуу аралыктын белгиленүүлөрү жардамында жаз:

1) $1\le x\le 5;$ 2) $-1\le x\le 3;$ 3) $-1<x<4;$

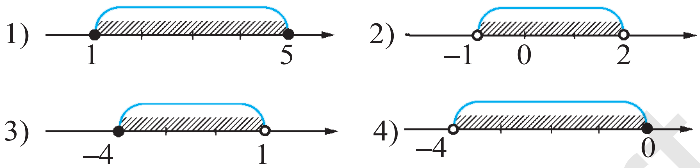
4) $1<x<2;$ 5) $-3\le x<1;$ 6) $-4<x\le -2.$

245. Берилген сандуу аралыкка тиешелүү x сандар жыйнагын кош барабарсыздык көрүнүшүндө жаз жана аны сан огунда сүрөттө:

1) $[-4; 0]$; 2) $[-3; -1]$; 3) $(-4; -2)$;

4) $(0; 3)$; 5) $(-1; 4]$; 6) $[-2; 2)$.

246. 28-сүрөттө берилген x сандар жыйнагын кош барабарсыздык көрүнүшүндө, сандуу аралыктын белгиленүүлөрү жардамында жаз:

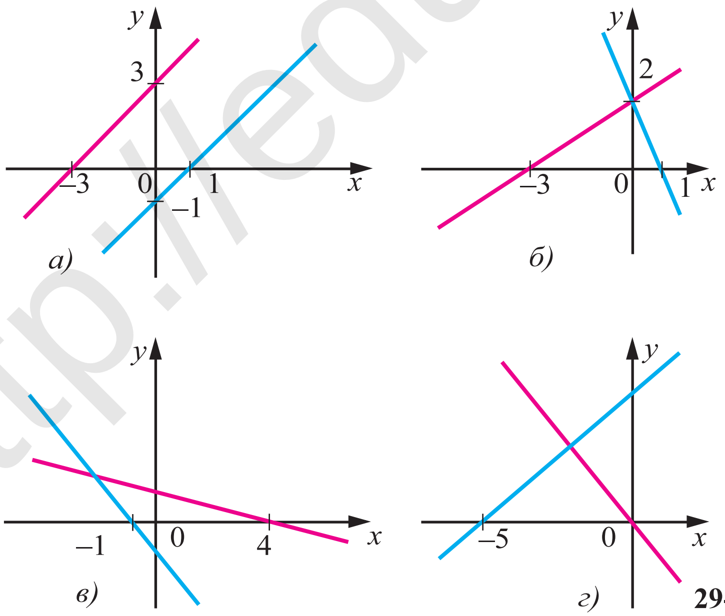


28-сүрөт.

247. $[2; 3]$ кесинди $(1; 4)$ аралыкка тиешелүүбү?

248. $[2; 4]$ жана $[3; 5]$ кесиндилер жалпы чекиттерге ээби?

249. Бир координата тегиздигинде эки сызыктуу функциянын графиктери сүрөттөлгөн (29-сүрөт). x тин кандай маанилеринде бул эки функциянын мааниси бир убакытта оң болот? Кандай маанилеринде болсо бир убакытта терс болот?



29-сүрөт.

№ 3

Тик бурчтуктун жактары натуралдык сандар менен туюнтулат. Тик бурчтуктун периметринин мааниси анын аянтынын маанисине барабар болушу үчүн алар кандай сандарга барабар болууга тийиш?

250. Бир координата тегиздигинде $y=-2x-2$ жана $y=2-\frac{x}{2}$ функциялардын графиктерин түз. Абсциссалар огунда x тин эки функциясынын маанилери: 1) оң; 2) терс маанилеринин жыйнагын белгиле.

251. Барабарсыздыкты чыгар:

1) $(x-3)(2x-3)+6x^2 \geq 2(2x-3)^2$;

2) $(5-6x)(1+3x)+(1+3x)^2 \leq (1+3x)(1-3x)$;

3) $(2x+1)(4x^2-2x+1)-8x^3 \geq -2(x+3)$;

4) $(x-2)(x^2+2x+4) \leq x(x^2+2)+1$.

Барабарсыздыктар системасынын бардык чыгарылыштарын бир барабарсыздык менен жаз жана чыгарылыштар жыйнагын сан огунда сүрөттө (**252–253**):

252. 1) $\begin{cases} x>2, \\ x>5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x>0, \\ x>-1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x>2, \\ x\geq -3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x\geq -2, \\ x\geq -4. \end{cases}$

253. 1) $\begin{cases} x\leq 1, \\ x<5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x<0, \\ x<-1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x<-2, \\ x<-5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x\leq 1, \\ x\leq 0. \end{cases}$

Барабарсыздыктар системасынын бардык чыгарылыштарын кош барабарсыздык көрүнүшүндө жаз, жыйнакты сан огунда сүрөттө (**254–255**):

254. 1) $\begin{cases} x>2, \\ x<5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x>3, \\ x<6; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x<0, \\ x\geq -2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x\geq 0, \\ x<\frac{1}{2}. \end{cases}$

255. 1) $\begin{cases} x \le -2, \\ x \ge -7,5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x < 1,5, \\ x \ge -1,5; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x \ge 0,8, \\ x < 2,2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x \le 7,5, \\ x \ge -0,5; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x \ge -2, \\ x \le 2; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x < 3,5, \\ x > 0. \end{cases}$

Барабарсыздыктар системасын чыгар (**256–259**):

256. 1) $\begin{cases} 3x-18>0, \\ 4x>12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7x-14 \ge 0, \\ 2x \ge 8; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x+5>0, \\ 3x+6 \ge 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x+7 \ge 0, \\ 5x+15>0; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 5x+10>0, \\ 3x \le 9; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 4x-7<0, \\ 2x+1 \ge 0. \end{cases}$

257. 1) $\begin{cases} 3-2x \ge 0, \\ 4x+8<0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+4 \le 0, \\ 4-3x>0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x+3 \le 0, \\ 3x+9 \le 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x-9<0, \\ 12>3x; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 24<6x, \\ 3x \ge 2; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 7x+14>0, \\ 3x-6 \le 0. \end{cases}$

258. 1) $\begin{cases} 7-2x \ge 0, \\ 5x-20<0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+5 \le 0, \\ 9x+18 \le 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 6-2x>0, \\ 3x+6>0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 10-2x \ge 0, \\ 4x-8 \ge 0; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 5x-12 \ge 0, \\ 15-3x \le 0; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 6-4x \le 0, \\ 3x+9>0. \end{cases}$

259. 1) $\begin{cases} 3x+3 \le 2x+1, \\ 3x-2 \le 4x+2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x+2 \ge 5x+3, \\ 2-3x<7-2x; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5(x+1)-x>2x+2, \\ 4(x+1)-2<2(2x+1)-x; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2(x-1)-3<5(2x-1)-7x, \\ 3(x+1)-2 \le 6(1-x)+7. \end{cases}$

260. Барабарсыздыктар системасынын чыгарылыштары болгон бардык бүтүн сандарды тап:

1) $\begin{cases} 0,2x > -1, \\ -\frac{x}{3} \geq 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 1-0,5x \geq 0, \\ -\frac{x+5}{5} < -1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \frac{x-1}{2} < \frac{x}{3}, \\ \frac{x+1}{2} \geq \frac{x}{5}; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \frac{x-1}{4} \leq \frac{x}{5}, \\ \frac{x}{3} > \frac{x+4}{7}; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 0,4x > -2, \\ 0,3x < 1; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 1+0,2x \geq 0, \\ 0,5x-1 < 0. \end{cases}$

261. x тин кандай маанилеринде $y=0,5x+2$ жана $y=3-3x$ функцияларынын маанилери бир убакытта: 1) оң; 2) терс; 3) 3 төн чоң; 4) 3 төн кичине болот?

262. x тин кандай маанилеринде $y=x-2$ жана $y=0,5x+1$ функцияларынын маанилери бир убакытта: 1) терс эмес; 2) оң эмес; 3) 4 төн кичине эмес; 4) 4 төн чоң эмес болот?

263. Үч бурчтуктун бир жагы 5 м, экинчи жагы болсо 8 м. Эгерде үч бурчтуктун периметри: 1) 22 м ден аз; 2) 17 м ден чоң болсо, анын үчүнчү жагы кандай болушу мүмкүн?

264. Эгерде бүтүн сандын $\frac{3}{2}$ бөлүгүнөн анын $\frac{1}{4}$ бөлүгү кемитилсе, анда 29 дан чоң сан алынат, эгерде куду ошол сандын $\frac{3}{2}$ бөлүгүнөн анын $\frac{1}{3}$ бөлүгү кемитилсе, анда 29 дан кичине сан алынат. Ошол бүтүн санды тап.

265. Эгерде бүтүн сандын эки эселенгенине анын жарымы кошулса, анда 92 ден кичине сан алынат, эгерде куду ошол бүтүн сандын экиленгенинен анын жарымы кемитилсе, анда 53 төн чоң сан алынат. Ошол бүтүн санды тап.

17- §. САНДЫН МОДУЛУ. МОДУЛЬ КАТЫШКАН ТЕҢДЕМЕ ЖАНА БАРАБАРСЫЗДЫКТАР

1. Сандын модулу.

Сандын модулу түшүнүгүн эскерте кетебиз:

1) *Оң сандын модулу ошол сандын өзүнө барабар.*

Мисалы, $|3| = 3$, $\left|\frac{2}{7}\right| = \frac{2}{7}$, $|2,4| = 2,4$.

2) *Терс сандын модулу ага карама-каршы санга барабар.*

Мисалы, $|-2| = -(-2) = 2$, $\left|-\frac{5}{6}\right| = -\left(-\frac{5}{6}\right) = \frac{5}{6}$, $|-1,5| = -(-1,5) = 1,5$.

3) *Нөлдүн модулу нөлгө барабар:* $|0| = 0$.

Ошентип, сан модулунун аныктамасы төмөнкүдөй болот:

$$|a| = a,\ \textit{эгерде}\ a \geq 0\ \textit{болсо;}$$

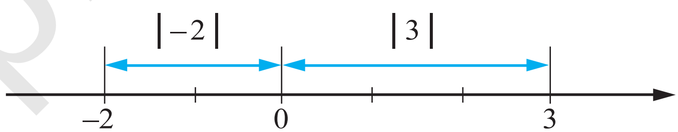
$$|a| = -a,\ \textit{эгерде}\ a < 0\ \textit{болсо.}$$

Бул аныктама формуланын жардамында кыскача минтип жазылат:

$$\boxed{|a| = \begin{cases} a, & \textit{эгерде}\ a \geq 0\ \textit{болсо;} \\ -a, & \textit{эгерде}\ a < 0\ \textit{болсо.} \end{cases}}$$

Сан модулунун геометриялык маанисин карап көрөбүз.

Сан огунда, мисалы, 3 жана –2 чекиттерин сүрөттөйбүз (30-сүрөт). Сүрөттөн көрүнүп тургандай, $|3| = 3$ – бул 0 чекитинен 3 чекитине чейинки аралык, $|-2| = 2$ – бул 0 чекитинен –2 чекитине чейинки аралык.



30-сүрөт.

Ошентип, $|a|$ *– a санынын модулу, геометриялык көз караштан,* 0 *чекитинен a санды сүрөттөгөн чекитке чейин болгон аралык болот.*

2. Белгисиз модуль белгиси астында катышкан теңдемелер.

1-маселе. Теңдемени чыгар:

$$|x| = 7.$$

△ 1) $|x| \geq 0$ болсун. Анда модулдун аныктамасы боюнча $|x| = x$ жана теңдеме мындай көрүнүш алат:

$$x = 7,$$

б. а. $x = 7$ — берилген теңдеменин тамыры;

2) $x < 0$ болсун. Анда модулдун аныктамасы боюнча $|x| = -x$ жана теңдеме мындай көрүнүш алат:

$$-x = 7,$$

мындан $x = -7$ — берилген теңдеменин тамыры.

Жообу: $x_1 = 7$, $x_2 = -7$. ▲

2-маселе. $|3x + 2| - 1$ теңдемени чыгар.

△ 1) $3x + 2 \geq 0$ болсун. Анда $3x + 2 = 1$, $3x = -1$, $x = -\frac{1}{3}$;

2) $3x + 2 < 0$ болсун. Анда $3x + 2 = -1$, $3x = -3$, $x = -1$.

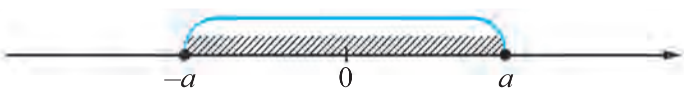
Жообу: $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = -1$. ▲

3. Белгисиз модул белгиси астында катышкан барабарсыздыктар. Төмөнкү

$$|x| \leq a, \text{ мында } a > 0$$

барабарсыздыгын карап көрөбүз.

Бул барабарсыздыкты 0 чекитинен *a* дан чоң болбогон аралыкта жаткан бардык *x* чекиттер, б. а. $[-a; a]$ кесиндинин чекиттери канааттандырат (31-сүрөт).



$$|x| \leq a$$

31-сүрөт.

$[-a;\ a]$ кесинди — ушул $-a \le x \le a$ барабарсыздыгын канааттандырган x сандардын жыйнагы.

Демек, $|x| \le a$ барабарсыздыгы $-a \le x \le a$ кош барабарсыздыгынын дал өзүн билдирет, мында $a > 0$.

Мисалы, $|x| \le 2{,}5$ барабарсыздыгы $-2{,}5 \le x \le 2{,}5$ ти билдирет; $|x| < 3$ барабарсыздыгы $-3 < x < 3$ тү билдирет.

3-маселе. $|5 - 3x| < 8$ барабарсыздыгын чыгар.

△ Берилген барабарсыздыкты мындай көрүнүштө жазып алабыз:

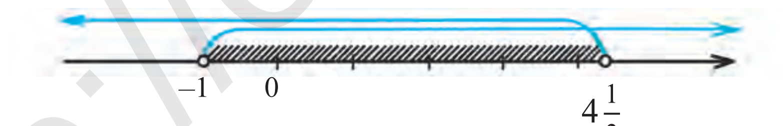
$$-8 < 5 - 3x < 8.$$

Бул кош барабарсыздык төмөнкү барабарсыздыктар системасынын куду өзүн билдирет:

$$\begin{cases} 5 - 3x < 8, \\ 5 - 3x > -8. \end{cases}$$

Бул системаны чыгарып, $-1 < x < 4\frac{1}{3}$ экендигин табабыз (32-сүрөт). ▲

Төмөнкү

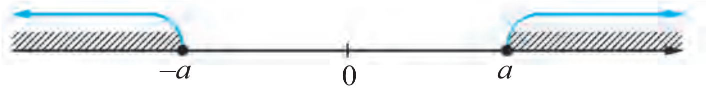


32-сүрөт.

$$|x| \ge a, \text{ мында } a > 0$$

барабарсыздыгын карап көрөбүз.

Бул барабарсыздыкты 0 чекитинен a дан кичине болбогон аралыкта жаткан бардык x чекиттер жыйнагы, б. а. $x \ge a$ жана $x \le -a$ шоолалардын чекиттери канааттандырат (33-сүрөт).



$|x| \geq a$

33-сүрөт.

4-маселе. Барабарсыздыкты чыгар: $|x-1| \geq 2$.

△ 1) $x-1 \geq 0$ болсун. Анда $x-1 \geq 2$. Төмөнкү барабарсыздыктар системасын алабыз:

$$\begin{cases} x-1 \geq 0, \\ x-1 \geq 2. \end{cases}$$

Бул системаны чыгарып, $x \geq 3$ тү табабыз.

2) $x-1<0$ болсун. Анда $-(x-1) \geq 2$ же $x-1 \leq -2$.

Төмөнкү барабарсыздыктар системасын алабыз:

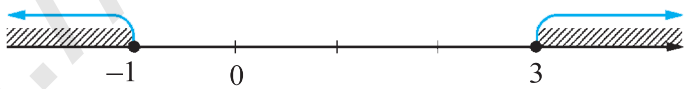
$$\begin{cases} x-1 < 0, \\ x-1 \leq -2. \end{cases}$$

Бул системаны чыгарып, $x \leq -1$ ди табабыз.

Ошентип, $|x-1| \geq 2$ барабарсыздыгынын чыгарылыштары биринчиден, $x \geq 3$ сандар, экинчиден болсо $x \leq -1$ сандар болот.

Жообу: $x \leq -1, x \geq 3$. ▲

$|x-1| \geq 2$ барабарсыздыгынын чыгарылыштары 34-сүрөттө берилген.



34-сүрөт.

Эгерде

$$|x| \leq a$$

барабарсыздыгында a саны нөлгө барабар болсо, анда барабарсыздык $x=0$ дөн турган бир гана (жалгыз) чыгарылышка ээ болот; эгерде $a<0$ болсо, анда барабарсыздык чыгарылыштарга ээ болбойт.

Эгерде

$$|x| \geq a$$

барабарсыздыгында a саны нөлдөн кичине же ага барабар болсо, анда каалагандай сан анын чыгарылышы болот.

Көнүгүүлөр

266. (Оозеки.) Сандын модулу эмнеге барабар:

1) 23; 2) 4,7; 3) $\frac{2}{7}$; 4) -47; 5) $-2,1$; 6) $-\frac{3}{8}$?

Теңдемени чыгар (**267–270**):

267. 1) $|x| = 2,5$; 2) $|x| = 1,5$; 3) $|x-1| = 2$;
4) $|x+3| = 3$; 5) $|x+4| = 4$; 6) $|x-4| = 4$.

268. 1) $|x+4| = 0$; 2) $|x-2| = 0$; 3) $|2x-3| = 0$;
4) $|3-4x| = 0$; 5) $|7+3x| = 0$; 6) $|2x+5| = 0$.

269. 1) $|3x-5| = 5$; 2) $|4x+3| = 2$; 3) $\left|\frac{2}{3}x+\frac{1}{6}\right| = \frac{1}{3}$;
4) $\left|\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{4}$; 5) $|7x-10| = 4$; 6) $|0,5-2x| = 2,5$.

270. 1) $|-x| = 3,4$; 2) $|-x| = 2,1$; 3) $|5-x| = 5$;
4) $|3-x| = 8$; 5) $|x-7| = 1$; 6) $|5-x| = 2$.

271. Барабарсыздыктын чыгарылыштары жыйнагын сан огунда сүрөттө:

1) $|x| < 5$; 2) $|x| \leq 4$; 3) $|x| \leq 4$; 4) $|x| > 2$.

272. Модулдуу барабарсыздыкты кош барабарсыздык түрүндө жаз:

1) $|x| \geq 3$; 2) $|x| < 2$; 3) $|x| < 3,5$; 4) $|x| \leq 2,4$.

273. Кош барабарсыздыкты бир модулдуу барабарсыздык түрүндө жаз:

1) $-3,1 < x < 3,1$; 2) $-0,3 \le x \le 0,3$; 3) $-4,8 < x < 4,8$.

Барабарсыздыкты чыгар (**274–277**):

274. 1) $|1+x| \le 0,3$; 2) $|2+x| < 0,2$; 3) $|3-x| \le \frac{2}{3}$;

4) $|1-x| < \frac{3}{4}$; 5) $|x-1| \le 1$; 6) $|x-4| \le 2$.

275. 1) $|3x-4| < 5$; 2) $|2x+3| < 3$; 3) $|2-3x| \le 2$;

4) $|5-4x| \le 1$; 5) $|4x-1| < 7$; 6) $|3-2x| \le 3$.

276. 1) $|x+1| > 1,3$; 2) $|x-2| \ge 1,1$; 3) $|1-x| \ge \frac{1}{2}$;

4) $|3-x| > \frac{2}{3}$; 5) $|x-1| > 3,8$; 6) $|5-4x| \le 1$.

277. 1) $|4x-3| \ge 3$; 2) $|3x+2| > 1$; 3) $|3x-2| > 4$;

4) $|4-5x| \ge 4$; 5) $|6x-1| \le 2$; 6) $|3-5x| \ge 2$.

278. x тин төмөнкү барабарсыздык аткарыла турган бардык бүтүн маанилерин тап:

1) $|5x-2| < 8$; 2) $|5x+3| < 7$; 3) $|5-3x| \le 1$;

4) $|3-4x| \le 3$; 5) $|2x-5| \le 1$; 6) $|3-4x| \le 6$.

279. Барабарсыздыкты чыгар:

1) $|2x-3| > 5$; 2) $|3x-1| \le 4$; 3) $|1-3x| \le 1$;

4) $|3-2x| \ge 3$; 5) $|1,5x-2| \le 1$; 6) $|4-3x| > 2$.

18- §. БОЛЖОЛДУУ ЭСЕПТӨӨЛӨР. САНДАРДЫН БОЛЖОЛДУУ МААНИЛЕРИ. ЖАКЫНДАШУУ КАТАЛЫГЫ

Турмуштук маселелерди чыгарууда көбүнесе *түрдүү сандардын болжолдуу маанилери* менен иштөөгө туура келет. Болжолдуу маанилер, адатта, көп сандагы нерселерди, мисалы, токойдогу дарактардын санын санаганда; аспаптар жардамында түрдүү чоңдуктарды, мисалы, узундук, масса, температураны өлчөгөндө; сандарды тегеректөөдө алынат.

Бир канча мисалдарды карап көрөбүз:

1) Эгемендүү Өзбекстандын биринчи почта маркасы өзбек акыны Махларайым Надырага арналган болуп, 2 миллион нускада мамилеге чыгарылды;

2) класста 36 окуучу бар;

3) Өзбекстанда 10 000 ге жакын орто мектеп бар;

4) Наваий – Нукус темир жолунун узундугу 342 км;

5) жумушчу кассадан 70 600 сум акча алды;

6) андан кийинки жылдарда Өзбекстанда дан эгиндеринин аянты 300 миң гектарга көбөйдү;

7) Ташкенттен Бухарага чейин болгон аралык 500 км;

8) бир килограмм буудайда 30 000 даана буудай даны бар;

9) Жерден Күнгө чейин болгон аралык $1{,}5\cdot10^8$ км;

10) Өзбекстан Республикасынын Мамлекеттик туусунда 12 жылдыз бар.

2, 5, 10-мисалдарда сандардын маанилери анык, калган учурларда болсо болжолдуу.

1-маселе. Окуучулардан бири мектепте канча окуучу окушу жөнүндөгү суроого „1000“ деп жооп берди, экинчи окуучу болсо ошол эле суроого „950“ деп жооп берди. Эгерде мектепте 986 окуучу окуса, кимдин жообу тагыраак?

△ Биринчи окуучу 14 кө, экинчиси болсо 36 га жаңылышты. Демек, биринчи окуучунун жообу тагыраак. ▲

Белгилей кетчү жери, биринчи учурда окуучулар санынын так жана болжолдуу маанилери ортосундагы айырма терс:

$$986-1000=-14,$$

ал эми экинчи учурда болсо оң:

$$986-950=36.$$

Турмуштук жактан болжолдуу маанинин так мааниден тигил же бул жакка четтешин, б. а. так маани менен болжолдуу маанинин ортосундагы айырманын модулун (абсолюттук маанисин) билүү маанилүү саналат.

Сандын так мааниси менен анын болжолдуу маанисинин ортосундагы айырманын модулуна *жакындашуунун абсолюттук каталыгы* дейилет.

Ошентип, эгерде a – так мааниси x ке барабар болгон сандын болжолдуу мааниси болсо, анда абсолюттук каталык

$$|x-a|$$

га барабар болот.

Жакындашуунун абсолюттук каталыгына көбүнесе жөнөкөй гана кылып *каталык* дейилет.

2 - маселе. Үч бурчтуктун бурчтарынын суммасын транспортирдин жардамында табууда 182° натыйжа алынды. Бул жакындашуунун абсолюттук каталыгы кандай?

△ Үч бурчтуктун бурчтары суммасынын так мааниси 180° ка барабар, болжолдуу мааниси 182° ка барабар. Ошондуктан абсолюттук каталык

$$|180°-182°|=|-2°|=2°$$

ка барабар. ▲

3 - маселе. $\frac{3}{7}$ санынын 0,43 ондук бөлчөккө жакындашуу каталыгын тап.

$$△\ \left|\frac{3}{7}-0,43\right|=\left|\frac{3}{7}-\frac{43}{100}\right|=\left|\frac{300-301}{700}\right|=\left|-\frac{1}{700}\right|=\frac{1}{700}.\ ▲$$

Көнүгүүлөр

280. Мисалдарда келтирилген сандардан кайсылары сандардын так маанилери, кайсылары болсо болжолдуу маанилери болот:

1) бир нан 500 сум турат;
2) 12 барактуу дептер 60 сум турат жана калыңдыгы 3 мм;
3) бир жылда автомобиль заводу 200 миң автомобиль иштеп чыгарат?

281. Окуучу китептин энин масштабдуу сызгыч менен өлчөгөндө 16,2 см ден 16,4 см ге чейин аралыктагы натыйжаны алды.
1) Китептин энинин так маанисин айтууга болобу?
2) Китептин энинин бир нече болжолдуу маанисин көрсөт.

282. $\frac{4}{9}$ санынын:

1) $\frac{6}{13}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $0,3$; 4) $0,44$; 5) 0,43; 6) 0,45

санына жакындашышынын абсолюттук каталыгын тап.

283. Төмөнкү сандардын жакындашуу каталыгын тап:
1) 0,1975 санынын 0,198 саны менен;
2) –3,254 санынын –3,25 саны менен;
3) $-\frac{8}{17}$ санынын $-\frac{1}{2}$ саны менен;
4) $\frac{22}{7}$ санынын 3,14 саны менен.

284. a саны x санынын болжолдуу мааниси болсун. Эгерде
1) $x = 5{,}346$, $a = 5{,}3$; 2) $x = 4{,}82$, $a = 4{,}9$;
3) $x = 15{,}9$, $a = 16$; 4) $x = 25{,}08$, $a = 25$
болсо, жакындашуу каталыгын тап.

285. Төрт бурчтуктун ички бурчтарынын суммасы 360° га барабардыгы белгилүү. Төрт бурчтуктун ички бурчтарынын суммасын транспортир жардамы менен табууда 363° натыйжа алынды. Ошол жакындашуунун каталыгы эмнеге барабар?

286. $y = 7x + 9$ жана $y = 1$ түз сызыктарынын графиктери жардамында бул түз сызыктардын абсциссасы –1 ге барабар болгон чекитте кесилишүүсү аныкталды. Ошол жакындашуунун каталыгы эмнеге барабар?

287. 0,33 ондук бөлчөк $\frac{1}{3}$ санынын абсолюттук каталыгы 0,01 ден кичине болжолдуу мааниси болушу туурабы?

19-§. КАТАЛЫКТЫ БААЛОО

Көптөгөн учурларда сандардын так маанилери белгисиз болот, ошондуктан жакындашуунун абсолюттук каталыгын табууга болбойт. Ошентсе да, көбүнесе, эгерде көбү менен жана азы менен жакындашуулар белгилүү болсо, анда *абсолюттук каталыкты баалоого* болот.

1-маселе. Термометрде суюктук мамычасынын жогорку деңгээли 21 жана 22 °C тун ортосунда турат. Температуранын болжолдуу мааниси иретинде 21,5 саны алынды. Жакындашуунун абсолюттук каталыгын баала.

△ t температуранын анык мааниси белгисиз, бирок

$$21 \leq t \leq 22$$

деп тастыктоого болот.

Температуранын анык мааниси менен болжолдуу маанисинин ортосундагы айырманы, б. а. $t-21{,}5$ айырманы баалоо үчүн бул кош барабарсыздыктын ар бир бөлүгүнөн 21,5 санын кемитебиз.

$-0{,}5 \leq t-21{,}5 \leq 0{,}5$ ти, б. а. $|t-21{,}5| \leq 0{,}5$ ти алабыз. Ошентип, абсолюттук каталык 0,5 тен чоң эмес. ▲

Анда температура 0,5 ке чейин тактыкта өлчөнгөн дейилет жана мындайча жазылат:

$$t=21{,}5 \pm 0{,}5.$$

Эгерде a саны x санынын болжолдуу мааниси жана $|x-a| \leq h$ болсо, анда x саны a санына h ка чейин тактыкта барабар дейилип, мындайча жазылат:

$$\boxed{x=a\pm h.} \qquad (1)$$

$|x-a| \leq h$ барабарсыздыгы

$$a-h \leq x \leq a+h \qquad (2)$$

кош барабарсыздыгынын дал өзүн билдиришин эскерте кетебиз.

Мисалы, $x = 2{,}43 \pm 0{,}01$ жазуусу x саны 2,43 кө 0,01 ге чейин тактыкта барабардыгын, б. а. $2{,}43 - 0{,}01 \leq x \leq 2{,}43 + 0{,}01$ же $2{,}42 \leq x \leq 2{,}44$ экендигин билдирет.

2,42 жана 2,44 сандары x санынын, тиешелүү түрдө, азы менен жана көбү менен алынган болжолдуу маанилери болот.

Адатта, 1-маселеде каралган температураны өлчөөдө, температуранын болжолдуу мааниси иретинде 21 же 22 °C алынат. Анда ар бир жакындашуунун абсолюттук каталыгы 1 °С тан ашпайт. Ошондуктан бөлүмдөрүнүн аралыгы 1 °С тан болгон термометрдин жардамында температура өлчөнгөндө өлчөө 1 °С ка чейин тактык менен жүргүзүлөт, деп эсептелет.

Ушуга окшош башка өлчөө аспаптары үчүн да *өлчөөнүн тактыгы,* адатта, аспаптын эң кичине бөлүмү боюнча эсептелет. Мисалы, узундук микрометр менен 0,01 мм ге чейин тактыкта өлчөнөт, температура медициналык термометр менен 0,1 °С ка чейин тактыкта өлчөнөт, секунд *жебеси* бар саат убакытты 1 секундга чейин тактыкта көрсөтөт.

Ошентип, өлчөөнүн каталыгы сан кандай аспап менен өлчөнгөнүнөн көз каранды. Жакындашуу каталыгы канчалык кичине болсо, өлчөө аспабы ошончолук так болот.

Болжолдуу маанилерден көбүнесе жөнөкөй бөлчөктөрдү ондук бөлчөктөргө алмаштырууда пайдаланылат.

2-маселе. 0,43 саны $\frac{13}{30}$ бөлчөгүнүн 0,01 ге чейин тактыктагы болжолдуу мааниси экендигин далилде.

△ Мында

$$\left|\frac{13}{30}-0,43\right|\leq 0,01$$

экендигин далилдөө талап кылынат. Айырманы эсептейбиз:

$$\frac{13}{30}-0,43=\frac{13}{30}-\frac{43}{100}=\frac{130-129}{300}=\frac{1}{300}.$$

Демек, $\left|\frac{13}{30}-0,43\right|=\frac{1}{300};\ \frac{1}{300}\leq 0,01$ болгондуктан $\left|\frac{13}{30}-0,43\right|\leq 0,01$ болот. ▲

Көнүгүүлөр

288. Төмөнкү жазуу эмнени билдирет:

1) $x = 3,9 \pm 0,2$; 2) $x = 0,4 \pm 0,15$; 3) $x=\frac{1}{3}\pm\frac{1}{10}$;

4) $x = 0,73 \pm 0,01$; 5) $x = -135 \pm 1$; 6) $x=-2\frac{1}{5}\pm\frac{1}{10}$;

7) $x = -1 \pm 0,1$; 8) $x = 9,5 \pm 0,2$; 9) $x = -3,2 \pm 0,01$?

289. Кош барабарсыздык көрүнүшүндө жаз:

1) $x = 11 \pm 0{,}5$; 2) $м = 142 \pm 1$; 3) $l = 3{,}7 \pm 0{,}1$;
4) $v = 900 \pm 5$; 5) $x = a \pm h$; 6) $y = м \pm n$.

290. 1) $x = 4 \pm 0{,}1$; 2) $x = 2{,}7 \pm 0{,}1$;
3) $x = -0{,}6 \pm 0{,}12$; 4) $x = -5{,}9 \pm 0{,}2$
экендиги белгилүү. x санынын азы менен жана көбү менен алынган болжолдуу маанилерин тап.

291. $x = 5{,}8 \pm 0{,}2$ болсун. Так маани төмөнкүгө барабар болушу мүмкүнбү:
1) 5,9; 2) 6,001; 3) 6; 4) 5,81; 5) 5,75; 6) 5,6?

292. $x = 8{,}7 \pm 0{,}4$ болсун. x саны төмөнкүгө барабар болушу мүмкүнбү:
1) 8,222; 2) 8,4; 3) 9; 4) 9,5; 5) 9,3?

293. x санынын анын азы менен жана көбү менен жакындашууларынын орто арифметикалыгына барабар болжолдуу маанисин көрсөт:
1) $20 \le x \le 22$; 2) $5 \le x \le 6$; 3) $4{,}5 \le x \le 4{,}8$;
4) $3{,}7 \le x \le 4{,}1$; 5) $2{,}81 \le x \le 2{,}83$; 6) $0{,}55 \le x \le 0{,}6$.

294. Далилде:
1) 2,7 саны 2,7356 санынын 0,5 ке чейин тактыктагы болжолдуу мааниси;
2) 0,27 саны $\frac{11}{40}$ бөлчөктүн 0,01 ге чейин тактыктагы болжолдуу мааниси.

295. 4 саны 4,3 бөлчөгүнүн 0,5 ке чейин тактыкта алынган болжолдуу мааниси болобу? 0,1 ге чейин тактыктагычы?

296. Оптикалык жана радиолокациялык ченөөлөр боюнча Меркурийдин диаметри (4880±2) км ге, Венеранын радиусу (6050±5) км ге барабар. Ченөөнүн натыйжаларын кош барабарсыздык көрүнүшүндө жаз.

297. Жумушчу цилиндрдин диаметрин өлчөө үчүн 10,00; 10,04; 10,08 мм жана у. с. 10,56 мм ге чейин диаметрлүү көзөнөктөргө ээ болгон курулмадан пайдаланат. Мында өлчөөлөрдүн тактыгы кандай?

298. Техникалык көзөмөл бөлүмүндө цилиндрдин диаметри 0,1 мм ге чейин тактыкта өлчөнөт. Көрсөтмө боюнча цилиндрдин диаметри $167{,}8 \le d \le 168{,}2$ аралыкта болсо, ал жарактуу эсептелет. Эгерде өлчөөнүн натыйжасында цилиндрдин диаметри 168,1 мм ге барабар болсо, техникалык көзөмөл бөлүмү аны жараксызга чыгарабы?

20-§. САНДАРДЫ ТЕГЕРЕКТӨӨ

Сандарды тегеректөөдөн физика, математика, техниканын көптөгөн практикалык маселелеринде түрдүү чоңдуктардын болжолдуу маанилери менен иштөөдө пайдаланылат.

Мисалы, деңиз деңгээлинде, 45° кеңдикте телонун эркин түшүү ылдамдануусу 9,80665 м/с^2 ге барабар. Бул сан ондон бирге чейин тегеректелет: 9,8. Ал мындайча жазылат: $g \approx 9{,}8$ (окулушу: g болжолдуу 9,8 ге барабар).

! $x \approx a$ жазуусу a саны x санынын болжолдуу мааниси экендигин билдирет.

1-маселе. Тик бурчтук формасындагы жердин аянты 25 м^2 ге, анын узуну 8 м ге барабар. Аянттын туурасын тап.

△ Аянттын туурасы l метр болсун, анда

$$l = 25 : 8 = 3{,}125.$$

Жообу: 3,125 м. ▲

Турмушта мындай натыйжа, адатта, ондон бирге чейин тегеректелет, б. а. $l \approx 3{,}1$ деп эсептелет.

Сандарды тегеректөө эрежесин төмөнкү мисалда карап көрөбүз. 3,647 санын жүздөн бирге чейин тегеректөө талап кылынсын. Азы менен тегеректөө үчүн акыркы 7 цифрасын түшүрүп калтырабыз, натыйжада 3,64 тү алабыз. Көбү менен тегеректөө үчүн акыркы 7 цифрасын түшүрүп калтырып, андан мурдагы цифраны бир бирдикке чоңойтобуз. Натыйжада 3,65 ти алабыз.

Биринчи учурда тегеректөөнүн абсолюттук каталыгы

$$|3{,}647 - 3{,}64| = 0{,}007$$

ге, экинчи учурда

$$|3{,}647 - 3{,}65| = 0{,}003$$

кө барабар.

Экинчи учурдагы жакындашуунун каталыгы биринчидегиден аз. Демек, каралган мисалда көбү менен тегеректөө макул саналат.

Жакындашуунун абсолюттук каталыгы эң аз болуусу үчүн оң сандарды тегеректөөдө төмөнкү эрежеден пайдаланылат.

! *Эгерде биринчи түшүрүп калтырылган цифра 5 тен кичине болсо, анда азы менен тегеректөө керек, эгерде бул цифра 5 тен чоң же ага барабар болсо, анда көбү менен тегеректөө керек.*

Мисалы, ондон бирге чейин тегеректөөдө

$$3,647 \approx 3,6, \quad 2,658 \approx 2,7$$

ни алабыз; жүздөн бирге чейин тегеректөөдө

$$0,6532 \approx 0,65, \quad 9,0374 \approx 9,04$$

тү алабыз.

2-маселе. $\frac{2}{7}$ санын ошол санга 0,01 ге чейин тактыкта барабар болгон ондук бөлчөк менен алмаштыр.

△ 2 ни 7 ге бөлүүнүн натыйжасын үтүрдөн кийин үч цифралуу ондук бөлчөк көрүнүшүндө жазабыз

$$\frac{2}{7} = 0,285\ldots.$$

Бул санды жүздөн бирге чейин тегеректеп, $\frac{2}{7} \approx 0,29$ ду алабыз. ▲

Бул маселени чыгаруу үчүн $\frac{2}{7}$ нин 0,01 ге чейин тактыктагы болжолдуу маанисин табууда анын үтүрдөн кийинки үч цифрасын табуу керек. Эгерде $\frac{2}{7}$ санынын 0,001 ге чейин тактыктагы болжолдуу маанисин табуу талап кылынса, анда төрт ондук цифраны табуу керек болмок.

Көнүгүүлөр

299. Сандарды кезеги менен 0,001, 0,01, 0,1 ге чейин, бирдиктерге чейин, ондуктарга чейин, жүздүктөргө чейин, миңдиктерге чейин тегеректе: 3285,05384; 6377,00753; 1234,5336.

300. 15,75 жана 317,25 сандарын бирдиктерге чейин азы жана көбү менен тегеректе. Ар бир тегеректөөнүн абсолюттук каталыгын тап.

301. Санды 0,1 ге чейин тактыкта ондук бөлчөк көрүнүшүндө сүрөттө:

1) $\frac{13}{8}$; 2) $\frac{17}{25}$; 3) $\frac{39}{129}$; 4) $\frac{11}{3}$; 5) $\frac{5}{7}$; 6) $\frac{19}{11}$.

302. Санды 0,01 ге чейин тактыкта ондук бөлчөк көрүнүшүндө сүрөттө:

1) $\frac{3}{7}$; 2) $\frac{7}{99}$; 3) $\frac{5}{19}$; 4) $1\frac{2}{3}$; 5) $2\frac{3}{11}$; 6) $5\frac{1}{14}$.

303. Санды 0,001 ге чейин тактыкта ондук бөлчөк көрүнүшүндө сүрөттө:

1) $\frac{2}{7}$; 2) $\frac{5}{13}$; 3) $2\frac{3}{11}$; 4) $7\frac{9}{14}$; 5) $3\frac{1}{7}$; 6) $1\frac{18}{19}$.

304. 0 °С та суутек молекуласынын орточо кыймыл ылдамдыгы 1693 м/с га барабар. Бир окуучу бул санды 1690 м/с кылып, экинчиси болсо 1700 м/с кылып тегеректеди. Ар бир тегеректөөнүн абсолюттук каталыгын тап. Кайсы учурда жакындашуу каталыгы кичине?

21-§. САЛЫШТЫРМА КАТАЛЫК

Бир сандын түрдүү жакындашууларынын тактыгын салыштыруу үчүн абсолюттук каталыктан пайдаланылат. Эгерде түрдүү сандардын жакындашуулары салыштырылса, анда абсолюттук каталык жетиштүү эмес.

Мисалы, Ташкенттен Самаркандга чейин болгон аралык (300± 1) км ге барабар. Калемдин узундугу (21,3 ± 0,1) см ге барабар. Биринчи учурда абсолюттук каталык 1 км ден чоң эмес, экинчи учурда 1 мм ден чоң эмес. Анда калемдин узундугу Ташкенттен Самаркандга чейин болгон аралыкка караганда тагыраак өлчөнгөн дегенге болобу?

Ташкенттен Самаркандга чейин болгон аралыкты өлчөөдө 300 км ге 1 км ден чоң болбогон абсолюттук каталыкка жол коюлган. Демек, каталык өлчөнүп жаткан чоңдуктун $\frac{1}{300}\cdot 100\% \approx 0,33\%$ ын түзөт.

Калемдин узундугун өлчөөдө 21,3 см ге 0,1 см ден чоң болбогон абсолюттук каталыкка жол коюлган. Демек, анда каталык өлчөнүп жаткан чоңдуктун $\frac{0,1}{21,3}\cdot 100\% \approx 0,47\%$ ын түзөт.

Ошентип, шаарлардын ортосундагы аралык калемдин узундугуна караганда тагыраак өлчөнгөн.

Жакындашуунун сапатын баалоо үчүн салыштырма каталык түшүнүгү киргизилет.

Салыштырма каталык деп, сандын абсолюттук каталыгынын анын болжолдуу маанисинин модулуна катышына айтылат.

Ошентип, эгерде a саны x тин болжолдуу мааниси болсо, анда абсолюттук каталык $|x-a|$ га барабар, салыштырма каталык болсо $\frac{|x-a|}{|a|}$ га барабар. Салыштырма каталык адатта пайыздарда туюнтулат.

Маселе. Жер массасынын болжолдуу мааниси $(5{,}98 \pm 0{,}01) \cdot 10^{24}$ кг га барабар. Аң мылтыгы огунун массасы (9 ± 1) г га барабар. Кайсы өлчөө тагыраак?

△ Ар бир өлчөөнүн салыштырма каталыгын баалайбыз:

$$1)\ \frac{0{,}01 \cdot 10^{24}}{5{,}98 \cdot 10^{24}} \cdot 100\% \approx 0{,}2\%; \qquad 2)\ \frac{1}{9} \cdot 100\% \approx 11\%.$$

Жердин массасы тагыраак өлчөнгөн. ▲

Көнүгүүлөр

305. Санды бирдиктерге чейин тегеректе жана тегеректөөнүн абсолюттук жана салыштырма каталыктарын тап:

1) 3,45; 2) 10,59; 3) 23,263; 4) 0,892; 5) 1,947.

306. 1) $\frac{1}{3}$ санынын 0,33 саны менен; 2) $\frac{1}{7}$ санынын 0,14 саны менен жакындашышынын салыштырма каталыгын тап.

307. Кайсы өлчөө тагыраак:

1) $a=(750 \pm 1)$ м би же $b = (1{,}25 \pm 0{,}01)$ м би;

2) $p=(10{,}6 \pm 0{,}1)$ с бу же $q = (1{,}25 \pm 0{,}01)$ с бу?

308. Түрдүү аспаптар менен бир убакытта буунун температурасы өлчөндү жана биринчи учурда $t=(104 \pm 1)$ °C, экинчи учурда $m = (103{,}8 \pm 0{,}1)$ °C, үчүнчү учурда $m = (103{,}86 \pm 0{,}01)$ °C натыйжалар алынды. Ар бир өлчөөнүн салыштырма каталыгын баала.

309. Эки окуучу узундуктарды ченөө боюнча практикалык иш аткарууда (203 ± 1) мм жана (120 ± 1) см натыйжаны алды. Окуучулардан кайсы бири ишти сапаттуу аткарган?

310. 1) x санынын болжолдуу мааниси a га барабар. Жакындашуунун салыштырма каталыгы 0,01 ге барабар, б. а. 1 %. Эгерде $a = 2{,}71$ болсо, абсолюттук каталыкты тап.
2) x санынын болжолдуу мааниси b га барабар. Жакындашуунун салыштырма каталыгы 0,001 ге барабар, б. а. 0,1 %. Эгерде $b = 0{,}398$ болсо, абсолюттук каталыкты тап.

311. Күндүн массасы $(2\cdot10^{33}\pm0{,}1\cdot10^{33})$ г. Балдар тобунун массасы $(2{,}5\pm0{,}1)\cdot10^{2}$ г. Кайсы өлчөө тагыраак?

II глава боюнча көнүгүүлөр

Теңдемени чыгар **(312–313):**

312. 1) $x(2x+5)=0$; 2) $x(3x-4)=0$;
3) $(x-5)(3x+1)=0$; 4) $(x+4)(2x-1)=0$.

313. 1) $\frac{2x+3}{3x-1}=0$; 2) $\frac{1-2x}{2x+5}=0$; 3) $\frac{(2x+1)(x+2)}{x-3}=0$; 4) $\frac{(x-3)(2x+4)}{x+1}=0$.

314. Сан огунда a чекити b чекитинен солдо жатат. Төмөнкү сан оңбу же терспи:
1) $b-a$; 2) $2+b-a$; 3) $a-b$; 4) $a-3-b$?

315. Барабарсыздыкты чыгар:
1) $x+9>8-4x$; 2) $3(y+4)\geq4-(1-3y)$;
3) $5(0{,}2+y)-1{,}8\geq4{,}3+5y$; 4) $3(x-5)+9>15$.

316. Барабарсыздыктар системасын чыгар:

1) $\begin{cases}0{,}5\,(x+3)-0{,}8<0{,}4\,(x+2)-0{,}3,\\ 0{,}7\,(2-x)+1{,}3<0{,}6\,(1-x)+2{,}2;\end{cases}$

2) $\begin{cases}1{,}5\,(x-2)-2{,}1<1{,}3\,(x-1)+2{,}5,\\ 1{,}3\,(x+3)+1{,}7>1{,}6\,(x+2)+1{,}8.\end{cases}$

317. Теңдемени чыгар:

1) $|x-1|=3,4;$ 2) $|1-x|=2,4;$ 3) $|1-2x|=5;$

4) $|3x-2|=1;$ 5) $|4x-1|=3;$ 6) $|2x+7|=9.$

318. Барабарсыздыкты чыгар:

1) $|x-1|\le 3,4;$ 2) $|x-1|\ge 3,4;$ 3) $|x-1|<3,4;$

4) $|2x+1|\ge 3;$ 5) $|3+2x|\le 1;$ 6) $|1-3x|\ge 4.$

ӨЗҮҢДҮ ТЕКШЕРИП КӨР!

1. x тин каалагандай маанисинде

$$\frac{1}{2}x(2x-4)\ge(x-2)x$$

барабарсыздыгынын тууралыгын далилде.

2. Барабарсыздыкты чыгар:

1) $12-5x>0;$ 2) $3x-7\le 4(x+2);$ 3) $\frac{x}{2}+\frac{3-x}{4}<2.$

3. Барабарсыздыктар системасын чыгар:

1) $\begin{cases}3x-13>0,\\25-4x>0;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}4x-13\ge 3x-10,\\11-4x\le 12-3x;\end{cases}$

3) $\begin{cases}5x+3<3x-7,\\1-2x>x+4;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}5x-7\le 2-4x,\\7-3x\ge 1-5x.\end{cases}$

319. $a<2b$ болсун. Далилде:

1) $4a-2b<a+4b;$ 2) $3a-2b<a+2b;$

3) $a+2b>3a-2b;$ 4) $a+b>4a-5b.$

320. Үч бурчтуктун бир жагы 4 см ден узун, экинчи жагы биринчисинен 1,5 эсе узун, үчүнчү жагы экинчисинен 1,5 эсе узун. Үч бурчтуктун периметри 19 см ден узун экендигин далилде.

321. x тин кандай маанилеринде $y=-x+1$ жана $y=x+2$ функцияларынын маанилери бир убакытта: 1) оң; 2) терс; 3) 1 ден чоң; 4) 2 ден чоң болот?

322. Жуп сандын андан кийин келген жуп сандын үч эселенгени менен суммасы 134 төн чоң, ошол жуп сандын андан мурда келген жуп сандын экиленгени менен суммасы 104 төн кичине. Ошол санды тап.

323. Так сандын андан кийин келген так сандын экиленгени менен суммасы 151 ден кичине, дал ошол так сандын андан мурда келген так сандын үч эселенгени менен суммасы 174 төн чоң. Ошол санды тап.

324. Кош барабарсыздык көрүнүшүндө жаз:
1) $x=12\pm0{,}3$; 2) $y=23\pm1$; 3) $x=a\pm1$;
4) $y=m\pm0{,}1$; 5) $z=1{,}8\pm0{,}01$; 6) $z=b\pm0{,}2$.

325. Төмөнкү санды 0,01 ге чейин тактыкта ондук бөлчөк түрүндө сүрөттө:

1) $\frac{5}{11}$; 2) $\frac{3}{22}$; 3) $\frac{3}{13}$; 4) $\frac{2}{7}$; 5) $\frac{17}{24}$; 6) $\frac{5}{12}$.

326. Узундугу $l=0{,}25$ м, туурасынан кесилишинин аянты $S\approx1{,}2\cdot10^2$ мм^2, салыштырма каршылыгы $\rho\approx0{,}017$ Ом $\cdot$ мм^2/м болгон жез таякчанын каршылыгын эсепте $\left(R=\frac{\rho l}{S}\right)$.

327. Эгерде $м$ = 7,6 кг, v = 4,2 м/с болсо, телонун кинетикалык энергиясын

$$E_k=\frac{mv^2}{2}$$

формула боюнча эсепте.

328. 20 см лүү кесиндини өлчөөдө 0,5 мм каталыкка жол коюлду, 1000 км аралыкты өлчөөдө болсо каталык 200 м ди түзөт. Кайсы өлчөө тагыраак?

329. Калкы 57 100 адамдан турган шаарда ар бир кан группасына таандык адамдар канчадан жолугушун аныктоо максатында медициналык изилдөө өткөрүлдү. Каны I группага туура келген адамдар 32,9 % ды, II группадагылар 35,8 % ды, III группадагылар 23,2 % ды жана IV группадагылар 8,1 % ды түзүшү аныкталды. Ар бир кан группасындагы адамдардан шаарда канчадан жашайт?

II глава боюнча сыноо көнүгүүлөрү – тесттер

1. Барабарсыздыкты чыгар: $5(x-3)+2x<4x+3$.

A) $x<6$; B) $x<-6$; C) $x>6$; D) $x>-6$.

2. Барабарсыздыкты чыгар: $4(x-1)+5(x+1)<6(x+2)+7(x-1)$.

A) $x<-1$; B) $x>-1$; C) $x<1$; D) $x>1$.

3. Барабарсыздыкты чыгар: $\frac{2x-3}{4}>\frac{x+1}{6}-\frac{4x+3}{3}$.

A) $x>1$; B) $x\le 1$ C) $x>-0,05$; D) $x<2$.

4. $7x+5\ge 3(x-1)-4x$ барабарсыздыгынын чыгарылышы болгон эң кичине бүтүн санды тап:

A) $x=2$; B) $x=-2$; C) $x=3$; D) $x=-1$.

5. $7(1-x)>5(3-x)$ барабарсыздыгынын чыгарылышы болгон эң чоң бүтүн санды тап:

A) $x=-5$; B) $x=-3$; C) $x=2$; D) $x=-2$.

6. x тин кандай маанилеринде $\frac{3x-6}{5}$ бөлчөгү $\frac{4x-5}{15}$ жана $\frac{4-x}{3}$ бөлчөктөрүнүн суммасынан кичине болот?

A) $x<3,3$; B) $x>2,3$; C) $x\le -2,3$; D) $x>4,5$.

7. x тин кандай маанилеринде $\frac{3-5x}{4}$ vа $\frac{7x+3}{6}$ бөлчөктөрүнүн айырмасы $\frac{3x+5}{12}$ бөлчөгүнөн чоң болот?

A) $x<\frac{1}{16}$; B) $x<-\frac{1}{16}$; C) $x>\frac{1}{16}$; D) $x>-\frac{1}{16}$.

8. Барабарсыздыктар системасын чыгар:

$$\begin{cases}3(1-x)>5-4x,\\13-4x<1.\end{cases}$$

A) $x>\frac{1}{2}$; B) $\frac{1}{2}<x<3$; C) $x>3$; D) $x>-3$.

9. Барабарсыздыктар системасын чыгар:

$$\begin{cases} \frac{x-3}{3} \le \frac{x+2}{2}, \\ \frac{x-4}{5} \ge \frac{x-5}{4}. \end{cases}$$

A) $1 \le x \le 9$; | B) $-12 \le x$; | C) $x \ge 9$; | D) $-12 \le x \le 9$.

10. Барабарсыздыктар системасын чыгар:

$$\begin{cases} (x+3)(x+2) \le (x+4)(x-1)+5, \\ 2(5x-1) \ge 3(3x-2). \end{cases}$$

A) $-4 \le x \le -2,5$; B) $-4 \le x \le 2,5$; C) $4 \le x \le 2,5$; D) $0 \le x \le 2,5$.

11. Барабарсыздыктар системасынын чыгарылышы болгон эң кичине бүтүн санды тап:

$$\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{x}{3} > 1, \\ 3x - 2 > x + 2. \end{cases}$$

A) $x=7$; B) $x=-7$; C) $x=6$; D) $x=3$.

12. Барабарсыздыктар системасынын чыгарылышы болгон эң чоң бүтүн санды тап:

$$\begin{cases} \frac{x}{4} + \frac{x}{2} < 1, \\ \frac{x}{3} - \frac{x}{4} < \frac{1}{6}. \end{cases}$$

A) $x=-2$; B) $x=1$; C) $x=2$; D) $x=0$.

13. Барабарсыздыкты чыгар: $|4x-5| \le 3$.

A) $x \ge -2$; B) $\frac{1}{2} \le x \le 1$; C) $\frac{1}{2} \le x \le 2$; D) $-2 \le x \le -\frac{1}{2}$.

14. Барабарсыздыкты чыгар: $|1-3x| \le 2$.

A) $0 \le x \le \frac{1}{3}$; | B) $-1 \le x \le -\frac{1}{3}$; | C) $\frac{1}{3} \le x \le 1$; | D) $-\frac{1}{3} \le x \le 1$.

15. Барабарсыздыкты чыгар: $|3-2x| \geq 1$.

A) $x \leq 1, x \geq 2$; B) $x \leq -1, x \geq -2$; C) $x \leq 2, x \geq 3$; D) $1 \leq x \leq 2$.

16. Сандын так мааниси 1,483, болжолдуу мааниси 1,48 болсо, жакындашуу каталыгын тап:

A) 0,003; B) 0,435; C) 1,335; D) 0,445.

17. Сандын так мааниси $\frac{8}{17}$, болжолдуу мааниси $\frac{1}{2}$ болсо, жакындашуу каталыгын тап:

A) $\frac{1}{33}$; B) $\frac{1}{34}$; C) $\frac{1}{35}$; D) $\frac{7}{15}$.

18. Кош барабарсыздык көрүнүшүндө жаз: $a = -1{,}8 \pm 0{,}2$.

A) $-2 < a < -1{,}6$; C) $-2 \leq a \leq -1{,}6$;

B) $-1{,}6 \leq a \leq -2$; D) $-2 \leq a \leq -1{,}82$.

19. Кош барабарсыздык көрүнүшүндө жаз: $a = 2{,}71 \pm 0{,}01$.

A) $2{,}7 < a < 2{,}72$; C) $2{,}7 \leq a < 2{,}711$;

B) $-1{,}6 \leq a \leq -2$; D) $2{,}7 \leq a \leq 2{,}72$.

20. $\frac{8}{15}$ ди 0,01 ге чейин тактыкта ондук бөлчөк көрүнүшүндө жаз:

A) 0,53; B) 0,05; C) 0,61; D) 0,54.

21. $\frac{5}{14}$ ти 0,001 ге чейин тактыкта ондук бөлчөк көрүнүшүндө жаз:

A) 0,357; B) 0,353; C) 0,456; D) 0,361.

22. Бөлмөнүн узундугу $(5 \pm 0{,}02)$ м ге барабар. Өлчөөнүн салыштырма каталыгын аныкта:

A) 4 %; B) 0,4 %; C) 0,02 %; D) 0,05 %.

23. Эки айылдын ортосундагы аралык (100 ± 1) км ге барабар. Өлчөөнүн салыштырма каталыгын аныкта:

A) 2 %; B) 0,5 %; C) 1 %; D) 1,5 %.

24. Санды жүздөн бирге чейин тегеректе. Тегеректөөнүн салыштырма каталыгын тап: 5,7635.

A) 5,76; 0,8 %; C) 5,77; 0,08 %;

B) 5,76; 0,9 %; D) 5,76; 0,06 %.

25. Санды ондон бирге чейин тегеректе. Тегеректөөнүн салыштырма каталыгын тап: 2,2941.

A) 2,3; 0,26 %; C) 2,3; 0,3 %;

B) 2,2; 2,5 %; D) 2,3; 0,4 %.

Тарыхый маселелер

1. *Евклиддин маселеси.* Эгерде a, b, c, d — оң сандар, a – алардын эң чоңу жана $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ болсо, анда $a+d>b+c$ болушун далилде.

2. *Александриялык Папптын маселеси.* Эгерде a, b, c, d оң сандар жана $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$ болсо, анда $ad>bc$ болушун далилде.

3. *Бернуллинин барабарсыздыгы.* Эгерде $x_1, x_2, ..., x_n>-1$ жана $x_1, x_2, ..., x_n$ сандарынын бардыгы бирдей белгилүү болсо, $(1+x_1)(1+x_2)\ ...\ (1+x_n) \geq 1+x_1+...+x_2+\ +x_n$ болот.

Бернулли барабарсыздыгын $n=2$, 3 болгон учур үчүн далилде.

4. $(1+a)^2\approx1+2a$ болжолдуу формуласынан пайдаланып, эсепте жана каталыкты баала:

1) $(1,01)^2$; 2) $(1,001)^2$; 3) $(0,99)^2$; 4) $(0,999)^2$.

5. Вакуумда жарыктын ылдамдыгын өлчөө $299796\frac{\text{km}}{\text{s}}$ натыйжаны берди, мында өлчөөнүн тактыгы $4\frac{\text{km}}{\text{s}}$ болду. Салыштырма каталыкты тап.

6. Адамдын бир тал чачынын жоондугу $(0{,}15 \pm 0{,}005)$ мм ге барабар. Жерден Айга чейин болгон аралык болсо $(380\ 000 \pm 500)$ км ге барабар. Кайсы өлчөө тагыраак аткарылган?

7. *Акмим папирусунда:* „Узундугу $r=5$ жана $R=10$ радиустуу айланалар узундуктарынын орто арифметикалыгына барабар тегеректин аянты ошол радиустуу тегеректер аянттарынын орто арифметикалыгына барабар“, делген экен. Андагы абсолюттук жана салыштырма каталыктарды тап.

Тарыхый маалыматтар

$>$ (чоң) жана $<$ (кичине) белгилер — анык барабарсыздык белгилери биринчи жолу англис окумуштуусу Т. Карриоттун 1631-жылы басылган китебинде келтирилген. $\geq$ (чоң же барабар) жана $\leq$ (кичине же барабар) белгилер — анык эмес барабарсыздык белгилерин болсо 1734-жылы француз математиги П. Буге киргизген.

x санынын модулун $|x|$ сыяктуу белгилөөнү белгилүү немис математиги К. Веерштрас 1841-жылы сунуш кылган.

Байыркы Египет менен Вавилондо табылган математикалык жазуулар адамдар өтө байыркы замандардан болжолдуу эсептөөлөрдүн кээ бир усулдары менен тааныш экендиктерин көрсөтөт. 4000 жыл мурда эле Вавилон окумуштуулары сандарды көбөйтүү, квадратка көтөрүү, тескери сандар жадыбалдарын түзүү менен бир катарда, сандардан квадрат тамыр чыгаруу жадыбалдарын да түзүшкөн. Алар натуралдык сандардын квадрат тамырларынын болжолдуу маанилерин таба алышкан.

2-, 3-даражалуу теңдеменин тамырларын болжолдуу эсептөө усулдарын Байыркы Кытай, Орто Азиянын окумуштуулары табышкан.

Мырза Улугбек илимий мектебинин окумуштуулары астрономиялык жадыбалдарды („Зиж“)дерди тагыраак түзүү үчүн болжолдуу эсептөөнүн жаңы усулдарын жаратышкан. Мырза Улугбек академиясынын жетекчи окумуштууларынан бири Гиясиддин Жамшид ал-Каший болсо „Айлана жөнүндө китебинде“ π санынын үтүрдөн кийинки 17 разрядын так эсептеген.

Турмуштук жана предметтер аралык маселелер

Барабарсыздыктарды, барабарсыздыктар системасын чыгарууга алып келген бир нече маселени көрөлү.

330. 4 курут менен 5 кант чогуу 225 сумдан арзан. 3 курут менен 2 кант чогуу 120 сумдан кымбат.
Эмне арзан: 13 курутпу же 10 кантпы?
△ 1 куруттун наркын x сум, 1 канттын наркын y сум, дейли. Анда маселенин шартына туура келген төмөнкү барабарсыздыктар системасына ээ болобуз:

$$\begin{cases} 4x+5y<225, \\ 3x+2y>120. \end{cases} \qquad (1)$$

Мындан

$$\begin{cases} 32x+40y<1800, \\ 45x+30y>1800, \end{cases}$$

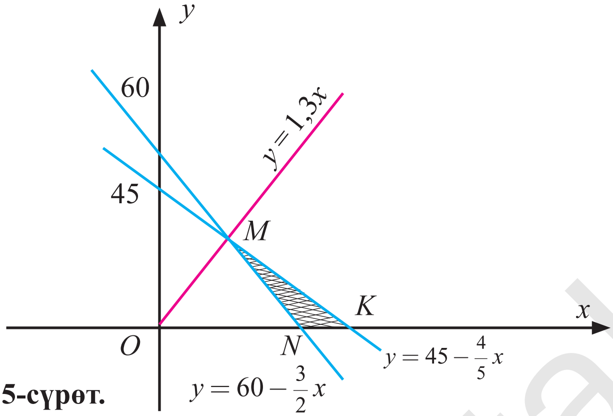
б. а. $45x+30y>32x+40y$, $\quad 13x-10y>0$.

Демек, $13x>10y$.

Жообу: 10 кант 13 куруттан арзан.

Маселенин геометриялык түшүндүрмөсү менен таанышалы.
Тегиздикте кайсы зона (1) барабарсыздыктар системасы менен сүрөттөлөт?

(1) системанын 1-барабарсыздыгы $4x+5y=225$, б. а. $y=45-\frac{4}{5}x$ түз сызыктан *ылдыйда* жаткан бардык чекиттерди туюнтат; 2-барабарсыздык болсо $3x+2y=120$, б. а. $y=60-\frac{3}{2}x$ түз сызыктан *жогоруда* жаткан бардык чекиттерди туюнтат (35-сүрөткө кара).
Бул эки жарым тегиздиктин кесилиши, $x>0$, $y>0$, экени эсепке алынса, $\triangle MNK$ ун берет. Курут менен канттын так наркын билбейбиз, бул наркты туюнткан $(x;\ y)$ чекит MNK үч бурчтугунун ичиндеги каалагандай чекит болушу мүмкүн. Бул үч бурчтук болсо $13x=10y$, б. а. $y=1{,}3x$ түз сызыктан *ылдыйда* жайлашкан.



35-сүрөт.

Демек, $y < 1{,}3x$, б. а. $13x > 10y$. ▲

331. Экзаменде окуучулардын $\frac{1}{6}$ бөлүгү „канааттандырарлуу“, 56 %ы „жакшы“, 14 ү „мыкты“ баа алды. „Мыкты“ алгандар алардын 4 %ынан көп, бирок 5 %ынан аз болсо, бардык окуучулардын санын тап.

△ Бардык окуучулардын санын x дейли. Анда $\frac{x}{6}$ – „канааттандырарлуу“ баа, $\frac{56x}{100} = \frac{14}{25}x$ – „жакшы“ баа алган окуучулардын саны болот. Бардык окуучулардын саны 6 га да, 25 ке да бөлүнөт, демек, $x = 6 \cdot 25 \cdot n = 150 \cdot n$, n – натуралдык сан. Шарт боюнча, „мыкты“ баа алган окуучулардын саны $0{,}04x < 14 < 0{,}05x$ барабарсыздыгын канааттандырат.

Буга $x = 150 \cdot n$ ni коюп, $6n < 14 < 7{,}5 \cdot n$, б. а. $n = 2$ экендигин табабыз.

Жообу: 300 окуучу. ▲

332. Эки идиштеги бирдей буюмдардын саны 29 дан көп. 1-идиштен 2 буюм алынганда, калган буюмдар 2-идиштегиден 3 эседен да көбүрөөк болот. 1-идиштеги буюмдардын 3 эсеси менен 2-идиштеги буюмдардын 2 эсесинин айырмасы 60 тан аз. Ар бир идиште канчадан буюм бар?

△ 1-идиштеги буюмдардын санын x менен, 2-идиштеги буюмдардын санын y менен белгилейли. Анда маселенин шарттарына туура келген төмөнкү барабарсыздыктар системасына ээ болобуз:

$$\begin{cases} x+y>29, \\ x-2>3y, \\ 3x-2y<60. \end{cases}$$

Бул системаны төмөнкүдөй жазып алабыз:

$$\begin{cases} x>29-y, \\ x>3y+2, \\ 20+\frac{2}{3}y>x. \end{cases} \tag{1}$$

Мындан болсо

$$20+\frac{2}{3}y>29-y, \tag{2}$$

$$20+\frac{2}{3}y>3y+2 \tag{3}$$

барабарсыздыктарынын тууралыгы келип чыгат. (2) ден $y>\frac{27}{5}$, (3) төн болсо $y<\frac{54}{7}$ барабарсыздыгын алабыз.

Демек, $\frac{27}{5}<y<\frac{54}{7}$ же $5\frac{2}{5}<y<7\frac{5}{7}$. y – натуралдык сан болгондуктан ал 6 га же 7 ге барабар боло алат. Эгерде $y=6$ болсо, анда (1) системаны

$$\begin{cases} x>23, \\ x>20, \\ x<24 \end{cases}$$

көрүнүштө жазып алууга болот. Бирок бул системаны канааттандырган натуралдык сан x жок. Демек, $y=7$ экен. Анда (1) ден системага келебиз.

$$\begin{cases} x>22, \\ x>23, \\ x<24\frac{2}{3} \end{cases}$$

Системаны канааттандырган жалгыз натуралдык сан $x = 24$ экени анык. **Жообу:** 1-идиште 24, 2-идиште 7 буюм бар. ▲

333. Эки идиштеги буюмдардын саны чогуу 27 ден көп. 2-идиштен 12 буюм алынганда, 1-идиштеги буюмдардын саны 2-идиштегиден 2 эседен да көбүрөөк болот. 1-идиштен 10 буюм алынганда, 2-идиштеги буюмдардын саны 1-идиштегиден 9 эседен да көбүрөөк болот. Ар бир идиште канчадан буюм бар?

334. 1-завод 1 күндө 950 дөн көп болбогон санда продукция иштеп чыгарат. 2-завод баштап 1-завод чыгарган продукциянын 95 % ын чыгарган. Кошумча станоктор орнотулгандан кийин, 2-завод өндүрүүнү 1-заводго караганда 23 % га жогорулатты жана 1 күндө 1000 ден көп продукция бере баштады. 2-завод кошумча станокторду алганга чейин, ар бир завод канча продукция иштеп чыгарган? (Продукциянын саны натуралдык сандарда туюнтулат.)
△ 1-завод 1 күндө өндүргөн продукциянын саны x болсун. Анда

2-завод баштап $\frac{95x}{100}$, кошумча станоктор орнотулгандан кийин болсо

$\left(\frac{95x}{100}+\frac{23x}{100}\right)$ продукция берген. Маселенин мазмунуна туура келген барабарсыздыктар системасы төмөнкүдөй болот:

$$\begin{cases} x \le 950, \\ \frac{95x}{100}+\frac{23x}{100} > 1000. \end{cases}$$

Мындан

$$847\frac{27}{59} < x \le 950\,. \qquad (1)$$

Бирок $\frac{95x}{100}$ жана $\frac{23x}{100}$ сандары натуралдык сан болууга тийиш, б. а. $x = 100$ гө бөлүнүүгө тийиш. (1) аралыкта 100 гө бөлүнө турган сан 900. Демек, 1-завод 1 күндө 900 даана, 2-завод болсо кошумча ста-

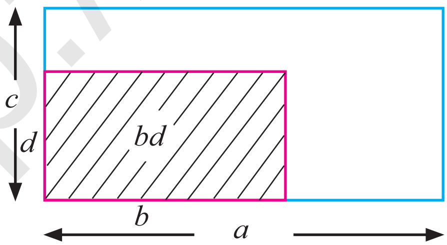
нок орнотулганга чейин $\frac{95}{100} \cdot 900 = 855$ даана продукция өндүргөн.
Жообу: 900 даана, 855 даана.▲

335. 1-идиште жашыл, 2-идиште болсо ак шарлар бар. Жашыл шарлардын саны ак шарлардын санынын $\frac{15}{19}$ бөлүгүн түзөт. Жашыл шарлардын $\frac{3}{7}$ бөлүгү, ак шарлардын $\frac{2}{5}$ бөлүгү идиштерден алынгандан кийин, 1-идиште 1000 даанадан аз, 2-идиште 1150 даанадан көп шар калды. Баштап ар бир идиште канчадан шар болгон?

336. 80 т, 60 т, 50 т жүк баткан вагондор бар. Эгерде жүк 80 т луу вагондорго жүктөлсө, вагондордон 1 өөсү толук жүктөлбөй калат. Эгерде жүк 60 т луу вагондорго жүктөлсө, 8 ге көп вагон керек болот жана 1 вагон толук жүктөлбөй калат. Эгерде жүк 50 т луу вагондорго жүктөлсө, дагы 5 вагон керек болот жана анда жүктөр вагондордун бардыгын толтурат. Жүк канча тонна болгон?

337. Окуучулар ар бир катарда 8 ден болуп сапка турса, катарлардан бири толук болбой калат. Эгерде ар бир катарда 7 ден болушса, катарлар толук болот, бирок катарлардын саны 2 ге көбөйөт. Эгерде ар бир катарда 5 тен болушса, катарлардын саны дагы 7 ге көбөйөт, бирок 1 катар толук болбойт. Окуучулардын санын аныкта.

338. 1) a, b, c, d – оң сандар жана $a > b$, $c > d$ болсо, анда $ac > bd$ болушу китебинде далилденген. Бул барабарсыздыкка геометриялык түшүндүрмө бер жана 36-сүрөттү түшүндүр:



36-сүрөт.

2) Томпок көп бурчтуктун ичинде жаткан каалагандай чекиттен анын чокуларына чейин болгон аралыктардын суммасы ошол көп бурчтуктун жарым периметринен чоң экендигин далилде.

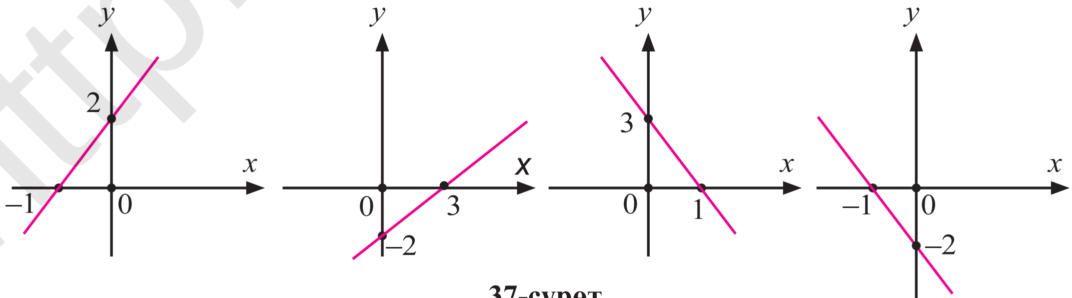
339. Көлөмү 8 л болгон эритмеде 60 % кислота бар эле. Ага кислотасы 20 % болгон эритмеден куюшту. Аралашмадагы кислота 40 % дан көп, бирок 30 % дан аз болбостугу үчүн экинчи эритмеден биринчисине канча куюуга болот?

340. 1) Жумушчулар жамааты 5 күндө 300 дөн аз, 10 күндө болсо 500 дөн көп продукция даярдады. Эгерде жамаатта 8 адам эмгектенип, алардын эмгек өнүмдүүлүгү бирдей болсо, ар бир жумушчу бир күндө канча продукция даярдаган?
2) Автобус 8 жолу каттаганда 185 тен көп жүргүнчү, 15 жолу каттаганда болсо 370 тен аз жүргүнчү ташыды. Эгерде автобус ар жолу анда канча орун болсо, дал ошонча жүргүнчү ташыган болсо, автобусда канча орун бар?

341. Функциянын графигин түз жана график боюнча x тин кандай маанилеринде функция: оң; нөлгө барабар; 2 ден чоң; –1 ден кичине маанилер кабыл алышын тап:

1) $y = 5x + 2$; 2) $y = 2x - 6$;
3) $y = -4x + 5$; 3) $y = -3x - 1$.

342. 37-сүрөттө $y = kx + b$ сызыктуу функциянын графиги сүрөттөлгөн. 1) k жана b ны тап; 2) $x \geq 0$; 3) $x < 0$; 4) $x \geq 3$ 5); $7 \leq -2x$ болгондо y функция кандай маанилерди кабыл алышын барабарсыздык белгисинин жардамында жаз жана алынган барабарсыздыкты чыгар. Чыгарылышты сан огунда сүрөттө.



37-сүрөт.

III ГЛАВА КВАДРАТТЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР

22-§. КВАДРАТТЫК ТЕҢДЕМЕ ЖАНА АНЫН ТАМЫРЛАРЫ

1-маселе. Тик бурчтуктун негизи бийиктигинен 10 см ге чоң, анын аянты болсо 24 см^2 ге барабар. Тик бурчтуктун бийиктигин тап.

△ Тик бурчтуктун бийиктиги x сантиметр болсун, анда анын негизи $(x+10)$ сантиметрге барабар. Ошол тик бурчтуктун аянты $x(x+10)$ см^2 ге барабар. Маселенин шарты боюнча, $x(x+10)=24$.

Кашааларды ачып жана 24 санын карама-каршы белги менен теңдеменин сол бөлүгүнө өткөрүп, төмөнкүнү алабыз:

$$x^2+10x-24=0.$$

Теңдеменин сол бөлүгүн топтоштуруу усулу менен көбөйтүүчүлөргө ажыратабыз:

$$x^2+10x-24=x^2+12x-2x-24=$$
$$=x(x+12)-2(x+12)=(x+12)(x-2).$$

Демек, теңдемени минтип жазууга болот:

$$(x+12)(x-2)=0.$$

Бул теңдеме $x_1=-12$ жана $x_2=2$ тамырларга ээ.

Кесиндинин узундугу терс сан боло албагандыгы себептүү изделген бийиктик 2 см ге барабар болот. ▲

Бул маселени чыгарууда квадраттык теңдеме деп аталган

$$x^2+10x-24=0$$

теңдеме алынды.

Квадраттык теңдеме *деп*

$$ax^2+bx+c=0, \qquad (1)$$

көрүнүштөгү теңдемеге айтылат, мында a, b, c — берилген сандар, $a\neq0$, x болсо белгисиз.

Квадраттык теңдеменин *a, b, c* коэффициенттери мындайча аталат: *a*–*биринчи же башкы коэффициент*, *b*–*экинчи коэффициент*, *c* – *эркин мүчө.*

Мисалы, $3x^2-x+2=0$ теңдемеде башкы коэффициент 3, экинчи коэффициент -1, эркин мүчө 2.

Математика, физика жана техниканын көптөгөн маселелерин чыгаруу квадраттык теңдемени чыгарууга келтирилет.

Квадраттык теңдемеге дагы мисалдар келтиребиз:

$$2x^2+x-1=0,\quad 5t^2-10t+3=0,$$
$$x^2-25=0,\quad 2x^2=0.$$

Көптөгөн маселелерди чыгарууда алгебралык форма алмаштыруулар жардамында квадраттык теңдемеге келтирилип жаткан теңдемелер алынат.

Мисалы,

$$2x^2+3x=x^2+2x+2$$

теңдемеси анын бардык мүчөлөрүн сол бөлүгүнө алып өткөндөн жана окшош мүчөлөрүн кыскарткандан кийин төмөнкү

$$x^2+x-2=0$$

квадраттык теңдемеге келет.

2-маселе. Теңдемени чыгар:

$$x^2=64.$$

△ 64 тү сол бөлүккө алып өтөбүз жана квадраттык теңдемени алабыз:

$$x^2-64=0.$$

Сол бөлүктү көбөйтүүчүлөргө ажыратабыз:

$$(x-8)(x+8)=0.$$

Демек, теңдеме эки тамырга ээ: $x_1=8$, $x_2=-8$. ▲

$x^2=64$ теңдемесинин биринчи тамыры 64 санынын арифметикалык тамыры, экинчиси болсо ага карама-каршы сан экендигин белгилей кетебиз:

$$x_1=\sqrt{64},\ x_2=-\sqrt{64}.$$

Адатта, бул эки формула бириктирип жазылат:

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{64}.$$

2-маселеге жоопту $x_{1,2} = \pm 8$ сыяктуу жазууга болот.

$x^2=64$ теңдеме $x^2=d$ теңдеменин өзгөчө учуру саналат. Ар кандай квадраттык теңдеме болсо $x^2=d$ теңдемеге келтирилиши мүмкүн.

Теорема. ***$x^2=d$ теңдеме, мында $d>0$, эки тамырга ээ:***

$$x_1 = \sqrt{d},\ x_2 = -\sqrt{d}.$$

d ны теңдеменин сол бөлүгүнө алып өтөбүз:

$$x^2-d=0.$$

$d>0$ болгондуктан, арифметикалык квадрат тамырдын аныктамасы боюнча $d=\left(\sqrt{d}\right)^2$. Ошондуктан теңдемени минтип жазууга болот:

$$x^2-(\sqrt{d})^2=0.$$

Бул теңдеменин сол бөлүгүн көбөйтүүчүлөргө ажыратып, төмөнкүнү алабыз:

$$\left(x-\sqrt{d}\right)\left(x+\sqrt{d}\right)=0,$$

мындан, $x_1 = \sqrt{d},\ x_2 = -\sqrt{d}.$ ●

Мисалы, $x^2 = \frac{4}{9}$ теңдемеси $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{4}{9}} = \pm\frac{2}{3}$ тамырларга ээ; $x^2=3$ теңдемеси $x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$ тамырларга ээ; $x^2=8$ теңдемеси $x_{1,2} = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$ тамырларга ээ.

Эгерде $x^2=d$ теңдеменин оң бөлүгү нөлгө барабар болсо, анда $x^2=0$ *теңдеме бир тамырга ээ:* $x=0$. $x^2=0$ теңдемени $x\cdot x=0$ көрүнүштө жазууга болгондуктан кээде $x^2=0$ *теңдемеге эки өз ара барабар тамырга* ээ дейилет: $x_{1,2}=0$.

Эгерде $d<0$ болсо, анда $x^2=d$ теңдеме чыныгы тамырларга ээ болбойт, анткени чыныгы сандын квадраты терс сан болушу мүмкүн эмес. Мисалы, $x^2=-25$ теңдеме чыныгы тамырларга ээ эмес.

Көнүгүүлөр

343. (Оозеки.) Төмөндө көрсөтүлгөн теңдемелерден кайсылары квадраттык теңдеме болот:

1) $5x^2-14x+17=0$; 2) $\frac{2}{3}x^2+4=0$;
3) $-7x^2-13x+8=0$; 4) $17x+24=0$;
5) $-13x^4+26=0$; 6) $x^2-x=0$?

344. (Оозеки.) Квадраттык теңдеменин коэффициенттерин жана эркин мүчөсүн айт:

1) $5x^2-14x+17=0$; 2) $-7x^2-13x+8=0$;
3) $\frac{2}{3}x^2+4=0$; 4) $x^2+25x=0$;
5) $-x^2+x+\frac{1}{3}=0$; 6) $-x^2-x=0$.

345. Эгерде $ax^2+bx+c=0$ квадраттык теңдеменин коэффициенттери белгилүү болсо, ошол квадраттык теңдемени жаз:

1) $a=2, b=3, c=4$; 2) $a=-1, b=0, c=9$;
3) $a=1, b=-5, c=0$; 4) $a=1, b=0, c=0$.

346. Берилген теңдемени квадраттык теңдемеге келтир:

1) $x(x-3)=4$; 2) $(x-3)(x-1)=12$;
3) $3x(x-5)=x(x+1)-x^2$; 4) $7(x^2-1)=2(x+2)(x-2)$.

347. –3, –2, 0, 1 сандарынан кайсылары теңдеменин тамырлары болот:

1) $x^2-9=0$; 2) $x^2-x=0$;
3) $x^2+x-6=0$; 4) $x^2-5x+4=0$;
5) $(x-1)(x+2)=0$; 6) $(x+1)(x-3)=x$?

348. (Оозеки.) $x^2=36$ теңдеме канча тамырга ээ? Аларды тап. Алардан кайсынысы 36 нын арифметикалык тамыры болот?

349. (Оозеки.) Теңдемени чыгар:

1) $x^2=1$; 2) $x^2=9$; 3) $x^2=16$; 4) $x^2=25$;

5) $x^2=100$; 6) $x^2=0$; 7) $x^2=49$; 8) $x^2=64$.

350. Теңдеменин тамырларын тап:

1) $x^2=\frac{9}{16}$; 2) $x^2=\frac{16}{49}$; 3) $x^2=1\frac{7}{9}$; 4) $x^2=2\frac{1}{4}$;

5) $x^2=5$; 6) $x^2=13$; 7) $x^2=\frac{25}{49}$; 8) $x^2=10$.

351. Теңдемени чыгар:

1) $x^2-49=0$; 2) $x^2-121=0$; 3) $\frac{1}{3}x^2=0$;

4) $\frac{x^2}{5}=0$; 5) $x^2+9=0$; 6) $x^2+12=0$.

352. Квадраттык теңдемени, анын сол бөлүгүн көбөйтүүчүлөргө ажыратып, чыгар:

1) $x^2-x=0$; 2) $x^2+2x=0$; 3) $3x^2+5x=0$;

4) $5x^2-3x=0$; 5) $x^2-4x+4=0$; 6) $x^2+6x+9=0$.

23-§. ЧАЛА КВАДРАТТЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР ЖАНА АЛАРДЫ ЧЫГАРУУ

Эгерде $ax^2+bx+c=0$ квадраттык теңдемеде b же c коэффициенттерден аз дегенде бири нөлгө барабар болсо, анда бул теңдемеге *чала квадраттык теңдеме* дейилет.

Демек, чала квадраттык теңдеме төмөнкү теңдемелерден биринин көрүнүшүндө болот:

$$ax^2=0, \tag{1}$$

$$ax^2+c=0, c\neq 0, \tag{2}$$

$$ax^2+bx=0, b\neq 0. \tag{3}$$

(1), (2), (3) теңдемелерде *a коэффициент нөлгө барабар эместигин* эскерте кетебиз.

Чала квадраттык теңдемелер кандай чыгарылышын көрсөтөбүз.

1-маселе. Теңдемени чыгар:

$$5x^2=0.$$

△ Бул теңдеменин эки бөлүгүн 5 ке бөлүп,

$$x^2=0$$

теңдемени алабыз, мындан $x=0$. ▲

2-маселе. Теңдемени чыгар:

$$3x^2-27=0.$$

△ Теңдеменин эки бөлүгүн 3 кө бөлөбүз:

$$x^2-9=0.$$

Бул теңдемени төмөнкүдөй жазууга болот:

$$x^2=9,$$

мындан $x_{1,2}=\pm 3$. ▲

3-маселе. Теңдемени чыгар:

$$2x^2+7=0.$$

△ Теңдемени минтип жазууга болот:

$$x^2=-\frac{7}{2}.$$

Бул теңдеме чыныгы тамырларга ээ эмес, анткени x тин каалагандай чыныгы маанилеринде $x^2\geq 0$ болот. ▲

4-маселе. Теңдемени чыгар:

$$-3x^2+5x=0.$$

△ Теңдеменин сол бөлүгүн көбөйтүүчүлөргө ажыратып,

$$x\ (-3x+5)=0$$

экендигин алабыз, мындан: $x_1=0, x_2=\frac{5}{3}$.

Жообу: $x_1=0,\ x_2=\frac{5}{3}$. ▲

Көнүгүүлөр

Теңдемени чыгар (**353–357**):

353. 1) $x^2=0$; 2) $3x^2=0$; 3) $5x^2=125$;
4) $9x^2=81$; 5) $4x^2-64=0$; 6) $x^2-27=0$;
7) $4x^2=81$; 8) $0{,}01x^2=4$; 9) $0{,}04x^2=16$.

354. 1) $x^2-7x=0$; 2) $x^2+5x=0$; 3) $5x^2=3x$;
4) $4x^2=0{,}16x$; 5) $9x^2-x=0$; 6) $9x^2+1=0$;
7) $x^2-3x=0$; 8) $0{,}1x^2-x=0$; 9) $16x^2+3=0$.

355. 1) $4x^2-169=0$; 2) $25-16x^2=0$; 3) $2x^2-16=0$;
4) $3x^2=15$; 5) $2x^2=\frac{1}{8}$; 6) $3x^2=5\frac{1}{3}$;
7) $3x^2=27$; 8) $4x^2=64$; 9) $1\frac{9}{16}x^2=4$.

356. 1) $\frac{x^2-1}{3}=5$; 2) $\frac{9-x^2}{5}=1$; 3) $4=\frac{x^2-5}{5}$;
4) $3=\frac{9x^2-4}{4}$; 5) $\frac{16-x^2}{4}=3$; 6) $5=\frac{x^2-6}{2}$.

357. 1) $3x^2+6x=8x^2-15x$; 2) $17x^2-5x=14x^2+7x$;
3) $10x+7x^2=2x^2+8x$; 4) $15x+9x^2=7x^2+10x$.

358. x тин кандай маанилеринде бул бөлчөктөр бири-бирине барабар болот:
1) $\frac{4x^2-3x}{3}$ жана $\frac{x^2+5x}{2}$; 2) $\frac{3x^2+7x}{4}$ жана $\frac{7x^2-5x}{3}$?

24-§. КВАДРАТТЫК ТЕҢДЕМЕНИН ТАМЫРЛАРЫН ТАБУУНУН ФОРМУЛАЛАРЫ. ДИСКРИМИНАНТ

Квадраттык теңдемелерди чыгаруу үчүн *толук квадратты ажыратуу усулу* колдонулат. Бул усулду мисалдарда көрөлү.

1-маселе. Квадраттык теңдемени чыгар:

$$x^2+2x-3=0.$$

△ Бул теңдеменин формасын төмөнкүдөй алмаштырабыз:

$$x^2+2x=3,$$

$$x^2+2x+1=3+1,$$

$$(x+1)^2=4.$$

Демек, $x+1=2$ же $x+1=-2$, мындан $x_1=1$, $x_2=-3$. ▲

Биз, $x^2+2x-3=0$ теңдемени чыгарып жатып, анын формасын алмаштырганыбызда, *сол бөлүгүндө эки мүчөнүн квадраты* $(x+1)^2$ *алынды жана оң бөлүгүндө белгисиз катышпады.*

2-маселе. Теңдемени чыгар:

$$x^2+6x-7=0.$$

△ Бул теңдемени алмаштырганыбызда, анын сол бөлүгү эки мүчөнүн квадратына айлансын:

$$x^2+6x=7,$$

$$x^2+2\cdot 3x=7,$$

$$x^2+2\cdot 3x+3^2=7+3^2,$$

$$(x+3)^2=16.$$

Бул форма алмаштырууларды түшүндүрөбүз. x^2+6x туюнтмада биринчи кошулуучу x сандын квадраты, экинчиси болсо x менен 3 түн эки эселенген көбөйтүндүсү. Ошондуктан теңдеменин сол бөлүгүндө эки мүчөнүн квадратын алуу үчүн теңдеменин эки бөлүгүнө 3^2 ты кошуу керек.

$(x+3)^2=16$ теңдемени чыгарып, $x+3=4$ же $x+3=-4$ тү алабыз, мындан $x_1=1$, $x_2=-7$. ▲

3-маселе. $4x^2-8x+3=0$ теңдемени чыгар.

△ $$4x^2-8x=-3,$$

$$(2x)^2-2\cdot 2\cdot 2x=-3,\ (2x)^2-2\cdot 2\cdot 2x+4=-3+4,$$

$$(2x-2)^2=1,\ 2x-2=1 \text{ yoki } 2x-2=-1,$$

$$x_1=\frac{3}{2},\ x_2=\frac{1}{2}.$$ ▲

4-маселе. $x^2+5x-14=0$ теңдемени чыгар.

$$\triangle \quad x^2+5x=14, \quad x^2+2\cdot\frac{5}{2}x+\frac{25}{4}=14+\frac{25}{4},$$

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{81}{4}, \quad x+\frac{5}{2}=\pm\frac{9}{2},$$

$$x_1=\frac{9}{2}-\frac{5}{2}=2, \; x_2=-\frac{9}{2}-\frac{5}{2}=-7. \; \blacktriangle$$

Жогоруда квадраттык теңдемелерди толук квадратты ажыратуу усулу менен чыгаруу каралган эле. Ошол усулду жалпы көрүнүштөгү квадраттык теңдемени чыгаруу формуласын келтирип чыгаруу үчүн колдонобуз.

Жалпы көрүнүштөгү квадраттык теңдемени карап көрөбүз:

$$ax^2+bx+c=0, \text{ мында } a\neq 0.$$

Теңдеменин эки бөлүгүн a га бөлүп,

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

квадраттык теңдемени алабыз.

Бул теңдеменин формасын алмаштырганыбызда, анын сол бөлүгүндө *эки мүчөнүн толук квадраты* алынсын:

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}, \qquad x^2+2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2,$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}. \tag{1}$$

Эгерде $b^2-4ac\geq 0$ болсо, анда

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2.$$

Мындан

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \qquad x_{1,2}=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

же

$$\boxed{x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.} \qquad (2)$$

(2) формулага *жалпы көрүнүштөгү квадраттык теңдеме тамырларынын формуласы* дейилет.

$D=b^2-4ac$ туюнтмага $ax^2+bx+c=0$ квадраттык теңдеменин *дискриминанты* дейилет. (2) формуладан көрүнүп тургандай, квадраттык теңдеме:

1) $D>0$ болсо, x_1 жана x_2 – эки түрдүү тамырга ээ, $x_1 \neq x_2$;
2) $D=0$ болсо, $x_1=x_2$ – бир тамырга ээ;
3) $D<0$ болсо, чыныгы тамырларга ээ эмес.

1-маселе. Теңдемени чыгар:

$$6x^2+x-2=0.$$

△ Бул жерде $a=6$, $b=1$, $c=-2$ жана $D>0$, б. а. теңдеме эки тамырга ээ. (2) формула боюнча төмөнкүлөрдү табабыз:

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot6(-2)}}{2\cdot6}=\frac{-1\pm\sqrt{49}}{12}=\frac{-1\pm7}{12},$$

мындан

$$x_1=\frac{-1+7}{12}=\frac{1}{2},\quad x_2=\frac{-1-7}{12}=-\frac{2}{3}.$$

Жообу: $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=-\frac{2}{3}$. ▲

2-маселе. $4x^2-4x+1=0$ теңдемени чыгар.

△ Бул жерде $a=4$, $b=-4$, $c=1$ жана $D=0$, б. а. теңдеме бир тамырга ээ. (2) формула боюнча төмөнкүлөрдү табабыз:

$$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{4^2-4\cdot4\cdot1}}{2\cdot4}=\frac{4\pm0}{8}=\frac{1}{2}.$$

Жообу: $x=\frac{1}{2}$. ▲

Эгерде (1) барабардыктын оң бөлүгүндө терс сан турса, б. а. $D=b^2-4ac<0$ болсо, анда (1) барабардык x тин эч кандай чыныгы маанисинде туура болбойт, анткени анын сол бөлүгү терс эмес. Ошондуктан, *эгерде* $D=b^2-4ac<0$ *болсо,*

$$ax^2+bx+c=0$$

теңдеме чыныгы тамырларга ээ болбойт.

3-маселе. $x^2-4x+5=0$ теңдеме чыныгы тамырларга ээ эместигин далилде.

△ Бул жерде $a=1$, $b=-4$, $c=5$,

$$D=b^2-4ac=(-4)^2-4\cdot 1\cdot 5=-4<0.$$

Демек, берилген теңдеме чыныгы тамырларга ээ эмес. ▲

4-маселе. $2x^2+3x+4=0$ теңдемени чыгар:

△ (2) формула боюнча төмөнкүгө ээ болобуз:

$$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9-4\cdot 2\cdot 4}}{4}.$$

Тамыр белгиси астында турган сан терс:

$$9-4\cdot 2\cdot 4=9-32<0.$$

Жообу: теңдеме чыныгы тамырларга ээ эмес. ▲

Бул мисалда $D=b^2-4ac=-23<0$: чыныгы тамырлардын жоктугуна дискриминантты эсептеп ишеним пайда кылууга да болмак.

Чала квадраттык теңдемелерди да (2) формула боюнча чыгарууга болот, бирок аларды чыгарууда 23-§ та каралган усулдардан пайдаланган оң.

Көнүгүүлөр

359. Оң m санды тап, натыйжада берилген туюнтма сумма же айырманын квадраты болсун:

1) x^2+4x+m; 2) x^2-6x+m; 3) $x^2-14x+m$;

4) $x^2+16x+m$; 5) x^2+mx+4; 6) x^2-mx+9.

360. Теңдемени толук квадратты ажыратуу усулу менен чыгар:

1) $x^2+4x-5=0$; 2) $x^2+4x-12=0$;

3) $x^2+2x-15=0$; 4) $x^2-10x+16=0$;

5) $x^2-6x+3=0$; 6) $x^2+8x-7=0$.

Теңдемени чыгар (**361–363**):

361. 1) $9x^2+6x-8=0$; 2) $25x^2-10x-3=0$.

362. 1) $x^2-5x+4=0$; 2) $x^2-3x-10=0$.

363. 1) $2x^2+3x-5=0$; 2) $5x^2-7x-6=0$.

364. $D=b^2-4ac$ туюнтманын маанисин эсепте, мында:

1) $a=3, b=1, c=-4$; 2) $a=3, b=-0,2, c=-0,01$;

3) $a=7, b=-6, c=-45$; 4) $a=-1, b=5, c=1800$.

365. Квадраттык теңдемени чыгар:

1) $2x^2+3x+1=0$; 2) $2x^2-3x+1=0$;

3) $2x^2+5x+2=0$; 4) $2x^2-7x+3=0$;

5) $3x^2+11x+6=0$; 6) $4x^2-11x+6=0$.

366. x тин кандай маанилеринде туюнтманын мааниси нөлгө айланат:

1) $2x^2+5x-3$; 2) $2x^2-7x-4$; 3) $3x^2+x-4$;

4) $3x^2+2x-1$; 5) x^2+4x-3; 6) $3x^2+12x+10$;

7) $-2x^2+x+1$; 8) $-3x^2-x+4$; 9) $6x^2-5x+1$?

Квадраттык теңдемени чыгар (**367–368**):

367. 1) $9x^2-6x+1=0$; 2) $16x^2-8x+1=0$;

3) $49x^2+28x+4=0$; 4) $36x^2+12x+1=0$.

368. 1) $2x^2+x+1=0$; 2) $3x^2-x+2=0$;

3) $5x^2+2x+3=0$; 4) $x^2-2x+10=0$.

369. Төмөнкү теңдемелерди чыгарбастан, алардын канча тамырга ээ болушун аныкта:

1) $2x^2+5x-7=0$; 2) $3x^2-7x-8=0$;

3) $4x^2+4x+1=0$; 4) $9x^2-6x+2=0$.

Теңдемени чыгар (**370–372**):

370. 1) $7x^2-6x+2=0$; 2) $3x^2-5x+4=0$;

3) $9x^2+12x+4=0$; 4) $4x^2-20x+25=0$;

5) $4x^2+12x+9=0$; 6) $x^2-3x-4=0$.

371. 1) $6x^2=5x+1$; 2) $5x^2+1=6x$;

3) $x(x-1)=72$; 4) $x(x+1)=56$;

5) $2x(x+2)=8x+3$; 6) $3x(x-2)-1=x-0,5(8+x^2)$.

372. 1) $\frac{x^2+3x}{2}=\frac{x+7}{4}$; 2) $\frac{x^2-3x}{7}+x=11$;

3) $\frac{2x^2+x}{3}-\frac{2-3x}{4}=\frac{x^2-6}{6}$; 4) $\frac{x^2+x}{4}-\frac{3-7x}{20}=0,3$.

373. Теңдемени чыгар:

1) $5x^2-8x-4=0$; 2) $4x^2+4x-3=0$;

3) $8x^2-6x+1=0$; 4) $5x^2-26x+5=0$.

374. Теңдемени толук квадратты ажыратуу усулу менен чыгар:

1) $x^2-16x+48=0$; 2) $x^2-7x-18=0$;

3) $x^2-15x+56=0$; 4) $x^2+12x+27=0$;

5) $x^2-11x+28=0$; 6) $x^2-11x+18=0$;

7) $x^2+10x+21=0$; 8) $2x^2-5x+2=0$;

9) $x^2-21x+20=0$; 10) $x^2-6x-55=0$;

11) $3x^2-x-70=0$; 12) $x^2-100x+99=0$.

$ax^2+bx+c=0$ теңдеменин эки бөлүгүн тең $4a$ га көбөйтүп да $ax^2+bx+c=0$ үч мүчөдөн толук квадрат ажыратууга болот:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0,$$

$$(2ax)^2 + 2\cdot 2ax\cdot b + b^2 + 4ac - b^2 = 0,$$

$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac,$ мындан, $2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}.$

Анда, $x_{1,2} = \dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$

Мисал. Толук квадратты жогорудагы усул менен ажыратып, $10x^2 + 13x - 3 = 0$ теңдемени чыгар:

$\triangle\, 10x^2 + 13x - 3 = 0,\ 40\cdot 10x^2 + 40\cdot 13x - 3\cdot 40 = 0,$

$$(20x)^2 + 2\cdot 20x\cdot 13 + 13^2 - 13^2 - 3\cdot 40 = 0,$$

$(20x + 13)^2 = 169 + 120,\ (20x + 13)^2 = (17)^2;\quad 20x + 13 = \pm 17;$

$x_1 = \dfrac{17-13}{20} = \dfrac{4}{20} = \dfrac{1}{5};\qquad x_2 = \dfrac{-17-13}{20} = \dfrac{-30}{20} = -\dfrac{3}{2}.$

Жообу: $x = \dfrac{1}{5},\ x = -\dfrac{3}{2}.$ ▲

375. Теңдемени көрсөтүлгөн усул менен чыгарып көр:

1) $12x^2 - 7x + 1 = 0;$ 2) $6x^2 + 5x + 1 = 0;$

3) $8x^2 + 7x - 1 = 0;$ 4) $\dfrac{x^2}{12} - \dfrac{1}{12}x - 1 = 0.$

№ 4

Кырынын узундугу 3 см болгон куб кызыл түскө боёлгон. Ал кыры 1 см лүү кубчаларга бөлүндү. Канча куб үч кызыл капталга ээ? Эки кызыл капталга ээ? Бир кызыл капталга ээ? Бир да кызыл капталга ээ эмес?

25- §. ВИЕТ ТЕОРЕМАСЫ. КВАДРАТТЫК ҮЧ МҮЧӨНҮ СЫЗЫКТУУ КӨБӨЙТҮҮЧҮЛӨРГӨ АЖЫРАТУУ

$$x^2 + px + q = 0 \qquad (1)$$

көрүнүштөгү квадраттык теңдемеге ***келтирилген квадраттык теңдеме*** *дейилет.*

Бул теңдемеде башкы коэффициент бирге барабар. Мисалы,

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

теңдеме келтирилген квадраттык теңдеме эсептелет.

Ар кандай

$$ax^2 + bx + c = 0$$

квадраттык теңдемени анын эки бөлүгүн $a \neq 0$ гө бөлүп, (1) көрүнүшкө келтирүүгө болот.

Мисалы, $4x^2 + 4x - 3 = 0$ теңдемени 4 кө бөлүп, төмөнкү формага келтирилет:

$$x^2 + x - \frac{3}{4} = 0.$$

(1) келтирилген квадраттык теңдеменин тамырларын табабыз. Ал үчүн жалпы көрүнүштөгү $ax^2 + bx + c = 0$ квадраттык теңдеменин тамырлары формуласынан, б. а.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (2)$$

формуладан пайдаланабыз. Жалпы көрүнүштөгү теңдемеде $a=1$, $b=p$, $c=q$ болсо, келтирилген квадраттык теңдеме

$$x^2 + px + q = 0$$

алынат. Ошол себептүү келтирилген квадраттык теңдеме үчүн (2) формула

$$x_{1,2}=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$$

же

$$\boxed{x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}} \qquad (3)$$

көрүнүшкө ээ болот.

(3) формулага *келтирилген квадраттык теңдеменин тамырлары формуласы* дейилет.

(3) формуладан, айныкса, p жуп сан болгондо пайдаланган оң. Мисалы, $x^2-14x-15=0$ теңдемени чыгаралы.

△ (3) формула боюнча төмөнкүнү табабыз:

$$x_{1,2}=7\pm\sqrt{49+15}=7\pm8.$$

Жообу: $x_1=15,\ x_2=-1.$ ▲

Келтирилген квадраттык теңдеме үчүн төмөнкү теорема орундуу:

Виет теоремасы. ***Эгерде x_1 жана x_2 лер***

$$\boldsymbol{x^2+px+q=0}$$

теңдеменин тамырлары болсо, анда

$$\boldsymbol{x_1+x_2=-p,}$$

$$\boldsymbol{x_1\cdot x_2=q}$$

формулалар орундуу, б. а. келтирилген квадраттык теңдеме тамырларынын суммасы карама-каршы белги менен алынган экинчи коэффициентке, ал эми тамырларынын көбөйтүндүсү болсо эркин мүчөгө барабар.

○ (3) формула боюнча:

$$x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q},$$

$$x_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}.$$

Бул барабардыктарды мүчөлөп кошсок, $x_1+x_2=-p$ болот. Аларды көбөйтүп, квадраттар айырмасынын формуласы боюнча төмөнкүнү алабыз:

$$x_1\cdot x_2=\left(-\frac{p}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2+q=q.$$

Мисалы, $x^2-13x+30=0$ теңдеме $x_1=10$, $x_2=3$ тамырларга ээ; анын тамырларынын суммасы $x_1+x_2=13$, алардын көбөйтүндүсү болсо $x_1\cdot x_2=30$.

Виет теоремасы квадраттык теңдеме эки барабар $x_1=x_2=-\frac{p}{2}$ тамырларга ээ болгон учурда да туура болушун белгилей кетебиз.

Мисалы, $x^2-6x+9=0$ теңдеме эки барабар $x_1=x_2=3$ тамырларга ээ; алардын суммасы $x_1+x_2=6$, көбөйтүндүсү $x_1\cdot x_2=9$.

1-маселе. $x^2+px-12=0$ теңдеменин тамырларынан бири $x_1=4$. Ошол теңдеменин p коэффициентин жана экинчи тамыры x_2 ни тап.

△ Виет теоремасы боюнча:

$$x_1\cdot x_2=-12, x_1+x_2=-p.$$

$x_1=4$ болгондуктан $4x_2=-12$, мындан $x_2=-3$,

$$p=-(x_1+x_2)=-(4-3)=-1.$$

Жообу: $x_2=-3$, $p=-1$. ▲

2-маселе. Тамырлары $x_1=3$, $x_2=4$ болгон келтирилген квадраттык теңдеме түз.

△ $x_1=3$; $x_2=4$ сандары $x^2+px+q=0$ теңдеменин тамырлары болгондуктан Виет теоремасы боюнча, $p=-(x_1+x_2)=-7$, $q=x_1x_2=12$.

Жообу: $x^2-7x+12=0$. ▲

3-маселе. $3x^2+8x-4=0$ теңдеменин тамырларынан бири оң. Теңдемени чыгарбастан, экинчи тамырдын белгисин аныкта:

△ Теңдеменин эки бөлүгүн 3 кө бөлүп, төмөнкүнү алабыз:

$$x^2+\frac{8}{3}x-\frac{4}{3}=0.$$

Виет теоремасы боюнча $x_1x_2 = -\frac{4}{3} < 0$. Шарт боюнча $x_1 > 0$, демек, $x_2 < 0$. ▲

Кээ бир маселелерди чыгарууда *Виет теоремасына тескери болгон* төмөнкү теорема колдонулат.

Эгерде p, q, x_1, x_2 сандар үчүн

$$x_1 + x_2 = -p, \; x_1 \cdot x_2 = q \qquad (4)$$

катыштар аткарылса, анда x_1 жана x_2 сандары

$$x^2 + px + q = 0$$

теңдеменин тамырлары болот.

○ Сол бөлүктөгү

$$x^2 + px + q$$

туюнтмада p нын ордуна $-(x_1+x_2)$ти, q нун ордуна болсо $x_1 \cdot x_2$ көбөйтүндүнү коёбуз. Натыйжада төмөнкү туюнтма алынат:

$$x^2 + px + q = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 =$$
$$= x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2 = x(x - x_1) - x_2(x - x_1) =$$
$$= (x - x_1)(x - x_2).$$

Ошентип, эгерде p, q, x_1 жана x_2 сандары (4) катыштар менен байланышкан болсо, анда *x тин ар кандай маанисинде*

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$$

барабардык аткарылат, мындан болсо x_1 жана x_2 лер $x^2 + px + q = 0$ теңдеменин тамырлары экендиги келип чыгат. ●

Виет теоремасына тескери теоремадан пайдаланып, квадраттык теңдеменин тамырларын кээде *тандоо усулу* менен табууга болот.

4-маселе. Тандоо усулу менен

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

теңдеменин тамырларын тап.

△ Бул жерде $p=-5$, $q=6$. Эки x_1 жана x_2 санын

$$x_1+x_2=5,\ x_1x_2=6$$

болгондой кылып тандайбыз.

$6=2\cdot3$ жана $2+3=5$ экендигин этибар алып, Виет теоремасына тескери теорема боюнча $x_1=2$, $x_2=3$ кө, б. а. $x^2-5x+6=0$ теңдеменин тамырларына ээ болобуз. ▲

5-маселе. $\dfrac{x^2-x-12}{x+3}$ бөлчөгүн кыскарт.

△ Бөлчөктүн алымын көбөйтүүчүлөргө ажыратабыз:

$$x^2-x-12=x^2-4x+3x-12=$$
$$=x(x-4)+3(x-4)=(x-4)(x+3).$$

Демек,

$$\frac{x^2-x-12}{x+3}=\frac{(x-4)(x+3)}{x+3}=x-4.$$ ▲

ax^2+bx+c көп мүчөгө *квадраттык үч мүчө* дейилет, мында $a\neq0$.

5-маселени чыгарууда x^2-x-12 квадраттык үч мүчө топтоштуруу усулу менен көбөйтүүчүлөргө ажыратылды. Аны төмөнкү теоремадан пайдаланып да көбөйтүүчүлөргө ажыратууга болот.

Теорема. ***Эгерде x_1 жана x_2 лер $ax^2+bx+c=0$ квадраттык теңдеменин тамырлары болсо, анда бардык x үчүн төмөнкү барабардык орундуу болот:***

$$\boxed{ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).} \quad (5)$$

○ (5) тин оң бөлүгүндө турган туюнтманын формасын алмаштырабыз:

$$a(x-x_1)(x-x_2)=ax^2-ax\cdot x_1-ax\cdot x_2+ax_1x_2=$$
$$=ax^2-a(x_1+x_2)x+ax_1x_2. \quad (6)$$

x_1 жана x_2 лер $ax^2+bx+c=0$ теңдеменин, б. а. $x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}=0$ теңдеменин тамырлары болгондуктан Виет теоремасы боюнча,

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\quad x_1x_2=\frac{c}{a},$$

мындан $a(x_1+x_2)=-b,\ ax_1x_2=c.$

Бул туюнтмаларды (6) барабардыкка коюп, (5) формуланы алабыз. ●

(5) *формула* ax^2+bx+c *квадраттык үч мүчө сызыктуу көбөйтүүчүлөргө ажыратылганын туюнтат.*

6-маселе. $\frac{2x^2+5x-3}{x^2-x-12}$ туюнтманы жөнөкөйлөштүр.

△ Бөлчөктүн алымы менен бөлүмүн көбөйтүүчүлөргө ажыратабыз.
1) $2x^2+5x-3=0$ теңдеме эки тамырга ээ:

$$x_1=\frac{1}{2},\ x_2=-3.$$

Далилденген теорема боюнча

$$2x^2+5x-3=2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+3)=(2x-1)(x+3).$$

2) $x^2-x-12=0$ теңдеме $x_1=-3,\ x_2=4$ тамырларга ээ. Далилденген теорема боюнча $x^2-x-12=(x+3)(x-4)$.

Ошентип,

$$\frac{2x^2+5x-3}{x^2-x-12}=\frac{(2x-1)(x+3)}{(x+3)(x-4)}=\frac{2x-1}{x-4}.$$ ▲

Көнүгүүлөр

376. Келтирилген квадраттык теңдемени чыгар:

1) $x^2+4x-5=0$;
2) $x^2-6x-7=0$;
3) $x^2-8x-9=0$;
4) $x^2+6x-40=0$;
5) $x^2+x-6=0$;
6) $x^2-x-2=0$.

377. (Оозеки.) Келтирилген квадраттык теңдеме тамырларынын суммасын жана көбөйтүндүсүн айт:

1) $x^2 - x - 2 = 0;$ 2) $x^2 - 5x - 6 = 0;$

3) $x^2 + 3x + 2 = 0;$ 4) $x^2 + 3x - 4 = 0;$

5) $x^2 - 7x + 5 = 0;$ 6) $x^2 + 9x - 6 = 0.$

378. (Оозеки.) $x^2 - 19x + 18 = 0$ теңдеменин тамырларынан бири 1 ге барабар. Анын экинчи тамырын тап.

379. (Оозеки.) $28x^2 + 23x - 5 = 0$ теңдеменин тамырларынан бири 1 ге барабар. Анын экинчи тамырын тап.

380. (Оозеки.) Теңдемени чыгарбастан, анын тамырлары белгилерин аныкта:

1) $x^2 + 4x - 5 = 0;$ 2) $x^2 + 5x + 3 = 0;$

3) $x^2 - 5x + 3 = 0;$ 4) $x^2 - 8x - 7 = 0.$

381. Тамырлары x_1 жана x_2 болгон келтирилген квадраттык теңдемени жаз:

1) $x_1 = 3,\ x_2 = -1;$ 2) $x_1 = 2,\ x_2 = 3;$

3) $x_1 = -4,\ x_2 = -5;$ 4) $x_1 = -3,\ x_2 = 6.$

382. Тандоо жолу менен теңдеменин тамырларын тап:

1) $x^2 + 5x + 6 = 0;$ 2) $x^2 - 7x + 12 = 0;$

3) $x^2 - 6x + 5 = 0;$ 4) $x^2 + 8x + 7 = 0;$

5) $x^2 - 8x + 15 = 0;$ 6) $x^2 + 2x - 15 = 0.$

383. Квадрат үч мүчөнү көбөйтүүчүлөргө ажырат:

1) $x^2 - 5x + 6;$ 2) $x^2 + 4x - 5;$

3) $x^2 + 5x - 24;$ 4) $x^2 + x - 42;$

5) $2x^2 - x - 1;$ 6) $8x^2 + 10x + 3;$

7) $-6x^2 + 7x - 2;$ 8) $-4x^2 - 7x + 2.$

384. Бөлчөктү кыскарт:

1) $\frac{x^2+x-2}{x-1}$; 2) $\frac{x^2+4x-12}{x-2}$; 3) $\frac{x+3}{x^2-6x-27}$;

4) $\frac{x-8}{x^2-x-56}$; 5) $\frac{2x^2-3x-2}{4x^2-1}$; 6) $\frac{3x^2+8x-3}{9x^2-1}$.

385. Келтирилген квадраттык теңдемени чыгар:

1) $x^2-2\sqrt{3}x-1=0$; 2) $x^2-2\sqrt{5}x+1=0$;

3) $x^2+\sqrt{2}x-4=0$; 4) $x^2-4\sqrt{7}x+4=0$.

386. Көбөйтүүчүлөргө ажырат:

1) x^3-3x^2+2x; 2) x^3+4x^2-21x; 3) x^3+5x^2-24x;

4) x^3-9x^2-22x; 5) x^3-8x^2+7x; 6) x^3-5x^2+6x.

387. Бөлчөктү кыскарт:

1) $\frac{x^2+6x-7}{x^2-7x+6}$; 2) $\frac{x^2-8x-9}{x^2+9x+8}$; 3) $\frac{x^2-8x+15}{-x^2+5x-6}$; 4) $\frac{36+5x-x^2}{x^2-x-20}$.

388. Туюнтманы жөнөкөйлөштүр:

1) $\frac{1}{x^2-7x+12}+\frac{1}{x-3}$; 2) $\frac{3}{x^2+6x+9}-\frac{1}{x+3}$;

3) $\frac{7}{5x^2+3x-2}-\frac{5}{5x-2}$; 4) $\frac{5x+1}{x^2+9x-10}:\frac{5x^2+x}{x^2-2x+1}$.

26- §. БИКВАДРАТТЫК ТЕҢДЕМЕ. КВАДРАТТЫК ТЕҢДЕМЕГЕ КЕЛТИРИЛИП ЖАТКАН ТЕҢДЕМЕЛЕР

1-маселе. Теңдемени чыгар:

$$x^4-7x^2+12=0.$$

△ $x^2=t$ деп *белгилейбиз*. Анда теңдеме төмөнкү көрүнүш алат:

$$t^2-7t+12=0.$$

Бул квадраттык теңдемени чыгарабыз:

$$t_1 = 4,\ t_2 = 3.$$

$x^2 = t$ болгондуктан, берилген теңдемени чыгаруу төмөнкү эки теңдемени чыгарууга келтирилет:

$$x^2 = 4,\ x^2 = 3,$$

мындан:

$$x_{1,2} = \pm 2,\ x_{3,4} = \pm\sqrt{3}.$$

Жообу: $x_{1,2} = \pm 2,\ x_{3,4} = \pm\sqrt{3}$. ▲

Төмөнкү

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

көрүнүштөгү теңдемеге биквадраттык теңдеме дейилет, мында $a \neq 0$.

$x^2 = t$ *белгилөө* менен бул теңдеме квадраттык теңдемеге келтирилет.

2-маселе. Биквадраттык теңдемени чыгар:

$$9x^4 + 5x^2 - 4 = 0.$$

△ $x^2 = t$ деп белгилейбиз. Анда

$$9t^2 + 5t - 4 = 0.$$

Бул квадраттык теңдемени чыгарып, табабыз:

$$t_1 = \frac{4}{9},\ t_2 = -1.$$

$x^2 = \frac{4}{9}$ теңдеме $x_{1,2} = \pm\frac{2}{3}$ тамырларга ээ, $x^2 = -1$ теңдеме болсо чыныгы тамырларга ээ эмес.

Жообу: $x_{1,2} = \pm\frac{2}{3}$. ▲

3-маселе. Теңдемени чыгар:

$$\frac{3}{x+2} - \frac{4}{x-3} = 3.$$

△ Теңдемедеги бөлчөктөрдүн жалпы бөлүмү $(x+2)(x-3)$ кө барабар. Эгерде $x+2\neq 0$ va $x-3\neq 0$ болсо, анда теңдеменин эки бөлүгүн $(x+2)(x-3)$ кө көбөйтүп, алабыз:

$$3(x-3)-4(x+2)=3(x+2)(x-3).$$

Бул теңдеменин формасын алмаштырабыз:

$$3x-9-4x-8=3(x^2-x-6),$$
$$-x-17=3x^2-3x-18,$$
$$3x^2-2x-1=0.$$

Алынган квадраттык теңдемени чыгарып, анын тамырларын табабыз:

$$x_1=1;\ x_2=-\frac{1}{3}.$$

$x=1$ жана $x=-\frac{1}{3}$ болгондо берилген бөлчөктөрдүн бөлүмдөрү нөлгө айланбагандыктан 1 жана $-\frac{1}{3}$ сандары ошол теңдеменин тамырлары болот.

Жообу: $x_1=1;\ x_2=-\frac{1}{3}.$ ▲

4-маселе. Теңдемени чыгар:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)}+\frac{3}{x-1}=\frac{3-x}{x-2},\ x\neq 1,\ x\neq 2. \qquad (1)$$

△ Шарт боюнча $(x-1)(x-2)\neq 0$. Теңдеменин эки бөлүгүн $(x-1)(x-2)$ ге көбөйтүп, төмөнкүнү алабыз:

$$1+3(x-2)=(3-x)(x-1).$$

Бул теңдеменин формасын алмаштырабыз:

$$\begin{aligned}1+3x-6&=-x^2+4x-3,\\ x^2-x-2&=0.\end{aligned} \qquad (2)$$

Алынган квадраттык теңдемени чыгарып, анын тамырларын табабыз:

$$x_1 = -1,\ x_2 = 2.$$

$x = -1$ болгондо берилген теңдемедеги бөлүмдөр нөлгө айланбайт. Демек, –1 саны – берилген теңдеменин тамыры. $x = 2$ болгондо берилген теңдемедеги эки бөлчөктүн бөлүмү нөлгө барабар. Ошондуктан 2 саны берилген теңдеменин тамыры болбойт.

Жообу: $x = -1$. ▲

4-маселеде берилген (1) теңдеме эки тамырга ээ болгон (2) квадраттык теңдемеге келтирилди. Алардан бири, б. а. $x_1 = -1$ (1) теңдеменин тамыры болот. Экинчи $x_2 = 2$ тамыр (1) теңдеменин тамыры болбойт. Анда ага *четки тамыр* дейилет.

Ошентип, теңдемени белгисиз катышкан туюнтмага көбөйтүргөндө четки тамырлар пайда болушу мүмкүн. Ошондуктан *белгисиз бөлчөктүн бөлүмүндө катышкан теңдемелерди чыгарганда текшерүү өткөрүү зарыл.*

5-маселе. Теңдемени чыгар:

$$\frac{x+7}{x+4} - \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x^2+7x+12} = 0.$$

Бул сыяктуу теңдемелер *бөлчөк-рационалдуу теңдемелерге* мисал болот.

△ $x^2 + 7x + 12$ квадраттык үч мүчөнү көбөйтүүчүлөргө ажыратабыз. $x^2 + 7x + 12 = 0$ теңдемени чыгарып, анын $x_1 = -3$, $x_2 = -4$ тамырларын табабыз. Ошондуктан

$$x^2 + 7x + 12 = (x+3)(x+4).$$

Теңдеменин эки бөлүгүн бөлчөктөрдүн жалпы бөлүмүнө, б. а. $(x+3)(x+4)$ кө көбөйтөбүз. Натыйжада төмөнкүгө ээ болобуз.

$$(x+7)(x+3) - (x+4) + 1 = 0.$$

Теңдеменин формасын алмаштырабыз:

$$x^2 + 10x + 21 - x - 4 + 1 = 0,$$

$$x^2 + 9x + 18 = 0.$$

Бул теңдемени чыгарып, анын тамырларын табабыз:

$$x_1 = -3,\quad x_2 = -6.$$

Эми тамырларды текшеребиз. $x = -3$ болгондо берилген теңдеме экинчи жана үчүнчү бөлчөктөрүнүн бөлүмдөрү нөлгө айланат. Ошондуктан

$x_1=-3$ – четки тамыр. $x=-6$ болгондо берилген теңдеме бөлчөктөрүнүн бөлүмдөрү нөлгө барабар эмес. $x=-6$ ны берилген теңдемеге коюп, бул сан теңдеменин тамыры болушуна ишеним пайда кылууга болот.

Жообу: $x=-6$. ▲

Көнүгүүлөр

Теңдемени чыгар (**389–392**):

389. 1) $x^4-10x^2+9=0$; 2) $x^4-5x^2+4=0$;

3) $x^4-13x^2+36=0$; 4) $x^4-50x^2+49=0$.

390. 1) $x^4-3x^2-4=0$; 2) $x^4+3x^2-4=0$;

3) $x^4+x^2-20=0$; 4) $x^4-4x^2-5=0$.

391. 1) $\frac{10}{x-3}-\frac{8}{x}=1$; 2) $\frac{2}{x-5}+\frac{14}{x}=3$;

3) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+3}=\frac{3}{20}$; 4) $\frac{40}{x-20}-\frac{40}{x}=1$;

5) $\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x+3}=\frac{5}{8}$; 6) $\frac{4}{x-2}+\frac{4}{x+2}=1{,}5$.

392. 1) $\frac{3x+4}{x-6}=\frac{x-2}{4x+3}$; 2) $\frac{x+2}{x-2}+\frac{x-2}{x+2}=\frac{13}{6}$;

3) $\frac{x+5}{x+2}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}$; 4) $\frac{x^2-2x-5}{(x-3)(x-1)}+\frac{1}{x-3}=1$;

5) $\frac{x^2}{x+3}-\frac{x}{-3-x}=\frac{6}{x+3}$; 6) $\frac{x^2}{x-1}-\frac{2x}{1-x}=\frac{3}{x-1}$.

393. Теңдеме чыныгы тамырларга ээби:

1) $x^4-5x^2+7=0$; 2) $x^4+3x^2+2=0$?

394. x тин кандай маанилеринде туюнтмалардын маанилери бири-бирине барабар:

1) $\frac{6}{x^2-1}+\frac{2}{1-x}$ va $2-\frac{x+4}{x+1}$; 2) $\frac{6}{x+2}-\frac{3}{x-2}$ va $\frac{14}{4-x^2}+1$?

Тиешелүү *белгилөөнү киргизип*, теңдемени чыгар (**395–399**):

395. 1) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$; 2) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$;

3) $9x^4 + 23x^2 - 12 = 0$; 4) $16x^4 - 409x^2 + 225 = 0$;

5) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$; 6) $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$;

7) $4x^4 - 9x^2 + 2 = 0$; 8) $6x^4 - 5x^2 + 1 = 0$.

396. 1) $(x+3)^4 - 13(x+3)^2 + 36 = 0$; *Белгилөө:* $(x+3)^2 = t$

2) $(2x-1)^4 - 13(2x-1)^2 - 12 = 0$; $(2x-1)^2 = t$

3) $(x-1)^4 - x^2 + 2x - 73 = 0$; $(x-1)^2 = t$

4) $(x+2)^4 - 2x^2 - 8x - 16 = 0$; $(x+2)^2 = t$

5) $(x^2 + 6x)^2 + 8(x^2 + 6x) - 9 = 0$; $(x^2 + 6x) = t$

6) $(x^2 - 16x)^2 - 2(x^2 - 16x) - 63 = 0$. $(x^2 - 16x) = t$

397. 1) $(x+1)^2 \cdot (x^2 + 2x) = 12$;

2) $(x-2)^2 \cdot (x^2 - 4x) + 3 = 0$;

3) $(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 3x + 3) + 1 = 0$;

4) $(x^2 - 5x + 2)(x^2 - 5x - 1) = 28$;

5) $x(x+1)(x+2)(x+3) = 0,5625$;

6) $(x-2)(x-3)(x+2)(x-7) + 36 = 0$.

398. 1) $\dfrac{x+4}{x-4} + \dfrac{x-4}{x+4} = 3\dfrac{1}{3}$; 2) $\dfrac{x^2 - 2x}{4x-3} + 5 = \dfrac{16x - 12}{2x - x^2}$;

3) $\dfrac{x^2 + 4x}{7x-2} - \dfrac{12 - 42x}{x^2 + 4x} = 7$; 4) $\left(\dfrac{4x-5}{3x+2}\right)^2 + \left(\dfrac{3x+2}{5-4x}\right)^2 = 4,25$;

5) $\left(\dfrac{5x+1}{2x-3}\right)^2 + \left(\dfrac{3-2x}{5x+1}\right)^2 = \dfrac{82}{9}$; 6) $\left(\dfrac{5x-2}{2x+1}\right)^2 + \left(\dfrac{2x+3}{2-5x}\right)^2 = 3\dfrac{31}{225}$;

7) $\dfrac{x^2+1}{x} + \dfrac{x}{x^2+1} = -2,5$.

399. 1) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\left(x+\frac{1}{x}\right)-3=0$; *Белгилөө:* $(x+\frac{1}{x})=t$.

2) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3\left(x+\frac{1}{x}\right)-4=0$;

3) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-5\left(x+\frac{1}{x}\right)-6=0$;

4) $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+5=0$;

5) $(x^2+3x+2)(x^2+3x-4)=-5$;

6) $(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)=120$.

400. Төмөнкү теңдемелердин ар бири үчүн: 1) бардык тамырларынын суммасын; 2) бардык тамырларынын көбөйтүндүсүн; 3) терс тамырларынын суммасын; 4) оң тамырларынын көбөйтүндүсүн; 5) эң чоң жана эң кичине тамырларынын айырмасын; 6) эң чоң оң тамырынын эң кичине оң тамырына катышын тап:

1) $x^4-26x^2+25=0$; 2) $x^4-13x^2+36=0$;

3) $x^4-10x^2+9=0$; 4) $x^4-5x^2+6=0$;

5) $x^4-19x^2+90=0$; 6) $x^4-11x^2+28=0$.

401. Теңдемени чыгар:

1) $\left(x^2-8\right)^2+4\left(x^2-8\right)=5$;

2) $x^4-2x^3-13x^2+14x+24=0$;

3) $\left(x+5\right)^4-13\left(x+5\right)^2\cdot x^2+36x^4=0$;

4) $5x^4+20x^3-40x+17=0$;

5) $x^2+\left(\frac{x}{x-1}\right)x^2=8$.

27-§. КВАДРАТТЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН ЖАРДАМЫНДА МАСЕЛЕЛЕР ЧЫГАРУУ

Квадраттык теңдемелердин жардамында бир нече маселе чыгарабыз.

1-маселе. Шахтага таш ташталды жана анын шахтанүн түбүнө урунганда чыгарган үнү 9 секунддан кийин угулду. Үндүн ылдамдыгын 320 м/с, оордук күчүнүн ылдамдануусун болсо $g=10$ м/с^2 деп эсептеп, шахтанын тереңдигин аныкта.

△ Шахтанын тереңдигин табуу үчүн таштын шахтанын түбүнө түшүү убакыты m ди аныктоо жетиштүү, анткени шахтанын тереңдиги эркин түшүү мыйзамы боюнча $\frac{gt^2}{2}$ метрге барабар.

Шарт боюнча $g=10$ м/с^2. Ошондуктан шахтанын тереңдиги $5t^2$ метрге барабар.

Экинчи жактан, шахтанын тереңдигин үндүн ылдамдыгы 320 м/с ду таштын шахта түбүнө барып тийген заматтан соккунун үнү угулганга чейин өткөн убакытка, б. а. $(9-t)$ секундга көбөйтүп табууга болот. Демек, шахтанын тереңдиги $320\ (9-t)$ метрге барабар.

Шахтанын тереңдигин аныктоо үчүн табылган эки туюнтманы теңдештирип, $5t^2=320(9—t)$ теңдемени алабыз. Аны чыгарабыз:

$$t^2-64(9-t)=0,$$

$$t^2+64t-64\cdot 9=0.$$

Алынган квадраттык теңдеменин тамырларын табабыз:

$$t_{1,2}=-32\pm\sqrt{32^2+64\cdot 9}=-32\pm\sqrt{32(32+18)}=$$

$$=-32\pm\sqrt{32\cdot 50}=-32\pm\sqrt{16\cdot 100}=-32\pm 40,$$

$$t_1=8,\ t_2=-72.$$

Үндүн түшүү убакыты оң болгондуктан, $t=8$ с болот,

Демек, шахтанын тереңдиги төмөнкүгө барабар:

$$5t^2=5\cdot 8^2=320 \text{ м}.$$

Жообу: 320 м. ▲

2-маселе. Экспресс автобус автовокзалдан 40 км алыстыктагы аэропортко карай жөнөдү. Арадан 10 минут өткөндөн кийин автобустун артынан таксиде жүргүнчү жөнөдү. Таксинин ылдамдыгы автобустун ылдамдыгынан 20 км/саатка чоң. Эгерде алар аэропортко бир убакытка жетип келген болсо, такси менен автобустун ылдамдыгын тап.

△ Автобустун ылдамдыгы x км/саат болсун, анда таксинин ылдамдыгы $(x+20)$ км/саат болот. Автобустун кыймыл убакыты $\frac{40}{x}$, таксинин кыймыл убакыты $\frac{40}{x+20}$ саат болот. Шарт боюнча, автобус менен таксинин кыймыл убакыттары ортосундагы айырма 10 мин га барабар, б. а. $\frac{1}{6}$ саат. Демек,

$$\frac{40}{x}-\frac{40}{x+20}=\frac{1}{6}. \qquad (1)$$

Алынган теңдемени чыгарабыз. Теңдеменин эки бөлүгүн $6x(x+20)$ га көбөйтүп, төмөнкүнү алабыз:

$$40\cdot6\cdot(x+20)-40\cdot6x=x(x+20),$$

$$240x+4800-240x=x^2+20x,$$

$$x^2+20x-4800=0.$$

Бул теңдеменин тамырлары:

$$x_1=60,\ x_2=-80.$$

x тин бул маанилеринде (1) теңдемеге кирген бөлчөктөрдүн бөлүмдөрү нөлгө барабар эмес. Ошондуктан $x_1=60$ жана $x_2=-80$ (1) теңдеменин тамырлары болот.

Автобустун ылдамдыгы оң болгондуктан, маселенин шартын бир гана тамыр канааттандырат: $x=60$. Таксинин ылдамдыгы 80 км/саат ка барабар.

Жообу: автобустун ылдамдыгы 60 км/саат, таксиники 80 км/саат. ▲

3-маселе. Кол жазманы көчүрүү үчүн биринчи оператор экинчисине караганда 3 саат аз убакыт сарптайт. Алар чогуу иштеп бардык кол жазманы 6 саат 40 минутта көчүрүп болушту. Бардык кол жазманы көчүрүү үчүн алардын ар бирине канчадан убакыт талап кылынат?

△ Бардык кол жазманы көчүрүү ишин бир бирдик, деп кабыл алабыз. Биринчи оператор кол жазманы көчүрүү үчүн x саат сарптаган болсун.

Анда экинчи операторго бул иш үчүн $(x+3)$ саат талап кылынат. Биринчи оператор бир саатта иштин $\frac{1}{x}$ бөлүгүн, экинчиси болсо $\frac{1}{x+3}$ бөлүгүн аткарат. Алар чогуу иштеп, бир саатта бардык иштин $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+3}$ бөлүгүн аткарышат, 6 саат 40 минутта, б. а. $6\frac{2}{3}$ саатта болсо алар бардык ишти аткарышат. Ошондуктан

$$6\frac{2}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+3}\right)=1.$$

Бул теңдемени төмөнкүдөй жазууга болот:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+3}=\frac{3}{20}. \qquad (2)$$

Анын эки бөлүгүн $20x(x+30)$ га көбөйтүп, төмөнкүнү алабыз:

$$20(x+3)+20x=3x(x+3),$$
$$40x+60=3x^2+9x,$$
$$3x^2-31x-60=0.$$

Бул теңдеменин тамырлары:

$$x_1=12,\ x_2=-\frac{5}{3}.$$

x тин бул маанилеринде (2) теңдемеге кирген бөлчөктөрдүн бөлүмдөрү нөлгө барабар эмес. Ошондуктан $x_1=12$ жана $x_2=-\frac{5}{3}$ (2) теңдеменин тамырлары.

Маселенин мазмуну боюнча $x>0$ болгондуктан $x=12$. Демек, биринчи оператор ишке 12 саат, экинчиси болсо 12 саат + 3 саат = 15 саат сарптайт.

Жообу: 12 саат жана 15 саат. ▲

Көнүгүүлөр

402. Көбөйтүндүсү: 1) 156; 2) 210; 3) 342; 4) 600 гө барабар болгон эки удаалаш келген натуралдык санды тап.

403. Көбөйтүндүсү: 1) 255; 2) 399 га барабар болгон эки удаалаш келген так санды тап.

404. Тик бурчтуктун периметри 1 м, аянты болсо 4 дм^2. Анын жактарынын узундугун тап.

405. Аянты 2,45 ке болгон бак 630 м узундуктагы дубал менен курчалган. Эгерде бак тик бурчтук формасында болсо, анын узунун жана туурасын тап.

406. 400 км аралыкты экспресс поезди жүк поездине караганда 1 саатка тезирээк жүрдү. Эгерде жүк поездинин ылдамдыгы экспресс поезддиникинен 20 км/саат газ болсо, ар бир поезддин ылдамдыгы кандай?

407. Кеме дарыянын агымы менен *A* бекеттен *B* бекетке барды. Кеме жарым саат токтогондон кийин артына жөнөдү жана *A* дан чыккандан 8 сааттан кийин кайра *A* бекетке келди. *A* жана *B* бекеттердин ортосундагы аралык 36 км, дарыя агымынын ылдамдыгы болсо 2 км/саат болсо, кеменин туруктуу суудагы ылдамдыгын тап.

408. Эки топ адистер чогуу иштеп айылда жаңы курулган оорукананы заманбап медициналык шаймандар менен жабдуу жана аларды жөнгө салуу иштерин 12 күндө аякташты. Эгерде топтордон бири бул ишти экинчисине караганда 10 күн аз убакытта аткарса, анда ар бир топ өз алдынча иштеп, аны канча күндө аткарат?

409. Квадрат формасындагы тунукеден 6 см кеңдиктеги тунуке кыркып алынды. Калган бөлүгүнүн аянты 135 см^2 ге барабар. Квадраттын баштапкы өлчөмдөрүн тап.

410. Тик бурчтуу үч бурчтуктун аянты 180 см^2. Эгерде катеттеринен бири экинчисинен 31 см ге чоң болсо, ошол үч бурчтуктун катеттерин тап.

411. 30 км лүү аралыкты велосипедчилерден бири экинчисине караганда 20 мин тезирээк басып өттү. Биринчи велосипедчинин ылдамдыгы экинчисиникинен 3 км/саат ка чоң эле. Ар биринин ылдамдыгы канча?

412. Эки курулуш тобу чогуу иштеп, койлор үчүн 6 күндө кашар курду. Эгерде бул ишти аткаруу үчүн биринчи топко экинчисине караганда 5 күнгө көп талап кылынса, ар бир топ өз алдынча иштеп, ошондой кашарды канча күндө куруп бүтүрөт?

№ 5

$x^4 + 2006x^2 + 2005x + 2006$

көп мүчөнү көбөйтүүчүлөргө ажырат.

III глава боюнча көнүгүүлөр

Теңдемени чыгар **(413–415):**

413. 1) $x^2 - 12 = 0$; 2) $x^2 - 50 = 0$; 3) $\frac{1}{3}x^2 + 2x = 0$;

4) $3x - \frac{2}{5}x^2 = 0$; 5) $x^2 - 48 = 0$; 6) $2x - \frac{1}{2}x^2 = 0$.

414. 1) $x^2 + 4x - 45 = 0$; 2) $x^2 - 9x - 52 = 0$;

3) $3x^2 - 7x - 40 = 0$; 4) $5x^2 + 17x - 126 = 0$.

415. 1) $4x^2 - 2x - 3 = 0$; 2) $9x^2 - 3x - 4 = 0$;

3) $4x^2 - 8x - 1 = 0$; 4) $3x^2 + 4x - 1 = 0$.

416. Теңдемени чыгарбастан, ал канча чыныгы тамырга ээ экендигин аныкта:

1) $x^2 - 5x + 6 = 0$; 2) $5x^2 + 7x - 8 = 0$;

3) $25x^2 - 10x + 1 = 0$; 4) $9x^2 + 30x + 25 = 0$.

417. Квадрат үч мүчөнү көбөйтүүчүлөргө ажырат:

1) $x^2 + 12x + 30$; 2) $x^2 - 10x + 16$; 3) $2x^2 + x - 1$;

4) $2x^2 - 3x - 2$; 5) $x^2 + 8x + 7$; 6) $2x^2 - 3x + 1$.

418. Бөлчөктү кыскарт:

1) $\frac{x^2-9}{x+3}$; 2) $\frac{x^3+4x^2+4x}{x+2}$; 3) $\frac{16x^2-24x+9}{4x^2+5x-6}$;

4) $\frac{25x^2+10x+1}{5x^2-14x-3}$; 5) $\frac{x^2-25}{x-5}$; 6) $\frac{x^2+5x+6}{x+3}$.

Теңдемени чыгар (**419–420**):

419. 1) $x^4 - 9x^2 + 20 = 0;$ 2) $x^4 - 11x^2 + 18 = 0;$

3) $2x^4 - 5x^2 + 2 = 0;$ 4) $5x^4 - 16x^2 + 3 = 0$.

420. 1) $\frac{x}{x-2} + \frac{3}{x} = \frac{3}{x-2};$ 2) $\frac{x^2}{x^2+3x} + \frac{2+x}{x+3} = \frac{5-x}{x};$

3) $\frac{y+3}{y^2-y} + \frac{6-y}{1-y^2} = \frac{y+5}{y+y};$ 4) $\frac{y+4}{y-4} + \frac{y}{4-y} = -\frac{4}{y+2}.$

421. Mi-6 вертолётунун абага салыштырмалуу ылдамдыгы 300 км/саат. Ал 224 км аралыкты эки жолу учуп өттү: биринчи жолу шамалдын багыты боюнча, экинчи жолу шамалдын багытына каршы. Эгерде вертолёт шамалга каршы учканда шамалдын багыты боюнча учкандагыга караганда 6 мин көп убакыт сарптаган болсо, шамалдын ылдамдыгын аныкта.

422. Велосипедчинин жолдун биринчи жарымындагы ылдамдыгы анын экинчи жарымындагы ылдамдыгынан 3 км/саат чоң болду. Эгерде велосипедчи 90 км лүү бардык жолду 5,5 саатта өткөн болсо, ал жолдун экинчи жарымын кандай ылдамдык менен өткөн?

423. Дарак тигүүдө эки топ иштеди. Биринчи топ күнүгө экинчисине караганда 400 түпкө көп дарак тигип, бардыгы болуп 2700 түп дарак тикти. Экинчи топ 2 күнгө көп иштеди жана 2500 түп дарак тикти. Ар бир топ дарак тигүүдө канча күндөн иштеген?

ӨЗҮҢДҮ ТЕКШЕРИП КӨР!

1. Теңдемени чыгар:

1) $3x^2 = 0;$ 2) $(x+1)(x-2) = 0;$

3) $4x^2 - 1 = 0;$ 4) $3x^2 = 5x;$

5) $4x^2 - 4x + 1 = 0;$ 6) $x^2 - 16x - 17 = 0;$

7) $3x^2 + 5x = 2;$ 8) $x^2 - 4x + 5 = 0.$

2. Көбөйтүүчүлөргө ажырат:

1) x^2+x-6; 2) $2x^2-x-3$; 3) x^2-6x+9.

3. Маселени чыгар.

Айылдардын ортосундагы 36 км аралыкты бир велосипедчи экинчисинен 1 саат тезирээк басып өтөт. Эгерде велосипедчилерден биринин ылдамдыгы экинчисиникинен 3 км/саат ка чоң экендиги белгилүү болсо, ар бир велосипедчинин ылдамдыгын тап.

Теңдемени чыгар (**424–426**):

424. 1) $3x(x-2)=x-4$; 2) $\frac{x^2-2}{6}-\frac{1-x}{2}=\frac{x-5}{6}$.

425. 1) $2x(x-2)=(x+1)^2-9$; 2) $5x(x-4)=(x-8)^2-65$;

3) $\frac{(x+2)^2}{3}-\frac{(x+1)^2}{2}=1$; 4) $\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{(x-2)^2}{5}=4$.

426. 1) $(x-5)(x-6)=30$; 2) $(x+2)(x+3)=6$;

3) $(x-1)(x-4)=3x$; 4) $(x-2)(x+8)=6x$.

427. x тин кандай маанилеринде $x^2+3x-88$ туюнтманын мааниси: 1) 0 гө; 2) 20 га; 3) –18 ге; 4) –70 ке барабар болот?

428. Эгерде:

1) $a=3, b=1, c=-4$; 2) $a=5, b=2, c=3$;

3) $a=25, b=-10, c=1$; 4) $a=1, b=0, c=-25$

болсо, $ax^2+bx+c=0$ квадраттык теңдеме канча чыныгы тамырга ээ болот?

429. Теңдемени чыгар:

1) $\frac{12x+4}{x^2+2x-3}=\frac{3x-2}{x-1}-\frac{2x+3}{x+3}$;

2) $\frac{5}{x^2-4}-\frac{8}{x^2-1}=\frac{2}{x^2-3x+2}-\frac{20}{x^2+3x+2}$.

3) $\frac{x+34}{x^2-8x+7}=\frac{2x-3}{x-7}-\frac{x+5}{x-1}$.

430. Фирма белгилүү мөөнөттө 5 400 жуп бут кийим даярдоого тийиш. Ал ар күнү көздөлгөндөн 30 жупка көп продукция даярдады жана буюртманы мөөнөтүнөн 9 күн мурда аткарды. Буюртма канча күндө аткарылган?

431. Эки саякатчы велосипедде *A* айылдан *B* айылга карай түрдүү жолдон жөнөдү. Биринчиси 30 км, экинчиси болсо 20 км жүрүүгө тийиш эле. Биринчи саякатчынын ылдамдыгы экинчисиникинен 3 км/саат ка чоң. Бирок экинчи саякатчы *B* га биринчиге караганда 20 мин мурда жетип келди. Ар бир саякатчы жолдо канча убакыт болгон?

432. Жумушчулардын эки тобу жолду ремонттоону 4 саатта бүтүрдү. Эгерде баштап биринчи топ жолдун жарымын, андан кийин болсо экинчиси калган бөлүгүн ремонттогондо, бардык ремонттоо иштери 9 саатта бүтмөк. Жолду ар бир топ өз алдынча канча убакытта ремонттойт?

III глава боюнча сыноо көнүгүүлөрү – тесттер

1. Теңдемени чыгар: $x^2=64$.

A) $x_{1,2}=\pm 8$; C) $x=-8$;
B) $x=8$; D) $x=32$.

2. Теңдемени чыгар: $x^2-11=0$.

A) $x=\sqrt{11}$; C) $x=-\sqrt{11}$;
B) $x_{1,2}=\pm\sqrt{11}$; D) $x=\frac{11}{2}$.

3. Теңдемени чыгар: $3x^2=48$.

A) $x=4$; C) $x_{1,2}=\pm 4$;
B) $x=-4$; D) $x=8$.

4. Теңдемени чыгар: $x^2=5x$.

A) $\varnothing$; C) $x=0$;
B) $x=2{,}5$; D) $x_1=0,\ x_2=5$.

5. Теңдемени чыгар: $x^2+9x=0$.

A) $x_1=0,\ x_2=-9$; C) $x_{1,2}=9$;
B) $x_{1,2}=\pm 3$; D) $x_1=9,\ x_2=0$.

6. Квадраттык теңдемени чыгар: $x^2+x-6=0$.

A) $x_1=-3,\ x_2=2$;
B) $x_1=3,\ x_2=-2$;
C) $x_{1,2}=\pm 6$;
D) $x_1=-2;\ x_2=-3$.

7. Квадраттык теңдемени чыгар: $x^2+7x+6=0$.

A) $x_1=1, x_2=-1$;
B) $x_1=-6, x_2=-1$;
C) $x_1=-7, x_2=-6$;
D) $x_1=-1, x_2=-5$.

8. Квадраттык теңдемени чыгар: $x^2+x+1=0$.

A) $x_1=0, x_2=1$;
B) $x_{1,2}=\dfrac{\sqrt{-3}}{2}$;
C) $\varnothing$;
D) $x_{1,2}=\pm\sqrt{-3}$.

9. Квадраттык теңдемени чыгар: $x^2-7x+10=0$.

A) $x_1=-2, x_2=2$;
B) $x_1=-5, x_2=2$;
C) $x_1=5, x_2=1$;
D) $x_1=2, x_2=5$.

10. Квадраттык теңдемени чыгар: $6x^2-5x+1=0$.

A) $x_1=\dfrac{1}{3}, x_2=\dfrac{1}{2}$;
B) $x=\dfrac{1}{6}$;
C) $x_1=-\dfrac{1}{2}, x_2=-\dfrac{1}{3}$;
D) $x=-\dfrac{1}{3}$.

11. Квадраттык теңдемени чыгар: $12x^2+7x+1=0$.

A) $x_1=\dfrac{1}{3}, x_2=\dfrac{1}{4}$;
B) $x_1=-\dfrac{1}{3}, x_2=-\dfrac{1}{4}$;
C) $x_1=\dfrac{1}{3}, x_2=-\dfrac{1}{4}$;
D) $x=\dfrac{1}{7}$.

12. Теңдемени чыгар: $x^4-5x^2+4=0$.

A) $x_{1,2}=\pm 4, x_{3,4}=1$;
B) $x_{1,2}=\pm 1, x_{3,4}=\pm 2$;
C) $x_1=1,\ x_2=4$;
D) $x_{1,2}=\pm 1$.

13. Теңдемени чыгар: $x^4 - 4x^2 - 5 = 0$.

A) $x_{1,2} = -\sqrt{5}, x_{3,4} = 1$; B) $x_{1,2} = 5$; C) $x_{1,2} = \pm\sqrt{5}$; D) $\varnothing$.

14. 60 км аралыкты велосипедчи экинчисине караганда 1 саатка тезирээк өттү. Эгерде биринчи велосипедчинин ылдамдыгы экинчисинин ылдамдыгынан 5 км/саат ка аз болсо, ар биринин ылдамдыгын тап.
A) 20 км/саат, 25 км/саат; B) 10 км/саат, 15 км/саат;
C) 15 км/саат, 20 км/саат; D) 12 км/саат, 17 км/саат.

Тарыхый маселелер

Ал-Харезмийнин „Ал-жабр вал-мукабала“ чыгармасынан алынган теңдемелерди чыгар **(1—31)**:

1. $x^2+10x=39$.
2. $x^2+5x=24$.
3. $x^2+10x=56$.
4. $x^2+(10-x)^2=58$.
5. $\left(\frac{x}{3}+1\right)\left(\frac{x}{4}+1\right)=20$.
6. $4x(10-x)=x^2$.
7. $\frac{25}{9}x^2=100$.
8. $x^2+21=10x$.
9. $3x+4=x^2$.
10. $\frac{x}{3}\cdot\frac{x}{4}=x+24$.
11. $\frac{10-x}{x}+\frac{x}{10-x}=2\frac{1}{6}$.
12. $100+x^2-20x=81x$.
13. $30x=100+x^2$.
14. $4x\cdot 5x=2x^2+36$.
15. $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{1}{6}$.
16. $\sqrt{x^2-x}+x=2$.
17. $13^2-x^2=15^2-(14-x)^2$.
18. $(10-x)^2-x^2=40$.
19. $(10-x)^2+x^2+(10-x)-x=54$.
20. $\frac{1}{2}\cdot\frac{5x}{10-x}+5x=50$.
21. $x^2+20=12x$.
22. $\left(\frac{x}{3}+1\right)\left(\frac{x}{4}+2\right)=x+13$.
23. $x^2+x=\frac{3}{4}$.

24. $\left(x-\frac{x}{3}-\frac{x}{4}-4\right)^2=x+12.$

25. $\left(x-\left(\frac{x}{3}+3\right)\right)^2=x.$

26. $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}x^2=\frac{1}{7}x.$

27. $\frac{x^2-4x}{3}=4x.$

28. $(x^2-3x)^2=x^2.$

29. $\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{5}x^2=\frac{4}{5}x.$

30. $10x=(10-x)^2.$

31. $\begin{cases} x+y=10, \\ xy=21. \end{cases}$

Абу Камилдин маселеси. Теңдемени чыгар:

$$\frac{x}{10-x}+\frac{10-x}{x}=\sqrt{5}\,.$$

Евклиддин маселеси. $(1-x):x=x:1$ теңдемени чыгар.

Вавилон жазууларындагы маселе:

Эки квадраттын аянттарынын суммасы $25\frac{5}{12}$ ке барабар. Экинчи квадраттын жагы биринчи квадраттын жагынын $\frac{2}{3}$ бөлүгүнөн 5 бирдикке чоң. Квадраттын жактарын тап.

Умар Хайямдын (1048–1131) *маселеси.*

$\frac{1}{x^2}+2\cdot\frac{1}{x}=1\frac{1}{4}$ теңдемени чыгар.

Квадраттык теңдемени чыгаруунун ал-Харезмий усулу.

Ал-Харезмийнин „Ал-жабр вал-мукабала“ чыгармасынан алынган маселени көрөлү: „Эгерде кандайдыр квадратка анын он тамырына барабар нерсени кошсоң, отуз тогуз алынат“. Бул маселени чыгаруу (азыркы белгилөөлөрдө) $x^2+10x=39$ теңдемени чыгарууга тете. Ал-Харезмий ошол теңдемени чыгаруунун эрежесин төмөнкүдөй түшүндүрөт: „1) тамырлардын санын экиге бөл, бул маселеде беш алынат $(10:2=5)$; 2) аны өзүнө барабар (сан)га көбөйт, жыйырма беш болот $(5\cdot5=25)$; 3) аны отуз тогузга кош, алтымыш төрт төрт болот $(25+39=64)$; 4) андан квадрат тамыр чыгар, сегиз болот $(\sqrt{64}=8)$; 5) андан тамырлар санынын жарымын, б. а. бешти кемит, үч калат ($8 - 5 = 3$). Мына ошол сан сен издеген квадрат тамыр болот".

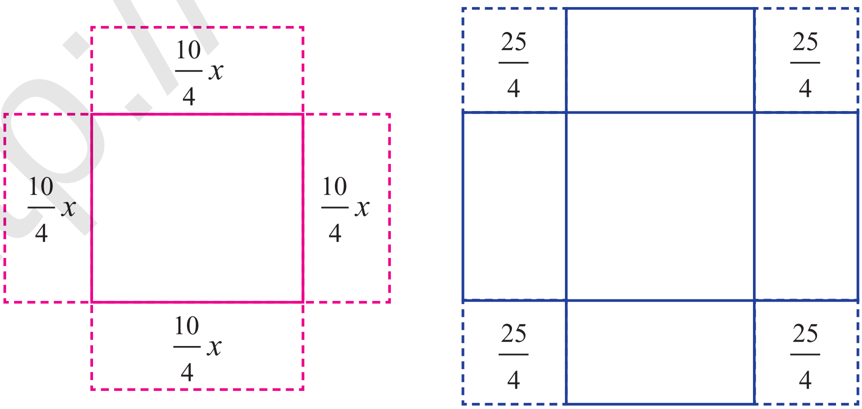
Азыркы жазууда анын бул чыгарылышы кыскача мындай көрүнүштү алат:

$$x = \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 + 39} - \frac{10}{2} = \sqrt{25 + 39} - 5 = \sqrt{64} - 5 = 8 - 5 = 3.$$

Жообу: $x = 3$.

(Ал-Харезмий экинчи тамыр $x = -13$ тү карабайт.)

„Ал-жабр вал-мукабала" чыгармасында куду ошол теңдеменин геометриялык усулдагы чыгарылышы да берилет (38-сүрөт). Бул усул төмөнкүдөй: жагы x (аянты x^2) ке барабар квадрат каралат. Анын жактарында туурасы $\frac{10}{4}$ го барабар 4 тик бурчтук түзүлөт. Алынган фигура $x^2 + 10x$ туюнтмага туура келет. Бул фигура жагы ($x + 5$) ке барабар болгон квадратка чейин „толтурулелат", б. а. фигуранын „чокуларына" жагы $\frac{10}{4}$ го барабар болгон 4 квадрат „кошулат". Алынган фигура $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$ туюнтмага туура келет. Бирок, шарт боюнча, $x^2 + 10x = 39$ болгондуктан алынган чоң квадраттын аянты $39 + 4 \cdot \left(\frac{10}{4}\right)^2 = 64$. Ошентип, $(x + 5)^2 = 64$, мындан $x + 5 = 8$ жана $x = 3$. Демек, ал-Харезмий квадраттык теңдемени чыгарууда толук квадратты ажыратуунун геометриялык усулун берет. $x^2 + px = q$ теңдеме үчүн ал-Харезмийнин бул усулу төмөнкүдөй жазылат:



38- сүрөт.

$$x^2+4\cdot\left(\frac{p}{4}\right)x+4\cdot\left(\frac{p}{4}\right)^2=q+4\cdot\left(\frac{p}{4}\right)^2; \quad \left(x+2\cdot\frac{p}{4}\right)^2=q+4\left(\frac{p}{4}\right)^2,$$

$$x_{1,2}+2\cdot\frac{p}{4}=\pm\sqrt{q+4\cdot\left(\frac{p}{4}\right)^2},$$

мындан, $x_{1,2}=-\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\left(\frac{p}{4}\right)^2+q}.$

Тарыхый маалыматтар

Абу Абдуллах Мухаммад ибн Муса ал-Харезмий (783—850) элибиздин улуу окумуштууларынан бири. Ал өзүнүн „Ал-китаб ал-мухтасар фи хисаб ал-жабр вал-мукабала“ (кыскача: „Ал-жабр вал-мукабала“) чыгармасы менен алгебра илимине негиз салды. Чыгарманын 1342-жылы көчүрүлгөн арабча нускасы Оксфорд университетинин Бодлеян китепканасында сакталат. Ал китепти жазуудан максатын минтип баяндайт: „... Мен арифметиканын жөнөкөй жана татаал маселелерин өзүндө камтыган „Ал-жабр вал-мукабала эсеби жөнүндө кыскача китеп“ жаздым, анткени мурас бөлүштүрүүдө, осуят түзүүдө, мүлк бөлүштүрүүдө, сот иштеринде, соодада жана ар кандай келишимде, жер ченөөдө, өстөн казууда, инженерликте жана б. у. с. түрдүү иштерде адамдар үчүн бул керек“. Алгебрада „үч түрдүү сан менен иштелет“. Алар: тамыр (теңдемедеги белгисиз сан x), квадрат (x^2) жана жөнөкөй сандар (теңдемедеги эркин мүчөлөр).

Ал-Харезмий ошол үч сандардын ортосундагы катыштарды үйрөнөт. Ал теңдемелерди төмөнкү класстарга ажыратат:

1) $ax^2=bx$ — квадраттар тамырларга барабар;
2) $ax^2=c$ — квадраттар санга барабар;
3) $bx=c$ — тамырлар санга барабар;
4) $ax^2+bx=c$ — квадраттар жана тамырлар санга барабар;
5) $ax^2+c=bx$ — квадраттар жана сан тамырларга барабар;
6) $bx+c=ax^2$ — тамырлар жана сан квадраттарга барабар.

Ал-Харезмий „Ал-жабр вал-мукабала“ чыгармасында 4-, 5-, 6- теңдемелерди чыгаруунун геометриялык усулдарын берет. Окумуштуу ал-жабр жана ал-мукабала амалдары (алмаштыруулары) жардамында ар кандай квадраттык теңдеме жогорудагы 6 көрүнүштөн бирине келтирилишин далилдейт.

Практикалык жана предметтер аралык маселелер

433. 1) Кудукка таш ташталды. Таш кудуктун түбүнө урунганда чыккан үн байкоочуга таш ташталгандан 4 секунддан кийин угулду. Үндүн ылдамдыгы секундуна 330 метр, эркин түшкөн телонун *т* секундда өткөн жолун $s=\frac{gt^2}{2}$. $g \approx 10$м/с² деп алып, кудуктун терендигин тап.

2) Секундуна 300 метр ылдамдык менен атылган ок канча секунддан кийин жерден 2500 метр бийиктикте болот? (Абанын каршылыгы эсепке алынбасын.)

△ 1) Таш *т* минутта кудуктун түбүнө түшкөн жана $s=\frac{gt^2}{2}$ аралыкты өткөн. Үн кудуктун түбүнөн $(4-t)$ секундда $330(4-t)$ м аралыкты өтүп чыккан. $\frac{gt^2}{2}=330(4-t)$. Бул теңдемеден $t\approx 3{,}78$ с; $4-t\approx 0{,}22$ с; с $\approx 330\cdot 0{,}22=72{,}6$ (м). **Жообу:** $\approx 72{,}6$ м.

2) *т* секунддан кийин тело жерден 300 *t* м бийиктикте болгон. $300t-\frac{10t^2}{2}=2500$ же $t^2-60t+500=0$, мында $t=10$ же $t=50$.

Жообу: 10 с жана 50 с. ▲

434. Ар биринин сыйымдуулугу 30 л ден болгон эки идиште чогуу 30 л спирт бар эле. 1-идишке толгончо суу куюлуп, бул аралашмадан 2-идишке толгончо куюлду. Андан кийин 2-идиштен 1-идишке 12 л аралашма алып куюлду. Ошондон кийин 2-идиштеги спирт 1-идиштегиге караганда 2 л ге аз болду. Баштап ар бир идиште канчадан спирт болгон?

△ Баштап 1-идиште x л, 2-идиште $(30-x)$ л спирт болгон, дейли. 1-идишке суу куюлгандан кийин, 1 литр аралашмада $\frac{x}{30}$ л спирт болду. Бул аралашмадан 2-идишке x л кошулса (анткени 2-идиште x л „бош жер“ бар), 2-идиштеги аралашманын курамында $\frac{x}{30}\cdot x=\frac{x^2}{30}$ л спирт болот жана 2-идиштеги $(30-x)$ л менен бирге $\left(30-x+\frac{x^2}{30}\right)$ л спирт болот.

2-идиштеги аралашманын курамында $\left(30-x+\frac{x^2}{30}\right):30=1-\frac{x}{30}+\left(\frac{x}{30}\right)^2$ литр спирт болот. 2-идиштен 1-сине 12 л алып куюлса, бул аралашмада $12\cdot\left(1-\frac{x}{30}+\left(\frac{x}{30}\right)^2\right)$ л спирт болуп, 1-идиштеги $\left(x-\frac{x^2}{30}\right)$ л спирт менен бирге $\left(x-\frac{x^2}{30}\right)+12\cdot\left(1-\frac{x}{30}+\left(\frac{x}{30}\right)^2\right)$ л болот. 2-идиштен 12 л аралашманы 1-сине куюлгандан кийин, анда 18 л аралашма калды, бул аралашманын курамында $18\cdot\left(1-\frac{x}{30}+\left(\frac{x}{30}\right)^2\right)$ л спирт бар.

Маселенин шарты боюнча, бул сан 1-идиштеги спирттен 2 л ге аз. Демек, төмөнкү теңдемеге келебиз:

$$18\cdot\left(1-\frac{x}{30}+\left(\frac{x}{30}\right)^2\right)+2=\left(x-\frac{x^2}{30}\right)+12\left(1-\frac{x}{30}+\left(\frac{x}{30}\right)^2\right),$$ мындан

$$6\cdot\left(1-\frac{x}{30}+\left(\frac{x}{30}\right)^2\right)+2=x-\frac{x^2}{30},$$ акырында, $x^2-30x+200=0.$

Жообу: 20 л жана 10 л. ▲

435. Төрт орундуу санды тап, анын миңдиктер разрядындагы жана ондуктар разрядындагы цифралары өз ара барабар болсун, жүздүктөр разрядындагы цифра бирдиктер разрядындагы цифрадан бирге чоң болсун жана изделген сан бүтүн сандын квадраты болсун.

(Көрсөтмө: $x^2=1010a+101b+100$ теңдемеге кел, мында x^2 – изделген сан, a – миңдер, b – бирдиктер разрядындагы цифра).

436. Идиш кислота менен толгон. Андан 2 л кислота алынды жана идишке 2 л суу куюлду. Аралашмадан 2 л алынды жана дагы 2 л суу кошулду. Бул аралашмадан 2 л алынды жана дагы 2 л суу куюлду. Натыйжада идиштеги суунун көлөмү кислотанын көлөмүнөн 3 л ге көп болуп калды. Эми идиште канча л кислота жана канча л суу бар?

△ Идиштин көлөмү v л дейли. Андан 2 л кислота алынып, 2 л суу куюлгандан кийин, кислота анын $\frac{v-2}{v}$ бөлүгүн ээлейт. Аралашмадан

$2\,л$ алынгандан кийин, идиште $(v-2)\cdot\frac{v-2}{v}$ л кислота калды, ага $2\,л$ суу куюлгандан кийин кислота идиштин $\frac{(v-2)^2}{v^2}$ бөлүгүн ээлейт. 3-жолу ($2\,л$ аралашма алынып, $2\,л$ суу куюлгандан кийин) кислота идиштин $\left(\frac{v-2}{v}\right)^3$ бөлүгүн ээлейт. Ошентип, идиштеги кислотанын саны $v\cdot\left(\frac{v-2}{v}\right)^3$ га, суунун саны болсо $v\cdot\left(\frac{v-2}{v}\right)^3+3$ кө барабар. Анда төмөнкү теңдемеге ээ болобуз:

$$v\cdot\left(\frac{v-2}{v}\right)^3+v\cdot\left(\frac{v-2}{v}\right)^3+3=v, \text{ мындан}$$

$$v^3-9v^2+24v-16=0,\ \ (v-1)(v-4)^2=0.$$

Шарт боюнча, $v>2$ болгондуктан, $v=4$.

Анда $v\cdot\left(\frac{v-2}{v}\right)^3=4\cdot\left(\frac{4-2}{4}\right)^3=\frac{1}{2}\ (l)$,

Жообу: 0,5 л кислота жана 3,5 л суу. ▲

437. *A* айылдан *B* айылга карай жүк машинасы жолго чыкты. 1 сааттан кийин *A* дан ошол багытта жеңил машина жолго чыкты жана *B* га жүк машинасы менен бир убакытта жетип келди. Эгерде алар *A* жана *B* айылдарынан бир убакытта бири-бирин карай жолго чыгышканда, алар жолго чыккан убакыттан 1 саат 12 минут өткөндөн кийин жолугушмак. Жүк машинасы *A* дан *B* га келүү үчүн канча убакыт сарптаган?

438. Вагондон жүктү жумушчулардын эки тобу түшүрчү болду. Жүктү 1-топтун жеке өзү түшүргөн убакыт менен ошол жүктү 2-топтун жеке өзү түшүргөн убакыттын суммасы 12 саат. Бул убакыттардын айырмасы эки топ чогуу иштеп жүктү түшүргөн убакыттын 45 % ын түзөт. 1-топ жеке өзү жана 2-топ жеке өзү иштеп жүктү канча убакытта түшүрөт?

△ 1-топ жүктү жеке өзү x саатта, 2-топ болсо y саатта түшүрөт, дейли. Маселенин шарты боюнча, $x+y=12$ (саат). 1-топ 1 саатта бардык иштин $\frac{1}{x}$ бөлүгүн, 2-топ болсо $\frac{1}{y}$ бөлүгүн аткарат. Алар чогуу иштеп 1 саатта бардык иштин $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ бөлүгүн аткарат. Чогуу иштеп алар бардык ишти аткаруу үчүн $\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$ саат сарптайт. Аныктык үчүн, мисалы, 1-топ жай иштейт, б. а. $x > y$ дейли. Анда шарт боюнча $(x-y)$ саат $\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$ сааттын 45 % ын түзөт:

$$x - y = \frac{45}{100} \cdot \frac{xy}{x+y}.$$

Бул теңдемедеги y тин ордуна у=12 – x ти коюп, x ке салыштырмалуу квадраттык теңдемени алабыз:

$$x - 12 + x = \frac{9}{20} \cdot \frac{x(12-x)}{12},$$

мындан, $3x^2 + 124x - 960 = 0$.

Бул теңдеменин тамырлары $x_1 = -48,\ x_2 = \frac{20}{3}$. Маселенин мазмуну боюнча $x > 0$. Демек,

$$x = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3} \text{ (саат)}, \qquad y = 12 - x = 12 - 6\frac{2}{3} = 5\frac{1}{3} \text{ (саат)}.$$

Жообу: $6\frac{2}{3}$ саат, $5\frac{1}{3}$ саат.▲

439. Эки пахта теруү машинасы бирге талаадагы пахтаны биринчи машинанын жеке өзүнөн 8 күн тезирээк терип бүтүрүшү мүмкүн жана экинчи машинанын жеке өзүнөн 2 күн тез терип бүтүшү мүмкүн. Ар бир машина өз алдынча талаадагы пахтаны канча күндө терип алышы мүмкүн?

440. Эки уста бир буюмду жасоо үчүн буюртма алды. Баштап биринчи уста 1 саат иштеди, андан кийин эки уста 4 саат чогуу иштеди; ошондо буюртманын 40 % ы аткарылды. Эгерде буюртманы биринчи устанын өзү аткарышы үчүн экинчисине караганда 5 саат көп убакыт керек болсо, ар бир уста буюртманы канча саатта аткарышы мүмкүн?

441. Поезд *A* жана *B* шаарлардын ортосунда 20 минут токтоп калды. Машинист *B* га жадыбал боюнча жетип келүү үчүн поезддин баштапкы ылдамдыгын 12 км/саат ка чоңойтту. *A* жана *B* шаарларынын ортосундагы аралык 240 км болсо, поезддин баштапкы ылдамдыгын тап.

442. Кубаттуулугу түрдүүчө эки трактор 3 күн чогуу иштеп, талаанын $\frac{5}{8}$ бөлүгүн айдады. Эгерде биринчи трактор менен бүткүл талааны экинчисине караганда 4 күн тезирээк айдоого мүмкүн болсо, анда бүткүл талааны ар бир трактор өз алдынча канча күндө айдай алат?

443. Поезд 840 км жол жүрүүгө тийиш эле. Жолдун жарымында 30 минут токтоп калды. Кечикпестик үчүн ылдамдыгын саатына 2 км ге чоңойтту. Поезд бүтүн жолго канча убакыт сарптаган?

△ *1-усул.* Поезд бүтүн жолду x саатта өтүүгө тийиш; жарымын саатына $\frac{840}{x}$ км ылдамдыкта өткөн; андан кийин саатына $\left(\frac{840}{x}+2\right)$ км ылдамдык менен экинчи жарымын $\frac{420}{\frac{840}{x}+2}=\frac{210x}{420+x}$ саатта өтөт. Биринчи жарымын $\frac{x}{2}$ саатта жүргөн. Ошол боюнча: $\frac{210x}{420+x}=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$. Теңдемени чыгарсак, $x=21$ саат экендигин табабыз.

2-усул. Поезддин мурдагы ылдамдыгы саатына x км, кийинкиси саатына $(x+2)$ км, 420 км ди $\frac{420}{x}$ саатта, калган 420 км ди $\frac{420}{x+2}$ саатта жүрөт. Ошол боюнча: $\frac{420}{x}-\frac{420}{x+2}=\frac{1}{2}$. Теңдемени чыгарсак, $x=40$ км/саат; поезд бардык жол үчүн $\frac{840}{40}=21$ саат сарптаган.

3-усул. Поезд жолдун биринчи жарымын x саатта, экинчи жарымын $\left(x-\frac{1}{2}\right)$ саатта жүргөн. Анын жолдун биринчи жарымындагы ылдамдыгы саатына $\frac{420}{x}$ км, экинчи жарымындагы ылдамдыгы саатына $\frac{420}{x-\frac{1}{2}}=\frac{840}{2x-1}$ км, $\frac{840}{2x-1}-\frac{420}{x}=2$. Теңдемени чыгарып, $x = 10{,}5$ саат, $2x = 21$ саат экендиги аныкталат.

Жообу: 21 саат. ▲

444. Бир сан үч удаалаш бүтүн сандардын көбөйтүндүсүнөн турат. Бул санды берилген удаалаш үч сандын ар бирине бөлүүдөн алынган тийиндилердин суммасы 74 кө барабар. Ошол санды тап.

445. Томпок көп бурчтуктун жактарынын саны менен диагоналдары санынын суммасы 15 ке барабар. Көп бурчтук жактарынын санын тап.

446. Тик бурчтуу үч бурчтук жактарынын узундуктары: а) удаалаш натуралдык сандар менен; б) удаалаш жуп натуралдык сандар менен; в) удаалаш так натуралдык сандар менен туюнтулушу мүмкүнбү?

△ а) Жактары удаалаш бүтүн сандар: x, $x+1$, $x+2$ болсун. Анда x жана $x+1$ катеттер, $(x+2)$ болсо гипотенуза болот, $x^2+(x+1)^2=(x+2)^2$; мындан $x=3$ же $x=-1$ ($x=-1<0$ маселеге жооп боло албайт). $x=3$; $x+1=4$; $x+2=5$. Жактары удаалаш бүтүн сандар 3, 4, 5 менен туюнтулган тик бурчтуу үч бурчтук болот; б) жактары удаалаш жуп сандар: $2x$, $2x+2$, $2x+4$ болсун. Анда: $(2x)^2+(2x+2)^2=(2x+4)^2$; $x=3$; $2x=6$; $2x+2=8$; $2x+4=10$. Жактары удаалаш жуп сандар 6, 8, 10 менен туюнтулган тик бурчтуу үч бурчтук болот; в) жактары удаалаш так сандар: $2x+1$; $2x+3$; $2x+5$ менен туюнтулсун. $(2x+1)^2+(2x+3)^2=(2x+5)^2$; $x=\frac{5}{2}$ же $x=-\frac{3}{2}\cdot$ Бирок x натуралдык сан болуп чыкпады. Демек, жактары удаалаш так сандар менен туюнтулган тик бурчтуу үч бурчтук жок.▲

447. Эки түрдүү эритменин биринде 800 г, экинчисинде 600 г туз бар. Эки эритмеден 10 кг дуу жаңы эритме алынды. Биринчи эритмедеги туздун пайыз саны экинчи эритмедеги туздун пайыз санынан 10 го чоң болсо, аралашмада ар бир эритмеден канча килограммдан бар?

△ Биринчи эритме x кг болсо, экинчиси $(10-x)$ кг болот. Биринчи эритмеде туз $\frac{0{,}8\cdot 100}{x}=\frac{80}{x}$ пайыз, экинчи эритмеде болсо $\frac{0{,}6\cdot 100}{10-x}=\frac{60}{10-x}$ пайыз болот. Маселенин шарты боюнча:

$$\frac{80}{x}-\frac{60}{10-x}=10.$$

Муну чыгарабыз: $x = 20$ же $x = 4$. Маселенин шарты боюнча $x < 10$ болгондуктан, $x = 20$ тамыр жарабайт. $10 - x = 10 - 4 = 6$.

Жообу: биринчи эритменин массасы 4 кг, экинчи эритменин массасы болсо 6 кг экен.

Жоопту текшерүү: 800 г туз 4 кг дуу эритменин $\frac{0{,}8\cdot 100\%}{4}=20$ % ын, 600 г туз 6 кг дуу эритменин $\frac{0{,}6\cdot 100\%}{6}=10$ % ын түзөт: $20\ \%-10\ \%=10\ \%$.▲

448. Эки металл бөлүкчүсүнөн биринин массасы 880 г, экинчисинин массасы 858 г. 1-бөлүкчөнүн көлөмү 2-синин көлөмүнөн 10 см^3 ге аз. 1-металл бөлүкчүсүнүн салыштырма салмагы 2-синикинен 1 г/см^3 чоң болсо, ар бир металл бөлүкчүсүнүн салыштырма салмагын тап.

△ Экинчи металл бөлүкчүсүнүн салыштырма салмагын d г/см^3, ал эми биринчи металл бөлүкчүсүнүн салыштырма оордугу $(d+1)$ г/см^3. Биринчи металл бөлүкчүсүнүн көлөмү $\frac{880}{d+1}$ см^3, экинчи металл бөлүкчүсүнүн көлөмү $\frac{858}{d}$ см^3. Маселенин шарты боюнча:

$$\frac{880}{d+1}+10=\frac{858}{d} \quad \text{же} \quad 5d^2+16d-429=0,$$

$d=7{,}8$ же $d=-11$($d=-11<0$ болгондуктан, маселеге жооп боло албайт).

Жообу: экинчи бөлүкчөнүн салыштырма салмагы 7,8 г/см^3, биринчисиники болсо $7{,}8+1=8{,}8$ (г/см^3).

Жоопту текшерүү. Биринчи металлдын көлөмү $\frac{880}{8{,}8}=110$ (см^3), экинчисиники $\frac{858}{7{,}8}=110$ (см^3); 110 см^3 -100 см^3$=10$ см^3. ▲

449. Эки идиште бири-биринен 1 кг га айырмаланган суу бар. Идиштердеги сууга 88 калория жылуулук берилди. Массасы чоң болгон суу массасы аз болгон сууга караганда $\frac{4}{5}$ градуска азыраак ысыганы белгилүү болсо, ар бир идиштеги суунун массасын аныкта.

△1) Суунун массасы x кг жана $(x+1)$ кг, дейли. Массасы аз болгон суу $\frac{88}{x}$ градуска, массасы чоң болгон суу $\frac{88}{x+1}$ градуска ысыган. Массалары түрдүү болгон эки идиштеги суунун температураларынын ортосундагы айырма $\frac{4}{5}$ градуска барабар болгондуктан, төмөнкү теңдемени түзө алабыз:

$$\frac{88}{x}-\frac{88}{x+1}=\frac{4}{5}.$$

Алынган теңдемени чыгарсак: $x=10$ же $x=-11$. $x=-11<0$ маселеге жооп боло албайт.

Жообу: 10 кг жана 11 кг.

Жоопту текшерүү. 10 кг суу 88 калория жылуулуктан $\frac{88}{10}=8{,}8$ градуска ысыган, 11 кг суу болсо 88 калория жылуулуктан $\frac{88}{11}=8$ градуска ысыган. $8{,}8-8=0{,}8=\frac{4}{5}$ (градус). ▲

450. *A* жана *B* шаарларынын ортосундагы аралык темир жол менен 66 км, суу жолу менен болсо 80,5 км. Поезд кемеге караганда 4 саат кийин жолго чыгып, *B* га кемеден 15 минут мурда жетип келди. Эгерде поезддин ылдамдыгы кеменин ылдамдыгынан саатына 30 км ге чоң болсо, алардын ылдамдыктарын тап.

△Поезддин ылдамдыгы саатына x км, кеменин ылдамдыгы саатына ($x-30$) км. Поезд $\frac{66}{x}$, кеме болсо $\frac{80,5}{x-30}$ саат жол жүргөн. 4 саат +15 минут= = $4\frac{1}{4}$ саат=$\frac{17}{4}$ саат. Маселенин шарты боюнча теңдеме түзөбүз:

$$\frac{80,5}{x-30}-\frac{66}{x}=\frac{17}{4}.$$

Бул теңдемени чыгарсак, төмөнкү жооп чыгат: поезддин ылдамдыгы саатына 44 км, кеменики саатына 14 км.

Жоопту текшерүү. Кеме 80,5 км ди $\frac{80,5}{14}=5\frac{3}{4}$ саатта, поезд болсо 66 км ди $\frac{66}{44}=1\frac{1}{2}$ саатта өтөт. $5\frac{3}{4}-1\frac{1}{2}=4\frac{1}{4}$ саат болот. ▲

451. Эгин талаасынын $\frac{2}{3}$ бөлүгүн түрдүү кубаттагы эки трактор чогуу 4 күндө айдайт. Эгерде жерди 1-трактор 2-трактордон 5 күнгө тез айдап болушу белгилүү болсо, талааны ар бир трактор канча күндө айдап болот?

△ *1-усул.* Ишти бир бирдик деп кабыл алабыз. Бүтүн жерди экинчи трактор x күндө айдасын, дейли. Анда биринчиси $x-5$ күндө айдап бүтөт. Биринчи трактор бир күндө бүткүл жердин $\frac{1}{x-5}$ бөлүгүн, экинчиси $\frac{1}{x}$ бөлүгүн, эки трактор чогуу $\frac{2}{3}:4=\frac{1}{6}$ бөлүгүн айдайт. Эки трактор бир күндө эгин талаасынын $\frac{1}{x-5}+\frac{1}{x}$ же $\frac{1}{6}$ бөлүгүн айдайт. Демек:

$$\frac{1}{x-5}+\frac{1}{x}=\frac{1}{6}.$$

Бул теңдеменин тамырлары $x=15$ же $x=2$. Маселенин мазмуну боюнча $x>5$ болууга тийиш. Ошондуктан $x_2=2$ маселеге жооп боло албайт.

2-усул. Эки трактор чогуу бүткүл жерди $4:\frac{2}{3}=6$ күндө айдайт. Экинчи трактор ошол жерди x күндө айдаса, 1 күндө $\frac{1}{x}$ бөлүгүн, 6 күндө $\frac{6}{x}$ бөлүгүн айдайт. Биринчи трактор ошол жерди $x-5$ күндө айдаса, 1 күндө $\frac{1}{x-5}$ бөлүгүн, 6 күндө болсо $\frac{6}{x-5}$ бөлүгүн айдайт. Эки трактор тең 6 күндө эгин талаасын айдап болот, б. а.:

$$\frac{6}{x}+\frac{6}{x-5}=1.$$

Жообу: эгин талаасы биринчи трактор менен 10 күндө, экинчиси менен 15 күндө айдалып бүтөт.

Жоопту текшерүү. 1) Эгин талаасын биринчи трактор экинчи трактордон 15 күн – 10 күн = 5 күн тез айдап бүтөт.

2) Биринчи трактор 1 күндө жердин $\frac{1}{10}$ бөлүгүн, 4 күндө $\frac{4}{10}$ бөлүгүн, экинчиси 1 күндө $\frac{1}{15}$ бөлүгүн, 4 күндө $\frac{4}{15}$ бөлүгүн айдайт. Эки трактор чогуу 4 күндө жердин $\frac{4}{10}+\frac{4}{15}=\frac{20}{30}=\frac{2}{3}$ бөлүгүн айдайт.▲

452. Пландагы ишти аткаруу үчүн 1-топ 3,5 күн иштеди. Калган ишти 2-топ 6 күндө бүтүрдү. Пландагы ишти 2-топ 1-топко караганда 5 күнгө кийин бүтүрөт. Ар бир топ пландагы ишти канча күндө бүтүрөт?

453. Кеме дарыянын агымы боюнча 69 км аралыкка барып, 34 км артына кайтуу үчүн 5 саат убакыт сарптады. Агымдын ылдамдыгы саатына 3 км болсо, кеменин туруктуу суудагы ылдамдыгын тап.

454. *A* айылдан дарыянын агымы боюнча сал агызылдыі. Сал агызылгандан 4 саат өткөндөн кийин, ошол айылдан дарыянын агымы боюнча моторлуу кайык жолго чыгып, 15 км жүргөндүн кийин салга жетип алды. Моторлуу кайык салдан саатына 12 км ге көп жүрсө, салдын (дарыя агымынын) ылдамдыгын тап.

455. Фермер чарбасы 200 га жерге белгилүү мөөнөттө картошка тигип болууга тийиш эле. Бирок чарба ар күнү пландагыдан 5 га көп жерге картошка тигип, ишти мөөнөтүнөн 2 күн мурда аяктады. Картошка тигүү канча күнгө созулган?

456. Ондуктар цифрасы бирдиктерден 4 кө аз болгон эки орундуу сан менен ошол сандын цифраларынын ордуларын алмаштыруунун натыйжасында алынган сандан 2 бирдик кичине болгон сандын көбөйтүндүсү 2 627 ге барабар. Ошол эки орундуу санды тап.

457. Эки орундуу сандын ондуктар цифрасы бирдиктеринен 4 эсе чоң. Ошол сандан 2 ни кемитип, цифралары изделген сан цифраларынын тескери тартипте жазылышынан алынган санга 2 ни кошсок жана натыйжаларды көбөйтүрсөк, 2 400 чыгат. Ошол эки орундуу санды тап.

458. Жумушчулардын үч тобу үйдү чогуу белгилүү мөөнөттө ремонттоду. Ремонтту 1-топ гана аткарса, бул мөөнөттөн 10 күн көп керек болот. Эгерде ишти 2-топ гана аткарса, 20 күн, 3-топ гана аткарса, мөөнөттөн 6 эсе көп убакыт керек болот. Ар бир топ жеке иштесе, үйдү канча күндө ремонттоп бүтөт?

459. Бассейнге үч ноо өткөрүлгөн. Бош бассейнди экинчи ноо биринчи ноого караганда 3 саатка кечигип толтурат. Ал эми үчүнчү ноо болсо толгон бассейнди бошотуу үчүн, 1-ноо бассейнди толтурууга сарптаган убакыттан 3 саатка аз убакыт сарптайт. Эгерде ноолордун экөөсүнөн суу кирип, 3-сүнөн чыгып турса, анда бош бассейн 36 саатта толот. 1-ноо менен 2-ноо бош бассейнди канча саатта толтурат? 3-ноо толгон бассейнди канча убакытта бошотот?

460. Буюмдун наркы 12 000 сум эле. Бул нарк удаалаш эки жолу бирдей пайызга арзандаштырылгандан кийин буюмдун наркы 9 720 сум болгон. Ар жолу буюмдун наркы канча пайызга арзандаган?

461. Эки жылдын ичинде шаардын калкы 2 миллион адамдан 2 миллион 205 миң адамга жетти. Бул шаар калкынын жылдык орточо көбөйүү пайызын тап.

462. Эки жолоочу *A* жана *B* айылдардан бири-бирин карай келүүдө. Алар жолугушканда бири экинчисинен 2 км ге көп жүргөнү белгилүү болду. Жолугушкандан кийин жүрүүнү улантып, 40 минуттан кийин 1-жолоочу *B* га келди. 1,5 сааттан кийин болсо 2-жолоочу *A* га келди. *AB* аралыкты тап.

463. Шахмат мелдешинде катышуучулардын ар бири калгандары менен бир жолудан ойноду. Бардыгы болуп 120 оюн ойнолгон болсо, мелдеште канча адам катышкан?

464. 11-классты бүтүрүүчү окуучулар бири-бири менен сүрөттөрүн алмашышты. Эгерде 1 190 сүрөт алмашкан болсо, ошол класста канча окуучу болгон?

465. Ортосундагы аралык 900 км болгон эки шаардан бири-бирин карай эки поезд жолго чыкты. Поезддер жолдун ортосунда жолугушту. Эгерде 1-поезд 2-синен 1,5 саатка кеч жолго чыккан болсо жана ага караганда ылдамдыгы саатына 10 км ге чоң болсо, ар бир поезддин ылдамдыгын тап.

466. Поезд 220 км жолду белгилүү убакытта басып өтүүгө тийиш эле. Ал 2 саат жүргөндөн кийин 10 минут токтоп калды; андан кийин ылдамдыгын саатына 5 км ге чоңойтту жана дарекке белгиленген убакытта жетип келди. Поезддин баштапкы ылдамдыгын тап.

IV ГЛАВА МААЛЫМАТТАР АНАЛИЗИ

28-§. МААЛЫМАТТАР АНАЛИЗИ. МААЛЫМАТТАРДЫ СҮРӨТТӨӨ

Түрдүү фирмалар, компаниялар өндүргөн продукциялардын сапат жана сандык *белгилери,* көрсөткүчтөрү (курамы, массасы, өлчөмдөрү, түсү, даамы, ...) кабыл алынган нормаларга (стандарттарга) туура келүүсүн (же келбестигин) кантип билебиз? Кандай текшеребиз, сынайбыз?

Даярдалган продукциялардын (маселен: сүт, дан, эт продукциялары; түрдүү суусундук; кийим-кече; дары-дармек; электр жабдуулары жана у. с.) саны аябай көп болсо, аларды бирден сыноо, текшерүүдөн өткөрүү экономикалык жактан да туура эмес. Мындай учурда бардык продукциялар жыйнагынан бир нечеси *кокусунан*, тобокелге алынат жана алардын өзү гана бир-бирден сыноодон өткөрүлөт.

Текшерилиши керек болгон бардык объекттер жыйнагына *башкы жыйнак* дейилет. Андан тандап алынган объекттер *тандалма жыйнак* (кыскача: *тандалма*) деп аталат. Объект дегенде эмнени текшерүү керек болсо, ошону түшүнөбүз.

1-маселе. Фирма лампочка иштеп чыгарат, дейли. Анын канча пайызы жараксыз (жанбайт)? Муну кандай текшеребиз?

△ Фирма өндүргөн жүз миңдеген лампочканын жанышын же жанбастыгын бирден текшерүүнүн мүмкүнчүлүгү жок. Ошондуктан мындай учурларда лампочкалардын бир нечеси кокусунан (тобокелинен) тандап алынат. Тандалган бардык лампочкалар сыноодон өткөрүлөт. Сыноонун натыйжасы боюнча фирма өндүргөн продукция жөнүндө белгилүү бир тыянак чыгарылат.

Мисалы, 1000 даана лампочка сыноодон өткөрүлгөн болуп, алардан 10 у жараксыз болсо (жанбаса), анда бардык лампочкалардын да $\frac{10}{1000}=0,01$ бөлүгү (б. а. 1 % ы) жараксыз деген тыянак чыгарылат. ▲

Бул мисалда фирма өндүргөн бардык лампочкалар *башкы жыйнак* эсептелет. Сыноо үчүн кокусунан тандап алынган 1000 лампочка *тандалма жыйнакты* түзөт.

2-маселе. Пахтазарда ачылган косектердин орточо массасын аныкта.

△ Ачылган косектердин бардыгын жыйнап алып, алардын массасын бир-бирден аныктоо мааниге ээ эмес. Косектин орточо массасын билүү үчүн, алардын бир нечесин талаанын түрдүү жерлеринен кокусунан тандалган козонун түптөрүнөн үзүп алынат. Алынган тандалмадагы косектердин массалары өлчөнөт жана алардын орточо арифметикалыгы эсептелет. Бул орточо арифметикалык маани пахтазарда ачылган косектердин орточо массасы иретинде кабыл алынат. ▲

Бул мисалда башкы жыйнак – пахтазардагы бардык косектер; тандалма жыйнак болсо массасын өлчөө үчүн талаанын түрдүү жерлеринен үзүп алынган косектер.

Кокусунан тандап алынган n даана объекттин сыноо (өлчөө, текшерүү) натыйжаларын $x_1, x_2, \ldots, x_n$ дейли. n санга *тандалманын көлөмү* дейилет. Тандалманын мүчөлөрүнө, адатта, *варианттар* дейилет. Варианттарды өсүп баруу тартибинде жазып чыгалы:

$$x_1^* \le x_2^* \le x_3^* \le \ldots \le x_n^*. \tag{1}$$

(1) катышка *вариациялык катар* дейилет.

3-маселе. Пилланын узундугун өлчөөдө төмөнкүдөй маанилер (сантиметрлерде) алынды:

3,40; 3,34; 3,24; 3,40; 3,62; 3,45; 3,43; 3,35; 3,50; 3,56.

Ошол маанилерге ылайыктуу вариациялык катарды түз.

△ Бул маанилердин эң кичинеси 3,24; эң чоңу 3,62. Сандарды өсүү тартибинде жайлаштырып, төмөнкү вариациялык катарды алабыз:

3,24; 3,34; 3,35; 3,40; 3,40; 3,43; 3,45; 3,50; 3,56; 3,62. ▲

4-маселе. Кокусунан 10 түп козо тандалды. Алардагы бүчүрлөрдүн саны саналды жана төмөнкүдөй натыйжалар алынды: 15, 11, 10, 15, 17, 15, 16, 16, 17, 18. Ошол маанилерге ылайыктуу вариациялык катарды түз.

△ Берилген сандардын эң кичинеси 10, эң чоңу 18. Сандарды өсүү тартибинде жазып, төмөнкү вариациялык катарды алабыз:

10; 11; 15; 15; 15; 16; 16; 17; 17; 18. ▲

x_1, x_2,..., x_k тандалмада x_1 вариант n_1 жолу..., x_k вариант n_k жолу кайталанган, дейли. n_1, n_2,... n_k сандарга *жыштыктар* дейилет. Демек, $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$.

$W_1 = \frac{n_1}{n}$, $W_2 = \frac{n_2}{n}$,..., $W_k = \frac{n_k}{n}$ ге *салыштырма жыштыктар* дейилет.

Мындан, $W_1+W_2+...+W_k=1$. Жадыбалдар түзөлү (1- жана 2-жадыбалдар):

1-жадыбал

Сыноо натыйжалары	x_1	x_2	...	x_k
Жыштык	n_1	n_2	...	n_k

2-жадыбал

Сыноо натый-жалары	x_1	x_2	...	x_k
Салыштырма жыштык	W_1	W_2	...	W_k

1- жана 2-жадыбалга x_1, x_2,...,x_k тандалманын, тиешелүү түрдө, жыштыктар жана салыштырма жыштыктар боюнча *бөлүштүрүлүшү* дейбиз.

4-маселе үчүн жыштыктар жадыбалы жана салыштырма жыштыктар жадыбалы төмөндө берилген (тиешелүү түрдө, 3- жана 4-жадыбалдар).

3-жадыбал

Сыноо на-тыйжалары	10	11	15	16	17	18
Жыштык	1	1	3	2	2	1

4-жадыбал

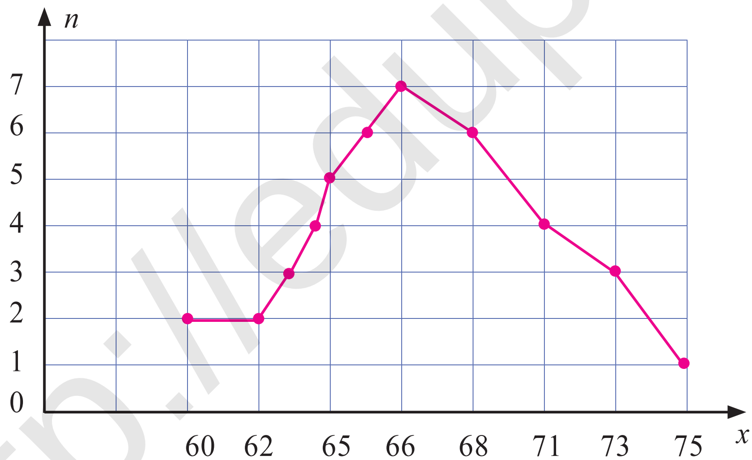
Сыноо натыйжалары	10	11	15	16	17	18
Салыштырма жыштык	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$

5-маселе. „Аракет коопсуздугу“ айында МАИ кызматкери 30 автомобилдин ылдамдыгын өлчөдү. Маалыматтар жыштыктар жадыбалында келтирилген:

Өлчөө натыйжалары (км/саат)	60	62	65	66	68	71	73	75
Жыштыктар	2	2	5	7	6	4	3	1

Ошол маалыматтарды тегиздикте сүрөттө.

△ Координата тегиздигинде координаталары (60; 2),(62; 2),(65; 5),...,(75; 1) болгон чекиттерди сүрөттөйбүз жана аларды кесиндилер менен удаалаш туташтырабыз (39-сүрөт).



39-сүрөт.

Алынган сынык сызыкка *жыштыктар полигону* дейилет.▲

Эгерде тандалманын көлөмү чоң болсо, анын жыштыктар боюнча бөлүштүрүлүшүн табуу үчүн тандалма *класстарга* ажыратылат. Класстардын өлчөмү (чоңдугу, узундугу,...) бирдей болууга тийиш.

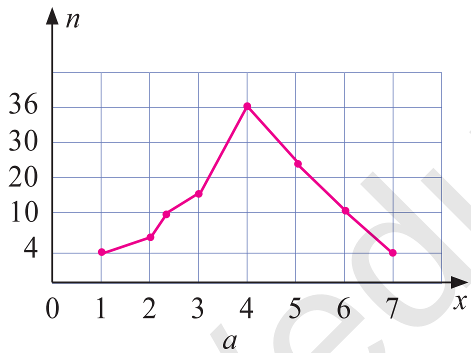
Мисал. МАИ кызматкерлери „Аракет коопсуздугу“ айында 100 автомобилди техникалык кароодон өткөрүү жараянында алардын өткөн

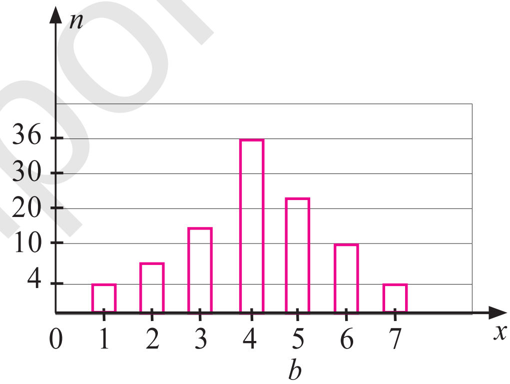
6 айда канча километр жол жүргөнүн да аныкташты. Маалыматтардын жыштыктар боюнча бөлүштүрүлүшү төмөнкү жадыбалда берилген. Тандалмалар 7 класска бөлүнгөн. Алардын өлчөмү (узундугу) бирдей.

Класстар	8001–9000	9001–10000	10001–11000	11001–12000	12001–13000	13001–14000	14001–15000
Класстын тартип номери	1	2	3	4	5	6	7
Жыштыктар	4	6	18	36	22	10	4

$n_1+n_2+n_3+n_4+n_5+n_6+n_7=100$ экени анык.

Жадыбалдагы маалыматтарды жыштыктар полигону же мамычалуу диаграмма көрүнүшүндө сүрөттөөгө болот (40-*a*, *б* сүрөттөр).





40-сүрөт.

Көнүгүүлөр

467. Кокусунан тандалган 30 түп козо өсүмдүгүндөгү бүчүрлөрдүн саны төмөнкү жадыбалда келтирилген:

15	17	15	10	18	11	15	17	16	16
17	10	14	15	16	15	14	13	15	13
16	17	16	14	12	14	15	14	17	13

(Маалыматтар М. Султанованын „Вариациялык статистика“ колдонмосунан алынган. „Мугалим“ басма үйү, Т., 1977.)

1) Тандалманын жыштыктар жадыбалын түз.
2) Тандалманын жыштыктар полигонун түз.

468. Класс жетекчиси класстагы 30 окуучудан эс алуу күнү ар бир окуучу канча саат телевизор көргөнү жөнүндө маалымат алды. Алар жадыбалда чагылдырылган:

3	2	5	4	5	3	6	0	2	1	3	3	4	3	3
3	1	3	4	4	2	4	3	2	5	2	4	2	0	4

Маалыматтардын негизинде:1) жыштыктар жадыбалын түз; 2) жыштыктар полигонун түз.

469. Аскердик кызматка чакырылган жигиттерден 100 үнүн бут кийиминин өлчөмү төмөнкү жыштыктар жадыбалында берилген:

Өлчөмү	38	39	40	41	42	43	44	45
Жыштык	4	4	19	27	23	14	6	3

Маалыматтар боюнча: 1) салыштырма жыштыктар жадыбалын; 2) жыштыктар полигонун; 3) салыштырма жыштыктар полигонун түз.

470. 8-класстардын 50 окуучу кыз бут кийимдеринин өлчөмдөрү жадыбалда берилген:

Өлчөмү	34	35	36	37	38	39	40
Жыштык	5	7	10	15	7	4	2

Маалыматтар боюнча:1) салыштырма жыштыктар жадыбалын; 2) жыштыктар полигонун; 3) салыштырма жыштыктар полигонун түз.

471. 8-класс окуучуларынан 20 ынын кийиминин (пиджак-шым) өлчөмдөрү жадыбалда берилген:

38	42	40	44	40	48	46	42	44	46
48	46	44	50	46	44	48	44	48	44

Маалыматтардын негизинде: 1) жыштыктар жадыбалын түз; 2) салыштырма жыштыктар жадыбалын; 3) жыштыктар полигонун; 4) салыштырма жыштыктар полигонун түз.

472. Тестте 10 тапшырма бар эле. Класстагы 30 окуучунун тест натыйжалары (туура жооптор саны) жадыбалда берилген:

5	8	2	6	5	9	7	6	10	9	8	7	9	3	7
7	3	7	8	9	10	5	7	7	5	5	7	5	4	5

Маалыматтар боюнча: 1) жыштыктар жадыбалын; 2) жыштыктар полигонун түз.

473. Спорт ийриминде катышкан 150 баланын 1 минут 30 секунд бою канча жолу „отуруп-турганы“ каралды. Алардын саны 40 тан 74 кө чейинди түздү: [40;74]. Бул кесинди ар биринин узундугу 5 ке барабар болгон аралыктарга бөлүндү. Ар бир аралыктагы байкоолор саны эсептелип, төмөнкү жыштыктар жадыбалы түзүлдү:

„Отуруп-туруулардын“ саны	Жыштыгы
40 тан 44 кө чейин	11
45 тен 49 га чейин	20
50 дөн 54 кө чейин	28
55 тен 59 га чейин	36
60 тан 64 кө чейин	24
65 тен 69 га чейин	19
70 тен 74 кө чейин	12
Бардыгы	150

Маалыматтарга туура келген: 1) жыштыктар полигонун; 2) мамычалуу диаграмма түз.

29-§. ОРТОЧО МААНИ. МОДА. МЕДИАНА

Орточо маани түшүнүгү менен таанышсың. Эгерде варианттар x_1, $x_2,...,x_n$ болсо, тандалманын *орточо мааниси* деп

$$\bar{x} = \frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}$$

санга айтылат.

Эгерде тандалмада x_1 вариант n_1 жолу, x_2 вариант n_2 жолу,..., x_k вариант n_k жолу кайталанган болсо,

$$\overline{x} = \frac{n_1 x_1 + ... + n_k x_k}{n_1 + ... + n_k}$$

санына тандалманын *салмактуу орточо мааниси* дейилет. n_1, n_2, ..., n_k сандар тиешелүү варианттар жыштыктары экендигин эскерте кетебиз.

1-маселе. Чарба 100 га жерге чигит эгип, белгилүү бир сорттогу пахтадан гектарынан 33 ц ден түшүм алды. 50 га башка жерге эгилген ошол сорттогу пахтадан болсо 30 ц ден түшүм алды. Чарба 1 гектар жерден орточо канча түшүм алган?

△ Бул жерде $x_1 = 33$, $n_1 = 100$; $x_2 = 30$, $n_2 = 50$.

$$\overline{x} = \frac{100 \cdot 33 + 50 \cdot 30}{100 + 50} = \frac{3300 + 1500}{150} = \frac{4800}{150} = 32 \text{ (ц).}$$

Жообу: 32 (ц).▲

2-маселе. Спортчу бийиктикке 7 жолу секирди жана төмөнкү натыйжаларды көрсөттү (метр эсебинде) :

2,1; 1,97; 2,44; 1,85; 1,97; 1,96; 2,06.

Спортчу орточо канча метр бийиктикке секирген?

△Бул жерде 1,97 вариант эки жолу, калган варианттар бир жолу катталган. Мындан

$$\overline{x} = (2,1 + 2 \cdot 1,97 + 2,44 + 1,85 + 1,96 + 2,06) : 7 = 14,35 : 7 = 2,05 \text{ (м).}$$

Жообу: 2,05 метр.▲

Орточо мааниге маалыматтар катарынын *борборун* туюнткан сан деп айтууга болот.

Мода. Мода түшүнүгүн берген маселени көрөлү.

3-маселе. Мектептин медайымы 8-класстын 10 окуучусунун боюн өлчөп, төмөнкү натыйжаларды алды (сантиметр эсебинде):

166; 168; 170; 165; 164; 168; 169; 163; 168; 162.

Тандамада кайсы вариант эң көп кайталанган?

△ Вариациялык катарды түзөлү:

162; 163; 164; 165; 166; <u>168</u>; <u>168</u>; <u>168</u>; 169; 170.

Бул вариациялык катарда үйрөнүлгөн белги – окуучу боюнун бийиктиги – 168 см эң көп – 3 жолу келген, башка варианттар болсо 1 же 2 жолу. Бул вариациялык катар үчүн 168 саны *мода* болот.▲

Берилген вариациялык катарда үйрөнүлгөн белгинин эң көп келген маанисине *мода* дейилет жана M_0 сыяктуу белгиленет.

Мода менен орточо маани өз ара тең болушу да, болбостугу да мүмкүн. Маселеде окуучулардын орточо бийиктиги $\overline{x}=(2\cdot163+164+$ $+165+166+3\cdot168+169+170):10=1664:10=166,4$ (см) болот.

Маселеде мода менен орточо маани өз ара тең эмес: 168≠166,4.

4-маселе. Аскардын „Алгебра“ предметинен журналдагы баалары: 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5.

Ошол тандалманын модасы менен орточо маанисин тап.

△ M_0 = 4 экени анык, анткени 4 вариант тандалмада эң көп кездешет:

$$\overline{x}=\frac{2\cdot3+3\cdot4+2\cdot5}{2+3+2}=\frac{28}{7}=4.$$

Бул маселеде $M_0=\overline{x}=4$.

Тандалманын модасы болбостугу да мүмкүн. Мисалы, талаадан үзүлгөн 5 коондун массасы өлчөнгөндө (кг дарда) 3,8; 4; 4,5; 5,2; 4,9 натыйжалар алынды. Бул тандалманын модасы жок. ▲

Медиана.

Вариациялык катар мүчөлөрүнүн саны так болсо, бул катардын ортосунда жайлашкан мүчөгө *медиана* дейилет жана M_e сыяктуу белгиленет.

Мисалы, 20,23,24,27,29,31,34 катар үчүн медиана 27 болот, анткени 27 саны бул вариациялык катардын ортосунда жайлашкан. Андан сол жакта да, оң жакта да катардын 3 төн мүчөсү бар. Варианттардын саны жуп болгон учурду көрөлү.

12, 14, 17, 21, 23, 29, 32, 37 катарда 8 мүчө бар, мындай учурда вариациялык катардын медианасы ортодо турган эки сандын орточо арифметикалыгы сыяктуу мүнөздөлөт:

$$M_e = \frac{21+23}{2} = \frac{44}{2} = 22.$$

Кеңдик.

Вариациялык катардын эң чоң мүчөсү $\overset{*}{x}_n$ менен эң кичине мүчөсүнүн $\overset{*}{x}_1$ ортосундагы айырма, б. а. $\overset{*}{x}_n - \overset{*}{x}_1$ санына $x_1, x_2, ..., x_n$ тандалманын *кеңдиги* дейилет.

Ал, адатта, r тамгасы менен белгиленет.

Тандалманын кеңдиги $x_1, x_2, ..., x_n$ сандары канчалык чачыраган экендигин билдирген өлчөмдөрдөн бири эсептелет. Мисалы,

$$5,\ 6,\ 8,\ 16,\ 18,\ 19 \qquad (1)$$

катар үчүн кеңдик $r = 19 - 5 = 14$ кө барабар.

$$10,\ 10,\ 12,\ 13,\ 13,\ 14 \qquad (2)$$

катар үчүн болсо кеңдик $r = 14 - 10 = 4$ кө барабар. Бул жерде эки катардагы мүчөлөрдүн саны 6 дан, орточо маанилери болсо өз ара барабар $(\overline{x} = 12)$.

14 > 4 барабарсыздыгы (1) катардагы мүчөлөр (2) катардагы мүчөлөргө караганда орточо мааниге салыштырмалуу чачырап жайлашканын, (1) катарда *өзгөрүүчүлүк* чоң экендигин билдирет.

Көнүгүүлөр

474. 10 оюнда мектеп футбол командасынын атаандаштар дарбазасына киргизген топторунун жыштыктар жадыбалы төмөнкүдөй болду:

x – топтордун саны	0	1	2	3
n – жыштык	4	2	3	1

Маалыматтар боюнча: 1) вариациялык катарды түз; 2) тандалманын: орточо маанисин; модасын; медианасын; кеңдигин тап; 3) жыштыктар полигонун; 4) салыштырма жыштыктар жадыбалын; 5) салыштырма жыштык жадыбалына ылайык диаграмма түз.

Тандалмалардын: 1) орточо маанисин; 2) модасын; 3) медианасын; 4) кеңдигин тап (**475–477**):

475. 1) 12, 14, 9, 13, 15;
2) 16, 14, 13, 17;
3) 15,13,13,14,16,14;
4) 5, 8, 13, 12, 12.

476. 1) 6, 8, 10, 11, 10;
2) 3, 6, 8, 4, 9;
3) 8, 10, 12, 11, 14;
4) 6, 3, 2, 7, 5, 7.

477. 1) –3, 4, 5, – 4, 1, 2, 4, –3, –2, 3, –3, 2;
2) –3, –3, 4, 4, 4, 6, 6, –3, –2, 4, 5, –4.

478. Тогуз адамдан турган калыстар тобу 10 баллдык шкалада эки бийчинин бийин баалады. Натыйжалар жадыбалда келтирилген:

Бийчинин тартип номери	Калыстардын тартип номерлери жана баллдары								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	8,8	9,6	8,9	9,2	8,7	8,9	8,9	8,8	8,7
2	9,1	8,2	9,0	8,9	9,0	9,1	9,0	9,1	9,0

Ар бир бийчи үчүн коюлган баалардын: 1) орточо маанисин; 2) модасын; 3) медианасын; 4) кеңдигин тап.

479. Мектептеги 40 мугалимдин иш стажы жөнүндөгү маалыматтар төмөнкү жыштыктар жадыбалында келтирилген:

Иш стажы	1	2	4	5	7	9	10	12	15	18	20	22	23	25
Мугалимдер саны	3	1	4	3	4	2	3	1	2	6	3	3	3	2

Ошол тандалманын: 1) орточо маанисин; 2) модасын; 3) медианасын; 4) кеңдигин тап; 5) жыштыктар полигонун түз.

480. Байкоо камераларынан кокусунан 50 автомобиль тандалды жана ар биринин ылдамдыгы (км/саат та) аныкталды. Натыйжалар жадыбалда келтирилген:

62	54	56	73	78	63	68	70	66	54
58	65	55	57	69	67	61	64	53	56
58	76	57	48	57	68	82	78	72	75
65	67	64	54	58	62	67	80	87	69
74	78	70	76	46	60	63	68	74	67

Ошол тандалманын;
1) кеңдигин аныкта;
2) аралык узундугун 5 деп алып, тандалманы класстарга (топторго) ажырат (45–49; 50–54; 55–59;...) жана жыштыктар жадыбалын түз;
3) тандалманын орточо маанисин; модасын; медианасын эсепте;
4) жыштыктар полигонун түз;
5) салыштырма жыштыктар жадыбалын түз;
6) салыштырма жыштыктар жадыбалы боюнча диаграмма түз;
7) канча пайыз автомобилдин ылдамдыгы 70 км/саат тан чоң экен?

481. Найза атуу боюнча мелдеште катышкан 40 адам көрсөткөн натыйжалар (1 метр тактыгында) төмөнкү жадыбалда берилген:

28	31	31	38	43	38	34	52	36	38
35	48	34	45	41	35	42	42	42	41
27	32	29	33	49	37	48	40	47	39
26	25	37	40	28	37	37	44	44	43

1) Маалыматтарды класстарга (топторго) ажырат (25–29; 30–34;...) жана жыштыктар жадыбалын түз;
2) жыштыктар полигонун түз;
3) тандалманын: орточо маанисин, модасын; медианасын тап.

30-§. ТАНДОО УСУЛУ МЕНЕН КОМБИНАЦИЯЛЫК МАСЕЛЕЛЕРДИ ЧЫГАРУУ

Көптөгөн турмуштук маселелердин чыгарылышы бир канча болушу мүмкүн. Турган сөз, алардын ичинен өзүбүзгө эң макулун алабыз. Чыгарылыштардын санын эсептөөдө бардык варианттар (усул, мүмкүнчүлүк) дан эч бири „калып кетпестиги", „жоголбостугу" үчүн *тандоо* (эсептеп чыгуу) усулунан пайдаланышат. Бул усулдун мазмуну мисалдар чыгаруу жараянында ачылат.

1-маселе. 2, 3, 5 цифралары жардамында канча эки орундуу санды түзүүгө болот?

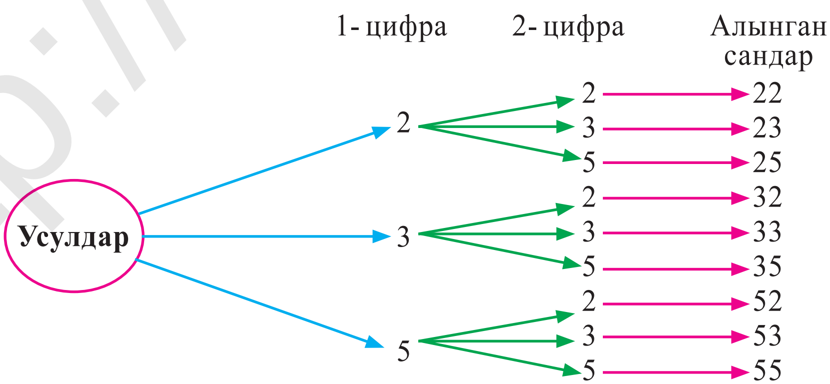
△ Жооптордон эч бирин түшүрүп калтырбастык, аларды кайталап койбостук үчүн сандарды, мисалы, өсүү тартибинде жазып чыгабыз: баштап 2 цифрасы менен, андан кийин 3 цифрасы менен, кийин 5 цифрасы менен башталган сандардан маселеге ылайыгын *тандап* жазабыз

22, 23, 25; 32, 33; 35, 52, 53, 55.

Жообу: 9 эки орундуу сан түзүүгө болот. ▲

1-маселени чыгаруунун дагы бир усулун көрөлү.

△Төмөнкү чиймени түзөбүз:

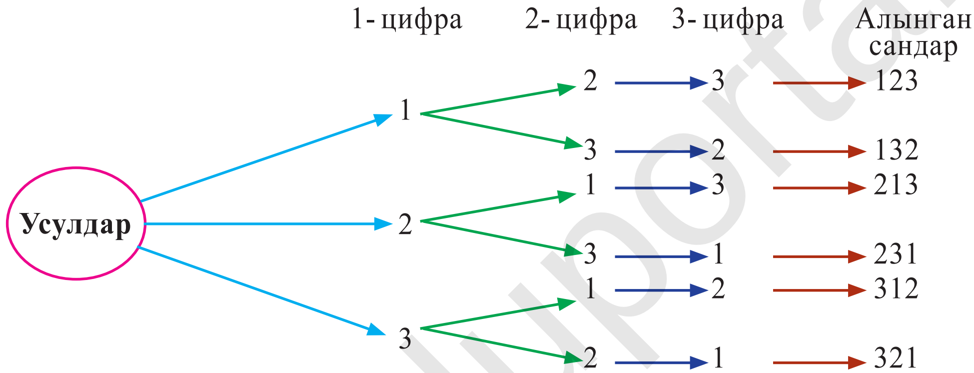


Жообу: Бардыгы 9. ▲

Бул чийме даракка окшойт, ошондуктан мындай чиймелерге болушу мүмкүн *варианттар* (усулдар, тандоолор) *дарагы* дейилет. Берилген 2, 3, 5 цифраларынан эки орундуу сан түзүү үчүн баштап 1-цифра тандалат, мунун болсо 3 усулу бар, ошондуктан дарактагы „тамыр“ – усулдарынан 3 бутак чыккан. Соң 2-цифра тандалат, мунун да 3 усулу бар, ошондуктан 1-цифра болууга талапкер 3 цифранын ар биринен 3 төн бутакча чыккан. Натыйжада 9 түрдүү эки орундуу сан алынат.

2-маселе. 1, 2, 3 цифраларынан, аларды кайталабай, бардыгы болуп канча түрдүү 3 орундуу сан түзүүгө болот?

△ Варианттар дарагын түзөбүз:

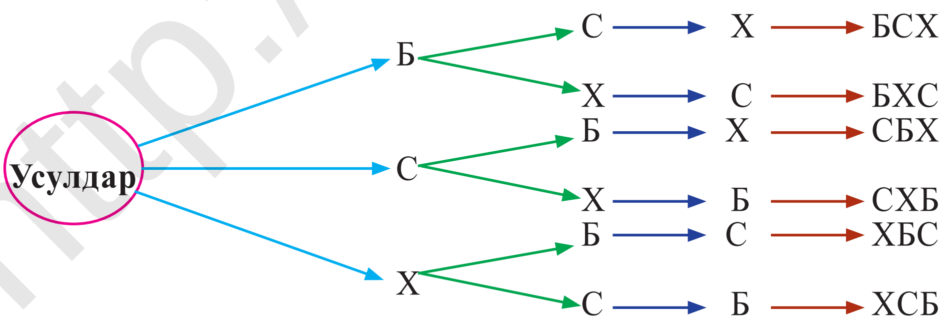


Жообу: 6. ▲

3-маселе. Туризм фирмасы Бухара, Самарканд, Хива шаарларына саякат уюштурмакчы. Мындай маршруттун бардыгы болуп канча түрдүү варианты (усулдары) бар?

△ Белгилөөлөрдү киргизебиз: Бухара – Б, Самарканд – С, Хива – Х.

Варианттар дарагын түзөбүз:



Жообу: Бардыгы 6 маршрут. ▲

4-маселе. 1) 1, 2 жана 3; 2) 0, 1, 2 жана 3 цифраларынан пайдаланып, болушу мүмкүн бардык эки орундуу сандарды жаз. Алардын саны N канчага барабар экен?

△ Комбинатордук маселелерди чыгаруу каражаттарынан бири *варианттар жадыбалы*. Мындай каражат жардамында эсептөөдө элементтер комбинациясынын „жоголуп“ калышы болбойт. Маселени варианттар жадыбалы жардамында чыгарып көрөлү. Төм0нкдой жадыбалдар түзөбүз:

1-цифра	2-цифра		
	1	2	3
1	11	12	13
2	21	22	23
3	31	32	33

1-цифра	2-цифра			
	0	1	2	3
1	10	11	12	13
2	20	21	22	23
3	30	31	32	33

$N = 3 \cdot 3 = 9$.
Жообу: 1) $N = 9$.

$N = 3 \cdot 4 = 12$. ▲
Жообу: 2) $N = 12$.

Көнүгүүлөр

482. Алишер, Бахрам, Салим футбол оюнун көрүү үчүн 3 чыпта сатып алышты. Чыпта боюнча алар 1-катардын 1; 2; 3-орундарына отуруга тийиш. Алар бул 3 орунга канча усул менен отурушу мүмкүн? Маселе боюнча варианттар дарагын чий.

483. 0, 4, 5 цифраларынан, цифралар кайталанышы мүмкүн болсо, бардыгы болуп канча 3 орундуу түрдүү сан түзүүгө болот? Маселе боюнча варианттар дарагын чий.

484. 4, 5, 8 цифраларынан, цифралар кайталанышы мүмкүн болсо, канча 3 орундуу сан түзүүгө болот?

485. Дүкөндө алма, алмурут, жүзүм бар. Ирода жана Насиба эжелер бул мөмөлөрдөн бирин тандашмакчы. Мындай тандоонун бардыгы болуп канча варианты бар? Варианттар дарагын чий.

486. 2, 4, 6, 8 цифраларынан түрдүү төрт орундуу сандарды түз. Цифралар кайталанбайт. Бул сандардын канчасы: 1) 4 кө; 2) 8 ге бөлүнөт?

487. Аскар апасы жана карындашына берүү үчүн эки гүл десте алмакчы. Гүл дүкөнүндө ак атыр гүл, кызыл атыр гүл, ромашкадан турган гүл дестелер бар экен. Аскар эки гүл дестены канча усулда тандашы мүмкүн? Варианттар дарагын чий.

488. Бакыт коёнуна сабиз, капуста, кызылча берет. Ал ошол жашылчалардан экөөсүн тандоого тийиш. Бакыт муну канча усулда ишке ашыра алат?

489.. Сейфтин шифринде 3 – *A, B, C* тамгалары бар. Ошол тамгалар жардамында бардыгы болуп канча шифр түзүүгө болот? Эки учурду кара: 1) тамгалар кайталанбайт; 2) тамгалар кайталанат.

490. Талиңкеде 2 алма, 2 алмурут, 2 шабдалы бар. Надыра менен Назима бул мөмөлөрдөн 3 өөсүн тандашмакчы. Тандоонун канча усулу (варианты) бар?

491. Алты бала 3 эки орундуу кайыкта сейилдешмекчи. Балдарды бул кайыктарга канча усулда бөлүштүрүүгө болот? Варианттар дарагын түз.

31-§. КОМБИНАТОРИКАНЫН НЕГИЗГИ ЭРЕЖЕСИ ЖАНА АНЫ МАСЕЛЕ ЧЫГАРУУДА КОЛДОО

Кымбаттуу окуучу! Сен 6-класста комбинаториканын кошуу жана көбөйтүү эрежелери боюнча баштапкы түшүнүктөр менен таанышкансың.

1-маселе. Самарканддан Ташкентке 4 жол менен келсе болот: самолёт, поезд, автобус жана жеңил машина (такси). Ташкенттен Кожокентке унаанын 3 түрү алып барат: поезд, автобус, такси. Самарканддан Кожокентке канча усулда келүүгө болот (41-сүрөт)?

41-сүрөт.

△ Самарканддан Ташкентке келүүнүн бардыгы болуп 4 жолу бар. Алардан бирин тандап, Ташкентке келдик, дейли. Эми Кожокентке баруунун 3 жолу – мүмкүнчүлүгү бар. Ошентип, Самарканддан Ташкент аркылуу Кожокентке баруунун бардыгы $4 \cdot 3 = 12$ усулу бар.

Бул усулдарды жазып чыгууга да болот. Белгилөөнү киргизели: самолёт (с), поезд (п), автобус (а), такси (т). Мисалы, сп жазуу Самарканддан Ташкентке самолётто келүүнү жана Ташкенттен Кожокентке поездде барууну билдирет. Бул белгилөөлөр жардамында Самарканддан Ташкент аркылуу Кожокентке баруунун бардык усулдары (варианттары, жолдору, мүмкүнчүлүктөрү) төмөнкүдөй болот:

сп	пп	ап	тп
са	па	аа	та
ст	пт	ат	тт

Бардык усулдардын саны: $4 \cdot 3 = 12$.

Жообу: 12. ▲

Жалпысынан алганда, A шаарынан B шаарына келүүнүн m ***усулу болсо жана ар бир усул үчүн*** B дан C шаарына келүүнүн n усулу болсо, анда A дан C га келүүнүн бардыгы болуп $m \cdot n$ усулу бар, б. а. A дан C га $m \cdot n$ усул менен келүүгө болот.

Бул эреже *көбөйтүүнүн эрежеси* болуп, ал комбинаториканын негизги эрежеси эсептелет.

2-маселе. „Makro“ супермаркетинин „Бардыгы үй үчүн“ бөлүмүндө 5 түрдүү пияла, 6 түрдүү талиңке, 4 түрдүү чай кашык бар. Наргиза эже түрдүү аталыштагы эки буюм сатып алмакчы. Ал муну канча усулда ишке ашырышы мүмкүн?

△ 1) Пияланы тандоонун 5 усулу бар. Талиңкени тандоонун 6 усулу бар. Пиала тандоонун ар бир усулуна талиңке тандоонун 6 усулу туура келет. Демек, көбөйтүүнүн эрежеси боюнча пиала жана талиңке жуптугун тандоонун $5 \cdot 6 = 30$ усулу бар. Куду ушундай ой жүгүртүп: 2) пиала жана кашыкты $5 \cdot 4 = 20$ усулда; 3) талиңке жана кашыкты $6 \cdot 4 = 24$ усулда тандап алууга болорун табабыз. Демек, түрдүү аталыштагы эки буюмду $30 + 20 + 24 = 74$ усул менен тандап алууга болот экен.

Жообу: 74 усулда. ▲

3-маселе. Канча үч орундуу санда бир гана 7 цифрасы бар?

△ 7 цифрасы 1-, 2-, 3-орунда (жүздүктөр, ондуктар, бирдиктер разрядында) болушу мүмкүн.

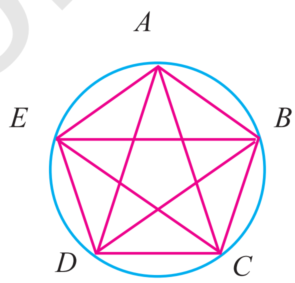
Эгерде 7 цифрасы 1-орунда турса, 2- жана 3-оруңдарды 9 цифра (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9) жардамында $9 \cdot 9 = 81$ усулда толтурууга болот.

Эгерде 7 цифрасы 2-орунда болсо, анда 1-орунда 0 жана 7 цифраларынан башка каалагандай цифра турушу мүмкүн. 1-орунду ээлөөнүн $10-2=8$ мүмкүнчүлүгү бар. Анда 3-орунда 7 цифрасынан башка каалагандай цифра тура алат; демек, мүмкүнчүлүктөрдүн саны $8 \cdot 9 = 72$.

Эгерде 7 цифрасы 3-орунда турса, анда 1-орунду ээлөө үчүн 8, 2-орунду ээлөө үчүн болсо 9 мүмкүнчүлүк бар. Ошентип, ондук жазуусунда бир гана 7 цифрасы бар үч орундуу сандар бардыгы болуп $81 + 72 + 72 = 225$ экен.

Жообу: 225. ▲

4-маселе. Айланада алынган 5 чекит A, B, C, D, E тамгалары менен белгиленген. Ар бир чекит башка ар бир чекит менен туташтырылса, канча кесинди алынат (42-сүрөт)?



42-сүрөт.

△ ***1-усул.*** Чекиттердин саны аз болгондуктан, маселеге ылайык фигураны чийип, кесиндилердин санын эсептеп чыгууга болот, алар 10. Бирок айланада алынган чекиттердин саны көп болсо (мисалы, 100, ...), ылайык фигураны чийүү жана андагы кесиндилер эсептөө кыйындашат. Анда башка жолду табуу керек.

2-усул. Айланада алынган 5 чекиттин ар биринен 4 төн кесинди жүргүзүлөт. Мындай кесиндилердин саны $5 \cdot 4 = 20$, бирок кесиндилердин санын эсептөөдө ар бир кесинди эки жолу эсептелген. Демек, биз 20 ны 2 ге бөдүшүбүз керек: $20 : 2 = 10$.

3-усул. A чекитин калган 4 чекит менен туташтырсак, 4 кесинди алабыз: AB, AC, AD, AE. B чекитинен да 4 кесинди жүргүзүүгө болот, бирок B дан жүргүзүлгөн бир кесинди ($BA = AB$) ни биз эсептедик. Демек, B чекитинен 3 жаңы (мурда эсептелбеген) кесинди жүргүзүлөт. Ушуга окшош, C дан 2, D дан болсо 1 жаңы кесинди жүргүзүүгө болот. E чекитинен жүргүзүлгөн 4 кесиндинин бардыгы мурда эсептелген ($EA = AE$; $EB = BE$; $EC = CE$; $ED = DE$). Демек, айланада белгиленген 5 чекитти туташтырган бардык кесиндилердин саны $4 + 3 + 2 + 1 + 0 = 10$.▲

5-маселе. 3, 4, 5, 6, 8, 9 цифраларынын жардамында бардыгы болуп: 1) цифралар кайталанбаса; 2) цифралар кайталанышы мүмкүн болсо, канча үч орундуу санды түзүүгө болот?

△ 1) Берилген цифралар 6 оо. Алардын каалагандай бири 3 орундуу сандын биринчи цифрасы болушу мүмкүн. Демек, 3 орундуу сандын биринчи цифрасын *тандоо мүмкүнчүлүгү* 6 оо болот. Анда 2-цифра калган 5 цифранын каалагандай бири болушу мүмкүн, б. а. 2-цифраны тандоо мүмкүнчүлүгүбүз 5 өө. Ушуга окшош, 3-цифраны тандоо мүмкүнчүлүгүбүз 4.

Демек, цифралар кайталанбаса, бардык үч орундуу сандардын саны $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ болот экен.

Жообу: 120. ▲

△ 2) Цифралар кайталанса, үч орундуу сандын 1-, 2-, 3-орундарына жазылган цифраны *тандоо мүмкүнчүлүктөрү* 6 дан болот, анткени берилген цифралардын саны 6 оо. Анда бардык 3 орундуу сандардын саны $6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3 = 216$ болот.

Жообу: 216. ▲

Көнүгүүлөр

492. Апасы Наргизага „Korzinka. Uz" супермаркетинен 3 түрдүү мөмө сатып алууну табыштады. „Korzinka. Uz" да 6 түрдүү алма, 4 түрдүү алмурут, 5 түрдүү жүзүм бар. Наргиза мөмөлөрдүн ар бир түрүнөн 1 кг дан алып, канча түрдүү жыйнак түзө алды?

493. Канча 4 орундуу санда бир гана 5 цифрасы бар?

494. Айланада: а) 10; б) 100; в) n чекит белгиленген. Ар бир чекит башка ар бир чекит менен туташтырылса, ар бир учурда бардыгы болуп канча кесинди алынат?

495. 1) 3; 2) 4; 3) 5; 4) 6; 5) 8; 6) 15 дос өз ара кол алышып көрүшүштү. Ар бир учурда кол алышуулардын саны канча болгон?

496. 10 курдаш өз ара шахмат турнирин өткөрүшмөкчү. Мында ар бир бала калган ар бир бала менен бир партия шахмат ойнойт. Бул турнирде бардыгы болуп канча партия ойнолот?

*Айтчы, **494–496**-маселелердин окшоштугу эмнеде?*

497. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 цифраларынын жардамында бардыгы болуп: 1) цифралар кайталанбаса; 2) цифралар кайталанышы мүмкүн болсо, канча үч орундуу санды түзүүгө болот?

498. 1, 2, 3, 4, 5 цифраларынын жардамында канча: а) эки орундуу; б) үч орундуу; в) төрт орундуу сандарды жазууга болот? Цифралар: кайталанбаган; кайталанган учурларды өз алдынча кара.

499. Футбол боюнча дүйнөлүк чемпионатта алтын, күмүш, коло медалдары үчүн болгон оюндарда 16 команда катышууда. Медалдар командалардын ортосунда канча усул менен бөлүштүрүлүшү мүмкүн?

500. Бир мамлекеттеа 4 шаар бар экен: *A*, *B*, *C* жана *D*. *A* шаарынан *B* га 6 жол, *B* шаардан *C* га 4 жол барчу экен. *A* дан *D* га 2 жол, *D* дан *C* га 3 жол менен барууга болот экен. *A* шаарынан *C* шаарына канча жол менен барууга болот?

501. Эгерде натуралдык сандын жазуусунда так сандар гана катышса, мындай санга „жагымдуу“ сан дейбиз. Канча: 1) 3 орундуу; 2) 4 орундуу „жагымдуу“ сан бар?

502. Жазуусунда жок дегенде бир жуп цифра катышкан 6 орундуу сандар канча?

Көрсөтмө: Жазуусунда так сандар гана катышкан 6 орундуу сандардын саны $5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5=5^6=15\,625$. Бардык 6 орундуу сандар болсо 900 000. Маселенин шартын канааттандырган 6 орундуу сандардын саны $900\,000-15\,625=884\,375$.

503. 4 түрдүү катты 4 түрдүү конвертке канча усулда салууга болот?

504. 5 окуучудан 2 өөсүн „Билимдер мелдешинде“ катышуу үчүн тандап алуу керек. Муну канча усулда аткарууга болот?

505. Доскада 12 зат атооч, 8 этиш жана 7 сын атооч жазылган. Сүйлөм түзүү үчүн ар бир сөз түркүмүнөн бирден алуу керек. Муну канча усул менен ишке ашырууга болот?

506. Шахмат тактайында ак жана кара пилди бири-бирин албагандай кылып, канча усулда жайлаштырууга болот (43-сүрөт)?

43-сүрөт.

507. Шахмат тактайына ак жана кара ферздерди, алар бири-бирин ала албагандай кылып канча усулда жайлаштырууга болот?

508. Шахмат тактайына ак жана кара шахтарды, оюндун эрежелерин бузбаган түрдө, канча усулда коюуга болот?
Көрсөтмө: 3 учурду кара:
1) ак шах бурчта турат;
2) ак шах тактайдын четинде (бирок бурчта эмес) турат;
3) ак шах тактайдын четинде эмес.

509. Мектептин ашканасында ак нан, кара нан жана үч түрдүү колбаса бар. Алардан канча түрдөгү бутерброд даярдоого болот? Бардык варианттарды жазып чык.

510. Кээ бир өлкөлөрдүн туусу түрдүү түстөгү 3 горизонталдуу же 3 вертикалдуу „тилкелерден“ турат. Ак, жашыл, көк түстүү кездемелер жардамында ушундай туулардын канча түрүн тигүүгө болот?

511. Бош жерлерге 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 цифраларынан бирин жазууга болсо, ○ + □ + △ = 10 „теңдеме“ канча чыгарылышка ээ болот? Цифралар кайталанышы мүмкүн. Эки учурду кара (маселен: 1) 1, 1, 8; 1, 8, 1; 8, 1, 1 түрдүү чыгарылыш; 2) бир чыгарылыш деп каралган учурлар).

512. Нурландын чемоданы код менен ачылат. Бул код үч түрдүү цифрадан турган болуп, ар бир цифра 3 төн чоң эмес. Коддо 13 саны катышпайт (мисалы, коддор тизмесинде 0, 13, 213... коддору жок). Нурлан кодду унутуп койгон болсо, кодду табуу үчүн ал көп дегенде канча жолу „урунушу“ керек болот?

513. Көп кабаттуу үйдө подъезддин эшиги код менен ачылат. Код 0 жана 1 цифраларынан түзүлгөн 4 орундуу сан (0000 жана 1111 сандар код эмес деп эсептелген). Эшиктин кодун унуткан болсоң, эшикти көп дегенде канча урунушта ача аласың?
Көрсөтмө: Адегенде бир 1 катышкан коддорду, андан кийин эки 1 болгон коддорду жана акырында, үч 1 болгон коддорду көрүү керек.

514. 20 кг күрүчтү 1 кг, 2 кг, 5 кг дуу таштардын жардамында ийиндүү таразада канча усулда тартууга болот?
△ Бул ишти төмөнкүдөй аткарууга болот:
1) 1 кг дуу таштын жардамында гана 1 усул;

2) 2 кг дуу таштын жардамында гана 1 усул;
3) 5 кг дуу таштын жардамында гана 1 усул;
4) 1 кг жана 2 кг дуу таштар жардамында 9 усул менен:

1 кг дуу таш	18	16	14	12	10	8	6	4	2
2 кг дуу таш	1	2	3	4	5	6	7	8	9

5) 1 кг жана 5 кг дуу таштардын жардамында 3 усул менен:

1 кг дуу таш	15	10	5
5 кг дуу таш	1	2	3

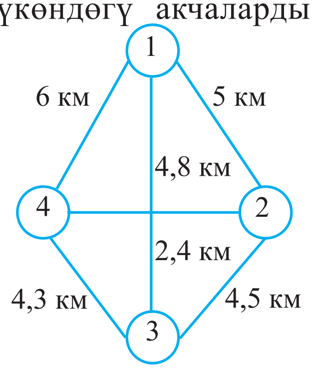
6) 2 жана 5 кг дуу таштын жардамында 1 усул: 5 2 кг, 2 5 кг;
7) 1 кг, 2 кг, 5 кг дуу таштардын жардамында 13 усул менен:

	Усулдардын саны												
Таштар, кг	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1 кг	1	3	5	7	9	11	13	8	6	4	2	3	1
2 кг	7	6	5	4	3	2	1	1	2	3	4	1	2
5 кг	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3

Демек, бардыгы болуп $1+1+1+9+3+1+13=29$ усул.
Жообу: 29 усул.▲

515. Фирмага 4 дүкөн тиешелүү. Инкассатор (дүкөндөгү акчаларды чогултуп, банкка тапшыруучу кызматчы) 1-дүкөндөн баштап бардык дүкөндөрдү кыдырып чыгат жана кайра 1-дүкөнгө кайтып келет. Болушу мүмкүн маршруттардан эң кыскасын тап (44-сүрөт).

Көрсөтмө: Ар бир маршрут үчүн 5 цифралуу кодду түз. Коддун биринчи жана акыркы цифрасы 1 болсун. Мисалы, 12431 маршруттун узундугу:
$5+2,4+4,3+4,8=16,5$ (км).



44-сүрөт.

IV глава боюнча көнүгүүлөр

516. Төмөнкү тандалма берилген:
18, 19, 17, 18, 14, 13, 17, 19, 18, 18, 20, 22, 19, 15, 24, 14, 18, 15, 13, 17, 20, 22, 21, 19, 18, 16, 13, 13, 15, 14.
Тандалманын: 1) жыштыктар жадыбалын түз; 2) орточо маанисин; 3) модасын; 4) медианасын; 5) кеңдигин тап; 6) жыштыктар полигонун түз.

517. Тандалманын: 1) вариациялык катарын түз; 2) орточо маанисин; 3) модасын; 4) медианасын; 5) кеңдигин тап:
–5, –4, –3, –2, 0, 3, 6, 6, 5, 5, 5, 7, 8, 8, 6, 7.

518. Жадыбалдагы маалыматтар боюнча тандалманын: 1) орточо маанисин; 2) модасын; 3) медианасын; 4) кеңдигин тап; 5) жыштыктар полигонун чий; 6) салыштырма жыштыктар жадыбалын түз жана ага ылайык диаграмма түз:

Байкоонун натыйжалары	7	8	9	10	12	14	15
Жыштык	6	7	8	9	10	6	4

519. 100 метрлүү аралыкка чуркоодо 8-класстын 20 окуучусу төмөнкү натыйжаларды көрсөттү (секунддарда):

14,3	16,1	14,7	16,9	24,1	22,4	19,8	14,2	17,4	14,5
20,8	19,9	15,4	18,4	20,2	18,3	20,1	18,4	18,3	16,2

Тандалманын: 1) вариациялык катарын; 2) жыштыктар жадыбалын түз; 3) орточо маанисин; 4) модасын; 5) медианасын; 6) кеңдигин эсепте; 7) жыштыктар полигонун түз.

520. 8-класстагы бир окуучунун „Алгебра“ предметинен эки чейрек бою алган баалары төмөнкүдөй экен:
4, 3, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 4, 4, 3, 2, 3, 4.
Тандалманын: 1) орточо маанисин; 2) модасын; 3) медианасын тап; 4) жыштыктар жадыбалын түз; 6) жыштыктар полигонун чий.

ӨЗҮҢДҮ ТЕКШЕРИП КӨР!

1. Футбол чемпионатында 18 команда катышып жатат. Эгерде ар бир команда башка команда менен өзүнүн майданында жана атаандашынын майданында ойносо, чемпионатта бардыгы болуп канча оюн ойнолот?

2. 8-класста 12 предметтен болду. Дүйшөнбү күнү жадыбалда 5 саат сабак болуп, ар бир саатта түрдүү сабак өтүлөт. Дүйшөнбү күнкү жадыбалды канча усулда түзүүгө болот?

3. 5 стулга 3 окуучуну канча усул менен отургузууга болот?

4. Математика боюнча 5 түрдүү китепти шкафтагы 5 орунга канча усулда коюуга болот?

5. Тандалманын: 1) орточо маанисин; 2) модасын; 3) медианасын; 4) кеңдигин тап; 5) жыштыктар жадыбалын түз; 6) жыштыктар полигонун чий:

$-3, -5, -3, -6, 1, 4, 7, 4, 9, 4.$

6. Тандалманын жыштыктар жадыбалы берилген:

Байкоо натыйжалары	2	1	5	4	0	–2	3	–1
Жыштык	3	2	1	5	1	2	4	2

Тандалманын: 1) орточо маанисин; 2) модасын; 3) медианасын тап; 4) жыштыктар полигонун чий; 5) салыштырма жыштыктар жадыбалын түз.

521. Эгерде: 1) цифралар кайталанбаса; 2) цифралар кайталанышы мүмкүн болсо, 0, 1, 2, 3, 4, 5 цифраларынан бардыгы болуп канча 4 орундуу санды түзсө болот?

522. 0, 3, 4, 5, 6, 7 цифраларынан бардыгы болуп канча 4 орундуу так санды түзүүгө болот?

523. Адатта, үч бурчтуктун чокулары латин алиппесинин чоң тамгалары менен белгиленет. Латин алиппесинде 26 тамга бар. Үч бурчтуктун чокуларын канча усулда белгилөөгө болот?

524. 8 стулга 3 окуучуну канча усул менен отургузса болот?

525. Абоненттин үй телефону 7 цифралуу болуп, 218 ден башталат. Абонент мүчө болгон бул телефон станциясы канча абонентке кызмат көрсөтө алат?

526. Канча усулда 5 фехтовальщиктен 2 өөсүн мелдеште катышуу үчүн тандап алууга болот?

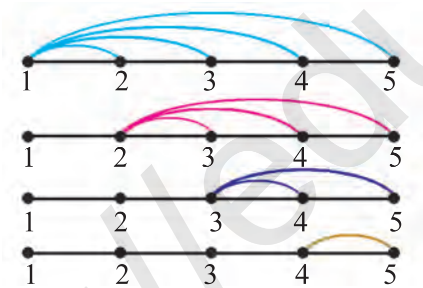
Аскардын чыгарышы: 5 фехтовальщиктен бирин тандоо мүмкүнчүлүгү 5 өө. 4 фехтовальщик калат. Алардан бирин 4 усулда тандаса болот. Демек, $5 \cdot 4 = 20$.

Жообу: $5 \cdot 4 = 20$ усул бар.

Назиманын чыгарышы: 5 фехтовальщикти „номерлеп“ чыгабыз жана алардан 2 адамдан турган топторду түзөбүз: 12; 13; 14; 15; 23; 24; 25; 34; 35; 45.

Жообу: 10 усулда тандоого болот.

Мадинанын чыгарышы:



4 жуптук: 12; 13; 14; 15;

3 жуптук: 23; 24; 25;

2 жуптук: 34; 35;

1 жуптук: 45.

Бардыгы $4 + 3 + 2 + 1 = 10$. **Жообу:** 10 усул менен.

Кимдин чыгарышы туура? Кимдики сага жакты? Эмнеси менен?

527. Сенин курдашың болгон бир бала: „Азырынча мен бир ышкыпоз баламын, чоңойсом чоң акын боломун“, деген жакшы ниетте ыр жазып жүрчү экен. Ырларынын бирине „Гүлдөр“ деп ат коюптур. Ырдын 1-сабы „Жазында кырда ачылды гүлдөр“ экен. Калган катарлар 1-катардагы сөздөрдүн ордун алмаштыруу натыйжасында алынган. Бул „ырда“ көп дегенде канча сап бар?

528. Түз сызыкта: 1) 4; 2) 6 чекит белгиленди. Ар бир учурда канча кесинди алынат?

529. „Райхан“ кафесинин менюсунда 3 түрдүү самса, 4 түрдүү 1-тамак, 5 түрдүү 2-тамак бар экен. 3 түрдүү тамакка буюртманы канча усулда берүүгө болот?

530. 2 алма, 2 алмурут, 2 шабдалы бар. 3 курбу мөмөлөрдү ар бири 2 түрдүү мөмө алгандай кылып бөлүп алышмакчы. Муну бардыгы болуп канча усулда аткарса болот?

IV глава боюнча сыноо көнүгүүлөрү – тесттер

1. Тандалманын орточо маанисин тап: –3, –2, –1, 0, 1, 4, 5, 7, 8, 6.

A) 2,5; B) 11; C) $2\frac{7}{9}$; D) аныктап болбойт.

2. Тандалманын медианасын тап: –1, 0, 2, 6, 6, 5, 10.

A) 6; B) 5; C) 5,5; D) 4,5.

3. Тандалманын медианасын тап: 10, 7, 6, 5, 4, 9.

A) B) 7; C) 6,5; D) 6,25.

4. Тандалманын кендигин тап: 120, 100, 140, 170, 95.

A) 120; B) 312,5; C) 70; D) 75.

5. Тандалманын модасын тап: –1, 0, 2, 2, 4, 5, 5, 7.

A) 2 жана 5; B) 2 C) 5; D) 3.

6. Жадыбалдагы маалыматтар боюнча тандалманын орточо маанисин тап:

Байкоонун натыйжалары	5	6	11	7	13	12
Жыштык	3	4	3	5	3	2

A) 9,5; B) 8,5; C) 10; D) 7.

7. 5 ке бөлүнгөн 6 орундуу сандар канча?

A) $18 \cdot 10^4$; B) $9 \cdot 10^4$; C) $5 \cdot 6!$; D) $6 \cdot 5^4$.

8. Цифралар кайталанышы мүмкүн болсо, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 цифраларынан канча 5 орундуу сан түзүүгө болот?

A) 8^5; B) 5^8; C) $8^2 \cdot 5^3$; D) $5^4 \cdot 8$.

9. Эки параллель түз сызык берилген болуп, алардын биринде 4, экинчисинде 3 чекит белгиленген. Чокулары ошол чекиттерде жаткан канча үч бурчтук бар?

A) 30; B) 33; C) 40; D) 32.

10. 3 окуучуну 6 стулга канча усулда отургузууга болот?

A) 120; B) 130; C) 100; D) 480.

11. Футбол командасындагы 11 адамдын ичинен команданын капитанын жана анын жардамчысын канча усулда тандап алууга болот?

A) 110; B) 55; C) 22; D) 121.

12. Багыстан айылынан Ташкентке 2 жол менен, Ташкенттен Үргөнчкө 4 жол менен барууга болот. Багыстандан Үргөнчкө чейин баруу жолдорунун саны канча?

A) 8; B) 10; C) 6; D) 12.

13. Бир окуучуда кызыктуу математика боюнча 7 китеп, экинчи окуучуда болсо 9 көркөм китеп бар. Алар канча усул менен биринин бир китебин экинчисинин бир китебине алмаштырышы мүмкүн?

A) 63; B) 49; C) 81; D) 126.

14. Атабектин туулган күнүндө аны куттуктоо үчүн 9 досу келди. Атабек алардын бардыгы менен, достору да өз ара кол алышып көрүштү. Бардыгы болуп кол алып көрүшүүлөрдүн саны канча?

A) 45; B) 90; C) 10; D) 50.

Практикалык жана предметтер аралык маселелер

531. Аскердик кызматка чакырылган жигиттерден 50 сүнүн боюн сантиметрлерде өлчөштү. Натыйжалары жадыбалда келтирилген:

159	156	160	154	155	154	158	163	158	180
156	157	155	158	159	158	159	154	167	158
158	156	175	156	164	162	168	157	159	162
164	169	158	167	172	166	175	177	183	182
172	170	172	166	171	174	162	167	169	173

1) маалыматтарды класстарга (топторго) ажырат: 154–158, 159–163, 164–168, 169–173, 174–178, 179–183.
Ар бир класска маалыматтардан канчасы таандык экенин аныкта;
2) мамычалуу диаграмма түз;
3) жыштыктар полигонун түз.

532. Кокусунан тандалган 30 түп козо өсүмдүгүндө ачылган косектердин саны жадыбалда берилген:

7	4	7	6	4	4	4	4	3	5	7	4	3	3	4
3	6	5	4	7	6	4	4	3	4	3	4	4	3	5

Маалыматтар боюнча:
1) жыштыктар жадыбалын түз;
2) жыштыктар полигонун түз.

533. Кыргыз жазуучусунун кыргыз тилиндеги кандайдыр чыгармасын танда. (Мисалы: Ч. Айтматовдун „Ак кеме“; Т. Касымбековдун „Адам болгум келет“ чыгармалары.) Анын кокусунан тандалган, мисалы, 2 бетиндеги тамгаларын эсепте. Кыргыз алиппесиндеги ар бир тамга сен тандаган беттерде канча жолу кездешет? Тамгалардын: 1) жыштыктар боюнча; 2) салыштырма жыштыктар боюнча бөлүштүрүлүшүн; 3) жыштыктар полигонун түз.

534. Алишер Наваийнин казалдарын көркөм окуу боюнча мелдеш болуп өттү. Анда 10 кыз жана 9 эркек бала катышты.
x – кыз балдар жаттаган казалдардын саны,
y – эркек балдар жаттаган казалдардын саны болсун. x жана y сандарынын жыштыктар боюнча бөлүштүрүлүшү төмөнкү жадыбалдарда берилген:

x – казалдар саны	4	5	6	8	12
n – жыштык	3	2	3	1	1

y – казалдар саны	4	5	6	8	9
n – жыштык	2	4	1	1	1

Жадыбал боюнча x жана y сандарынын:
1) модаларын; 2) медианаларын тап; 3) жадыбалдар боюнча жыштыктар полигонун түз.
$\triangle$ x жана y сандарынын жадыбалда бөлүштүрүлүшүн варианттардын төмөнкү катары көрүнүшүндө жазууга да болот:

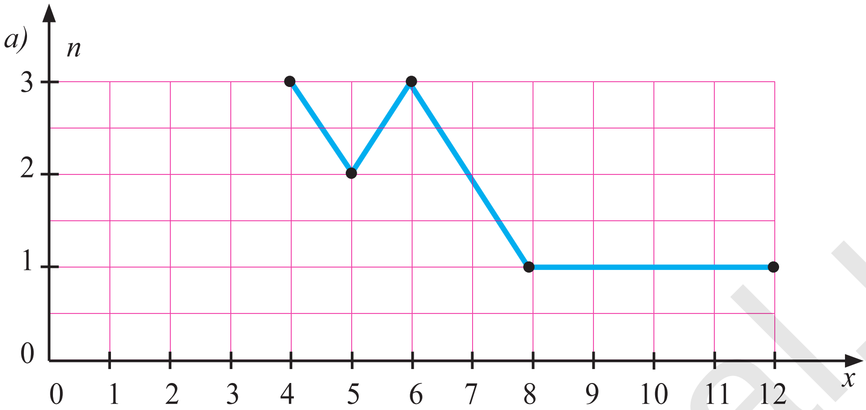
$$x:\ 4,\ 4,\ 4,\ 5,\ 5,\ 6,\ 6,\ 6,\ 8,\ 12 \qquad (1)$$
$$y:\ 4,\ 4,\ 5,\ 5,\ 5,\ 5,\ 6,\ 8,\ 9 \qquad (2)$$

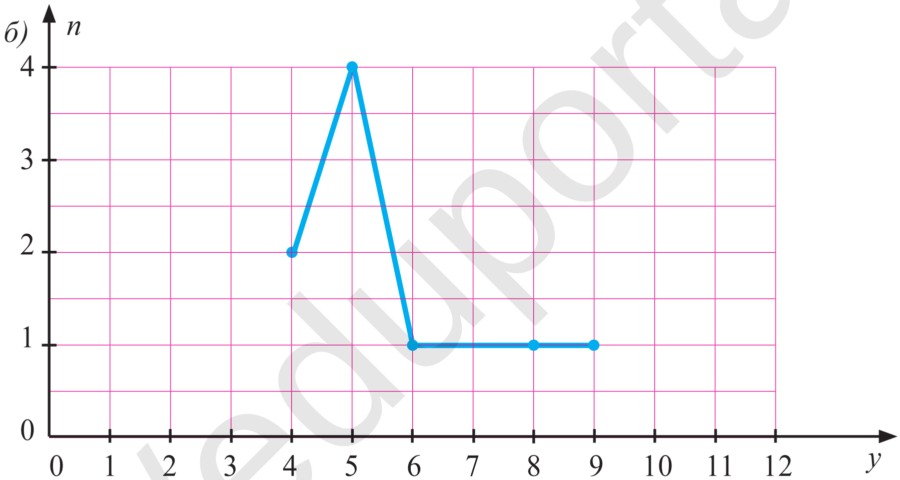
(1) тандалмада 2 мода бар: $M_{0_1}=4$ жана $M_{0_2}=6$. (2) тандалмада болсо мода бирөө: $M_0=5$.
(1) катарда 10 (жуп сандагы) мүчө бар. Анда медиана борбордогу эки мүчөнүн орто арифметикалыгына барабар:

$$M_e=\frac{5+6}{2}=\frac{11}{2}=5,5$$

(2) катарда 9 (так сандагы) мүчө бар. Анда медиананын мааниси борбордогу мүчөгө барабар: $M_e=5$.
Медиана вариациялык катарды барабар экиге бөлөт: медианадан сол жакта да, оң жакта да вариациялык катар элементтеринин саны бирдей, өз ара барабар болот.

Жообу: 1) (1) катар үчүн $M_{0_1}=4$; $M_{0_2}=6$; (2) катар үчүн $M_0=5$;
2) (1) катар үчүн $M_e=5,5$; (2) катар үчүн $M_e=5$;
3) x жана y сандарынын жыштыктар полигону 45-*а*, *б* сүрөттөрдө берилген. ▲





45-сүрөт.

535. Ар бир 8-класс үчүн, мисалы, I жана II чейректердин натыйжалары боюнча:
1) жыштыктар жадыбалын; 2) жыштыктар полигонун түз; 3) полигондорду салыштыр жана корутунду чыгар. Маалыматтарды класстык журналдардан мугалим жардамында ал.
Маселени кандайча чечкениңди баянда.

536. Мектебиңдин: 1) 5-; 2) 8-; 3) 11-класс окуучуларынын ар бир класстар үчүн: а) бойлорунун орточо бийиктигин; б) орточо массаларын тап. Маалыматтарды мектептин медайымынан аласың. Тиешелүү жыштыктар полигонун түз.

537. Байкоондун натыйжалары негизинде мектебинде 1 күндө орточо канча грамм бор иштетилишин аныкта. 1 күндө, 1 айда Республикабыз мектептеринде канча тонна бор иштетилишин болжолдо. Республикабыз жогорку окуу жайлары, лицей жана мектептери санын чогуу (эсептөө оңой болсун үчүн) 10000 деп ал.

538. 3 гектар жерге коон эгилген. Алар бышып калды. 1 гектар жерден орточо канча тонна түшүм алынышын баала. Бул ишти кандайча ишке ашырышыңды баскычма-баскыч баянда.

539. Автомашиналарды мамлекеттик каттоодон өткөрүүдө 3 цифра, 3 тамгадан жана шаар же облус үчүн белгиленген коддон пайдаланылат. Мисалы, автомашинанын номериндеги 01 код – машина Ташкентте катталганын билдирет. Кандай ойлойсуң, Ташкентта көп дегенде канча автомашина каттоодон өтүшү мүмкүн?

△ Номерлөөдө 24 тамга катышат, дейли. Номер 6 „жерди“ ээлейт. 1-„жерде“ 10 цифрадан каалагандай бири болушу мүмкүн. 2-„жерди“ 10 цифрадан бири ээлейт. 3-„жерде“ 9 цифрадан каалагандай бири болот. (3 бирдей цифралуу номер берилбейт, мындай номерлер аукциондо сатылат.) Номердеги 1-тамга да, 2- тамга да, 3-тамга да 24 тамганын каалагандай бири болушу мүмкүн. Демек, Ташкентте каттоодон өтүшү мүмкүн болгон бардык автомашиналардын саны $10 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 24 = 24^3 \cdot 900 = 12\ 441\ 600$.

Бул эсептөөдө тамгалардын номердеги 3 орундуу сандан „бир тамга – 3 орундуу сан – 2 тамга“ же „3 орундуу сан – 3 тамга“ көрүнүшүндө болушунун айырмасы жок.

Жообу: 12 441 600.▲

540. 2, 4, 7, 9 цифраларынан аларды кайталабастан канча 4 орундуу сан түзүүгө болот? Алардын канчасы: 2 ге, 4 кө, 11 ге бөлүнөт?

541. Туулган күнүңө чакырылган 4 досунду 4 стулга канча усулда отургуза аласың?

542. Талиңкеде 8 жаңгак бар эле. Апас каалагандай 3 өөн алмакчы болду. Муну ал канча усулда жасай алышы мүмкүн?

543. Залда 2 бош орун бар. 3 адамдан 2 өөсүн ошол орунга канча усулда отургузууга болот?

V BOB 8-КЛАССТЫН АЛГЕБРА КУРСУН КАЙТАЛОО ҮЧҮН КӨНҮГҮҮЛӨР

544. Эсепте:

1) $\frac{27}{32}\cdot\frac{8}{162}\cdot\frac{72}{69}$;

2) $\frac{38}{147}\cdot\frac{91}{152}:\frac{65}{264}$;

3) $\left(\frac{5}{8}+\frac{7}{12}\right)\cdot\left(3\frac{23}{58}-2\frac{9}{58}\right)$;

4) $\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{9}\right)\cdot\left(2\frac{23}{56}-3\frac{15}{56}\right)$;

5) $34{,}17:1{,}7+(2\frac{3}{4}+0{,}15):\frac{4}{5}-23\frac{3}{8}$;

6) $5{,}86-3\frac{5}{6}\cdot\frac{15}{23}+\frac{15}{28}:4\frac{2}{7}$;

7) $\dfrac{12\frac{4}{5}\cdot3\frac{3}{4}-4\frac{4}{11}\cdot4\frac{1}{8}}{11\frac{2}{3}\cdot2\frac{4}{7}}$;

8) $\dfrac{5\frac{1}{7}\cdot5\frac{1}{4}+5\frac{5}{8}\cdot3\frac{1}{5}}{10\frac{5}{13}:1\frac{1}{26}}$.

545. Эки сандан бири a га барабар, экинчиси андан 7 ге чоң. Ошол сандар көбөйтүндүсүнүн экиленгенин тап. Ошол көбөйтүндүнүн маанисин $a=\frac{1}{2}$ 2 болгондо эсепте.

546. Эки сандын суммасы 30 га барабар. Сандардан бири a. Ошол сандардын экиленген көбөйтүндүсүн жаз. Ошол көбөйтүндүнүн маанисин $a = -2$ болгондо эсепте.

547. a жүздүк, b ондук жана c бирдиктен түзүлгөн натуралдык санда канча бирдик бар экендигин көрсөткөн формула түз. Ошол цифралар жардамында, бирок тескери тартипте жазылган санда канча бирдик бар?

548. a килограмм жана c грамм канча граммды түзөт? Граммдар санын x тамгасы менен белгилеп, жоопту формула менен жаз.

Амалдарды аткар (**549–552**):

549. 1) $\left(\frac{c-d}{c^2+dc}-\frac{c}{d^2+cd}\right):\left(\frac{d^2}{c^3-cd^2}+\frac{1}{c+d}\right);$

2) $\left(\frac{2n}{k+2n}-\frac{4n^2}{k^2+4nk+4n^2}\right):\left(\frac{2n}{k^2-4n^2}+\frac{1}{2n-k}\right);$

3) $\left(\frac{b^2}{b+x}-\frac{b^3}{b^2+x^2+2bx}\right):\left(\frac{b}{b+x}-\frac{b^2}{b^2-x^2}\right);$

4) $\left(\frac{2q}{2q+m}-\frac{4q^2}{4q^2+4mq+m^2}\right):\left(\frac{2q}{4q^2-m^2}+\frac{1}{m-2q}\right).$

550. 1) $1+a-\frac{a-1}{a}+\frac{a-1}{2a}-\frac{3a}{2};$

2) $\frac{m+1}{m^2+m+1}-\frac{2}{1-m}+\frac{3m^2+2m+4}{1-m^3};$

3) $\frac{m+n}{3}-m+2n;$

4) $m+n-\frac{2m-n}{5}-\frac{m+n}{2}.$

551. 1) $\frac{a^3+2a^2}{a^2-1}\cdot\frac{(a+1)^3(a-1)}{a^2(a+2)};$ 2) $\frac{(a^2+ab)^2}{a^2-b^2}:\frac{(a+b)^2}{(ab-b^2)^2}.$

552. 1) $1{,}5\cdot\left(2b-\frac{3b}{7}\right)-1\frac{5}{7}\cdot(3b-5)+\frac{9b^2-16}{4-3b};$

2) $\frac{x+3a}{x+a}-\frac{x}{x-a}+\frac{2a^2-ax+x^2}{a^2x^2}:\frac{x^2-a^2}{a^2x^2}.$

553. Эгерде $x>\frac{1}{2}$ жана $y>4$ болсо, анда

1) $4x+3y>14;$ 2) $2xy-3>1;$ 3) $x^2y>1;$ 4) $x^3+y^2>16$

экендигин далилде.

554. (Оозеки.) Барабарсыздыкты канааттандырган эң чоң бүтүн санды тап:
1) $n \leq -7$; 2) $n < -3{,}6$; 3) $n \leq 4{,}8$; 4) $n \leq -5{,}6$.

555. (Оозеки.) Барабарсыздыкты канааттандырган эң кичине бүтүн санды тап:
1) $n > -12$; 2) $n \geq -5{,}2$; 3) $n \geq 8{,}1$; 4) $n \geq -8{,}1$.

556. Барабарсыздыкты чыгар:
1) $x + 4 > 3 - 2x$; 2) $5(y+2) \geq 8 - (2 - 3y)$;
3) $2(0{,}4 + x) - 2{,}8 \geq 2{,}3 + 3x$; 4) $7(x + 5) + 10 > 17$;
5) $\frac{3-x}{2} + \frac{x}{4} > 7$; 6) $\frac{x}{6} - \frac{2-x}{3} \leq 5$.

557. Эгерде
1) $0 \leq x \leq 7{,}2$; 2) $-5\frac{1}{3} \leq x \leq 0$; 3) $4 < \frac{1}{3}x < 5$;
4) $11 < 3x < 13$; 5) $-3{,}1 < x \leq 4$; 6) $12 < 5x < 21$
болсо, x кандай бүтүн маанилерди кабыл ала алат?

558. Барабарсыздыктар системасын чыгар:

1) $\begin{cases} 5x - 2 \geq 6x - 1, \\ 4 - 3x > 2x - 6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7(x+1) - 2x > 9 - 4x, \\ 3(5 - 2x) - 1 \geq 4 - 5x; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 12x - 3(x+2) \geq 7x - 5, \\ 13x + 6 \leq (x - 5) \cdot 2 + 3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{4x-5}{7} < \frac{3x-8}{4}, \\ \frac{6-x}{5} - 1 < \frac{14x-3}{2}. \end{cases}$

559. Барабарсыздыктар системасынын чыгарылыштары болгон бүтүн сандарды тап:

1) $\begin{cases} \frac{2x-5}{4} - 2 \leq \frac{3-x}{4}, \\ \frac{5x+1}{5} > \frac{4-x}{4}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{10x-1}{3} - \frac{2-5x}{4} < \frac{5-3x}{6}, \\ \frac{2x+1}{2} \geq \frac{3+7x}{4} - \frac{5+4x}{5}. \end{cases}$

560. Теңдемени чыгар:
1) $|x - 2| = 3{,}4$; 2) $|3 - x| = 5{,}1$; 3) $|2x + 1| = 5$;
4) $|1 - 2x| = 7$; 5) $|3x + 2| = 5$; 6) $|7x - 3| = 3$.

561. Барабарсыздыкты чыгар:

1) $|x-2|\le 5{,}4$; 2) $|x-2| \ge 5{,}4$; 3) $|2-x|<5{,}4$;
4) $|3x+2|\ge 5$; 5) $|2x+3|<5$; 6) $|3x-2{,}8| \ge 3$.

562. Тамырдан чыгар:

1) $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}}$; 2) $\sqrt{5\frac{4}{9}}$; 3) $\sqrt[3]{\frac{8b^6}{343a^9}}$, $a \ne 0$; 4) $\sqrt[4]{\frac{16x^8}{81y^4}}$, $y>0$.

563. Жөнөкөйлөштүр:

1) $(3\sqrt{20}+7\sqrt{15}-\sqrt{5}):\sqrt{5}$; 2) $(\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{14}+\sqrt[3]{56}):\sqrt[3]{7}$;

3) $2\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{6}-3\sqrt{\frac{2}{3}}$; 4) $7\sqrt{1\frac{3}{4}}-\sqrt{7}+0{,}5\sqrt{343}$.

564. Туюнтмалардын маанилерин салыштыр:

1) $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{-1/3}$ жана $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{-1/2}$; 2) $(2\sqrt{0{,}5})^{0{,}3}$ жана $(2\sqrt{0{,}5})^{0{,}37}$.

565. Туюнтманы жөнөкөйлөштүр:

1) $\frac{\sqrt[6]{a\sqrt[3]{a^{-1}}}}{a^{-\frac{2}{9}}}$; 2) $\frac{\sqrt[4]{x^3\sqrt[3]{x}}}{x^{\frac{1}{3}}}$; 3) $(16a^{-4})^{-\frac{3}{4}}$; 4) $(27b^{-6})^{\frac{2}{3}}$.

566. Көбөйтүүчүнү тамыр белгисинин астынан чыгар:

1) $\sqrt{9a^2b}$, мында $a<0$, 2) $\sqrt{25a^2b^3}$, мында $a>0, b>0$;

3) $\sqrt{8a^3b^5}$, мында $a<0$, $b<0$; 4) $\sqrt{12a^3b^3}$, мында $a<0$, $b<0$.

567. Көбөйтүүчүнү тамыр белгисинин астына киргиз:

1) $x\sqrt{5}$, мында $x\ge 0$; 2) $x\sqrt{3}$, мында $x<0$;

3) $-a\sqrt{3}$, мында $a\ge 0$; 4) $-a\sqrt{5}$, мында $a<0$.

568. Эсепте:

1) $\sqrt[3]{1000}\cdot(0{,}0001)^{0{,}25}+(0{,}027)^{\frac{1}{3}}\cdot 7{,}1^{0}-\left(\frac{10}{13}\right)^{-1}$;

2) $\left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}:\frac{1}{\sqrt{11\frac{1}{9}}}+(6{,}25)^{\frac{1}{2}}:(-4)^{-1}$;

3) $\left(1\frac{61}{64}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot(0{,}008)^{\frac{1}{3}}:(-2)^{-2}$.

569. Туюнтманын маанисин тап:

1) $\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}-\frac{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}{a-b}\right)\cdot\frac{a-2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b}{a}$, мында $a=3, b=12$.

2) $\frac{m+2\sqrt{mn}+n}{n}\cdot\frac{\sqrt{mn}+n}{m-n}-\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}$, мында $m=5, n=20$.

570. Теңдемени чыгар:

$x^{\frac{1}{2}}=2$; 2) $x^{-\frac{1}{2}}=3$; 3) $x^{-3}=8$; 4) $x^{\frac{5}{2}}=0$; 5) $x^{-\frac{1}{3}}=27$.

571. $y=-\frac{25}{x}$ функциянын графигине:

1) $A(\sqrt{5};-5\sqrt{5})$; 2) $B(-5\sqrt{2};5\sqrt{2})$; 3) $C(0{,}1;\ 250)$

чекит тиешелүү болушун же болбостугун аныкта.

572. Функциянын графигин түз:

1) $y=\frac{4}{x}$; 2) $y=-\frac{6}{x}$;.

Функциянын кайсы аралыктарда чоңоюшун, азайышын график боюнча аныкта; функциянын жуп же тактыгын аныкта.

573. Туюнтманы жөнөкөйлөштүр:

1) $\dfrac{\sqrt{ab}\,\sqrt[4]{a}}{(a+2)\sqrt[4]{a^{-1}b^{2}}}-\dfrac{a^{2}+4}{a^{2}-4}$; 2) $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{b+\sqrt{ab}}-\dfrac{\sqrt{a}}{b-\sqrt{ab}}\right)\cdot\dfrac{b-a}{2\sqrt{ab}}$;

3) $\left(\dfrac{a-b}{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}}-\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}+a^{\frac{1}{4}}}\right)\cdot\dfrac{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}}{(a^{-1}b)^{\frac{1}{2}}}$; 4) $\left(\dfrac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{a-b}-\dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}\right)\cdot\dfrac{a-b}{\sqrt{ab}}$.

Туюнтманы жөнөкөйлөштүр (**574–575**):

574. 1) $\sqrt{5+\sqrt{21}}$; 2) $\sqrt{4+\sqrt{7}}$; 3) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$; 4) $\sqrt{8-2\sqrt{15}}$.

575. 1) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[4(a+1)+(\sqrt[3]{a\sqrt{a}}-1)^{2}-\left(\dfrac{\sqrt[6]{ab^{2}}+\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}+\sqrt[3]{a}\right)^{3}\right]^{\frac{1}{2}}$, мында $0<a\leq 1$;

2) $\dfrac{a^{-1}b^{-2}-a^{-2}b^{-1}}{a^{-\frac{5}{3}}b^{-2}-b^{-\frac{5}{3}}a^{-2}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}$; 3) $\dfrac{a^{-2}\cdot b^{-3}-a^{-1}\cdot b^{-2}}{a^{-\frac{9}{2}}\cdot b^{-\frac{11}{2}}-a^{-\frac{11}{2}}\cdot b^{-\frac{9}{2}}}$.

Теңдемени чыгар (**576–577**):

576. 1) $x^{2}=7$; 2) $x^{2}=11$; 3) $x^{2}+6x=0$;
4) $x^{2}+5x=0$; 5) $x^{2}=8x$; 6) $x^{2}=12x$.

577. 1) $1{,}5x-4x^{2}=6{,}3x-x^{2}$; 2) $11y-15=(y+5)(y-3)$;

3) $3x(x+2)=2x(x-2)$; 4) $\dfrac{1}{4}(3x^{2}+1)-\dfrac{40x+3}{6}=\dfrac{x-3}{12}$;

5) $\dfrac{y^{2}-5}{4}-\dfrac{15-y^{2}}{5}=\dfrac{y^{2}-4}{3}$; 6) $\dfrac{2x^{2}-1}{4}=\dfrac{1+1{,}5x^{2}}{5}$.

578. Эгерде
1) $(y-3)^{2}>(3+y)(y-3)$ болсо, анда $y<3$ болушун;
2) $(3a+b)^{2}<(3a-b)^{2}$ болсо, анда $ab<0$ болушун далилде.

579. Эгерде $x<\dfrac{a+b}{2}$, $y<\dfrac{a+c}{2}$, $z<\dfrac{b+c}{2}$ болсо, анда $x+y+z<a+b+c$ болушун далилде.

580. Тик бурчтуу параллелепипеддин бийиктиги 15 см ден чоң, туурасы 2 см ден, узуну болсо 0,3 м ден чоң. Анын көлөмү 0,9 дм^3 ден чоң экендигин далилде.

581. y тин каалагандай маанисинде
1) $(y-3)(y-1)+5$; 2) $(y-4)(y-6)+3$
туюнтма оң болушун далилде.

582. k нын $4y^2-3y+k=0$ теңдеме чыныгы тамырларга ээ болбогон маанилеринин жыйнагын тап.

583. k нын кандай маанилеринде -2 саны $(k-2)x^2-7x-2k^2=0$ теңдеменин тамыры болот?

584. Теңдемени чыгар:

1) $3x^2+8x+5=0$; 2) $5x^2+4x-12=0$;

3) $\dfrac{6}{4x^2-1}-\dfrac{x}{2x-1}=\dfrac{5}{2x+1}$; 4) $\dfrac{5}{x-1}+\dfrac{3x-3}{2x+2}=\dfrac{2x^2+8}{x^2-1}$;

5) $\dfrac{30}{x^2-1}-\dfrac{13}{x^2+x+1}=\dfrac{7+18x}{x^3-1}$; 6) $\dfrac{2}{x^2-x+1}=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2x-1}{x^3+1}$.

585. Барабарсыздыкты чыгар:

1) $(x+2)^2<(x-3)^2-8(x-5)$;

2) $\dfrac{2+x}{9}-x\leq\dfrac{2x-5}{3}-(4-x)$;

3) $\dfrac{(x-3)(x+2)}{4}-\dfrac{(x-7)}{3}>\dfrac{(x-6)^2}{4}+x$;

4) $6x+\dfrac{(3+x)^2}{2}>\dfrac{8-2x}{5}+\dfrac{(x+3)(x+7)}{2}$.

586. Жакындашуу каталыгын тап:

1) 0,2781 дин 0,278 менен; 2) –2,154 түн –2,15 менен;

3) $-\dfrac{7}{18}$ нин $-\dfrac{1}{3}$ менен; 4) $\dfrac{3}{11}$ түн 0,272 менен.

587. 3,5 саны 3,5478 санынын 0,05 ке чейин аныктык менен алынган болжолдуу мааниси экендигин далилде.

588. $\frac{7}{9}$ санынын 0,777 саны менен жакындашышынын салыштырма каталыгын тап.

589. Кокусунан тандалган 60 түп козо өсүмдүгүнүн негизги сабагындагы муундардын саны төмөнкү жадыбалда берилген:

10	11	10	10	10	9	9	11	9	9
11	11	11	7	9	10	10	10	10	10
10	10	11	11	11	10	10	11	10	10
9	10	9	9	9	9	10	9	10	10
10	10	10	10	11	9	11	9	9	12
9	10	8	11	10	10	9	10	10	11

Тандалманын: 1) жыштыктар жадыбалын түз; 2) орточо маанисин; 3) модасын; 4) медианасын; 5) кеңдигин эсепте; 6) жыштыктар полигонун түз.

590. Канча 4 орундуу санда бир гана 0 цифрасы бар?

591. 0, 1, 2, 3, 5, 8 цифраларынан аларды кайталабастан бардыгы болуп канча 3 орундуу сан түзсө болот?

592. 6 конокту 6 стулга канча усулда отургузууга болот?

593. Адабият китебиндеги кандайдыр текстти танда. Анын эки бетиндеги бардык тамгаларды эсепте. Үндүү тамгалардын текстте кездешүү жыштыгын аныкта. Жыштыктар жадыбалын түз. Жыштыктар полигонун түз. Корутунду чыгар жана аны дептериңе жазып кой.

КӨНҮГҮҮЛӨРГӨ ЖООПТОР

I глава

1. 2) 0; 4) 5. **2.** 2) –2; 4) 0. **3.** $(7m)$т; 168 т. **4.** 1) $(60m)$ мин; 2) $\frac{p}{60}$ 3) мин; $\left(60m+l+\frac{p}{60}\right)$мин. **5.** $3(x-y)$; 2) 4,5; 4) 2,5. **6.** $(x+y)$ $(x-y)$; 2) $-\frac{11}{64}$; 4) 0,104. **7.** 2) $-1\frac{2}{3}$. **8.** 2) 4. **9.** 1, 3, 15, 21. **10.** 2) $(m-1)m$; 4) $(2p+1)\times$ $\times(2p+3)(2p+5)$. **12.** $(p-q)$t; 1) 5t; 2) q саны p дан чоң болбойт; q саны p га барабар болушу мүмкүн. **13.** $400n+500m$; 155000; 155000. **15.** 187200 м³, $(37440m)$ м³. **16.** $s=3\frac{1}{6}c+1\frac{2}{3}a+2\frac{1}{2}b$, 53 km. **23.** $\frac{a^2-b^2}{(a-b)^2}$.

25. 2) 5; 4) 1,9; 6) –4. **26.** 2) $V=\frac{m}{p}$; 4) $a=\frac{p}{2}-b$. **27.** $x=\frac{np}{1000a}$, $x=3$.

28. $t=\frac{a}{cn}$, $t=15$. **30.** 2) $\frac{4}{5}$; 4) –2. **31.** 2) $\frac{2}{3}$; 4) $\frac{b}{2c}$. **32.** 2) $\frac{1}{b^4}$; 4) b^2.

33. 2) $\frac{2}{7}$; 4) $\frac{b}{3a}$; 6) $\frac{a^2b}{5c}$. **34.** 2) $\frac{7a}{5}$; 4) $\frac{1}{3(a-b)}$; 6) $-\frac{1}{3}$. **35.** 2) $\frac{1}{(m+n)^3}$; 4) $3y-2x$; 6) $\frac{2}{a(a-b)}$. **36.** 2) $\frac{2a}{m-n}$; 4) $\frac{4a-1}{2a+3}$; 6) $\frac{1+b}{1-b}$. **37.** 2) $\frac{q^2}{p-q}$; 4) $\frac{m}{n}$; 6) $-\frac{x}{y}$. **38.** 2) $\frac{3a+2b}{2a+3b}$; 4) $-\frac{1}{ab}$. **39.** 2) $\frac{1}{a+b}$; 4) $5+x$; 6) $-\frac{c+2}{2a}$.

40. 2) $10-7b$; 4) $\frac{y}{5+y}$; 6) $\frac{5ab}{a^2-b^2}$. **41.** 2) $\frac{1}{b+7}$; 4) $\frac{1}{1-2p}$. **42.** 2) $\frac{4a+1}{4a-1}$; 4) $\frac{10(m+n)}{3(m-n)}$. **43.** 2) $n-m$; 4) $\frac{1}{5-2x}$. **44.** 2) $\frac{3y-4x}{3y+4x}$; 4) $\frac{6-c}{6+c}$; 6) $\frac{3c-2b}{a}$.

45. 2) $a+1$; 4) $\frac{1}{2}$. **46.** 2) $\frac{b}{ab}$ жана $\frac{2a}{ab}$; 4) $\frac{2a}{2b}$ жана $\frac{a}{2b}$; 6) $\frac{32}{60}$ жана $\frac{25}{60}$. **47.** 2) $\frac{9x^2}{12xy}$, $\frac{72}{12xy}$ va $\frac{16y^2}{12xy}$; 4) $\frac{2ax^2}{4x^3}$ жана $\frac{b}{4x^3}$. **48.** 2) $\frac{6b^2}{2b}$ жана $\frac{a^2}{2b}$; 4)

$\frac{2b^2}{6ab}, \frac{9ac}{6ab}, \frac{6a^2b^2}{6ab}$. **49.** 2) $\frac{3a^2}{18a^2b^2}$, $\frac{2(a^2+b^2)}{18a^2b^2}$ жана $\frac{a(3-a^2)}{18a^2b^2}$; 4) $\frac{21y^3}{60x^4y^4}$, $\frac{310x^3y}{60x^4y^4}$ жана $\frac{80x^2}{60x^4y^4}$. **50.** 2) $\frac{6a}{(a-1)a}$ жана $\frac{2(a-1)}{(a-1)a}$; 4) $\frac{8a^2}{12(a+1)}$ жана $\frac{15a^2}{12(a+1)}$. **51.** 2) $\frac{7a(3x+y)}{9x^2-y^2}$ жана $\frac{6b(3x-y)}{9x^2-y^2}$; 4) $\frac{6x}{8x+8y}$ жана $\frac{x}{8x+8y}$. **52.** 2) $\frac{7a}{x^2-9}$ жана $\frac{a(x-3)}{x^2-9}$; 4) $\frac{6x(x+y)}{x^2-y^2}$, $\frac{7xy(x-y)}{x^2-y^2}$ жана $\frac{3}{x^2-y^2}$. **53.** 2) $\frac{28c(b+c)}{70(b^2-c^2)}$, $\frac{6a^2}{70(b^2-c^2)}$ жана $\frac{35b(b-c)}{70(b^2-c^2)}$; 4) $\frac{15x(x+1)}{12x(x^2-1)}$, $\frac{-48x^2}{12x(x^2-1)}$ va $\frac{4(x-1)}{12x(x^2-1)}$. **54.** 2) $\frac{5a}{b^3}$; 4) $\frac{x-y}{n+a}$. **55.** 2) $\frac{2a}{c^2}$; 4) $\frac{7}{a^2}$; 6) $\frac{8}{ab}$. **56.** 2) $\frac{11}{28}$; 4) $\frac{3}{5b}$; 6) $\frac{3ad-b}{12d}$. **57.** $\frac{15+ab}{5a}$; 4) $\frac{2+7b}{b}$. **58.** 2) $\frac{2c+4c^2-3}{c^2}$; 4) $\frac{mn-kn^2+m^2}{n^2}$. **59.** 2) $\frac{k-n}{mnk}$; 4) $\frac{bd+ba}{acd}$; 6) $\frac{2n^2-3m}{mn^3}$. **60.** 2) $\frac{4a^4-21cb^3}{18a^3b^4}$; 4) $\frac{20y-21x+22}{28x^2y^2}$; 6) $\frac{b(cd^2+d+c)}{(cd)^2}$. **61.** 2) $\frac{3x}{2(1-x)}$; 4) $\frac{8y-25x}{10(y-3)}$. **62.** 2) $\frac{11}{10(b+1)}$; 4) $\frac{5x}{8(x+y)}$. **63.** 2) $\frac{5b^2-2a^2}{ab(x+y)}$; 4) $\frac{a+b-y}{ab}$. **64.** 2) $\frac{2(2a+3)}{a(1-a)}$; 4) $\frac{67b-3a}{40(a^2-b^2)}$. **65.** 2) $\frac{x-1}{x^2-9}$; 4) $\frac{2x^2+3x+2}{x^2-16}$. **66.** 2) $\frac{6n-47}{n^2-49}$; 4) $\frac{24y^2+y+1}{1-9y^2}$. **67.** 2) $\frac{13a+4}{(3a+1)^2}$. **68.** 2) $\frac{2-11x}{(3x+1)^2}$; 4) $\frac{4-7n+7m}{(n-m)^2}$; 6) $\frac{2x^2+18}{(x^2-9)^2}$. **69.** 2) $\frac{b^2-3b}{b-2}$; 4) $\frac{1}{a+1}$. **70.** 2) $-\frac{1}{x+y}$; 4) $\frac{2(24-a)}{4a^2-9}$. **71.** 2) $\frac{b-3b^2-14}{6(b^2-1)}$; 4) $\frac{28n^2-4m^2+9mn}{m(4n^2-m^2)}$; 6) $\frac{4a^2-4a-b}{a^2+2a}$. **72.** 2) $\frac{2a}{a^3+8}$; 4) $-\frac{6m}{m^3-27}$. **73.** 2) $-\frac{12}{19}$. **74.** 2) $\frac{4}{13}$; 4) $\frac{15}{2}$. **75.** 2) $\frac{k^2}{mn}$; 4) $\frac{3mk}{4nd}$; 6) $\frac{2a^2b^2}{c^3}$. **78.** 2)

2; 4) $\frac{a}{bc}$; 6) $\frac{ac}{b}$. **79.** 2) $\frac{k^2}{mn}$; 4) $\frac{3md}{2nk}$; 6) $\frac{15a^2c^2}{d}$. **80.** 2) $\frac{18a^2}{7}$; 4) $\frac{1}{a}$; 6) $\frac{a^3b^3}{d^2}$. **81.** 2) $\frac{2y}{5c^3}$; 4) $\frac{2d^2a^2}{3c}$; 6) $\frac{22p^3n}{m^4}$. **82.** 2) $10a^2b$; 4) $\frac{1}{4a^2b}$. **83.** 2) $\frac{2b}{a}$; 4) $3b$; 6) $a-b$. **84.** 2) $\frac{b}{3(1+a)}$; 4) $\frac{1}{3m^2(m+n)}$; 6) $\frac{5}{3(a-b)}$. **85.** 2) $\frac{-3x^2(x+y)}{2(x^2+y^2)}$; 4) $\frac{-18(n-m)^2(n+m)}{n(n+p)^2}$; 6) $\frac{1}{a^2-b^2}$. **86.** 2) $b–3$; 4) $(a–1)(2a–1)$. **87.** 2) $\frac{2(a+1)}{3}$; 4) 1; 6) $\frac{b^2}{b^2+1}$. **88.** 2) $\frac{a^2(b^2-1)}{b^2}$; 4) $\frac{2(m+n)}{n}$. **89.** 2) $\frac{4ab}{a^2-b^2}$; 4) $\frac{1}{6(c+d)}$. **90.** 2) $\frac{9z}{z+2}$; 4) $\frac{m+5}{m-2}$. **91.** 2) $\frac{b}{a+b}$; 4) $\frac{1}{c}$. **92.** 2) $\frac{4}{a-b}$; 4) $\frac{1}{c(a+b)}$. **95.** $\frac{v-v_1}{v+v_1}s$ км. **96.** 6 даанадан. **97.** 2) $x=-4$ da $y=-\frac{1}{2}$; 4) $x<0$ жана $x\geq 2$ де $y\leq 1$. **99.** 2) (–2;4) жана (2;–4); 4) (–4; –2) жана (1;3). **106.** 2) 2; 4) 15. **107.** 2) 81; 4) $\frac{1}{81}$. **108.** 2) –1; 4) –4; 6) –8. **109.** 2) $x=-\frac{1}{2}$; 4) $x_1=-2$; $x_2=2$. **110.** 2) x – каалагандай сан; 4) $\frac{2}{3}\leq x<2$. **111.** 2) 5; 4) -11; 6) $\frac{1}{30}$. **112.** 2) 2; 4) $4\sqrt{6}$. **113.** 1) $x-2$; 2) $(3-x)^3$, $x\leq 3$ тө, $(x-3)^3$, $x>3$ да. **114.** 3974. **117.** 2) 3; 4) 27; 6) $\frac{1}{27}$. **118.** 2) 5; 4) $\frac{1}{2}$; 6) $\frac{1}{2}$. **119.** 2) 49; 4) 125. **120.** 2) 121; 4) 150. **121.** 2) 3; 4) 2,7. **122.** 2) b; 4) a; 6) 1. **123.** 2) a^2b. **124.** 2) 1. **125.** 2) 3. **126.** 2) $b^{\frac{1}{2}}$; 4) $a+b$; 6) $a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}$; 8) $\sqrt{c}-1$. **127.** 2) $\frac{a^{\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}$; 4) $2\sqrt{b}$. **128.** 2) $2y$; 4) $2\sqrt[3]{b}$. **129.** 2) $2\sqrt[3]{b}$; 4) $\frac{2\sqrt[3]{a}}{a+b}$. **130.** $3\cdot\sqrt{\frac{b}{a}}$. **131.** 27 **132.** $9a$. **133.** $2b(a–b)$. **135.** $\sqrt[3]{(a-b)^2}$. **136.** $-4\sqrt{x}$. **137.** $\sqrt{a}\cdot(\sqrt{a}+\sqrt{x})$. **138.** $-\sqrt{ab}$.

139. $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x}}$. **140.** 0. **141.** 3. **142.**1. **143.** a. **144.** a^2x. **145.** $-x^3$. **146.** $\sqrt[6]{a}$.

147. 2) $\frac{3(x^2-2x+4)}{x^3+8}$, $\frac{x+1}{x^3+8}$ жана $\frac{(x+2)^2}{x^3+8}$. **148.** 2) $\frac{55b-61}{24}$; 4) $\frac{5-27b}{36}$. **149.** 2) $\frac{7q-p}{3p-q}$; 4) $\frac{8a+8b-70}{2b-5}$. **150.** 2) $\frac{a^2-b^2}{7}$. **151.** 2) $\frac{x(x+2)(x-3)}{(x-2)(x+3)(x^2+2)}$; 4) 1. **152.** 2) $-2(a-1)^2$; 4) $\frac{a^2+4}{4a}$. **153.** 2) 1,8; 4) $\frac{1}{16}$. **154.** 2) 51; 4) 0,04; 6) –0,1.

155. 2) 1000. **156.** 2) $\sqrt[4]{x}$; 4) $\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}$. **157.** 2) $\frac{95}{16}$; 4) $-609\frac{8}{27}$. **158.** 2) x – каалагандай сан; 4) $x \le 2$, $x \ge 3$; 6) $0 \le x \le 2$, $x \ge 3$. **159.** 2) $a+1$; 4) $a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{3}}$; 6) $a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}$.

II глава

178. 2) $\frac{1}{3} > 0,3$; 4) $-\frac{5}{8} > -0,7$. **179.** 2) $b > a$; 4) $a < b$. **183.** Биринчиси. **185.** 2) $a < 0$; 4) $a > 0$. **186.** $-9 < -3$. **187.** 2) $a + 3b < -2b$. **188.** 2) $8 > 6$. **189.** 2) $a - 3b < 3a$. **190.** 2) $a - 5 < b - 5$. **191.** 2) $19 > 12$; 4) $-12 > -14$.

192. 2) $a < -0,25$; 4) $a < 2$. **193.** 2) $0,9 > -2$; 4) $5 > 3$. **194.** 2) $a < -2$; 4) $x < -\frac{4}{9}$. **196.** 2) $-5 < 7$; 4) $7y > 1$. **197.** 2) $25 < 58$; 4) $12 < 4x^2 - 1$. **204.** 2) $n = 3$; 4) $n = -6$; 6) $n = -1$. **205.** 2) $n = 6$; 4) $n = -3$; 6) $n = 4$. **206.** 2) $x = -9$. **207.** 2) $h \ge 5$; 4) $v \le 70$. **208.** 2) Туура; 4) туура эмес. **209.** 2) Туура; 4) туура эмес. **211.** 2) $\left(\frac{5}{12}\right)^{-\frac{1}{4}} < (0,41)^{-\frac{1}{4}}$; 4) $\left(\frac{11}{12}\right)^{-\sqrt{5}} > \left(\frac{12}{13}\right)^{-\sqrt{5}}$.

212. 2) $x=3$; 4) $x=2$; 6) $x=\frac{1}{2}$. **213.** $\sqrt{\left(1\frac{1}{4}-1\frac{1}{5}\right)^3}>\sqrt{\left(1\frac{1}{6}-1\frac{1}{7}\right)^3}$. **214.** 2) $x=\frac{5}{2}$; 4) $y=5$. **215.** 2) $x=2{,}6$; 4) $x=4$. **216.** 2) $x=-\frac{1}{3}$; 4) $x=1$. **217.** 2) 6; 4) -3. **218.** 2) $x=-1$; 4) $x=1$. **219.** 2) $13-x<2$; 4) $2(x-3)\le 2$; 6) $2x(-4)\ge x-(-4)$. **220.** 2) Берилген сандардан эч бири чыгарылыш болбойт; 4) $\frac{1}{2}$; 0; -1. **221**. 2) $y>0$; 4) эч кандай маанисинде; 6) $y\ne-2$. **222.** 2) $y<2$; 4) $y\le 0$. **223.** 2) $x\le-3$; 4) $x>0$; 6) $x<0$. **225.** 2) $x<14$;

4) $y>9$; 6) $z\le 4$. **226.** 2) $x\ge-8$; 4) $z>-15$; 6) $x\le-2$. **227.** 2) $x<6$; 4) $x>5$; 6) $x\le-2$. **228.** 2) $x\ge 3$; 4) $x>0$; 6) $x\ge 2$. **229.** 2) $x<\frac{5}{8}$; 4) $x<-3$; 6) $x<5\frac{1}{6}$. **230.** 2) $y>\frac{3}{8}$; 4) $y<\frac{5}{8}$; 6) $y>\frac{2}{3}$. **231.** 2) $y=3$; 4) $x=0$. **232.** 2) $x=-1$; 4) $x=-4$. **233.** 2) $b<-5\frac{2}{3}$; 4) $x>-1\frac{3}{7}$. **234.** 2) x – каалагандай сан; 4) x – каалагандай сан. **235.** 2) Чыгарылыштары жок; 4) чыгарылыштары жок. **236.** 2) $x>2$; 4) $x>-20$; 6) $x>0{,}5$. **237.** 2) $x<1{,}6$; 4) $x<0$. **238.** 2) $x\le 7$; 4) $x\le 5$. **239.** 2) $x<0{,}5$; 4) $x>-0{,}5$. **240.** 45 tadan аз эмес. **241**. 2) Берилген сандардан эч бири чыгарылыш болбойт. **242**. 2) 1. **243.** 2) 0; 1; 2; 3; 4) –5; –4; –3; –2; –1; 0; 1; 2; 3; 4; 5. **244.** 2) $[-1;\ 3]$; 4) $(1;2)$; 6) $(-4;\ -2]$. **245.** 2) $-3\le x\le-1$; 4) $0<x<3$; 6) $-2\le x<2$. **246.** 2) $-1<x<2$, $(1;2)$; 4) $-4<x\le 0$, $(-4;\ 0]$. **247.** Ооба. **248.** Ооба. **249.** b) $-3<x<1$; эч кандай маанисинде; e) $-5<x<0$; эч кандай маанисинде. **251.** 1) $x\ge 0{,}6$; 2) $x\le-\frac{1}{3}$; 3) $x\ge-3{,}5$; 4) $x\ge-4{,}5$. **252.** 2) $x>0$; 4) $x\ge-2$. **253.** 2) $x<-1$; 4) $x\le 0$. **254.** 2) $3<x<6$; 4) $0\le x<\frac{1}{2}$. **255.** 2) $-1{,}5\le x<1{,}5$; 4) $-0{,}5\le x\le 7{,}5$. **256.** 2) $x\ge 4$; 4) $x>-3$.

257. 2) $x \leq -2$; 4) $x < 4$. **258.** 2) $x \leq -2{,}5$; 4) $2 \leq x \leq 5$. **259.** 2) $-5 < x \leq -1$; 4) $0 < x \leq \frac{4}{3}$. **260.** 2) 1; 2; 4) 4; 5. **261.** 2) Эч кандай x те; 4) $0 < x < 2$. **262.** 2) $x \leq -2$; 4) $x \leq 6$. **263.** 2) 4 м ден чоң, бирок 13 м ден кичине. **264.** 24. **265.** 36. **267.** 2) $x_{1,2} = \pm 1{,}5$; 4) $x = 0$, $x_2 = -6$. **268.** 2) $x = 2$; 4) $x = \frac{3}{4}$. **269.** 2) $x_1 = -0{,}25$, $x_2 = -1{,}25$; 4) $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{3}$. **270.** 2) $x_{1,2} = \pm 2{,}1$; 4) $x_1 = -5$, $x_2 = 11$. **272.** 2) $-2 < x < 2$. **273.** 2) $|x| \leq 0{,}3$. **274.** 2) $-2{,}2 < x < -1{,}8$; 4) $\frac{1}{4} < x < 1\frac{3}{4}$. **275.** 2) $-3 < x < 0$; 4) $1 \leq x < 1{,}5$. **276.** 2) $x \leq 0{,}9$, $x \geq 3{,}1$; 4) $x < 2\frac{3}{4}$, $x > 3\frac{2}{3}$. **277.** 2) $x < -1$, $x > -\frac{1}{3}$; 4) $x \leq 0$, $x \geq 1{,}6$. **278.** 2) -1; 0; 4) 0; 1. **279.** 2) $-1 \leq x \leq 1\frac{2}{3}$; 4) $x \leq 0$, $x \geq 3$. **282.** 2) $\frac{1}{18}$; 4) $\frac{1}{225}$. **283.** 2) 0,004; 4) $\frac{1}{350}$. **284.** 2) 0,08; 4) 0,08. **285.** 3°. **286.** $\frac{1}{7}$. **287.** Туура. **289.** 2) $141 \leq x \leq 143$; 4) $895 \leq v \leq 905$; 6) $m - n \leq y \leq m + n$. **290.** 2) 2,6 жана 2,8; 4) $-6{,}1$ жана $-5{,}7$. **291.** 2) Жок; 4) һа. **292.** 2) Ооба; 4) жок. **293.** 2) 5,5; 4) 3,9; 6) 0,575. **298.** Жок. **301.** 2) 0,7; 4) 3,7. **302.** 2) 0,07; 4) 1,67; 6) 5,07. **303.** 2) 0,385; 4) 7,643. **304.** 3 жана 7. **305.** 2) 0,41; ≈ 3,7 %; 4) 0,108; 10,8 %. **306.** 2) ≈2 %. **307.** 2) Экинчиси. **308.** ≈1 %; 0,1 %; 0,01 %. **309.** Биринчиси. **310.** 2) 0,000398. **311.** Экинчиси. **312.** 2) $x_1 = 0$, $x_2 = 1\frac{1}{3}$; 4) $x_1 = -4$, $x_2 = 0{,}5$. **313.** 2) $x = 0{,}5$; 4) $x_1 = 3$, $x_2 = -2$. **314.** 2) $2 + b - a > 0$; 4) $a - 3 - b < 0$. **315.** 2) y–каалагандай сан; 4) $x > 7$. **316.** 2) $x < 2$. **317.** 2) $x_1 = 3{,}4$, $x_1 = -1{,}4$; 4) $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{3}$. **318.** 2) $x \leq -2{,}4$, $x \geq 4{,}4$; 4) $x \leq -2$, $x \geq 1$. **321.** 2) Эч бир маанисинде; 4) эч бир маанисинде. **322.** 34. **323.** 47. **326.** $3{,}5416 \cdot 10^{-5}\Omega$. **327.** 67J. **329.** 18800; 20400;13200; 4600.

III глава

345. 2) $-x^2+9=0$; 4) $x^2=0$. **346.** 2) $x^2-4x-9=0$; 4) $5x^2+1=0$. **347.** 2) 0; 1; 4) 1; 6) берилген сандардан эч бири тамыр боло албайт. **350.** 2) $x_{1,2}=\pm\frac{4}{7}$; 4) $x_{1,2}=\pm 1{,}5$; 6) $x_{1,2}=\pm\sqrt{13}$. **351.** 2) $x_{1,2}=\pm 11$; 4) $x=0$; 6) чыныгы тамырлары жок. **352.** 2) $x_1=0$, $x_2=2$; 4) $x_1=0$, $x_2=0{,}6$; 6) $x=-3$. **353.** 2) $x=0$; 4) $x_{1,2}=\pm 3$; 6) $x_{1,2}=\pm 3\sqrt{3}$; 8) $x_{1,2}=\pm 20$. **354.** 2) $x_1=0$, $x_2=-5$; 4) $x_1=0$, $x_2=0{,}04$; 6) тамырлар жок. **355.** 2) $x_{1,2}=\pm 1\frac{1}{4}$; 4) $x_{1,2}=\pm\sqrt{5}$; 6) $x_{1,2}=\pm 1\frac{1}{3}$. **356.** $x_{1,2}=\pm 2$; 4) $x_{1,2}=\pm 1\frac{1}{3}$. **357.** 2) $x_1=0$, $x_2=4$; 4) $x_1=0$, $x_2=-2{,}5$. **358.** 2) $x_1=0$, $x_2=2\frac{3}{19}$. **359.** 2) $m=9$; 4) $m=64$; 6) $m=6$. **360.** 2) $x_1=2$, $x_2=-6$; 4) $x_1=8$, $x_2=2$; 6) $x_{1,2}=-4\pm\sqrt{23}$. **361.** $x_1=\frac{3}{5}$; $x_2=-\frac{1}{5}$. **362.** 1) $x_1=1$, $x_2=4$; 2) $x_1=5$, $x_2=-2$. **363.** 1) $x_1=1$, $x_2=-2{,}5$; 2) $x_1=2$, $x_1=-\frac{3}{5}$. **364.** 2) 0,4; 4) 85. **365.** 2) $x_1=1$, $x_2=0{,}5$; 4) $x_1=3$, $x_2=0{,}5$; 6) $x_1=2$, $x_2=\frac{3}{4}$. **366.** 2) $x_1=4$, $x_2=-0{,}5$; 4) $x_1=-1$, $x_2=\frac{1}{3}$; 6) $\frac{-6\pm\sqrt{6}}{3}$; 8) $x_1=1$, $x_2=-\frac{4}{3}$. **367.** 2) $x=\frac{1}{4}$; 4) $x=-\frac{1}{6}$. **368.** 1), 2), 3), 4) чыныгы тамырлар жок. **369.** 2) Эки; 4) бир да жок. **370.** Чыныгы тамырлар жок; 4) $x=2{,}5$; 6) $x_1=4$, $x_2=-1$. **371.** 2) $x_1=1$, $x_2=0{,}2$; 4) $x_1=7$, $x_2=-8$; 6) $x_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{7}}{7}$. **372.** 2) $x_1=7$, $x_2=-11$; 4) $x_1=0{,}6$; $x_2=-3$. **373.** 2) $x_1=0{,}5$,

$x_2=-1{,}5$; 4) $x_1=5$, $x_2=\frac{1}{5}$. **376.** 2) $x_1=7$, $x_2=-1$; 4) $x_1=4$, $x_2=-10$; 6) $x_1=2$, $x_2=-1$. **381.** 2) $x^2-5x+6=0$; 4) $x^2-3x-18=0$. **382.** 2) $x_1=3$, $x_2=4$; 4) $x_1=-1$, $x_2=-7$; 6) $x_1=3$, $x_2=-5$. **383.** 2) $(x-1)(x+5)$; 4) $(x+7)(x-6)$; 6) $(2x+1)(4x+3)$; 8) $(x+2)(1-4x)$. **384.** 2) $x+6$; 4) $\frac{1}{x+7}$; 6) $\frac{x+3}{3x+1}$. **385.** 2) $x_{1,2}=\sqrt{5}\pm 2$; 4) $x_{1,2}=2(\sqrt{7}\pm\sqrt{6})$. **386.** 2) $x(x+7)(x-3)$; 4) $x(x-11)(x+2)$. **387.** 2) $\frac{x-9}{x+8}$; 4) $\frac{9-x}{x-5}$. **388.** 2) $-\frac{x}{(x+3)^2}$; 4) $\frac{x-1}{x(x+10)}$. **389.** 2) $x_{1,2}=\pm 1$, $x_{3,4}=\pm 2$; 4) $x_{1,2}=\pm 1$, $x_3=\pm 7$. **390.** 2) $x_{1,2}=\pm 1$; 4) $x_{1,2}=\pm\sqrt{5}$. **391.** 2) $x_1=7$, $x_2=3\frac{1}{3}$; 4) $x_1=40$, $x_2=-20$, 6) $x_1=6$, $x_2=-\frac{2}{3}$. **392.** 2) $x_{1,2}=\pm 10$; 4) тамырлары жок; 6) $x=-3$. **393.** 2) Yo‘q. **394.** 2) $x=0$. **402.** 2) 14 жана 15. **403.** 2) 19 жана 21. **404.** 10 см, 40 см. **405.** 140 м, 175 м. **406.** 100 км/саат, 80 км/саат. **407.** 10 км/саат. **408.** 20 күн, 30 күн. **409.** Квадраттын жагы 15 см. **410.** 9 см, 40 см. **411.** 18 км/саат, 15 км/саат. **412.** 15 күн, 10 күн. **413.** 2) $x_{1,2}=\pm 5$; 4) $x_1=0$, $x_2=7{,}5$. **414.** 2) $x_1=13$, $x_2=-4$; 4) $x_1=3{,}6$, $x_2=-7$. **415.** 2) $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{17}}{6}$; 4) $x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{7}}{3}$. **416.** 2) Эки; 4) бир. **417.** 2) $(x-8)(x-2)$; 4) $(x-2)(2x+1)$. **418.** 2) $x(x+2)$; 4) $\frac{5x+1}{x-3}$. **419.** 2) $x_{1,2}=\pm 3$, $x_{3,4}=\pm 2$; 4) $x_{1,2}=\pm\sqrt{3}$, $x_{3,4}=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$. **420.** 2) $x_2=\pm\sqrt{5}$; 4) $y=1$. **421.** 20 км/саат. **422.** 15 км/саат. **423.** 3 күн, 5 күн. **424.** 2) $x_1=0$, $x_2=2$. **425.** 2) $x_2=0{,}5$; 4) $x_1=7$, $x_2=-13$. **426.** 2) $x_1=0$, $x_2=-5$; 4) $x_{1,2}=\pm 4$. **427.** 2) $x_1=9$, $x_2=-12$; 4) $x_1=3$, $x_2=-6$. **428.** 2) Бир да жок; 4) эки. **429.** 2) $x_1=3$, $x_2=1{,}4$. **430.** 36 күндө. **431.** 1 саат 40 мин жана 1 саат 20 мин же 2 саат жана 1 саат 40 мин. **432.** 12 саат, 6 саат. **437.** 3 саат. **439.** 12 күн, 8 күн. **440.** 25 саат, 20 саат. **441.** 60 км/саат. **442.** 8 күн, 12 күн. **444.** 120; –120. **445.** 6. **452.** 7 күндө. **453.** 20 км/саат. **454.** 3 км/саат. **455.** 8 күн. **456.** 37. **457.** 82. **458.** 20 күн, 30 күн, 60 күн. **459.** 9 саат. **460.** 10 %. **461.** 5 %. **462.** 10 км. **463.** 16 nafar. **464.** 35 nafar. **465.** 60 км/саат, 50 км/саат. **466.** 55 км/саат.

IV глава

482. 6. **483.** 18. **484.** 27. **485.** 9. **487.** 9. **491.** 15 **492.** 120. **494.** d) $n(n-1):2$. **496.** 45. **497.** 2) 900. **499.** $16 \cdot 15 \cdot 14 = 3360$. **500.** 30. **501.** 1) 125; 2) 625. **503.** 24. **504.** 10. **505.** $12 \cdot 8 \cdot 7 = 672$. **506.** $64 \cdot 49 = 3136$. **508.** 1) $4 \cdot 60$; 2) $24 \cdot 58$; 3) $36 \cdot 55$; бардычык 3612 усул. **509.** 6. **510.** 12. **512.** 20. **513.** 14. **521.** 1) $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$; 2) $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1080$. **522.** $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 3 = 540$. **523.** $26 \cdot 25 \cdot 24 = 15600$. **524.** $8 \cdot 7 \cdot 5 = 280$. **525.** 10000. **527.** 24. **528.** 1) 6; 2) 15; 3) 45; 4) $n \cdot (n-1):2$. **529.** $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$. **530.** 4.

V глава

540. 2) $\frac{22}{35}$; 4) $-\frac{5}{6}$; 6) 3,485. **545.** $7\frac{1}{2}$. **546.** $2a(30-a)$; –128. **547.** $a \cdot 100 + b \cdot 10 + c$, $c \cdot 100 + b \cdot 10 + a$; a. **548.** $x = 1000a + c$. **549.** 2) $\frac{2n(2n-k)}{2n+k}$; 4) $\frac{2q(m-2q)}{m+2q}$. **550.** 4) $\frac{m+7n}{10}$. **552.** 2) 1. **556.** 2) $y \geq -2$; 4) $x > -4$; 6) $x \leq 11\frac{1}{3}$. **557.** 2) $-5; -4; -3; -2; -1; 0$; 4) 4. **558.** 2) $\frac{2}{9} < x \leq 10$; 4) $x > 7{,}2$. **559.** 2) $-15; -14; \ldots; -1; 0$. **560.** 2) $x_1 = 8{,}1$, $x_2 = 2{,}1$; 4) $x_1 = 4$, $x_2 = -3$; 6) $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{6}{7}$. **561.** 2) $x \leq -3{,}4$; $x \geq 7{,}4$; 4) $x \leq -2\frac{1}{3}$; $x \geq 1$; 6) $x \leq -0{,}4$; $x \geq 16$. **562.** 2) $2\frac{1}{3}$; 4) $\frac{2x^2}{3y}$. **563.** 2) $3 - \sqrt[3]{2}$; 4) $6\sqrt{7}$. **564.** 2) $2\left(\sqrt{0{,}5}\right)^{0{,}3} < \left(2\sqrt{0{,}5}\right)^{0{,}37}$ **565.** 2) $\sqrt{x}$; 4) $9b^{-4}$. **566.** 2) $5ab\sqrt{b}$; 4) $2ab\sqrt{ab}$. **567.** 2) $-\sqrt{3x^2}$; 4) $\sqrt{5a^2}$. **568.** 2) $-8\frac{1}{8}$. **569.** 2)

$-4\frac{5}{6}$. **570.** 2) $x=\frac{1}{9}$; 4) $x=0$. **571.** 2) Yo‘q. **573.** 2) $-\frac{\sqrt{a}}{b}$; 4) $\sqrt{a}+\sqrt{b}$. **574.** 1) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$; 2) $\frac{1+\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$. **575.** 1) $1-\sqrt{a}$; 2) $a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}$. **576.** 2) $x_{1,2}=\pm\sqrt{11}$; 4) $x_1=0$, $x_2=-5$; 6) $x_1=0$, $x_2=12$. **577.** 2) $y_1=0$, $y_2=9$; 4) $x_1=0$, $x_2=9$; 6) $x_{1,2}=\pm1{,}5$. **582.** $k>\frac{9}{16}$. **583.** $k_1=3$, $k_2=-1$. **584.** 2) $x_1=1{,}2$, $x_2=-2$; 4) $x=3$; 6) $x=2$. **586.** 2) 0,004; 4) $\frac{1}{1375}$. **588.** $\approx 0{,}1$ %.

„Өзүңдү текшерип көр“ тапшырмаларына жооптор

I глава. 1. $b\neq 0$, $c\neq 1$, $d\neq -2$. **2.** 1) $\frac{1}{a}$; 2) $\frac{4ab}{a^2-b^2}$; 3) 4; 4) $\frac{a-b}{b}$. **3.** $\frac{1}{x-3}$; -3. **4.** 1) $8\frac{3}{8}$; 2) 16. **5.** 1) 6; 2) $(y+x)xy$. **6.** $a^{\frac{3}{4}}$; 27.

II глава. 2. 1) $x<2{,}4$; 2) $x\geq -15$; 3) $x<5$. **3.** 1) $4\frac{1}{3}<x<6\frac{1}{4}$; 2) $x\geq 3$; 3) $x<-5$.

III глава. 1. 1) $x=0$; 2) $x_1=-1$, $x_2=2$; 3) $x_{1,2}=\pm\frac{1}{2}$; 4) $x_1=0$, $x_2=1\frac{2}{3}$; 5) $x_{1,2}=\frac{1}{2}$; 6) $x_1=17$, $x_2=-1$; 7) $x_1=-2$, $x_2=\frac{1}{3}$; 8) чыгарылыш жок. **2.** 1) $(x-2)(x+3)$; 2) $(x+1)(2x-3)$. **3.** 9 км/саат; 12 км/саат.

IV. глава. 1. $18\cdot 17=306$. **2.** $12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8=87\,480$. **3.** $5\cdot 4\cdot 3=60$. **4.** $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=120$. **5.** 1) 1,2; 2) 4; 3) 2,5; 4) 15.

Кызыктуу маселелерге жооптор

1. 10 метр. **2.** Мүмкүн эмес. **3.** Жактары 3 жана 6 бирдик болгон тик бурчтук же жагы 4 бирдик болгон квадрат. **4.** Тиешелүү түрдө 8; 12; 6; –1. **5.** $(x^2+x+1)(x^2-x-2006)$.

МАЗМУНУ

III ГЛАВА
КВАДРАТТЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР

IV ГЛАВА
МААЛЫМАТТАР АНАЛИЗИ

V ГЛАВА

Алимов Ш. А.

А39 Алгебра: Жалпы орто билим берүүчү мектептердин 8-классы үчүн окуу китеби / Ш. А. Алимов, А. Р. Халмухамедов, М. А. Мирзахмедов. – 4-басылышы. – Ташкент: «O‘qituvchi» БПЧУ, 2019. – 240 б.

ISBN 978-9943-5750-0-4

УЎК: 512(075.3)=512.154
КБК 22.14я72

Shavkat Arifdjanovich Alimov,
Alimdjan Raximovich Xalmuxamedov,
Mirfazil Abdilxakovich Mirzaxmedov

ALGEBRA

(Qirg‘iz tilida)

Umumiy o‘rta ta’lim maktablarining
8-sinfi uchun darslik

Qayta ishlangan 4-nashri

«O‘qituvchi» nashriyot-matbaa ijodiy uyi
Toshkent – 2019

Original-maket “Davr nashriyoti”da tayyorlandi.

Котормочу *А. Зулпихаров*
Редактору *А. Зулпихаров*
Bezakchi dizayner *Р. Запаров*
Musahhih *А. Зулпихаров*
Компьютерде даярдаган *Х. Сафаралиев*
Текстти терген *С. Ниязова*

Басма үйүнүн лицензиясы AI № 012.20.07.2018
Оригинал-макеттен басууга уруксат берилди 23.07.2019. Форматы $70\times90^{1}/_{16}$.
Times гарнитурасы. Офсеттик басма усулда басылды. Шарттуу б. т. 17,55. Эсеп-басма т. 16,6.
Нускасы 811. Буюртма №

Өзбекстан Республикасы Президенти Администрациясынын алдындагы Маалымат жана массалык коммуникациялар агенттигинин «O‘qituvchi» басма-полиграфиялык чыгармачылык үйү.
Ташкент – 206, Юнусабад району, Янгишахар көчөсү, 1-үй. Келишим № 55-19.

Ижарага берилген окуу китебинин абалын көрсөткөн жадыбал

№	Окуучунун аты жана фамилиясы	Окуу жылы	Окуу китебинин алынгандагы абалы	Класс жетекчисинин колу	Окуу китебинин тапшырылгандагы абалы	Класс жетекчисинин колу
1.						
2.						
3.						
4.						
5.						
6.						

Окуу китеби ижарага берилип, окуу жылынын аягында кайтарып алынганда жогорудагы жадыбал класс жетекчиси тарабынан төмөнкү баалоо критейлеринин негизинде толтурулат:

Жаңы	Окуу китебинин биринчи жолу пайдаланууга берилгендеги абалы.
Жакшы	Мукабасы бүтүн, окуу китебинин негизги бөлүгүнөн ажырабаган. Бардык барактары бар, жыртылбаган, айрылбаган, беттеринде жазуу жана чийүүлөр жок.
Канааттандыраарлуу	Мукабасы эзилген, бир аз чийилип, четтери тытылган, окуу китебинин негизги бөлүгүнөн ажыраган түрү бар, пайдалануучу тарабынан канааттандыраарлуу калыбына келтирилген. Көчкөн барактары кайра калыбына келтирилген, айрым беттерине чийилген.
Канааттандыраарлуу эмес	Мукабасына чийилген, жыртылган, негизги бөлүгүнөн ажыраган же таптакыр жок, канааттандыраарлуу эмес калыбына келтирилген. Беттери жыртылган, барактары жетишпейт, чийип, боёп салынган. Окуу китебин калыбына келтирүүгө болбойт.