

Ş. A. ALIMOW, O. R. HALMUHAMEDOW,
M. A. MIRZAHMEDOW

ALGEBRA

UMUMY ORTA BILIM BERÝÄN MEKDEPLERIN
8-NJI SYNPY ÜÇIN DERSLIK

Gaýtadan işlenen 4-nji neşir

*Özbekistan Respublikasynyň Halk bilimi ministrliği
tarapyndan neşire hödürlenlen*

“O‘QITUVCHI” NEŞIRÝAT-ÇAPHANA DÖREDIJILIK ÖÝI
DAŞKENT – 2019

UO‘K 512(075.3)=512.164

KBK 22.14ya72

A48

Syn ýazanlar:

M.M. Şaniýazowa – *Daşkent şäheriniň Sergeli tümenindäki 300-nji mekdebiň matematika mugallymy;*

I.B.Soibowa – *Daşkent şäheriniň Ýunusabat tümenindäki 307-nji mekdebiň matematika mugallymy;*

G.P.Muhamedowa – *Nyzamy adyndaky DDPU Umumy matematika kafedrasynyň dosenti, pedagogika ylmlarynyň kandidaty;*

N. Ş. Karşıbaýewa – *Nyzamy adyndaky DDPU Okuw – metodik müdirliginiň metodisti.*

Derslikdäki şertli belgiler:



– meseläni çözmek başlandy



– meseläni çözmek gutardy



– matematik tassyklamany esaslandyrmak ýa-da formulany getirip çykarmak başlandy



– esaslandyrmak ýa-da getirip çykarmak gutardy



– gyzykly meseleler

16, 18,...

– çylşyrymlyrak meseleler



– bilmek möhüm we ýatda saklamak peýdaly bolan tekst



– esasy material boýunça bilimleri barlamak üçin özbaşdak iş



– synag gönükmeleri – testler



– taryhy meseleler



– taryhy maglumatlar



– amaly we predmetara bagly meseleler.

Respublikanyň ýörite kitap gaznasynyň serişdeleriniň hasabyndan çap edildi.

ISBN 978–9943–5750–2–8

© Ş.A. Alimow, O.R. Halmuhamedow,
M.A. Mirzaahmedow. Ähli hukuklar goralan. 2019.
© Original-maket „Davr nashriyoti“ JÇJ, 2019.
© O‘qituvchi“ NÇDÖ, 2019.

7-NJI SYNP „ALGEBRA“ KURSUNY GAÝTALAMAK

Eziz okuwçy! 7-nji synp „Algebra“ kursundan alan bilimlerini ýada salmak maksadynda Size birnäçe gönükmeleri hödürleýäris.

1. Aňlatmanyň san bahasyny tapyň:

1) $S = 2(ab + ac + bc)$, munda $a=5$, $b=4$, $c=10$;

2) $V = \frac{h}{3}(a^2 + b^2 + ab)$, munda $h=12$, $a=10$, $b=8$;

3) $S = \frac{(a+b)n}{2}$, munda $a=10$, $b=40$, $n=16$;

4) $V = \frac{1}{3}abh$, munda $a=30$, $b=20$, $h=25$.

2. Ýaýlary açyň we ýönekeýleşdiriň:

1) $7a - (5a + 4b)$;

2) $9x - (7y - 4x)$;

3) $-(2a - 3b) - (-a + 3b)$;

4) $8x - (3y + 5x) - (-2y - x)$.

3. Eger:

1) $v = 60$;

2) $v = 75$;

3) $v = 90$;

4) $v = 100$;

5) $v = 20,4$;

+6) $v = 28,5$

bolsa, $S = \frac{1}{5}v + \frac{1}{200}v^2$ aňlatmanyň san bahasyny tapyň.

4. Her bir dogry jogap üçin: ene dili we edebiýatdan n ball, matematikadan k ball, iňlis dilinden m ball goýulýar. Narjan ene dili we edebiýatdan c sany, matematikadan a sany, iňlis dilinden b sany soraga dogry jogap berdi.

1) Narjan toplan jemi bally hasaplamak üçin aňlatma düzüň;

2) eger $a=35$, $b=34$, $c=36$; $k=3,1$; $m=2,1$ we $n=1,1$ bolsa, ol jemi näçe ball toplapdyr?

5. Deňlemäni çözüň (5–6):

1) $2x + 15 = 3x - 11$;

2) $7 - 5x = x - 2$;

3) $2(x - 3) = 3(2 - x)$;

4) $-3(4 - x) = 2(x - 5)$.

6. 1) $3,2x + 1,8x = 6x - 3,5$;

2) $7,5x - 2,5x = 7x - 10$;

3) $0,5(0,4x - 8) = 5(0,2x - 1)$;

4) $2,4(5x - 3) = -0,8(10 - 5x)$.

7. Syýahatçy 3 km we galan ýoluň $\frac{1}{3}$ bölegini geçensoň, hasaplap görse, jemi ýoluň ýarysyna ýetmegi üçin ýene 1 km aralyk galypdyr. Jemi ýol näçe kilometr eken?
8. Uzynlygy 9,9 m bolan simi iki bölege böldüler. Eger:
1) böleklerden biri ikinjisinden 20% gysga bolsa;
2) böleklerden biri ikinjisinden 20% uzyn bolsa, her bir bölegiň uzynlygyny tapyň.
9. 1) Bir san ikinji sanyň 45% -ini düzýär. Sanlardan biri ikinjisinden 66-a köp bolsa, şu sanlary tapyň.
2) Bir san ikinji sanyň 30% -ini düzýär. Sanlardan biri ikinjisinden 35-e kem bolsa, şu sanlary tapyň.
10. Bir obadan ikinji oba pyýada 4 km/h tizlik bilen ýola çykdy. Aradan 2 sagat geçensoň, pyýadanyň yzyndan 10 km/h tizlik bilen welosipedçi ýola çykdy. Ol ikinji oba pyýadadan 1 sagat öň ýetip geldi. Obalaryň arasyndaky aralygy tapyň.

11. Hasaplaň:

$$1) \frac{3 \cdot 4^{10} - 5 \cdot 2^{19}}{2^{15}}; \quad 2) \frac{2^3 \cdot (4 \cdot 3^{15} - 7 \cdot 3^{14})}{3^{16} + 5 \cdot 3^{15}}; \quad 3) \frac{2^{15} \cdot a^{16}}{4^7 \cdot a^{15}}.$$

12. Biragzany standart şekilde ýazyň we san bahasyny hasaplaň:

$$1) ba \cdot 8ac, \text{ munda } a = \frac{1}{2}, b = -3, c = 2;$$

$$2) \frac{4}{5}x \cdot 8y^2 \cdot \frac{5}{16}x^2y, \text{ munda } x = 3, y = \frac{1}{9}.$$

13. Köpagzany standart görnüşe getirin:

$$1) 1, 2ab + 0, 8b^2 - 0, 2ab + 2, 2b^2 + 2ab;$$

$$2) 3a^2 2a^2 + 3b^2 4a^2 - 2a^2 5b^2 - 3a 2ab^2 - a^3 2a.$$

14. Amallary ýerine ýetiriň (14–15):

$$1) (3a^2 - 2ab - b^2) - (2a^2 - 3ab - 2b^2);$$

$$2) (7a^2 - 13ab + 10b^2) + (-3a^2 + 10ab - 7b^2);$$

$$3) (a^2 + 3ab - b^2) \cdot ab; \quad 4) abc \cdot (2a^2b - 3abc).$$

15. 1) $(x + y)(a - b);$ 2) $(a - b + c)(a - c);$
 3) $(a^2 - b^2)(a + b);$ 4) $(a - 3)(a - 2) - (a - 1)(a - 4).$

16. Añlatmany ýönekeýleşdiriň:

1) $4a^3 : a - (2a)^2 + a^4 : 3a^2;$
 2) $(5a^4 + \frac{1}{3}a^3) : a^2 - (4a^3) : (2a) + (2a)^2;$
 3) $(0,1b^4 - 2b^3 + 0,4b^2 + 0,02b) : (0,1b);$
 4) $\left(\frac{3}{8}a^3b^2 + \frac{9}{10}a^2b^3 - \frac{15}{16}ab^4\right) : \left(\frac{3}{4}ab^2\right).$

17. Köpeldijilere dagydyň **(17–18):**

1) $5a^2 - 15a^4 + 10a^6;$ 2) $9a^3 + 12a^2 - 6a;$
 3) $a(x + y) - b(x + y);$ 4) $(x - 1) - a(1 - x);$
 5) $4(a - 3) + a(3 - a);$ 6) $a^2(1 - a) + 4(a - 1).$

18. 1) $ay + zy - 2ap - 2zp;$ 2) $5ac - 6bd + 5ad - 6bc;$
 3) $a(5a - 4b) - 10a + 8b;$ 4) $4ab - 6cd - 12ad + 2bc.$

19. Hasaplaň:

1) $49^2 + 51 \cdot 98 + 51^2;$ 2) $58^2 - 116 \cdot 33 + 33^2;$
 3) $\frac{19^2 + 38 \cdot 11 + 11^2}{19^2 - 11^2};$ 4) $\frac{53^2 - 53 \cdot 94 + 47^2}{53^2 - 47^2};$
 5) $\frac{183^3 - 93^3}{183^2 + 183 \cdot 93 + 93^2};$ 6) $\frac{43,73^2 - 43,73 \cdot 56,27 + 56,27^2}{43,73^3 + 56,27^3}.$

20. Täjir öndüren önüminiň 1 kilogramyny 19 800 somdan satsa, 162 800 som peýda gazanýar. Eger şol önüminiň 1 kilogramyny 16 500 somdan satsa, 81 400 som zyýan görýär. Önüm näçe kilogram eken?

21. Synagda okuwça 60 sany sorag berildi. Her bir dogry jogap 5 balla bahalandy. 4 sany nädogry jogap üçin jerime hökmünde bir sany dogry

- jogap aýryldy. Bu synagda hemme soraglary bellik eden bir okuwçy 225 ball toplan bolsa, ol näçe soraga dogry jogap beripdir?
22. Üçbelgili sanyň sifrleri bir sanyndan barha kemelýär. Şu sandan sifrleri oňa ters tertipde ýazylan sany aýyrmak netijesinde alnan san 2-ä, 9-a, 11-e bölünýär. Şuny subut ediň.
 23. Awtomobil 60 km/h tizlik bilen 4 sagat ýöredi. Şu ýola 1 sagat kem wagt sarp etmek üçin ol tizligini näçe göterime artdyrmaly?
 24. Iki obanyň arasyndaky aralygy bir syýahatçy 2 sagatda, ikinji syýahatçy bolsa 3 sagatda geçýär. Eger olar bu obalardan bir-birine tarap bir wagtda ýola çyksalar, näçe wagtdan soň duşuşarlar?
 25. Önümiň nyryhy a somdy. Bu nyrh $q\%$ -e arzanlady. Mälim wagt geçen-soň, täze nyrh $p\%$ -e ýokarlandy. Häzir şol önüm näçe somdan satylyp dur?
 26. Gönüburçlugyň ini a -ga, uzynlygy b -ge deň. Onuň ini $p\%$ -e uzal-dyldy, uzynlygy bolsa $q\%$ -e kemeldildi. Emele gelen gönüburçlugyň meýdanyny hasaplaň.
 27. Maşyn v_1 km/h tizlik bilen n sagat, v_2 km/h tizlik bilen m sagat ýol ýöredi.
 - 1) Maşyn jemi näçe kilometr ýol ýöräpdir?
 - 2) Onuň ortaça tizligi nähili bolupdyr?
 28. 5 tonna we 10 tonna ýük göterýän 50 maşyn bilen 405 tonna ýüki daşadylar. Ýük daşamaga näçe 5 tonnalyk we näçe 10 tonnalyk maşyn-lar gatnaşypdyr?

I BAP | ALGEBRAIK DROBLAR WE OLARYŇ ÜSTÜNDE AMALLAR

1- §. ALGEBRAIK AŇLATMALAR

Aşakdaky meselä garaýarys.

1-nji mesele. Käbir san oýlaň, ony 3-e köpeldiň, emele gelen netijä 6-ny goşuň, tapylan jemi 3-e bölüň we oýlanan sany aýryň. Nähili san emele gelýär?

△ Aýdaly, oýlanan san 8 bolsun. Ähli amallary meseläniň şertinde görkezilen tertipde ýerine ýetirýäris:

$$1) 8 \cdot 3 = 24; \quad 2) 24 + 6 = 30; \quad 3) 30 : 3 = 10; \quad 4) 10 - 8 = 2.$$

2 sany emele geldi.

Bu çözüwi bahasy 2-ä deň bolan $(8 \cdot 3 + 6) : 3 - 8$ sanly aňlatma görnüşinde ýazmak mümkin.

Eger-de, 5 san oýlanan bolsa, onda bahasy ýene 2-ä deň bolan $(5 \cdot 3 + 6) : 3 - 5$ sanly aňlatma alnan bolardy.

Biz nähili sany oýlasak-da, netijede 2 sany emele geliberýän eken-dä, diýen çak döreyär. Muny barlap görýäris. Oýlanan sany a harpy bilen belgileýäris we amallary ýene meseläniň şertinde görkezilen tertipde ýazýarys:

$$(a \cdot 3 + 6) : 3 - a.$$

Arifmetik amallaryň bize mälim bolan häsiýetlerinden peýdalanyň, bu aňlatmany ýönekeýleşdirýäris:

$$(a \cdot 3 + 6) : 3 - a = a + 2 - a = 2. \quad \blacktriangle$$

Meseläni çözende islendik sany aňladýan a harpy, 3 we 6 sanlary, amallar belgilerinden we ýaýlardan ybarat $(a \cdot 3 + 6) : 3 - a$ aňlatma alyndy. Bu *algebraik aňlatma* mysaldyr we ol meseläniň şertini matematiki dile geçirmegiň nusgasydyr.

Ýene algebraik aňlatmalara mysallar getirýäris:

$$2(m+n), \quad 3a+2ab-7, \quad (a+b)(a-b), \quad \frac{x+y}{a}.$$



Algebraik aňlatma sanlardan we harplardan düzülip, amal belgileri bilen birleşdirilen aňlatmadyr.

Eger algebraik aňlatma giren harplaryň ýerine käbir san goýulsa we görkezilen amallar ýerine ýetirilse, netijede alnan san *berlen algebraik aňlatmanyň san bahasy* diýilýär.

Meselem, $a=2$, $b=3$ bolanda

$$3a + 2b - 7$$

algebraik aňlatmanyň bahasy 5-e deň, çünki $3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 - 7 = 5$; şu algebraik aňlatmanyň bahasy $a=1$; $b=0$ bolanda -4 -e deň, çünki

$$3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 - 7 = -4.$$

a -nyň islendik bahasynda

$$(a \cdot 3 + 6) : 3 - a$$

algebraik aňlatmanyň bahasy 2-ä deň.

2-nji mesele. $\frac{(3a+7)b}{a-b}$ aňlatmanyň bahasyny $a=10$, $b=5$ bolanda tapyň.

$$\triangle \frac{(3 \cdot 10 + 7) \cdot 5}{10 - 5} = \frac{37 \cdot 5}{5} = 37. \blacktriangle$$



Goşmak, aýyrmak we köpeltmek belgileriniň kömeginde birleşdirilen birnäçe köpagzalardan ybarat algebraik aňlatma bitin aňlatma diýilýär.

Islendik bitin aňlatma standart görnüşindäki köpagza getirilmegi mümkin.

Mysal: $P(a, b) = 30a^3b^2 - (6a^2b + a)(5ab - 2)$ bitin aňlatmany standart görnüşindäki köpagza getiriň.

$$\begin{aligned} \triangle P(a, b) &= 30a^3b^2 - 30a^2b \cdot ab - 5ab \cdot a + 12a^2b + 2a = \\ &= 30a^3b^2 - 30a^3b^2 - 5a^2b + 12a^2b + 2a = 7a^2b + 2a. \end{aligned}$$

Jogaby: $7a^2b + 2a.$ $\blacktriangle$

Gönlük meler

1. Algebraik aňlatmanyň bahasyny tapyň:

- | | |
|---|--|
| 1) $3a - 2b$, munda $a = \frac{1}{3}, b = 1$; | 3) $0,25a - 4c^2$, munda $a = 4, c = 3$; |
| 2) $2a + 3b$, munda $a = 3, b = -2$; | 4) $\left(2a^2 - \frac{1}{3}b\right)$, munda $a = 2, b = 9$. |

2. Algebraik aňlatmanyň bahasyny tapyň:

- 1) $\frac{1}{4}x - \frac{3}{7}y$, munda $x = 8, y = -14$;
- 2) $\frac{2}{3}x + \frac{4}{5}y$, munda $x = 9, y = -10$;
- 3) $\frac{a-3b}{a+3b}$, munda $a = 4, b = -2$;
- 4) $\frac{a+3c}{2a-c}$, munda $a = 3, c = -1$.

3. Nebit turbasyndan 1 sagatda 7 t nebit akýar, m sagatda turbadan näçe tonna nebit akyp geçer? Bir sutkada näçe?

4. 1) m sagatda; 2) p sekuntda; 3) m sagat l minut we p sekuntda näçe minut bar?

5. x we y sanlaryň tapawudynyň üçeldilenini ýazyň. Şu aňlatmanyň:

- | | |
|---|---------------------------------|
| 1) $x = -0,37, y = -0,42$; | 2) $x = -2,98, y = -4,48$; |
| 3) $x = -\frac{5}{6}, y = -\frac{9}{4}$; | 4) $x = \frac{2}{15}, y = -0,7$ |

bolandaky san bahasyny tapyň.

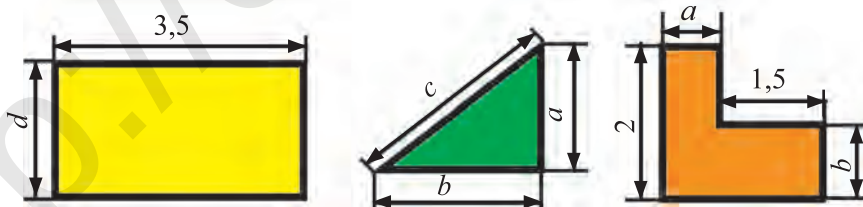
6. x we y sanlaryň jemi bilen olar tapawudynyň köpeltmek hasylyny ýazyň. Emele gelen algebraik aňlatmanyň:

- | | |
|--|--|
| 1) $x = -\frac{1}{8}, y = \frac{1}{4}$; | 2) $x = -\frac{5}{8}, y = \frac{3}{4}$; |
| 3) $x = 0,15, y = -0,75$; | 4) $x = 1,32, y = -1,28$ |

bolandaky san bahasyny tapyň.

Algebraik aňlatmalaryň san bahasyny tapyň (7–8):

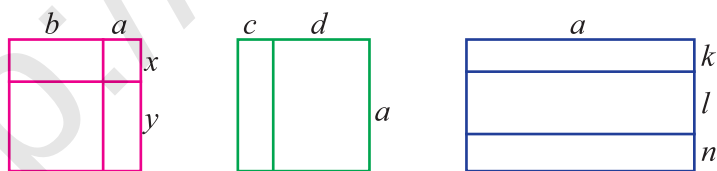
7. 1) $\frac{2mn(n+k)}{n-k}$, munda $m=k=\frac{1}{3}$, $n=\frac{1}{2}$;
2) $\frac{(3p+1) \cdot 2p}{p-l} + \frac{1}{3}$, munda $p=\frac{1}{3}$, $l=1$.
8. 1) $\frac{3(x-y)}{2p+q}$, munda $x=8,31$; $y=2,29$; $p=2,01$; $q=2$;
2) $\frac{5(bc+m)}{2q+4\frac{1}{4}}$, munda $b=\frac{2}{3}$; $c=6$; $q=\frac{1}{2}$, $m=\frac{1}{5}$.
9. Täk sanyň $n=2k+1$ formulasyndany peýdalanyň, $k=0$, $k=1$, $k=7$, $k=10$ bolanda n -iň bahasyny tapyň.
10. Algebraik aňlatma görnüşinde ýazyň:
1) kiçisi n -e deň bolan iki sany yzygider natural sanyň jemi; 2) ulusy m -e deň bolan iki sany yzygider natural sanyň köpeltmek hasyly; 3) kiçisi $2k$ -a deň bolan üç sany yzygider jübüt natural sanyň jemi; 4) kiçisi $2p+1$ -e deň bolan üç sany yzygider täk natural sanyň köpeltmek hasyly.
11. Şekilleriň perimetrini we meýdanyny algebraik aňlatma görnüşinde ýazyň (1-nji surat):



1-nji surat.

12. Öýi ýylatmak üçin p tonna kömür alnyp goýuldy; şu gordan q tonna sarp edildi. Näçe tonna kömür galypdyr? 1) $p=20$, $q=15$ bolanda hasaplaň; 2) q san p sandan uly bolmagy mümkinmi? p -ge deň bolmagy mümkinmi?

13. Göreş ýaryşyny görmek üçin her biri 400 somdan n sany bilet we her biri 500 somdan m sany bilet satyldy. Hemme biletlerden näçe pul düşüpdir? Değişli anlatma düzüň we ony $n=200$, $m=150$; $n=100$, $m=230$ bolanda hasaplaň.
14. Bir albomyň bahasy 200 som, bir sany depderiň bahasy 40 som, bir sany ruçkanyň bahasy 60 som. c sany albom, a sany depder we b sany ruçkanyň umumy (somlardaky) bahasyny p harpy bilen belgiläp, ony formula görnüşinde ýazyň. Eger $c=9$, $a=21$, $b=4$ bolsa, bu formula boýunça p -ni hasaplaň.
15. Ýylylyk geçiriji stansiýasy üçin niýetlenen gaz turbasy arkaly her minutda 26 m^3 gaz geçýär. 5 sutkada; m sutkada turbadan näçe kub metr gaz geçýär?
16. Geologlar öz ýönelişi boýunça hereketlenip, atda sagadyna c kilometr tizlik bilen 3 sagat 10 minut ýörediler; akymynyň tizligi sagadyna a kilometr bolan derýada akym boýunça 1 sagat 40 minut salda ýüzdüler we sagadyna b kilometr tizlik bilen 2 sagat 30 minut pyýada ýörediler. Ýönelişin (km-lardaky) uzynlygyny s harpy bilen belgiläp, geologlaryň geçen ýolunyň formulasyny ýazyň. Eger $a=3,3 \text{ km/h}$, $b=5,7 \text{ km/h}$, $c=10,5 \text{ km/h}$ bolsa, ýönelişin uzynlygyny hasaplaň.
17. Gatyşyk san $a + \frac{b}{c}$ görnüşinde ýazylyan. Gatyşyk sany nädogry droba öwürmek düzgünini harplaryň kömeginde ýazyň.
18. 1) 2-nji suratdaky şekiliň (gönüburçluk) meýdanyny we perimetrini hasaplamak üçin formulalar düzüň:



2-nji surat.

2) Şekiliň kömeginde:

a) $(a + b)(x + y) = ax + bx + ay + by$;

b) $a(c + d) = ac + ad$;

$$d) a \cdot (k + l + n) = ak + al + an$$

deñlikleri subut ediñ. Bu formulalaryñ manysyny açyñ.

19. Şu deñliklere getirýän *durmuşdan meseleler* düzüñ:

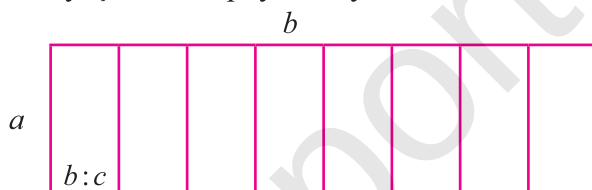
$$1) a - (b + c + d) = a - b - c - d;$$

$$2) a - (b - c) = a - b + c;$$

$$3) (ab)c = a(bc);$$

$$4) a - (b - c + d) = a - b + c - d.$$

20. $(ab):c = a \cdot (b:c)$ formulany subut ediñ. Geometrik pikir ýöretmelerden we 3-nji suratdaky şekilden peýdalanyñ.



3-nji surat.

2-§. ALGEBRAIK DROB. DROBLARY GYSGALTMAK

1-nji mesele. Kateriñ ýata suwdaky tizligi sagadyna a kilometre, derýa akymynyñ tizligi sagadyna b kilometre deñ. Kateriñ derýanyñ akymy boýunça hereket tizligi onuñ derýanyñ akymyna garşy hereket tizliginden näçe esse artyk?

△ Kateriñ derýanyñ akymy boýunça tizligi sagadyna $(a+b)$ kilometre deñ; akyma garşy tizligi sagadyna $(a-b)$ kilometre deñ. Şonuñ üçin derýanyñ akymy boýunça hereket tizligi akyma garşy hereket tizliginden

$$\frac{a+b}{a-b}$$

esse artyk bolýar. ▲

$\frac{a+b}{a-b}$ aňlatma *algebraik drob* diýilýär. Bu drobuñ sanawjysy $a+b$, maýdalawjysy bolsa $a-b$.

Umuman, *sanawjysy we maýdalawjysy algebraik aňlatmalar bolan droba algebraik drob* diýilýär.

Algebraik droblara degişli ýene birnäçe mysallary getirýäris:

$$\frac{a}{b}; \frac{2}{x+y}; \frac{a-b}{c}; \frac{x(b+c)}{y(a-c)}.$$

Eger algebraik droba girýän harplaryň ýerine käbir sanlar goýulsa, onda zerur hasaplamalar ýerine ýetirilenden soň şu algebraik drobuň *san bahasy* emele gelýär.

Meselem, $a=10$, $b=8$ bolanda $\frac{a+b}{a-b}$ algebraik drobuň san

bahasy $\frac{10+8}{10-8} = \frac{18}{2} = 9$ -a deň bolýar.

$\frac{a+b}{a-b}$ algebraik drobda a we b ýerine özara deň bolmadyk ($a \neq b$) islen-dik sanlary goýmak mümkin, çünki $a=b$ bolanda drobuň maýdalawjysy nola öwrülýär, nola bölmek bolsa mümkin däl.

Mundan soň algebraik droba girýän harplar diňe ýol berilýän (ýerlikli) bahalary, ýagny diňe şu drobuň maýdalawjysy nola deň bolmaýan bahalary kabul edýär, diýip şertleşýäris.

Meselem, $\frac{a}{a(a-1)}$ drob üçin ýerlikli bahalar a -nyň $a=0$ we $a=1$ -den başga ähli bahalary bolýar.



Drobuň esasy häsiýetini şeýle ýazmak mümkin:

$$\frac{a}{b} = \frac{ma}{mb},$$

bu ýerde $b \neq 0$, $m \neq 0$.

Bu häsiýet drobuň sanawjysy we maýdalawjysy birmeňzeş algebraik aňlat-ma köpeldilse ýa-da bölünse, oňa deň drob emele gelşini aňladýar, meselem:

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{15}{20}, \quad \frac{a+b}{b} = \frac{(a+b) \cdot c}{bc}.$$

Drobuň esasy häsiýetinden peýdalanyň, algebraik droby onuň sanawjysyna we maýdalawjysyna bir wagtda girýän umumy köpeldijä gysgaltmak mümkin, meselem:

$$\frac{a(b+c)}{a(b-c)} = \frac{b+c}{b-c}, \quad \frac{(a+b)c}{(a+b)d} = \frac{c}{d}.$$

Droblary ýönekeýleşdirmek üçin ilki olaryň sanawjysynyň we maýdalawjysynyň umumy köpeldijisini dagydyp almaly. Şoňa degişli mysallar getirýäris.

2-nji mesele. Droblary gysgaldyň:

$$1) \frac{12a^2b}{4ab^2}; \quad 2) \frac{m^2 - n^2}{m^2 + mn}.$$

△ 1) $12a^2b$ we $4ab^2$ biragzalar $4ab$ umumy köpeldijä eýe. Drobuň sanawjysyny we maýdalawjysyny $4ab$ -ge bölýäris:

$$\frac{12a^2b}{4ab^2} = \frac{4ab \cdot 3a}{4ab \cdot b} = \frac{3a}{b}.$$

2) $m^2 - n^2$ we $m^2 + mn$ köpagzalar $m + n$ umumy köpeldijä eýe, çünki $m^2 - n^2 = (m + n)(m - n)$, $m^2 + mn = m(m + n)$. Drobuň sanawjysyny we maýdalawjysyny $m + n$ -e bölýäris:

$$\frac{m^2 - n^2}{m^2 + mn} = \frac{(m + n)(m - n)}{m(m + n)} = \frac{m - n}{m}. \quad \blacktriangle$$



Droblary gysgaltmak üçin bu droblaryň sanawjysyny we maýdalawjysyny olaryň umumy köpeldijisine bölmeli.

Eger $\frac{a}{b}$ drobuň sanawjysyndaky ýa-da maýdalawjysyndaky belgi garşylyklysyna üýtgedilse, onda berlen droba garşylykly drob emele gelyändigini nygtap geçýäris.

$\frac{-a}{b}$ we $\frac{a}{b}$; $\frac{a}{-b}$ we $\frac{a}{b}$ – garşylykly droblar. Şunuň bilen birlikde

$$\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}; \quad \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}.$$

Meselem, $\frac{-3}{7} = -\frac{3}{7}$; $\frac{-a}{1-a} = -\frac{a}{1-a} = \frac{a}{a-1}$.

3-nji mesele. $\frac{3a(y-x)}{a^2(x-y)}$ droby gysgaldyň:

$$\triangle \frac{3a(y-x)}{a^2(x-y)} = \frac{-3a(x-y)}{a^2(x-y)} = \frac{-3}{a} = -\frac{3}{a}. \triangle$$

Gönükmeler

21. Sanawjysy x we y sanlaryň köpeltmek hasylyna, maýdalawjysy bolsa olaryň jemine deň algebraik droby ýazyň.
22. Sanawjysy p we q sanlaryň tapawudyna, maýdalawjysy bolsa olaryň köpeltmek hasylyna deň bolan algebraik droby ýazyň.
23. Sanawjysy a we b sanlaryň kwadratlarynyň tapawudyna, maýdalawjysy bolsa olaryň tapawudynyň kwadratyna deň bolan algebraik droby ýazyň.
24. Sanawjysy c we d sanlaryň kublarynyň jemine, maýdalawjysy bolsa olaryň köpeltmek hasylynyň ikeldilenine deň bolan algebraik droby ýazyň.
25. Algebraik drobuň san bahasyny tapyň:

$$1) \frac{1}{a}, \text{ munda } a = 2\frac{3}{5}; \quad 4) \frac{a-b}{a+2b}, \text{ munda } a = 16, b = -3;$$

$$2) \frac{b+1}{b-1}, \text{ munda } b = 1,5; \quad 5) \frac{5a+b^2}{a^2-5b}, \text{ munda } a = 2, b = 8;$$

$$3) \frac{a^2+1}{2a}, \text{ munda } a = -3; \quad 6) \frac{-7ab}{3b^2-a^3}, \text{ munda } a = 3, b = 4.$$

26. 1) $S=vt$ formuladan v ni; | 2) $p=\frac{m}{V}$ formuladan V -ni;
 3) $C=2\pi R$ formuladan R i; | 4) $P=2(a+b)$ formuladan a -ny tapyň.

27. Her bir ýük maşynyna a tonnadan kartoşka ýüklemek mümkin bolsa, her birinde p kilogramdan kartoşka bolan n halta kartoşkany daşamak üçin näçe ýük maşyny (x) gerek bolar? x ni $n=90$, $p=50$, $a=1,5$ bolanda tapyň.

28. Maşyn sagadyna ortaça c metr linoleum öndürýär. Eger maşyn gününe n sagatdan işlese, ol a metr linoleumy näçe günde öndürer? Gözlenýän wagty t bilen belgiläp, t -ni $c=47$, $a=11280$ we $n=16$ bolanda tapyň.

29. Berlen iki drobuň deňdigini görkeziň:

$$\begin{array}{lll} 1) \frac{6}{7} \text{ we } \frac{18}{21}; & 3) \frac{2}{3} \text{ we } \frac{2a}{3a}; & 5) \frac{m-n}{m+n} \text{ we } \frac{m^2-n^2}{(m+n)^2}; \\ 2) \frac{-3}{5} \text{ we } \frac{27}{-45}; & 4) \frac{2a}{7b} \text{ we } \frac{2a^2b}{7ab^2}; & 6) \frac{a+3b}{c} \text{ we } \frac{(a+3b)c}{c^2}. \end{array}$$

Droby gysgaldyň **(30–45)**:

30. 1) $\frac{-48}{-56}$; 2) $\frac{-64}{-80}$; 3) $\frac{-121}{55}$; 4) $\frac{28}{-14}$.

31. 1) $\frac{12a}{20}$; 2) $\frac{2c}{3c}$; 3) $\frac{7b}{21b}$;
4) $\frac{4ab}{8ac}$; 5) $\frac{a^2}{2a}$; 6) $\frac{5x}{x^3y}$.

32. 1) $\frac{a^2}{a^3}$; 2) $\frac{b^3}{b^7}$;
3) $\frac{a^5}{a^4}$; 4) $\frac{b^6}{b^4}$.

33. 1) $\frac{6ab}{4a}$; 2) $\frac{14c}{49c}$; 3) $\frac{a^4b}{ab^3}$;
4) $\frac{3a^2b}{9a^3}$; 5) $\frac{12a^4b^2}{18a^3b^3}$; 6) $\frac{25a^3bc^2}{125ac^3}$.

34. 1) $\frac{4(m+n)}{5(m+n)}$; 3) $\frac{2b(m-n)}{8b(m-n)(m-n)}$; 5) $\frac{2(a-b)}{b-a}$;
2) $\frac{7a(a-b)}{5(a-b)}$; 4) $\frac{3a(a+b)}{9a(a+b)(a-b)}$; 6) $\frac{5(x-y)}{15(y-x)}$.

35. 1) $\frac{(a-b)^2}{a-b}$; 3) $\frac{m-n}{(n-m)^2}$; 5) $\frac{3m(1-x)^2}{9m^2(x-1)^2}$;
 2) $\frac{m+n}{(m+n)^4}$; 4) $\frac{(2x-3y)^2}{3y-2x}$; 6) $\frac{8a^2b(a-b)}{4a^3b(b-a)^2}$.
36. 1) $\frac{3x+3y}{6c}$; 3) $\frac{2a+2b}{4a-4b}$; 5) $\frac{ac-bc}{ac+bc}$;
 2) $\frac{8a}{4m-4n}$; 4) $\frac{12a-3}{6a+9}$; 6) $\frac{a+ab}{a-ab}$.
37. 1) $\frac{a^2}{a^2+ab}$; 3) $\frac{7a+14b}{3a+6b}$; 5) $\frac{3a-6b}{12b-6a}$;
 2) $\frac{pq^3}{p^2q-pq^2}$; 4) $\frac{2m^2-mn}{2mn-n^2}$; 6) $\frac{x^2-2xy}{2y^2-xy}$.
38. 1) $\frac{12x^2-30xy}{30x^2-12xy}$; 2) $\frac{36a^2+24ab}{24a^2+36ab}$; 3) $\frac{m^3-3m^2n}{3m^2n-3m^3}$; 4) $\frac{a^3-2a^2b}{2a^3b^2-a^4b}$.
39. 1) $\frac{a^2-b^2}{a+b}$; 3) $\frac{4c^2-9x^2}{2c-3x}$; 5) $\frac{3a(a-b)}{6a^2(b-a)}$;
 2) $\frac{a-b}{a^2-b^2}$; 4) $\frac{25-x^2}{5-x}$; 6) $\frac{5a(c^2-4)}{10a^2(2-c)}$.
40. 1) $\frac{8-3c}{9c^2-64}$; 3) $\frac{2y-10}{25-y^2}$; 5) $\frac{b^2-c^2}{b^4n-c^4n}$;
 2) $\frac{100-49b^2}{7b+10}$; 4) $\frac{5y-y^2}{25-y^2}$; 6) $\frac{5a^3b+5ab^3}{a^4-b^4}$.
41. 1) $\frac{d^2-6d+9}{d-3}$; 2) $\frac{b+7}{b^2+14b+49}$; 3) $\frac{9-6a+a^2}{3-a}$; 4) $\frac{1-2p}{1-4p+4p^2}$.
42. 1) $\frac{4y^2-4y+1}{4y^2-1}$; 3) $\frac{3a^2-6ab+3b^2}{6a^2-6b^2}$;
 2) $\frac{16a^2-1}{16a^2-8a+1}$; 4) $\frac{50m^2+100mn+50n^2}{15m^2-15n^2}$.

43. 1) $\frac{1-a^2}{(a-1)^2}$; 2) $\frac{(m-n)^2}{n-m}$; 3) $\frac{4y^2-4y+1}{2-4y}$; 4) $\frac{5-2x}{4x^2-20x+25}$.

44. 1) $\frac{9c^2-16}{16-24c+9c^2}$; 4) $\frac{36c-c^3}{c^3+12c^2+36c}$;

2) $\frac{16x^2-24xy+9y^2}{9y^2-16x^2}$; 5) $\frac{25b-49b^3}{49b^3-70b^2+25b}$;

3) $\frac{4x^2-4xy+y^2}{y^2-4x^2}$; 6) $\frac{4b^2-12bc+9c^2}{-2ab+3ac}$.

45. 1) $\frac{2a^5-128a^2}{(2a^2+8a+32)(a^4-4a^3)}$; 3) $\frac{3a^3+ab^2-6a^2b-2b^3}{9a^5-ab^4-18a^4b+2b^5}$;

2) $\frac{2a^4+3a^3+2a+3}{(a^2-a+1)(2a+3)}$; 4) $\frac{3ac^2+3bc^2-3ab^2-3b^3}{6ac^2+6bc^2-6ab^2-6b^3}$.

3-§. DROBLARY UMUMY MAÝDALAWJA GETIRMEK

Ady droblary goşanda ilki droblar umumy maýdalawja getirip alynýar.

Meselem, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{25}$, $\frac{7}{10}$ droblar üçin umumy maýdalawjy 100 sany bolýar, bu san 4, 25, 10 sanlarynyň iň kiçi umumy kratnysydyr.



Algebraik droblaryň umumy maýdalawjysy şu droblaryň maýdalawjylarynyň iň kiçi umumy kratnysydyr. Droblary umumy maýdalawja getirmekde drobuň esasy häsiýetinden peýdalanylýar.

1-nji mesele. $\frac{m}{3a^2b}$, $\frac{n}{6ab^2}$ va $\frac{p}{4ac}$ algebraik droblary umumy maýdalawja getiriň.

△ Berlen droblaryň umumy maýdalawjysy her bir drobuň maýdalawjysyna bölünmeli. Diýmek, ol 3-e, 6-a, 4-e, ýagny 12-ä; a^2 -ä, a -ga, ýagny a^2a ; b -ge we b^2 -a, ýagny b^2a ; c -ge bölünmeli.

Şeýdip, droblaryň umumy maýdalawjysy 12 , a^2 , b^2 we c köpeldijileri öz içine almaly. Umumy maýdalawjy hökmünde $12a^2b^2c$ köpeltmek hasylyny almaly bolýar. Bu umumy maýdalawjyny birinji drobuň maýdalawjysyna bölüp, onuň sanawjysyny we maýdalawjysyny köpeltmeli bolan biragzany tapýarys. Bu biragza berlen *drobuň goşmaça köpeldijisi* diýilýär. Birinji drob üçin şeýle biragza $4bc$ -ge deň. Edil şeýle ýol bilen ikinji we üçünji droblar üçin goşmaça köpeldijileri tapýarys: $2ac$ we $3ab^2$.

Birinji, ikinji we üçünji droblaryň sanawjysyny we maýdalawjysyny, degişlilikde, $4bc$, $2ac$ we $3ab^2$ -a köpeldip, olary $12a^2b^2c$ umumy maýdalawja getirýäris:

$$\frac{m}{3a^2b} = \frac{4mbc}{12a^2b^2c}, \quad \frac{n}{6ab^2} = \frac{2nac}{12a^2b^2c}, \quad \frac{p}{4ac} = \frac{3pab^2}{12a^2b^2c}. \quad \blacktriangle$$

2-nji mesele. Droblary umumy maýdalawja getirň:

$$\frac{a}{x^2 - y^2}; \quad \frac{b}{2x^2 - 4xy + 2y^2}; \quad \frac{c}{3x^2 + 6xy + 3y^2}.$$

$\triangle$ Droblaryň maýdalawjysyny köpeldijilere dagydýarys. Umumy maýdalawjy berlen droblaryň her biriniň maýdalawjysyna bölünmeli:

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y);$$

$$2x^2 - 4xy + 2y^2 = 2(x^2 - 2xy + y^2) = 2(x - y)^2;$$

$$3x^2 + 6xy + 3y^2 = 3(x^2 + 2xy + y^2) = 3(x + y)^2.$$

Umumy maýdalawjy birinji drobuň maýdalawjysyna bölünmegi üçin onuň düzüminde $(x - y)(x + y)$ köpeltmek hasyly bolmaly.

Soňra, umumy maýdalawjy ikinji drobuň maýdalawjysyna bölünmeli we şonuň üçin onda $2(x - y)^2$ köpeldiji bolmaly. Diýmek, birinji drobuň maýdalawjysyna ýene $2(x - y)$ köpeldijini hem ýazyp goýmaly, ýagny umumy maýdalawjynyň düzüminde

$$2(x - y)^2(x + y)$$

köpeltmek hasyly bolmaly.

Umumy maýdalawjy üçünji drobuň $3(x+y)^2$ maýdalawjysyna bölünmegi üçin alnan köpeltmek hasylyna $3(x+y)$ köpeldijini ýazyp goýmaly. Diýmek, üç drobuň hem umumy maýdalawjysy

$$6(x-y)^2(x+y)^2$$

-a deň bolýar.

Droblary umumy maýdalawja getirmek üçin olaryň sanawjysyny we maýdalawjysyny goşmaça köpeldijilere köpeltmeli, olar bolsa umumy maýdalawjyny her bir drobuň maýdalawjysyna bölmek ýoly bilen tapylýar; berlen droblar üçin olar degişlilikde aşakdakylara deň:

$$6(x-y)(x+y), 3(x+y)^2, 2(x-y)^2.$$

Diýmek, berlen droblary şeýle ýazyp almak mümkin:

$$\frac{a}{x^2-y^2} = \frac{6a(x-y)(x+y)}{6(x-y)^2(x+y)^2}; \quad \frac{b}{2x^2-4xy+2y^2} = \frac{3b(x+y)^2}{6(x-y)^2(x+y)^2};$$

$$\frac{c}{3x^2+6xy+3y^2} = \frac{2c(x-y)^2}{6(x-y)^2(x+y)^2} \cdot \blacktriangle$$



Algebraik droblary umumy maýdalawja getirmek üçin:

- 1) berlen droblaryň umumy maýdalawjysyny tapmaly;
- 2) her bir drob üçin goşmaça köpeldijini tapmaly;
- 3) her bir drobuň sanawjysyny onuň goşmaça köpeldijisine köpeltmeli;
- 4) her bir droby tapylan sanawjy we umumy maýdalawjy bilen ýazmaly.

Gönükmeler

Aşakdaky gönükmelerde droblary umumy maýdalawja getiriň (46–53):

46. 1) $\frac{1}{2}$ we $\frac{2}{3}$; 3) $\frac{5}{7}$ we $\frac{3}{14}$; 5) $\frac{x}{2y}$ we $\frac{x}{3y}$;

2) $\frac{1}{a}$ we $\frac{2}{b}$; 4) $\frac{a}{b}$ we $\frac{a}{2b}$; 6) $\frac{8}{15}$ we $\frac{5}{12}$.

47. 1) $\frac{3}{4a}, \frac{1}{5b}$ we $\frac{7}{20ab}$; | 2) $\frac{3x}{4y}, \frac{6}{xy}$ we $\frac{4y}{3x}$; | 3) $\frac{7}{a^2}$ we $\frac{8}{a^3}$; | 4) $\frac{a}{2x}$ we $\frac{b}{4x^3}$.

48. 1) a we $\frac{b^2}{a}$; | 2) $3b$ we $\frac{a^2}{2b}$; | 3) a^2 we $\frac{c}{2ab}$; | 4) $\frac{b}{3a}, \frac{3c}{2b}$ we ab .

49. 1) $\frac{1}{2p^2}, \frac{1}{6pk}$ we $\frac{1}{3k^2}$; | 3) $\frac{2a}{b^2}, \frac{4}{15a^2b}$ we $\frac{3}{20a^3b^4}$;

2) $\frac{1}{6b^2}, \frac{a^2+b^2}{9a^2b^2}$ we $\frac{3-a^2}{18ab^2}$; | 4) $\frac{7}{20x^4y}, \frac{31}{6xy^3}$ we $\frac{4}{3x^2y^4}$.

50. 1) $\frac{3}{x+y}$ we $\frac{5}{x}$;

3) $\frac{7x}{2(x-1)}$ we $\frac{5x}{x-1}$;

2) $\frac{6}{a-1}$ we $\frac{2}{a}$;

4) $\frac{2a^2}{3(a+1)}$ we $\frac{5a^2}{4(a+1)}$.

51. 1) $\frac{1}{x-y}$ we $\frac{1}{x+y}$;

3) $\frac{5x}{2x-2}$ we $\frac{3}{4x-4}$;

2) $\frac{7a}{3x-y}$ we $\frac{6b}{3x+y}$;

4) $\frac{3x}{4x+4y}$ we $\frac{x}{8x+8y}$.

52. 1) $\frac{3b}{b-2}$ we $\frac{4}{b^2-4}$;

3) $\frac{1}{1-a}, \frac{2a}{1+a}$ we $\frac{a^2}{1-a^2}$;

2) $\frac{7a}{x^2-9}$ we $\frac{a}{x+3}$;

4) $\frac{6x}{x-y}, \frac{7xy}{x+y}$ we $\frac{3}{x^2-y^2}$.

53. 1) $\frac{m}{2m+2n}, \frac{n}{8m-8n}$ we $\frac{mn}{6m^2-6n^2}$; | 2) $\frac{2c}{5b-5c}, \frac{3a^2}{35b^2-35c^2}$ we $\frac{7b}{14b+14c}$;

3) $\frac{1}{a^2-4b^2}, \frac{1}{3a^2+6ab}$ we $\frac{1}{2ab-a^2}$; | 4) $\frac{5}{4x-4}, \frac{4x}{1-x^2}$ we $\frac{1}{3x^2+3x}$.



№1

Bir gurçuk yerden agajyň depesine çykmakçy bolupdyr. Agaç boýunça gijesine ol 2 m beýiklige çykansoň, gündizine bolsa 1 m pese düşer eken. 9-njy gije ol agajyň depesine çykyppdyr. Agajyň beýikligi näçe metr eken?

4-§. ALGEBRAIK DROBLARY GOŠMAK WE AÝYRMAK

Birmeñzeş maýdalawjyly droblary goşmak we aýyrmak düzgünlerini şeýle ýazmak mümkin:

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a+b}{m};$$

$$\frac{a}{m} - \frac{b}{m} = \frac{a-b}{m}.$$

1-nji mesele. $\frac{a-b}{a+b}$, $\frac{2a-b}{a+b}$ we $\frac{a-2b}{a+b}$ droblary goşuň.

$$\triangle \frac{a-b}{a+b} + \frac{2a-b}{a+b} + \frac{a-2b}{a+b} = \frac{a-b+2a-b+a-2b}{a+b} = \frac{4a-4b}{a+b} = \frac{4(a-b)}{a+b}. \triangle$$

2-nji mesele. $\frac{a^2}{a+b}$ we $\frac{b^2}{a+b}$ droblaryň tapawudyny tapyň.

$$\triangle \frac{a^2}{a+b} - \frac{b^2}{a+b} = \frac{a^2-b^2}{a+b} = \frac{(a+b)(a-b)}{a+b} = a-b. \triangle$$



Dürli maýdalawjyly droblary goşmak ýa-da aýyrmak üçin bu droblary umumy maýdalawja getirmeli we birmeñzeş maýdalawjyly droblary goşmak ýa-da aýyrmak düzgüninden peýdalanmaly.

3-nji mesele. $\frac{1}{a^3}$, $\frac{1}{2a^2b}$ va $\frac{1}{3ab^2}$ droblary goşuň.

$\triangle$ Berlen droblaryň umumy maýdalawjysy $6a^3b^2$ köpeltmek hasyly bolýar. Diýmek,

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{2a^2b} + \frac{1}{3ab^2} = \frac{6b^2}{6a^3b^2} + \frac{3ab}{6a^3b^2} + \frac{2a^2}{6a^3b^2} = \frac{2a^2+3ab+6b^2}{6a^3b^2}. \triangle$$

4-nji mesele. $\frac{a}{3b^2c}$ we $\frac{c}{15ab^2}$ droblaryň tapawudyny tapyň.

$$\triangle \frac{a}{3b^2c} - \frac{c}{15ab^2} = \frac{5a^2}{15ab^2c} - \frac{c^2}{15ab^2c} = \frac{5a^2-c^2}{15ab^2c}. \triangle$$

5-nji mesele. $\frac{1}{x^2-x}$ we $\frac{3}{x^2-1}$ droblary goşuň.

△ Droblaryň maýdalawjylarynda duran köpagzalary köpeldijilere dagydýarys:

$$x^2 - x = x(x-1), \quad x^2 - 1 = (x-1)(x+1).$$

Droblaryň umumy maýdalawjysy $x(x-1)(x+1)$ köpeltmek hasyly bolýar. Droblary umumy maýdalawja getirip, tapýarys:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2-x} + \frac{3}{x^2-1} &= \frac{1}{x(x-1)} + \frac{3}{(x-1)(x+1)} = \frac{x+1}{x(x^2-1)} + \frac{3x}{x(x^2-1)} = \\ &= \frac{x+1+3x}{x(x^2-1)} = \frac{4x+1}{x(x^2-1)}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

❗ Dürli maýdalawjyly droblary goşmagy ýa-da aýyrmagy şu tertipde ýerine ýetirmek mümkin:

- 1) droblaryň umumy maýdalawjysy tapylýar;
- 2) droblar umumy maýdalawja getirilýär;
- 3) emele gelen droblar goşulýar;
- 4) mümkin bolsa, netije ýönekeýleşdirilýär.

6-nji mesele. $\frac{1}{a^2+4a+4} - \frac{4}{a^4+4a^3+4a^2} + \frac{4}{a^3+2a^2}$ aňlatmanyň san ba-

hasyny $a=0,5$ bolanda hasaplaň.

△ Berlen aňlatmany aşakdaky ýaly çalşyrmak mümkin:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(a+2)^2} - \frac{4}{a^2(a^2+4a+4)} + \frac{4}{a^2(a+2)} &= \frac{1}{(a+2)^2} - \frac{4}{a^2(a+2)^2} + \frac{4}{a^2(a+2)} = \\ &= \frac{a^2 - 4 + 4(a+2)}{a^2(a+2)^2} = \frac{a^2 + 4a + 4}{a^2(a+2)^2} = \frac{1}{a^2}. \end{aligned}$$

Diýmek, aňlatmanyň gözlenýän san bahasy:

$$\frac{1}{0,5^2} = \frac{1}{0,25} = \frac{100}{25} = 4. \quad \blacktriangle$$

Gönükmeler

Amallary yerine yetirish (54–60):

54. 1) $\frac{p}{q^2} + \frac{3p}{q^2}$; 2) $\frac{8a}{b^3} - \frac{3a}{b^3}$; 3) $\frac{a}{a+b} + \frac{c}{a+b}$; 4) $\frac{x}{n+a} - \frac{y}{n+a}$.

55. 1) $\frac{c+d}{2a} + \frac{2c-d}{2a}$; 2) $\frac{a+2b}{3c^2} + \frac{5a-2b}{3c^2}$; 3) $\frac{a+b}{2c} - \frac{a-b}{2c}$;
4) $\frac{10a-b}{a^3} - \frac{3a-b}{a^3}$; 5) $\frac{(1+b)^2}{5d} + \frac{(1-b)^2}{5d}$; 6) $\frac{(2+a)^2}{a^2b} - \frac{(2-a)^2}{a^2b}$.

56. 1) $\frac{2}{5} + \frac{3}{7}$; 3) $\frac{2}{3a} + \frac{1}{a}$; 5) $\frac{c}{15a} + \frac{d}{3}$;
2) $\frac{4}{7} - \frac{5}{28}$; 4) $\frac{1}{b} - \frac{2}{5b}$; 6) $\frac{a}{4} - \frac{b}{12d}$.

57. 1) $\frac{m}{2} - \frac{1}{n}$; 2) $\frac{3}{a} + \frac{b}{5}$; 3) $5 - \frac{1}{a}$; 4) $\frac{2}{b} + 7$.

58. 1) $5 - \frac{2}{b} + \frac{3}{b^2}$; 2) $\frac{2}{c} + 4 - \frac{3}{c^2}$;
3) $d - \frac{c}{d} + \frac{c^2}{d^2}$; 4) $\frac{m}{n} - k + \frac{m^2}{n^2}$.

59. 1) $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc}$; 3) $\frac{a}{bc} - \frac{a}{bd}$; 5) $\frac{3}{m^2} + \frac{4}{mn}$;
2) $\frac{1}{mn} - \frac{1}{mk}$; 4) $\frac{b}{ac} + \frac{b}{cd}$; 6) $\frac{2}{mn} - \frac{3}{n^3}$.

60. 1) $\frac{3c}{4a^3b} + \frac{5d}{6ab^3}$; 3) $\frac{2}{3y^3} - \frac{1}{6x^2y} + \frac{5}{12xy^2}$; 5) $\frac{a}{b^2} + \frac{b}{c^2} + \frac{c}{a^2}$;
2) $\frac{2a}{9b^4} - \frac{7c}{6a^3b}$; 4) $\frac{5}{7x^2y} - \frac{3}{4xy^2} + \frac{11}{14x^2y^2}$; 6) $\frac{b}{c} + \frac{b}{c^2d} + \frac{b}{cd^2}$;

Algebraik droblary goşuň we aýryň (61–72):

61. 1) $\frac{2x}{3(a-b)} + \frac{x}{a-b}$;

3) $\frac{2a^2}{3(a+1)} + \frac{5a^2}{4(a+1)}$;

2) $\frac{7x}{2(x-1)} - \frac{5x}{x-1}$;

4) $\frac{4y}{5(y-3)} - \frac{5x}{2(y-3)}$.

62. 1) $\frac{5}{2x-2} + \frac{3}{4x-4}$;

3) $\frac{a}{3a+3b} - \frac{2a}{6a+6b}$;

2) $\frac{7}{5b+5} - \frac{3}{10b+10}$;

4) $\frac{3x}{4x+4y} - \frac{x}{8x+8y}$.

63. 1) $\frac{3}{a^2+a} + \frac{5a}{ab+b}$;

3) $\frac{y+a}{b^2+ba} + \frac{y-b}{ab+a^2}$;

2) $\frac{5b}{ax+ay} - \frac{2a}{bx+by}$;

4) $\frac{y-b}{a^2-ab} - \frac{y-a}{ab-b^2}$.

64. 1) $\frac{3}{x+y} - \frac{5}{x}$;

3) $\frac{1}{x(x-3)} + \frac{1}{x(x+3)}$;

2) $\frac{6}{a} - \frac{10}{a-1}$;

4) $\frac{4}{5(a-b)} - \frac{7}{8(a+b)}$.

65. 1) $\frac{a}{1-b^2} + \frac{1}{1+b}$;

3) $\frac{5+p^2}{p^2-36} - \frac{p}{6+p}$;

2) $\frac{2}{x^2-9} + \frac{1}{x+3}$;

4) $\frac{2x}{x-4} - \frac{5x-2}{x^2-16}$.

66. 1) $\frac{2x}{x-4} - \frac{5x-2}{16-x^2}$;

3) $\frac{c^2-8}{2c+3} - \frac{16c-2c^3}{9-4c^2}$;

2) $\frac{12n-5}{n^2-49} + \frac{6}{7-n}$;

4) $\frac{21y^2+1}{1-9y^2} - \frac{y}{3y-1}$.

67. 1) $\frac{3}{a+2} + \frac{2a}{(a+2)^2}$;

2) $\frac{a}{(3a+1)^2} + \frac{4}{3a+1}$.

68. 1) $\frac{2y+8}{y^2-4y+4} - \frac{7}{y-2}$;

4) $\frac{4}{(m-n)^2} - \frac{7}{n-m}$;

2) $\frac{4-5x}{1+6x+9x^2} - \frac{2}{3x+1}$;

5) $\frac{2a}{25-10a+a^2} + \frac{10}{a^2-25}$;

3) $\frac{7}{(a-b)^2} - \frac{5}{b-a}$;

6) $\frac{1}{x^2-6x+9} + \frac{1}{(x+3)^2}$.

69. 1) $a + \frac{a}{a-1}$;

2) $b - \frac{b}{b-2}$;

3) $c + 1 - \frac{c^2}{c-1}$;

4) $\frac{a^2}{a+1} - a + 1$.

70. 1) $\frac{7}{a+b} + \frac{8}{a-b} - \frac{16b}{a^2-a^2}$;

3) $\frac{3}{a+3} + \frac{2}{3-a} - \frac{6}{a^2-9}$;

2) $\frac{6x}{x^2-y^2} - \frac{3}{x-y} - \frac{4}{x+y}$;

4) $\frac{3}{4a^2-9} - \frac{8}{2a+3} - \frac{7}{3-2a}$.

71. 1) $\frac{a+b}{a} - \frac{a}{a-b} - \frac{b}{a^2-ab}$;

4) $\frac{7}{m} - \frac{4}{m-2n} - \frac{m-n}{4n^2-m^2}$;

2) $\frac{5b-1}{3b^2-3} + \frac{b+2}{2b+2} - \frac{b+1}{b-1}$;

5) $x - \frac{xy}{x+y} - \frac{x^3}{x^2-y^2}$;

3) $\frac{6a}{9a^2-1} + \frac{3a+1}{3-9a} + \frac{3a-1}{6a+2}$;

6) $a-2 + \frac{4a}{2+a} - \frac{a^3+b}{a^2+2a}$.

72. 1) $\frac{a+1}{a^3-1} - \frac{1}{a^2+a+1}$;

3) $\frac{a+b}{a^2-ab+b^2} - \frac{1}{a+b}$;

2) $\frac{a^2+4}{a^3+8} - \frac{1}{a+2}$;

4) $\frac{m^2-3m+9}{m^3-27} - \frac{1}{m-3}$.

73. Añlatmany ýönekeýleşdirip, san bahasyny tapyň:

$$1) \frac{8a^2}{a^3-1} + \frac{a+1}{a^2+a+1}, \text{ munda } a=2;$$

$$2) \frac{3c^2-c+3}{c^3-1} - \frac{c-1}{c^2+c+1} + \frac{2}{1-c}, \text{ munda } c=1\frac{1}{2}.$$

5-§. ALGEBRAIK DROBLARY KÖPELTMEK WE BÖLMEK

Algebraik droblary köpeltmek we bölmek hem ady droblary köpeltmek we bölmek düzgünleri boýunça ýerine ýetirilýär:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd};$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

1-nji mesele. Droblary köpeldiň:

$$\frac{1}{2xy}, \frac{4x^2y^3}{5z} \text{ va } \frac{10z^2}{3x^3}.$$

$$\triangle \frac{1}{2xy} \cdot \frac{4x^2y^3}{5z} \cdot \frac{10z^2}{3x^3} = \frac{1 \cdot 4x^2y^3 \cdot 10z^2}{2xy \cdot 5z \cdot 3x^3} = \frac{4y^2z}{3x^2}. \triangle$$

2-nji mesele. $\frac{a-b}{a^2+ab}$ we $\frac{b^2+ab}{(a-b)^2}$ droblary köpeldiň.

$\triangle$ Köpeldijilere dagydyp, tapýarys:

$$\frac{a-b}{a^2+ab} \cdot \frac{b^2+ab}{(a-b)^2} = \frac{(a-b)b(a+b)}{a(a+b)(a-b)^2} = \frac{b}{a(a-b)}. \triangle$$

3-nji mesele. $\frac{m+n}{9m^2n^3}$ we $\frac{m^2-n^2}{27mn^2}$ droblary bölüň.

$$\triangle \frac{m+n}{9m^2n^3} : \frac{m^2-n^2}{27mn^2} = \frac{(m+n) \cdot 27mn^2}{9m^2n^3(m^2-n^2)} = \frac{(m+n)3}{mn(m-n)(m+n)} = \frac{3}{mn(m-n)}. \triangle$$

Algebraik droby derejā gösterende şu $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ formuladan peýdalanylýandygyny ýatladyp geçýäris.

Meselem,

$$\left(\frac{4a^2}{b}\right)^2 = \frac{16a^4}{b^2}; \quad \left(\frac{a+b}{3c}\right)^3 = \frac{(a+b)^3}{27c^3}.$$

Droblary köpeldiň (74–75):

74. 1) $\frac{85}{24} \cdot \frac{72}{17}$; 2) $\frac{256}{169} \cdot \frac{13}{64}$; 3) $50 \cdot \frac{7}{625}$; 4) $\frac{5}{26} \cdot 39$.

75. 1) $\frac{a^3b}{c} \cdot \frac{c^2}{a^4}$; 3) $\frac{6a}{5b} \cdot \frac{15c}{2d}$; 5) $\frac{2a}{3b} \cdot 3c$;
2) $\frac{m^2n^2}{k} \cdot \frac{k^3}{m^3n^3}$; 4) $\frac{4m}{9n} \cdot \frac{27k}{16d}$; 6) $14a^2 \cdot \frac{b^2}{7c^3}$.

76. Droblary bölün:

1) $\frac{3}{5} : \frac{3}{7}$; 3) $\frac{a}{8} : \frac{1}{3}$; 5) $\frac{2}{a} : \frac{6}{7}$;
2) $\frac{11}{12} : \frac{2}{5}$; 4) $\frac{6}{c} : \frac{m}{13}$; 6) $\frac{9}{35} : \frac{b}{5}$.

77. Droblary bölün:

1) $\frac{8}{17} : \frac{8}{17}$; 3) $\frac{3a}{7b} : \frac{a}{b}$; 5) $\frac{2a}{3b} : \frac{a^2}{bc}$;
2) $\frac{a}{b} : \frac{a}{b}$; 4) $\frac{c}{2d} : \frac{4c^2}{5d}$; 6) $\frac{5m}{n^2} : \frac{10m^3}{n}$.

78. Droblary bölün:

1) $\frac{17}{12} : \frac{34}{39}$; 3) $\frac{4}{13} : 5$; 5) $12 : \frac{8}{9}$;
2) $\frac{54}{25} : \frac{81}{75}$; 4) $\frac{a}{b} : c$; 6) $a : \frac{b}{c}$.

79. Droblary bölün:

$$1) \frac{a^2b}{c} : \frac{a^4}{c^2};$$

$$3) \frac{4a}{5b} : \frac{12c}{25d};$$

$$5) \frac{6a}{5b} : (5c);$$

$$2) \frac{mn}{k} : \frac{m^2n^2}{k^3};$$

$$4) \frac{8m}{9n} : \frac{16k}{27d};$$

$$6) 12a^2 : \frac{4d}{5c^2}.$$

Görkezilen amallary ýerine ýetiriň **(80–86):**

80. 1) $\left(\frac{5a}{7b}\right)^2 \cdot \frac{14b^2}{25a^3};$

2) $\left(\frac{3a^2}{2b}\right)^3 \cdot \frac{16b^3}{21a^4};$

3) $\frac{2a^2}{5b^2} : \frac{12a^2}{15b^2};$

4) $\frac{3a^3}{7b} : \frac{9a^4}{21b};$

5) $\left(\frac{ab}{cd}\right)^2 \cdot acd;$

6) $abc^2 \cdot \left(\frac{ab}{cd}\right)^2.$

81. 1) $\frac{8a^2b}{9c} \cdot \frac{36c^3}{5a^3b};$

3) $\frac{16x^2y}{7z} : \frac{20xy^3}{21z^2};$

5) $\frac{18m^3n^5}{7k} : (9n^2);$

2) $\frac{7b^4}{9c^5y} : \frac{35b^4c^2}{18c^4y^2};$

4) $\frac{46d^3c}{15a} : \frac{23dc^2}{5a^3};$

6) $24k^2 : \frac{12m^4k^2}{11p^3n}.$

82. 1) $\frac{3x^2y}{4a^2b} \cdot 4a^2b;$

3) $15xy : \frac{30xy}{7a^2b};$

2) $\frac{5a^2b}{7xy^2} \cdot 14xy^2;$

4) $\frac{7x^2y}{2a^2b} : (14x^2y).$

83. 1) $\frac{7-x}{a+b} \cdot \frac{a-b}{7-x};$

3) $\frac{c+d}{c-d} : \frac{c}{c-d};$

5) $\frac{a^2-ab}{b} \cdot \frac{b}{a};$

2) $\frac{x-y}{2a} \cdot \frac{4b}{x-y};$

4) $\frac{a-b}{2b} : \frac{a-b}{6b^2};$

6) $\frac{a^2-ab}{b} \cdot \frac{b}{a};$

84. 1) $\frac{a+1}{b} \cdot \frac{4b^2}{a^2-1};$

4) $\frac{5m}{m^2-n^2} : \frac{15m^3}{m-n};$

2) $\frac{1-a}{3b^2} \cdot \frac{b^3}{1-a^2};$

5) $\frac{3(x+y)}{4y^2(x^2+y^2)} \cdot \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2};$

3) $\frac{a^2-b^2}{9b^2} : \frac{a+b}{3b};$

6) $\frac{5(a-b)}{3(a^2+b^2)} : \frac{(a-b)^2}{a^2+b^2}.$

85. 1) $\frac{a^2-b^2}{3a+3b} \cdot \frac{3a^2}{5b-5a};$

4) $\frac{3n^2-3m^2}{n^2+np} \cdot \frac{6m-6n}{n+p};$

2) $\frac{5x^2-5y^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{3x^2}{10y-10x};$

5) $\frac{a^2+b^2}{x^3+x^2y} \cdot \frac{x^2-y^2}{a^4-b^4};$

3) $\frac{a^2-25}{a^2-3a} : \frac{a+5}{9-a^2};$

6) $\frac{a^2+b^2}{a^2-ab} : \frac{a^4b-b^5}{a^2b-ab^2}.$

86. 1) $\frac{a-5}{a^2+6a+9} \cdot \frac{(a+3)^2}{a^2-25};$

3) $\frac{a^2-49}{a^2+2ab+b^2} \cdot \frac{a+b}{a-7};$

2) $\frac{b^2-8b+16}{b+3} : \frac{(b-4)^2}{b^2-9};$

4) $\frac{a^2-2a+1}{2a+1} : \frac{a-1}{4a^2-1}.$

6-§ DROB-RASIONAL AŃLATMALARY TOŖDESTWOLAÝYN ÖZGERTMEK



Arifmetik amal belgileri bilen birleşdirilen birnäçe algebraik droblardan düzülen aňlatma *drob-rasional* aňlatma diýilýär. Drob-rasional aňlatmanyň maýdalawjysyndaky köpagza nola deň bolmaly däldir.

Drob-rasional aňlatmalary algebraik droblar boýun egýän düzgünlerden peýdalanyňp ýönekeýleşdirmek, olaryň üstünde *toždestwolaýyn özgertmeleri* ýerine ýetirmek mümkin.

1-nji mesele. Drob-rasional aňlatmany ýönekeýleşdiriň:

$$R(x, y) = \frac{1 + \frac{1}{x}}{\frac{6}{x} + \frac{6}{xy} + \frac{12}{y}} - \frac{\frac{xy}{6}}{2x + y + 1}, \quad x \neq 0, y \neq 0.$$

△ Algebraik droblary umumy maýdalawja getirmek we goşmak düzgünlerine görä:

$$R(x, y) = \frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{6y+12x+6}{xy}} - \frac{\frac{xy}{6}}{2x+y+1} =$$

Algebraik droblary bölmek düzgünine görə:

$$= \frac{(x+1)xy}{x(12x+6y+6)} - \frac{xy}{6(2x+y+1)} =$$

Noldan tapawutly ($x \neq 0$) sana gysgaldýarys we ýaýlary açýarys:

$$= \frac{(x+1)y}{12x+6y+6} - \frac{xy}{12x+6y+6} =$$

Algebraik droblary aýyrmak düzgünine görə:

$$= \frac{xy+y-xy}{12x+6y+6} =$$

Meñzeş agzalary ykjamlaýarys we maýdalawjydyaky umумы köpeldijini ýaýdan daşary çykarýarys:

$$= \frac{y}{12x+6y+6} = \frac{y}{6(2x+y+1)}.$$

Jogaby: $R(x, y) = \frac{y}{6(2x+y+1)}.$ ▲

2-nji mesele. Añlatmany ýönekeýleşdiriň: $\left(\frac{a+1}{2a-2} - \frac{1}{2a^2-2} \right) \cdot \frac{2a+2}{a+2}.$

△ Ýaýyň içindäki aňlatmalary ýönekeýleşdireliň:

$$\begin{aligned} \frac{a+1}{2a-2} - \frac{1}{2a^2-2} &= \frac{a+1}{2(a-1)} - \frac{1}{2(a^2-1)} = \frac{(a+1)^2-1}{2(a^2-1)} = \\ &= \frac{(a+1-1)(a+1+1)}{2(a^2-1)} = \frac{a(a+2)}{2(a+1)(a-1)}. \end{aligned}$$

Köpeltmek hasylyny tapýarys:

$$\frac{a(a+2)}{2(a+1)(a-1)} \cdot \frac{2a+2}{a+2} = \frac{a(a+2)2(a+1)}{2(a+1)(a-1)(a+2)} = \frac{a}{a-1}. \quad \blacktriangle$$

3-nji mesele. Görkezilen amallary ýerine ýetiriň:

$$\left(\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b} \right) : \left(\frac{a+b}{a-b} - 1 \right).$$

$\triangle$ Birinji ýaýyň içindäki amaly ýerine ýetirýäris:

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b} &= \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{(a-b)(a+b)} = \frac{(a+b+a-b)(a+b-a+b)}{a^2 - b^2} = \\ &= \frac{2a \cdot 2b}{a^2 - b^2} = \frac{4ab}{a^2 - b^2}. \end{aligned}$$

Ikinji ýaýyň içindäki amaly ýerine ýetirýäris:

$$\frac{a+b}{a-b} - 1 = \frac{a+b-a+b}{a-b} = \frac{2b}{a-b}.$$

Bölyäris:

$$\frac{4ab}{a^2 - b^2} : \frac{2b}{a-b} = \frac{4ab(a-b)}{(a^2 - b^2)2b} = \frac{2a}{a+b}. \quad \blacktriangle$$

4-nji mesele. Howuz birinji turba arkaly a sagatda, ikinjisi arkaly b sagatda dolýar. Eger bir wagtda turbalaryň ikisi-de açyp goýulsa, howuz näçe sagatda dolar?

$\triangle$ Howzuň göwrümi V bolsun, diýeliň. Bir sagatda birinji turba $\frac{V}{a}$ -a deň göwrümi, ikinjisi $\frac{V}{b}$ -a deň göwrümi doldurýar, iki turba bolsa bir sagatda $\frac{V}{a} + \frac{V}{b}$ -a deň göwrümi doldurýar. Gözlenýän wagt t bolsun. t sagatda iki turba howzy бүтінлөý doldurmaly, ýagny

$$\left(\frac{V}{a} + \frac{V}{b} \right) t = V.$$

Deñligiň iki bölegini hem V -ge bölüp,

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)t = 1$$

-i alarys. Ýaýyň içinde duran droblaryň jemi $\frac{a+b}{ab}$ -a deň. Şonuň üçin

$$\frac{a+b}{ab}t = 1, \text{ mundan } t = \frac{ab}{a+b}. \blacktriangle$$

Gönukmeler

Görkezilen amallary ýerine ýetiriň (87–92):

87. 1) $\left(\frac{a}{2} - \frac{a}{3}\right) \cdot \frac{1}{a^2}$; 3) $\frac{a-b}{a+b} \left(\frac{a}{5} + \frac{b}{5}\right)$; 5) $1 : \left(1 + \frac{1}{a}\right)$;

2) $\frac{a^2}{3} \cdot \left(\frac{2}{a} + \frac{2}{a^2}\right)$; 4) $\frac{ab}{a-b} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$; 6) $b : \left(b + \frac{1}{b}\right)$.

88. 1) $\left(1 + \frac{1}{a}\right) : \left(1 - \frac{1}{a}\right)$; 3) $\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} - 2\right) : \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$;

2) $\left(a + \frac{a}{b}\right) \left(a - \frac{a}{b}\right)$; 4) $\left(\frac{m}{n} + \frac{n}{m} + 2\right) \left(1 + \frac{m-n}{m+n}\right)$.

89. 1) $\left(1 - \frac{a-b}{a+b}\right) \left(2 + \frac{2b}{a-b}\right)$; 3) $\left(\frac{6}{a-b} - \frac{5}{a+b}\right) \cdot \frac{a-b}{a+11b}$;

2) $\left(1 + \frac{a+b}{a-b}\right) \left(2 - \frac{2a}{a+b}\right)$; 4) $\left(\frac{3}{c} + \frac{3}{c+d}\right) \cdot \frac{c}{18(c+d)}$.

90. 1) $\left(\frac{2m+1}{2m-1} - \frac{2m-1}{2m+1}\right) : \frac{4m}{10m-5}$; 3) $\frac{y-1}{y} : \left(\frac{y^2+1}{y^2+2y} - \frac{2}{y+2}\right)$;

2) $\left(\frac{z+6}{3z+9} - \frac{1}{z+3}\right) : \frac{z+2}{27z}$; 4) $\frac{m-2}{m-5} : \left(\frac{m^2+24}{m^2-25} - \frac{4}{m-5}\right)$.

$$91. \quad 1) \frac{a^2 + ab}{a^2 + b^2} \cdot \left(\frac{a}{a-b} - \frac{b}{a+b} \right); \quad 3) \left(\frac{c+d}{c} - \frac{2c}{c-d} \right) \cdot \frac{d-c}{c^2 + d^2};$$

$$2) \frac{ab-b^2}{a^2 + b^2} \cdot \left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b} \right); \quad 4) \left(\frac{2c}{c+d} + \frac{d-c}{c} \right) \cdot \frac{c+d}{c^2 + d^2}.$$

$$92. \quad 1) \left(\frac{a+1}{2a-1} + \frac{6}{2a^2-2} - \frac{a+3}{2a+2} \right) \cdot \frac{4a^2-4}{3};$$

$$2) \left(\frac{b}{a^2+ab} + \frac{2}{a+b} + \frac{a}{b^2+ab} \right) : \frac{a^2-b^2}{4ab};$$

$$3) \frac{a^2-c^2}{a+b} \cdot \frac{a^2-b^2}{ac+c^2} \cdot \left(a + \frac{ac}{a-c} \right);$$

$$4) \frac{c^2-ac}{a^2-b^2} \cdot \frac{a-b}{c^2-a^2} : \left(c - \frac{ac}{a+c} \right).$$

93. Göwrümi V bolan buz böleginiň massasy p kilograma deň. Göwrümi V_1 bolan bölegiň massasy nämä deň?

94. Awtomobil sagadyna v kilometr tizlik bilen hereketlenip, s kilometr ýol geçdi. Eger motosikliniň tizligi sagadyna u kilometr bolsa, şu wagtyň içinde ol näçe ýol geçer?

95. Motorly gaýygyň ýata suwdaky tizligi sagadyna v kilometr, derýanyň akymynyň tizligi bolsa v_1 kilometr. Gaýyk akym boýunça hereketlenip, s kilometr geçdi. Motorly gaýyk akyma garşy şu wagtyň içinde näçe aralygy geçer?

96. (*Abu Reyhan Birunyň meselesi.*) Iki zatdan biriniň 10 sanysy bir dinar (pul birligi) we ikinjisiniň 15 sanysy bir dinar. Bir dinara iki zatdan birmeňzeş mukdarda näçe sanyndan satyn almak mümkin?

7- §. $y = \frac{k}{x}$ FUNKSIÝA. HÄSIÝETLERI, GRAFIGI

1-nji mesele. $y = \frac{1}{x}$ funksiýanyň grafigini guruň.

△ 1) kesgitleniş çägi – noldan başga ähli hakyky sanlar;

2) funksiýa – täk, çünki $x \neq 0$ bolanda $\frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$;

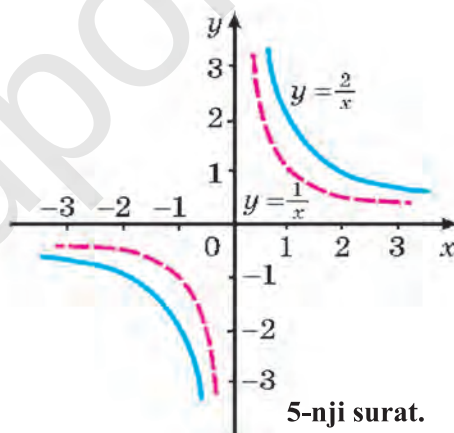
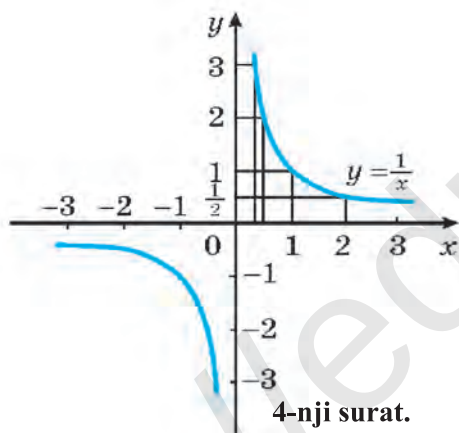
3) funksiya $x > 0$ aralykda o'trisatel görkezijili derejeli funksiyanı häsiyetine görä kemelýär, çünki $\frac{1}{x} = x^{-1}$;

4) $x > 0$ bolanda funksiya položitel bahalary kabul edýär;

5) grafige degişli birnäçe, meselem, $(\frac{1}{3}; 3)$, $(\frac{1}{2}; 2)$, $(1; 1)$, $(2; \frac{1}{2})$ nokatlary tapyp, $x > 0$ -uň bahalary üçin grafigiň bir bölegini gurýarys we soňra simmetriyanıň kömeginde $x < 0$ üçin galan bölegini gurýarys (4-nji surat).



$y = \frac{1}{x}$ funksiyanıň grafigine *giperbola* diýilýär. Ol *pudaklar* diýlip atlandyrylýan iki bölekden düzülen. Pudaklardan biri birinji çäryekde, ikinjisi bolsa üçünji çäryekde ýerleşýär.



2-nji mesele. $k = 2$ we $k = -2$ bolanda $y = \frac{k}{x}$ funksiyanıň grafigini gurunı.

△ Argumentiň şol birmeňzeş bahalarynda $y = \frac{2}{x}$ funksiyanıň bahalary $y = \frac{1}{x}$ funksiyanıň bahalaryny 2-ä köpeltmek bilen alynýandygyny ýatladýarys. Bu bolsa $y = \frac{2}{x}$ funksiyanıň grafigi $y = \frac{1}{x}$ funksiyanıň grafigini absissalar okundan ordinatalar oky boýunça iki esse süýndürmek bilen alynýar, diýmekdir (5-nji surat).

$y = -\frac{2}{x}$ funksiýanyň bahalary $y = \frac{2}{x}$ funksiýanyň bahalaryndan diňe alamaty bilen tapawutlanýar. Diýmek, $y = -\frac{2}{x}$ funksiýanyň grafigi $y = \frac{2}{x}$ funksiýanyň grafigine abssissalar okuna görä simmetrik (6-njy surat). ▲

Islendik $k \neq 0$ bolanda $y = \frac{k}{x}$ funksiýanyň grafigine hem *giperbola* diýilýär. *Giperbola iki pudaga eýe*. Olar, eger $k > 0$ bolsa, birinji we üçünji çäryeklerde, eger $k < 0$ bolsa, ikinji we dördünji çäryeklerde ýatýar.



$y = \frac{k}{x}$ (munda $k > 0$) funksiýa $y = \frac{1}{x}$ funksiýanyň ähli häsiýetlerine eýe, meselem, bu funksiýa:

- 1) $x \neq 0$ bolanda kesgitlenen;
- 2) noldan başga ähli hakyky bahalary kabul edýär;
- 3) *täk*;
- 4) $x > 0$ bolanda *položitel* bahalary we $x < 0$ bolanda *otrisatel* bahalary kabul edýär;
- 5) $x < 0$ we $x > 0$ aralyklarda *kemelýär*.

Eger $k < 0$ bolsa, onda $y = \frac{k}{x}$ funksiýa 1–3-nji häsiýetlere eýe bolýar; 4–5-nji häsiýetler bolsa şeýle aňladylýar:

- 4') $x < 0$ bolanda *položitel* bahalary we $x > 0$ bolanda *otrisatel* bahalary kabul edýär;
- 5') $x < 0$ we $x > 0$ aralyklarda *artýar*.

$y = \frac{k}{x}$ funksiýa $k > 0$ bolanda x we y -leriň arasyndaky *ters proporsional baglanyşygy* aňladýar, diýilýär. Ululyklaryň arasyndaky şeýle baglanyşyklar köplenç fizika, tehnika we başga ugurlarda duşýar.

Meselem, v hemişelik tizlik bilen töwerek boýunça deňölçeqli hereket edende jisim $a = \frac{v^2}{r}$ -a deň (bu ýerde r – töweregiň radiusy) merkeze ymtylma tizlenme bilen hereketlenýär, ýagny munda tizlenme töweregiň radiusyna ters proporsional.

3-nji mesele. Aý Ýerden $3,84 \cdot 10^8$ m aralykda. Aý 27,3 sutkanyň dowamynda Ýeriň daşyny bir gezek aýlanyp çykýar. Aýyň merkeze ymtylma tizlenmesini hasaplaň.

△ a tizlenmäni $a = \frac{v^2}{r}$ formula bilen hasaplaýarys, munda $v = \frac{C}{t}$, $C = 2\pi r$, $t = 27,3 \cdot 24 \cdot 3600$ s, $r = 3,84 \cdot 10^8$.

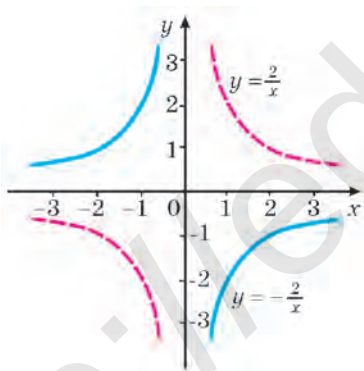
Onda:

$$a = \frac{4\pi^2 \cdot 3,84 \cdot 10^8}{(27,3 \cdot 24 \cdot 3600)^2} \approx 2,72 \cdot 10^{-3}.$$

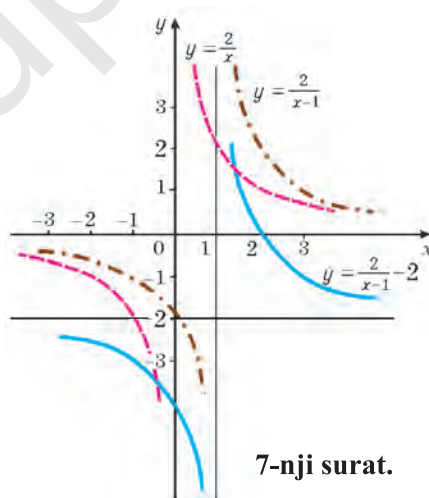
Jogaby: $2,72 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2$. ▲

4-nji mesele. $y = \frac{2}{x-1} - 2$ funksiýanyň grafigini gurun.

△ $y = \frac{2}{x}$ funksiýanyň grafigini (6-njy surat) Ox ok boýunça saga bir birlik we Oy ok boýunça iki birlik pese süýşürmek bilen $y = \frac{2}{x-1} - 2$ funksiýanyň grafigini almak mümkin (7-nji surat). ▲



6-njy surat.



7-nji surat.

Gönükmeler

97. $y = \frac{2}{x}$ funksiýanyň grafigini gurun. x -iň nähili bahalarynda:

- 1) $y(x) = 4$; 2) $y(x) = -\frac{1}{2}$; 3) $y(x) > 4$; 4) $y(x) \leq 1$

bolýandygyny anyklaň.

- 98.** Bir koordinatalar tekizliginde $y = \frac{1}{x}$ we $y = x$ funksiýalaryň grafiklerini gurun. x -iň nähili bahalarynda:
- 1) bu funksiýalaryň grafikleriniň kesişýändigini anyklaň;
 - 2) birinji funksiýanyň grafigi ikinji funksiýanyň grafiginden ýokarda (aşakda) ýatýandygyny anyklaň.
- 99.** Funksiýalaryň grafiklerini gurmazdan, olaryň kesişme nokatlaryny tapyň:
- 1) $y = \frac{12}{x}, y = 3x$; 2) $y = -\frac{8}{x}, y = -2x$;
 - 3) $y = \frac{2}{x}, y = x - 1$; 4) $y = \frac{6}{x+1}, y = x + 2$.
- 100.** Funksiýalaryň grafiklerini gurup, olaryň kesişme nokatlaryny takmynan tapyň:
- 1) $y = \frac{3}{x}, y = x + 1$; 2) $y = -\frac{3}{x}, y = 1 - x$;
 - 3) $y = \frac{2}{x}, y = x^2 + 2$; 4) $y = \frac{1}{x}, y = x^2 + 4x$.
- 101.** Silindrde porşeniň astynda gaz hemişelik temperaturada dur. Gazyň V (litrlerde) göwrümi p (atmosfera) basyşynda $V = \frac{12}{p}$ formula boýunça hasaplanýar.
- 1) Basyş 4 atm; 5 atm; 10 atm bolanda gazyň eýelän göwrümini tapyň;
 - 2) nähili basyşda gaz 3 l; 5 l; 15 l göwrümi eýeleýändigini hasaplaň;
 - 3) gazyň göwrümi onuň basyşyna baglydygynyň grafigini gurun.
- 102.** Reostatdaky I toguň güýji (amperlerde) $I = \frac{U}{R}$ formula bilen ölçenýär, bu ýerde U – güýjenme (woltlarda), R – garşylyk (omlarda).
- 1) $U = 6$ bolanda $I(R)$ baglanyşygyň grafigini gurun.
 - 2) Grafik boýunça takmynan tapyň: a) R garşylyk 6, 12, 20 Ω bolanda tok güýjüni; b) tok güýji 10, 5, 1,2 A bolanda reostatyň garşylygyny.
- 103.** Awtomobil ýoluň radiusy 150 m bolan aýlanma bölegi boýunça 60 km/h tizlik bilen hereketlenýär. Awtomobilniň merkeze ymtylma tizlenmesini tapyň. Eger awtomobiliň tizligi öňküsi ýaly galyp, ýoluň

aylanma böleginiň radiusy artsa, merkeze ymtylma tizlenme artarmy ýa-da kemelermi?

104. Funksiýanyň grafigini gurun:

$$1) y = \frac{3}{x} - 2; \quad 2) y = \frac{2}{x} + 1; \quad 3) y = \frac{2}{x+2} - 1; \quad 4) y = \frac{3}{1-x} + 1.$$

8-Ş. NATURAL GÖRKEZIJILI DEREJÄNIŇ ARIFMETIK KÖKI WE ONUŇ HÄSIÝETLERI

Orta aziýaly görnükli matematik we astronom **Jemşit ibn Ma'sud ibn Mahmyt Giyasiddin al-Koşy** (takmynan 1430-njy ýylda aradan çykan) sanlardan islendik n -derejeli kök çykarmak amalyňy açyş etdi. Onuň „Arifmetikanyň açary“ atly eseriniň başınjy babynda bu hakda pikir ýöredilýär.

Aşakdaky meselä garalyň.

1-nji mesele. Deňlemäni çözüň: $x^4 = 81$.

△ Deňlemäni $x^4 - 81 = 0$ ýa-da $(x^2 - 9)(x^2 + 9) = 0$ görnüşinde ýazyp alýarys.

$x^2 + 9 \neq 0$ bolany üçin $x^2 - 9 = 0$ bolýar, mundan bolsa

$$x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3) = 0, \quad x_1 = 3, \quad x_2 = -3. \quad \blacktriangle$$

Şeýdip, $x^4 = 81$ deňleme iki hakyky köke eýe: $x_1 = 3, x_2 = -3$. Olar 81 sanynyň 4-nji *derejeli kökleri*, položitel kök (3 sany) bolsa 81 sanynyň 4-nji *derejeli arifmetik köki* diýilýär we şeýle belgilenýär: $\sqrt[4]{81}$. Şeýdip, $\sqrt[4]{81} = 3$.

$x^n = a$ deňleme (munda n – natural san, a – otrisatel däl san) ýeke-täk otrisatel däl köke eýedigini subut etmek mümkin. Bu köke a sanyň n -nji *derejeli arifmetik köki* diýilýär.



Kesgirleme. a otrisatel däl sanyň $n \geq 2$ natural görkezijili arifmetik köki diýip, n -nji derejesi a -ga deň bolan otrisatel däl sana aýdylýar.

a sanyň n -nji derejeli arifmetik köki şeýle belgilenýär: $\sqrt[n]{a}$. a sana kök aşagyndaky aňlatma diýilýär. Eger $n = 2$ bolsa, onda $\sqrt[n]{a}$ ýerine $\sqrt{a}$ ýazylyar.

Ikinji derejeli arifmetik köke *kwadrat kök* hem diýilýär, 3-nji derejeli köke bolsa *kub kök* diýilýär.

Söz n -nji derejeli arifmetik kök hakda gidýändigini anyk bolan ýagdaýlarda gysgaça „ n -nji derejeli kök“ diýilýär.



Kesgitlemeden peýdalanyň, $\sqrt[n]{a}$ -nyň b -ge deňligini subut etmek üçin: 1) $b \geq 0$; 2) $b^n = a$ bolýandygyny görkezmeli.

Meselem, $\sqrt[3]{64} = 4$, çünki $4 > 0$ we $4^3 = 64$.



Arifmetik köküň kesgitlemesinden, eger $a \geq 0$ bolsa, onda

$$(\sqrt[n]{a})^n = a, \sqrt[n]{a^n} = a$$

bolýandygy gelip çykýar.

Meselem, $(\sqrt[5]{7})^5 = 7$, $\sqrt[6]{13^6} = 13$.

n -nji derejeli kök gözlenýän amala n -nji derejeli kök çykarmak amaly diýilýär. Ol n -nji derejä götermek amalyna ters amaldyr.

2-nji mesele. $x^3 = -8$ deňlemäni çözüň.

△ Bu deňlemäni $-x^3 = 8$ ýa-da $(-x)^3 = 8$ ýaly ýazmak mümkin. $-x = y$ diýip belgileýäris, onda $y^3 = 8$ bolýar.

Bu deňleme bir köke eýe: $y = \sqrt[3]{8} = 2$. $y^3 = 8$ deňleme otrisatel köke eýe däl, çünki $y < 0$ bolanda $y^3 < 0$ bolýar. $y = 0$ sany hem bu deňlemäniň köki bolup bilmeýär.

Şeýdip, $y^3 = 8$ deňleme diňe bir $y = 2$ köke eýe, diýmek, $x^3 = -8$ deňleme hem diňe bir köke eýe: $x = -y = -2$.

Jogaby: $x = -2$. ▲

$x^3 = -8$ deňlemäniň çözüwini gysgaça şeýle ýazmak mümkin:

$$x = -\sqrt[3]{8} = -2.$$



Umuman, islendik täk $2k+1$ natural san üçin $a < 0$ bolanda $x^{2k+1} = a$ deňleme diňe bir otrisatel köke eýe. Bu kök edil arifmetik kök ýaly şeýle belgilenýär: $\sqrt[2k+1]{a}$. Oňa otrisatel sanyň täk derejeli köki diýilýär.

Meselem, $\sqrt[3]{-27} = -3$, $\sqrt[3]{-32} = -2$.

Otrisatel a sanyň t k derejeli k ki bilen $-a = |a|$ sanyň arifmetik k k niň arasynda  u de lik bar:

$$^{2k+1}\sqrt{a} = -^{2k+1}\sqrt{-a} = -^{2k+1}\sqrt{|a|}.$$

Meselem, $\sqrt[5]{-243} = -\sqrt[5]{243} = -3$.

Gönükmeler

105. ( yatdan.) 1) Sanyň arifmetik kwadrat k k ni tapyň:

$$1; \quad 0; \quad 16; \quad 0,81; \quad 169; \quad \frac{16}{121}; \quad \frac{49}{144}.$$

2) Sanyň arifmetik kub k k ni tapyň:

$$1; \quad 0; \quad 5; \quad \frac{1}{27}; \quad 0,027; \quad 0,064; \quad 0,729; \quad \frac{1}{343}.$$

3) Sanyň d rd nji derejeli arifmetik k k ni tapyň:

$$0; \quad 1; \quad 16; \quad \frac{16}{81}; \quad \frac{256}{625}; \quad 0,0016; \quad \frac{625}{1296}.$$

Hasaplaň (**106–108**):

106. 1) $\sqrt[6]{36^3}$; 2) $\sqrt[12]{64^2}$; 3) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{25}\right)^2}$; 4) $\sqrt[8]{225^4}$; 5) $\sqrt[7]{2 \cdot 4^3}$.

107. 1) $\sqrt[3]{10^6}$; 2) $\sqrt[3]{3^{12}}$; 3) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^{12}}$; 4) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{3}\right)^{16}}$; 5) $\sqrt[5]{32^2}$.

108. 1) $\sqrt[3]{-8}$; 2) $\sqrt[15]{-1}$; 3) $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}$;
4) $\sqrt[5]{-1024}$; 5) $\sqrt[3]{-34^3}$; 6) $\sqrt[7]{-8^7}$.

109. De lem ni c z  :

1) $x^4 = 81$; 2) $x^5 = -\frac{1}{32}$; 3) $5x^5 = -160$; 4) $2x^6 = 128$.

110. x -i  n hili bahalarynda a latma mana e e bol r:

1) $\sqrt[6]{2x-3}$; 2) $\sqrt[3]{x+3}$; 3) $\sqrt[3]{2x^2-x-1}$; 4) $\sqrt[4]{\frac{2-3x}{2x-4}}$?

Hasaplañ (111–112):

111. 1) $\sqrt[3]{-125} + \frac{1}{8}\sqrt[6]{64}$;

2) $\sqrt[5]{32} - 0,5\sqrt[3]{-216}$;

3) $-\frac{1}{3}\sqrt[4]{81} + \sqrt[4]{625}$;

4) $\sqrt[3]{-1000} - \frac{1}{4}\sqrt[4]{256}$;

5) $\sqrt[4]{0,0001} - 2\sqrt{0,25} + \sqrt[5]{\frac{1}{32}}$;

6) $\sqrt[5]{\frac{1}{243}} + \sqrt[3]{-0,001} - \sqrt[4]{0,0016}$.

112. 1) $\sqrt{9+\sqrt{17}} \cdot \sqrt{9-\sqrt{17}}$;

2) $(\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}})^2$;

3) $(\sqrt{5+\sqrt{21}} + \sqrt{5-\sqrt{21}})^2$;

4) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

113. 1) a) $x \geq 2$; b) $x < 2$ bolanda $\sqrt[3]{(x-2)^3}$ -ni yönekeyleşdiriñ;

2) a) $x \leq 3$; b) $x > 3$ bolanda $\sqrt{(3-x)^6}$ -ni yönekeyleşdiriñ.

114. $1987 < \sqrt{n} < 1988$ bolýan näçe natural san n bar?

9-§. RASIONAL GÖRKEZIJILI DEREJE WE ONUŇ HÄSIÝETLERI

1-nji mesele. Hasaplañ: $\sqrt[4]{5^{12}}$.

△ $5^{12} = (5^3)^4$ bolany üçin $\sqrt[4]{5^{12}} = \sqrt[4]{(5^3)^4} = 5^3 = 125$. ▲

Şeýdip, $\sqrt[4]{5^{12}} = 5^{\frac{12}{4}}$.

şoňa meňzeş, $\sqrt[5]{7^{-15}} = 7^{-\frac{15}{5}}$ bolýandygyny görkezmek mümkin.



Umuman, eger n – natural san, $n \geq 2$, m – bitin san we $\frac{m}{n}$ bitin san bolsa, onda $a > 0$ bolanda aşakdaky deňlik dogry bolýar:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.$$

(1)

○ şerte görä $\frac{m}{n}$ – bitin san, ýagny m -i n -e bölmekde k bitin san emele gelýär. Munda $\frac{m}{n} = k$ deňlikden $m = kn$ bolýandygy gelip çykýar. Derejäniň we arifmetik kökün häsiýetlerini ulanyň, aşakdakyny alarys:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{kn}} = \sqrt[n]{(a^k)^n} = a^k = a^{\frac{m}{n}}. \quad \bullet$$



Eger-de, $\frac{m}{n}$ bitin san bolmasa, onda $a^{\frac{m}{n}}$ (munda $a > 0$) dereje (1) formula dogrulygyna galýan edip kesgitlenilýär, ýagny munda

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (2)$$

diýip hasaplanýar.

Şeýdip, (2) formula islendik bitin m we islendik natural $n \geq 2$ we $a > 0$ san üçin dogry bolýar. Meselem,

$$16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^3} = \sqrt[4]{2^{12}} = 2^3 = 8; \quad 7^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{7^5} = \sqrt[4]{7^4 \cdot 7} = 7\sqrt[4]{7};$$

$$27^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^{-2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{27^2}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{3^6}} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}.$$

r rasional san – bu $\frac{m}{n}$ görnüşindäki sandygyny, munda m – bitin san, n – natural san, ýagny $r = \frac{m}{n}$ bolýandygyny ýatladyp geçýäris. Munda (2)

formula boýunça $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ -i alarys. Şeýlelikde, dereje islendik rasional görkeziji we islendik položitel esas üçin anyklandy. Eger $r = \frac{m}{n} > 0$ bolsa, onda $\sqrt[n]{a^m}$ aňlatma diňe $a > 0$ bolanda däl, eýsem $a = 0$ bolanda hem mana eýe bolýar. $a = 0$ bolsa, $\sqrt[n]{0^m} = 0$. Şonuň üçin $r > 0$ bolanda $0^r = 0$ deňlik ýerlikli diýlip hasaplanýar.

(1) we (2) formulalardan peýdalanyň, rasional görkezijili derejani kök görnüşinde, we tersine, şekillendirmek mümkin.



(2) formuladan we kökün häsiýetlerinden

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mk}{nk}}$$

deňlik gelip çykýandygyny nygtaýarys, munda $a > 0$, m – bitin san we n , k – natural sanlar.

Meselem, $7^{\frac{3}{4}} = 7^{\frac{6}{8}} = 7^{\frac{9}{12}}$.



Natural görkezijili derejaniň ähli häsiýetleri islendik rasional görkezijili we položitel esasly derejeler üçin dogry bolýandygyny görkezmek mümkin. Meselem, islendik rasional p we q sanlar we islendik $a > 0$ we $b > 0$ üçin aşakdaky deňlikler dogry bolýar:

$$\begin{array}{ll} 1) a^p \cdot a^q = a^{p+q}; & 4) (ab)^p = a^p b^p; \\ 2) a^p : a^q = a^{p-q}; & 5) \left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}. \\ 3) (a^p)^q = a^{pq}; & \end{array}$$

Bu häsiýetler kökleriň häsiýetlerinden gelip çykýar. Meselem, $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ häsiýeti subut edeliň.

○ Aýdaly, $p = \frac{m}{n}$, $q = \frac{k}{l}$ (munda n we l — natural sanlar, m we k – bitin sanlar) bolsun.

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{k}{l}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{k}{l}} \quad (3)$$

bolýandygyny subut etmeli.

$\frac{m}{n}$ va $\frac{k}{l}$ droblary umumy maýdalawja getirip, (3) deňligiň çep bölegini

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{k}{l}} = a^{\frac{ml}{nl}} \cdot a^{\frac{kn}{nl}}$$

görnüşinde ýazýarys.

Rasional görkezijili derejaniň kesgitlemesinden, köküň we bitin görkezijili derejaniň häsiýetlerinden peýdalanyp, aşakdakyny alarys:

$$\begin{aligned} a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{k}{l}} &= a^{\frac{ml}{nl}} \cdot a^{\frac{kn}{nl}} = \sqrt[nl]{a^{ml}} \cdot \sqrt[nl]{a^{kn}} = \\ &= \sqrt[nl]{a^{ml} \cdot a^{kn}} = \sqrt[nl]{a^{ml+kn}} = a^{\frac{ml+kn}{nl}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{k}{l}}. \end{aligned}$$

Rasional görkezijili derejaniň galan häsiýetleri hem şoňa meňzeş subut edilýär.

Derejaniň häsiýetlerini ulanmaga mysallar getirýäris.

- 1) $7^{\frac{1}{4}} \cdot 7^{\frac{3}{4}} = 7^{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 7;$ $5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{2}{3}} = 5^{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}} = 5^1 = 5;$
- 2) $9^{\frac{2}{3}} : 9^{\frac{1}{6}} = 9^{\frac{2}{3} - \frac{1}{6}} = 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3;$ $8^{\frac{2}{3}} : 8 = 8^{\frac{2}{3} - 1} = 8^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2};$
- 3) $\left(16^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{9}{4}} = 16^{\frac{1}{3} \cdot \frac{9}{4}} = 16^{\frac{3}{4}} = (2^4)^{\frac{3}{4}} = 2^{4 \cdot \frac{3}{4}} = 2^3 = 8;$
- 4) $24^{\frac{2}{3}} = (2^3 \cdot 3)^{\frac{2}{3}} = 2^{3 \cdot \frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} = 4\sqrt[3]{3^2} = 4\sqrt[3]{9};$
- 5) $\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{8^{\frac{1}{3}}}{27^{\frac{1}{3}}} = \frac{(2^3)^{\frac{1}{3}}}{(3^3)^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3};$ $\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{2^4}{3^4}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{4 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}.$

2-nji mesele. Hasaplaň: $25^{\frac{1}{5}} \cdot 125^{\frac{1}{5}}.$

$$\triangle 25^{\frac{1}{5}} \cdot 125^{\frac{1}{5}} = (25 \cdot 125)^{\frac{1}{5}} = (5^5)^{\frac{1}{5}} = 5. \blacktriangle$$

3-nji mesele. Aňlatmany ýönekeýleşdiriň: $\frac{a^{\frac{4}{3}}b + ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}.$

$$\triangle \frac{a^{\frac{4}{3}}b + ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} = \frac{ab \left(a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}} = ab. \blacktriangle$$

4-nji mesele. Añlatmany ýönekeýleşdiriň: $\frac{a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{7}{3}}}{a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{4}{3}}} - \frac{a^{-\frac{1}{3}} - a^{\frac{5}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} + a^{-\frac{1}{3}}}.$

$$\begin{aligned} \Delta \quad & \frac{a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{7}{3}}}{a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{4}{3}}} - \frac{a^{-\frac{1}{3}} - a^{\frac{5}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} + a^{-\frac{1}{3}}} = \frac{a^{\frac{1}{3}}(1 - a^2)}{a^{\frac{1}{3}}(1 - a)} - \frac{a^{-\frac{1}{3}}(1 - a^2)}{a^{-\frac{1}{3}}(1 + a)} = \\ & = 1 + a - (1 - a) = 2a. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

$3^{\sqrt{2}}$ mysalda *irrational görkezijili derejani* nähili girizmek mümkinligini görkezýäris. $\sqrt{2}$ -nyň ýakynlaşan bahalaryny 0,1; 0,01; 0,001; ... çenli takyklyk bilen yzygider ýazyp çykýarys. Onda aşakdaky yzygiderlik emele gelýär:

$$1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; \dots$$

3 sanynyň dereje görkezijileriniň yzygiderligini şu rasional görkezijiler bilen ýazyp çykýarys:

$$3^{1,4}; 3^{1,41}; 3^{1,414}; 3^{1,4142}; \dots$$

Bu derejeler $3^{\sqrt{2}}$ ýaly belgilenýän käbir hakyky sanyň yzygider ýakynlaşan bahalarydygyny görkezmek mümkin:

$$3^{1,4} = \underline{4}, 6555355,$$

$$3^{1,41} = \underline{4}, 7069644,$$

$$3^{1,414} = \underline{4}, 7276942,$$

$$3^{1,442} = \underline{4}, 7287329,$$

$$3^{\sqrt{2}} \approx \underline{4}, 7288033.$$

Položitel a esasly we islendik irrational görkezijili a^b dereje şoňa meňzeş kesgitlenýär. Şeýdip, indi položitel esasly dereje islendik hakyky görkeziji üçin kesgitlendi. Hakyky görkezijili derejaniň häsiýetleri rasional görkezijili derejaniň häsiýetleri ýalydyr.

Gönlükmeler

115. (Ýatdan). Rasional görkezijili dereje görnüşinde şekillendiriň:

1) $\sqrt{x^3}$; 2) $\sqrt[3]{a^4}$; 3) $\sqrt[4]{b^3}$; 4) $\sqrt[5]{x^{-1}}$; 5) $\sqrt[6]{a}$; 6) $\sqrt[7]{b^{-3}}$.

116. (Ýatdan). Bitin görkezijili derejäniň köki görnüşinde şekillendiriň:

1) $x^{\frac{1}{4}}$; 2) $y^{\frac{2}{5}}$; 3) $a^{-\frac{5}{6}}$; 4) $b^{-\frac{1}{3}}$; 5) $(2x)^{\frac{1}{2}}$; 6) $(3b)^{-\frac{2}{3}}$.

Hasaplaň (**117–120**):

117. 1) $64^{\frac{1}{2}}$; 2) $27^{\frac{1}{3}}$; 3) $8^{\frac{2}{3}}$;

4) $81^{\frac{3}{4}}$; 5) $16^{-0,75}$; 6) $9^{-1,5}$.

118. 1) $2^{\frac{4}{5}} \cdot 2^{\frac{11}{5}}$; 2) $5^{\frac{2}{7}} \cdot 5^{\frac{5}{7}}$; 3) $9^{\frac{2}{3}} : 9^{\frac{1}{6}}$; 4) $4^{\frac{1}{3}} : 4^{\frac{5}{6}}$;

5) $(7^{-3})^{-\frac{2}{3}}$; 6) $\left(8^{\frac{1}{12}}\right)^{-4}$; 7) $8^{\frac{4}{5}} : 8^{\frac{7}{15}}$; 8) $(5^{-4})^{-\frac{3}{4}}$.

119. 1) $9^{\frac{2}{5}} \cdot 27^{\frac{2}{5}}$; 2) $7^{\frac{2}{3}} \cdot 49^{\frac{2}{3}}$; 3) $144^{\frac{3}{4}} : 9^{\frac{3}{4}}$; 4) $150^{\frac{3}{2}} : 6^{\frac{3}{2}}$.

120. 1) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} + \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}$; 2) $(0,04)^{-1,5} - (0,125)^{-\frac{2}{3}}$;

3) $8^{\frac{9}{7}} : 8^{\frac{2}{7}} - 3^{\frac{6}{5}} \cdot 3^{\frac{4}{5}}$; 4) $\left(5^{-\frac{2}{5}}\right)^{-5} + \left((0,2)^{\frac{3}{4}}\right)^{-4}$.

121. Hasaplaň:

1) $a=0,09$ bolanda $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[6]{a}$ -nyň bahasyny;

2) $b=27$ bolanda $\sqrt{b} : \sqrt[6]{b}$ -nyň bahasyny;

3) $b=1,3$ bolanda $\frac{\sqrt{b} \cdot \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[6]{b}}$ -nyň bahasyny;

4) $a=2,7$ bolanda $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[12]{a^5}$ -nyň bahasyny.

122. Rasional görkezijili dereje görnüşinde şekillendirin:

- 1) $a^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{a}$; 2) $b^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{b}$; 3) $\sqrt[3]{b} : b^{\frac{1}{6}}$;
4) $a^{\frac{4}{3}} : \sqrt[3]{a}$; 5) $x^{1,7} \cdot x^{2,8} : \sqrt{x^5}$; 6) $y^{-3,8} : y^{-2,3} \cdot \sqrt{y^3}$.

Añlatmany yönekeyleşdirin (**123–124**):

123. 1) $(a^4)^{-\frac{3}{4}} \cdot (b^{-\frac{2}{3}})^{-6}$; 2) $\left(\left(\frac{a^6}{b^{-3}}\right)^4\right)^{\frac{1}{12}}$; 3) $(a^{-7})^{-\frac{5}{7}} \cdot (b^{-\frac{3}{4}})^{-4}$.

124. 1) $\frac{a^{\frac{4}{3}}(a^{-\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}})}{\frac{1}{a^4}(a^{\frac{3}{4}} + a^{-\frac{1}{4}})}$; 2) $\frac{b^{\frac{1}{5}}(\sqrt[5]{b^4} - \sqrt[5]{b^{-1}})}{b^{\frac{2}{3}}(\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{b^{-2}})}$; 3) $\frac{a^{\frac{5}{3}}b^{-1} - ab^{-\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2}}$;

4) $\frac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b} + b^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}}$; 5) $\frac{a^{-\frac{1}{3}}(a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{4}{3}})}{\frac{2}{a^5}(a^{\frac{8}{5}} - a^{-\frac{2}{5}})}$; 6) $\frac{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}}{\sqrt[6]{a} - \sqrt[6]{b}}$.

125. Hasaplañ:

1) $\left(2^{\frac{5}{3}} \cdot 3^{-\frac{1}{3}} - 3^{\frac{5}{3}} \cdot 2^{-\frac{1}{3}}\right) \cdot \sqrt[3]{6}$; 2) $\left(5^{\frac{1}{4}} : 2^{\frac{3}{4}} - 2^{\frac{1}{4}} : 5^{\frac{3}{4}}\right) \cdot \sqrt[4]{1000}$.

126. Añlatmalary yönekeyleşdirin:

1) $a^{\frac{1}{9}}\sqrt[6]{a^3\sqrt{a}}$; 2) $b^{\frac{1}{12}}\sqrt[3]{b^4\sqrt{b}}$; 3) $(\sqrt[3]{ab^{-2}} + (ab)^{-\frac{1}{6}})\sqrt[6]{ab^4}$;
4) $(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} - \sqrt[3]{ab})$; 5) $\frac{x-y}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}}$; 6) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\frac{1}{a^4}-\frac{1}{b^4}}$;
7) $\frac{m^{\frac{1}{2}}+n^{\frac{1}{2}}}{m+2\sqrt{mn}+n}$; 8) $\frac{c-2c^{\frac{1}{2}}+1}{\sqrt{c}-1}$; 9) $(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})(a^{\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{ab} + b^{\frac{2}{3}})$.

Añlatmany yönekeyleşdirin (**127–129**):

127. 1) $\left(1 - 2\sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{b}{a}\right) : \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)^2$; 2) $\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right) : \left(2 + \sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)$;

$$3) \frac{a^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{9}{4}}}{\frac{1}{a^4} - a^{\frac{5}{4}}} - \frac{b^{-\frac{1}{2}} - b^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{b^2} - b^{-\frac{1}{2}}};$$

$$4) \frac{\sqrt{a} - a^{-\frac{1}{2}}b}{1 - \sqrt{a^{-1}b}} - \frac{\sqrt[3]{a^2} - a^{-\frac{1}{3}}b}{\sqrt[6]{a} + a^{-\frac{1}{3}}\sqrt{b}}.$$

$$128. 1) \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{ab^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{b} - \sqrt{a}} - \frac{2a^2 - 4ab}{a - b};$$

$$2) \frac{3xy - y^2}{x - y} - \frac{y\sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} - \frac{y\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}};$$

$$3) \frac{1}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} - \frac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}{a^{\frac{2}{3}} - \sqrt[3]{ab} + b^{\frac{2}{3}}};$$

$$4) \frac{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}} - \frac{a - b}{a^{\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{ab} + b^{\frac{2}{3}}}.$$

$$129. 1) \frac{a - b}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}} - \frac{a + b}{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}};$$

$$2) \frac{\frac{a+b}{\frac{2}{a^3} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}} - \frac{a-b}{\frac{2}{a^3} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}};$$

$$3) \frac{a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}{a - b} - \frac{1}{a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}};$$

$$4) \frac{a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}}{a + b} + \frac{1}{a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}.$$

10-§. RASIONAL GÖRKEZIJILI DEREJE GATNAŞYAN ALGEBRAIK AŇLATMALARY YÖNEKEÝLEŞDIRMEK

Bu tema degişli gönükmeleri ýerine ýetirende algebraik droblar we olaryň üstünde amallardan, gysga köpeltmek formulalaryndan we rasional görkezijili derejäniň häsiýetlerinden peýdalanylýar.

1-nji mesele. Aňlatmany yönekeýleşdiriň:

$$\left[\frac{(x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}})^2 + (x^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{1}{4}})^2}{x + (xy)^{\frac{1}{2}}} \right]^5 \cdot x^3 \cdot \sqrt[3]{x\sqrt{x}}, \quad x > 0, y > 0.$$

$$\triangle 1) \sqrt[3]{x\sqrt{x}} = \sqrt[3]{\sqrt{x^3}} = \sqrt[6]{x^3} = \sqrt{x};$$

2) kwadrat ýaýlaryň içindäki aňlatmanyň sanawjysyny kwadrata göterýäris we $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ bolýanlygyndan peýdalanylarys:

$$\sqrt{x} + 2\sqrt[4]{xy} + \sqrt{y} + \sqrt{x} - 2\sqrt[4]{xy} + \sqrt{y} = 2(\sqrt{x} + \sqrt{y});$$

3) sol aňlatmanyň maýdalawjysynda $\sqrt{x}$ -y ýaýdan daşary çykarýarys:

$$x + \sqrt{xy} = \sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{y});$$

4) onda $\frac{2(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{y})} = \frac{2}{\sqrt{x}};$

5) $\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^5 \cdot x^3 \sqrt{x} = \frac{32}{x^2 \sqrt{x}} \cdot x^3 \sqrt{x} = 32 \cdot x$

Jogaby: $32 \cdot x$. ▲

2-nji mesele. Aňlatmany ýönekeýleşdiriň we onuň $x = 0,16$, $y = 25$ bolandaky san bahasyny tapyň:

$$\left(\frac{\sqrt[4]{x^3 y} - \sqrt[4]{xy^3}}{\sqrt{y} - \sqrt{x}} + \frac{1 + \sqrt{xy}}{\sqrt[4]{xy}}\right)^{-2} \cdot \left(1 + 2\sqrt{\frac{y}{x} + \frac{y}{x}}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad x > 0, \quad y > 0.$$

△ 1) $\frac{\sqrt[4]{x^3 y} - \sqrt[4]{xy^3}}{\sqrt{y} - \sqrt{x}} = \frac{\sqrt[4]{xy} \cdot (\sqrt{x} - \sqrt{y})}{\sqrt{y} - \sqrt{x}} = -\sqrt[4]{xy};$

2) $-\sqrt[4]{xy} + \frac{1 + \sqrt{xy}}{\sqrt[4]{xy}} = \frac{-\sqrt[4]{xy} + 1 + \sqrt{xy}}{\sqrt[4]{xy}} = \frac{1}{\sqrt[4]{xy}};$

3) $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{xy}}\right)^{-2} = \sqrt{xy};$

4) $\left(1 + 2\sqrt{\frac{y}{x} + \frac{y}{x}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\left(1 + \sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \sqrt{\frac{y}{x}};$

5) $\sqrt{xy} \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{y}{x}}\right) = \sqrt{xy} + y.$

Eger $x = 0,16$ we $y = 25$ bolsa, $\sqrt{0,16 \cdot 25} + 25 = \sqrt{4} + 25 = 27.$

Jogaby: $\sqrt{xy} + y$; 27. ▲

3-nji mesele. Añlatmany ýönekeýleşdiriň we onuň $a = 25$, $b = 0,6561$ bolandaky san bahasyny tapyň:

$$\frac{(\sqrt[8]{a} + \sqrt[8]{b})^2 + (\sqrt[8]{a} - \sqrt[8]{b})^2}{a - \sqrt{ab}} : \frac{(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{ab} + \sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{ab} + \sqrt[4]{b})}{\sqrt[4]{a^3b - b}}$$

△ 1) 1-nji drobuň sanawjysyny kwadrata göterýäris, maýdalawjysyn-da $\sqrt{a}$ -ny ýaýdan daşary çykaryrys. Ýönekeýleşdirmeden soň 1-nji drob

$$\frac{2}{\sqrt{a}(\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b})} \text{ -a deň bolýar;}$$

2) 2-nji drobuň sanawjysy gysga köpeltmek formulalaryndan peýdalanyň ýaýlary açansoň $\sqrt{a} + \sqrt[4]{ab} + \sqrt{b}$ aňlatma gelýär;

3) maýdalawjysynda bolsa $\sqrt[4]{b}$ ýaýdan daşary çykarylýar we $(x^3 - y^3)$ -üň ýaýylmasyndan peýdalanylýar. 2-nji drob şunda $\frac{1}{\sqrt[4]{b}(\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b})}$ -a deň bolýar;

4) ahyrynda, 1-nji droby 2-nji droba bölmek netijesi $\frac{2\sqrt[4]{b}}{\sqrt{a}}$ aňlatma deň bolýar.

$a = 25$, $b = 0,6561$ bolsa, bu aňlatma $\frac{2\sqrt[4]{0,6561}}{\sqrt{25}} = \frac{2}{5} \cdot 0,9 = 0,36$ -a deň.

J o g a b y : $\frac{2\sqrt[4]{b}}{\sqrt{a}}$; 0,36. ▲

Gönükmeler

Añlatmany ýönekeýleşdiriň (130–146):

130. $\left[\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}} \right) \left(a^{\frac{1}{2}} + 5b^{\frac{1}{2}} \right) - \left(a^{\frac{1}{2}} + 2b^{\frac{1}{2}} \right) \left(a^{\frac{1}{2}} - 2b^{\frac{1}{2}} \right) \right] : \left(2a + 3a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} \right).$

131. $\left[\frac{(\sqrt{a}+1)^2 - \frac{a-\sqrt{ax}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}}{(\sqrt{a}+1)^3 - a\sqrt{a}+2} \right]^{-3}.$

$$132. \left[\frac{4a-9a^{-1}}{\frac{1}{2a^2}-3a} - \frac{a-4+3a^{-1}}{\frac{1}{a^2}-a} \right]^2.$$

$$133. \left[(a-b)\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} + a-b \right] \left[(a-b)\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} - 1\right) \right].$$

$$134. \left(\sqrt{ab} - \frac{ab}{a+\sqrt{ab}} \right) : \frac{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{b}}{a-b}.$$

$$135. \left(a + b^{\frac{3}{2}} : \sqrt{a} \right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \right)^{-\frac{2}{3}}.$$

$$136. \left[\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}-4x} - \frac{1}{2} + \frac{2\sqrt[3]{x}}{x\sqrt[3]{x}-4\sqrt[3]{x}} \right]^{-2} - \sqrt{x^2+8x+16}.$$

$$137. \left(\frac{\sqrt[4]{ax^3}-\sqrt[4]{a^3x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}} + \frac{1+\sqrt{ax}}{\sqrt[4]{ax}} \right)^{-2} \sqrt{1+2\sqrt{\frac{a}{x}+\frac{a}{x}}}.$$

$$138. \frac{(a-b^2)\sqrt{3}-b\sqrt{3}\sqrt[3]{-8b^3}}{\sqrt{2(a-b^2)^2}+(2b\sqrt{2a})^2} \cdot \frac{\sqrt{2a}-\sqrt{2c}}{\sqrt{\frac{3}{a}}-\sqrt{\frac{3}{c}}}.$$

$$139. \left[\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{a} \right)^{-1} + \left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{a} \right)^{-1} \right]^{-2} : \frac{x-a}{4\sqrt{x}+4\sqrt{a}}.$$

$$140. \frac{\left(\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \right)^3 + 2a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{3a^2+3b\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab}-a}{a\sqrt{a}-b\sqrt{a}}.$$

$$141. \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3+2a^2:\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}} + \frac{3\sqrt{ab}-3b}{a-b}.$$

$$142. \left(\frac{1}{\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}} \right)^{-2} \left(\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}} \right)^{-1}} \right) (ab)^{-\frac{1}{2}}.$$

$$143. \left[\left(\frac{a^2 - b\sqrt{a}}{\sqrt{a} - \sqrt[3]{b}} + a\sqrt[3]{b} \right) : \left(a + \sqrt[6]{a^3 b^2} \right) - \sqrt[3]{b} \right]^2.$$

$$144. \left[\frac{a^2 \sqrt[4]{x} + x\sqrt{a}}{a\sqrt[4]{x} + \sqrt{ax}} - \sqrt{a^2 + x + 2a\sqrt{x}} \right]^4.$$

$$145. \left[\frac{x\sqrt{x} - x}{\left(\frac{\sqrt[4]{x^3} - 1}{\sqrt{x}} \right) \left(\frac{\sqrt[4]{x^3} + 1}{\sqrt{x}} \right)} \right]^3.$$

$$146. \frac{\frac{a+x}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{x^2}} + \frac{\sqrt[3]{ax^2} - \sqrt[3]{a^2x}}{\sqrt[3]{a^2} - 2\sqrt[3]{ax} + \sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[6]{a} - \sqrt[6]{x}} - \sqrt[6]{x}.$$

1 baba degiqli gönükmeler

Droblary umumy maýdalawja getiriñ:

$$147. 1) \frac{5a}{a^3 - 27}, \frac{a-3}{a^2 + 3a + 9} \text{ we } \frac{1}{a-3}; \quad 2) \frac{3}{x+2}, \frac{x+1}{x^3 + 8} \text{ we } \frac{x+2}{x^2 - 2x + 4}.$$

Amallary ýerine ýetiriñ (148–149):

$$148. 1) \frac{a+3}{5} + \frac{7+a}{10} + \frac{a-3}{2}; \quad 3) \frac{a-2}{45} - \frac{a+5}{15} - \frac{a-9}{9};$$

$$2) \frac{b-7}{4} + \frac{5b-2}{3} + \frac{3b-1}{8}; \quad 4) \frac{b}{12} - \frac{3b+1}{9} - \frac{2b-1}{4}.$$

149. 1) $\frac{y}{n-2} + \frac{z}{2-n};$

3) $\frac{2m}{3-5n} - 1 + \frac{7n-4}{5n-3};$

2) $\frac{p+2q}{3p-q} - \frac{5q-2p}{q-3p};$

4) $4 - \frac{3a}{5-2b} + \frac{5(a-10)}{2b-5}.$

Görkezilen amallary ýerine ýetiriň (150–152):

150. 1) $\frac{a^2 - 2ab + b^2}{a^2 - ab + b^2} : \frac{8a - 8b}{a^3 + b^3};$

2) $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 + ab + b^2} \cdot \frac{a^3 - b^3}{7a + 7b}.$

151. 1) $\frac{64x^2 - 1}{x^2 - 4} \cdot \frac{(x+2)^2}{x^2 - 4} \cdot \frac{(x-2)^2}{8x+1};$

2) $\frac{x-6}{x^2+6x+9} \cdot \frac{x^2+4x+4}{(x^2+2)(x-2)} \cdot \frac{x^3-9x}{(x-6)(x+2)};$

3) $\frac{am^2 - an^2}{m^2 + 2mn + n^2} : \frac{am^2 + 2amn + an^2}{3m + 3n};$

4) $\frac{ab - 4b - 2a + 8}{2a + 8 - ab - 4b} : \frac{2a - 8 - ab + 4b}{ab + 4b - 2a - 8}.$

152. 1) $(x^2 - 1) \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{1+x} + 1 \right);$

3) $\left(\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y} \right) : \left(\frac{x-y}{x+y} + \frac{x+y}{x-y} \right);$

2) $\left(1 + a - \frac{a^2 + 3}{a+1} \right) (1 - a^2);$

4) $\left(\frac{2-a}{2+a} - \frac{a+2}{a-2} \right) : \left(\frac{2+a}{2-a} + \frac{a-2}{a+2} \right).$

Hasaplaň (153–154):

153. 1) $(0,175)^0 + (0,36)^{-2} - 1^{\frac{4}{3}};$

2) $1^{-0,43} - (0,008)^{\frac{1}{3}} + (15,1)^0;$

3) $\left(\frac{4}{5} \right)^{-2} - \left(\frac{1}{27} \right)^{\frac{1}{3}} + 4 \cdot 379^0;$

4) $(0,125)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{3}{4} \right)^2 - (1,85)^0.$

154. 1) $9,3 \cdot 10^{-6} : (3,1 \cdot 10^{-5});$

2) $1,7 \cdot 10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^7;$

3) $8,1 \cdot 10^{16} \cdot 2 \cdot 10^{-14};$

4) $6,4 \cdot 10^5 : (1,6 \cdot 10^7);$

$$5) 2 \cdot 10^{-1} + \left(6^0 - \frac{1}{6}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{-1};$$

$$6) 3 \cdot 10^{-1} - \left(8^0 - \frac{1}{8}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{-1}.$$

155. Añlatmanyň bahasyny tapyň:

$$1) \left(\frac{\frac{1}{x^2} \cdot \frac{5}{x^6}}{\frac{1}{x^6}}\right)^{-2}, \text{ munda } x = \frac{7}{9}; \quad 2) \left(\frac{a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{9}}}{a^{-\frac{2}{9}}}\right)^{-3}, \text{ munda } a = 0,1.$$

156. Añlatmany ýönekeýleşdiriň:

$$1) (\sqrt[3]{125x} - \sqrt[3]{8x}) - (\sqrt[3]{27x} - \sqrt[3]{64x}); \quad 3) \left(\frac{3}{\sqrt{1+a}} + \sqrt{1-a}\right) : \frac{3+\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}};$$

$$2) (\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{16x}) + (\sqrt[4]{81x} - \sqrt[4]{625x}); \quad 4) \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}\right) : (\sqrt{x^2 - y^2} - x).$$

157. Hasaplaň:

$$1) \left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} + 10000^{0,25} - \left(7\frac{19}{32}\right)^{\frac{1}{5}}; \quad 2) (0,001)^{-\frac{1}{3}} - 2^{-2} \cdot 64^{\frac{2}{3}} - 8^{-1\frac{1}{3}};$$

$$3) 27^{\frac{2}{3}} - (-2)^{-2} + \left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}; \quad 4) (-0,5)^{-4} - 625 - \left(2\frac{1}{4}\right)^{-1\frac{1}{2}}.$$

158. x -iň nähili bahalarynda aňlatma mana eýe bolýar:

$$1) \sqrt[4]{x^2 - 4}; \quad 2) \sqrt[3]{x^2 - 5x + 6}; \quad 3) \sqrt[6]{\frac{x-2}{x+3}};$$

$$4) \sqrt[4]{x^2 - 5x + 6}; \quad 5) \sqrt[8]{x^3 - x}; \quad 6) \sqrt[6]{x^3 - 5x^2 + 6x}?$$

159. Añlatmany ýönekeýleşdiriň:

$$1) \frac{a^{\frac{1}{4}} - a^{-\frac{7}{4}}}{\frac{1}{a^{\frac{1}{4}} - a^{-\frac{3}{4}}}}; \quad 2) \frac{a^{\frac{4}{3}} - a^{-\frac{2}{3}}}{\frac{1}{a^{\frac{1}{3}} - a^{-\frac{2}{3}}}}; \quad 3) \frac{b^{\frac{5}{4}} + 2b^{\frac{1}{4}} + b^{-\frac{3}{4}}}{b^{\frac{3}{4}} - b^{-\frac{1}{4}}};$$

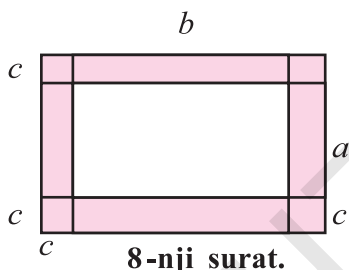
$$4) \frac{a^{-\frac{4}{3}}b^{-2} - a^{-2}b^{-\frac{4}{3}}}{a^{-\frac{5}{3}}b^{-2} - b^{-\frac{5}{3}}a^{-2}}; \quad 5) \frac{\sqrt{a^3b^{-1}} - \sqrt{a^{-1}b^3}}{\sqrt{ab^{-1}} - \sqrt{a^{-1}b}}; \quad 6) \frac{\frac{3}{a^4}b^{-\frac{1}{4}} - a^{-\frac{1}{4}}\frac{3}{b^4}}{\frac{1}{a^4}b^{-\frac{1}{4}} - a^{-\frac{1}{4}}\frac{1}{b^4}}.$$

- 160.** 1) Berlen ölçegler boýunça boýalan üsti hasaplamak formulasyny çykaryň (8-nji surat);

$$2) \quad 2bc + 2c(a - 2c) = 2ac + 2c(b - 2c)$$

deňligiň dogrudygyny şekiliň kömeginde görkeziň;

3) ştrihlenen üsti iki gönüburçlugyň üstleriniň tapawudy hökmünde şekillendiriň. Mundan peýdalanyň, $ab - (b - 2c)(a - 2c) = 2ac + 2c \cdot (b - 2c)$ deňligi subut ediň.



8-nji surat.

- 161.** Deňlikleriň dogrudygyny barlaň, olara geometrik düşündiriş beriň. Değişli şekilleri çyzyň:

$$1) \quad (a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd ;$$

$$2) \quad (a + b)(c - d) = ac + bc - ad - bd ;$$

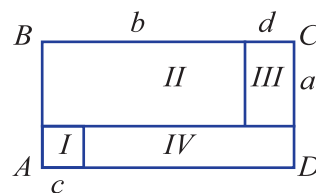
$$3) \quad (a + b + c)(d + l) = ad + bd + cd + al + bl + cl .$$

- 162.** 1) Deňlikleriň dogrudygyny subut ediň:

$$c^2 + b(a - c) + (b + d - c)c + d(a - c) = a(b + d) .$$

2) $ABCD$ gönüburçlugyň meýdanyny hasaplamak üçin iki aňlatma düzüň (9-njy surat).

$ABCD$ gönüburçlugyň meýdany I, II, III, IV gönüburçluklaryň meýdanlarynyň jemine deňliginden peýdalanyň we 1-nji deňlige geometrik düşündiriş beriň.



9-njy surat.



№2

N sanyň sifrleriniň jemi 2006-a deň. N sany iki özara deň sanlaryň köpeltmek hasyly görnüşinde şekillendirmek mümkinmi?

ÖZÜÑIZI BARLAP GÖRÜŇ!

1. Harplaryň drob mana eýe bolýan bahalaryny tapyň:

$$\frac{a}{b}; \frac{3}{c-1}; \frac{k}{d+2}.$$

2. Amallary ýerine ýetiriň:

$$1) 4a + \frac{1-4a^2}{a};$$

$$2) \frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b};$$

$$3) \frac{2a-4}{3b} \cdot \frac{6b}{a-2};$$

$$4) \frac{a^2-b^2}{b^2} : \frac{a+b}{b}.$$

3. Aňlatmany ýönekeýleşdiriň we onuň $x = 2\frac{2}{3}$ bolandaky san bahasyny tapyň:

$$\frac{1+2x}{x-3} - \frac{x^2+3x}{5} \cdot \frac{10}{x^2-9}.$$

4. Hasaplaň:

$$1) 3^{-5} : 3^{-7} - 2^{-2} \cdot 2^4 + \left(\left(\frac{2}{3} \right)^{-1} \right)^3;$$

$$2) \sqrt[5]{3^{10} \cdot 32} - \frac{\sqrt[3]{48}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3}};$$

$$3) 25^{\frac{3}{2}} \cdot 25^{-1} + (5^3)^{\frac{2}{3}} : 5^3 - 48^{\frac{2}{3}} : 6^{\frac{2}{3}};$$

$$4) 4^{-7} : 4^{-10} - 3^{-2} \cdot 3^5 + \left(\frac{1}{2} \right)^{-2}.$$

5. Aňlatmalary ýönekeýleşdiriň:

$$1) \frac{3x^{-9} \cdot 2x^5}{x^{-4}};$$

$$2) (x^{-1} + y^{-1}) \left(\frac{1}{xy} \right)^{-2};$$

$$3) \frac{2a^{-8} \cdot 4a^3}{16 \cdot a^{-5}}.$$

6. $\frac{a^{\frac{5}{3}}}{\sqrt[3]{a^5} \cdot a^{\frac{3}{4}}}$ aňlatmany ýönekeýleşdiriň we $a=81$ bolanda onuň san bahasyny tapyň.



I baba degiqli synag gönükmeleri – testler

1. Droby gysgaldyň: $\frac{27a^2 - 36ab + 12b^2}{9a^2 - 4b^2}$.

A) $\frac{3(3a-2b)}{3a+2b}$; B) $\frac{3a-2b}{3a+2b}$; C) $\frac{39-36ab}{5}$; D) $\frac{3a^2 - 36ab + 3b^2}{a^2 - b^2}$.

2. Droby gysgaldyň: $\frac{7a^2(ab^2 - 9a)}{3a(21a - 7ab)}$.

A) $\frac{7a(ab^2 - 9a)}{3(21a - 7ab)}$; B) $\frac{-a(b+3)}{3}$; C) $\frac{7(ab^2 - 9a)}{3(21 - 7b)}$; D) $\frac{a(b-3)}{3}$.

3. Amallary ýerine ýetiriň: $\frac{4}{a+b} + \frac{5}{a-b} - \frac{10b}{a^2 - b^2}$.

A) $\frac{9}{a-b}$; B) $\frac{9}{a+b}$; C) $\frac{-9}{a+b}$; D) $\frac{9(a+b)}{a-b}$.

4. Drobdan droby aýryň: $\frac{a^2 + 9}{a^3 + 27} - \frac{1}{a+3}$.

A) $\frac{1}{a^2 + 9}$; B) $\frac{3}{a^2 + 9}$; C) $\frac{a}{a^3 + 9}$; D) $\frac{3a}{a^3 + 27}$.

5. Droblary köpeldiň: $\frac{9a^2 - 16b^2}{6a + 8b} \cdot \frac{6a^2}{12b - 9a}$.

A) a^2 ; B) $-a^2$; C) $\frac{a^2}{3a - 4b}$; D) $\frac{6}{3a + 4b}$.

6. Droblary bölüň: $\frac{4a^2 - 20ab + 25b^2}{5b + 4} : \frac{(2a - 5b)^2}{25b^2 - 16}$.

A) $\frac{5b+4}{2a-5b}$; B) $\frac{2a-5b}{5b-4}$; C) $5b-4$; D) $5b+4$.

7. Droby gysgaldyň: $\frac{8a^2 - 22ab + 15b^2}{16a^2 - 25b^2}$.

A) $\frac{2a-3b}{4a+5b}$; B) $\frac{2a+3b}{4a-5b}$; C) $\frac{4a-5b}{4a+5b}$; D) $\frac{4a+3b}{2a-5b}$.

8. Droblary aýryň: $\frac{9x^2+16}{27x^3+64} - \frac{1}{3x+4}$.

A) $\frac{9x^2+16}{3x+4}$; B) $\frac{-12x}{27x^3+64}$; C) $\frac{12x}{27x^3+64}$; D) $\frac{9x^2+4}{27x^3-64}$.

9. Amallary ýerine ýetiriň: $\frac{4}{3a+2b} - \frac{2}{2b-3a} + \frac{8b}{4b^2-9a^2}$.

A) $\frac{6}{3a-2b}$; B) $\frac{6}{3a+2b}$; C) $\frac{12a}{9a^2-4b^2}$; D) $\frac{12b}{2b-3a}$.

10. Hasaplaň: $(-8)^2 - (-5)^3 - (12)^{-1}$.

A) $188\frac{11}{12}$; B) $-61\frac{1}{12}$; C) $189\frac{1}{12}$; D) $61\frac{1}{12}$.

11. Hasaplaň: $(-0,2)^{-3} + (0,2)^{-2} - (-2)^{-2}$.

A) $-150\frac{1}{4}$; B) $-100\frac{1}{4}$; C) $99\frac{1}{4}$; D) 11,25.

12. Hasaplaň: $\frac{\sqrt[3]{-16} + \sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{128}}{\sqrt[3]{-250}}$.

A) $\sqrt[3]{2}$; B) 1; C) -1; D) $\frac{9}{5}$.

13. Hasaplaň: $\sqrt[4]{\frac{(4,15)^3 - (1,61)^3}{2,54}} + 4,15 \cdot 1,61$.

A) 3,4; B) 5,76; C) 24; D) 2,4.

14. Hasaplaň: $\sqrt[3]{\frac{(2,08)^3 + (2,016)^3}{4,096}} - 2,08 \cdot 2,016$.

A) 0,16; B) 4,096; C) 1,6; D) 0,8.

15. Hasaplaň: $\sqrt{2\sqrt{2}+1} \cdot \sqrt[4]{9-4\sqrt{2}}$. Görkezme: $\sqrt{a} \cdot \sqrt[4]{b} = \sqrt[4]{a^2 \cdot b}$.

- A) $\sqrt{7}$; B) $2\sqrt{15}$; C) $3-2\sqrt{2}$; D) 7.

16. Hasaplaň: $\sqrt[3]{2-\sqrt{3}} \cdot \sqrt[6]{7+4\sqrt{3}}$. Görkezme: $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[6]{b} = \sqrt[6]{a^2 \cdot b}$.

- A) -1; B) 1; C) $3+2\sqrt{3}$; D) $5+3\sqrt{3}$.

17. Hasaplaň: $\frac{\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}} \cdot (3-\sqrt{2})}{11-6\sqrt{2}}$. Görkezme: $\sqrt[3]{a} \cdot b = \sqrt[3]{a \cdot b^3}$.

- A) $5-\sqrt{2}$; B) $5\sqrt{2}$; C) -1; D) 1.

18. Hasaplaň: $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$.

- A) 2; B) $\sqrt{2}$; C) $2\sqrt{2}$; D) -2.

19. Hasaplaň: $\frac{\sqrt[3]{98} \cdot \sqrt[3]{-112}}{\sqrt[3]{500}}$.

- A) $-\sqrt[3]{4}$; B) 2,84; C) -2,8; D) -1,4.

20. $a=125$ bolanda $\sqrt{a} : \sqrt[6]{a}$ aňlatmanyň san bahasyny tapyň:

- A) -25; B) 15; C) -5; D) 5.

21. $a=0,04$ bolanda $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[6]{a}$ aňlatmanyň san bahasyny tapyň:

- A) 0,2; B) $\sqrt[3]{0,4}$; C) 0,4; D) -0,2.

22. Aňlatmany ýönekeyleşdiriň: $(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}) \cdot \left(a^{\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{ab} + b^{\frac{2}{3}}\right)$.

- A) $a+b$; B) $a-b$; C) a^3+b^3 ; D) a^3-b^3 .



Taryhy maglumatlar

Gysga köpeltmek formulalary, algebraik droblara degişli maglumat gadymky kitaplarda duşýar. Meselem, **al-Karajiniň** „Al-Fahri“, Müsür alymy **Abu Kamiliň** (850—930) „Kitab al-jabr wal-mukabala“ eserlerinde algebraik droblar öwrenilen. Abu Kamil al-Horezmiden soň algebra degişli kitap ýazan birinji alymdyr. Abu Kamil öz eserinde

$$\left(\frac{a}{b}\right) \cdot b = a, \quad \frac{a}{b} = \frac{a^2}{ab}, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1, \quad \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2 + b^2}{ab}$$

ýaly ýönekeý gatnaşyklara hem üns berýär.

Algebraik droblara I. Nýutonyň „Umumy arifmetika“ kitabynda hem ýeterli orun berlen. „ $\frac{a}{b}$ “ drob a -ny b -ge bölmek netijesinde emele gelen

ululykdyr. Edil şonuň ýaly, $\frac{aa - bb}{a + x}$ ululyk $ab - bb$ -ni $a + x$ -e bölmek netijesinde emele gelýär“, – diýipdi Nýuton.

Rasional görkezijili dereje **I. Nýuton** (1643–1727) tarapyndan girizilen. Islendik α hakyky san üçin a^α , $a > 0$, dereje düşünjesi **L. Eýleriň** (1707–1783) „Analize giriş“ eserinde berlen.

Abu Reyhan Biruny özünüň meşhur „Kanuni Ma’sudiý“ eserinde „töweregiň uzynlygynyň onuň diametrine gatnaşygy irrasional san“ bolýandygyny aýdýar. Gadymky Gresiyada „eger kwadratyň tarapy ölçeg birligi edip alynsa, onuň diagonalyny rasional san bilen aňladyp bolmaýanlygy“ subut edilen. Miladydan öňki V–IV asyrlarda gadymy grek alymlary doly kwadrat bolmadyk islendik n natural san üçin $\sqrt{n}$ sanyň irrasionaldygyny subut edipdirler.

Giýasiddin Jemşit al-Koşynyň „Arifmetikanyň açary“ eserinde natural sandan kök çykarmagyň umumy usuly beýan edilýär. $\sqrt[n]{a^n + r}$ köki al-Koşy takmynan $\sqrt[n]{a^n + r} \approx a + \frac{r}{(a+1)^n - a^n}$ görnüşinde aňladýar, munda a – natural san we $r < (a+1)^n - a^n$.

Al-Koşy köki anygrak hasaplamak üçin kök aşagyndaky sany 10-uň degişli derejesine köpeltmegi tekliپ edýär: $\sqrt[n]{N} = \frac{\sqrt[n]{10^{mn} \cdot N}}{10^m}$. Drobdan kök

alanda bolsa şu düzgünden peýdalanýar: $\sqrt[n]{\frac{M}{N}} = \frac{\sqrt[n]{M \cdot N^{n-1}}}{N}$.

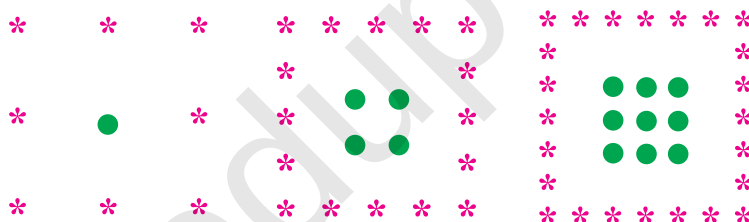
Şunuň bilen birlikde, al-Koşy kökleriň köpeltmek hasylyny umumy görkezijä getirmegiň düzgünini beýan edipdir:

$$\sqrt[k]{a} \cdot \sqrt[k]{b} = \sqrt[kn]{a^k} \cdot \sqrt[kn]{b^n} = \sqrt[kn]{a^k \cdot b^n}.$$



Amaly we predmetara bagly meseleler

- 163.** Suratdaky ýaşyl nokatlar bilen seýrek sortly miweli agaçlar (meselem, seýrek sortly armyt) belgilenen. Armytlar ölçegleri $n \times n$ (m²) bolan kwadratlara ekilen. Gyzyly ýyldyzjyklar (*) arkaly bolsa ihota agaçlary belgilenen.



Armytlaryň daşyndaky ihota agaçlary kwadratyň taraplary boýunça ekilen.

Soraglara jogap beriş:

- 1) 20 m × 20 m; 2) 25 m × 25 m ölçegli kwadrata ekilen armytlary „gurşap“ durýan ihota agaçlarynyň sany näçe?
 - 3) Armytlar sany bilen olary „gurşap“ durýan ihota agaçlarynyň sanynyň arasynda nähili baglanyşyk bar?
- 164.** Ýokardaky meseläniň şertlerinde n -iň nähili bahalarynda n -kwadratdaky armytlaryň sany olary „gurşap“ durýan agaçlaryň sanyna:
- 1) deň; 2) uly; 3) kiçi bolýar?

4) Jedweli dolduryň we derňäň. Netije çykaryň.

Kwadratyny tarapynyň uzynlygy (m)	Armytlar sany	Ihota agaçlarynyň sany
1	1	8
2	4	16
·	·	·
·	·	·
·	·	·
10	...	...

- 165.** Awtomobiller reytingini anyklanda aşakdakylar hasaba alynýar: howpsuzlygy (S), amatlylygy (C), dürli wezipeleri ýerine ýetirip bilşi (F), hili (Q) we dizaýny (D). Bu görkezijileriň her biri bahalanýar (meselem, ball berilýär). Awtomobil reytingi şu formula boýunça hasaplanýar:

$$R = \frac{3S+2C+2F+2Q+D}{50}.$$

Jedwelde awtomobilleriň 3 kysymy (şertli ýagdaýda A , B , D kysymlar) üçin dürli görkezijiniň bahasy getirilen.

Awtomobil kysymy	Howpsuzlyk S	Amatlylyk C	Dürli wezipeleri ýerine ýetirmek F	Hil Q	Dizaýn D
A	3	3	5	5	3
B	4	5	3	4	3
D	4	4	3	3	4

- 1) Haýsy kysymly awtomobil iň uly reytinge eýe?
- 2) Awtomobilleriň kysymlarynyň reytingini kemelýän tertipde ýerleşdiriň.
- 3) Siz üçin haýsy görkeziji möhüm? Näme üçin?
- 4) Siz nähili reytingli awtomobili saýlan bolardyňyz? Näme üçin?

- 166.** Dem almak, iýmiti siňdirmek, gan aýlanyşy üçin zerur energiya— esasy çalyşma intensiwligidir (tizligidir).

Esasy çalyşma intensiwligini (AAI) diýip belgiläliň. AAI kaloriýalarda ölçenýär, munda adam temperaturasy 23°C bolan otagda arkaýyn we dynç halatda ýatan bolmaly. Aýallarda AAI aşakdaky formula esasynda hasaplanýar:

$$\text{AAI} = 9,74M + 172,9P - 4,737B + 667,051, \quad (*)$$

munda M – aýalyň massasy, P – boýunyň uzynlygy (metrlerde), B – ýaşy (ýyllarda).

- 1) Eger $M = 60\text{ kg}$, $P = 1,7\text{ m}$, $B = 35$ ýyl bolsa, AAI-ni hasaplaň (iň ýakyn bitin sana çenli tegelekläň);
- 2) (*) formuladan aýalyň massasy, boýy we ýaşy AAI-a nähili täsir edýändigini bilmek mümkin.

Soraglara jogap beriň:

- a) Ýaş artdygy saýyn AAI hem artarmy?
- b) Boýuň belent-pesligi AAI nähili täsir edýär?
- d) 667,051 sany aýalyň ýaşyna, boýuna, massasyna baglymy?
- e) Eger aýalyň massasy kemelse (ol arryklasa), AAI bu aýalda üýt-gärmi?
- 3) Bir lukman „Eger iki aýalyň massasy, ýaşy birmeňzeş bolup, boýlarynyň tapawudy 10 cm bolsa, olaryň AAI arasyndaky tapawut 17,29 kilokaloriýa bolýar“, diýen netijä geldi. Bu netije dogrumy? Ony (*) formulanyň kömeginde barlap görüň.

- 167.** Bir sany önümi taýýarlamak wagty bilen bir sagatda taýýarlanýan önümler sanynyň arasyndaky baglanyşyk ters proporsional baglanyşyk bolýar. Jedweli dolduryň we derňäň. Netije çykaryň.

Bir önümi taýýarlamaga sarp-lanan wagt (minut)	2	3		5	6		10	12	
Bir sagatda öndürilen önümler sany	30		15			8	6		4

168. Derýanyň käbir ýerlerindäki kese kesiginiň meýdany bilen şu ýerlere laýyk ortaça akym tizligi ters proporsional ululyklardyr. Jedweli dolduryň. Nähili netijä geldiňiz?

Kese kesiginiň meýdany (kw.m)	40	45		54	60		
Akymyň tizligi (m/s)	0,9	0,8	0,75			0,5	0,4

169. Iki metr uzynlykdaky hadalary byçgylaýjylar 4,5 sagatda 0,5 m li töñňeler byçgyladylar. Eger şol hadalary 40 cm-li töñňe edip byçgylasalar, olary näçe wagtda byçgylap bolardylar? Munda işiň göwrümi nähili gatnaşykda üýtgän bolardy?
170. 1) Iki şkiw gaýyş bilen birleşdirilen. Birinji şkiwiň diametri 28 cm, ikinji şkiwiňki bolsa 42 cm. Birinji şkiw minudyna 600 gezek aýlanýan bolsa, ikinji şkiw minudyna näçe gezek aýlanar?
2) Iki şkiw gaýyş bilen birleşdirilen. Birinji şkiw minudyna 560 gezek, ikinjisi bolsa 240 gezek aýlanýar. Birinji şkiwiň töweregi 0,36 m bolsa, ikinji şkiwiň töwereginiň uzynlygyny tapyň.
171. A we B şäherleriň arasyndaky aralyk 360 km. Bu aralygy ýeňil maşyn 4 sagatda, ýük maşyny bolsa 6 sagatda geçýär. A -dan B -ge tarap ýük maşyny ýola çykdy. Edil şu wagtda B -den A -ga tarap ýeňil maşyn ýola çykdy. Olar A -dan näçe kilometr aňyrda duşuşarlar?
- △ Ýeňil we ýük maşynlarynyň tizlikleri dürlüçe bolany üçin göni proporsional baglanyşyk ýok, şeýle hem, 360 km aralygy 4 we 6 sanlarynaa göni proporsional bolmak bilen meseläni çözüp bolmaýar.

Başga usuly ulanyňarys:

1 sagatda ýeňil maşyn AB aralygyň $\frac{1}{4}$ bölegini geçýär, ýük maşyny bolsa $\frac{1}{6}$ bölegini geçýär. Diýmek, duşuşýan ýerini anyklamak üçin 360 km aralygy $\frac{1}{4}$ we $\frac{1}{6}$ sanlaryna proporsional edip bölmeli.

$$\text{Emma } \frac{1}{4} : \frac{1}{6} = \frac{3}{12} : \frac{2}{12} = 3 : 2.$$

Mundan $3+2=5$. Maşynlar A -dan x km aňyrda duşuşýarlar diýsek,
 $x = \frac{360}{5} \cdot 2 = 144$ (km).

Jogaby: A -dan 144 km aňyrda. Meselede 360, 4, 6 sanlary berlen. Meseläni çözen mahalda $\frac{1}{4}$ we $\frac{1}{6}$ sanlaryny (4 we 6-a ters sanlary) girizdik. Diýmek, beýle meseläni çözmek üçin 360-y 4 we 6 sanlara ters ($\frac{1}{4}$ we $\frac{1}{6}$ sanlaryna göni) proporsional edip bölmeli eken. Mundan şeýle düzgüne gelyäris:

Sany berlen sanlara ters proporsional edip bölmek üçin şu sany berlen sanlara ters bolan sanlara göni proporsional edip bölmeli. ▲

172. 195 sanyny 2, 3, 4 sanlaryna ters proporsional edip üç bölege bölüň.

△ 1) 2, 3, 4 sanlaryna ters sanlar, deňşililikde, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$. Şeýlelikde, 195-i $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ sanlaryna göni proporsional edip üç bölege bölmeli. Emma $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4} = \frac{6}{12} : \frac{4}{12} : \frac{3}{12} = 6 : 4 : 3$. Birinji sany a_1 , ikinji sany a_2 , üçünji sany a_3 diýsek, onda

$$a_1 = \frac{195 \cdot 6}{6+4+3} = \frac{195 \cdot 6}{13} = 15 \cdot 6 = 90 ; \quad a_2 = \frac{195 \cdot 4}{13} = 15 \cdot 4 = 60 ;$$

$$a_3 = \frac{195 \cdot 3}{13} = 15 \cdot 3 = 45 .$$

Jogaby: 90, 60, 45.

Barlamak: 1) $90 + 60 + 45 = 195$.

2) $90 : 60 : 45 = 6 : 4 : 3 = \frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$ (gatnaşygyň agzalaryny ilki 15-e, soň 12-ä böldük). ▲

173. 1) 448 sanyny: a) $\frac{1}{3}$ we $\frac{3}{5}$; b) $\frac{3}{4}$ we $\frac{2}{9}$ sanlaryna ters proporsional edip iki bölege bölüň.

2) 987 sanyny: a) 0,6 we 0,3; b) 0,4 we 0,(3) sanlaryna ters proporsional edip iki bölege bölün.

174. 1) 2040 sanyny $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ we $\frac{5}{6}$ sanlaryna ters proporsional bolan 3 bölege bölün.

2) 4530 sanyny $\frac{2}{3}$, 0,7 we $1\frac{1}{2}$ sanlaryna ters proporsional bolan 3 bölege bölün.

175. 1) A we B şäherleriň arasyndaky aralyk 465 km. Bu aralygy ýolagçy otlusy 10,5 sagatda, ýük otlusy bolsa 12 sagatda geçýär. Otlular A we B şäherlerden bir wagtda bir-birine tarap ýola çyksa, olaryň her biri duşuşyança näçe kilometr ýol geçer?

2) Birinji sportçy 100 m aralygy 12 s-da, ikinjisi bolsa 13 s-da ylgap geçýär. Olar bir-birinden 200 m aralykda durup bir wagtda bir-birlerine tarap ylgap başladylar. Duşuşyança olaryň her biri näçe metr aralygy geçer?

176. 1) 36 dişli şesternýa (gurluş) 18 dişli şesternýa bilen dişleşdirilen. 18 dişli şesternýa 60 gezek aýlansa, 36 dişli şesternýa näçe gezek aýlanar? 18 dişli şesternýa 24 gezek aýlanýan bolsa nähili?

2) Welosipediň pedallary birikdirilen öňki (hereketlendiriji) şesternýada 48 sany diş, yzky tigire birikdirilen şesternýada 16 sany diş bar. Eger welosipediň pedally şesternýasy minudyna 40 gezek aýlansa, yzky tigr näçe gezek aýlanar? Pedally şesternýa 45 gezek; 60 gezek aýlansa nähili? Eger welosipediň tigriniň diametri 70 cm bolsa, ýokardaky her haýsy ýagdaý üçin welosipediň tizligini tapyň.

177. 1) *Abu Reyhan Birunyň meselesi*. Kerpijiň ölçegleri 5,4,3 uzynlyk birligine deň. Şeýle kerpijiň 30 sanysynyň nyrhy 60 dirhem (pul birligi). Ölçegleri 8, 6, 2 uzynlyk birligine deň 20 sany kerpijiň nyrhy näçe dirhem bolar?

2) Kerpijiň uzynlygy, ini we beýikligi 4:2:1 ýaly gatnaşykda, diýeliň. Uzynlygy bilen 6 sany kerpiç goýmak mümkin bolan ýere ini bilen näçe we beýikligi bilen näçe kerpiç goýmak mümkin?

II BAP

DEŇSIZLIKLER

11- §. SANLY DEŇSIZLIKLER

Sanlary deňeşdirmek amalyýetde giňden ulanylýar. Meselem, ykdysatçy planda göz önünde tutulan görkezijileri amaldaky görkezijiler bilen deňeşdirýär, lukman näsaglaryň temperaturasyny sagdyn adamyň temperaturasy bilen deňeşdirýär, slesar ýonýan önüminiň ölçeglerini ülni bilen deňeşdirýär.

Bu üç ýagdaýda nähilidir sanlar özara deňeşdirilýär. Sanlary deňeşdirmek netijesinde sanly deňsizlikler emele gelýär.

Meselem, $\frac{4}{5}$ we $\frac{3}{4}$ sanlaryny deňeşdireliň. Munuň üçin olaryň tapawudyny tapýarys:

$$\frac{4}{5} - \frac{3}{4} = \frac{16-15}{20} = \frac{1}{20}.$$

Diýmek, $\frac{4}{5} = \frac{3}{4} + \frac{1}{20}$, ýagny $\frac{4}{5}$ sany $\frac{3}{4}$ sanyna $\frac{1}{20}$ položitel sany goşmak netijesinde alynýar. Bu bolsa $\frac{4}{5}$ sanyň $\frac{3}{4}$ sanyndan $\frac{1}{20}$ -a artykdygyny aňladýar. Şeýdip, $\frac{4}{5}$ san $\frac{3}{4}$ -dan uly, çünki olaryň tapawudy položitel.



Kesgitleme. Eger $a-b$ tapawut položitel bolsa, onda a san b sandan uly bolýar. Eger $a-b$ tapawut otrisatel bolsa, onda a san b sandan kiçi bolýar.

Eger a san b sandan uly bolsa, bu $a > b$ ýaly; eger a san b sandan kiçi bolsa, bu $a < b$ ýaly ýazylýar.



Şeýlelikde, $a > b$ deňsizlik $a-b$ tapawut položitel, ýagny $a-b > 0$ bolýandygyny aňladýar, $a < b$ deňsizlik bolsa $a-b < 0$ bolýandygyny aňladýar.

1-nji mesele. Eger $a > b$ bolsa, onda $b < a$ bolýandygyny subut ediň.

△ $a > b$ deňsizlik $a - b$ položitel sandygyny aňladýar. Onda $b - a = -(a - b)$ — otrisatel san, ýagny $b < a$. ▲

Islandik iki a we b san üçin aşakdaky üç gatnaşykdan diňe biri dogry bolýar:

$$a > b, a = b, a < b.$$

Meselem, -5 we -3 sanlary üçin $-5 < -3$ deňsizlik dogry bolýar, $-5 = -3$ we $-5 > -3$ gatnaşyklar bolsa dogry bolmaýar.



a we b sanlary deňeşdirmek, olaryň arasyna $>$, $=$ ýa-da $<$ belgilerinden haýsysy goýulsa dogry gatnaşyk emele gelşini tapmak diýmekdir. Muny $a - b$ tapawudyň alamatyny anyklap ýerine ýetirmek mümkin.

2-nji mesele. $0,79$ we $\frac{4}{5}$ sanlaryny deňeşdiriň.

△ Olaryň tapawudyny tapýarys:

$$0,79 - \frac{4}{5} = 0,79 - 0,8 = -0,01.$$

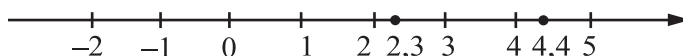
$0,79 - \frac{4}{5} < 0$ bolany üçin $0,79 < \frac{4}{5}$. ▲

$a > b$ deňsizlik *geometrik nukdaý nazardan* a nokat san okunda b nokatdan sagda ýatýandygyny aňladýar (10-njy surat).



10-njy surat.

Meselem, $\frac{4}{5}$ nokat $0,79$ nokatdan sagda ýatýar, çünki $\frac{4}{5} > 0,79$; $2,3$ nokat $4,4$ nokatdan çepde ýatýar, çünki $2,3 < 4,4$ (11-nji surat).



11-nji surat.

3-nji mesele. Eger $a \neq b$ bolsa, onda $a^2 + b^2 > 2ab$ bolýandygyny subut ediň.

△ $a^2 + b^2 - 2ab$ tapawut položiteldigini subut edýäris. Çyndan hem, $a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2 > 0$, çünki $a \neq b$. ▲

4-nji mesele. Eger $a > 0$ we $a \neq 1$ bolsa, onda $a + \frac{1}{a} > 2$ bolýandygyny subut ediň.

△ $a + \frac{1}{a} - 2$ tapawut položiteldigini subut edýäris. Çyndan hem,

$$a + \frac{1}{a} - 2 = \frac{a^2 + 1 - 2a}{a} = \frac{(a-1)^2}{a} > 0,$$

çünki $a > 0$ we $a \neq 1$. ▲

5-nji mesele. Eger $\frac{n}{m}$ dogry drob bolsa, onda $\frac{n}{m} < \frac{n+1}{m+1}$ bolýandygyny subut ediň.

△ $\frac{n}{m}$ drob $n < m$ bolanda (n we m – natural sanlar) dogry drob diýip atlandyrylýandygyny ýatladyp geçýäris.

Şu $\frac{n}{m} - \frac{n+1}{m+1} = \frac{n(m+1) - m(n+1)}{m(m+1)} = \frac{n-m}{m(m+1)}$ tapawut noldan kiçi, çünki

$n-m < 0$, $m > 0$, $m+1 > 0$. Şeýlelikde, $\frac{n}{m} < \frac{n+1}{m+1}$. ▲

Gönükmeler

178. Sanly deňsizligiň kesgitlemesinden peýdalanyp, aşakdaky sanlary deňeşdiriň:

- | | | |
|-------------------------------|-------------------------------|--------------------------------|
| 1) $0,3$ we $\frac{1}{5}$; | 2) $\frac{1}{3}$ we $0,3$; | 3) $\frac{13}{40}$ we $0,35$; |
| 4) $-\frac{5}{8}$ we $-0,7$; | 5) $\frac{22}{7}$ we $3,14$; | 6) $\frac{4}{9}$ we $0,44$. |

179. Eger:

- | | | |
|---------------------|---------------------|-----------------------|
| 1) $b - a = -1,3$; | 2) $b - a = 0,01$; | 3) $a - b = (-5)^4$; |
| 4) $a - b = -5^4$; | 5) $a - b = 0,8$; | 6) $b - a = (-2)^3$ |

bolsa, a we b sanlary deňeşdiriň.

180. a -nyň islendik bahasynda:

$$1) a^2 > (a+1)(a-1); \quad 2) (a+2)(a+4) > (a+1)(a+5)$$

deňsizligiň dogrudygyny subut ediň.

181. a -nyň islendik bahasynda aşakdaky deňsizlik dogry bolýandygyny subut ediň:

$$1) a^3 < (a+1)(a^2 - a + 1); \quad 2) (a+7)(a+1) < (a+2)(a+6);$$

$$3) 1 + (3a+1)^2 > (1+2a)(1+4a); \quad 4) (3a-2)(a+2) < (1+2a)^2.$$

182. a we b -niň islendik bahasynda aşakdaky deňsizlik dogry bolýandygyny subut ediň:

$$1) a(a+b) > ab - 2; \quad 2) 2ab - 1 < b(2a+b);$$

$$3) 3ab - 2 < a(3b+a); \quad 4) b(a+2b) > ab - 3.$$

183. Iki çaga birmeňzeş mukdarda depder satyn aldy. Birinjisi alan depderleriň hemmesi 150 somdan, ikinjisi alan depderleriň ýarysy 130 somdan, galanlary bolsa 160 somdan alyndy. Haýsy çaga köpräk pul sarplady?

12-Ş. SANLY DEŇSIZLIKLERIŇ ESASY HÄSIÝETLERI

Bu paragrafda sanly deňsizlikleriň adatda *esasy* diýlip atlandyrylýan *häsiýetleri* garalýar, çünki olardan deňsizlikleriň başga häsiýetlerini subut etmekde we köp meseleleri çözendä peýdalanylýar.

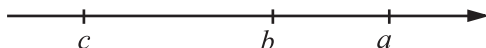


1-nji teorema. Eger $a > b$ we $b > c$ bolsa, onda $a > c$ bolýar.

○ Şerte görä $a > b$ we $b > c$. Bu $a-b > 0$ we $b-c > 0$ bolýandygyny aňladýar. $a-b$ we $b-c$ položitel sanlary goşup, $(a-b) + (b-c) > 0$ -y alarys, ýagny $a-c > 0$.

Diýmek, $a > c$. ●

1-nji teoremanyň *geometrik manysy*: eger san okunda a nokat b nokatdan sagda ýatsa we b nokat c nokatdan sagda ýatsa, onda a nokat c nokatdan sagda ýatýar (12-nji surat).



12-nji surat.



2-nji teorema. *Eger deňsizligiň iki bölegine şol bir san goşulsa, onda deňsizligiň alamaty üýtgemeyär.*

○ $a > b$ bolsun. Munda islendik c san üçin

$$a + c > b + c$$

deňsizligiň ýerine ýetirilişini subut etmek talap edilýär.

Şu

$$(a + c) - (b + c) = a + c - b - c = a - b$$

tapawuda garaýarys. Bu tapawut položitel, çünki meseläniň şertine görä $a > b$. Diýmek, $a + c > b + c$. ●



Netije. *Islendik goşulyjyny deňsizligiň bir böleginden ikinji bölegine şu goşulyjynyň alamatyny garşylyklysyna çalşyrmak bilen ornuny üýtgetmek mümkin.*

○ $a > b + c$ bolsun. Bu deňsizligiň iki bölegine-de $-c$ sany goşup, $a - c > b + c - c$ -ni alarys, ýagny $a - c > b$. ●



3-nji teorema. *Eger deňsizligiň iki bölegi-de şol bir položitel sana köpeldilse, onda deňsizligiň alamaty üýtgemeyär. Eger deňsizligiň iki bölegi-de şol bir otrisatel sana köpeldilse, onda deňsizligiň alamaty garşylyklysyna üýtgeýär.*

○ 1) $a > b$ we $c > 0$ bolsun. $ac > bc$ bolýandygyny subut edýäris.

Şerte görä $a - b > 0$ we $c > 0$. Şonuň üçin $(a - b)c > 0$, ýagny $ac - bc > 0$. Diýmek, $ac > bc$.

2) $a > b$ we $c < 0$ bolsun. $ac < bc$ bolýandygyny subut edýäris.

Şerte görä $a - b > 0$ we $c < 0$. Şonuň üçin $(a - b)c < 0$, ýagny $ac - bc < 0$. Diýmek, $ac < bc$. ●

Meselem, $\frac{1}{5} < 0,21$ deňsizligiň iki bölegini hem 3-e köpeldip, $\frac{3}{5} < 0,63$ -i

alarys, $\frac{1}{5} < 0,21$ deňsizligiň iki bölegini hem -4 -e köpeldip bolsa $-\frac{4}{5} > -0,84$

deňsizligi alarys.

Eger $c \neq 0$ bolsa, onda c we $\frac{1}{c}$ sanlar birmeñzeş alamata eýe bolýandygyny nygtap geçýäris. c -ge bölmegi $\frac{1}{c}$ -e köpeltmek bilen çalşyrmak mümkin bolany üçin 3-nji teoremadan aşakdaky tassyklama gelip çykýar.



Netije. *Eger deňsizligiň iki bölegi-de şol bir položitel sana bölünse, onda deňsizligiň alamaty üýtgemeyär. Eger deňsizligiň iki bölegi-de şol bir otrisatel sana bölünse, onda deňsizligiň alamaty garşylyklysyna üýtgeýär.*

Meselem, $0,99 < 1$ deňsizligiň iki bölegini-de 3-e bölüp, $0,33 < \frac{1}{3}$ -i alarys, $0,99 < 1$ deňsizligiň iki bölegini-de -9 -a bölüp bolsa $-0,11 > -\frac{1}{9}$ -i alarys.

1-nji mesele. Eger $a > b$ bolsa, onda $-a < -b$ bolýandygyny subut ediň.

△ $a > b$ deňsizligiň iki bölegini hem -1 otrisatel sana köpeldip, $-a < -b$ -ni alarys. ▲

Meselem, $1,9 < 2,01$ deňsizlikden $-1,9 > -2,01$ deňsizlik gelip çykýar, $0,63 < \frac{3}{5}$ deňsizlikden $-0,63 > -\frac{3}{5}$ deňsizlik gelip çykýar.

2-nji mesele. Eger a we b – položitel sanlar we $a > b$ bolsa, onda $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ bolýandygyny subut ediň.

△ $b < a$ deňsizligiň iki bölegini hem ab položitel sana bölüp, $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ deňsizligi alarys. ▲

Deňsizlikleriň şu paragrafda garalan ähli häsiýetleri $>$ (uly) alamatly deňsizlik üçin subut edilendigini nygtap geçýäris.

Olar $<$ (kiçi) alamatly deňsizlikler üçin hem hut şeýle subut edilýär.

Gönükmeler

184. Aşakdaky tassyklamalary subut ediň:

- 1) eger $a-2 < b$ we $b < 0$ bolsa, onda $a-2$ – otrisatel san;
- 2) eger $a^2-5 > a$ we $a > 1$ bolsa, onda $a^2-5 > 1$.

185. Eger:

- 1) $a > b$ we $b > 1$;
 - 2) $a < b$ we $b < -2$;
 - 3) $a-1 < b$ we $b < -1$;
 - 4) $a+1 > b$ we $b > 1$
- bolsa, onda a položitel san bolarmy ýa-da otrisatel san bolarmy?

186. $-2 < 4$ deňsizligiň iki bölegine-de: 1) 5; 2) -7 sanyny goşmak netijesinde emele gelýän deňsizligi ýazyň.

187. $2a+3b > a-2b$ deňsizligiň iki bölegine-de: 1) $2b$; 2) $-a$ sany goşmak netijesinde emele gelýän deňsizligi ýazyň.

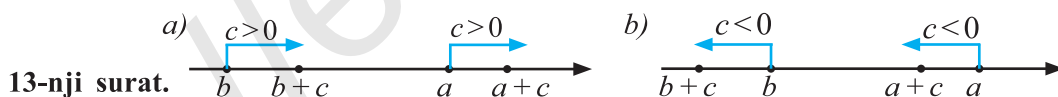
188. $3 > 1$ deňsizligiň iki böleginden hem: 1) 1; 2) -5 sanyny aýyrmak netijesinde emele gelýän deňsizligi ýazyň.

189. $a-2b < 3a+b$ deňsizligiň iki böleginden hem: 1) a ; 2) b sany aýyrmak netijesinde emele gelýän deňsizligi ýazyň.

190. $a < b$ bolsun. Aşakdaky sanlary deňeşdirin:

- 1) $a+x$ we $b+x$;
- 2) $a-5$ we $b-5$.

3) 13 we 14-nji suratlarda sanly deňsizligiň nähili häsiýetleri aňladylandygyny aýdyň.



14-nji surat.

Berlen deňsizligiň iki bölegini hem görkezilen sana köpeldiň **(191–192)**:

191. 1) $3,35 < 4,5$ -i 4-e; 2) $3,8 > 2,4$ -i 5-e;

3) $\frac{5}{6} > \frac{2}{3}$ -ni -12 -ä; 4) $\frac{3}{4} < \frac{7}{8}$ -ni -16 -a.

192. 1) $2a > 1$ -i $0,5$ -e; 2) $4a < -1$ -i $0,25$ -e;
3) $-4a < -3$ -i $0,25$ -e; 4) $-2a > -4$ -i $-0,5$ -e.

Berlen deňsizligiň iki bölegini hem görkezilen sana bölüň (193–194):

193. 1) $-2 < 5$ -i 2 -ä; 2) $4,5 > -10$ -i 5 -e;
3) $-25 > -30$ -y -5 ga; 4) $-20 < -12$ -i -4 -e;
194. 1) $1,2a < 4,8$ -i $1,2$ -ä; 2) $2,3a < -4,6$ -ny $2,3$ -e;
3) $-\frac{2}{3}x < -\frac{1}{4}$ -i $\frac{2}{3}$ -ä; 4) $-\frac{3}{4}x > \frac{1}{3}$ -i $-\frac{3}{4}$ -e.

13-§. DEŇSIZLIKLERI GOŞMAK WE KÖPELTMEK

Dürli meseleler çözülen mahalynda köplenç deňsizlikleri goşmaly ýa-da köpeltmeli, ýagny deňsizlikleriň çep böleklerini aýratyn we sag böleklerini aýratyn goşmaly ýa-da köpeltmeli bolýar. Şeýle ýagdaýlarda käte deňsizlikler agzama-agza goşulýar ýa-da agzama-agza köpeldilýär, diýilýär.

Meselem, eger syýahatçy birinji günü 20 km-dan köpräk, ikinji günü bolsa 25 km-dan köpräk ýoly geçen bolsa, onda ol iki günň içinde 45 km-dan köpräk ýol geçdi, diýip aýtmak mümkin.

Edil şeýle, eger gönüburçlugyň uzynlygy 13 cm-dan kem, ini 5 cm-dan kem bolsa, onda şu gönüburçlugyň meýdany 65 cm²-dan kem, diýip aýtmak mümkin.

Bu mysallara garanda *deňsizlikleri goşmak we köpeltmek baradaky aşakdaky teoremlar* ulanyldy.



1-nji teorema. *Birmeňzeş alamatly deňsizlikleri goşanda edil şu alamatly deňsizlik emele gelýär: eger $a > b$ we $c > d$ bolsa, onda $a + c > b + d$ bolýar.*

○ Şerte görä $a - b > 0$ we $c - d > 0$. Şu tapawudy garaýarys:

$$(a + c) - (b + d) = a + c - b - d = (a - b) + (c - d).$$

Položitel sanlaryň jemi položitel bolany üçin $(a+c)-(b+d)>0$, ýagny $a+c>b+d$. ●

Mysall ar :

$$\begin{array}{r} 1) \quad + \quad 3 > 2,5 \\ \quad \quad 5 > 4 \\ \hline \quad \quad 8 > 6,5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2) \quad + \quad 1,2 < 1,3 \\ \quad \quad -3 < -2 \\ \hline \quad \quad -1,8 < -0,7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3) \quad + \quad 4,8 > 2,3 \\ \quad \quad -1,2 > -1,3 \\ \hline \quad \quad 3,6 > 1 \end{array}$$



2-nji teorema. *Çep we sag bölekleri položitel bolan birmeňzeş alamatly deňsizlikleri köpeltmek netijesinde edil şu alamatly deňsizlik emele gelyär: eger $a>b$, $c>d$ we a, b, c, d – položitel sanlar bolsa, onda $ac>bd$ bolýar.*

○ Şu tapawudy garaýarys:

$$ac - bd = ac - bc + bc - bd = c(a - b) + b(c - d).$$

Şerte görä $a - b > 0$, $c - d > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Şonuň üçin $c(a - b) + b(c - d) > 0$, ýagny $ac - bd > 0$, mundan $ac > bd$. ●

M y s a l l a r :

$$\begin{array}{r} 1) \quad \times \quad 3,2 > 3,1 \\ \quad \quad 3 > 2 \\ \hline \quad \quad 9,6 > 6,2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2) \quad \times \quad 1,8 < 2,1 \\ \quad \quad 4 < 5 \\ \hline \quad \quad 7,2 < 10,5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3) \quad \times \quad 2,4 < 3,5 \\ \quad \quad 3 < 4 \\ \hline \quad \quad 7,2 < 14 \end{array}$$

1-nji mesele. Eger a, b – položitel sanlar we $a>b$ bolsa, onda $a^2>b^2$ bolýar.

△ $a>b$ deňsizligi öz-özüne köpeldip, aşakdakyny alarys: $a^2>b^2$. ▲

Şoňa meňzeş, a, b — položitel sanlar we $a>b$ bolsa, onda islendik natural n üçin $a^n>b^n$ bolýandygyny subut etmek mümkin.

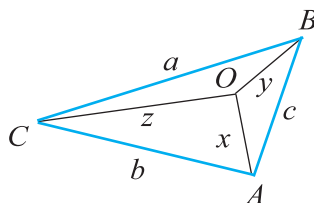
Meselem, $5>3$ deňsizlikden $5^5>3^5$, $5^7>3^7$ ýaly deňsizlikler gelip çykýar.

2-nji mesele. Üçburçlugyň içinde ýatýan islendik nokatdan onuň depelerine çenli bolan aralyklaryň jemi şu üçburçlugyň ýarym perimetrinden uludygyny subut ediň.

△ 15-nji surata garaýarys. x, y, z — ABC üçburçlugyň içki O nokadyndan onuň depelerine çenli bolan aralyklar bolsun.

AOB, AOC, BOC üçburçluklardan üçburçlugyň iki tarapyň jemi baradaky teorema görä:

$$\begin{aligned}x + y &> c, \\x + z &> b, \\y + z &> a.\end{aligned}$$



15-nji surat.

Bu deňsizlikleri agzama-agza goşup, $2x + 2y + 2z > a + b + c$ -ni alarys, mundan

$$x + y + z > \frac{a+b+c}{2}. \blacktriangle$$

Gönükmeler

195. (Ýatdan.) Dogrummy:

- 1) eger $x > 7$ we $y > 4$ bolsa, onda $x + y > 11$;
- 2) eger $x > 5$ we $y > 8$ bolsa, onda $xy < 40$;
- 3) eger $x < -7$ we $y < 7$ bolsa, onda $x + y < 0$;
- 4) eger $x < 2$ we $y < 5$ bolsa, onda $xy < 10$?

196. Deňsizlikleri goşuň:

- 1) $5 > -8$ we $8 > 5$;
- 2) $-8 < 2$ we $3 < 5$;
- 3) $3x + y < 2x + 1$ we $3y - 2x < 14 - 2a$;
- 4) $3x^2 + 2y > 4a - 2$ we $5y - 3x^2 > 3 - 4a$.

197. Deňsizlikleri köpeldiň:

- 1) $2\frac{2}{3} > 1\frac{1}{3}$ we $12 > 6$;
- 2) $6\frac{1}{4} < 9\frac{2}{3}$ we $4 < 6$;
- 3) $x - 2 > 1$ we $x + 2 > 4$;
- 4) $4 < 2x + 1$ we $3 < 2x - 1$.

198. Eger $a > 2$ we $b > 5$ bolsa, onda

- 1) $3a + 2b > 16$;
 - 2) $ab - 1 > 9$;
 - 3) $a^2 + b^2 > 29$;
 - 4) $a^3 + b^3 > 133$;
 - 5) $(a + b)^2 > 35$;
 - 6) $(a + b)^3 > 340$;
 - 7) $2a + 3b > 19$;
 - 8) $6ab - 5 > 55$;
 - 9) $ab(a + b) > 70$
- bolýandygyny subut ediň.

- 199.** Üçburçlugyň taraplary, degişlilikde, 73 cm, 1 m 15 cm we 1 m 11 cm dan kem. Onuň perimetriniň 3 m-dan kemdigini subut ediň.
- 200.** 4 sany umumy depder we 8 sany ýan depder satyn alyndy. Umumy depderiň nyrhy 200 somdan kem, ýan depderiňki bolsa 150 somdan kem. Ähli söwdanyň 2000 somdan kemligini görkeziň.
- 201.** Gönüburçlugyň bir tarapy 7 cm-dan uzyn, ikinji tarapy birinjisinden 3 esse uzyn. Gönüburçlugyň perimetriniň 56 cm-dan uzyndygyny subut ediň.
- 202.** Gönüburçluk şeklidäki bakjanyň uzynlygy ininden 5 esse uzyn, ini bolsa 4 m-dan uzyn. Bakjanyň meýdanynyň 80 m²-dan uludygyny subut ediň.
- 203.** Gönüburçlugyň içinde ýatýan islendik nokatdan onuň depelerine çenli bolan aralyklaryň jemi şu gönüburçlugyň ýarym perimetrinden uludygyny subut ediň.

Takyk we nätakyk deňsizlikler. $>$ (uly) we $<$ (kiçi) alamatly deňsizlikler *takyk deňsizlikler* diýilýär. Meselem, $\frac{5}{6} > \frac{1}{2}, \frac{3}{4} < 1, a > b, c < d$ – *takyk deňsizlikler*.

Takyk deňsizlikleriň $>$ we $<$ alamatlary bilen bir hatarda $\geq$ (uly ýa-da deň) we $\leq$ (kiçi ýa-da deň) alamatly deňsizliklerden hem peýdalanylýar. Olara *nätakyk deňsizlikler* diýilýär.

$a \leq b$ deňsizlik $a < b$ ýa-da $a = b$ bolýandygy, ýagny a san b -den uly dälligini aňladýar.

Meselem, eger samolýotdaky ýerleriň sany 134 sany bolsa, onda a ýolagçylaryň sany 134 sanydan kem ýa-da oňa deň bolmagy mümkin. Munda $a \leq 134$ ýaly ýazylyar.

Şoňa meňzeş, $a \geq b$ deňsizlik a san b -den uly ýa-da oňa deňdigini, ýagny a san b -den kiçi dälligini aňladýar.

$\geq$ alamaty ýa-da $\leq$ alamaty gatnaşýan deňsizliklere *nätakyk deňsizlikler* diýilýär. Meselem, $18 \geq 12, 11 \leq 12, 7 \geq 7, 4 \leq 4, a \geq b, c \leq d$ – *nätakyk deňsizlikler*.

Takyk deňsizlikleriň 12–13-§-larda aňladylan ähli häsiýetleri nätakyk deňsizlikler üçin hem ýerlikli. Munda, eger takyk deňsizlikler üçin $>$ we $<$ alamatlar garşylykly alamatlar diýlip hasaplanan bolsa, nätakyk deňsizlikler üçin $\geq$ we $\leq$ alamatlary garşylykly alamatlar diýlip hasaplanýar.

Meselem, 12-§-daky 2-nji teoremany nätakyk deňsizlikler üçin şeýle aňlatmak mümkin: eger $a \geq b$ bolsa, onda islendik c san üçin $a + c \geq b + c$ bolýar. Hakykatdan hem, $a > b$ bolan ýagdaý üçin bu teorema 12-§-da subut edilen, $a = b$ üçin bolsa bu tassyklama deňligiň bize mälim bolan häsiýetini aňladýar.

Mesele. Islendik a we b -ler üçin

$$a^2 + b^2 \geq 2ab \quad (1)$$

deňsizligiň dogrudygyny subut ediň.

△ $a^2 + b^2 - 2ab$ tapawut islendik a we b -ler üçin noldan kiçi dälligini subut edýäris. Hakykatdan hem, $a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 \geq 0$. Şeýlelikde, (1) deňsizlik a we b -leriň islendik bahalarynda dogry bolýar, şunuň bilen birlikde deňlik belgisi diňe $a = b$ bolanda ýerliklidir. ▲

Gönükmeler

204. n sanyň deňsizligi kanagatlandyryýan iň uly bitin bahasyny tapyň:

- | | | | |
|-------------------|--------------------|-----------------|----------------|
| 1) $n \leq -2$; | 2) $n \leq 3$; | 3) $n < 4$; | 4) $n < -5$; |
| 5) $n \leq 0,2$; | 6) $n \leq -0,3$; | 7) $n < -\pi$; | 8) $n < \pi$. |

205. n sanyň deňsizligi kanagatlandyryýan iň kiçi bitin bahasyny tapyň:

- | | | | |
|------------------|--------------------|-----------------------|------------------------|
| 1) $n \geq -3$; | 2) $n \geq 6$; | 3) $n \geq -6$; | 4) $n > -4$; |
| 5) $n > -4,21$; | 6) $n \geq 3,24$; | 7) $n \geq \pi - 1$; | 8) $n \geq -\pi + 1$. |

206. x sanyň deňsizligi kanagatlandyryýan iň uly bitin bahasyny tapyň:

- | | | | |
|------------------------------|-------------------------|--------------------------------|------------------------------|
| 1) $1) \frac{x}{6} \leq 1$; | 2) $\frac{x}{4} < -2$; | 3) $\frac{x}{10} \leq -3,14$; | 4) $\frac{x}{7} \leq 0,15$. |
|------------------------------|-------------------------|--------------------------------|------------------------------|

207. Deňsizlik belgilerinden peýdalanyp, ýazyň:

- 1) Bu gün Fergana jülgesinde (t °C) temperatura 20°C-dan ýokary däl.
- 2) Suw 5 m-dan kem bolmadyk (h m) beýiklige göterildi.
- 3) Normal basyşdaky suwuň suwuk halyndaky (t °C) temperaturasy 0°C-dan kem däl; 100 °C-dan artyk däl.

4) Şäherde awtomobil transportynyň (v km/h) hereket tizligi 70 km/h -dan uly däl.

208. $a \leq b$ bolsun. Deňsizlik dogrumy:

- 1) $a - 3 \leq b - 3$; 2) $5a \leq 5b$; 3) $a + 2,5 < b + 2,5$;
4) $a - 4 > b - 4$; 5) $a - 4 \leq b + 1$; 6) $a - 3,1 \leq b + 0,1$?

209. $a \geq b$ bolsun. Deňsizlik dogrumy:

- 1) $-2a > -2b$; 2) $-3a \leq -3b$; 3) $\frac{a}{12} \geq \frac{b}{12}$;
4) $\frac{a}{15} < \frac{b}{15}$; 5) $0,5a \geq 0,4b$; 6) $-2a \leq -b$?

14- §. SANLY DEŇSIZLIKLERI DEREJÄ GÖTERMEK

11-§-da çep we sag bölekleri položitel bolan birmeňzeş belgili deňsizlikleri agzama-agza köpeldende şu belgili deňsizligiň emele gelşi görkezilipdi.



Mundan, eger $a > b > 0$ we n natural san bolsa, onda $a^n > b^n$ bolýandygy gelip çykýar.

○ Şerte görä $a > 0$, $b > 0$. n sany birmeňzeş $a > b$ deňsizligi agzama-agza köpeldip, alarys: $a^n > b^n$. ●

1-nji mesele. $(0,43)^5$ we $\left(\frac{3}{7}\right)^5$ sanlaryny deňeşdiriň.

△ 0,001-e çenli takyklyk bilen $\frac{3}{7} \approx 0,428$ bolany üçin $0,43 > \frac{3}{7}$ bolýar.

Şonuň üçin $(0,43)^5 > \left(\frac{3}{7}\right)^5$. ▲



Çep we sag bölekleri položitel bolan deňsizligi islendik rasional derejä götermek mümkin:

eger $a > b > 0$, $r > 0$ bolsa, onda

$$a^r > b^r$$

(1)



bolýar;

eger $a > b > 0$, $r < 0$ bolsa, onda

$$a^r < b^r$$

(2)

bolýar.

1-nji häsiýeti subut edýäris.

○ Ilki (1) häsiýetiň $r = \frac{1}{n}$ bolanda dogrudygyny, soň bolsa umumy ýagdaý

üçin, $r = \frac{m}{n}$ bolanda dogrudygyny subut edýäris.

a) Aýdaly, $r = \frac{1}{n}$ bolsun, munda n —birden uly natural san, $a > 0$, $b > 0$.

Şerte görä $a > b$. $a^{\frac{1}{n}} > b^{\frac{1}{n}}$ bolýandygyny subut etmeli. Çak edeliň, bu nädogry, ýagny $a^{\frac{1}{n}} \leq b^{\frac{1}{n}}$ bolsun. Onda bu deňsizligi n natural derejä göterip, $a \leq b$ -ni alarys, bu bolsa $a > b$ şerte ters. Diýmek, $a > b > 0$ -dan $a^{\frac{1}{n}} > b^{\frac{1}{n}}$ bolýandygy gelip çykýar.

b) Aýdaly, $r = \frac{m}{n}$ bolsun, munda m we n — natural sanlar. Onda $a > b > 0$

şertden, subut edenimize görä $a^{\frac{1}{n}} > b^{\frac{1}{n}}$ bolýandygy gelip çykýar. Bu deňsizligi m natural derejä göterip, alarys:

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m > \left(b^{\frac{1}{n}}\right)^m, \text{ ýagny } a^{\frac{m}{n}} > b^{\frac{m}{n}}. \bullet$$

Meselem, $5^{\frac{2}{7}} > 3^{\frac{2}{7}}$, çünki $5 > 3$; $2^{\frac{3}{4}} < 4^{\frac{3}{4}}$, çünki $2 < 4$; $\sqrt[5]{7^2} > \sqrt[5]{6^2}$, çünki $7 > 6$.

Indi (2) häsiýeti subut edýäris.

○ Eger $r < 0$ bolsa, onda $-r > 0$ bolýar. (1) häsiýete görä $a > b > 0$ şertden $a^{-r} > b^{-r}$ bolýandygy gelip çykýar. Bu deňsizligiň iki bölegini hem položitel $a^r b^r$ sana köpeldip, $b^r > a^r$ -i alarys, ýagny $a^r < b^r$. $\bullet$

Meselem, $(0,7)^{-8} < (0,6)^{-8}$, çünki $0,7 > 0,6$; $13^{-0,6} > 15^{-0,6}$, çünki $13 < 15$; $\sqrt[4]{8^{-3}} < \sqrt[4]{7^{-3}}$, çünki $8 > 7$.

Yokary matematika kursunda (1) hāsīyet islendik položitel r hakyky san üçin, (2) hāsīyet bolsa islendik otrisatel r hakyky san üçin dogry bolýandygy subut edilýär. Meselem,

$$\left(\frac{8}{9}\right)^{\sqrt{2}} > \left(\frac{7}{8}\right)^{\sqrt{2}}, \text{ çünki } \frac{8}{9} > \frac{7}{8}; \quad \left(\frac{7}{8}\right)^{-\sqrt{3}} < \left(\frac{6}{7}\right)^{-\sqrt{3}}, \text{ çünki } \frac{7}{8} > \frac{6}{7}.$$

Takyk deňsizlikleri ($>$ ýa-da $<$ belgili) derejä götermegiň garap geçilen hāsīyetleri nätakyk deňsizlikler ($\geq$ ýa-da $\leq$ belgili) üçin hem dogry bolýandygyny nygtap geçýäris.



Şeýdip, eger deňsizligiň iki bölegi-de položitel bolsa, onda ony položitel derejä göterende deňsizlik belgisi saklanýar, otrisatel derejä göterende bolsa deňsizlik belgisi garşylyklysyna üýtgeýär.

Takyk deňsizlikler üçin $>$ we $<$ belgileri, nätakyk deňsizlikler üçin bolsa $\geq$ we $\leq$ belgileri garşylykly belgiler bolýandygyny ýatladyp geçýäris.

2-nji mesele. Sanlary deňeşdirin:

$$1) \left(\frac{17}{18}\right)^{-\frac{1}{3}} \text{ we } \left(\frac{18}{17}\right)^{-\frac{1}{3}}; \quad 2) \left(\frac{6}{7}\right)^{\sqrt{2}} \text{ we } (0,86)^{\sqrt{2}}.$$

$$\triangle 1) \frac{17}{18} < 1 \text{ we } \frac{18}{17} > 1 \text{ bolany üçin } \frac{17}{18} < \frac{18}{17} \text{ bolýar.}$$

$$\text{Bu deňsizligi otrisatel } \left(-\frac{1}{3}\right) \text{ derejä göterip, alarys: } \left(\frac{17}{18}\right)^{-\frac{1}{3}} > \left(\frac{18}{17}\right)^{-\frac{1}{3}}.$$

2) Derejeleriň esaslaryny deňeşdirýäris. $\frac{6}{7} = 0,857\dots$ bolany üçin $\frac{6}{7} < 0,86$ bolýar. Bu deňsizligi položitel $\sqrt{2}$ derejä göterip, aşakdakyny alarys:

$$\left(\frac{6}{7}\right)^{\sqrt{2}} < 0,86^{\sqrt{2}}. \blacktriangle$$

3-nji mesele. Deňlemäni çözüň: $10^x = 1$.

$\triangle x = 0$ san bu deňlemäniň köki bolýar, çünki $10^0 = 1$. Başga kökleri ýokdugyny görkezýäris.

Berlen deňlemäni $10^x = 1^x$ görnüşinde ýazýarys.

Eger $x > 0$ bolsa, onda $10^x > 1^x$ we, diýmek, deňleme položitel köklere eýe däl.

Eger $x < 0$ bolsa, onda $10^x < 1^x$ we, diýmek, deňleme otrisatel köklere eýe däl.

Şeýdip, $x = 0$ berlen $10^x = 1$ deňlemäniň ýeke-täk köki eken. ▲

Şoňa meňzeş, $a^x = 1$ ($a > 0$, $a \neq 1$) deňleme ýeke-täk $x = 0$ köke eýe bolýandygy subut edilýär. Mundan,

$$a^x = a^y \quad (3)$$

deňlik diňe $x = y$ bolanda dogry bolýandygy gelip çykýar, bu ýerde $a > 0$, $a \neq 1$.

○ (3) deňligi a^{-y} -e köpeldip, $a^{x-y} = 1$ -i alarys, mundan $x = y$. ●

4-nji mesele. $3^{2x-1} = 9$ deňlemäni çözüň.

△ $3^{2x-1} = 3^2$, mundan $2x - 1 = 2$, $x = 1,5$. ▲

$a^x = b$ deňlemäni garaýarys, munda $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$.

Bu deňleme ýeke-täk x_0 köke eýe bolýandygyny subut etmek mümkin. x_0 san a esas boýunça b sanyň logarifmi diýilýär we $\log_a b$ ýaly belgilenýär.

Meselem, $3^x = 9$ deňlemäniň köki 2 sany bolýar, ýagny $\log_3 9 = 2$. Edil şeýle,

$\log_2 16 = 4$, çünki $2^4 = 16$, $\log_5 \frac{1}{5} = -1$, çünki $5^{-1} = \frac{1}{5}$; $\log_{\frac{1}{3}} 27 = -3$, çünki

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 27.$$

b sanyň 10 esasa görä logarifme onluk logarifm diýilýär we $\lg b$ ýaly belgilenýär. Meselem, $\lg 100 = 2$, çünki $10^2 = 100$; $\lg 0,001 = -3$, çünki $10^{-3} = 0,001$.

Gönükmeler

210. (Ýatdan). Sanlary deňeşdiriň:

$$1) 2^{\frac{1}{3}} \text{ we } 3^{\frac{1}{3}}; \quad 2) 5^{-\frac{4}{5}} \text{ we } 3^{-\frac{4}{5}}; \quad 3) 5^{\sqrt{3}} \text{ we } 7^{\sqrt{3}}; \quad 4) 21^{-\sqrt{2}} \text{ we } 31^{-\sqrt{2}}.$$

211. Sanlary deňşdiriň:

$$1) (0,88)^{\frac{1}{6}} \text{ we } \left(\frac{6}{11}\right)^{\frac{1}{6}};$$

$$2) \left(\frac{5}{12}\right)^{-\frac{1}{4}} \text{ we } (0,41)^{-\frac{1}{4}};$$

$$3) (4,09)^{\frac{3}{2}} \text{ we } \left(4\frac{3}{25}\right)^{\frac{3}{2}};$$

$$4) \left(\frac{11}{12}\right)^{-\sqrt{5}} \text{ we } \left(\frac{12}{13}\right)^{-\sqrt{5}}.$$

212. Deňlemeleri çözüň:

$$1) 6^{2x} = 6^{\frac{1}{5}};$$

$$2) 3^x = 27;$$

$$3) 7^{1-3x} = 7^{10};$$

$$4) 2^{2x+1} = 32;$$

$$5) 4^{2+x} = 1;$$

$$6) \left(\frac{1}{5}\right)^{4x-3} = 5.$$

213. Sanlary deňşdiriň:

$$1) \sqrt[7]{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)^2} \text{ we } \sqrt[7]{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)^2};$$

$$2) \sqrt[5]{\left(1\frac{1}{4} - 1\frac{1}{5}\right)^3} \text{ we } \sqrt[5]{\left(1\frac{1}{6} - 1\frac{1}{7}\right)^3}.$$

Deňlemäni çözüň (**214–216**):

214. 1) $3^{2-y} = 27;$

2) $3^{5-2x} = 1;$

3) $9^{\frac{1}{2}x-1} - 3 = 0;$

4) $27^{3-\frac{1}{3}y} - 81 = 0.$

215. 1) $\left(\frac{1}{9}\right)^{2x-5} = 3^{5x-8};$

2) $2^{4x-9} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-4};$

3) $8^x 4^{x+13} = \frac{1}{16};$

4) $\frac{25^{x-2}}{\sqrt{5}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-7,5};$

5) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-4} = 2^{x+2};$

6) $3^x \cdot 9^{x-1} = \frac{1}{27}.$

216. 1) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2x+1} = (3\sqrt{3})^x;$

2) $(\sqrt[3]{2})^{x-1} = \left(\frac{2}{\sqrt[3]{2}}\right)^{2x};$

3) $9^{3x+4} \sqrt{3} = \frac{27^{x-1}}{\sqrt{3}};$

4) $\frac{8}{(\sqrt{2})^x} = 4^{3x-2} \sqrt{2}.$

217. Hasaplaň:

1) $\log_7 49;$

2) $\log_2 64;$

3) $\log_{\frac{1}{2}} 4;$

4) $\log_3 \frac{1}{27};$

5) $\log_7 \frac{1}{7}.$

218. Deňlemäni çözüň:

$$\begin{array}{lll} 1) 7^{5x-1}=49; & 2) (0,2)^{1-x}=0,04; & 3) \left(\frac{1}{3}\right)^{3x+3}=3^{2x}; \\ 4) 3^{5x-7}=\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}; & 5) (0,3)^{2-3x}=0,027; & 6) \left(\frac{1}{6}\right)^{2x-3}=6^x. \end{array}$$

15-§. BIR NÄBELLILI DEŇSIZLIKLER

1-nji mesele. Iki şäherden bir wagtda bir-birlerine tarap iki otly bir-meñzeş hemişelik tizlik bilen ugrady. Hereket başlanandan 2 sagat soň olar geçen aralyklarynyň jemi 200 km-dan kem bolmazlygy üçin otlular nähili tizlik bilen hereketlenmeli?

△ Sagadyna x km – otlularyň hereketiniň gözlenýän tizligi bolsun. Iki sagatda otlulardan her biri $2x$ kilometr ýol geçýär. Meseläniň şertine görä otlularyň 2 sagatda geçen aralyklarynyň jemi 200 km-dan kem bolmaly däl:

$$2x + 2x \geq 200.$$

Mundan $4x \geq 200, x \geq 50$.

Jogaby: her bir otlynyň hereket tizligi 50 km/h-dan kem bolmaly däldir.

▲ $4x \geq 200$ deňsizlikde x harpy bilen näbelli san belgilenen. Bu *bir näbellili çyzykly deňsizlige mysaldyr*.

Şu

$$ax > b, ax < b, ax \geq b, ax \leq b$$

deňsizliklere bir näbellili çyzykly deňsizlikler diýilýär, munda a we b – berlen sanlar, x bolsa näbelli.

Köp, meselem,

$$4(3-x) > 5 + 2x, \quad \frac{x-3}{2} \leq \frac{x-2}{3}, \quad 1 - \frac{x}{2} < 3(x+4)$$

ýaly deňsizlikler bir näbellili çyzykly deňsizliklere getirilýär.

Deňsizlik alamatynyň çep we sag taraplarynda duran aňlatmalara *deňsizligiň çep we sag bölekleri* diýilýär. Deňsizligiň çep we sag böleklerindäki her bir goşulyja *deňsizligiň agzasy* diýilýär.

Meselem, $2x - 5 \geq 4 + 3x$ deñsizlikde $2x - 5$ – çep bölek, $4 + 3x$ – sag bölek, $2x$, -5 , 4 we $3x$ – deñsizligiñ agzalary.

Eger meselede alnan $2x + 2x \geq 200$ deñsizlige $x = 50$, $x = 51$, $x = 60$ -y goýsak, onda dogry sanly deñsizlikler emele gelýär:

$$2 \cdot 50 + 2 \cdot 50 \geq 200; \quad 2 \cdot 51 + 2 \cdot 51 \geq 200;$$

$$2 \cdot 60 + 2 \cdot 60 \geq 200.$$

50, 51, 60 sanlarynyñ her birine $2x + 2x \geq 200$ deñsizligiñ çözüwi diýilýär.



*Bir näbellili **deñsizligiñ çözüwi** diýip, näbelliniñ şu deñsizligi dogry sanly deñsizlige öwürýän bahasyňa aýdylýar.*

***Deñsizligi çözmek** onuñ hemme çözüwlerini tapmak ýa-da olaryñ ýokdugyny anyklamak diýmekdir.*

Deñsizlikdäki näbelli san islendik harp bilen belgilenmegi mümkin. Meselem, şu

$$3(y - 5) < 2(4 - y), \quad 2t - 1 \geq 4(t + 3), \quad 5 - \frac{z}{2} > \frac{z}{3} - 4$$

deñsizliklerde näbelliler, degişlilikde, y , t , z harplary bilen belgilenen.

Deñsizlikleri çözmäge mysallar getirýäris.

2-nji mesele. Deñsizligi çözüň:

$$x + 1 > 7 - 2x.$$

$\triangle$ x san berlen deñsizligiñ çözüwi, ýagny x san $x + 1 > 7 - 2x$ deñsizligi dogry deñsizlige öwürýär, diýip çak edýäris.

$-2x$ agzany deñsizligiñ sag böleginden çep bölegine onuñ alamatyny garşylyklysyna üýtgetmek bilen geçirýäris, 1 sanyny bolsa deñsizligiñ sag bölegine „-“ alamaty bilen geçirýäris.

Netijede şu

$$x + 2x > 7 - 1$$

dogry deñsizligi alarys.

Bu deñsizligiñ iki böleginde-de meñzeş agzalaryny toparlaýarys:

$$3x > 6.$$

Indi deňsizligiň iki bölegini hem 3-e bölüp,

$$x > 2$$

bolýandygyny tapýarys.

Şeýdip, x -i berlen deňsizligiň çözüwi, diýip çak edip, biz $x > 2$ -ni aldyk. x -iň 2-den uly islendik bahasy deňsizligiň çözüwi bolýandygyna göz ýetirmek üçin ähli pikir ýöretmeleri ters tertipde alyp barmak ýeterli.

Aýdaly, $x > 2$ bolsun. Dogry sanly deňsizlikleriň häsiýetlerini ulanyp, yzygider aşakdakylary alarys:

$$\begin{aligned} 3x &> 6, \\ x + 2x &> 7 - 1, \\ x + 1 &> 7 - 2x. \end{aligned}$$

Şeýlelikde, 2-den uly islendik x san berlen deňsizligiň çözüwi bolýar.

Jogaby: $x > 2$. ▲

Deňsizligiň çözülişini ýazanda düşündirişleri jikme-jik getirmek hökman däl. Meselem, 1-nji meseläniň çözülişini şeýle ýazmak mümkin:

$$\begin{aligned} x + 1 &> 7 - 2x, \\ 3x &> 6, \\ x &> 2. \end{aligned}$$

Şeýdip, deňsizligi çözende onuň aşakdaky esasy häsiýetlerinden peýdalanýlar:



1-nji häsiýet. *Deňsizligiň islendik agzasyny onuň bir böleginden ikinji bölegine, şu agzanyň alamatyny garşylyklysyna üýtgetmek bilen geçirmek mümkin, munda deňsizligiň alamaty üýtgemeyär.*



2-nji häsiýet. *Deňsizligiň iki bölegini hem nola deň bolmadyk sol bir sana köpeltmek ýa-da bölmek mümkin; eger bu san položitel bolsa, onda deňsizlik alamaty üýtgemeyär, eger bu san otrisatel bolsa, onda deňsizligiň alamaty garşylyklysyna üýtgeýär.*

Bu hăsiyetler berlen deňsizligi başga, edil şeýle çözüwlere eýe bolan deňsizlik bilen çalşyrmaga mümkinçilik berýär.

Çyzykly deňsizlige getirilýän bir näbellili deňsizlikleri çözmek üçin:

1) näbelli gatnaşýan agzalary çep tarapa, näbelli gatnaşmadyk (azat) agzalary bolsa sag tarapa geçirmek (1-nji hăsiyet);

2) meňzeş agzalary toparlap, deňsizligiň iki bölegini hem näbelliniň önündäki koeffisiýente (eger ol nola deň bolmasa) bölmeli (2-nji hăsiyet).

3-nji mesele. Deňsizligi çözüň:

$$3(x-2)-4(x+1)<2(x-3)-2.$$

△ Deňsizligiň çep we sag böleklerini ýönekeýleşdirýäris. Ýaýlary açýarys:

$$3x-6-4x-4<2x-6-2.$$

Näbelli gatnaşýan agzalary deňsizligiň çep bölegine, näbelli gatnaşmadyk (azat) agzalary bolsa sag bölegine alyp geçýäris (1-nji hăsiyet):

$$3x-4x-2x<6+4-6-2.$$

Meňzeş agzalary toparlaýarys:

$$-3x<2$$

we deňsizligiň iki bölegini hem -3 -e bölýäris (2-nji hăsiyet):

$$x>-\frac{2}{3}.$$

Jogaby: $x>-\frac{2}{3}$. ▲

Bu çözülişini gysgaça şeýle ýazmak mümkin:

$$3(x-2)-4(x+1)<2(x-3)-2,$$

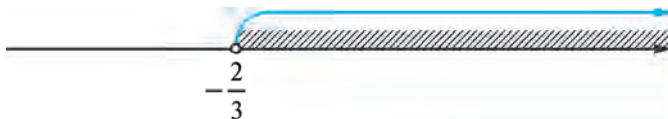
$$3x-6-4x-4<2x-6-2,$$

$$-x-10<2x-8,$$

$$-3x<2,$$

$$x>-\frac{2}{3}.$$

$x > -\frac{2}{3}$ deňsizligi kanagatlandyrýan x sanlar toplumy san okunda *şöhle* bilen şekillendirilýär (16-njy surat). $x = -\frac{2}{3}$ nokat bu *şöhlä* degişli däl, 16-njy suratda ol *ak tegelejik* bilen, *şöhle* bolsa ýapgyt çyzyjaklar bilen jäheklenen. x sanlaryň, meselem, $x \geq 2$ deňsizligi kanagatlandyrýan toplumyna hem *şöhle* diýilýär. $x = 2$ nokat şu *şöhlä* degişli. 17-nji suratda bu nokat *gara tegelejik* bilen şekillendirilen.



16-njy surat.



17-nji surat.

4-nji mesele. Deňsizligi çözüň:

$$\frac{x-5}{6} + 1 \geq \frac{5x}{2} - \frac{x-3}{3}.$$

△ Deňsizligiň iki bölegini hem 6-a köpeldýäris:

$$6 \cdot \frac{x-5}{6} + 6 \cdot 1 \geq 6 \cdot \frac{5x}{2} - 6 \cdot \frac{x-3}{3},$$

$$(x-5) + 6 \geq 15x - 2(x-3).$$

Ýaýlary açýarys we meňzeş agzalary toparlaýarys:

$$x - 5 + 6 \geq 15x - 2x + 6,$$

$$x + 1 \geq 13x + 6,$$

mundan

$$-12x \geq 5, \quad x \leq -\frac{5}{12}. \quad \blacktriangle$$

Bu deňsizligiň çözüwleriniň toplumy, ýagny $x \leq -\frac{5}{12}$ sanlar toplumy 18-nji suratda şekillendirilen.



18-nji surat.

Garalan mysallarda deňsizlikler yönekeyleşdirilenden soň näbelliniň öňünde duran koeffisiýent nola deň bolmadyk çyzykly deňsizlige getirildi. Kābir ýagdaýlarda bu koeffisiýent nola deň bolmagy mümkin.

Şeýle deňsizliklere mysallar getirýäris.

5-nji mesele. Deňsizligi çözüň:

$$2(x + 1) + 5 > 3 - (1 - 2x).$$

△ Deňsizligiň iki bölegini hem yönekeyleşdirýäris:

$$2x + 2 + 5 > 3 - 1 + 2x,$$

$$2x + 7 > 2 + 2x,$$

mundan

$$2x - 2x > 2 - 7,$$

$$0 \cdot x > -5.$$

Ahyrky deňsizlik x -iň islendik bahasynda dogry bolýar, çünki onuň çep bölegi islendik x -de nola deň hem-de $0 > -5$. Diýmek, x -iň islendik bahasy berlen deňsizligiň çözüwi bolýar.

Jogaby: x – islendik san. ▲

6-njy mesele. Deňsizligi çözüň:

$$3(2 - x) - 2 > 5 - 3x.$$

△ Deňsizligiň çep bölegini yönekeyleşdirýäris:

$$6 - 3x - 2 > 5 - 3x,$$

$$4 - 3x > 5 - 3x,$$

mundan

$$-3x + 3x > 5 - 4,$$

$$0 \cdot x > 1.$$

Ahyrky deňsizlik çözüwe eýe däl, çünki deňsizligiň çep bölegi x -iň islendik bahasynda nola deň hem-de $0 > 1$ deňsizlik nädogry. Diýmek, berlen deňsizlik çözüwe eýe däl.

Jogaby: çözüwleri ýok. ▲

Gönukmeler

219. Tassyklamany deňsizlik görnüşinde ýazyň:

- 1) x we 17 sanlaryň jemi 18-den uly;
- 2) 13 we x sanlaryň tapawudy 2-den kiçi;
- 3) 17 we x sanlaryň köpeltmek hasyly 3-den kiçi däl;
- 4) x we -3 sanlaryň jeminiň ikeldileni 2-den uly däl;
- 5) x we 3 sanlaryň jeminiň ýarysy olaryň köpeltmek hasylyndan uly däl;
- 6) x we -4 sanlaryň köpeltmek hasylynyň ikeldileni olaryň tapawudyndan kiçi däl.

220. 10, $\frac{1}{2}$, 0, -1 sanlaryndan haýсылary deňsizligiň çözüwi bolýar:

- 1) $3x + 4 > 2$; 2) $3x + 4 \leq x$; 3) $\frac{1}{2}x - 3 > \leq 1 - x$;
- 4) $3 - x \geq \frac{1}{2}x$; 5) $0,8x + 5 > 7$; 6) $0,2x - 4 \leq -2$?

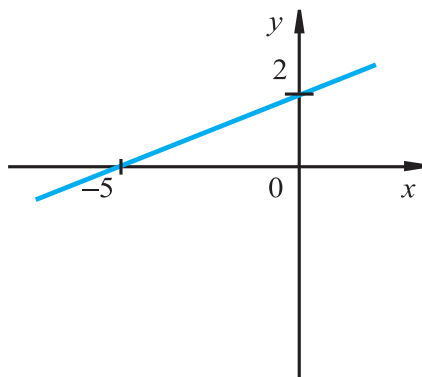
221. y -iň nähili bahalarynda deňsizlik dogry bolýar:

- 1) $-2y > 0$; 2) $-3y < 0$; 3) $y^2 + 1 \geq 0$;
- 4) $2y^2 + 3 \leq 0$; 5) $(y - 1)^2 \leq 0$; 6) $(y + 2)^2 \geq 0$?

222. 19-njy suratda $y = kx + b$ çyzykly funksiýanyň grafigi şekillendirilen.

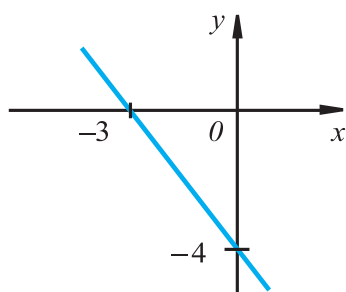
- 1) $x \geq 0$; 2) $x < 0$;
- 3) $x > -5$; 4) $x \leq -5$

bolanda y nähili bahalar kabul edýändigini deňsizligiň kömeginde ýazyň.



19-njy surat.

223. 20-nji suratda $y = kx + b$ çyzykly funksiýanyň grafigi şekillendirilen. x -iň nähili bahalarynda y funksiýanyň bahalary: 1) položitel; 2) otrisatel däl; 3) otrisatel; 4) -4 -den kiçi; 5) -4 -den kiçi däl; 6) -4 -den uly bolýandygyny deňsizligiň kömeginde ýazyň.



20-nji surat.

224. Funksiýanyň grafigini gurun we grafik boýunça x -iň nähili bahalarynda funksiýa: 1) položitel; 2) otrisatel; 3) nola deň; 4) 1-den uly; 5) 1-den kiçi bahalary kabul edýändigini tapyň:

- | | |
|--------------------|--------------------|
| 1) $y = 2x + 4$; | 2) $y = 3x - 9$; |
| 3) $y = -2x - 8$; | 4) $y = -3x + 6$. |

Deňsizligi çözüň (**225–226**):

- 225.** 1) $x + 2 \geq 15$; 2) $x - 6 < 8$; 3) $3 \leq y + 6$;
 4) $-4 > 5 - y$; 5) $2z \geq z - 7$; 6) $3z \leq 2z + 4$.
- 226.** 1) $12x > -36$; 2) $-7x \leq 56$; 3) $\frac{y}{4} \leq 7$;
 4) $-5 < \frac{z}{3}$; 5) $7,2z > -27$; 6) $-4,5x \geq 9$.

Deňsizligi çözüň we onuň çözüwleriniň toplumyny san okunda şekillendirin (**227–228**):

- 227.** 1) $2x - 16 > 0$; 2) $18 - 3x > 0$; 3) $3x - 15 < 0$;
 4) $25 - 5x < 0$; 5) $9 - 3x \geq 0$; 6) $2x + 4 \leq 0$;
 7) $6 - 2x \leq 0$; 8) $1,8 + 3x \geq 0$; 9) $-4x + 2 \leq 0$.
- 228.** 1) $3(x + 1) \leq x + 5$; 2) $4(x - 1) \geq 5 + x$;
 3) $2(x - 3) + 4 < x - 2$; 4) $x + 2 < 3(x + 2) - 4$;
 5) $\frac{x-1}{3} \geq \frac{3x-3}{5}$; 6) $\frac{3x-2}{4} \geq \frac{2x-1}{3}$.

229. x -iň nähili bahalarynda aňlatma položitel bolýandygyny anyklaň:

- | | | |
|-------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| 1) $\frac{3}{8}x + 4$; | 2) $\frac{5}{2} - 4x$; | 3) $2(x + 3) + 3x$; |
| 4) $3(x - 5) - 8x$; | 5) $\frac{1}{3} - 2(x + 4)$; | 6) $\frac{1}{2} - 3(x - 5)$. |

230. y -in nähili bahalarynda aňlatma otrisatel bolýandygyny anyklaň:

- 1) $5 - \frac{2}{3}y$; 2) $\frac{3}{4} - 2y$; 3) $\frac{y-2}{3} + \frac{1}{3}$;
 4) $\frac{8y-3}{5} - \frac{2}{5}$; 5) $\frac{3y-5}{2} - \frac{y}{2}$; 6) $\frac{4-5y}{6} - \frac{y}{6}$.

231. Deňsizligiň çözüwi bolýan in kiçi bitin sany tapyň:

- 1) $4(y-1) < 2 + 7y$;
 2) $4y - 9 \geq 3(y-2)$;
 3) $3(x-2) - 2x < 4x + 1$;
 4) $6x + 1 \geq 2(x-1) - 3x$.

232. Deňsizligiň çözüwi bolýan in uly bitin sany tapyň:

- 1) $5 - 2x > 0$; 2) $6x + 5 \leq 0$;
 3) $3(1-x) > 2(2-x)$; 4) $4(2-x) < 5(1-x)$.

233. 1) a -nyň nähili bahalarynda $\frac{a}{3}$ drob $\frac{a+1}{4}$ drobdan uly bolýar?

2) b -niň nähili bahalarynda $\frac{b+3}{2}$ drob $\frac{b-1}{5}$ drobdan kiçi bolýar?

3) x -in nähili bahalarynda $\frac{3x-5}{6}$ drob $\frac{6x-7}{15}$ va $\frac{3-x}{9}$ droblaryň tapawudundan uly bolýar?

4) x -in nähili bahalarynda $\frac{2-5x}{4}$ we $\frac{7x-3}{6}$ droblaryň jemi $\frac{2x+5}{18}$ drobdan kiçi bolýar?

Deňsizligi çözüň (**234–236**):

234. 1) $3(x-2) + x < 4x + 1$; 2) $5(x+2) - x > 3(x-1) + x$;

3) $\frac{3x+6}{4} - \frac{x}{4} > \frac{x+2}{2}$; 4) $\frac{2x-1}{5} - 4 < x - \frac{3x+1}{5}$.

- 235.** 1) $5(x+2) + 2(x-3) < 3(x-1) + 4x$;
 2) $3(2x-1) + 3(x-1) > 5(x+2) + 2(2x-3)$;
 3) $\frac{5x+3}{2} - 1 \geq 3x - \frac{x-7}{2}$; 5) $\frac{3x+2}{4} - 1 \leq 2x + \frac{x-5}{2}$;
 4) $2 - \frac{x-4}{3} \leq 2x - \frac{7x-4}{3}$; 6) $3 - \frac{x-1}{2} \geq 3x - \frac{5x-3}{3}$.
- 236.** 1) $\frac{2}{3x+6} < 0$; 2) $\frac{3}{2x-4} > 0$; 3) $\frac{-1,7}{0,5x-2} > 0$;
 4) $\frac{-2,3}{0,4x+8} < 0$; 5) $\frac{-1,7}{2,1+6,3x} < 0$; 6) $\frac{-3,8}{3,2-6,4x} > 0$.
- 237.** x -in nāhili bahalarynda $y=2,5x-4$ funksiýanyň bahasy: 1) položitel; 2) otrisatel; 3) 1-den uly; 4) -4 -den kiçi?
- 238.** x -in nāhili bahalarynda $y=3,5-0,5x$ funksiýanyň bahasy: 1) položitel; 2) otrisatel däl; 3) $3,5$ -den uly däl; 4) 1-den kiçi däl?
- 239.** $y=3-2x$ funksiýanyň grafigini guruň. Grafigiň kömeginde x -in grafigiň nokatlary: 1) abssissalar okundan ýokarda; 2) $y=2$ göni çyzykdan ýokarda; 3) abssissalar okundan pesde; 4) $y=4$ göni çyzykdan pesde ýerleşýän bahalaryny tapyň.
 Netijeleri degişli deňsizlikleri çözmek bilen barlaň.
- 240.** Ussalar plan boýunça 40 sany bişik taýýarlamaly. Olar plany 10%-den köpräk artyk ýerine ýetirmekleri üçin näçe bişik taýýarlamaly?

16- §. BIR NÄBELLILI DEŇSIZLIKLER SISTEMALARY. SANLY ARALYKLAR

1. Deňsizlikler sistemalary.

Mesele. Sygymy 4000 l bolan boş howuz suw bilen doldurylyp başlandy. Howzuň 4 sagatdan soň ýarysyndan köprügi dolmagy we 5 sagatdan soň ol bütinleý dolup daşyp gitmezligi üçin howza sagadyna näçe litrden suw guýmaly?

△ x litr — howza 1 sagadyň içinde guýulýan suwuň mukdary bolsun. Meseläniň şertine göre $4x > 2000$, $5x \leq 4000$.

Birinji deňsizlikden $x > 500$, ikinji deňsizlikden bolsa $x \leq 800$ gelip çykýar.

Jogaby: howza sagadyna 500 l -den köp, ýöne 800 l -den köp bolmadyk göwürümde suw guýmaly. ▲

$4x > 2000$ we $5x \leq 4000$ deňsizliklerdäki näbelli san şol birmeňzeş x sanydyr. Şonuň üçin bu deňsizlikler bilelikde garalýar we olara *deňsizlikler sistemasyny* düzýär, diýilýär:

$$\begin{cases} 4x > 2000, \\ 5x \leq 4000. \end{cases} \quad (1)$$

Uly ýaý x -iň (1) sistemanyň iki deňsizligini hem dogry sanly deňsizlige öwürýän bahalaryny tapmalydygyny aňladýar.

(1) sistema *bir näbellili çyzykly deňsizlikler sistemasyna* mysaldyr.

Ýene çyzykly deňsizlikler sistemasyna getirilýän bir näbellili deňsizlikler sistemalaryna mysallar getirýäris:

$$\begin{cases} 3(x+1) > 5, \\ 4(x-1) > x-2; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x-1 \geq 3x, \\ 5(x-1) \leq 8, \\ x-1 > 5. \end{cases}$$



Bir näbellili deňsizlikler sistemasynyň çözüwi diýip, näbelliniň sistemanyň deňsizlikleriniň ählisini dogry sanly deňsizliklere öwürýän bahasyna aýdylýar.

Deňsizlikler sistemasyny çözmek — onuň ähli çözüwlerini tapmak ýa-da olaryň ýokdugyny anyklamak diýmekdir.

Meselem, $x=1$ şu

$$\begin{cases} 2x \geq -4, \\ 3x \leq 9 \end{cases} \quad (2)$$

sistemanyň çözüwi bolýar, çünki $x=1$ bolanda (2) sistemanyň iki deňsizligi hem dogry bolýar:

$$\begin{cases} 2 \cdot 1 \geq -4, \\ 3 \cdot 1 \leq 9. \end{cases}$$

(2) sistemanyň birinji deňsizliginiň iki bölegini hem 2-ä, ikinji deňsizliginiň iki bölegini hem bolsa 3-e bölüp,

$$\begin{cases} x \geq -2, \\ x \leq 3 \end{cases}$$

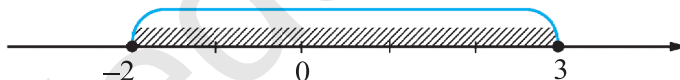
-i alarys. Diýmek, (2) sistemanyň çözüwleri x -iň -2 -den kiçi bolmadyk we 3 -den uly bolmadyk ähli bahalaryndan ybarat bolýar.

$x \geq -2$ we $x \leq 3$ deňsizlikleri *goşa deňsizlik* görnüşinde ýazmak mümkin:
 $-2 \leq x \leq 3$.

2. Sanly aralyklar.

Bir näbellili deňsizlikler sistemalarynyň çözüwleri dürli sanly toplumlar bolýar. Bu toplumlar özleriniň atlaryna eýe.

Meselem, san okunda x -iň $-2 \leq x \leq 3$ bolýan san bahalary toplумы ahylary -2 we 3 nokatlarda bolan kesim bilen şekillendirilýär (21-nji surat).



21-nji surat.

Şonuň üçin $-2 \leq x \leq 3$ deňsizligi kanagatlandyryýan x sanlar toplумы kesim diýip atlandyrylýar we $[-2; 3]$ ýaly belgilenýär.



*Eger $a < b$ bolsa, onda $a \leq x \leq b$ deňsizligi kanagatlandyryýan x sanlar toplумы **kesim** diýilýär we $[a; b]$ ýaly belgilenýär.*

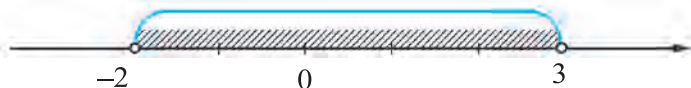
Meselem, $[4; 7]$ kesim – şu $4 \leq x \leq 7$ deňsizligi kanagatlandyryýan x sanlar toplумы.

$2 < x < 7$, $-1 \leq x < 2$, $4 < x \leq 7$ görnüşindäki deňsizlikleri kanagatlandyryýan sanlar toplумы üçin hem aýratyn adalgalar girizilýär.



Eger $a < b$ bolsa, onda $a < x < b$ deňsizligi kanagatlandyrýan x sanlar toplumyna **interwal** diýilýär we $(a; b)$ ýaly belgilenýär.

Meselem, $(-2; 3)$ interwal — şu $-2 < x < 3$ deňsizligi kanagatlandyrýan x sanlar toplumu (22-nji surat).



22-nji surat.



$a \leq x < b$ ýa-da $a < x \leq b$ deňsizlikleri kanagatlandyrýan x sanlar toplumyna **ýaryminterwallar** diýilýär we deňişlikde $[a; b)$ we $(a; b]$ ýaly belgilenýär.

Meselem, $[-1; 2)$ ýaryminterwal — şu $-1 \leq x < 2$ deňsizligi kanagatlandyrýan x sanlar toplumu; $(4; 7]$ ýaryminterwal — şu $4 < x \leq 7$ deňsizligi kanagatlandyrýan x sanlar toplumu (23-nji surat).



23-nji surat.

Kesimlere, interwallara, ýaryminterwallara we şöhlelere *sanly aralyklar* diýilýär.

Şeýdip, sanly aralyklary deňsizlikler görnüşinde bermek mümkin. Deňsizlikler sistemalaryny çözmäge deňişli mysallara garaýarys.

1-nji mesele. Deňsizlikler sistemasyny çözüň:

$$\begin{cases} 5x - 1 > 3(x + 1), \\ 2(x + 4) > x + 5. \end{cases} \quad (1)$$

△ Birinji deňsizligi çözüýäris:

$$\begin{aligned} 5x - 1 &> 3x + 3, \\ 2x &> 4, \quad x > 2. \end{aligned}$$

Şeydip, birinji deňsizlik $x > 2$ bolanda ýerine ýetirilýär.

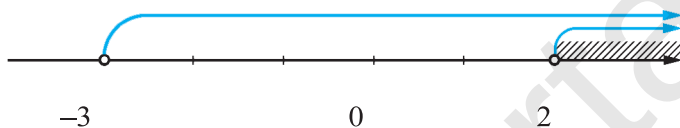
Ikinji deňsizligi çözüýäris:

$$2x + 8 > x + 5, \quad x > -3.$$

Şeydip, (1) sistemanyň ikinji deňsizligi $x > -3$ bolanda ýerine ýetirilýär.

San okunda (1) sistemanyň birinji we ikinji deňsizlikleriniň çözüwleriniň toplumlaryny şekillendirýäris.

Birinji deňsizligiň çözüwleri $x > 2$ şöhläniň ähli nokatlary, ikinji deňsizligiň çözüwleri $x > -3$ şöhläniň ähli nokatlary bolýar (24-nji surat).



24-nji surat.

(1) sistemanyň çözüwleri x -iň iki şöhlä-de bir wagtda degişli bolan bahalary bolýar. Suratdan görnüşi ýaly, bu şöhleleriň ähli umumy nokatlarynyň toplumu $x > 2$ şöhle bolýar.

Jogaby: $x > 2$. ▲

2-nji mesele. Deňsizlikler sistemasyny çözüň:

$$\begin{cases} 3(x-1) \leq 2x+4, \\ 4x-3 \geq 13. \end{cases} \quad (2)$$

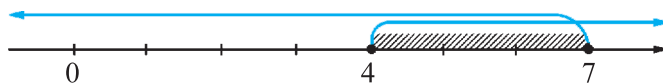
△ Birinji deňsizligi çözüýäris:

$$\begin{aligned} 3x - 3 &\leq 2x + 4, \\ x &\leq 7. \end{aligned}$$

(2) sistemanyň ikinji deňsizligini çözüýäris:

$$\begin{aligned} 4x &\geq 16, \\ x &\geq 4. \end{aligned}$$

San okunda (2) sistemanyň birinji we ikinji deňsizlikleriniň çözüwleriniň toplumlaryny şekillendirýäris. Birinji deňsizligiň çözüwleri $x \leq 7$ şöhle, ikinji deňsizligiň çözüwleri $x \geq 4$ şöhle bolýar (25-nji surat).



25-nji surat.

Suratdan görnüşı ýaly, bu şöhleleriň umumy nokatlary toplumy $[4; 7]$ kesim bolýar.

Jogaby: $4 \leq x \leq 7$. ▲

3-nji mesele. Deňsizlikler sistemasyny çözüň:

$$\begin{cases} \frac{5x}{12} + \frac{4}{3} \geq \frac{x+1}{3}, \\ 2 - \frac{5x}{14} < \frac{2-x}{2}. \end{cases} \quad (3)$$

△ (3) sistemanyň birinji deňsizligini çözüäris:

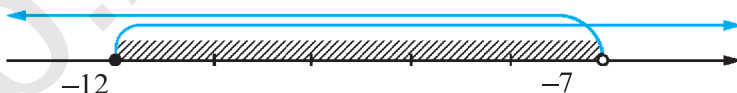
$$\begin{aligned} 5x + 16 &\geq 4x + 4, \\ x &\geq -12. \end{aligned}$$

Ikinji deňsizligi çözüäris:

$$\begin{aligned} 28 - 5x &< 14 - 7x, \\ 2x &< -14, \\ x &< -7. \end{aligned}$$

San okunda $x \geq -12$ va $x < -7$ şöhleleri şekillendirýäris (26-njy surat). Suratdan görnüşı ýaly, bu şöhleleriň umumy nokatlary toplumy $[-12; -7)$ ýaryminterwal bolýar.

Jogaby: $-12 \leq x < -7$. ▲



26-njy surat.

4-nji mesele. Şu

$$\begin{cases} 2(1-x) < 4-3x, \\ 10-3x < 1 \end{cases} \quad (4)$$

deňsizlikler sistemasynyň çözüwe eýe dälligini görkeziň.

△ Birinji deňsizligi çözyäris:

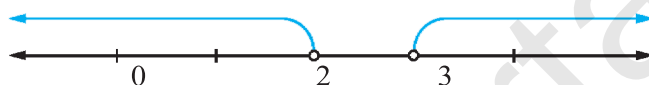
$$2 - 2x < 4 - 3x, \quad x < 2.$$

(4) sistemanyň ikinji deňsizligini çözyäris:

$$\begin{aligned} -3x &< -9, \\ x &> 3. \end{aligned}$$

San okunda $x < 2$ we $x > 3$ şöhleleri şekillendirýäris (27-nji surat).

Suratdan görnüşi ýaly, bu şöhleler umumy nokatlara eýe däl. Diýmek, (4) sistema çözüwe eýe däl. ▲



27-nji surat.

Gönükmeler

241. -3 ; 0 ; 5 sanlaryndan haýsylary deňsizlikler sistemasynyň çözüwleri bolýar:

$$\begin{aligned} 1) \begin{cases} 5 - x \leq 9, \\ 2 - 3x > -4; \end{cases} & 2) \begin{cases} \frac{1}{3}x - 2 > 1, \\ 5 - 2x > -25; \end{cases} & 3) \begin{cases} 0,5x + 3 > 4, \\ 7 - x > 1? \end{cases} \end{aligned}$$

242. -2 ; 0 ; 1 sanlaryndan haýsylary deňsizlikler sistemasynyň çözüwleri bolýar:

$$1) \begin{cases} 12x - 1 < 11, \\ -3 - x \leq 0; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 4x - 1 \geq 4 - x, \\ x + 6 > 2? \end{cases}$$

243. Deňsizlikler sistemasynyň çözüwi bolup bilýän ähli bitin sanlary tapyň:

$$\begin{aligned} 1) \begin{cases} x > 2, \\ x < 7; \end{cases} & 2) \begin{cases} x \leq 3, \\ x > -1; \end{cases} & 3) \begin{cases} x \leq 2,7, \\ x \geq 0; \end{cases} & 4) \begin{cases} x \geq -5,1, \\ x < 5,1. \end{cases} \end{aligned}$$

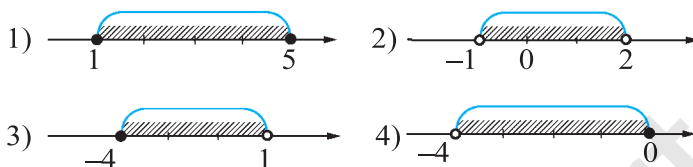
244. Berlen goşa deňsizligi kanagatlandyrýan x sanlar toplumyny sanly aralygyň belgilenmeleriniň kömeginde ýazyň:

$$\begin{aligned} 1) 1 \leq x \leq 5; & 2) -1 \leq x \leq 3; & 3) -1 < x < 4; \\ 4) 1 < x < 2; & 5) -3 \leq x < 1; & 6) -4 < x \leq -2. \end{aligned}$$

245. Berlen sanly aralyga degişli x sanlar toplumyny goşa deňsizlik görnüşinde ýazyň we ony san okunda şekillendirin:

- 1) $[-4; 0]$; 2) $[-3; -1]$; 3) $(-4; -2)$;
4) $(0; 3)$; 5) $(-1; 4]$; 6) $[-2; 2)$.

246. 28-nji suratda şekillendirilen x sanlar toplumyny goşa deňsizlik görnüşinde, şonuň ýaly-da, sanly aralygyň belgilenmeleriniň kömeginde ýazyň:

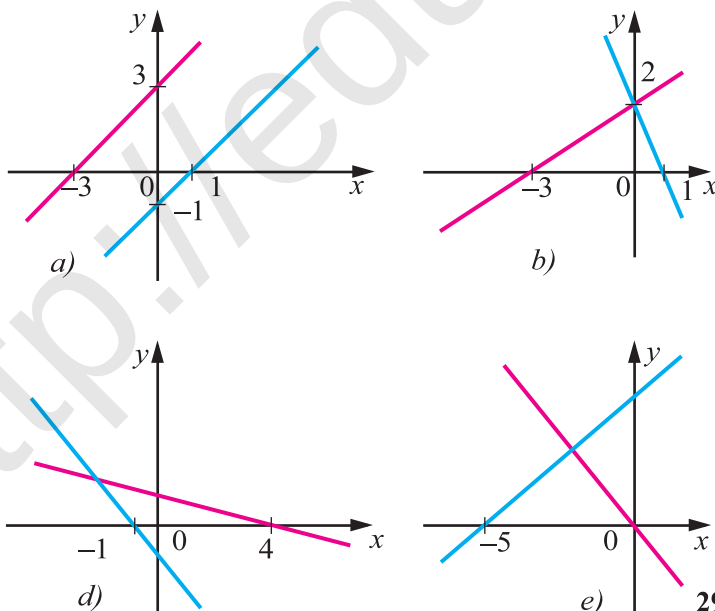


28-nji surat.

247. $[2; 3]$ kesim $(1; 4)$ aralyga degişlimi?

248. $[2; 4]$ we $[3; 5]$ kesimler umumy nokatlara eýemi?

249. Bir koordinata tekizliginde iki çyzykly funksiýanyň grafikleri şekillendirilen (29-njy surat). x -iň nähili bahalarynda bu iki funksiýanyň bahasy bir wagtda položitel bolýar? Nähili bahalarynda bolsa bir wagtda otrisatel bolýar?



29-njy surat.



№ 3

Gönüburçlugyň taraplary natural sanlar bilen aňladylýar. Gönüburçlugyň perimetriniň bahasy onuň meýdanynyň bahasyna deň bolmagy üçin olar nähili sanlara deň bolmaly?

250. Bir koordinata tekizliginde $y = -2x - 2$ we $y = 2 - \frac{x}{2}$ funksiýalaryň grafiklerini gurun. Absissalar okunda x -iň iki funksiýanyň bahalary: 1) položitel; 2) otrisatel bolýan bahalarynyň toplumyny belgiläň.

251. Deňsizligi çözüň:

1) $(x - 3)(2x - 3) + 6x^2 \geq 2(2x - 3)^2$;

2) $(5 - 6x)(1 + 3x) + (1 + 3x)^2 \leq (1 + 3x)(1 - 3x)$;

3) $(2x + 1)(4x^2 - 2x + 1) - 8x^3 \geq -2(x + 3)$;

4) $(x - 2)(x^2 + 2x + 4) \leq x(x^2 + 2) + 1$.

Deňsizlikler sistemasynyň ähli çözüwlerini bir deňsizlik bilen ýazyň we çözüwler toplumyny san okunda şekillendiriň (**252–253**):

252. 1) $\begin{cases} x > 2, \\ x > 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x > 0, \\ x > -1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x > 2, \\ x \geq -3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x \geq -2, \\ x \geq -4. \end{cases}$

253. 1) $\begin{cases} x \leq 1, \\ x < 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x < 0, \\ x < -1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x < -2, \\ x < -5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x \leq 1, \\ x \leq 0. \end{cases}$

Deňsizlikler sistemasynyň ähli çözüwlerini goşa deňsizlik görnüşinde ýazyň we bu toplumu san okunda şekillendirin (**254–255**):

254. 1) $\begin{cases} x > 2, \\ x < 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x > 3, \\ x < 6; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x < 0, \\ x \geq -2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x \geq 0, \\ x < \frac{1}{2}. \end{cases}$

255. 1) $\begin{cases} x \leq -2, \\ x \geq -7,5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x < 1,5, \\ x \geq -1,5; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x \geq 0,8, \\ x < 2,2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x \leq 7,5, \\ x \geq -0,5; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x \geq -2, \\ x \leq 2; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x < 3,5, \\ x > 0. \end{cases}$

Deňsizlikler sistemasyny çözüň (256–259):

256. 1) $\begin{cases} 3x - 18 > 0, \\ 4x > 12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7x - 14 \geq 0, \\ 2x \geq 8; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x + 5 > 0, \\ 3x + 6 \geq 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x + 7 \geq 0, \\ 5x + 15 > 0; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 5x + 10 > 0, \\ 3x \leq 9; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 4x - 7 < 0, \\ 2x + 1 \geq 0. \end{cases}$

257. 1) $\begin{cases} 3 - 2x \geq 0, \\ 4x + 8 < 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + 4 \leq 0, \\ 4 - 3x > 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x + 3 \leq 0, \\ 3x + 9 \leq 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x - 9 < 0, \\ 12 > 3x; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 24 < 6x, \\ 3x \geq 2; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 7x + 14 > 0, \\ 3x - 6 \leq 0. \end{cases}$

258. 1) $\begin{cases} 7 - 2x \geq 0, \\ 5x - 20 < 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + 5 \leq 0, \\ 9x + 18 \leq 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 6 - 2x > 0, \\ 3x + 6 > 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 10 - 2x \geq 0, \\ 4x - 8 \geq 0; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 5x - 12 \geq 0, \\ 15 - 3x \leq 0; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 6 - 4x \leq 0, \\ 3x + 9 > 0. \end{cases}$

259. 1) $\begin{cases} 3x + 3 \leq 2x + 1, \\ 3x - 2 \leq 4x + 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x + 2 \geq 5x + 3, \\ 2 - 3x < 7 - 2x; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5(x + 1) - x > 2x + 2, \\ 4(x + 1) - 2 < 2(2x + 1) - x; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2(x - 1) - 3 < 5(2x - 1) - 7x, \\ 3(x + 1) - 2 \leq 6(1 - x) + 7. \end{cases}$

260. Deňsizlikler sistemasynyň çözüwleri bolan ähli bitin sanlary tapyň:

$$1) \begin{cases} 0,2x > -1, \\ -\frac{x}{3} \geq 1; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 1 - 0,5x \geq 0, \\ -\frac{x+5}{5} < -1; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} \frac{x-1}{2} < \frac{x}{3}, \\ \frac{x+1}{2} \geq \frac{x}{5}; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} \frac{x-1}{4} \leq \frac{x}{5}, \\ \frac{x}{3} > \frac{x+4}{7}; \end{cases} \quad 5) \begin{cases} 0,4x > -2, \\ 0,3x < 1; \end{cases} \quad 6) \begin{cases} 1 + 0,2x \geq 0, \\ 0,5x - 1 < 0. \end{cases}$$

261. x -iň nähili bahalarynda $y=0,5x+2$ we $y=3-3x$ funksiýalaryň bahalary bir wagtda: 1) položitel; 2) otrisatel; 3) 3-den uly; 4) 3-den kiçi bolýar?

262. x -iň nähili bahalarynda $y=x-2$ we $y=0,5x+1$ funksiýalaryň bahalary bir wagtda: 1) otrisatel däl; 2) položitel däl; 3) 4-den kiçi däl; 4) 4-den uly däl bolýar?

263. Üçburçlugyň bir tarapy 5 m, ikinji tarapy bolsa 8 m. Eger üçburçlugyň perimetri: 1) 22 m-den kem; 2) 17 m-den artyk bolsa, onuň üçünji tarapy nähili bolmagy mümkin?

264. Eger bitin sanyň $\frac{3}{2}$ böleginden onuň $\frac{1}{4}$ bölegi aýrylsa, onda 29-dan uly san emele gelýär, eger edil şu sanyň $\frac{3}{2}$ böleginden onuň $\frac{1}{3}$ bölegi aýrylsa, onda 29-dan kiçi san emele gelýär. Şu bitin sany tapyň.

265. Eger bitin sanyň ikeldilenine onuň ýarysy goşulsa, onda 92-den kiçi san emele gelýär, eger edil şu bitin sanyň ikeldileninden onuň ýarysy aýrylsa, onda 53-den uly san emele gelýär. Şu bitin sany tapyň.

17- §. SANYŇ MODULY. MODUL GATNAŞYAN DEŇLEMELER WE DEŇSIZLIKLER

1. Sanyň moduly.

Sanyň moduly düşüňjesini ýatladyp geçýäris:

1) *Položitel sanyň moduly şu sanyň özüne deň.*

Meselem, $|3| = 3$, $\left|\frac{2}{7}\right| = \frac{2}{7}$, $|2,4| = 2,4$.

2) *Otrisatel sanyň moduly oňa garşylykly sana deň.*

Meselem, $|-2| = -(-2) = 2$, $\left|-\frac{5}{6}\right| = -\left(-\frac{5}{6}\right) = \frac{5}{6}$, $|-1,5| = -(-1,5) = 1,5$.

3) *Noluň moduly nola deň:* $|0| = 0$.

Şeýdip, sanyň modulynyň kesgitlemesi aşakdaky ýaly bolýar:

$$|a| = a, \text{ eger } a \geq 0 \text{ bolsa;}$$

$$|a| = -a, \text{ eger } a < 0 \text{ bolsa.}$$

Bu kesgitleme formulanyň kömeginde gysgaça şeýle ýazylýar:

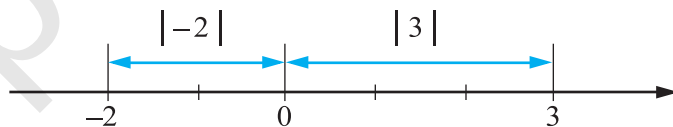
$$|a| = \begin{cases} a, & \text{eger } a \geq 0 \text{ bolsa;} \\ -a, & \text{eger } a < 0 \text{ bolsa.} \end{cases}$$

Sanyň modulynyň geometrik manysyna garaýarys.

San okunda, meselem, 3 we -2 nokatlary şekillendirýäris (30-njy surat).

Suratdan görnüşi ýaly, $|3| = 3$ – bu 0 nokatdan 3 nokada çenli bolan aralyk,

$|-2| = 2$ – bu 0 nokatdan -2 nokada çenli bolan aralyk.



30-njy surat.

Şeýdip, $|a|$ – a sanyň moduly, geometrik nukdaý nazardan, 0 nokatdan a sany şekillendirýän nokada çenli bolan aralykdyr.

2. Näbelli modul belgisi astynda gatnaşýan deňlemeler.

1-nji mesele. Deňlemäni çözüň:

$$|x| = 7.$$

△ 1) $|x| \geq 0$ bolsun. Onda modulyň kesgitlemesine görä $|x| = x$ we deňleme şeýle görnüşe geçýär:

$$x = 7,$$

ýagny $x = 7$ — berlen deňlemäniň köki;

2) $x < 0$ bolsun. Onda modulyň kesgitlemesine görä $|x| = -x$ we deňleme şeýle görnüşe geçýär:

$$-x = 7,$$

mundan $x = -7$ — berlen deňlemäniň köki.

Jogaby: $x_1 = 7, x_2 = -7$. ▲

2-nji mesele. $|3x + 2| = 1$ deňlemäni çözüň.

△ 1) $3x + 2 \geq 0$ bolsun. Munda $3x + 2 = 1, 3x = -1, x = -\frac{1}{3}$;

2) $3x + 2 < 0$ bolsun. Munda $3x + 2 = -1, 3x = -3, x = -1$.

Jogaby: $x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = -1$. ▲

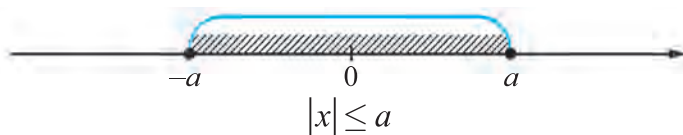
3. Näbelli modul belgisi astynda gatnaşýan deňsizlikler.

Şu

$$|x| \leq a, \text{ munda } a > 0$$

deňsizlige garayarys.

Bu deňsizligi 0 nokatdan a -dan uly bolmadyk aralykda ýatýan ähli x nokatlar, ýagny $[-a; a]$ kesimiň nokatlary kanagatlandyryr (31-nji surat).



31-nji surat.

$[-a; a]$ kesim — $\text{shu } -a \leq x \leq a$ deňsizligi kanagatlandyryan x sanlar toplumy.



Diymek, $|x| \leq a$ deňsizlik $-a \leq x \leq a$ goşa deňsizligiñ hut özüni aňladýar, munda $a > 0$.

Meselem, $|x| \leq 2,5$ deňsizlik $-2,5 \leq x \leq 2,5$ -i aňladýar; $|x| < 3$ deňsizlik $-3 < x < 3$ -i aňladýar.

3-nji mesele. $|5 - 3x| < 8$ deňsizligi çözüň.

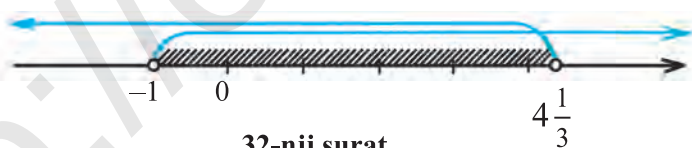
△ Berlen deňsizligi şeýle görnüşde ýazyp alýarys:

$$-8 < 5 - 3x < 8.$$

Bu goşa deňsizlik aşakdaky deňsizlikler sistemasynyñ edil özüni aňladýar:

$$\begin{cases} 5 - 3x < 8, \\ 5 - 3x > -8. \end{cases}$$

Bu sistemany çözüp, $-1 < x < 4\frac{1}{3}$ bolýandygyny tapýarys (32-nji surat). ▲



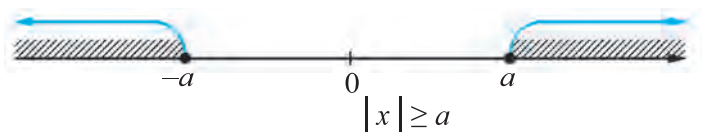
32-nji surat.

shu

$$|x| \geq a, \text{ munda } a > 0$$

deňsizlige garaýarys.

Bu deňsizligi 0 nokatdan a -dan kiçi bolmadyk aralykda ýatýan ähli x nokatlar toplumy, ýagny $x \geq a$ we $x \leq -a$ şöhleleriñ nokatlary kanagatlandyryar (33-nji surat).



33-nji surat.

4-nji mesele. Deňsizligi çözüň: $|x - 1| \geq 2$.

△ 1) $x - 1 \geq 0$ bolsun. Munda $x - 1 \geq 2$. Aşakdaky deňsizlikler sistema-syny alarys:

$$\begin{cases} x - 1 \geq 0, \\ x - 1 \geq 2. \end{cases}$$

Bu sistemany çözüp, $x \geq 3$ -i tapýarys.

2) $x - 1 < 0$ bolsun. Munda $-(x - 1) \geq 2$ ýa-da $x - 1 \leq -2$.

Aşakdaky deňsizlikler sistemasyny alarys:

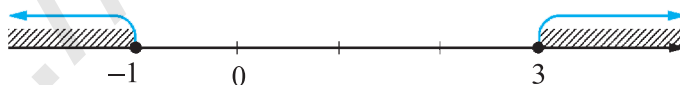
$$\begin{cases} x - 1 < 0, \\ x - 1 \leq -2. \end{cases}$$

Bu sistemany çözüp, $x \leq -1$ -i tapýarys.

Şeýdip, $|x - 1| \geq 2$ deňsizligiň çözüwleri birinjiden, $x \geq 3$ sanlar, ikinjiden bolsa $x \leq -1$ sanlar bolýar.

Jogaby: $x \leq -1, x \geq 3$. ▲

$|x - 1| \geq 2$ deňsizligiň çözüwleri 34-nji suratda şekillendirilen.



34-nji surat.

Eger

$$|x| \leq a$$

deňsizlikde a san nola deň bolsa, onda deňsizlik $x=0$ -dan ybarat ýekeje (ýeke-täk) çözüwe eýe bolýar; eger-de, $a < 0$ bolsa, onda deňsizlik çözüwlere eýe bolmaýar.

Eger

$$|x| \geq a$$

deňsizlikde a san noldan kiçi ýa-da oňa deň bolsa, onda islendik san onuň çözüwi bolýar.

Göniükmeler

266. (Ýatdan.) Sanyň moduly nämä deň:

- 1) 23; 2) 4,7; 3) $\frac{2}{7}$; 4) -47 ; 5) $-2,1$; 6) $-\frac{3}{8}$?

Deňlemäni çözüň (**267–270**):

- 267.** 1) $|x| = 2,5$; 2) $|x| = 1,5$; 3) $|x - 1| = 2$;
4) $|x + 3| = 3$; 5) $|x + 4| = 4$; 6) $|x - 4| = 4$.

- 268.** 1) $|x + 4| = 0$; 2) $|x - 2| = 0$; 3) $|2x - 3| = 0$;
4) $|3 - 4x| = 0$; 5) $|7 + 3x| = 0$; 6) $|2x + 5| = 0$.

- 269.** 1) $|3x - 5| = 5$; 2) $|4x + 3| = 2$; 3) $|\frac{2}{3}x + \frac{1}{6}| = \frac{1}{3}$;
4) $|\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}| = \frac{1}{4}$; 5) $|7x - 10| = 4$; 6) $|0,5 - 2x| = 2,5$.

- 270.** 1) $|-x| = 3,4$; 2) $|-x| = 2,1$; 3) $|5 - x| = 5$;
4) $|3 - x| = 8$; 5) $|x - 7| = 1$; 6) $|5 - x| = 2$.

271. Deňsizligiň çözüwleri toplumyny san okunda şekillendirň:

- 1) $|x| < 5$; 2) $|x| \leq 4$; 3) $|x| \leq 4$; 4) $|x| > 2$.

272. Modully deňsizligi goşa deňsizlik görnüşinde ýazyň:

- 1) $|x| \geq 3$; 2) $|x| < 2$; 3) $|x| < 3,5$; 4) $|x| \leq 2,4$.

273. Goşa deňsizligi bir modully deňsizlik görnüşinde ýazyň:

- 1) $-3,1 < x < 3,1$; 2) $-0,3 \leq x \leq 0,3$; 3) $-4,8 < x < 4,8$.

Deňsizligi çözüň (**274–277**):

274. 1) $|1 + x| \leq 0,3$; 2) $|2 + x| < 0,2$; 3) $|3 - x| \leq \frac{2}{3}$;

4) $|1 - x| < \frac{3}{4}$; 5) $|x - 1| \leq 1$; 6) $|x - 4| \leq 2$.

275. 1) $|3x - 4| < 5$; 2) $|2x + 3| < 3$; 3) $|2 - 3x| \leq 2$;

4) $|5 - 4x| \leq 1$; 5) $|4x - 1| < 7$; 6) $|3 - 2x| \leq 3$.

276. 1) $|x + 1| > 1,3$; 2) $|x - 2| \geq 1,1$; 3) $|1 - x| \geq \frac{1}{2}$;

4) $|3 - x| > \frac{2}{3}$; 5) $|x - 1| > 3,8$; 6) $|5 - 4x| \leq 1$.

277. 1) $|4x - 3| \geq 3$; 2) $|3x + 2| > 1$; 3) $|3x - 2| > 4$;

4) $|4 - 5x| \geq 4$; 5) $|6x - 1| \leq 2$; 6) $|3 - 5x| \geq 2$.

278. x -iň aşakdaky deňsizlik ýerine ýetirilýän ähli bitin bahalaryny tapyň:

1) $|5x - 2| < 8$; 2) $|5x + 3| < 7$; 3) $|5 - 3x| \leq 1$;

4) $|3 - 4x| \leq 3$; 5) $|2x - 5| \leq 1$; 6) $|3 - 4x| \leq 6$.

279. Deňsizligi çözüň:

1) $|2x - 3| > 5$; 2) $|3x - 1| \leq 4$; 3) $|1 - 3x| \leq 1$;

4) $|3 - 2x| \geq 3$; 5) $|1,5x - 2| \leq 1$; 6) $|4 - 3x| > 2$.

18- §. YAKYNLAŞAN HASAPLAMALAR. ULULYKLARYŇ YAKYNLAŞAN BAHALARY. YAKYNLAŞMA YALŇYŞLYGY

Amaly meseleleri çözende köplenç *dürli ululyklaryň ýakynlaşan bahalary* bilen iş salyşmaly bolýar. Ýakynlaşan bahalar, adatda, köp mukdardaky zatlary, meselem, tokaýdaky agaçlaryň sanyny sananda; esbaplaryň kömeginde dürli ululyklary, meselem, uzynlygy, massany, temperaturany ölçände; sanlary tegeleklände alynýar.

Birnäçe mysallara garaýarys:

- 1) Garaşsyz Özbegistanyň birinji poçta markasy özbek şahyr aýaly Mohlaraýym Nodira bagyşlanan bolup, 2 million nusgada dolanyşyga çykaryldy;
- 2) synpda 36 sany okuwçy bar;
- 3) Özbegistanda 10 000 -e golaý umumtälim mekdepleri bar;
- 4) Nowaýy – Nukus demir ýolunyň uzynlygy 342 km;
- 5) işçi kassadan 70600 som pul aldy;
- 6) soňky ýyllarda Özbegistanda galla ekini meýdanlary 300 müň gektara köpeldi;
- 7) Daşkentden Buhara çenli bolan aralyk 500 km;
- 8) bir kilogram bugdaýda 30 000 sany bugdaý dānesi bar;
- 9) Ýerden Güne çenli bolan aralyk $1,5 \cdot 10^8$ km;
- 10) Özbegistan Respublikasynyň Döwlet baýdagynda 12 sany ýyldyz bar.

2, 5, 10-njy mysallarda ululyklaryň bahalary anyk, galan ýagdaýlarda bolsa ýakynlaşan.

1-nji mesele. Okuwçylardan biri mekdepde näçe okuwçy okaýandygy baradaky soraga „1000 sany“ diýip jogap berdi, ikinji okuwçy bolsa hut şu soraga „950 sany“ diýip jogap berdi. Eger mekdepde 986 sany okuwçy okasa, kimiň jogaby takygrak?

△ Birinji okuwçy 14 san, ikinjisi bolsa 36 san ýalňyşdy. Diýmek, birinji okuwçynyň jogaby takygrak. ▲

Birinji ýagdaýda okuwçylar sanynyň anyk we ýakynlaşan bahalarynyň arasyndaky tapawudyň (tapawut) otrisateldigini nygtaýarys:

$$986 - 1000 = -14,$$

ikinci ýagdaýda bolsa položitel:

$$986 - 950 = 36.$$

Amaly taýdan ýakynlaşan bahanyň takyk bahadan ol ýa-da bu tarapa daşlaşýşyny, ýagny takyk baha bilen ýakynlaşan bahanyň arasyndaky tapawudyň modulyny (absolýut bahasyny) bilmek möhümdir.



Ululygyň takyk bahasy bilen onuň ýakynlaşan bahasynyň arasyndaky tapawudyň modulyna *ýakynlaşmanyň absolýut ýalňyşlygy* diýilýär.

Şeýdip, eger a – takyk bahasy x -a deň bolan ululygyň ýakynlaşan bahasy bolsa, onda absolýut ýalňyşlyk

$$|x - a|$$

-a deň bolýar.

Ýakynlaşmanyň absolýut ýalňyşlygy köplenç ýönekeýje edip *ýalňyşlyk* diýilýär.

2-nji mesele. Üçburçlugyň burçlarynyň jemini transportiriň kömeginde tapmakda 182° netije alyndy. Bu ýakynlaşmanyň absolýut ýalňyşlygy nähili?

△ Üçburçlugyň burçlarynyň jeminiň takyk bahasy 180° -a deň, ýakynlaşan bahasy 182° -a deň. Şonuň üçin absolýut ýalňyşlyk

$$|180^\circ - 182^\circ| = |-2^\circ| = 2^\circ$$

-a deň. ▲

3-nji mesele. $\frac{3}{7}$ sanynyň 0,43 onluk droba ýakynlaşma ýalňyşlygyny tapyň.

$$\triangle \left| \frac{3}{7} - 0,43 \right| = \left| \frac{3}{7} - \frac{43}{100} \right| = \left| \frac{300 - 301}{700} \right| = \left| -\frac{1}{700} \right| = \frac{1}{700}. \quad \blacktriangle$$

Gönükmeler

280. Mysallarda getirilen sanlardan haýsylary ululyklaryň takyk bahalary, haýsylary bolsa ýakynlaşan bahalary bolýar:

- 1) bir sany çöregiň bahasy 500 som;
- 2) 12 listli depder 60 som we galyňlygy 3 mm;
- 3) bir ýylda awtomobil zawody 200 müň awtomobil öndürýär?

- 281.** Okuwçy kitabyň inini masşably çyzgyç bilen ölçände 16,2 cm-den 16,4 cm-e çenli aralykdaky netijäni aldy.
 1) Kitabyň ininiň takyk bahasyny aýtmak mümkinmi?
 2) Kitabyň ininiň birnäçe ýakynlaşan bahasyny görkeziň.
- 282.** $\frac{4}{9}$ sanynyň:
 1) $\frac{6}{13}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 0,3; 4) 0,44; 5) 0,43; 6) 0,45
 sanyna ýakynlaşmanyň absolyút ýalňyşlygyny tapyň.
- 283.** Aşakdaky sanlaryň ýakynlaşma ýalňyşlygyny tapyň:
 1) 0,1975 sanynyň 0,198 sany bilen;
 2) -3,254 sanynyň -3,25 sany bilen;
 3) $-\frac{8}{17}$ sanynyň $-\frac{1}{2}$ sany bilen;
 4) $\frac{22}{7}$ sanynyň 3,14 sany bilen.
- 284.** a san x sanyň ýakynlaşan bahasy bolsun. Eger
 1) $x = 5,346$, $a = 5,3$; 2) $x = 4,82$, $a = 4,9$;
 3) $x = 15,9$, $a = 16$; 4) $x = 25,08$, $a = 25$
 bolsa, ýakynlaşma ýalňyşlygyny tapyň.
- 285.** Dörtburçlugyň içki burçlarynyň jemi 360° -a deňligi mälim. Dörtburçlugyň içki burçlarynyň jemini transportiriň kömeginde tapanda 363° netije alyndy. Şu ýakynlaşmanyň ýalňyşlygy nämä deň?
- 286.** $y = 7x + 9$ we $y = 1$ göni çyzyklaryň grafikleriniň kömeginde bu göni çyzyklaryň absissasy -1-e deň bolan nokatda kesişýändigini anyklady. Şu ýakynlaşmanyň ýalňyşlygy nämä deň?
- 287.** 0,33 onluk drob $\frac{1}{3}$ sanynyň absolyút ýalňyşlygy 0,01-den kiçi ýakynlaşan bahasy bolýandygy dogrumy?

19-§. ÝALŇYŞLYGY BAHALAMAK

Köp halatlarda ululyklaryň takyk bahalary näbelli bolýar, şonuň üçin ýakynlaşmanyň absolýut ýalňyşlygyny tapmak mümkin bolmaýar. Şeýle bolsa-da, köplenç, eger artygy bilen we kemi bilen ýakynlaşmalar mälim bolsa, *absolýut ýalňyşlygy bahalamak* mümkin bolýar.

1-nji m e s e l e. Otag termometrinde suwuklyk sütünjiginiň ýokarky ahyry 21 bilen 22 °C belgileriniň arasynda dur. Temperaturanyň ýakynlaşan bahasy hökmünde 21,5 sany alyndy. Ýakynlaşmanyň absolýut ýalňyşlygyny bahalaň.

△ t temperaturanyň takyk bahasy näbelli, ýöne

$$21 \leq t \leq 22$$

diýip tassyklamak mümkin.

Temperaturanyň takyk bahasy bilen ýakynlaşan bahasynyň arasyndaky tapawudy, ýagny $t - 21,5$ tapawudy bahalamak üçin bu goşa deňsizligiň her bir böleginden 21,5 sanyny aýyryrys.

$-0,5 \leq t - 21,5 \leq 0,5$ -i, ýagny $|t - 21,5| \leq 0,5$ -i alarys. Şeýdip, absolýut ýalňyşlyk 0,5-den uly däl. ▲

Munda temperatura 0,5-e çenli takyklykda ölçenen diýilýär we şeýle ýazylýar:

$$t = 21,5 \pm 0,5.$$

Umuman, eger a san x sanyň ýakynlaşan bahasy we $|x - a| \leq h$ bolsa, onda x san a sana h çenli takyklyk bilen deň diýilýär we şeýle ýazylýar:

$$x = a \pm h. \quad (1)$$

$|x - a| \leq h$ deňsizlik

$$a - h \leq x \leq a + h \quad (2)$$

goşa deňsizligiň edil özüni aňladýandygyny ýatladyp geçýäris.

Meselem, $x = 2,43 \pm 0,01$ ýazgy x san 2,43-e 0,01-e çenli takyklykda deňligini, ýagny $2,43 - 0,01 \leq x \leq 2,43 + 0,01$ ýa-da $2,42 \leq x \leq 2,44$ bolýandygyny aňladýar.

2,42 we 2,44 sanlary x sanyň, degişlilikde, kemi bilen we artygy bilen alnan ýakynlaşan bahalary bolýar.

Adatda, 1-nji meselede garalan temperaturany ölçände, temperaturanyň ýakynlaşan bahasy hökmünde 21 ýa-da 22 °C alynýar. Munda her bir ýakyn-

laşmanyň absolýut ýalňyşlygy 1°C -dan geçmeýär. Şonuň üçin, adadta, bölüm-leriniň aralygy 1°C -dan bolan termometriň kömeginde temperatura ölçenende ölçeg 1°C çenli takyklyk bilen alnyp barylýar, diýlip hasaplanýar.

Şoňa meňzeş başga ölçeg gurallary üçin hem *ölçeme takyklygy*, adadta, guralyň iň kiçi bölümi boýunça hasaplanýar. Meselem, uzynlyk mikrometr bilen $0,01\text{ mm}$ çenli takyklykda ölçenýär, temperatura lukmançylyk termometri bilen $0,1^{\circ}\text{C}$ çenli takyklykda ölçenýär, sekunt mili bolan el sagady wagty 1 sekunda çenli takyklykda görkezýär.

Şeýdip, ölçeme ýalňyşlygy mukdar nähili esbap bilen ölçenýändigine bagly. Ýakynlaşma ýalňyşlygy näçe kiçi bolsa, ölçeg esbaby şonça anyk bolýar.

Ýakynlaşan bahalardan köplenç ady droblary onluk droblara çalşyrmakda peýdalanylýar.

2-nji mesele. $0,43$ sany $\frac{13}{30}$ drobuň $0,01$ -e çenli takyklykdaky ýakynlaşan bahasy bolýandygyny subut ediň.

△ Munda

$$\left| \frac{13}{30} - 0,43 \right| \leq 0,01$$

bolýandygyny subut etmek talap edilýär. Tapawudy hasaplaýarys:

$$\frac{13}{30} - 0,43 = \frac{13}{30} - \frac{43}{100} = \frac{130-129}{300} = \frac{1}{300}.$$

Diýmek, $\left| \frac{13}{30} - 0,43 \right| = \frac{1}{300}; \frac{1}{300} \leq 0,01$ bolany üçin $\left| \frac{13}{30} - 0,43 \right| \leq 0,01$

bolýar. ▲

Göniükmeler

288. Aşakdaky ýazuw nämäni aňladýar:

- | | | |
|-------------------------|------------------------|--|
| 1) $x = 3,9 \pm 0,2;$ | 2) $x = 0,4 \pm 0,15;$ | 3) $x = \frac{1}{3} \pm \frac{1}{10};$ |
| 4) $x = 0,73 \pm 0,01;$ | 5) $x = -135 \pm 1;$ | 6) $x = -2\frac{1}{5} \pm \frac{1}{10};$ |
| 7) $x = -1 \pm 0,1;$ | 8) $x = 9,5 \pm 0,2;$ | 9) $x = -3,2 \pm 0,01?$ |

289. Goşa deňsizlik görnüşinde ýazyň:

- 1) $x = 11 \pm 0,5$; 2) $m = 142 \pm 1$; 3) $l = 3,7 \pm 0,1$;
4) $v = 900 \pm 5$; 5) $x = a \pm h$; 6) $y = m \pm n$.

290. 1) $x = 4 \pm 0,1$; 2) $x = 2,7 \pm 0,1$;
3) $x = -0,6 \pm 0,12$; 4) $x = -5,9 \pm 0,2$

bolýandygy mälim. x sanyň kemi bilen we artygy bilen alnan ýakynlaşan bahalaryny tapyň.

291. $x = 5,8 \pm 0,2$ bolsun. Takyk baha aşakdaka deň bolmagy mümkinmi:

- 1) 5,9; 2) 6,001; 3) 6; 4) 5,81; 5) 5,75; 6) 5,6?

292. $x = 8,7 \pm 0,4$ bolsun. x san aşakdaka deň bolmagy mümkinmi:

- 1) 8,222; 2) 8,4; 3) 9; 4) 9,5; 5) 9,3?

293. x sanyň onuň kemi bilen we artygy bilen ýakynlaşmalarynyň orta arifmetigine deň ýakynlaşan bahasyny görkezň:

- 1) $20 \leq x \leq 22$; 2) $5 \leq x \leq 6$; 3) $4,5 \leq x \leq 4,8$;
4) $3,7 \leq x \leq 4,1$; 5) $2,81 \leq x \leq 2,83$; 6) $0,55 \leq x \leq 0,6$.

294. Subut ediň:

- 1) 2,7 sany 2,7356 sanynyň 0,5-e çenli takyklykdaky ýakynlaşan bahasy;
2) 0,27 sany $\frac{11}{40}$ drobuň 0,01-e çenli takyklykdaky ýakynlaşan bahasy.

295. 4 sany 4,3 drobuň 0,5-e çenli takyklykda alnan ýakynlaşan bahasy bolarmy? 0,1-e çenli takyklykdaky nähili?

296. Optiki we radiolokasion ölçemelere görä Merkuriýniň diametri (4880 ± 2) km-e, Weneranyň radiusy (6050 ± 5) km-e deň. Ölçeme netijelerini goşa deňsizlik görnüşinde ýazyň.

297. Işçi silindriň diametrini ölçemek üçin 10,00; 10,04; 10,08 mm we başgalar 10,56 mm-e çenli diametrli ýşlara eýe bolan gurluşdan peýdalanýar. Munda ölçemeler takyklygy nähili?

298. Tehniki gözegçilik bölümünde silindriň diametri 0,1 mm çenli takyklykda ölçenýär. Görkezme boýunça silindriň diametri $167,8 \leq d \leq 168,2$ aralykda bolsa, ol ýaramly hasaplanýar. Eger ölçemek netijesinde silindriň diametri 168,1 mm-e deň bolsa, tehniki gözegçilik bölümi ony ýaramsyz diýip hasaplarmy?

20-§. SANLARY TEGELEKLEMEK

Sanlary tegeleklemekden fizikanyň, matematikanyň, tehnikanyň ençeme amaly meselelerinde dürli ululyklaryň (mukdarlaryň) ýakynlaşan bahalary bilen iş salşylanda peýdalanylýar.

Meselem, deňiz derejesinde we 45° giňlikde jisimleriň erkin gaçma tizlenmesi $9,80665 \text{ m/s}^2$ -a deň. Adatda, bu san ondan bire çenli tegeleklenýär: 9,8. Ol şeýle ýazylyar: $g \approx 9,8$ (okalyar: g takmynan 9,8-e deň).



$x \approx a$ ýazuw a san x sanyň ýakynlaşan bahasydygyny aňladýar.

1-nji mesele. Gönüburçluk şekildäki ýer uçastogunyň meýdany 25 m^2 -a, onuň uzynlygy 8 m-e deň. Uçastoguň inini tapyň.

△ Uçastoguň ini l metr bolsun, munda

$$l = 25 : 8 = 3,125.$$

Jogaby: 3,125 m. ▲

Amalda şeýle netije, adatda, ondan bire çenli tegeleklenýär, ýagny $l \approx 3,1$ diýip hasaplanýar.

Sanlary tegeleklemek düzgünine aşakdaky mysalda garaýarys. 3,647 sanyny ýüzden bire çenli tegeleklemek talap edilsin. Kemi bilen tegeleklemek üçin ahyrky 7 sifrini düşürüp galdyryarys, netijede 3,64-i alarys. Artygy bilen tegeleklemek üçin ahyrky 7 sifrini düşürüp galdyryp, ondan öňki sifri bir birlige artdyryarys. Netijede 3,65-i alarys.

Birinji ýagdaýda tegeleklemegiň absolýut ýalňyşlygy

$$|3,647 - 3,64| = 0,007$$

-ä, ikinji ýagdaýda

$$|3,647 - 3,65| = 0,003$$

-e deň.

Ikinji ýagdaýdaky ýakynlaşma ýalňyşlygy birinji ýagdaýdakydan kem. Diýmek, garalyan mysalda artygy bilen tegeleklemek makul hasaplanýar.

Ýakynlaşmanyň absolýut ýalňyşlygy iň kem bolmagy üçin položitel sanlary tegeleklände aşakdaky düzgünden peýdalanylýar.



Eger birinji düşürilip galdyrylýan sifr 5-den kiçi bolsa, onda kemi bilen tegeleklemeli, eger bu sifr 5-den uly ýa-da oňa deň bolsa, onda artygy bilen tegeleklemeli.

Meselem, ondan bire çenli tegeleklände

$$3,647 \approx 3,6, \quad 2,658 \approx 2,7$$

-ni alarys; yüzden bire çenli tegeleklände

$$0,6532 \approx 0,65, \quad 9,0374 \approx 9,04$$

-i alarys.

2-nji m e s e l e. $\frac{2}{7}$ sanyny şu sana 0,01-e çenli takyklykda deň bolan onluk drob bilen çalşyryň.

△ 2-ni 7-ä bölmek netijesini oturdan soň üç sifrlı onluk drob görnüşinde ýazýarys:

$$\frac{2}{7} = 0,285....$$

Bu sany yüzden bire çenli tegelekläp, $\frac{2}{7} \approx 0,29$ -ni alarys. ▲

Bu meseläni çözmek üçin $\frac{2}{7}$ -niň 0,01-e çenli takyklykdaky ýakynlaşan bahasyny tapmakda onuň oturdan soň üç sifrini tapmaly boldy. Eger $\frac{2}{7}$ sanynyň 0,001-e çenli takyklykdaky ýakynlaşan bahasyny tapmak talap edilende-di, onda dört onluk sifri tapmaly bolardy.

Gönükmeler

299. Sanlary nobaty bilen 0,001, 0,01, 0,1-e çenli, birliklere çenli, onluklara çenli, yüzliklere çenli, müňlükler çenli tegelekläň: 3285,05384; 6377,00753; 1234,5336.

300. 15,75 we 317,25 sanlaryny birliklere çenli kemi we artygy bilen tegelekläň. Her bir tegeleklemäniň absolýut ýalňyşlygyny tapyň.

301. Sany 0,1-e çenli takyklykda onluk drob görnüşinde şekillendiriň:

$$1) \frac{13}{8}; \quad 2) \frac{17}{25}; \quad 3) \frac{39}{129}; \quad 4) \frac{11}{3}; \quad 5) \frac{5}{7}; \quad 6) \frac{19}{11}.$$

302. Sany 0,01-e çenli takyklykda onluk drob görnüşinde şekillendiriň:

1) $\frac{3}{7}$; 2) $\frac{7}{99}$; 3) $\frac{5}{19}$; 4) $1\frac{2}{3}$; 5) $2\frac{3}{11}$; 6) $5\frac{1}{14}$.

303. Sany 0,001-e çenli takyklykda onluk drob görnüşinde şekillendiriň:

1) $\frac{2}{7}$; 2) $\frac{5}{13}$; 3) $2\frac{3}{11}$; 4) $7\frac{9}{14}$; 5) $3\frac{1}{7}$; 6) $1\frac{18}{19}$.

304. 0°C-da wodorodyň molekulasyň ortaça hereket tizligi 1693 m/s-a deň. Bir okuwçy bu sany 1690 m/s edip, ikinjisi bolsa 1700 m/s edip tegelekledi. Her bir tegeleklemäniň absolýut ýalňyşlygyny tapyň. Haýsy ýagdaýda ýakynlaşma ýalňyşlygy kiçi?

21-§. OTNOSITEL ÝALŇYŞLYK

Şol bir ululygyň dürli ýakynlaşmalarynyň takyklygyny deňeşdirmek üçin absolýut ýalňyşlykdan peýdalanylýar. Eger dürli ululyklaryň ýakynlaşmalary deňeşdirilse, onda absolýut ýalňyşlyk ýeterli däl.

Meselem, Daşkentden Samarkanda çenli bolan aralyk (300 ± 1) km-e deň. Galamyň uzynlygy $(21,3 \pm 0,1)$ cm-e deň. Birinji ýagdaýda absolýut ýalňyşlyk 1 km-dan artyk däl, ikinji ýagdaýda 1 mm-den artyk däl. Ýogsam, galamyň uzynlygy Daşkentden Samarkanda çenli bolan aralyga garanda takygrak ölçenen diýmek mümkinmi?

Daşkentden Samarkanda çenli bolan aralygy ölçände 300 km-e 1 km -dan artyk bolmadyk absolýut ýalňyşlyk goýberilipdir. Diýmek, ýalňyşlyk ölçenýän ululygyň $\frac{1}{300} \cdot 100\% \approx 0,33\%$ -ini düzýär.

Galamyň uzynlygyny ölçände 21,3 cm-e 0,1 cm-dan artyk bolmadyk absolýut ýalňyşlyga ýol berlipdir. Diýmek, munda ýalňyşlyk ölçenýän ululygyň

$$\frac{0,1}{21,3} \cdot 100\% \approx 0,47\% \text{ -ini düzýär.}$$

Şeýdip, şäherleriň arasyndaky aralyk galamyň uzynlygyna garanda takygrak ölçenen.

Ýakynlaşma hilini bahalamak üçin otnositel ýalňyşlyk düşüňjesi girizilýär.



Otnositel ýalňyşlyk diýip ululygyň absolýut ýalňyşlygynyň onuň ýakynlaşan bahasynyň modulyna bolan gatnaşygyna aýdylýar.

Şeýdip, eger a san x -iň ýakynlaşan bahasy bolsa, onda absolýut ýalňyşlyk $|x-a|$ -a deň, otnositel ýalňyşlyk bolsa $\frac{|x-a|}{|a|}$ -a deň. Otnositel ýalňyşlyk adatda göterimlerde aňladylýar.

М е с л е. Ýeriň massasynyň ýakynlaşan bahasy $(5,98 \pm 0,01) \cdot 10^{24}$ kg -a deň. Aw tüpeňiniň okunyň massasy (9 ± 1) g -a deň. Haýsy ölçeme takygrak?

△ Her bir ölçemäniň otnositel ýalňyşlygyny bahalaýarys:

$$1) \frac{0,01 \cdot 10^{24}}{5,98 \cdot 10^{24}} \cdot 100\% \approx 0,2\%; \quad 2) \frac{1}{9} \cdot 100\% \approx 11\%.$$

Ýeriň massasy takygrak ölçenen. ▲

Gönükmeler

305. Sany birliklere çenli tegelekläň hem-de tegeleklemäniň absolýut we otnositel ýalňyşlyklaryny tapyň:

1) 3,45; 2) 10,59; 3) 23,263; 4) 0,892; 5) 1,947.

306. 1) $\frac{1}{3}$ sanynyň 0,33 sany bilen; 2) $\frac{1}{7}$ sanynyň 0,14 sany bilen ýakynlaşmanyň otnositel ýalňyşlygyny tapyň.

307. Haýsy ölçeme takygrak:

1) $a = (750 \pm 1)$ m-mi ýa-da $b = (1,25 \pm 0,01)$ m-mi;

2) $p = (10,6 \pm 0,1)$ s-mi ýa-da $q = (1,25 \pm 0,01)$ s-mi?

308. Dürli esbaplar bilen bir wagtda buguň temperaturasy ölçendi we birinji ýagdaýda $t = (104 \pm 1)$ °C, ikinji ýagdaýda $t = (103,8 \pm 0,1)$ °C, üçünji ýagdaýda $t = (103,86 \pm 0,01)$ °C netijeler alyndy. Her bir ölçemäniň otnositel ýalňyşlygyny bahalaň.

- 309.** Iki okuwçy uzynlyklary ölçemäge degişli amaly işleri ýerine ýetirende (203 ± 1) mm we (120 ± 1) cm netijäni aldy. Okuwçylardan haýsysy işi oňat hilli ýerine ýetiripdir?
- 310.** 1) x sanyň ýakynlaşan bahasy a -ga deň. Ýakynlaşmanyň otnositel ýalňyşlygy 0,01-e deň, ýagny 1%. Eger $a = 2,71$ bolsa, absolýut ýalňyşlygy tapyň.
2) x sanyň ýakynlaşan bahasy b -ge deň. Ýakynlaşmanyň otnositel ýalňyşlygy 0,001-e deň, ýagny 0,1%. Eger $b = 0,398$ bolsa, absolýut ýalňyşlygy tapyň.
- 311.** Günün massasy $(2 \cdot 10^{33} \pm 0,1 \cdot 10^{33})$ g. Çagalar pökgüsiniň massasy $(2,5 \pm 0,1) \cdot 10^2$ g. Haýsy ölçeme takygrak?

II baba degişli gönükmeler

Deňlemäni çözüň (**312–313**):

- 312.** 1) $x(2x + 5) = 0$; 2) $x(3x - 4) = 0$;
3) $(x - 5)(3x + 1) = 0$; 4) $(x + 4)(2x - 1) = 0$.
- 313.** 1) $\frac{2x+3}{3x-1} = 0$; 2) $\frac{1-2x}{2x+5} = 0$; 3) $\frac{(2x+1)(x+2)}{x-3} = 0$; 4) $\frac{(x-3)(2x+4)}{x+1} = 0$.

- 314.** San okunda a nokat b nokatdan çepde ýatýar. Aşakdaky san položitelmi ýa-da otrisatelmi:

- 1) $b-a$; 2) $2+b-a$; 3) $a-b$; 4) $a-3-b$?

- 315.** Deňsizligi çözüň:

- 1) $x + 9 > 8 - 4x$; 2) $3(y + 4) \geq 4 - (1 - 3y)$;
3) $5(0,2 + y) - 1,8 \geq 4,3 + 5y$; 4) $3(x - 5) + 9 > 15$.

- 316.** Deňsizlikler sistemasyny çözüň:

- 1) $\begin{cases} 0,5(x+3) - 0,8 < 0,4(x+2) - 0,3, \\ 0,7(2-x) + 1,3 < 0,6(1-x) + 2,2; \end{cases}$
2) $\begin{cases} 1,5(x-2) - 2,1 < 1,3(x-1) + 2,5, \\ 1,3(x+3) + 1,7 > 1,6(x+2) + 1,8. \end{cases}$

317. Denlemäni çözün:

$$\begin{array}{lll} 1) |x-1|=3,4; & 2) |1-x|=2,4; & 3) |1-2x|=5; \\ 4) |3x-2|=1; & 5) |4x-1|=3; & 6) |2x+7|=9. \end{array}$$

318. Deñsizligi çözün:

$$\begin{array}{lll} 1) |x-1| \leq 3,4; & 2) |x-1| \geq 3,4; & 3) |x-1| < 3,4; \\ 4) |2x+1| \geq 3; & 5) |3+2x| \leq 1; & 6) |1-3x| \geq 4. \end{array}$$

ÖZÜÑIZI BARLAP GÖRÜŇ!

1. x -iň islendik bahasynda

$$\frac{1}{2}x(2x-4) \geq (x-2)x$$

deñsizligiň dogrudygyny subut ediň.

2. Deñsizligi çözün:

$$1) 12-5x > 0; \quad 2) 3x-7 \leq 4(x+2); \quad 3) \frac{x}{2} + \frac{3-x}{4} < 2.$$

3. Deñsizlikler sistemasyny çözün:

$$\begin{array}{ll} 1) \begin{cases} 3x-13 > 0, \\ 25-4x > 0; \end{cases} & 2) \begin{cases} 4x-13 \geq 3x-10, \\ 11-4x \leq 12-3x; \end{cases} \\ 3) \begin{cases} 5x+3 < 3x-7, \\ 1-2x > x+4; \end{cases} & 4) \begin{cases} 5x-7 \leq 2-4x, \\ 7-3x \geq 1-5x. \end{cases} \end{array}$$

319. $a < 2b$ bolsun. Subut ediň:

$$\begin{array}{ll} 1) 4a-2b < a+4b; & 2) 3a-2b < a+2b; \\ 3) a+2b > 3a-2b; & 4) a+b > 4a-5b. \end{array}$$

320. Üçburçlugyň bir tarapy 4 cm-dan uzyn, ikinji tarapy birinjisinden 1,5 esse uzyn, üçünji tarapy ikinjisinden 1,5 ese uzyn. Üçburçlugyň perimetriniň 19 cm-dan uzyn bolýandygyny subut ediň.

- 321.** x -in nähili bahalarynda $y = -x + 1$ we $y = x + 2$ funksiýalaryň bahalary bir wagtda: 1) položitel; 2) otrisatel; 3) 1-den uly; 4) 2-den uly bolýar?
- 322.** Jübüt sanyň ondan soň gelyän jübüt sanyň üçeldileni bilen jemi 134-den uly, hut şu jübüt sanyň ondan öň gelyän jübüt sanyň ikeldileni bilen jemi 104-den kiçi. Şu sany tapyň.
- 323.** Täk sanyň ondan soň gelyän täk sanyň ikeldileni bilen jemi 151-den kiçi, hut şu täk sanyň ondan öň gelyän täk sanyň üçeldileni bilen jemi 174-den uly. Şu sany tapyň.
- 324.** Goşa deňsizlik görnüşinde ýazyň:
 1) $x = 12 \pm 0,3$; 2) $y = 23 \pm 1$; 3) $x = a \pm 1$;
 4) $y = m \pm 0,1$; 5) $z = 1,8 \pm 0,01$; 6) $z = b \pm 0,2$.
- 325.** Aşakdaky sany 0,01-e çenli takyklykda onluk drob görnüşinde şekillendirin:
- 1) $\frac{5}{11}$; 2) $\frac{3}{22}$; 3) $\frac{3}{13}$; 4) $\frac{2}{7}$; 5) $\frac{17}{24}$; 6) $\frac{5}{12}$.
- 326.** Uzynlygy $l = 0,25$ m, kese kesiginiň meýdany $S \approx 1,2 \cdot 10^2$ mm², udel garşylygy $\rho \approx 0,017 \Omega \cdot \text{mm}^2/\text{m}$ bolan mis taýajygynyň garşylygyny hasaplaň $\left(R = \frac{\rho l}{S} \right)$.
- 327.** Eger $m = 7,6$ kg, $v = 4,2$ m/s bolsa, jisimiň kinetik energiýasyny

$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

formula boýunça hasaplaň.

- 328.** 20 cm-li kesimi ölçände 0,5 mm ýalňyşlyga ýol berildi, 1000 km aralygy ölçände bolsa ýalňyşlyk 200 m boldy. Haýsy ölçeme takygrak?
- 329.** Ilaty 57 100 adamdan ybarat bolan şäherde her bir gan toparyna degişli adamlar näçeden duşýandygyny anyklamak maksadynda lukmançylyk barlagy geçirildi. Gany I topara dogry gelyän adamlar 32,9% -i, II topardakylar 35,8% -i, III topardakylar 23,2% -i we IV topardakylar 8,1% -i düzýändigini anyklandy. Her bir gan toparyndaky adamlardan şäherde näçeden ýaşaýar?



II baba degiqli synag gönükmeleri – testler

1. Deñsizligi çözüň: $5(x-3)+2x<4x+3$.
 A) $x<6$; B) $x<-6$; C) $x>6$; D) $x>-6$.
2. Deñsizligi çözüň: $4(x-1)+5(x+1)<6(x+2)+7(x-1)$.
 A) $x<-1$; B) $x>-1$; C) $x<1$; D) $x>1$.
3. Deñsizligi çözüň: $\frac{2x-3}{4} > \frac{x+1}{6} - \frac{4x+3}{3}$.
 A) $x>1$; B) $x \leq 1$ C) $x>-0,05$; D) $x<2$.
4. $7x+5 \geq 3(x-1)-4x$ deñsizligiň çözüwi bolýan iň kiçi bitin sany tapyň:
 A) $x=2$; B) $x=-2$; C) $x=3$; D) $x=-1$.
5. $7(1-x)>5(3-x)$ deñsizligiň çözüwi bolýan iň uly bitin sany tapyň:
 A) $x=-5$; B) $x=-3$; C) $x=2$; D) $x=-2$.
6. x -iň nähili bahalarynda $\frac{3x-6}{5}$ drob $\frac{4x-5}{15}$ we $\frac{4-x}{3}$ droblaryň jeminden kiçi bolýar?
 A) $x<3,3$; B) $x>2,3$; C) $x \leq -2,3$; D) $x>4,5$.
7. x -iň nähili bahalarynda $\frac{3-5x}{4}$ va $\frac{7x+3}{6}$ droblaryň tapawudy $\frac{3x+5}{12}$ drobdan uly bolýar?
 A) $x < \frac{1}{16}$; B) $x < -\frac{1}{16}$; C) $x > \frac{1}{16}$; D) $x > -\frac{1}{16}$.
8. Deñsizlikler sistemasyny çözüň:

$$\begin{cases} 3(1-x) > 5-4x, \\ 13-4x < 1. \end{cases}$$

- A) $x > \frac{1}{2}$; B) $\frac{1}{2} < x < 3$; C) $x > 3$; D) $x > -3$.

9. Deňsizlikler sistemasyny çözüň:

$$\begin{cases} \frac{x-3}{3} \leq \frac{x+2}{2}, \\ \frac{x-4}{5} \geq \frac{x-5}{4}. \end{cases}$$

A) $1 \leq x \leq 9$; | B) $-12 \leq x$; | C) $x \geq 9$; | D) $-12 \leq x \leq 9$.

10. Deňsizlikler sistemasyny çözüň:

$$\begin{cases} (x+3)(x+2) \leq (x+4)(x-1) + 5, \\ 2(5x-1) \geq 3(3x-2). \end{cases}$$

A) $-4 \leq x \leq -2,5$; B) $-4 \leq x \leq 2,5$; C) $4 \leq x \leq 2,5$; D) $0 \leq x \leq 2,5$.

11. Deňsizlikler sistemasynyň çözüwi bolýan iň kiçi bitin sany tapyň:

$$\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{x}{3} > 1, \\ 3x - 2 > x + 2. \end{cases}$$

A) $x=7$; B) $x=-7$; C) $x=6$; D) $x=3$.

12. Deňsizlikler sistemasynyň çözüwi bolýan iň uly bitin sany tapyň:

$$\begin{cases} \frac{x}{4} + \frac{x}{2} < 1, \\ \frac{x}{3} - \frac{x}{4} < \frac{1}{6}. \end{cases}$$

A) $x=-2$; B) $x=1$; C) $x=2$; D) $x=0$.

13. Deňsizligi çözüň: $|4x-5| \leq 3$.

A) $x \geq -2$; B) $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$; C) $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$; D) $-2 \leq x \leq -\frac{1}{2}$.

14. Deňsizligi çözüň: $|1-3x| \leq 2$.

A) $0 \leq x \leq \frac{1}{3}$; | B) $-1 \leq x \leq -\frac{1}{3}$; | C) $\frac{1}{3} \leq x \leq 1$; | D) $-\frac{1}{3} \leq x \leq 1$.

15. Deňsizligi çözüň: $|3 - 2x| \geq 1$.
 A) $x \leq 1, x \geq 2$; B) $x \leq -1, x \geq -2$; C) $x \leq 2, x \geq 3$; D) $1 \leq x \leq 2$.
16. Sanyň takyk bahasy 1,483, ýakynlaşan bahasy 1,48 bolsa, ýakynlaşma ýalňyşlygyny tapyň:
 A) 0,003; B) 0,435; C) 1,335; D) 0,445.
17. Sanyň takyk bahasy $\frac{8}{17}$, ýakynlaşan bahasy $\frac{1}{2}$ bolsa, ýakynlaşma ýalňyşlygyny tapyň:
 A) $\frac{1}{33}$; B) $\frac{1}{34}$; C) $\frac{1}{35}$; D) $\frac{7}{15}$.
18. Goşa deňsizlik görnüşinde ýazyň: $a = -1,8 \pm 0,2$.
 A) $-2 < a < -1,6$; C) $-2 \leq a \leq -1,6$;
 B) $-1,6 \leq a \leq -2$; D) $-2 \leq a \leq -1,82$.
19. Goşa deňsizlik görnüşinde ýazyň: $a = 2,71 \pm 0,01$.
 A) $2,7 < a < 2,72$; C) $2,7 \leq a < 2,711$;
 B) $-1,6 \leq a \leq -2$; D) $2,7 \leq a \leq 2,72$.
20. $\frac{8}{15}$ -i 0,01-e çenli takyklykda onluk drob görnüşinde ýazyň:
 A) 0,53; B) 0,05; C) 0,61; D) 0,54.
21. $\frac{5}{14}$ -i 0,001-e çenli takyklykda onluk drob görnüşinde ýazyň:
 A) 0,357; B) 0,353; C) 0,456; D) 0,361.
22. Otagyň uzynlygy $(5 \pm 0,02)$ m-e deň. Ölçemäniň otnositel ýalňyşlygyny anyklaň:
 A) 4%; B) 0,4%; C) 0,02%; D) 0,05%.

- 23.** Iki obanyň arasyndaky aralyk (100 ± 1) km-e deň. Ölçemäniň otnositel ýalňyşlygyny anyklaň:
 A) 2%; B) 0,5%; C) 1%; D) 1,5%.
- 24.** Sany ýüzden bire çenli tegelekläň. Tegeleklemäniň otnositel ýalňyşlygyny tapyň: 5,7635.
 A) 5,76; 0,8%; C) 5,77; 0,08%;
 B) 5,76; 0,9%; D) 5,76; 0,06%.
- 25.** Sany ondan bire çenli tegelekläň. Tegeleklemäniň otnositel ýalňyşlygyny tapyň: 2,2941.
 A) 2,3; 0,26%; C) 2,3; 0,3%;
 B) 2,2; 2,5%; D) 2,3; 0,4%.



Taryhy meseleler

1. *Ewklidiň meselesi.* Eger a, b, c, d — položitel sanlar, a – olaryň iň ulusy we $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ bolsa, onda $a+d > b+c$ bolýandygyny subut ediň.

2. *Aleksandriýaly Pappýň meselesi.* Eger a, b, c, d položitel sanlar we $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ bolsa, onda $ad > bc$ bolýandygyny subut ediň.

3. *Bernulliniň deňsizligi.* Eger $x_1, x_2, \dots, x_n > -1$ we $x_1, x_2, \dots, x_n$ sanlaryň hemmesi birmeňzeş alamatly bolsa, $(1+x_1)(1+x_2) \dots (1+x_n) \geq 1+x_1+\dots+x_2+\dots+x_n$ bolýar.

Bernulliniň deňsizligini $n=2, 3$ bolan ýagdaý üçin subut ediň.

4. $(1+a)^2 \approx 1+2a$ ýakynlaşan formuladan peýdalanyň, hasaplaň we ýalňyşlygy bahalaň:

- 1) $(1,01)^2$; 2) $(1,001)^2$; 3) $(0,99)^2$; 4) $(0,999)^2$.

5. Wakuumda ýagtylygyň tizligini ölçemek $299796 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ netijäni berdi, munda ölçege takyklygy $4 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ boldy. Otnositel ýalňyşlygy tapyň.

6. Adamyň saç süýmüniň ýogynlygy $(0,15 \pm 0,005)$ mm-e deň. Ýerden Aýa çenli bolan aralyk bolsa $(380\,000 \pm 500)$ km-e deň. Haýsy ölçeme takygrak ýerine ýetirilipdir?

7. *Akmim papirusynda*: „Uzynlygy $r=5$ we $R=10$ radiusly töwerekleriň uzynlyklarynyň orta arifmetigine deň tegelegiň meýdany şu radiusly tegelekleriň meýdanlarynyň orta arifmetigine deň“, diýlen eken. Mundaky absolýut we otnositel ýalňyşlyklary tapyň.



Taryhy maglumatlar

$>$ (uly) we $<$ (kiçi) belgiler — takyk deňsizlik belgileri birinji gezek inlis alymy T. Garriotyň 1631-nji ýylda çap edilen kitabynda getirilen. $\geq$ (uly ýa-da deň) we $\leq$ (kiçi ýa-da deň) belgiler — nätakyk deňsizlik belgilerini bolsa 1734-nji ýylda fransuz matematigi P. Buge girizipdir.

x sanyň modulyny $|x|$ ýaly belgilemegi meşhur nemes matematigi K.Weyerştras 1841-nji ýylda teklip edipdir.

Gadymky Müsürde we Mesopotamiýada tapylyan matematiki ýazuwlar adamlar örän gadym zamanlardan ýakynlaşan hasaplamalaryň käbir usullary bilen tanyşdyklaryny görkezýär. 4000 ýyl öňräk Mesopotamiýanyň alymlary sanlary köpeltmek, kwadrata götermek, ters sanlaryň jedwellerini düzmek bilen bir hatarda, sanlardan kwadrat kök çykarmagyň jedwellerini hem düzüpdirliler. Olar natural sanlaryň kwadrat kökleriniň ýakynlaşan bahalaryny tapmagy başarypdylar.

2-nji, 3-nji derejeli deňlemäniň köklerini ýakynlaşan hasaplamak usullaryny Gadymky Hytaýyň, Orta Aziýanyň alymlary tapypdylar.

Mürze Ulugbekiň ylmy mekdebiniň alymlary astronomik jedwelleri („Zij“ler) takygrak düzmek üçin ýakynlaşan hasaplamanynyň täze usullaryny döredipdirliler. Mürze Ulugbek akademiýasynyň öňdebaryjy alymlaryndan biri Giýasiddin Jemşit al-Koşy bolsa „Töwerek barada kitapça“ synda π sanynyň oturdan soňky 17 öýjügin anyk hasaplapdyr.



Amaly we predmetara bagly meseleler

Deňsizlikleri, deňsizlikler sistemasyny çözmäge getirýän birnäçe meselä garalyň.

- 330.** 4 sany gurt we 5 sany horazgant bilelikde 225 somdan arzan. 3 sany gurt we 2 sany horazgant bilelikde 120 somdan gymmat. Näme arzan: 13 sany gurtmy ýa-da 10 sany horazgantmy?

△ 1 sany gurduň nyrhyny x som, 1 sany horazgandyň nyrhyny y som, diýeliň. Onda meseläniň şertine laýyk gelyän şu deňsizlikler sistemasyna eýe bolýarys:

$$\begin{cases} 4x + 5y < 225, \\ 3x + 2y > 120. \end{cases} \quad (1)$$

Mundan

$$\begin{cases} 32x + 40y < 1800, \\ 45x + 30y > 1800, \end{cases}$$

ýagny $45x + 30y > 32x + 40y$, $13x - 10y > 0$.

Diýmek, $13x > 10y$.

Jogaby: 10 sany horazgant 13 sany gurtdan arzan.

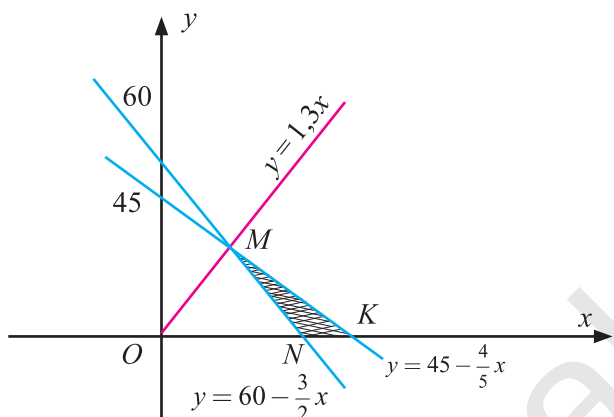
Meseläniň geometrik manysy bilen tanyşalyň.

Tekizlikde nähili zolak (1) deňsizlikler sistemasy bilen şekillendirilýär?

(1) sistemanyň 1-nji deňsizligi $4x + 5y = 225$, ýagny $y = 45 - \frac{4}{5}x$ göni çyzykdan *pesde* ýatýan ähli nokatlary aňladýar; 2-deňsizlik bolsa $3x + 2y = 120$, ýagny $y = 60 - \frac{3}{2}x$ göni çyzykdan *yokarda* ýatýan ähli nokatlary aňladýar (35-nji surata garaň).

Bu iki ýarymtekizligiň kesişmesi, $x > 0$, $y > 0$, bolýandygy hasaba alynsa, $\triangle MNK$ -ny berýär. Gurt we horazgandyň anyk nyrhyny bilmeýäris, bu nyrhy aňladýan $(x; y)$ nokat MNK üçburçlugyň içindäki islendik nokat bolmagy mümkin. Bu üçburçluk bolsa $13x = 10y$, ýagny $y = 1,3x$ göni çyzykdan *pesde* ýerleşýär.

Diýmek, $y < 1,3x$, ýagny $13x > 10y$. ▲



35-njisurat.

331. Synagda okuwçylaryň $\frac{1}{6}$ bölegi „kanagatlanarly“, 56% i „ýagşy“ we 14 sanysy „ýokary“ bahalary aldy. „Ýokary“ baha alanlar jemi okuwçylaryň 4%-inden köp, emma 5%-inden kem bolsa, jemi okuwçylar sanyny tapyň.

△ Jemi okuwçylar sanyny x diýeliň. Onda $\frac{x}{6}$ – „kanagatlanarly“ baha,

$\frac{56x}{100} = \frac{14}{25}x$ – „ýagşy“ baha alan okuwçylar sany bolýar.

Jemi okuwçylar sany 6-a hem, 25-e hem bölünýär, diýmek, $x = 6 \cdot 25 \cdot n = 150 \cdot n$, n – natural san. Şerte görä, „ýokary“ baha alan okuwçylar sany $0,04x < 14 < 0,05x$ deňsizligi kanagatlандырýar.

Muňa, $x = 150 \cdot n$ -i goýup, $6n < 14 < 7,5 \cdot n$, ýagny $n = 2$ bolýandygyny tapýarys.

Jogaby: 300 okuwçy. ▲

332. Iki gapdaky birmeňzeş zatlaryň sany bilelikde 29 sanydan köp. 1-nji gapdan 2 sany zat alnanda, onda galan zatlar 2-nji gapdakydan 3 esseden köpräk bolýar. 1-nji gapdaky zatlaryň 3 essesi bilen 2-nji gapdaky zatlaryň 2 essesiniň tapawudy 60-dan kem. Her bir gapda näçeden zat bar?

△ 1-nji gapdaky zatlaryň sanyny x bilen, 2-nji gapdaky zatlaryň sanyny y bilen belgiläliň. Onda meseläniň şertlerine laýyk şu deňsizlikler sistemasyna eýe bolýarys:

$$\begin{cases} x + y > 29, \\ x - 2 > 3y, \\ 3x - 2y < 60. \end{cases}$$

Bu sistemany aşakdaky ýaly ýazyp alýarys:

$$\begin{cases} x > 29 - y, \\ x > 3y + 2, \\ 20 + \frac{2}{3}y > x. \end{cases} \quad (1)$$

Mundan bolsa

$$20 + \frac{2}{3}y > 29 - y, \quad (2)$$

$$20 + \frac{2}{3}y > 3y + 2 \quad (3)$$

deňsizlikleriň dogrulygy gelip çykýar. (2)-dan $y > \frac{27}{5}$, (3)-dan bolsa $y < \frac{54}{7}$ deňsizligi alýarys.

Diýmek, $\frac{27}{5} < y < \frac{54}{7}$ ýa-da $5\frac{2}{5} < y < 7\frac{5}{7}$. y – natural san bolany üçin ol 6-a ýa-da 7-ä deň bolup bilýär. Eger $y = 6$ bolsa, onda (1) sistemany

$$\begin{cases} x > 23, \\ x > 20, \\ x < 24 \end{cases}$$

görnüşde ýazyp almak mümkin. Emma bu sistemany kanagatlandyryan natural san x ýok. Diýmek, $y = 7$ eken. Onda (1)-dan

$$\begin{cases} x > 22, \\ x > 23, \\ x < 24\frac{2}{3} \end{cases}$$

sistema gelyäris. Bu sistemany kanagatlandyryan ýeke-täk natural san $x = 24$ ekenligi aýdyň.

Jogaby: 1-nji gapda 24 sany, 2-nji gapda 7 sany zat bar. ▲

333. Iki gapdaky zatlaryň sany bilelikde 27 sanydan köp. 2-nji gapdan 12 sany zat alnanda, 1-nji gapdaky zatlaryň sany 2-nji gapdakydan 2 esseden köpräk bolýar. 1-nji gapdan 10 sany zat alnanda, 2-nji gapdaky zatlaryň sany 1-nji gapdakydan 9 esseden köpräk bolýar. Her bir gapda näçeden zat bar?

334. 1-nji zawod 1 günde 950 sanydan artyk bolmadyk mukdarda önüm öndürýär. 2-nji zawod ilki 1-nji zawod çykaran önümiň 95% -ini çykaryardy. Goşmaça stanoklar ornaşdyrylansoň, 2-nji zawod önümçiligi 1-nji zawoda garanda 23% -e artdyrdy we 1 günde 1000 sanydan köp önüm berip başlady. 2-nji zawod goşmaça stanoklar alynýança, her bir zawod näçe önüm öndürýärdi? (Önümleriň sany natural sanlarda aňladylýar.)

△ 1-nji zawodyň 1 günde öndüren önümleriniň sany x sany bolsun.

Onda 2-nji zawod ilki $\frac{95x}{100}$, goşmaça stanoklar ornaşdyrylansoň bolsa

$\left(\frac{95x}{100} + \frac{23x}{100}\right)$ sany önüm beripdir. Meseläniň mazmunyna laýyk deňsizlikler sistemasy şeýle bolýar:

$$\begin{cases} x \leq 950, \\ \frac{95x}{100} + \frac{23x}{100} > 1000. \end{cases}$$

Mundan

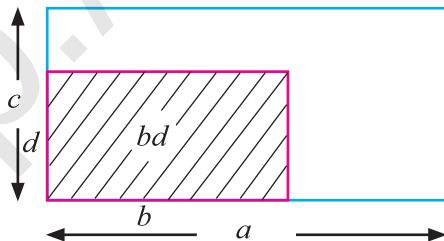
$$847\frac{27}{59} < x \leq 950. \quad (1)$$

Emma $\frac{95x}{100}$ we $\frac{23x}{100}$ sanlary natural san bolmaly, ýagny $x = 100$ -e bölünmeli. (1) aralykda 100-e bölünýän san 900. Diýmek, 1-nji zawod 1

günde 900 sany önüm öndüren. 2-nji zavod bolsa goşmaça stanok ornaşdyrylýança $\frac{95}{100} \cdot 900 = 855$ sany önüm öndüripdir.

Jogaby: 900 sany, 855 sany. ▲

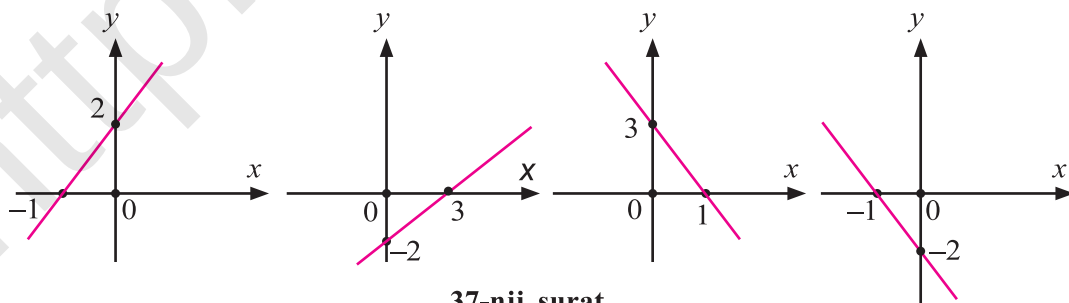
- 335.** 1-nji gapda ýaşyl, 2-nji gapda bolsa ak şarlar bar. Ýaşyl şarlaryň sany ak şarlaryň sanynyň $\frac{15}{19}$ bölegini düzýär. Ýaşyl şarlaryň $\frac{3}{7}$ bölegi, ak şarlaryň $\frac{2}{5}$ bölegi gaplardan alnansoň, 1-nji gapda 1000 sanydan kem, 2-nji gapda 1150 sanydan köp şar galdy. Ilki her bir gapda näçeden şar bolupdyr?
- 336.** 80 t, 60 t, 50 t ýük sygýan wagonlar bar. Eger ýük 80 t-lyk wagonlara ýüklense, wagonlardan 1 sanysy doly ýüklenmän galýar. Eger ýük 60t-lyk wagonlara ýüklense, 8 sany köp wagon gerek bolýar we 1 sany wagon doly ýüklenmän galýar. Eger ýük 50 t-lyk wagonlara ýüklense, ýene 5 wagon gerek bolýar we munda ýükler hem wagonlaryň hemmesini doldurýar. Ýük näçe tonna bolupdyr?
- 337.** Okuwçylar her hatarda 8 sanydan bolup nyzama dursalar, hatarlardan biri doly bolman galýar. Eger her hatarda 7 sanydan bolsalar, hatarlar doly bolýar, emma hatarlar sany 2 sany artýar. Eger her hatarda 5 sanydan bolsalar, hatarlaryň sany ýene 7 sany artar, emma 1 hatar doly bolmaýar. Okuwçylaryň sanyny anyklaň.
- 338.** 1) a, b, c, d – položitel sanlar we $a > b, c > d$ bolsa, onda $ac > bd$ bolýandygy dersligiňizde subut edilen. Bu deňsizlige geometrik düşündiriş beriň we 36-njy suraty düşündiriň:



36-njy surat.

2) Güberçek köpburçlугyň içinde ýatýan islendik nokatdan onuň deperlerine çenli bolan aralyklaryň jemi şu köpburçlугyň ýarymperimetrinden uly bolýandygyny subut ediň.

- 339.** Göwrümi 8 l bolan erginde 60% kislota bardy. Oña kislotasy 20% bolan erginden guýup başlandy. Garyndydaky kislota 40%-den köp bolmazlygy, ýöne 30%-den kem bolmazlygy üçin ikinji erginden birinjisine näçe guýmak mümkin?
- 340.** 1) Işçiler kollektiwi 5 günde 300 sanydan kem, 10 günde bolsa 500 sanydan artyk önüm taýýarlady. Eger kollektiwde 8 adam işläp, olaryň zähmet öndürjilikleri birmeňzeş bolsa, her bir işçi bir günde näçe önüm taýýarlapdyr?
- 2) Awtobus 8 gezek gatnanda 185 sanydan köp ýolagçy, 15 gezek gatnanda bolsa 370 sanydan kem ýolagçy daşady. Eger awtobus her gezek onda näçe orun bolsa, hut şonçadan ýolagçyny daşan bolsa, awtobusda näçe orun bar?
- 341.** Funksiýanyň grafigini guruň we grafik boýunça x -iň nähili bahalarynda funksiýa: položitel; nola deň; 2-den uly; -1 -den kiçi bahalary kabul edýändigini tapyň:
- 1) $y = 5x + 2$; 2) $y = 2x - 6$;
 3) $y = -4x + 5$; 3) $y = -3x - 1$.
- 342.** 37-nji suratda $y = kx + b$ çyzykly funksiýanyň grafigi şekillendirilen. 1) k we b -ni tapyň; 2) $x \geq 0$; 3) $x < 0$; 4) $x \geq 3$ 5); $7 \leq -2x$ bolanda y funksiýa nähili bahalary kabul edýändigini deňsizlik belgisiniň kömeginde ýazyň we alnan deňsizligi çözüň. Çözüwi san okunda şekillendiriň.



37-nji surat.

III BAP

KWADRAT DEŃLEMELER

22-§. KWADRAT DEŃLEME WE ONUŃ KÖKLERI

1-nji mesele. Gönüburçlugyň esasy beýikliginden 10 cm artyk, onuň meýdany bolsa 24 cm²-a deň. Gönüburçlugyň beýikligini tapyň.

△ Gönüburçlugyň beýikligi x santimetr bolsun, onda onuň esasy $(x+10)$ santimetre deň. Şu gönüburçlugyň meýdany $x(x+10)$ cm²-a deň. Meseläniň şertine görä, $x(x+10)=24$.

Ýaýlary açyp we 24 sanyny garşylykly alamat bilen deňlemäniň çep bölegine geçirip, aşakdakyny alarys:

$$x^2 + 10x - 24 = 0.$$

Deňlemäniň çep bölegini toparlamak usuly bilen köpeldijilere dagdyrars:

$$\begin{aligned} x^2 + 10x - 24 &= x^2 + 12x - 2x - 24 = \\ &= x(x+12) - 2(x+12) = (x+12)(x-2). \end{aligned}$$

Diýmek, deňlemäni şeýle ýazmak mümkin:

$$(x+12)(x-2) = 0.$$

Bu deňleme $x_1 = -12$ we $x_2 = 2$ köklere eýe.

Kesimiň uzynlygy otrisatel san bolup bilmeýänligi sebäpli gözlenýän beýiklik 2 cm-e deň bolýar. ▲

Bu meseläni çözende kwadrat deňleme diýlip atlandyrylýan

$$x^2 + 10x - 24 = 0$$

deňleme alyndy.



Kwadrat deňleme diýip

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{1}$$

görnüşindäki deňlemä aýdylýar, munda a, b, c — berlen sanlar, $a \neq 0$, x bolsa näbelli.

Kwadrat deňlemäniň a , b , c koeffisiýentleri adatda şeýle atlandyrylýar: a —birinji $ýa-da$ baş koeffisiýent, b —ikinji koeffisiýent, c — azat agza.

Meselem, $3x^2 - x + 2 = 0$ deňlemede baş koeffisiýent 3, ikinji koeffisiýent -1 , azat agza 2.

Matematikanyň, fizikanyň we tehnikanyň köp meselelerini çözmek kwadrat deňlemäni çözmäge getirilýär.

Kwadrat deňlemä ýene mysallar getirýäris:

$$\begin{aligned} 2x^2 + x - 1 &= 0, & 5t^2 - 10t + 3 &= 0, \\ x^2 - 25 &= 0, & 2x^2 &= 0. \end{aligned}$$

Köp meseleleri çözende algebraik şekil çalşyrmalaryň kömeginde kwadrat deňlemä getirilýän deňlemeler emele gelýär.

Meselem,

$$2x^2 + 3x = x^2 + 2x + 2$$

deňleme onuň ähli agzalaryny çep bölegine alyp geçenden we meňzeş agzalaryny toparlandan soň şu

$$x^2 + x - 2 = 0$$

kwadrat deňlemä gelýär.

2-nji mesele. Deňlemäni çözüň:

$$x^2 = 64.$$

△ 64-i çep bölege alyp geçýäris we kwadrat deňlemäni alarys:

$$x^2 - 64 = 0.$$

Çep bölegi köpeldijilere dagydýarys:

$$(x - 8)(x + 8) = 0.$$

Diýmek, deňleme iki köke eýe: $x_1 = 8$, $x_2 = -8$. ▲

$x^2 = 64$ deňlemäniň birinji köki 64 sanynyň arifmetik köki, ikinjisi bolsa oňa garşylykly san bolýandygyny nygtaýarys:

$$x_1 = \sqrt{64}, x_2 = -\sqrt{64}.$$

Adatda, bu iki formula birleşdirilip ýazylyar:

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{64}.$$

2-nji meselä jogaby $x_{1,2} = \pm 8$ ýaly ýazmak mümkin.

$x^2 = 64$ deňleme $x^2 = d$ deňlemäniň hususy halydyr. Islendik kwadrat deňleme bolsa $x^2 = d$ deňlemä getirilmegi mümkin.



Teorema. $x^2 = d$ deňleme, munda $d > 0$, iki köke eýe:

$$x_1 = \sqrt{d}, x_2 = -\sqrt{d}.$$

○ d -ni deňlemäniň çep bölegine alyp geçýäris:

$$x^2 - d = 0.$$

$d > 0$ bolany üçin arifmetik kwadrat köküň kesgitlemesine görä $d = (\sqrt{d})^2$. Şonuň üçin deňlemäni şeýle ýazmak mümkin:

$$x^2 - (\sqrt{d})^2 = 0.$$

Bu deňlemäniň çep bölegini köpeldijilere dagydyp, aşakdakyny alarys:

$$(x - \sqrt{d})(x + \sqrt{d}) = 0,$$

mundan, $x_1 = \sqrt{d}, x_2 = -\sqrt{d}$. ●

Meselem, $x^2 = \frac{4}{9}$ deňleme $x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{4}{9}} = \pm \frac{2}{3}$ köklere eýe; $x^2 = 3$ deňleme

$x_{1,2} = \pm \sqrt{3}$ köklere eýe; $x^2 = 8$ deňleme $x_{1,2} = \pm \sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$ köklere eýe.

Eger $x^2 = d$ deňlemäniň sag bölegi nola deň bolsa, onda $x^2 = 0$ deňleme bir köke eýe: $x = 0$. $x^2 = 0$ deňlemäni $x \cdot x = 0$ görnüşde ýazmak mümkin bolany üçin käte $x^2 = 0$ deňleme iki özara deň köke eýe diýilýär: $x_{1,2} = 0$.

Eger $d < 0$ bolsa, onda $x^2 = d$ deňleme hakyky köklere eýe bolmaýar, çünki hakyky sanyň kwadraty otrisatel san bolmagy mümkin däl. Meselem, $x^2 = -25$ deňleme hakyky köklere eýe däl.

Gönlükmeler

343. (Ýatdan.) Aşakda görkezilen deňlemelerden haýsylary kwadrat deňleme bolýar:

- | | |
|----------------------------|-------------------------------|
| 1) $5x^2 - 14x + 17 = 0$; | 2) $\frac{2}{3}x^2 + 4 = 0$; |
| 3) $-7x^2 - 13x + 8 = 0$; | 4) $17x + 24 = 0$; |
| 5) $-13x^4 + 26 = 0$; | 6) $x^2 - x = 0$? |

344. (Ýatdan.) Kwadrat deňlemäniň koeffisiýentlerini we azat agzasyny aýdyň:

- | | |
|-----------------------------------|----------------------------|
| 1) $5x^2 - 14x + 17 = 0$; | 2) $-7x^2 - 13x + 8 = 0$; |
| 3) $\frac{2}{3}x^2 + 4 = 0$; | 4) $x^2 + 25x = 0$; |
| 5) $-x^2 + x + \frac{1}{3} = 0$; | 6) $-x^2 - x = 0$. |

345. Eger $ax^2 + bx + c = 0$ kwadrat deňlemäniň koeffisiýentleri mälim bolsa, şu kwadrat deňlemäni ýazyň:

- | | |
|-----------------------------|-----------------------------|
| 1) $a = 2, b = 3, c = 4$; | 2) $a = -1, b = 0, c = 9$; |
| 3) $a = 1, b = -5, c = 0$; | 4) $a = 1, b = 0, c = 0$. |

346. Berlen deňlemäni kwadrat deňlemä getiriň:

- | | |
|-----------------------------------|-------------------------------------|
| 1) $x(x - 3) = 4$; | 2) $(x - 3)(x - 1) = 12$; |
| 3) $3x(x - 5) = x(x + 1) - x^2$; | 4) $7(x^2 - 1) = 2(x + 2)(x - 2)$. |

347. $-3, -2, 0, 1$ sanlaryndan haýsylary deňlemäniň kökleri bolýar:

- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| 1) $x^2 - 9 = 0$; | 2) $x^2 - x = 0$; |
| 3) $x^2 + x - 6 = 0$; | 4) $x^2 - 5x + 4 = 0$; |
| 5) $(x - 1)(x + 2) = 0$; | 6) $(x + 1)(x - 3) = x$? |

348. (Ýatdan.) $x^2 = 36$ deňleme näçe köke eýe? Olary tapyň. Olardan haýsysy 36-nyň arifmetik köki bolýar?

349. (Yatdan.) Deñlemäni çözün:

- 1) $x^2 = 1$; 2) $x^2 = 9$; 3) $x^2 = 16$; 4) $x^2 = 25$;
5) $x^2 = 100$; 6) $x^2 = 0$; 7) $x^2 = 49$; 8) $x^2 = 64$.

350. Deñlemäniñ köklerini tapyñ:

- 1) $x^2 = \frac{9}{16}$; 2) $x^2 = \frac{16}{49}$; 3) $x^2 = 1\frac{7}{9}$; 4) $x^2 = 2\frac{1}{4}$;
5) $x^2 = 5$; 6) $x^2 = 13$; 7) $x^2 = \frac{25}{49}$; 8) $x^2 = 10$.

351. Deñlemäni çözün:

- 1) $x^2 - 49 = 0$; 2) $x^2 - 121 = 0$; 3) $\frac{1}{3}x^2 = 0$;
4) $\frac{x^2}{5} = 0$; 5) $x^2 + 9 = 0$; 6) $x^2 + 12 = 0$.

352. Kwadrat deñlemäni, onuñ çep bölegini köpeldijilere dagydyp, çözün:

- 1) $x^2 - x = 0$; 2) $x^2 + 2x = 0$; 3) $3x^2 + 5x = 0$;
4) $5x^2 - 3x = 0$; 5) $x^2 - 4x + 4 = 0$; 6) $x^2 + 6x + 9 = 0$.

23-§. ÇALA KWADRAT DEÑLEMELER WE OLARY ÇÖZMEK

Eger $ax^2 + bx + c = 0$ kwadrat deñlemede b ýa-da c koeffisiýentlerden ke-minde biri nola deñ bolsa, onda bu deñlemä *çala kwadrat deñleme* diýilýär.

Diýmek, çala kwadrat deñleme aşakdaky deñlemelerden biri görnüşinde bolýar:

$$ax^2 = 0, \quad (1)$$

$$ax^2 + c = 0, c \neq 0, \quad (2)$$

$$ax^2 + bx = 0, b \neq 0. \quad (3)$$

(1), (2), (3) deñlemelerde a koeffisiýentiñ nola deñ dälidini ýatladyp geçýäris.

Çala kwadrat deñlemelerinñ nahili çözülyändigini görkezýäris.

1-nji mesele. Deñlemäni çözün:

$$5x^2=0.$$

△ Bu deñlemäniñ iki bölegini hem 5-e bölüp,

$$x^2=0$$

deñlemäni alarys, mundan $x=0$. ▲

2-nji mesele. Deñlemäni çözün:

$$3x^2-27=0.$$

△ Deñlemäniñ iki bölegini hem 3-e bölýäris:

$$x^2-9=0.$$

Bu deñlemäni aşakdaky ýaly ýazmak mümkin:

$$x^2=9,$$

mundan $x_{1,2} = \pm 3$. ▲

3-nji mesele. Deñlemäni çözün:

$$2x^2+7=0.$$

△ Deñlemäni şeýle ýazmak mümkin:

$$x^2 = -\frac{7}{2}.$$

Bu deñleme hakyky köklere eýe däl, çünki x -iñ islendik hakyky bahalarynda $x^2 \geq 0$ bolýar. ▲

4-nji mesele. Deñlemäni çözün:

$$-3x^2+5x=0.$$

△ Deñlemäniñ çep bölegini köpeldijilere dagydyp,

$$x(-3x+5)=0$$

bolýandygyny alarys, mundan: $x_1 = 0, x_2 = \frac{5}{3}$.

Jogaby: $x_1 = 0, x_2 = \frac{5}{3}$. ▲

Gönlükmeler

Deñlemäni çözüñ (353–357):

- 353.** 1) $x^2 = 0$; 2) $3x^2 = 0$; 3) $5x^2 = 125$;
 4) $9x^2 = 81$; 5) $4x^2 - 64 = 0$; 6) $x^2 - 27 = 0$;
 7) $4x^2 = 81$; 8) $0,01x^2 = 4$; 9) $0,04x^2 = 16$.
- 354.** 1) $x^2 - 7x = 0$; 2) $x^2 + 5x = 0$; 3) $5x^2 = 3x$;
 4) $4x^2 = 0,16x$; 5) $9x^2 - x = 0$; 6) $9x^2 + 1 = 0$;
 7) $x^2 - 3x = 0$; 8) $0,1x^2 - x = 0$; 9) $16x^2 + 3 = 0$.
- 355.** 1) $4x^2 - 169 = 0$; 2) $25 - 16x^2 = 0$; 3) $2x^2 - 16 = 0$;
 4) $3x^2 = 15$; 5) $2x^2 = \frac{1}{8}$; 6) $3x^2 = 5\frac{1}{3}$;
 7) $3x^2 = 27$; 8) $4x^2 = 64$; 9) $1\frac{9}{16}x^2 = 4$.
- 356.** 1) $\frac{x^2-1}{3} = 5$; 2) $\frac{9-x^2}{5} = 1$; 3) $4 = \frac{x^2-5}{5}$;
 4) $3 = \frac{9x^2-4}{4}$; 5) $\frac{16-x^2}{4} = 3$; 6) $5 = \frac{x^2-6}{2}$.
- 357.** 1) $3x^2 + 6x = 8x^2 - 15x$; 2) $17x^2 - 5x = 14x^2 + 7x$;
 3) $10x + 7x^2 = 2x^2 + 8x$; 4) $15x + 9x^2 = 7x^2 + 10x$.
- 358.** x -iñ nähili bahalarynda berlen droblar bir-birine deñ bolýar:
 1) $\frac{4x^2-3x}{3}$ we $\frac{x^2+5x}{2}$; 2) $\frac{3x^2+7x}{4}$ we $\frac{7x^2-5x}{3}$?

24-§. KWADRAT DEÑLEMÄNIÑ KÖKLERINI TAPMAGYÑ FORMULALARY. DISKRIMINANT

Kwadrat deñlemeleri çözmek üçin *doly kwadratly dagytmak usuly* ulanylýar. Bu usula mysallarda garalýň.

1-nji mesele. Kwadrat deñlemäni çözüñ:

$$x^2 + 2x - 3 = 0.$$

△ Bu deňlemäniň şeklini aşakdaky ýaly çalşyryrys:

$$x^2 + 2x = 3,$$

$$x^2 + 2x + 1 = 3 + 1,$$

$$(x + 1)^2 = 4.$$

Diýmek, $x + 1 = 2$ ýa-da $x + 1 = -2$, mundan $x_1 = 1$, $x_2 = -3$. ▲

Biz, $x^2 + 2x - 3 = 0$ deňlemäni çözmek bilen, onuň şeklini şeýle çalşyryrys, ýagny *çep böleginde ikiagzanyň kwadraty* $(x + 1)^2$ *emele geldi we sag böleginde näbelli gatnaşmady.*

2-nji mesele. Deňlemäni çözüň:

$$x^2 + 6x - 7 = 0.$$

△ Bu deňlemäni şeýle çalşyryrys, ýagny onuň *çep bölegi ikiagzanyň kwadratyna öwürülsin:*

$$x^2 + 6x = 7,$$

$$x^2 + 2 \cdot 3x = 7,$$

$$x^2 + 2 \cdot 3x + 3^2 = 7 + 3^2,$$

$$(x + 3)^2 = 16.$$

Bu şekil çalşyrmalary düşündirýäris. $x^2 + 6x$ aňlatmada birinji goşulyjy x sanyň kwadraty, ikinjisi bolsa x we 3-üň ikeldilen köpeltmek hasyly. Şonuň üçin deňlemäniň *çep böleginde ikiagzanyň kwadratyny almak* üçin deňlemäniň iki bölegine-de 3^2 -y goşmaly.

$(x + 3)^2 = 16$ deňlemäni çözüp, $x + 3 = 4$ ýa-da $x + 3 = -4$ -i alarys, mundan $x_1 = 1$, $x_2 = -7$. ▲

3-nji mesele. $4x^2 - 8x + 3 = 0$ deňlemäni çözüň.

$$\triangle 4x^2 - 8x = -3,$$

$$(2x)^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2x = -3, (2x)^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2x + 4 = -3 + 4,$$

$$(2x - 2)^2 = 1, 2x - 2 = 1 \text{ yoki } 2x - 2 = -1,$$

$$x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = \frac{1}{2}. \quad \blacktriangle$$

4-nji mesele. $x^2 + 5x - 14 = 0$ deñlemäni çözün.

$$\triangle x^2 + 5x = 14, \quad x^2 + 2 \cdot \frac{5}{2}x + \frac{25}{4} = 14 + \frac{25}{4},$$

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{81}{4}, \quad x + \frac{5}{2} = \pm \frac{9}{2},$$

$$x_1 = \frac{9}{2} - \frac{5}{2} = 2, \quad x_2 = -\frac{9}{2} - \frac{5}{2} = -7. \quad \blacktriangle$$

Ýokarda kwadrat deñlemeleri doly kwadratly dagytmak usuly bilen çözmek garalypdy. Şu usuly umumy görnüşindäki kwadrat deñlemäni çözmek formulasyny getirip çykarmak üçin ulanýarys.

Umumy görnüşindäki kwadrat deñlemä garaýarys:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad \text{munda } a \neq 0.$$

Deñlemäniň iki bölegini hem a -ga bölüp,

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

kwadrat deñlemäni alarys.

Bu deñlemäniň şeklini şeýle çalşyryarys, ýagny onuň çep böleginde *ikiagzanyň doly kwadratly* emele gelsin:

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{b}{a}x &= -\frac{c}{a}, & x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 &= -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2, \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Eger $b^2 - 4ac \geq 0$ bolsa, onda

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2.$$

Mundan

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ýa-da

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (2)$$

(2) formula umumy görnüşindäki kwadrat deňlemäniň kökleriniň formulasy diýilýär.

$D = b^2 - 4ac$ aňlatma $ax^2 + bx + c = 0$ kwadrat deňlemäniň diskriminanty diýilýär. (2) formuladan görnüşi ýaly, kwadrat deňleme:

- 1) $D > 0$ bolsa, x_1 we x_2 – iki dürli köke eýe, $x_1 \neq x_2$;
- 2) $D = 0$ bolsa, $x_1 = x_2$ – bir köke eýe;
- 3) $D < 0$ bolsa, hakyky köklere eýe däl.

1-nji mesele. Deňlemäni çözüň:

$$6x^2 + x - 2 = 0.$$

△ Bu ýerde $a = 6$, $b = 1$, $c = -2$ we $D > 0$, ýagny deňleme iki köke eýe. (2) formula boýunça aşadakilary tapýarys:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-2)}}{2 \cdot 6} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{12} = \frac{-1 \pm 7}{12},$$

mundan

$$x_1 = \frac{-1+7}{12} = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{-1-7}{12} = -\frac{2}{3}.$$

Jogaby: $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{2}{3}$. ▲

2-nji mesele. $4x^2 - 4x + 1 = 0$ deňlemäni çözüň.

△ Bu ýerde $a = 4$, $b = -4$, $c = 1$ we $D = 0$, ýagny deňleme bir köke eýe. (2) formula boýunça aşadakilary tapýarys:

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4} = \frac{4 \pm 0}{8} = \frac{1}{2}.$$

Jogaby: $x = \frac{1}{2}$. ▲

Eger (1) deňligiň sag böleginde otrisatel san dursa, ýagny $D = b^2 - 4ac < 0$ bolsa, onda (1) deňlik x -iň hiç hili hakyky bahasynda dogry bolmaýar, çünki onuň çep bölegi otrisatel däl.

Şonuñ üçin, eger $D = b^2 - 4ac < 0$ bolsa,

$$ax^2 + bx + c = 0$$

deñleme hakyky köklere eýe bolmaýar.

3-nji mesele. $x^2 - 4x + 5 = 0$ deñlemäniñ hakyky köklere eýe dälligini subut ediñ.

△ Bu ýerde $a = 1$, $b = -4$, $c = 5$,

$$D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -4 < 0.$$

Diýmek, berlen deñleme hakyky köklere eýe däl. ▲

4-nji mesele. $2x^2 + 3x + 4 = 0$ deñlemäni çözüñ:

△ (2) formula boýunça aşakdaka eýe bolýarys:

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2 \cdot 4}}{4}.$$

Kök belgisi astynda duran san otrisatel:

$$9 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = 9 - 32 < 0.$$

Jogaby: deñleme hakyky köklere eýe däl. ▲

Bu mysalda $D = b^2 - 4ac = -23 < 0$: hakyky köklerniñ ýoklugyna diskriminanty hasaplap göz ýetirmek üçin hem mümkindi.

Çala kwadrat deñlemeleri hem (2) formula boýunça çözmek mümkin, ýöne olary çözende 23-§-da garalan usullardan peýdalanmak amatlyrak.

Göniükmeler

359. Şeýle položitel m sany tapyñ, ýagny ol netijede berlen aňlatmanyñ jemi-niñ ýa-da tapawudynyñ kwadraty bolsun:

1) $x^2 + 4x + m$;

2) $x^2 - 6x + m$;

3) $x^2 - 14x + m$;

4) $x^2 + 16x + m$;

5) $x^2 + mx + 4$;

6) $x^2 - mx + 9$.

360. Deñlemäni doly kwadraty dagytmak usuly bilen çözüñ:

1) $x^2 + 4x - 5 = 0$;

2) $x^2 + 4x - 12 = 0$;

3) $x^2 + 2x - 15 = 0$;

4) $x^2 - 10x + 16 = 0$;

5) $x^2 - 6x + 3 = 0$;

6) $x^2 + 8x - 7 = 0$.

Deñlemäni çözüň (361–363):

361. 1) $9x^2 + 6x - 8 = 0$; 2) $25x^2 - 10x - 3 = 0$.

362. 1) $x^2 - 5x + 4 = 0$; 2) $x^2 - 3x - 10 = 0$.

363. 1) $2x^2 + 3x - 5 = 0$; 2) $5x^2 - 7x - 6 = 0$.

364. $D = b^2 - 4ac$ aňlatmanyň bahasyny hasaplaň, munda:

1) $a = 3, b = 1, c = -4$; 2) $a = 3, b = -0,2, c = -0,01$;

3) $a = 7, b = -6, c = -45$; 4) $a = -1, b = 5, c = 1800$.

365. Kwadrat deñlemäni çözüň:

1) $2x^2 + 3x + 1 = 0$; 2) $2x^2 - 3x + 1 = 0$;

3) $2x^2 + 5x + 2 = 0$; 4) $2x^2 - 7x + 3 = 0$;

5) $3x^2 + 11x + 6 = 0$; 6) $4x^2 - 11x + 6 = 0$.

366. x -iň nähili bahalarynda aňlatmanyň bahasy nola öwrülýär:

1) $2x^2 + 5x - 3$; 2) $2x^2 - 7x - 4$; 3) $3x^2 + x - 4$;

4) $3x^2 + 2x - 1$; 5) $x^2 + 4x - 3$; 6) $3x^2 + 12x + 10$;

7) $-2x^2 + x + 1$; 8) $-3x^2 - x + 4$; 9) $6x^2 - 5x + 1$?

Kwadrat deñlemäni çözüň (367–368):

367. 1) $9x^2 - 6x + 1 = 0$; 2) $16x^2 - 8x + 1 = 0$;

3) $49x^2 + 28x + 4 = 0$; 4) $36x^2 + 12x + 1 = 0$.

368. 1) $2x^2 + x + 1 = 0$; 2) $3x^2 - x + 2 = 0$;

3) $5x^2 + 2x + 3 = 0$; 4) $x^2 - 2x + 10 = 0$.

369. Aşakdaky deñlemeleri çözmezden, olaryň näçe köke eýe bolýandygyny anyklaň:

1) $2x^2 + 5x - 7 = 0$; 2) $3x^2 - 7x - 8 = 0$;

3) $4x^2 + 4x + 1 = 0$; 4) $9x^2 - 6x + 2 = 0$.

Deñlemäni çözüñ (370–372):

370. 1) $7x^2 - 6x + 2 = 0$;

2) $3x^2 - 5x + 4 = 0$;

3) $9x^2 + 12x + 4 = 0$;

4) $4x^2 - 20x + 25 = 0$;

5) $4x^2 + 12x + 9 = 0$;

6) $x^2 - 3x - 4 = 0$.

371. 1) $6x^2 = 5x + 1$;

2) $5x^2 + 1 = 6x$;

3) $x(x - 1) = 72$;

4) $x(x + 1) = 56$;

5) $2x(x + 2) = 8x + 3$;

6) $3x(x - 2) - 1 = x - 0,5(8 + x^2)$.

372. 1) $\frac{x^2 + 3x}{2} = \frac{x + 7}{4}$;

2) $\frac{x^2 - 3x}{7} + x = 11$;

3) $\frac{2x^2 + x}{3} - \frac{2 - 3x}{4} = \frac{x^2 - 6}{6}$;

4) $\frac{x^2 + x}{4} - \frac{3 - 7x}{20} = 0,3$.

373. Deñlemäni çözüñ:

1) $5x^2 - 8x - 4 = 0$;

2) $4x^2 + 4x - 3 = 0$;

3) $8x^2 - 6x + 1 = 0$;

4) $5x^2 - 26x + 5 = 0$.

374. Deñlemäni doly kwadratly dagytmak usuly bilen çözüñ:

1) $x^2 - 16x + 48 = 0$;

2) $x^2 - 7x - 18 = 0$;

3) $x^2 - 15x + 56 = 0$;

4) $x^2 + 12x + 27 = 0$;

5) $x^2 - 11x + 28 = 0$;

6) $x^2 - 11x + 18 = 0$;

7) $x^2 + 10x + 21 = 0$;

8) $2x^2 - 5x + 2 = 0$;

9) $x^2 - 21x + 20 = 0$;

10) $x^2 - 6x - 55 = 0$;

11) $3x^2 - x - 70 = 0$;

12) $x^2 - 100x + 99 = 0$.

$ax^2 + bx + c = 0$ deñlemäniñ iki bölegini hem $4a$ -ga köpeldip hem $ax^2 + bx + c = 0$ üçagzadan doly kwadrat dagytmak mümkin:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0,$$

$$(2ax)^2 + 2 \cdot 2ax \cdot b + b^2 + 4ac - b^2 = 0,$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac, \text{ bundan, } 2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}.$$

$$\text{Onda, } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Mysal. Doly kvadratty yokardaky usul bilen dagdydyň, $10x^2 + 13x - 3 = 0$ deňlemäni çözüň:

$$\triangle 10x^2 + 13x - 3 = 0, 40 \cdot 10x^2 + 40 \cdot 13x - 3 \cdot 40 = 0,$$

$$(20x)^2 + 2 \cdot 20x \cdot 13 + 13^2 - 13^2 - 3 \cdot 40 = 0,$$

$$(20x + 13)^2 = 169 + 120, (20x + 13)^2 = (17)^2; 20x + 13 = \pm 17;$$

$$x_1 = \frac{17-13}{20} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}; \quad x_2 = \frac{-17-13}{20} = \frac{-30}{20} = -\frac{3}{2}.$$

Jogaby: $x = \frac{1}{5}, x = -\frac{3}{2}$. ▲

375. Deňlemäni görkezilen usul bilen çözbek boluň:

1) $12x^2 - 7x + 1 = 0;$

2) $6x^2 + 5x + 1 = 0;$

3) $8x^2 + 7x - 1 = 0;$

4) $\frac{x^2}{12} - \frac{1}{12}x - 1 = 0.$



№ 4

Gapyrgasynyň uzynlygy 3 cm bolan kub gyzyl reňke boýalan. Ol gapyrgasy 1 cm-li kubjagazlara bölündi. Näçe kub üç gyzyl grana eýe? Iki gyzyl grana eýe? Bir gyzyl grana eýe? Ýekeje-de gyzyl grana eýe däl?

25- §. WIYETIŇ TEOREMASY. KWADRAT ÜÇAGZANY ÇYZYKLY KÖPELDIJILERE DAGYTMAK



Şu

$$x^2 + px + q = 0 \quad (1)$$

görnüşindäki kwadrat deňleme getirilen kwadrat deňleme diýilýär.

Bu deňlemede baş koeffisiýent bire deň. Meselem,

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

deňleme getirilen kwadrat deňlemedir.



Islendik

$$ax^2 + bx + c = 0$$

kwadrat deňlemäni onuň iki bölegini hem $a \neq 0$ -a bölüp, (1) görnüşe getirmek mümkin.

Meselem, $4x^2 + 4x - 3 = 0$ deňlemäni 4-e bölüp, aşakdaky görnüşe getirilýär:

$$x^2 + x - \frac{3}{4} = 0.$$

(1) getirilen kwadrat deňlemäniň köklerini tapýarys. Munuň üçin umumy görnüşindäki $ax^2 + bx + c = 0$ kwadrat deňlemäniň kökleriniň formulasyndan, ýagny

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (2)$$

formuladan peýdalanýarys. Umumy görnüşindäki deňlemede $a=1$, $b=p$, $c=q$ bolsa, getirilen kwadrat deňleme

$$x^2 + px + q = 0$$

emele gelýär. Şu sebäpli getirilen kwadrat deňleme üçin (2) formula

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

ya-da

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad (3)$$

görnüşe eýe bolýar.

(3) formula *getirilen kwadrat deňlemäniň kökleriniň formulasy* diýilýär.

(3) formuladan, aýratynam, p jübüt san bolanda peýdalanmak amatly.

Meselem, $x^2 - 14x - 15 = 0$ deňlemäni çözeliiň.

△ (3) formula boýunça aşakdakyny tapýarys:

$$x_{1,2} = 7 \pm \sqrt{49 + 15} = 7 \pm 8.$$

Jogaby: $x_1 = 15$, $x_2 = -1$. ▲

Getirilen kwadrat deňleme üçin aşakdaky teorema ýerlikli:



Wiýetiň teoremasy. *Eger x_1 we x_2 ler*

$$x^2 + px + q = 0$$

deňlemäniň kökleri bolsa, onda

$$x_1 + x_2 = -p,$$

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

formulalar ýerlikli, ýagny getirilen kwadrat deňlemäniň kökleriniň jemi garşylykly alamaty bilen alnan ikinji koeffisiýentine, kökleriň köpeltmek hasyly bolsa azat agza deň.

○ (3) formula boýunça:

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q},$$

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Bu deňlikleri agzama-agza goşsak, $x_1 + x_2 = -p$ bolýar. Bu deňlikleri köpeldip, kwadratlaryň tapawudynyň formulasy boýunça aşakdakyny alarys:

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = q. \quad \bullet$$

Meselem, $x^2 - 13x + 30 = 0$ deňleme $x_1 = 10$, $x_2 = 3$ köklere eýe; onuň kökleri jemi $x_1 + x_2 = 13$, olaryň köpeltmek hasyly bolsa $x_1 \cdot x_2 = 30$.

Wiýetiň teoremasy kwadrat deňleme iki deň $x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}$ köklere eýe bolan ýagdaýda-da dogry bolýandygyny nygtap geçýäris.

Meselem, $x^2 - 6x + 9 = 0$ deňleme iki deň $x_1 = x_2 = 3$ köklere eýe; olaryň jemi $x_1 + x_2 = 6$, köpeltmek hasyly $x_1 \cdot x_2 = 9$.

1-nji mesele. $x^2 + px - 12 = 0$ deňlemäniň köklerinden biri $x_1 = 4$. Şu deňlemäniň p koeffisiýentini we ikinji köki x_2 -ni tapyň.

△ Wiýetiň teoremasyna görä:

$$x_1 \cdot x_2 = -12, x_1 + x_2 = -p.$$

$x_1 = 4$ bolany üçin $4x_2 = -12$, mundan $x_2 = -3$,

$$p = -(x_1 + x_2) = -(4 - 3) = -1.$$

Jogaby: $x_2 = -3$, $p = -1$. ▲

2-nji mesele. Kökleri $x_1 = 3$, $x_2 = 4$ bolan getirilen kwadrat deňleme düzün.

△ $x_1 = 3$; $x_2 = 4$ sanlary $x^2 + px + q = 0$ deňlemäniň kökleri bolany üçin Wiýetiň teoremasyna görä $p = -(x_1 + x_2) = -7$, $q = x_1 x_2 = 12$.

Jogaby: $x^2 - 7x + 12 = 0$. ▲

3-nji mesele. $3x^2 + 8x - 4 = 0$ deňlemäniň köklerinden biri položitel. Deňlemäni çömezden, ikinji köküň alamatyny anyklaň:

△ Deňlemäniň iki bölegini hem 3-e bölüp, aşakdakyny alarys:

$$x^2 + \frac{8}{3}x - \frac{4}{3} = 0.$$

Wiýetiň teoremasyna görä $x_1 x_2 = -\frac{4}{3} < 0$. Şerte görä $x_1 > 0$, diýmek, $x_2 < 0$.



Käbir meseleleri çözendä *Wiýetiň teoremasyna ters bolan* aşakdaky teorema ulanylýar.



Eger p, q, x_1, x_2 sanlar üçin

$$x_1 + x_2 = -p, x_1 \cdot x_2 = q \quad (4)$$

gatnaşyklar ýerine ýetirilse, onda x_1 we x_2 sanlar

$$x^2 + px + q = 0$$

deňlemäniň kökleri bolýar.

○ Çep bölekdäki

$$x^2 + px + q$$

aňlatmada p -niň ýerine $-(x_1 + x_2)$ ni, q -nyň ýerine bolsa $x_1 \cdot x_2$ köpeltmek hasylyny goýýarys. Netijede aşakdaky aňlatma emele gelýär:

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = \\ &= x^2 - x_1 x - x_2 x + x_1 x_2 = x(x - x_1) - x_2(x - x_1) = \\ &= (x - x_1)(x - x_2). \end{aligned}$$

Şeýdip, eger p, q, x_1 we x_2 sanlar (4) gatnaşyklar bilen baglanan bolsa, onda x -iň islendik bahasynda

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$$

deňlik ýerine ýetirilýär, mundan bolsa x_1 we x_2 -ler $x^2 + px + q = 0$ deňlemäniň kökleri dişi gelip çykýar. ●

Wiýetiň teoremasyna ters teoremadan peýdalanyp, kwadrat deňlemäniň köklerini käte *saýlamak usuly* bilen tapmak mümkin.

4-nji mesele. Saýlamak usuly bilen

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

deňlemäniň köklerini tapyň.

△ Bu ýerde $p=-5$, $q=6$. Iki x_1 we x_2 sany

$$x_1 + x_2 = 5, \quad x_1 x_2 = 6$$

bolýan edip saýlaýarys.

$6=2 \cdot 3$ we $2+3=5$ bolýandygyny hasaba alyp, Wiýetiň teoremasyna ters teorema boýunça $x_1=2$, $x_2=3$ -e, ýagny $x^2-5x+6=0$ deňlemäniň köklerine eýe bolýarys. ▲

5-nji mesele. $\frac{x^2-x-12}{x+3}$ droby gysgaldyň.

△ Drobuň sanawjysyny köpeldijilere dagydyarys:

$$\begin{aligned} x^2 - x - 12 &= x^2 - 4x + 3x - 12 = \\ &= x(x-4) + 3(x-4) = (x-4)(x+3). \end{aligned}$$

Diýmek,

$$\frac{x^2-x-12}{x+3} = \frac{(x-4)(x+3)}{x+3} = x-4. \quad \blacktriangle$$

ax^2+bx+c köpagza kwadrat üçagza diýilýär, munda $a \neq 0$.

5-nji meseläni çözende x^2-x-12 kwadrat üçagza toparlamak usuly bilen köpeldijilere dagydyldy. Ony aşakdaky teoremadan peýdalanyp hem köpeldijilere dagytmak mümkindi.



Teorema. Eger x_1 we x_2 -ler $ax^2+bx+c=0$ kwadrat deňlemäniň kökleri bolsa, onda ähli x üçin aşakdaky deňlik dogry bolýar:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2). \quad (5)$$

○ (5) deňligiň sag böleginde duran aňlatmanyň şeklini çalşyryarys:

$$\begin{aligned} a(x - x_1)(x - x_2) &= ax^2 - ax \cdot x_1 - ax \cdot x_2 + ax_1 x_2 = \\ &= ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1 x_2. \end{aligned} \quad (6)$$

x_1 we x_2 -ler $ax^2+bx+c=0$ deňlemäniň, ýagny $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ deňlemäniň kökleri bolany üçin Wiýetiň teoremasyna görä,

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a},$$

mundan $a(x_1 + x_2) = -b$, $ax_1 x_2 = c$.

Bu aʼlatmalary (6) deʼnlige goʻyup, (5) formulany alarys. ●

(5) formula $ax^2 + bx + c$ kwadrat üçagza çyzykly köpeldijilere dagydylandygyny aʼladýar.

6-njy mesele. $\frac{2x^2+5x-3}{x^2-x-12}$ aʼlatmany ýönekeýleşdiriň.

△ Drobuñ sanawjysyny we maýdalawjysyny köpeldijilere dagydýarys.

1) $2x^2 + 5x - 3 = 0$ deñleme iki köke eýe:

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = -3.$$

Subut edilen teorema görä

$$2x^2 + 5x - 3 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 3) = (2x - 1)(x + 3).$$

2) $x^2 - x - 12 = 0$ deñleme $x_1 = -3$, $x_2 = 4$ köklere eýe. Subut edilen teorema görä $x^2 - x - 12 = (x + 3)(x - 4)$.

Şeýdip,

$$\frac{2x^2+5x-3}{x^2-x-12} = \frac{(2x-1)(x+3)}{(x+3)(x-4)} = \frac{2x-1}{x-4}. \quad \blacktriangle$$

Gönükmeler

376. Getirilen kwadrat deñlemäni çözüň:

1) $x^2 + 4x - 5 = 0$;

2) $x^2 - 6x - 7 = 0$;

3) $x^2 - 8x - 9 = 0$;

4) $x^2 + 6x - 40 = 0$;

5) $x^2 + x - 6 = 0$;

6) $x^2 - x - 2 = 0$.

377. (Ўатдан.) Getirilen kwadrat deňlemäniň kökleriniň jemini we köpeltmek hasylyny aýdyň:

1) $x^2 - x - 2 = 0$;

2) $x^2 - 5x - 6 = 0$;

3) $x^2 + 3x + 2 = 0$;

4) $x^2 + 3x - 4 = 0$;

5) $x^2 - 7x + 5 = 0$;

6) $x^2 + 9x - 6 = 0$.

378. (Ўатдан.) $x^2 - 19x + 18 = 0$ deňlemäniň köklerinden biri 1-e deň. Onuň ikinji kökünü tapyň.

379. (Ўатдан.) $28x^2 + 23x - 5 = 0$ deňlemäniň köklerinden biri 1-e deň. Onuň ikinji kökünü tapyň.

380. (Ўатдан.) Deňlemäni çözmezden, onuň kökleriniň alamatlaryny anyklaň:

1) $x^2 + 4x - 5 = 0$;

2) $x^2 + 5x + 3 = 0$;

3) $x^2 - 5x + 3 = 0$;

4) $x^2 - 8x - 7 = 0$.

381. Kökleri x_1 we x_2 bolan getirilen kwadrat deňlemäni ýazyň:

1) $x_1 = 3, x_2 = -1$;

2) $x_1 = 2, x_2 = 3$;

3) $x_1 = -4, x_2 = -5$;

4) $x_1 = -3, x_2 = 6$.

382. Saýlamak ýoly bilen deňlemäniň köklerini tapyň:

1) $x^2 + 5x + 6 = 0$;

2) $x^2 - 7x + 12 = 0$;

3) $x^2 - 6x + 5 = 0$;

4) $x^2 + 8x + 7 = 0$;

5) $x^2 - 8x + 15 = 0$;

6) $x^2 + 2x - 15 = 0$.

383. Kwadrat üçagzany köpeldijilere dagydyň:

1) $x^2 - 5x + 6$;

2) $x^2 + 4x - 5$;

3) $x^2 + 5x - 24$;

4) $x^2 + x - 42$;

5) $2x^2 - x - 1$;

6) $8x^2 + 10x + 3$;

7) $-6x^2 + 7x - 2$;

8) $-4x^2 - 7x + 2$.

384. Droby gysgaldyň:

$$\begin{array}{lll} 1) \frac{x^2+x-2}{x-1}; & 2) \frac{x^2+4x-12}{x-2}; & 3) \frac{x+3}{x^2-6x-27}; \\ 4) \frac{x-8}{x^2-x-56}; & 5) \frac{2x^2-3x-2}{4x^2-1}; & 6) \frac{3x^2+8x-3}{9x^2-1}. \end{array}$$

385. Getirilen kwadrat deňlemäni çözüň:

$$\begin{array}{ll} 1) x^2 - 2\sqrt{3}x - 1 = 0; & 2) x^2 - 2\sqrt{5}x + 1 = 0; \\ 3) x^2 + \sqrt{2}x - 4 = 0; & 4) x^2 - 4\sqrt{7}x + 4 = 0. \end{array}$$

386. Köpeldijilere dagydyň:

$$\begin{array}{lll} 1) x^3 - 3x^2 + 2x; & 2) x^3 + 4x^2 - 21x; & 3) x^3 + 5x^2 - 24x; \\ 4) x^3 - 9x^2 - 22x; & 5) x^3 - 8x^2 + 7x; & 6) x^3 - 5x^2 + 6x. \end{array}$$

387. Droby gysgaldyň:

$$1) \frac{x^2+6x-7}{x^2-7x+6}; \quad 2) \frac{x^2-8x-9}{x^2+9x+8}; \quad 3) \frac{x^2-8x+15}{-x^2+5x-6}; \quad 4) \frac{36+5x-x^2}{x^2-x-20}.$$

388. Aňlatmany ýönekeýleşdirin:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{1}{x^2-7x+12} + \frac{1}{x-3}; & 2) \frac{3}{x^2+6x+9} - \frac{1}{x+3}; \\ 3) \frac{7}{5x^2+3x-2} - \frac{5}{5x-2}; & 4) \frac{5x+1}{x^2+9x-10} : \frac{5x^2+x}{x^2-2x+1}. \end{array}$$

26- §. BIKWADRAT DEŇLEME. KWADRAT DEŇLEMÄ GETIRILÝÄN DEŇLEMELER

1-nji mesele. Deňlemäni çözüň:

$$x^4 - 7x^2 + 12 = 0.$$

△ $x^2 = t$ diýip *belgileyäris*. Munda deňleme aşakdaky görnüşe geçýär:

$$t^2 - 7t + 12 = 0.$$

Bu kwadrat deñlemäni çözüäris:

$$t_1 = 4, t_2 = 3.$$

$x^2 = t$ bolany üçin berlen deñlemäni çözmek aşakdaky iki deñlemäni çözmäge getirilýär:

$$x^2 = 4, x^2 = 3,$$

mundan:

$$x_{1,2} = \pm 2, x_{3,4} = \pm \sqrt{3}.$$

Jogaby: $x_{1,2} = \pm 2, x_{3,4} = \pm \sqrt{3}$. ▲



Şu

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

görnüşindäki deñlemä bikwadrat deñleme diýilýär, munda $a \neq 0$.

$x^2 = t$ belgilemek bilen bu deñleme kwadrat deñlemä getirilýär.

2-nji mesele. Bikwadrat deñlemäni çözüň:

$$9x^4 + 5x^2 - 4 = 0.$$

▲ $x^2 = t$ diýip belgileýäris. Onda

$$9t^2 + 5t - 4 = 0.$$

Bu kwadrat deñlemäni çözüp, tapýarys:

$$t_1 = \frac{4}{9}, t_2 = -1.$$

$x^2 = \frac{4}{9}$ deñleme $x_{1,2} = \pm \frac{2}{3}$ köklere eýe, $x^2 = -1$ deñleme bolsa hakyky köklere eýe däl.

Jogaby: $x_{1,2} = \pm \frac{2}{3}$. ▲

3-nji mesele. Deñlemäni çözüň:

$$\frac{3}{x+2} - \frac{4}{x-3} = 3.$$

△ Deñlemedäki droblaryň umumy maýdalawjysy $(x+2)(x-3)$ -e deň. Eger $x+2 \neq 0$ va $x-3 \neq 0$ bolsa, onda deñlemäniň iki bölegini hem $(x+2)(x-3)$ -e köpeldip, alarys:

$$3(x-3) - 4(x+2) = 3(x+2)(x-3).$$

Bu deñlemäniň şeklini çalşyryarys:

$$3x - 9 - 4x - 8 = 3(x^2 - x - 6),$$

$$-x - 17 = 3x^2 - 3x - 18,$$

$$3x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Emele gelen kwadrat deñlemäni çözüp, onuň köklerini taparys:

$$x_1 = 1; x_2 = -\frac{1}{3}.$$

$x=1$ we $x=-\frac{1}{3}$ bolanda berlen droblaryň maýdalawjylary nola öwrülmänligi üçin 1 we $-\frac{1}{3}$ sanlary şu deñlemäniň kökleri bolýar.

Jogaby: $x_1 = 1; x_2 = -\frac{1}{3}$. ▲

4-nji mesele. Deñlemäni çözüň:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} + \frac{3}{x-1} = \frac{3-x}{x-2}, x \neq 1, x \neq 2. \quad (1)$$

△ Şerte görä $(x-1)(x-2) \neq 0$. Deñlemäniň iki bölegini hem $(x-1)(x-2)$ -ä köpeldip, aşadakyňy alarys:

$$1 + 3(x-2) = (3-x)(x-1).$$

Bu deñlemäniň şeklini çalşyryarys:

$$1 + 3x - 6 = -x^2 + 4x - 3, \quad (2)$$

$$x^2 - x - 2 = 0.$$

Emele gelen kwadrat deñlemäni çözüp, onuň köklerini taparys:

$$x_1 = -1, x_2 = 2.$$

$x = -1$ bolanda berlen deñlemedäki maýdalawjylar nola öwrülmeýär. Diýmek, -1 sany – berlen deñlemäniň köki. $x = 2$ bolanda berlen deñlemedäki iki drobuň maýdalawjysy nola deň. Şonuň üçin 2 sany berlen deñlemäniň köki bolmaýar.

Jogaby: $x = -1$. ▲

4-nji meselede berlen (1) deñleme iki köke eýe bolan (2) kwadrat deñlemä getirildi. Olardan biri, ýagny $x_1 = -1$ (1) deñlemäniň köki bolýar. Ikinji $x_2 = 2$ kök (1) deñlemäniň köki bolmaýar. Munda ol *del kök* diýilýär.

Şeýdip, deñlemäni näbelli gatnaşan aňlatma köpeldende del kökler peýda bolmagy mümkin. Şonuň üçin *näbelli drobuň maýdalawjysynda gatnaşýan deñlemeleri çözendä barlag geçirmeli*.

5-nji mesele. Deñlemäni çözüň:

$$\frac{x+7}{x+4} - \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x^2+7x+12} = 0.$$

Bu ýaly deñlemeler *drob-rasional deñlemelere* mysal bolýar.

△ $x^2 + 7x + 12$ kwadrat üçagzany köpeldijilere dagydýarys. $x^2 + 7x + 12 = 0$ deñlemäni çözüp, onuň $x_1 = -3$, $x_2 = -4$ köklerini tapýarys. Şonuň üçin

$$x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4).$$

Deñlemäniň iki bölegini hem droblaryň umumy maýdalawjysyna, ýagny $(x+3)$ $(x+4)$ -e köpeldýäris. Netijede aşakdaka eýe bolýarys.

$$(x + 7)(x + 3) - (x + 4) + 1 = 0.$$

Deñlemäniň şeklini çalşyryarys:

$$x^2 + 10x + 21 - x - 4 + 1 = 0,$$

$$x^2 + 9x + 18 = 0.$$

Bu deñlemäni çözüp, onuň köklerini tapýarys:

$$x_1 = -3, x_2 = -6.$$

Indi kökleri barlaýarys. $x = -3$ bolanda berlen deñleme ikinji we üçünji droblarynyň maýdalawjylary nola öwrülýär. Şonuň üçin $x_1 = -3$ – del kök.

$x = -6$ bolanda berlen deňleme droblarynyň maýdalawjylary nola deň däl. $x = -6$ -ny berlen deňlemä goýup, bu san deňlemäniň köki bolýandygyna göz ýetirmek mümkin.

Jogaby: $x = -6$. ▲

Gönükmeler

Deňlemäni çözüň (389–392):

389. 1) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$; 2) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$;
3) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$; 4) $x^4 - 50x^2 + 49 = 0$.

390. 1) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$; 2) $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$;
3) $x^4 + x^2 - 20 = 0$; 4) $x^4 - 4x^2 - 5 = 0$.

391. 1) $\frac{10}{x-3} - \frac{8}{x} = 1$; 2) $\frac{2}{x-5} + \frac{14}{x} = 3$;
3) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} = \frac{3}{20}$; 4) $\frac{40}{x-20} - \frac{40}{x} = 1$;
5) $\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x+3} = \frac{5}{8}$; 6) $\frac{4}{x-2} + \frac{4}{x+2} = 1,5$.

392. 1) $\frac{3x+4}{x-6} = \frac{x-2}{4x+3}$; 2) $\frac{x+2}{x-2} + \frac{x-2}{x+2} = \frac{13}{6}$;
3) $\frac{x+5}{x+2} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1}$; 4) $\frac{x^2-2x-5}{(x-3)(x-1)} + \frac{1}{x-3} = 1$;
5) $\frac{x^2}{x+3} - \frac{x}{-3-x} = \frac{6}{x+3}$; 6) $\frac{x^2}{x-1} - \frac{2x}{1-x} = \frac{3}{x-1}$.

393. Deňleme hakyky köklere eýemi:

1) $x^4 - 5x^2 + 7 = 0$; 2) $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$?

394. x -iň nähili bahalarynda aňlatmalaryň bahalary bir-birine deň:

1) $\frac{6}{x^2-1} + \frac{2}{1-x}$ we $2 - \frac{x+4}{x+1}$; 2) $\frac{6}{x+2} - \frac{3}{x-2}$ we $\frac{14}{4-x^2} + 1$?

Değişli *belgileme girizip*, deñlemäni çözüñ (395–399):

395. 1) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$; 2) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$;
 3) $9x^4 + 23x^2 - 12 = 0$; 4) $16x^4 - 409x^2 + 225 = 0$;
 5) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$; 6) $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$;
 7) $4x^4 - 9x^2 + 2 = 0$; 8) $6x^4 - 5x^2 + 1 = 0$.

396. 1) $(x+3)^4 - 13(x+3)^2 + 36 = 0$; *Belgileme:* $(x+3)^2 = t$
 2) $(2x-1)^4 - 13(2x-1)^2 - 12 = 0$; $(2x-1)^2 = t$
 3) $(x-1)^4 - x^2 + 2x - 73 = 0$; $(x-1)^2 = t$
 4) $(x+2)^4 - 2x^2 - 8x - 16 = 0$; $(x+2)^2 = t$
 5) $(x^2 + 6x)^2 + 8(x^2 + 6x) - 9 = 0$; $(x^2 + 6x) = t$
 6) $(x^2 - 16x)^2 - 2(x^2 - 16x) - 63 = 0$; $(x^2 - 16x) = t$

397. 1) $(x+1)^2 \cdot (x^2 + 2x) = 12$;
 2) $(x-2)^2 \cdot (x^2 - 4x) + 3 = 0$;
 3) $(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 3x + 3) + 1 = 0$;
 4) $(x^2 - 5x + 2)(x^2 - 5x - 1) = 28$;
 5) $x(x+1)(x+2)(x+3) = 0,5625$;
 6) $(x-2)(x-3)(x+2)(x-7) + 36 = 0$.

398. 1) $\frac{x+4}{x-4} + \frac{x-4}{x+4} = 3\frac{1}{3}$; 2) $\frac{x^2 - 2x}{4x - 3} + 5 = \frac{16x - 12}{2x - x^2}$;
 3) $\frac{x^2 + 4x}{7x - 2} - \frac{12 - 42x}{x^2 + 4x} = 7$; 4) $\left(\frac{4x-5}{3x+2}\right)^2 + \left(\frac{3x+2}{5-4x}\right)^2 = 4,25$;
 5) $\left(\frac{5x+1}{2x-3}\right)^2 + \left(\frac{3-2x}{5x+1}\right)^2 = \frac{82}{9}$; 6) $\left(\frac{5x-2}{2x+1}\right)^2 + \left(\frac{2x+3}{2-5x}\right)^2 = 3\frac{31}{225}$;
 7) $\frac{x^2 + 1}{x} + \frac{x}{x^2 + 1} = -2,5$.

399. 1) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 3 = 0;$ Belgileme: $\left(x + \frac{1}{x}\right) = t.$

2) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 4 = 0;$

3) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 6 = 0;$

4) $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) + 5 = 0;$

5) $(x^2 + 3x + 2)(x^2 + 3x - 4) = -5;$

6) $(x^2 - 5x + 4)(x^2 - 5x + 6) = 120.$

400. Aşakdaky deňlemelerin her biri üçin: 1) ähli kökleriniň jemini; 2) ähli kökleriniň köpeltmek hasylyny; 3) otrisatel kökleriniň jemini; 4) položitel kökleriniň köpeltmek hasylyny; 5) iň uly we iň kiçi kökleriniň tapawudyny; 6) iň uly položitel köküniň iň kiçi položitel köküne gatnaşygyny tapyň:

1) $x^4 - 26x^2 + 25 = 0;$ 2) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0;$

3) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0;$ 4) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0;$

5) $x^4 - 19x^2 + 90 = 0;$ 6) $x^4 - 11x^2 + 28 = 0.$

401. Deňlemäni çözüň:

1) $(x^2 - 8)^2 + 4(x^2 - 8) = 5;$

2) $x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24 = 0;$

3) $(x + 5)^4 - 13(x + 5)^2 \cdot x^2 + 36x^4 = 0;$

4) $5x^4 + 20x^3 - 40x + 17 = 0;$

5) $x^2 + \left(\frac{x}{x-1}\right)x^2 = 8.$

27-§. KWADRAT DEŃLEMELERİŇ KÖMEGINDE MESELELER ÇÖZMEK

Kwadrat deňlemelerin kömeginde birnäçe mesele çözüäris.

1-nji mesele. Şahta daş taşlandy we onuň şahtanyň düýbüne urlanda çykaran sesi 9 sekuntadan soň eşidildi. Sesiň tizligini 320 m/s, agyrlyk güýjüniň tizlenmesini bolsa $g=10 \text{ m/s}^2$ diýip hasaplap, şahtanyň çuňlugyny anyklaň.

△ Şahtanyň çuňlugyny tapmak üçin daşyň şahtanyň düýbüne gaçýan wagty t -ni anyklamak ýeterli, çünki şahtanyň çuňlugy erkin gaçma kanunyna görä

$$\frac{gt^2}{2} \text{ metre deň.}$$

Şert boýunça $g=10 \text{ m/s}^2$. Şonuň üçin şahtanyň çuňlugy $5t^2$ metre deň.

Ikinji tarapdan, şahtanyň çuňlugyny sesiň tizligi 320 m/s-y daşyň şahtanyň düýbüne baryp degen pursatdan tä zarbanyň sesi eşidilýänçe geçen wagtga, ýagny $(9-t)$ sekunda köpeldip tapmak mümkin. Diýmek, şahtanyň çuňlugy $320(9-t)$ metre deň.

Şahtanyň çuňlugyny anyklamak üçin tapylan iki aňlatmany deňleşdirip, $5t^2=320(9-t)$ deňlemäni alarys. Bu deňlemäni çözüäris:

$$t^2 - 64(9-t) = 0,$$

$$t^2 + 64t - 64 \cdot 9 = 0.$$

Alnan kwadrat deňlemäniň köklerini tapýarys:

$$t_{1,2} = -32 \pm \sqrt{32^2 + 64 \cdot 9} = -32 \pm \sqrt{32(32+18)} =$$

$$= -32 \pm \sqrt{32 \cdot 50} = -32 \pm \sqrt{16 \cdot 100} = -32 \pm 40,$$

$$t_1 = 8, t_2 = -72.$$

Daşyň gaçýan wagty položitel bolany üçin $t=8 \text{ s}$ bolýar,

Diýmek, şahtanyň çuňlugy aşakdaka deň:

$$5t^2 = 5 \cdot 8^2 = 320(\text{m}).$$

Jogaby: 320 m. ▲

2-nji mesele. Tiz ýöreyän awtobus awtowokzaldan 40 km uzaklykdaky aeroporta tarap ugrady. Aradan 10 minut geçenden soň awtobusyň yzyndan

taksida yólagçy ugrady. Taksiniñ tizligi awtobusyñ tizliginden 20 km/h artyk. Eger olar aeroporta bir wagtda ýetip gelen bolsa, taksi bilen awtobusyñ tizligini tapyñ.

△ Awtobusyñ tizligi x km/h bolsun, munda taksiniñ tizligi $(x+20)$ km/h bolýar. Awtobusyñ hereket wagty $\frac{40}{x}$ sagat, taksiniñ hereket wagty bolsa $\frac{40}{x+20}$ sagat bolýar. Meseläniñ şertine görä, awtobus bilen taksiniñ hereketleriniñ wagtynyñ arasyndaky tapawut 10 min-a deň, ýagny $\frac{1}{6}$ sagat. Diýmek,

$$\frac{40}{x} - \frac{40}{x+20} = \frac{1}{6}. \quad (1)$$

Emele gelen deňlemäni çözüäris. Deňlemäniñ iki bölegini hem $6x(x+20)$ -ä köpeldip, aşakdakyny alarys:

$$40 \cdot 6 \cdot (x+20) - 40 \cdot 6x = x(x+20),$$

$$240x + 4800 - 240x = x^2 + 20x,$$

$$x^2 + 20x - 4800 = 0.$$

Bu deňlemäniñ kökleri:

$$x_1 = 60, x_2 = -80.$$

x -iñ bu bahalarynda (1) deňlemä girýän droblaryñ maýdalawjylary nola deň däl. Şonuñ üçin $x_1 = 60$ we $x_2 = -80$ (1) deňlemäniñ kökleri bolýar.

Awtobusyñ tizligi položitel bolany üçin, meseläniñ şertini diňe bir kök kanagatlandyryr: $x = 60$. Şonuñ üçin taksiniñ tizligi 80 km/h-a deň.

Jogaby: awtobusyñ tizligi 60 km/h, taksiniñ tizligi 80 km/h. ▲

3-nji mesele. Golýazmany göçürmek üçin birinji operator ikinjisine garanda 3 sagat kem wagt sarplaýar. Olar bilelikde işläp hemme golýazmany 6 sagat 40 minutda göçürüp boldular. Hemme golýazmany göçürmek üçin olaryñ her birine näçeden wagt talap edilyär?

△ Hemme golýazmany göçürmek işini bir birlik, diýip kabul edýäris. Birinji operator golýazmany göçürmek üçin x sagat sarplan bolsun. Onda ikinji operatora bu iş üçin $(x+3)$ sagat talap edilyär. Birinji operator bir sagatda

işin $\frac{1}{x}$ bölegini, ikinjisi bolsa $\frac{1}{x+3}$ bölegini yerine yetirýär. Olar bilelikde işläp, bir sagatda hemme işin $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3}$ bölegini yerine yetirýärler, 6 sagat 40 minutda, ýagny $6\frac{2}{3}$ sagatda bolsa olar hemme işi yerine yetirýärler. Şonuň üçin

$$6\frac{2}{3}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3}\right) = 1.$$

Bu deňlemäni aşakdaky ýaly ýazmak mümkin:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} = \frac{3}{20}. \quad (2)$$

Onuň iki bölegini hem $20x(x+3)$ -a köpeldip, aşakdakyny alarys:

$$20(x+3) + 20x = 3x(x+3),$$

$$40x + 60 = 3x^2 + 9x,$$

$$3x^2 - 31x - 60 = 0.$$

Bu deňlemäniň kökleri:

$$x_1 = 12, \quad x_2 = -\frac{5}{3}.$$

x -iň bu bahalarynda (2) deňlemä girýän droblaryň maýdalawjylary nola deň däl. Şonuň üçin $x_1 = 12$ we $x_2 = -\frac{5}{3}$ (2) deňlemäniň kökleri.

Meseläniň manysyna görä $x > 0$ bolany üçin $x = 12$. Diýmek, birinji operator işe 12 sagat, ikinjisi bolsa 12 sagat + 3 sagat = 15 sagat sarplaýar.

Jogaby: 12 sagat we 15 sagat. ▲

Göniükmeler

402. Köpeltmek hasyly: 1) 156; 2) 210; 3) 342; 4) 600-e deň bolan iki yzygider gelýän natural sany tapyň.

- 403.** Köpeltmek hasyly: 1) 255; 2) 399-a deň bolan iki yzygider gelyän täk sany tapyň.
- 404.** Gönüburçlugyň perimetri 1 m, meýdany bolsa 4 dm². Onuň taraplarynyň uzynlygyny tapyň.
- 405.** Meýdany 2,45-e bolan bag 630 m uzynlykdaky diwar bilen gurşalan. Eger bag gönüburçluk şeklinde bolsa, onuň uzynlygyny we inini tapyň.
- 406.** 400 km aralygy tiz ýöreýän otly ýük otlusyna garanda 1 sagat tizräk geçdi. Eger ýük otlusynyň tizligi tiz ýöreýän otlynyňkydan 20 km/h kem bolsa, her bir otlynyň tizligi nähili?
- 407.** Gämi derýanyň akymy boýunça *A* duralgadan *B* duralga bardy. Gämi ýarym sagat togtandan soň yzyna ugrady we *A*-dan çykanyndan 8 sagat soň ýene *A* duralga gaýdyp geldi. *A* we *B* duralgalaryň arasyndaky aralyk 36 km, derýanyň akymynyň tizligi bolsa 2 km/h bolsa, gäminiň ýata suwdaky tizligini tapyň.
- 408.** Iki topar hünärmenler bilelikde işläp obada täze gurlan keselhanany döwrebap lukmançylyk gural-enjamlary bilen enjamlaşdyrmak we olary sazlamak işlerini 12 günde tamamladylar. Eger toparlardan biri bu işi ikinjisine garanda 10 gün kem wagtda hötdesinden gelse, her bir topar aýratyn işläp ony näçe günde ýerine ýetirer?
- 409.** Kwadrat şeklidäki tünükeden 6 cm giňlikdäki tünüke gyrkyp alyndy. Galan böleginiň meýdany 135 cm²-a deň. Kwadratnyň deslapky ölçeglerini tapyň.
- 410.** Gönüburçly üçburçlugyň meýdany 180 cm². Eger katetlerinden biri ikinjisinden 31 cm uly bolsa, şu üçburçlugyň katetlerini tapyň.
- 411.** 30 km-lik aralygy welosipedçilerden biri ikinjisine garanda 20 min tizräk geçdi. Birinji welosipedçiniň tizligi ikinjisiniňkiden 3 km/h artykdy. Her bir welosipedçiniň tizligi nähili?
- 412.** Iki gurluşykçy topary bilelikde işläp, goýunlar üçin 6 günde goýun ýatak (agyl) gurdular. Eger bu işi ýerine ýetirmek üçin birinji topara ikinjisine garanda 5 gün artyk talap edilse, her bir topar aýratyn işläp, şeýle goýun ýatagy näçe günde gurup tamamlar?



№ 5

$x^4 + 2006x^2 + 2005x + 2006$
Köpagzany köpeldijilere dagydyň.

III baba degişli gönükmeler

Deňlemäni çözüň (413–415):

413. 1) $x^2 - 12 = 0$; 2) $x^2 - 50 = 0$; 3) $\frac{1}{3}x^2 + 2x = 0$;

4) $3x - \frac{2}{5}x^2 = 0$; 5) $x^2 - 48 = 0$; 6) $2x - \frac{1}{2}x^2 = 0$.

414. 1) $x^2 + 4x - 45 = 0$; 2) $x^2 - 9x - 52 = 0$;

3) $3x^2 - 7x - 40 = 0$; 4) $5x^2 + 17x - 126 = 0$.

415. 1) $4x^2 - 2x - 3 = 0$; 2) $9x^2 - 3x - 4 = 0$;

3) $4x^2 - 8x - 1 = 0$; 4) $3x^2 + 4x - 1 = 0$.

416. Deňlemäni çözmezden, onuň näçe hakyky köke eýe bolýandygyny anyklaň:

1) $x^2 - 5x + 6 = 0$; 2) $5x^2 + 7x - 8 = 0$;

3) $25x^2 - 10x + 1 = 0$; 4) $9x^2 + 30x + 25 = 0$.

417. Kwadrat üçagzany köpeldijilere dagydyň:

1) $x^2 + 12x + 30$; 2) $x^2 - 10x + 16$; 3) $2x^2 + x - 1$;

4) $2x^2 - 3x - 2$; 5) $x^2 + 8x + 7$; 6) $2x^2 - 3x + 1$.

418. Droby gysgaldyň:

1) $\frac{x^2 - 9}{x + 3}$; 2) $\frac{x^3 + 4x^2 + 4x}{x + 2}$; 3) $\frac{16x^2 - 24x + 9}{4x^2 + 5x - 6}$;

4) $\frac{25x^2 + 10x + 1}{5x^2 - 14x - 3}$; 5) $\frac{x^2 - 25}{x - 5}$; 6) $\frac{x^2 + 5x + 6}{x + 3}$.

Deñlemäni çözüň (419–420):

419. 1) $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$; 2) $x^4 - 11x^2 + 18 = 0$;
3) $2x^4 - 5x^2 + 2 = 0$; 4) $5x^4 - 16x^2 + 3 = 0$.

420. 1) $\frac{x}{x-2} + \frac{3}{x} = \frac{3}{x-2}$; 2) $\frac{x^2}{x^2+3x} + \frac{2+x}{x+3} = \frac{5-x}{x}$;
3) $\frac{y+3}{y^2-y} + \frac{6-y}{1-y^2} = \frac{y+5}{y+y}$; 4) $\frac{y+4}{y-4} + \frac{y}{4-y} = -\frac{4}{y+2}$.

421. Mi-6 wertolýotunyň howa görä tizligi 300 km/h. Ol 224 km aralygy iki gezek uçup geçdi: birinji gezek şemalyň ugrы boýunça, ikinji gezek şemalyň ugruna garşы. Eger wertolýot şemala garşы uçanda şemalyň ugrы boýunça uçandaka garanda 6 min köp wagт sarplan bolsa, şemalyň tizligini anyklaň.

422. Welosipedçiniň ýoluň birinji ýarysyndaky tizligi onuň ikinji ýarysyndaky tizliginden 3 km/h artyk boldy. Eger welosipedçi 90 km-lik ähli ýoly 5,5 sagatda geçen bolsa, ol ýoluň ikinji ýarysyny nähili tizlik bilen geçipdir?

423. Ağaç oturtmakda iki topar işledi. Birinji topar her gün ikinjisine garanda 400 düýp artyk ağaç oturdyp, jemi 2700 düýp ağaç oturtdy. Ikinji topar 2 gün artyk işledi we 2500 düýp ağaç oturtdy. Her bir topar ağaç oturtmakda näçe günden işläpdir?

ÖZÜÑIZI BARLAP GÖRÜÑ!

1. Deñlemäni çözüň:

1) $3x^2 = 0$; 2) $(x+1)(x-2) = 0$;
3) $4x^2 - 1 = 0$; 4) $3x^2 = 5x$;
5) $4x^2 - 4x + 1 = 0$; 6) $x^2 - 16x - 17 = 0$;
7) $3x^2 + 5x = 2$; 8) $x^2 - 4x + 5 = 0$.

2. Köpeldijilere dagydyň:

1) x^2+x-6 ; 2) $2x^2-x-3$; 3) x^2-6x+9 .

3. Meseläni çözüň.

Obalaryň arasyndaky 36 km aralygy bir welosipedçi ikinjisinden 1 sagat tizräk geçýär. Eger welosipedçilerden biriniň tizligi ikinjisiniňkiden 3 km/h artykdygy mälim bolsa, her bir welosipedçiniň tizligini tapyň.

Deňlemäni çözüň (424–426):

424. 1) $3x(x-2) = x-4$; 2) $\frac{x^2-2}{6} - \frac{1-x}{2} = \frac{x-5}{6}$.

425. 1) $2x(x-2) = (x+1)^2 - 9$; 2) $5x(x-4) = (x-8)^2 - 65$;

3) $\frac{(x+2)^2}{3} - \frac{(x+1)^2}{2} = 1$; 4) $\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(x-2)^2}{5} = 4$.

426. 1) $(x-5)(x-6) = 30$; 2) $(x+2)(x+3) = 6$;

3) $(x-1)(x-4) = 3x$; 4) $(x-2)(x+8) = 6x$.

427. x -iň nähili bahalarynda $x^2+3x-88$ aňlatmanyň bahasy: 1) 0-a; 2) 20-ä; 3) -18-e; 4) -70-e deň bolýar?

428. Eger:

1) $a=3, b=1, c=-4$; 2) $a=5, b=2, c=3$;

3) $a=25, b=-10, c=1$; 4) $a=1, b=0, c=-25$

bolsa, $ax^2+bx+c=0$ kwadrat deňleme näçe hakyky köke eýe bolýar?

429. Deňlemäni çözüň:

1) $\frac{12x+4}{x^2+2x-3} = \frac{3x-2}{x-1} - \frac{2x+3}{x+3}$;

2) $\frac{5}{x^2-4} - \frac{8}{x^2-1} = \frac{2}{x^2-3x+2} - \frac{20}{x^2+3x+2}$.

3) $\frac{x+34}{x^2-8x+7} = \frac{2x-3}{x-7} - \frac{x+5}{x-1}$.

- 430.** Firma məlim möhletde 5 400 jübüt ayakgap taýýarlamaly. Ol gününe niýetlenenden 30 jübüt artyk önüm taýýarlady we buýurmany möhletinden 9 gün öň ýerine ýetirdi. Buýurma näçe günde ýerine ýetirilipdir?
- 431.** Iki syýahatçy welosipedlerinde A obadan B oba tarap dürli ýoldan ugrady. Birinjisi 30 km, ikinjisi bolsa 20 km ýöremelidi. Birinji syýahatçynyň tizligi ikinjisiniňkiden 3 km/h artyk. Ýöne ikinji syýahatçy B oba birinjä garanda 20 min öň ýetip geldi. Her bir syýahatçy ýolda näçe wagt bolupdyr?
- 432.** Işçileriň iki toparý ýoly abatlamagy 4 sagatda gutardylar. Eger ilki birinji topar ýoluň ýarysyny, soňra bolsa ikinjisi galan bölegini abatlanda-dy, ähli abatlama işleri 9 sagatda tamamlanan bolardy. Ýoly her bir topar aýry-aýry näçe wagtda abatlar?



III baba degişli synag gönükmeleri – testler

- 1.** Deňlemäni çözüň: $x^2=64$.
 A) $x_{1,2} = \pm 8$; C) $x=-8$;
 B) $x=8$; D) $x=32$.
- 2.** Deňlemäni çözüň: $x^2-11=0$.
 A) $x = \sqrt{11}$; C) $x = -\sqrt{11}$;
 B) $x_{1,2} = \pm\sqrt{11}$; D) $x = \frac{11}{2}$.
- 3.** Deňlemäni çözüň: $3x^2=48$.
 A) $x=4$; C) $x_{1,2} = \pm 4$;
 B) $x=-4$; D) $x=8$.
- 4.** Deňlemäni çözüň: $x^2=5x$.
 A) $\emptyset$; C) $x=0$;
 B) $x=2,5$; D) $x_1=0, x_2=5$.
- 5.** Deňlemäni çözüň: $x^2+9x=0$.
 A) $x_1=0, x_2=-9$; C) $x_{1,2}=9$;
 B) $x_{1,2} = \pm 3$; D) $x_1=9, x_2=0$.

6. Kwadrat deňlemäni çözün: $x^2 + x - 6 = 0$.

A) $x_1 = -3, x_2 = 2$;

C) $x_{1,2} = \pm 6$;

B) $x_1 = 3, x_2 = -2$;

D) $x_1 = -2; x_2 = -3$.

7. Kwadrat deňlemäni çözün: $x^2 + 7x + 6 = 0$.

A) $x_1 = 1, x_2 = -1$;

C) $x_1 = -7, x_2 = -6$;

B) $x_1 = -6, x_2 = -1$;

D) $x_1 = -1, x_2 = -5$.

8. Kwadrat deňlemäni çözün: $x^2 + x + 1 = 0$.

A) $x_1 = 0, x_2 = 1$;

C) $\emptyset$;

B) $x_{1,2} = \frac{\sqrt{-3}}{2}$;

D) $x_{1,2} = \pm\sqrt{-3}$.

9. Kwadrat deňlemäni çözün: $x^2 - 7x + 10 = 0$.

A) $x_1 = -2, x_2 = 2$;

C) $x_1 = 5, x_2 = 1$;

B) $x_1 = -5, x_2 = 2$;

D) $x_1 = 2, x_2 = 5$.

10. Kwadrat deňlemäni çözün: $6x^2 - 5x + 1 = 0$.

A) $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{1}{2}$;

C) $x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = -\frac{1}{3}$;

B) $x = \frac{1}{6}$;

D) $x = -\frac{1}{3}$.

11. Kwadrat deňlemäni çözün: $12x^2 + 7x + 1 = 0$.

A) $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{1}{4}$;

C) $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = -\frac{1}{4}$;

B) $x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = -\frac{1}{4}$;

D) $x = \frac{1}{7}$.

12. Deňlemäni çözün: $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

A) $x_{1,2} = \pm 4, x_{3,4} = 1$;

C) $x_1 = 1, x_2 = 4$;

B) $x_{1,2} = \pm 1, x_{3,4} = \pm 2$;

D) $x_{1,2} = \pm 1$.

13. Denlemäni çözün: $x^4 - 4x^2 - 5 = 0$.

- A) $x_{1,2} = -\sqrt{5}, x_{3,4} = 1$; B) $x_{1,2} = 5$; C) $x_{1,2} = \pm\sqrt{5}$; D) $\emptyset$.

14. 60 km aralygy bir welosipedçi ikinjisine garanda 1 sagat tizräk geçdi. Eger birinji welosipedçiniñ tizligi ikinjisiniñ tizliginden 5 km/h kem bolsa, her bir welosipedçiniñ tizligini tapyñ.

- A) 20 km/h, 25 km/h; B) 10 km/h, 15 km/h;
C) 15 km/h, 20 km/h; D) 12 km/h, 17 km/h.



Taryhy meseleler

Al-Horezminiñ „Al-jabr wal-mukobala“ eserinden alnan denlemeleri çözün (1—31):

1. $x^2 + 10x = 39$.

2. $x^2 + 5x = 24$.

3. $x^2 + 10x = 56$.

4. $x^2 + (10-x)^2 = 58$.

5. $\left(\frac{x}{3} + 1\right)\left(\frac{x}{4} + 1\right) = 20$.

6. $4x(10-x) = x^2$.

7. $\frac{25}{9}x^2 = 100$.

8. $x^2 + 21 = 10x$.

9. $3x + 4 = x^2$.

10. $\frac{x}{3} \cdot \frac{x}{4} = x + 24$.

11. $\frac{10-x}{x} + \frac{x}{10-x} = 2\frac{1}{6}$.

12. $100 + x^2 - 20x = 81x$.

13. $30x = 100 + x^2$.

14. $4x \cdot 5x = 2x^2 + 36$.

15. $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{6}$.

16. $\sqrt{x^2 - x} + x = 2$.

17. $13^2 - x^2 = 15^2 - (14-x)^2$.

18. $(10-x)^2 - x^2 = 40$.

19. $(10-x)^2 + x^2 + (10-x) - x = 54$.

20. $\frac{1}{2} \cdot \frac{5x}{10-x} + 5x = 50$.

21. $x^2 + 20 = 12x$.

22. $\left(\frac{x}{3} + 1\right)\left(\frac{x}{4} + 2\right) = x + 13$.

23. $x^2 + x = \frac{3}{4}$.

$$24. \left(x - \frac{x}{3} - \frac{x}{4} - 4\right)^2 = x + 12.$$

$$25. \left(x - \left(\frac{x}{3} + 3\right)\right)^2 = x.$$

$$26. \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} x^2 = \frac{1}{7} x.$$

$$27. \frac{x^2 - 4x}{3} = 4x.$$

$$28. (x^2 - 3x)^2 = x^2.$$

$$29. \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{5} x^2 = \frac{4}{5} x.$$

$$30. 10x = (10 - x)^2.$$

$$31. \begin{cases} x + y = 10, \\ xy = 21. \end{cases}$$

Abu Kamiliñ meselesi. Deñlemäni çözüñ:

$$\frac{x}{10-x} + \frac{10-x}{x} = \sqrt{5}.$$

Ýewklidiñ meselesi. $(1-x):x=x:1$ deñlemäni çözüñ.

Mesopotamiya ýazgylaryndaky mesele:

Iki kwadratyn meýdanlarynyñ jemi $25\frac{5}{12}$ -e deñ. Ikinji kwadratyn tarapy

birinji kwadratyn tarapynyñ $\frac{2}{3}$ böleginden 5 birlik artyk. Kwadrat taraplaryny tapyñ.

Omar Haýýamyñ (1048–1131) meselesi.

$$\frac{1}{x^2} + 2 \cdot \frac{1}{x} = 1\frac{1}{4} \text{ deñlemäni çözüñ.}$$

Kwadrat deñlemäni çözmegiñ al-Horezmi usuly.

Al-Horezminiñ „Al-jabr wal-mukobala“ eserinden alnan şu meselä garalyñ: „Eger käbir kwadrata onuñ on sany köküne deñ zady goşsañ, otuz dokuz emele gelyär“. Bu meseläni çözmek (häzirki belgilemelerde) $x^2 + 10x = 39$ deñlemäni çözmek diymekdir. Al-Horezmi şu deñlemäni çözmegiñ düzgünini aşakdaky ýaly düşündirýär: „1) kökleriñ sanyny ikä böl, bu meselede baş emele gelyär ($10 : 2 = 5$); 2) ony özüne deñe (sana) köpelt, ýigrimi baş bolýar ($5 \cdot 5 = 25$); 3) ony otuz dokuza goş, altmyş dört bolýar ($25 + 39 = 64$); 4) ondan kwadrat kök çykar, sekiz bolýar ($\sqrt{64} = 8$); 5) ondan kökleriñ sanynyñ

ýarysyny, ýagny başi aýyr, üç galýar ($8 - 5 = 3$). Ynha şu san sen gözlän kwadrat kök bolýar“.

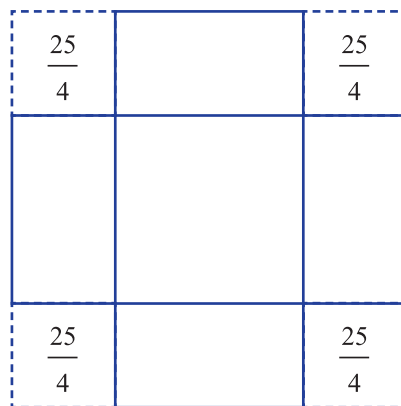
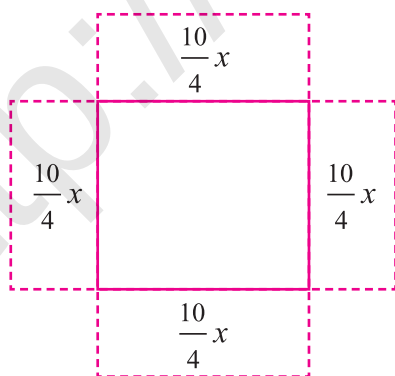
Häzirki ýazuwda al-Horezminiň bu çözüwi gysgaça şeýle görnüşini alýar:

$$x = \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 + 39} - \frac{10}{2} = \sqrt{25 + 39} - 5 = \sqrt{64} - 5 = 8 - 5 = 3.$$

Jogaby: $x = 3$.

(Al-Horezmi ikinji kök $x = -13$ -i garamaýar.)

„Al-jabr wal-mukobala“ eserinde edil şu deňlemäniň geometrik usuldaky çözüwi hem berilýär (38-nji surat). Bu usul aşakdaky ýaly: tarapy x (meýdany x^2) -a deň kwadrat garalýar. Onuň taraplarynda ini $\frac{10}{4}$ -a deň 4 sany gönüburçluk gurulýar. Emele gelen şekil $x^2 + 10x$ aňlatma laýyk gelýär. Bu şekiliň tarapy $(x + 5)$ -e deň bolan kwadrata çenli „doldurylýar“, ýagny şekiliň „depelerine“ tarapy $\frac{10}{4}$ -a deň bolan 4 sany kwadrat „goşulýar“. Alnan şekil $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$ aňlatma laýykdyr. Emma, şerte görä, $x^2 + 10x = 39$ bolany üçin emele gelen uly kwadratyň meýdany $39 + 4 \cdot \left(\frac{10}{4}\right)^2 = 64$. Şeýdip, $(x + 5)^2 = 64$, mundan $x + 5 = 8$ we $x = 3$. Diýmek, al-Horezmi kwadrat deňlemäni çözende doly kwadraty dagytmagyň geometrik usulyny berýär. $x^2 + px = q$ deňleme üçin al-Horezminiň bu usuly aşakdaky ýaly ýazylyr:



38-nji surat.

$$x^2 + 4 \cdot \left(\frac{p}{4}\right)x + 4 \cdot \left(\frac{p}{4}\right)^2 = q + 4 \cdot \left(\frac{p}{4}\right)^2; \quad \left(x + 2 \cdot \frac{p}{4}\right)^2 = q + 4 \cdot \left(\frac{p}{4}\right)^2,$$

$$x_{1,2} + 2 \cdot \frac{p}{4} = \pm \sqrt{q + 4 \cdot \left(\frac{p}{4}\right)^2},$$

$$\text{mundan, } x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{4}\right)^2 + q}.$$



Taryhy maglumatlar

Abu Abdullah Muhammet ibn Musa al-Horezmi (783—850) halkymyzyň beýik alymlaryndan biri. Ol özüniň „Al-kitob al-muhtasar fi hisob al-jabr wal-mukobala“ (gysgaça: „Al-jabr wal-mukobala“) eseri bilen algebra ylmyny esaslandyrdy. Eseriň 1342-nji ýylda göçürilen arapça nusgasy Oksford uniwersitetiniň Bodleýan kitaphanasasynda saklanýar. Al-Horezmi kitaby ýazmakdan maksadyny şeýle beýan edýär: „... Men arifmetikanyň ýönekeý we çylşyrymly meselelerini öz içine alyan „Al-jabr wal-mukobala hasaby barada gysgaça kitaby hödürledim, çünki miras paýlanda, wesýetnama düzende, mal paýlanda, adalat işlerinde, söwdada we islendik şertnamalarda, şonuň ýaly-da, ýer ölçände, ýaplary geçirende, inženerlikde we başga şoňa meňzeş dürlüçe işlerde adamlar üçin bu zerurdyr“. Algebrada „üç hili san (mukdar) bilen iş salşylýar“, — diýýär al-Horezmi. Olar: kök (deňlemedäki näbelli san x), kwadrat (x^2) we ýönekeý sanlar (deňlemedäki azat agzalar).

Al-Horezmi şu üç ululyklaryň arasyndaky gatnaşyklary öwrenýär. Ol deňlemeleri aşakdaky synplara bölýär:

- 1) $ax^2 = bx$ — kwadratlar köklere deň;
- 2) $ax^2 = c$ — kwadratlar sana deň;
- 3) $bx = c$ — kökler sana deň;
- 4) $ax^2 + bx = c$ — kwadratlar we kökler sana deň;
- 5) $ax^2 + c = bx$ — kwadratlar we san köklere deň;
- 6) $bx + c = ax^2$ — kökler we san kwadratlara deň.

Al-Horezmi „Al-jabr wal-mukobala“ eserinde 4-, 5-, 6-njy deňlemeleri çözmegiň geometrik usullaryny berýär. Alym al-jabr we al-mukobala amallarynyň (çalşyrmalary) kömeginde islendik kwadrat deňleme ýokardaky 6 görnüşden birine getirilmegini subut edýär.



Amaly we predmetara bagly meseleler

433. 1) Gu'ya daş taşlandy. Daş gu'yynyň düýbüne urlanda çykan ses gözegçä daş taşlanandan 4 sekuntдан soň eşidildi. Sesiň tizligi sekundyna 330 metr, erkin gaçýan jisimiň t sekuntda geçen ýoluny $s = \frac{gt^2}{2}$. $g \approx 10 \text{ m/s}^2$ diýip alyp, gu'yynyň çuňlugyny tapyň.

2) Sekundyna 300 metr tizlik bilen atylan ok näçe sekuntдан soň ýerden 2500 metr beýiklikde bolar? (Howanyň garşylygy hasaba alynmasyn.)

△ 1) Daş t minutda gu'yynyň aşagyna düşüpdir we $s = \frac{gt^2}{2}$ aralygy geçipdir. Ses gu'yynyň astyndan $(4-t)$ sekuntda $330(4-t)$ m aralygy geçen soň çykypdyr. $\frac{gt^2}{2} = 330(4-t)$. Bu deňlemeden $t \approx 3,78 \text{ s}$;

$4-t \approx 0,22 \text{ s}$; $s \approx 330 \cdot 0,22 = 72,6 \text{ (m)}$. **Jogaby:** $\approx 72,6 \text{ m}$.

2) t sekuntдан soň jism ýerden 300 t m beýiklikde bolupdyr. $300t - \frac{10t^2}{2} = 2500$ ýa-da $t^2 - 60t + 500 = 0$, munda $t = 10$ ýa-da $t = 50$.

Jogaby: 10 s we 50 s. ▲

434. Her biriniň sygymy 30 litrden bolan iki gapda bilelikde 30 litr spirt bardy. 1-nji gaba dolýança suw guýlup, bu garyndydan 2-nji gaba dolýança guýuldy. Soň 2-nji gapdan 1-nji gaba 12 litr garyndy alyp guýuldy. Şondan soň 2-nji gapdaky spirt 1-nji gapdaka garanda 2 litr kem boldy. Ilkibaşda gaplaryň hersinde näçeden spirt bolupdyr?

△ Ilki 1-nji gapda x l, 2-nji gapda $(30-x)$ l spirt bolupdyr diýeliň.

1-nji gaba suw guýlansoň, 1 litr garyndyda $\frac{x}{30}$ l spirt boldy. Bu garyndydan 2-nji gaba x l goşulsa (çünki 2-nji gapda x l „boş ýer“ bar),

2-nji gapdaky garyndynyň düzüminde $\frac{x}{30} \cdot x = \frac{x^2}{30}$ litr spirt bolýar we

2-nji gapdaky $(30-x)$ l bilen bile $\left(30-x + \frac{x^2}{30}\right)$ litr spirt bolýar. 2-nji

gapdaky garyndynyň düzüminde $\left(30 - x + \frac{x^2}{30}\right) : 30 = 1 - \frac{x}{30} + \left(\frac{x}{30}\right)^2$ litr spirt bolýar. 2-nji gapdan 1-njisine 12 l alyp guýulsa, bu garyndyda $12 \cdot \left(1 - \frac{x}{30} + \left(\frac{x}{30}\right)^2\right)$ litr spirt bolup, 1-nji gapdaky $\left(x - \frac{x^2}{30}\right)$ litr spirt bilen bile $\left(x - \frac{x^2}{30}\right) + 12 \cdot \left(1 - \frac{x}{30} + \left(\frac{x}{30}\right)^2\right)$ litr bolýar. 2-nji gapdan 12 l garyndyny 1-njisine guýlansoň, onda 18 l garyndy galdy, bu garyndynyň düzüminde $18 \cdot \left(1 - \frac{x}{30} + \left(\frac{x}{30}\right)^2\right)$ litr spirt bar. Meseläniň şertine görä, bu mukdar 1-nji gapdaky spirtten 2 litr kem. Diýmek, şeýle deňlemä gelyäris:

$$18 \cdot \left(1 - \frac{x}{30} + \left(\frac{x}{30}\right)^2\right) + 2 = \left(x - \frac{x^2}{30}\right) + 12 \cdot \left(1 - \frac{x}{30} + \left(\frac{x}{30}\right)^2\right), \text{ munda}$$

$$6 \cdot \left(1 - \frac{x}{30} + \left(\frac{x}{30}\right)^2\right) + 2 = x - \frac{x^2}{30}, \text{ ahyrynda, } x^2 - 30x + 200 = 0.$$

Jogaby: 20 l we 10 l. ▲

- 435.** Şeýle dörtbelgili san tapyň, ýagny onuň müňler öýjügindäki we onlar öýjügindäki sifrleri özara deň bolsun, ýüzler öýjügindäki sifr birler öýjügindäki sifrdan bir sany artyk bolsun we gözlenýän san bitin sanyň kwadraty bolsun.

(Görkezme: $x^2 = 1010a + 101b + 100$ deňlemä geliň, munda x^2 – gözlenýän san, a – müňler, b – birler öýjügindäki sifr).

- 436.** Kislota bilen doly gap bar. Bu gapdan 2 l kislota alyndy we gaba 2 l suw guýuldy. Garyndydan 2 l alyndy we ýene 2 l suw goşuldy. Bu garyndydan 2 l alyndy we ýene 2 l suw guýuldy. Netijede gapdaky suwuň göwrümi kislotaňyň göwrüminden 3 l köp boldy. Häzir gapda näçe l kislota we näçe l suw bar?

△ Gabyň göwrümi v litr diýeliň. Gapdan 2 l kislota alyp, gaba 2 l suw guýlansoň, kislota gabyň $\frac{v-2}{v}$ bölegini eýeleýär. Garyndydan 2 l

alnansoň, gapda $(v-2) \cdot \frac{v-2}{v}$ litr kislota galdy, oňa 2 l suw guýlansoň kislota gabyň $\frac{(v-2)^2}{v^2}$ bölegini eýeleýär. 3-nji gezek (ýene 2 l garyndy alnyp, gaba 2 l suw guýlansoň) kislota gabyň $\left(\frac{v-2}{v}\right)^3$ bölegini eýeleýär. Şeýdip, gapdaky kislotalaryň mukdary $v \cdot \left(\frac{v-2}{v}\right)^3$ -a, suwuň mukdary bolsa $v \cdot \left(\frac{v-2}{v}\right)^3 + 3$ -e deň.

Onda şeýle deňlemä eýe bolýarys:

$$v \cdot \left(\frac{v-2}{v}\right)^3 + v \cdot \left(\frac{v-2}{v}\right)^3 + 3 = v, \text{ mundan}$$

$$v^3 - 9v^2 + 24v - 16 = 0, (v-1)(v-4)^2 = 0.$$

Şerte görä, $v > 2$ bolany üçin, $v = 4$.

$$\text{Onda } v \cdot \left(\frac{v-2}{v}\right)^3 = 4 \cdot \left(\frac{4-2}{4}\right)^3 = \frac{1}{2} (l),$$

Jogaby: 0,5 l kislota we 3,5 l suw. ▲

437. *A* obadan *B* oba tarap ýük maşyny ýola çykdy. 1 sagatdan soň *A*-dan şol ugurda ýeňil maşyn ýola çykdy we *B*-ge ýük maşyny bilen bir wagtda ýetip geldi. Eger bu maşynlar *A* we *B* obalardan bir wagtda bir-birlerine garap ýola çykanlarynda-dy, olar ýola çykan wagtdan 1 sagat 12 minut geçensoň duşuşardylar. Ýük maşyny *A*-dan *B*-ge gelmek üçin näçe wagt sarplady?

438. Wagondan ýüki işçileriň iki topary düşürýän boldy. Ýüki 1-nji toparyň ýeke özi düşürýän wagt bilen şol ýüki 2-nji toparyň ýeke özi düşürýän wagt jemi 12 sagada deň. Bu wagtlaryň tapawudy iki topar bilelikde işläp ýüki düşürýän wagtyň 45%-ine deň. 1-njitopar ýeke özi we 2-njitopar ýeke özi işläp ýüki näçe wagtda düşürer?

△ 1-nji topar ýüki ýeke özi x sagatda, 2-nji topar bolsa y sagatda düşürýär, diýeliň. Meseläniň şertine görä, $x + y = 12$ (sagat). 1-nji topar

1 sagatda jemi işiň $\frac{1}{x}$ bölegini, 2-nji topar bolsa $\frac{1}{y}$ bölegini ýerine ýetirýär. Olar bilelikde işläp 1 sagatda jemi işiň $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$ bölegini ýerine ýetirýär. Bilelikde işläp olar jemi işi ýerine ýetirmek üçin $\frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$ sagat sarplaýar. Takyklyk üçin, meselem, 1-nji topar haýalrak işleýär, ýagny $x > y$ diýeliň. Onda şerte görä $(x - y)$ sagat $\frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$ sagadyň 45%-ini düzýär:

$$x - y = \frac{45}{100} \cdot \frac{xy}{x + y}.$$

Bu deňlemedäki y ýerine $y = 12 - x$ -i goýup, x -a görä kwadrat deňleme alarys:

$$x - 12 + x = \frac{9}{20} \cdot \frac{x(12 - x)}{12},$$

mundan, $3x^2 + 124x - 960 = 0$.

Bu deňlemäniň kökleri $x_1 = -48$, $x_2 = \frac{20}{3}$. Meseläniň mazmunyna görä $x > 0$. Diýmek,

$$x = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3} \text{ (sagat),}$$

$$y = 12 - x = 12 - 6\frac{2}{3} = 5\frac{1}{3} \text{ (sagat).}$$

Jogaby: $6\frac{2}{3}$ sagat, $5\frac{1}{3}$ sagat.▲

- 439.** Iki pagta ýygýan maşyn bilelikde meýdandaky pagtany diňe birinji maşynyň ýeke özünden 8 gün tizräk ýygyp bolmagy mümkin we diňe ikinji maşynyň ýeke özünden 2 gün tiz ýygyp gutarmagy mümkin. Her bir maşyn meýdandaky pagtany näçe günde ýygyp almagy mümkin?

440. Iki ussa bir zady ýasamak üçin buýurma aldy. Ilki birinji ussa 1 sagat işledi, soň iki ussa 4 sagat bile işledi; şonda buýurmanyň 40%-i ýerine ýetirildi. Eger buýurmany birinji ussanyň ýeke özi ýerine ýetirmegi üçin ikinjisine garanda 5 sagat artyk wagt gerek bolsa, her bir ussa buýurmany näçe sagatda ýerine ýetirmegi mümkin?
441. Otly A we B şäherleriň arasyndaky ýoluň ortasynda 20 minut sägindi. Maşinist B -ge jedwele görä ýetip gelmek üçin otlynyň deslapky tizligini 12 km/h-a artdyrdy. A we B şäherleriň arasyndaky aralyk 240 km bolsa, otlynyň deslapky tizligini tapyň.
442. Dürli kuwwata eýe bolan iki traktor 3 gün bilelikde işläp, meýdanyň $\frac{5}{8}$ bölegini sürdi. Eger birinji traktor bilen tutuş meýdany ikinjisine garanda 4 gün tizräk sürmek mümkin bolsa, tutuş meýdany her bir traktor aýry-aýry näçe günde sürüp biler?
443. Otly 840 km ýol geçmelidi. Ýoluň ýarysynda 30 minut sägindi. Gijä galmazlyk üçin tizligini sagadyna 2 km artdyrdy. Otly tutuş ýola näçe wagt sarp edipdir?

$\triangle$ *1-nji usul.* Otly tutuş ýoly x sagatda geçmelidi; ýoluň ýarysyny sagadyna $\frac{840}{x}$ km tizlikde ýöräpdir; soň sagadyna $\left(\frac{840}{x} + 2\right)$ km tizlik bilen

ýoluň ýarysyny $\frac{420}{\frac{840}{x} + 2} = \frac{210x}{420 + x}$ sagatda geçýär. Ýoluň birinji ýarysyny

$\frac{x}{2}$ sagatda ýöräpdi. Şoňa görä: $\frac{210x}{420 + x} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$. Deňlemäni çözsək, $x = 21$ sagat bolýandygyny tapýarys.

2-nji usul. Otlynyň öňki tizligi sagadyna x km, soňky tizligi sagadyna $(x + 2)$ km, 420 km-i $\frac{420}{x}$ sagatda, galan 420 km-i $\frac{420}{x+2}$ sagatda geçýär.

Şoňa görä: $\frac{420}{x} - \frac{420}{x+2} = \frac{1}{2}$. Deňlemäni çözsək, $x = 40$ km/h; otly hemme

ýoly ýöremek üçin $\frac{840}{40} = 21$ sagat sarp edipdir.

3-*nji* usul. Otly yoluñ birinji yarysyny x sagatda, ikinji yarysyny $\left(x - \frac{1}{2}\right)$

sagatda yöräpdir. Otlynyñ yoluñ birinji yarysyndaky tizligi sagadyna $\frac{420}{x}$

km, ikinji yarysyndaky tizligi sagadyna $\frac{420}{x - \frac{1}{2}} = \frac{840}{2x - 1}$ km, $\frac{840}{2x - 1} - \frac{420}{x} = 2$

. Deñlemäni çözüp, $x = 10,5$ h, $2x = 21$ h bolýandygy anyklanýar.

Jogaby: 21 sagat. ▲

444. Bir san üç sany yzygider bitin sanlaryñ köpeltmek hasylyndan ybarat. Bu sany berlen yzygider üç sanyñ her birine bölmekden emele gelen paýlaryñ jemi 74-e deñ. Şu sany tapyñ.

445. Güberçek köpburçlugyñ taraplarynyñ sany bilen diagonallarynyñ sanynyñ jemi 15-e deñ. Köpburçlugyñ taraplarynyñ sanyny tapyñ.

446. Gönüburçly üçburçlugyñ taraplarynyñ uzynlyklary: a) yzygider natural sanlar bilen; b) yzygider jübüt natural sanlar bilen; d) yzygider täk natural sanlar bilen aňladylmagy mümkinmi?

△ a) Taraplary yzygider bitin sanlar: x , $x + 1$, $x + 2$ bolsun. Onda x we $x + 1$ katetler, $(x + 2)$ bolsa gipotenuza bolýar, $x^2 + (x + 1)^2 = (x + 2)^2$; mundan $x = 3$ ýa-da $x = -1$ ($x = -1 < 0$ meselä jogap bolup bilmeýär). $x = 3$; $x + 1 = 4$; $x + 2 = 5$. Taraplary yzygider bitin sanlar 3, 4, 5 bilen aňladylan gönüburçly üçburçluk bolýar; b) taraplary yzygider jübüt sanlar: $2x$, $2x + 2$, $2x + 4$ bolsun. Onda: $(2x)^2 + (2x + 2)^2 = (2x + 4)^2$; $x = 3$; $2x = 6$; $2x + 2 = 8$; $2x + 4 = 10$. Taraplary yzygider jübüt sanlar 6, 8, 10 bilen aňladylan gönüburçly üçburçluk bolýar;

d) taraplary yzygider täk sanlar: $2x + 1$; $2x + 3$; $2x + 5$ bilen aňladylsyn. $(2x + 1)^2 + (2x + 3)^2 = (2x + 5)^2$; $x = \frac{5}{2}$ ýa-da $x = -\frac{3}{2}$. Emma x natural san bolup çykmady. Diýmek, taraplary yzygider täk sanlar bilen aňladylýan gönüburçly üçburçluk ýok. ▲

447. Iki hili erginiñ birinde 800 g, ikinjisinde 600 g duz bar. Iki erginden 10 kg-lyk täze ergin alyndy. Birinji ergindäki duzuñ göterim mukdary ikinji ergindäki duzuñ göterim mukdaryndan 10 sany artyk bolsa, gar-yndyda her haýsy erginden näçe kilogram bar?

△ Birinji ergin x kg bolsa, ikinjisi $(10-x)$ kg bolýar. Birinji erginde

duz $\frac{0,8 \cdot 100}{x} = \frac{80}{x}$ göterim, ikinji erginde bolsa $\frac{0,6 \cdot 100}{10-x} = \frac{60}{10-x}$ göterim bolýar. Meseläniñ şertine görä:

$$\frac{80}{x} - \frac{60}{10-x} = 10.$$

Muny çözüäris: $x = 20$ ýa-da $x = 4$. Meseläniñ şertine görä $x < 10$ bolany üçin $x = 20$ kök bolmaýar. $10 - x = 10 - 4 = 6$.

Jogaby: birinji erginiñ massasy 4 kg, ikinji erginiñ massasy bolsa 6 kg eken.

Jogaby barlamak: 800 g duz 4 kg-lyk erginiñ $\frac{0,8 \cdot 100\%}{4} = 20\%$ -ini, 600 g

duz 6 kg-lyk erginiñ $\frac{0,6 \cdot 100\%}{6} = 10\%$ -ini düzýär: $20\% - 10\% = 10\%$. ▲

448. Iki metal parçasyndan biriniñ massasy 880 g, ikinjisiniñ massasy 858 g. 1-nji parçanyñ göwrümi 2-njisiniñ göwrüminden 10 cm^3 kem. 1-nji metal parçasynyñ udel agyrlygy 2-njisiniñkiden 1 g/cm^3 artyk bolsa, metal parçasynyñ hersiniñ udel agyrlygyny tapyň.

△ Ikinji metal parçasynyñ udel agyrlygy $d \text{ g/cm}^3$, birinji metal parçasynyñ udel agyrlygy $(d+1) \text{ g/cm}^3$. Birinji metal parçasynyñ göwrümi $\frac{880}{d+1} \text{ cm}^3$, ikinji metal parçasynyñ göwrümi $\frac{858}{d} \text{ cm}^3$. Meseläniñ şertine görä:

$$\frac{880}{d+1} + 10 = \frac{858}{d} \quad \text{ýa-da} \quad 5d^2 + 16d - 429 = 0,$$

$d = 7,8$ ýa-da $d = -11$ ($d = -11 < 0$ bolany üçin meselä jogap bolup bilmeýär).

Jogaby: ikinji parçanyň udel agyrlıgy $7,8 \text{ g/cm}^3$, birinjisiniňki bolsa $7,8 + 1 = 8,8 \text{ (g/cm}^3\text{)}$.

Jogaby barlamak. Birinji metalyň göwrümi $\frac{880}{8,8} = 110 \text{ (cm}^3\text{)}$, ikinjisiniňki $\frac{858}{7,8} = 110 \text{ (cm}^3\text{)}$; $110 \text{ cm}^3 - 100 \text{ cm}^3 = 10 \text{ cm}^3$. ▲

- 449.** Iki gapda bir-birinden 1 kg -a tapawutlanýan suw bar. Gaplardaky suwa 88 kaloriýa ýylylyk berildi. Massasy köp bolan suwuň massasy kem bolan suwa garanda $\frac{4}{5}$ gradus kemrāk ýylany mälüm bolsa, her haýsy gapdaky suwuň massasyny anyklaň.

△1) Suw massasy $x \text{ kg}$ we $(x+1) \text{ kg}$, diýeliň. Massasy kem bolan suw

$\frac{88}{x}$ gradusa, massasy köp bolan suw $\frac{88}{x+1}$ gradusa ýylapdyr. Massalary dürli bolan iki gapdaky suw temperaturalaryň arasyndaky tapawut $\frac{4}{5}$ gradusa deň bolany üçin aşakdaky deňlemäni düzüp alýarys:

$$\frac{88}{x} - \frac{88}{x+1} = \frac{4}{5}.$$

Emele gelen deňlemäni çözsек: $x = 10$ ýa-da $x = -11$. $x = -11 < 0$ meselä jogap bolup bilmeýär.

Jogaby: 10 kg we 11 kg .

Jogaby barlamak. 10 kg suw 88 kaloriýa ýylylykdан $\frac{88}{10} = 8,8$ gradusa ýylan, 11 kg suw bolsa 88 kaloriýa ýylylykdан $\frac{88}{11} = 8$ gradusa ýylan.

$$8,8 - 8 = 0,8 = \frac{4}{5} \text{ (gradus)}. \quad \blacktriangle$$

- 450.** A we B şäherleriň arasyndaky aralyk demir ýol bilen 66 km, suw ýoly bilen bolsa 80,5 km. Otly gämä garanda 4 sagat soň ýola çykyp, B -ge gämiden 15 minut öň ýetip geldi. Eger otlynyň tizligi gäminiň tizliginden sagadyna 30 km artyk bolsa, olaryň tizliklerini tapyň.

△ Otlynyň tizligi sagadyna x km, gäminiň tizligi sagadyna $(x-30)$ km.

Otly $\frac{66}{x}$ sagat, gämi bolsa $\frac{80,5}{x-30}$ sagat ýol ýöräpdir. 4 sagat +15 minut =

= $4\frac{1}{4}$ sagat = $\frac{17}{4}$ sagat. Meseläniň şertine görä deňleme düzyäris:

$$\frac{80,5}{x-30} - \frac{66}{x} = \frac{17}{4}.$$

Bu deňlemäni çözsek, şu jogap çykýar: otlynyň tizligi sagadyna 44 km, gäminiňki sagadyna 14 km.

Jogaby barlamak. Gämi 80,5 km-i $\frac{80,5}{14} = 5\frac{3}{4}$ sagatda, otly bolsa 66 km

-i $\frac{66}{44} = 1\frac{1}{2}$ sagatda geçýär. $5\frac{3}{4} - 1\frac{1}{2} = 4\frac{1}{4}$ sagat bolýar. ▲

- 451.** Ekin meýdanynyň $\frac{2}{3}$ bölegini dürli kuwwatly iki traktor bilelikde 4 günde sürýär. Eger ýeri 1-nji traktoryň ýeke özi 2-nji traktoryň ýeke özünden 5 gün tiz sürüp gutarjagy mälim bolsa, ekin meýdanyny her bir traktoryň ýeke özi näçe günde sürüp bolar?

△ *1-nji usul.* Işi bir birlik diýip kabul edýäris. Tutuş ýeri ikinji traktoryň özi x günde sürsün, diýeliň. Onda birinjisiniň ýeke özi $x-5$ günde sürüp tamamlayar. Birinji traktor bir günde tutuş ýeriň $\frac{1}{x-5}$ bölegini,

ikinjisi bolsa $\frac{1}{x}$ bölegini, iki traktor bilelikde $\frac{2}{3} : 4 = \frac{1}{6}$ bölegini sürýär.

Iki traktor bir günde ekin meýdanynyň $\frac{1}{x-5} + \frac{1}{x}$ ýa-da $\frac{1}{6}$ bölegini sürýär. Diýmek:

$$\frac{1}{x-5} + \frac{1}{x} = \frac{1}{6}.$$

Bu deňlemäniň kökleri $x=15$ ýa-da $x=2$. Meseläniň mazmunyna görä $x>5$ bolmaly. Şonuň üçin $x_2=2$ meselä jogap bolup bilmeýär.

2-nji usul. Iki traktor bilelikde tutuş ýeri $4:\frac{2}{3}=6$ günde sürýär. Ikinji

traktoryň ýeke özi bitin ýeri x günde sürse, 1 günde $\frac{1}{x}$ bölegini, 6 günde $\frac{6}{x}$ bölegini sürýär. Birinji traktoryň ýeke özi bitin ýeri $x-5$

günde sürse, 1 günde $\frac{1}{x-5}$ bölegini, 6 günde bolsa $\frac{6}{x-5}$ bölegini sürýär. Her iki traktor 6 günde ekin meýdanyny sürüp bolýar, ýagny:

$$\frac{6}{x} + \frac{6}{x-5} = 1.$$

Jogaby: birinji traktoryň ýeke özi bilen 10 günde, ikinjisiniň ýeke özi bilen 15 günde sürüp bolýar.

Jogaby barlamak. 1) Ekin meýdanyny birinji traktoryň ýeke özi ikinji traktoryň ýeke özünden $15 \text{ gün} - 10 \text{ gün} = 5 \text{ gün}$ tiz sürüp gutarýar.

2) Birinji traktor 1 günde ýeriň $\frac{1}{10}$ bölegini, 4 günde $\frac{4}{10}$ bölegini, ikinjisi 1 günde $\frac{1}{15}$ bölegini, 4 günde $\frac{4}{15}$ bölegini sürýär. Iki traktor

bilelikde 4 günde ýeriň $\frac{4}{10} + \frac{4}{15} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$ bölegini sürýär.▲

452. Plandaky işi ýerine ýetirmek üçin 1-nji topar 3,5 gün işledi. Galan işi 2-nji topar 6 günde tamamlady. Plandaky işi 2-nji toparyň ýeke özi 1-nji toparyň ýeke özüne garanda 5 gün soň tamamlaýar. Toparyň ýeke özünüň plandaky işi näçe günde tamamlaýar?

453. Gämi derýanyň akymy boýunça 69 km aralyga baryp, 34 km yzyna gaýtmak üçin 5 sagat wagt sarplady. Akymyň tizligi sagadyna 3 km bolsa, gäminiň ýata suwdaky tizligini tapyň.

454. *A obadan derýanyň akymy boýunça sal akdyryldy. Sal akdyrylandan 4 sagat geçensoň, şu obadan derýanyň akymy boýunça motorly gaýyk ýola çykyp, 15 km ýöränsoň sala ýetdi. Motorly gaýyk saldan sagadyna 12 km artyk ýörese, salyň (derýanyň akymynyň) tizligini tapyň.*
455. *Fermer hojalygy 200 ha ýere mälim möhletde kartoşka ekip bolmalydy. Emma hojalyk her gün plandakydan 5 ha artyk ýere kartoşka ekip, işi möhletinden 2 gün öň gutardy. Kartoşka ekmek näçe gün dowam edipdir?*
456. *Onluklar sifri birliklerden 4 sany kem bolan ikibelgili san bilen şu sanyň sifrleriniň orunlaryny çalşyrmak netijesinde emele gelen sandan 2 birlik kiçi bolan sanyň köpeltmek hasyly 2627-ä deň. Şu ikibelgili sany tapyň.*
457. *Ikibelgili sanyň onluklar sifriiniň birliklerinden 4 esse artyk. Şu sandan 2-ni aýryp, sifrleri gözlenýän sanyň sifrleriniň ters tertipde ýazylmagyndan emele gelen sana 2-ni goşsak we netijeleri köpeltsek, 2400 çykýar. Şu ikibelgili sany tapyň.*
458. *Üç topar işçiler binany bilelikde mälim möhletde abatлады. Abatlamagy diňe 1-nji topar ýerine ýetirse, bu möhletden 10 gün artyk gerek bolýar. Eger işi diňe 2-nji topar ýerine ýetirse, 20 gün artyk, diňe 3-nji topar ýerine ýetirse, möhletden 6 esse köp wagt gerek bolýar. Toparlaryň hersi ýeke özi işlese, binany näçe günde abatlap bolýar?*
459. *Howza üç turba geçirilen. Boş howzy ikinji turbanyň ýeke özi birinji turbanyň ýeke özüne garanda 3 sagat giç doldurýar. Üçünji turbanyň ýeke özi bolsa doly howzy boşatmak üçin, 1-nji turba howzy doldurmaga sarp eden wagtdan 3 sagat kem wagt sarp edýär. Eger turbalaryň ikisinden suw girip, 3-njisinden çykyp dursa, boş howuz 36 sagatda dolýar. 1-nji turbanyň ýeke özi we 2-nji turbanyň ýeke özi boş howzy näçe sagatda doldurýar? 3-nji turbanyň ýeke özi doly howzy näçe wagtda boşadar?*
460. *Önümiň nyrhy 12000 somdy. Bu nyrh yzygider iki gezek birmeňzeş göterime arzanlaşdyrylandan soň önümiň nyrhy 9720 som bolupdyr. Her gezek önümiň nyrhy näçe göterime arzanlapdyr?*
461. *Iki ýylyň içinde şäheriň ilaty 2 million adamdan 2 million 205 müň adama ýetdi. Şu şäheriň ilatynyň ortaça ýyllyk köpeliş göterimini tapyň.*

462. Iki yolg'chi A va B obalardan bir-birine garap gelyär. Olar duşuşanda biri ikinjisinden 2 km artyk yörändigi mälim boldy. Duşuşandan soñ yöremegi dowam etdirip, 40 minutdan soñ 1-nji yolg'chi B -ge geldi. 1,5 sagatdan soñ bolsa 2-nji yolg'chi A -ga geldi. AB aralygy tapyñ.
463. Küşt yaryşyna gatnaşyjylaryñ her biri galanlary bilen bir gezekden oýnady. Jemi 120 oýun oýnalan bolsa, yaryşda näçe sany adam gatnaşypdyr?
464. 11-nji synpy tamamlayan okuwçylar bir-birleri bilen suratlaryny çalyşdylar. Eger 1190 sany surat çalşyrylan bolsa, şu synpda näçe sany okuwçı bolupdyr?
465. Aralaryndaky aralyk 900 km bolan iki şäherden bir-birine garap iki otly yola çykdy. Otlular yoluñ ortasynda duşuşdylar. Eger 1-nji otly 2-njisinden 1,5 sagat giç yola çykan bolsa we oña garanda tizligi sagadyna 10 km artyk bolsa, otlularyñ hersiniñ tizligini tapyñ.
466. Otly 220 km yoly mälim wagtda geçmelidi. Ol 2 sagat yöränden soñ 10 minut sägindi; soñ tizligini sagadyna 5 km-e artdyrды we menzile niyetlenen wagtda yetip geldi. Otlynyñ başlangyç tizligini tapyñ.

IV BAP MAGLUMATLARYŇ DERŇEWI

28-§. MAGLUMATLARYŇ DERŇEWI. MAGLUMATLARY ŞEKILLENDIRMEK

Dürli firmalar, kompaniýalar öndürýän önümleriň hil we mukdar *belgileri*, görkezijileri (düzümi, massasy, ölçegleri, reňki, tagamy, ...) kabul edilen normalara (standartlara) laýyk gelşini (ýa-da gelmezligini) nähili bilýäris? Nähili gözegçilik edýäris, synaýarys?

Taýýarlanan önümleriň (meselem: süýt, дәne, et önümleri; dürli içgiler; egin-eşikler; дәri-dermanlar; elektrik gural-enjamlar we ş.m.) mukdary örän köp bolsa, olaryň hemmesini ýeke-ýekeden synagdan, gözegçilikden geçirmek ykdysady taýdan hem makul дәl. Şeýle ýagdaýlarda jemi önümler toplumyndan birnäçe önüm *tötänleýin* ýagdaýda, töwekgel edip saýlap alynýar we diňe şolaryň özi bir-birden synagdan geçirilýär.



Synalmaly bolan ähli obýektler toplumyna *baş toplum* diýilýär. Baş toplumdan saýlap alnan obýektler *saýlanma toplum* (gysgaça: *saýlanma*) diýip atlandyrylýar. Obýekt diýende nämeleri synamak gerek bolsa, şolar düşünilýär.

1-nji mesele. Firma lampoçkalar (öý ýagtylandyryjylary) öndürýär, diýeliň. Olaryň näçe göterimi ýaramsyz (ýanmaýar)? Muny nädip barlaýarsyňyz?

△ Firma çykarýan ýüz müňlerçe lampoçkalaryň ýanyp-ýanmazlygyny ýekән-ýekән synap çykmak mümkin дәl. Şonuň üçin şeýle ýagdaýlarda lampoçkalaryň birnäçesi *tötänleýin* ýagdaýda (töwekgel edip) saýlap alynýar. Saýlanan hemme lampoçkalar synagdan geçirilýär. Synag netijesine görä firma çykarýan önüm barada мәlim bir netijä gelinýär.

Meselem, 1000 sany lampoçka synagdan geçirilen bolup, olardan 10 sany ýaramsyz bolsa (ýanmasa), onda jemi lampoçkalaryň hem $\frac{10}{1000} = 0,01$ bölegi (ýagny 1%-i) ýaramsyz diýen netijä gelinýär. ▲

Bu mysalda firma öndüren jemi lampoçkalar *baş toplumdyr*. Synamak üçin tötänleýin ýagdaýda saýlap alnan 1000 sany lampoçka *saýlanma toplumu* düzýär.

2-nji mesele. Pagtazarda açylan körekleriň ortaça massasyny anyklaň.

△ Açylan körekleriň hemmesini ýygyp alyp, olaryň massasyny ýekän-ýekän anyklamak mana eýe däl. Köregiň ortaça massasyny bilmek üçin, olaryň birnäçesini ekin meýdanynyň dürli ýerlerinden tötänleýin ýagdaýda saýlanan gowaça düýplerinden ýolup alynýar. Emele gelen saýlanmadaky körekleriň massalary ölçenýär we olaryň orta arifmetigi hasaplanýar. Bu orta arifmetik baha pagta meýdanynda açylan körekleriň ortaça massasy hökmünde kabul edilýär. ▲

Bu mysalda baş toplum – pagta meýdanyndaky ähli körekler; saýlanma toplum bolsa massasyny ölçemek üçin ekin meýdanynyň dürli ýerlerinden ýolup alnan köreklerdir.



Tötänleýin ýagdaýda saýlap alnan n sany obýektiň synag (ölçeme, gözegçilik) netijeleri $x_1, x_2, \dots, x_n$ diýeliň. n san *saýlanmanyň göwrümi* diýilýär. Saýlanmanyň agzalary, adatda, *wariantalar* diýilýär. Wariantalary artýan tertipde ýazyp çykalyň:

$$x_1^* \leq x_2^* \leq x_3^* \leq \dots \leq x_n^* \quad (1)$$

(1) gatnaşyga *wariasion hatar* diýilýär.

3-nji mesele. Piläniň uzynlygyny ölçände şeýle bahalar (sanimetrlerde) alyndy:

3,40; 3,34; 3,24; 3,40; 3,62; 3,45; 3,43; 3,35; 3,50; 3,56.

Şu bahalara laýyk wariasion hatar düzüň.

△ Bu bahalaryň iň kiçisi 3,24; iň ulusy 3,62. Sanlary artýan tertipde ýerleşdirip, şu wariasion hatary alarys:

3,24; 3,34; 3,35; 3,40; 3,40; 3,43; 3,45; 3,50; 3,56; 3,62. ▲

4-nji mesele. Tötänleýin ýagdaýda 10 düýp gowaça saýlandy. Olardaky gunçalaryň sany sanaldy we şeýle netijeler alyndy: 15, 11, 10, 15, 17, 15, 16, 16, 17, 18. Şu bahalara laýyk wariasion hatar düzüň.

△ Berlen sanlaryň iň kiçisi 10, iň ulusy 18. Sanlary artýan tertipde ýazyp, şu wariasion hatary alarys:

10; 11; 15; 15; 15; 16; 16; 17; 17; 18. ▲

$x_1, x_2, \dots, x_k$ saýlanmada x_1 warianta n_1 gezek..., x_k warianta n_k gezek gaýtalan (bolan), diýeliň. $n_1, n_2, \dots, n_k$ sanlar ýygýlyklar diýilýär. Görnüşi ýaly, $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$.

$W_1 = \frac{n_1}{n}, W_2 = \frac{n_2}{n}, \dots, W_k = \frac{n_k}{n}$ gatnaşyklara *otnositel ýygýlyklar* diýilýär.

Görnüş i ýaly, $W_1 + W_2 + \dots + W_k = 1$. Şeýle jedwelleri düzeliň (1-nji we 2-nji jedweller):

1-nji jedwel

Synag netijeleri	x_1	x_2	...	x_k
Ýygýlyk	n_1	n_2	...	n_k

2-nji jedwel

Synag netijeleri	x_1	x_2	...	x_k
Otnositel ýygýlyk	W_1	W_2	...	W_k

1-nji we 2-nji jedwelleri $x_1, x_2, \dots, x_k$ saýlanmanyň, degişlilikde, ýygýlyklar boýunça hem-de otnositel ýygýlyklar boýunça *paylanyşy* diýýäris.

4-nji mesele üçin ýygýlyklar jedweli we otnositel ýygýlyklar jedweli aşakda berlen (degişlilikde, 3- we 4-nji jedweller).

3-nji jedwel

Synag netijeleri	10	11	15	16	17	18
Ýygýlyk	1	1	3	2	2	1

4-nji jedwel

Synag netijeleri	10	11	15	16	17	18
Otnositel ýygylýk	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$

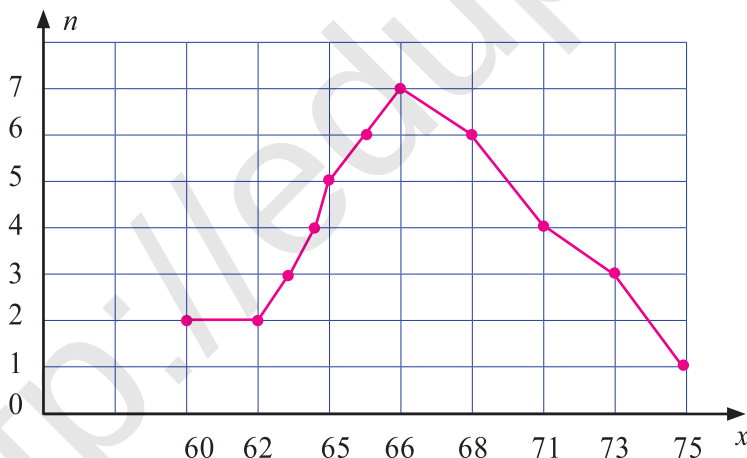
5-nji mesele. „Hereket howpsuzlygy“ aýlygynda DAG işgäri 30 awtomobiliň tizligini ölçedi. Maglumatlar ýygylýklar jedwelinde getirilen:

Ölçeme netijeleri (km/h)	60	62	65	66	68	71	73	75
Ýygylýklar	2	2	5	7	6	4	3	1

Şu maglumatlary tekizlikde şekillendirin.

△ Koordinata tekizliginde koordinatalary (60; 2), (62; 2), (65; 5), ..., (75; 1) bolan nokatlary şekillendirýäris we olary kesimler bilen yzygider utgaşdyrýarys (39-njy surat).

Emele gelen döwürük çyzyga *ýygylýklar poligony* diýilýär. ▲



39-njy surat.

Eger saýlanmanyň göwrümi uly bolsa, onuň ýygylýklar boýunça paýlanyşyny tapmak üçin saýlanma *synplara* bölünýär. Synplaryň ölçegi (ululygy, uzynlygy,...) birmeňzeş bolmaly.

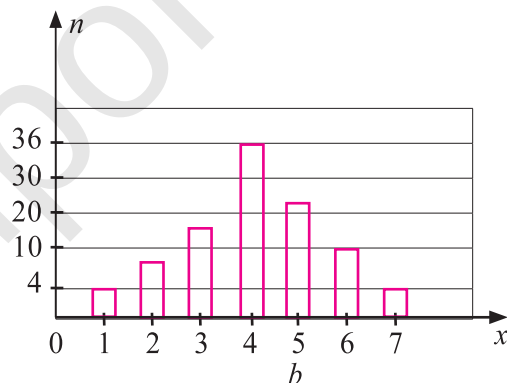
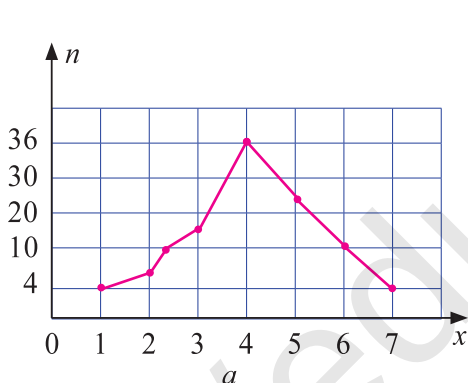
Mysal. DAG işgärleri „Hereket howpsuzlygy“ aýynda 100 awtomobili tehniki gözden geçirishden geçirende olaryň geçen 6 aýyň dowamynda näçe

kilometr ýol ýörändigini hem anykladylar. Bu maglumatlaryň ýygyllyklar boýunça paýlanyşy aşakdaky jedwelde berlen. Saýlanmalar 7 synpa bölünen. Synplaryň ölçegi (uzynlygy) birmeňzeş.

Synplar	8001–9000	9001–10000	10001–11000	11001–12000	12001–13000	13001–14000	14001–15000
Synpyň tertip nomeri	1	2	3	4	5	6	7
Ýygyllyklar	4	6	18	36	22	10	4

$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 + n_7 = 100$ bolýandygy aýdyň.

Jedweldäki maglumatlary ýygyllyklar poligony ýa-da sütünli diagramma görnüşinde şekillendirmek mümkin (40-njy a, b suratlar).



40-njy surat.

Gönükmeler

467. Tötänleýin ýagdaýda saýlanan 30 düýp gowaça ösümligindäki gunçalaryň sany aşakdaky jedwelde getirilen:

15	17	15	10	18	11	15	17	16	16
17	10	14	15	16	15	14	13	15	13
16	17	16	14	12	14	15	14	17	13

(Maglumatlar M.Sultanowanyň „Wariasion statistika“ gollanmasyndan alnan. „O‘qituvchi“ neşirýaty, D., 1977.)

- 1) Saýlanmanyň ýygýlyklar jedwelini düzüň.
- 2) Saýlanmanyň ýygýlyklar poligonyny gurun.

468. Synp ýolbaşçysy synpdaky 30 okuwçydan dynç alyş güni her bir okuwçy näçe sagat telewizor görendigi barada maglumat aldy. Olar jedwelde görkezilen:

3	2	5	4	5	3	6	0	2	1	3	3	4	3	3
3	1	3	4	4	2	4	3	2	5	2	4	2	0	4

Maglumatlar esasynda: 1) ýygýlyklar jedwelini düzüň; 2) ýygýlyklar poligonyny gurun.

469. Harby gulluga çagyrylan ýigitlerden 100 sanysynyň aýakgaplarynyň ölçegi aşakdaky ýygýlyklar jedwelinde berlen:

Ölçegi	38	39	40	41	42	43	44	45
Ýygýlyk	4	4	19	27	23	14	6	3

Maglumatlara görä: 1) otnositel ýygýlyklar jedwelini düzüň; 2) ýygýlyklar poligonyny gurun; 3) otnositel ýygýlyklar poligonyny gurun.

470. 8-nji synplaryň 50 sany okuwçy gyzlarynyň aýakgaplarynyň ölçegleri jedwelde berlen:

Ölçegi	34	35	36	37	38	39	40
Ýygýlyk	5	7	10	15	7	4	2

Maglumatlar esasynda: 1) otnositel ýygýlyklar jedwelini düzüň; 2) ýygýlyklar poligonyny gurun; 3) otnositel ýygýlyklar poligonyny gurun.

471. 8-nji synp okuwçylaryndan 20 sanysynyň geýimleri (pidžak-jalbar) ölçegleri jedwelde berlen:

38	42	40	44	40	48	46	42	44	46
48	46	44	50	46	44	48	44	48	44

Maglumatlar esasynda: 1) ýygýlyklar jedwelini düzüň; 2) otnositel ýygýlyklar jedwelini düzüň; 3) ýygýlyklar poligonyny gurun; 4) otnositel ýygýlyklar poligonyny gurun.

472. Testde 10 sany tabşyryk bardy. Synpdaky 30 okuwçynyň test neti-jeleri (dogry jogaplarynyň sany) jedwelde berlen:

5	8	2	6	5	9	7	6	10	9	8	7	9	3	7
7	3	7	8	9	10	5	7	7	5	5	7	5	4	5

Maglumatlara görä: 1) ýygyllyklar jedwelini düzüň; 2) ýygyllyklar poligonyny guruň.

473. Sport toparynda gatnaşýan 150 ýigidiň 1 minut 30 sekundyň dowam-nynda näçe gezek „oturyp-turşy“ barlandy. „Oturyp-turma“lar sany 40-dan 74-e çenli boldy: [40;74]. Bu kesim her biriniň uzynlygy 5-e deň bolan aralyklara bölündi. Her bir aralyga düşen gözegçilikler sany hasaplandy we şu ýygyllyklar jedweli düzüldi:

„Oturyp - turma“lar sany	Ýygyllygy
40-dan 44-e çenli	11
45-den 49-a çenli	20
50-den 54-e çenli	28
55-den 59-a çenli	36
60-dan 64-e çenli	24
65-den 69-a çenli	19
70-den 74-e çenli	12
Jemi	150

Maglumatlara laýyk: 1) ýygyllyklar poligonyny guruň; 2) sütünli diagrama guruň.

29-Ş.ORTA BAHÄ. MODA. MEDIANA

Orta baha düşünjesi bilen tanyşsýňyz. Eger wariantlar $x_1, x_2, \dots, x_n$ bolsa, saýlanmanyň orta bahasy diýip

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

sana aýdylýar.

Eger saýlanmada x_1 warianta n_1 gezek, x_2 warianta n_2 gezek,..., x_k warianta n_k gezek gaýtalan (bolan) bolsa,

$$\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + \dots + n_k x_k}{n_1 + \dots + n_k}$$

san saýlanmanyň *agramly orta bahasy* diýilýär. $n_1, n_2, \dots, n_k$ sanlar degişli wariantalaryň ýygylklary bolýandygyny ýatladyp geçýäris.

1-nji mesele. Hojalyk 100 ha ýere çigit ekip, mälüm bir sort pagtadan gektar başyna 33 sr-den hasyl aldy. 50 ha başga ýere ekilen şol sort pagtadan bolsa 30 sr-den hasyl aldy. Hojalyk 1 gektar ýerden ortaça näçe hasyl alypdyr?

△ Bu ýerde $x_1 = 33$, $n_1 = 100$; $x_2 = 30$, $n_2 = 50$.

$$\bar{x} = \frac{100 \cdot 33 + 50 \cdot 30}{100 + 50} = \frac{3300 + 1500}{150} = \frac{4800}{150} = 32 \text{ (sr)}.$$

Jogaby: 32(sr). ▲

2-nji mesele. Sportçy beýiklige 7 gezek bökdi we şeýle netijeleri gazandy (metr hasabynda) :

2,1; 1,97; 2,44; 1,85; 1,97; 1,96; 2,06.

Sportçy ortaça näçe metr beýiklige böküpdür?

△ Bu ýerde 1,97 warianta iki gezek, galan wariantlar bir gezek gaýtalanypdyr. Mundan

$$\bar{x} = (2,1 + 2 \cdot 1,97 + 2,44 + 1,85 + 1,96 + 2,06) : 7 = 14,35 : 7 = 2,05 \text{ (m)}.$$

Jogaby: 2,05 metr. ▲

Orta baha maglumatlar hatarynyň *merkezini* aňladýan san diýmek mümkin.

Moda. Moda düşüňjesine getirýän meselä garalyň.

3-nji mesele. Mekdep şepagat uýasy 8-nji synp okuwçylaryndan 10 sanysynyň boýuny ölçäp, aşakdaky netijeleri aldy (santimetr hasabynda): 166; 168; 170; 165; 164; 168; 169; 163; 168; 162.

Saýlamada haýsy wariant iň köp gaýtalanypdyr?

△ Wariasion hatar düzeliň:

162; 163; 164; 165; 166; 168; 168; 168; 169; 170.

Bu wariasion hatarda öwrenilýän belgi – okuwçynyň boýunyň beýikligi – 168 cm iň köp – 3 gezek bellik edilen, başga wariantlar bolsa 1 ýa-da 2 gezek. Bu wariasion hatar üçin 168 sany *moda* bolýar. ▲



Berlen wariasion hatarda öwrenilýän belginiň iň köp duşýan bahasyna *moda* diýilýär we M_0 ýaly belgilenýär.

Moda we orta baha özara deň bolmazlygy-da, deň bolmagy-da mümkin. Şu meselede okuwçylaryň ortaça beýikligi $\bar{x} = (2 \cdot 163 + 164 + 165 + 166 + 3 \cdot 168 + 169 + 170) : 10 = 1664 : 10 = 166,4$ (cm) bolýar.

Bu meselede moda we orta baha özara deň bolmady: $168 \neq 166,4$.

4-nji mesele. Alynyň „Algebra“ predmetinden žurnaldaky bahalary: 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5.

Şu saýlanmanyň modasyny we orta bahasyny tapyň.

▲ $M_0 = 4$ bolýandygy aýdyň, çünki 4 warianta saýlanmada iň köp duşýar:

$$\bar{x} = \frac{2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 5}{2 + 3 + 2} = \frac{28}{7} = 4.$$

Bu meselede $M_0 = \bar{x} = 4$.

Saýlanmanyň modasy bolmazlygy-da mümkin. Meselem, bakjadan üzülen 5 gawunyň massasy ölçenende (kg-larda) 3,8; 4; 4,5; 5,2; 4,9 netijeler alyndy. Bu saýlanmanyň modasy ýok. ▲

Mediana.



Wariasion hataryň agzalarynyň sany täk bolsa, bu hataryň ortasynda ýerleşýän agza *mediana* diýilýär we M_e ýaly belgilenýär.

Meselem, 20,23,24,27,29,31,34 hatar üçin mediana 27 bolýar, çünki 27 sany bu wariasion hataryň ortasynda ýerleşýär. Ondan çep tarapda hem, sag tarapda hem hataryň 3 sanydan agzasy bar. Wariantalar sany jübüt bolan ýagdaýyna garalyň.



12, 14, 17, 21, 23, 29, 32, 37 hatarda 8 agza bar, şeýle ýagdaýda wariasion hataryň medianasy ortada duran iki sanyň orta arifmetigi ýaly kesgitlenýär:

$$M_e = \frac{21+23}{2} = \frac{44}{2} = 22.$$

Giňlik.



Wariasion hataryň iň uly agzasy x_n^* bilen iň kiçi agzasynyň x_1^* arasyndaky tapawuda, ýagny $x_n^* - x_1^*$ san $x_1, x_2, \dots, x_n$ saýlanmanyň *giňligi* diýilýär.

Ol, adatda, r harpy bilen belgilenýär.

Saýlanmanyň giňligi $x_1, x_2, \dots, x_n$ sanlar näçe dagynyk bolýandygyny aňladýan ölçeglerden biridir. Meselem,

$$5, 6, 8, 16, 18, 19 \quad (1)$$

hatar üçin giňlik $r = 19 - 5 = 14$ -e deň.

$$10, 10, 12, 13, 13, 14 \quad (2)$$

hatar üçin bolsa giňlik $r = 14 - 10 = 4$ -e deň. Hakykatdan-da, her iki hatardaky agzalar sany 6 dan, orta bahalary bolsa özara deň ($\bar{x} = 12$).

$14 > 4$ deňsizlik (1) hatardaky agzalar (2) hatardaky agzalara garanda orta baha görä dagynyk ýerleşýändigini, (1) hatarda *üýtgeýjiligiň* uly bolýandygyny aňladýar.

Gönükmeler

474. 10 oýunda mekdebiň futbol komandasynyň bäsdeşiň derwezesine girizen toplarynyň ýygyllyklar jedweli aşakdaky ýaly boldy:

x – toplar sany	0	1	2	3
n – ýygyllyk	4	2	3	1

Şu maglumatlara görä: 1) wariasion hatar düzüň; 2) saýlanmanyň: orta bahasyny; modasyny; medianasyny; giňligini tapyň; 3) ýygylklar poligonyny guruň; 4) otnositel ýygylklar jedwelini düzüň; 5) otnositel ýygylk jedweline laýyk diagrama guruň.

Saýlanmalaryň: 1) orta bahasyny; 2) modasyny; 3) medianasyny; 4) giňligini tapyň (475–477):

- 475.** 1) 12, 14, 9, 13, 15; 3) 15, 13, 13, 14, 16, 14;
2) 16, 14, 13, 17; 4) 5, 8, 13, 12, 12.
- 476.** 1) 6, 8, 10, 11, 10; 3) 8, 10, 12, 11, 14;
2) 3, 6, 8, 4, 9; 4) 6, 3, 2, 7, 5, 7.
- 477.** 1) -3, 4, 5, -4, 1, 2, 4, -3, -2, 3, -3, 2;
2) -3, -3, 4, 4, 4, 6, 6, -3, -2, 4, 5, -4.
- 478.** Dokuz adamdan ybarat eminler topary 10 bally şkalada iki tansçynyň tansyny bahalady. Gözegçilik netijeleri jedwelde getirilen:

Tansçynyň tertip nomeri	Eminleriň tertip nomerleri we netijeleri								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	8,8	9,6	8,9	9,2	8,7	8,9	8,9	8,8	8,7
2	9,1	8,2	9,0	8,9	9,0	9,1	9,0	9,1	9,0

Her bir tansçy üçin goýlan bahalaryň: 1) orta bahasyny; 2) modasyny; 3) medianasyny; 4) giňligini tapyň.

- 479.** Mekdepdäki 40 mugallymyň iş staży baradaky maglumatlar aşakdaky ýygylklar jedwelinde getirilen:

Iş staży	1	2	4	5	7	9	10	12	15	18	20	22	23	25
Mugallymlar sany	3	1	4	3	4	2	3	1	2	6	3	3	3	2

şu saýlanmanyň: 1) orta bahasyny; 2) modasyny; 3) medianasyny; 4) giňligini tapyň; 5) ýyglyklar poligonyny guruň.

- 480.** Gözegçilik kameralary barlananda, tötänleýin ýagdaýda 50 awtomobil saýlandy we her biriniň tizligi (km/hlarda) anyklandy. Netijeler jedwelde getirilen:

62	54	56	73	78	63	68	70	66	54
58	65	55	57	69	67	61	64	53	56
58	76	57	48	57	68	82	78	72	75
65	67	64	54	58	62	67	80	87	69
74	78	70	76	46	60	63	68	74	67

Şu saýlanmanyň;

- 1) giňligini anyklaň;
- 2) aralyk uzynlygyny 5 diýip alyp, saýlanmany synplara (toparlara) bölün (45–49; 50–54; 55–59;...) we ýyglyklar jedwelini düzüň;
- 3) saýlanmanyň orta bahasyny; modasyny; medianasyny hasaplaň;
- 4) ýyglyklar poligonyny guruň;
- 5) otnositel ýyglyklar jedwelini düzüň;
- 6) otnositel ýyglyklar jedweline laýyk diagramma guruň;
- 7) näçe göterim awtomobiliň tizligi 70 km/h-dan artyk eken?

- 481.** Naýza (kopýo) zyňmak boýunça ýaryşda gatnaşýan 40 adamyň görkezen netijeleri (1 metr takyklygynda) aşakdaky jedwelde berlen:

28	31	31	38	43	38	34	52	36	38
35	48	34	45	41	35	42	42	42	41
27	32	29	33	49	37	48	40	47	39
26	25	37	40	28	37	37	44	44	43

- 1) Maglumatlary synplara (toparlara) bölün (25–29; 30–34; ...) we ýyglyklar jedwelini düzün;
- 2) ýyglyklar poligonyny gurun;
- 3) saýlanmanyň: orta bahasyny, modasyny; medianasyny tapyň.

30-§. SAÝLAMAK USULY BILEN KOMBINATORIK MESELELERI ÇÖZMEK

Köp durmuş meseleleriniň çözüwi birnäçe bolmagy mümkin. Çözüwleriň içinden özümize iň makulyny seçip aljagymyz anyk. Çözüwler sanyny hasaplarda hemme wariantlardan (usullardan, mümkinçiliklerden) hiç biri-de „galyp gitmezligi“, „ýitmezligi“ üçin *saýlamak* (sanap çykmak) usulyndan peýdalanýarlar. Bu usulyň mazmuny mysallar çözülen mahalynda açylýar.

1-nji mesele. 2, 3, 5 sifrleriniň kömeginde näçe ikibelgili san düzmek mümkin?

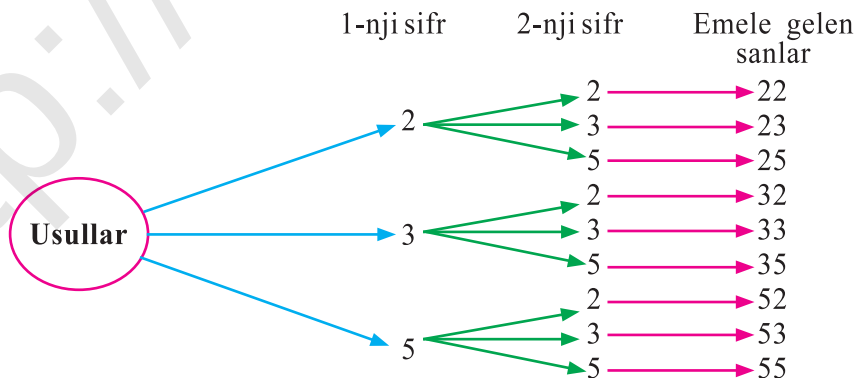
△ Jogaplardan hiç birini düşürüp galdyrmazlyk, olary gaýtalap ýazyp goýmazlyk üçin sanlary, meselem, artýan tertipde ýazyp çykýarys: ilki 2 sifri bilen, soňra 3 sifri bilen, soň 5 sifri bilen başlanýan sanlardan meselä laýygyny *saýlap* ýazýarys:

22, 23, 25; 32, 33; 35, 52, 53, 55.

Jogaby: 9 sany ikibelgili san düzmek mümkin. ▲

1-njimeseläni çözmegiň ýene bir usulyna garalyň.

△Şu shemany gurýarys:

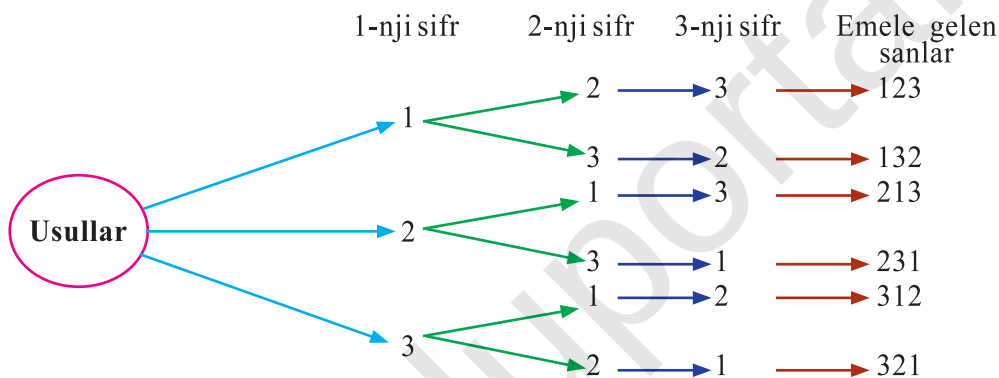


Jogaby: Jemi 9 sany. ▲

Bu shema agaja meñzeyär, şonuñ üçin hem şeýle shemalar mümkin bolan *wariantlar* (usullar, saýlamalar) *agajy* diýilýär. Berlen 2, 3, 5 sifrlerinden ikibelgili san düzmek üçin ilki 1-nji sifr saýlanýar, munuñ bolsa 3 usuly bar, şonuñ üçin agaçdaky „kök“ – usullardan 3 sany şaha çykan. Soň 2-njisifr saýlanýar, munuñ hem 3 usuly bar, şonuñ üçin 1-nji sifr bolmaga dawagär 3 sany sifriñ her birinden 3 sanydan şaha çykyppdyr. Netijede 9 dürli ikibelgili san alynýar.

2-nji mesele. 1, 2, 3 sifrlerinden, olary gaýtalamazdan, jemi näçe dürli 3 belgili san düzmek mümkin?

△ Wariantlar agajyny düzýris:

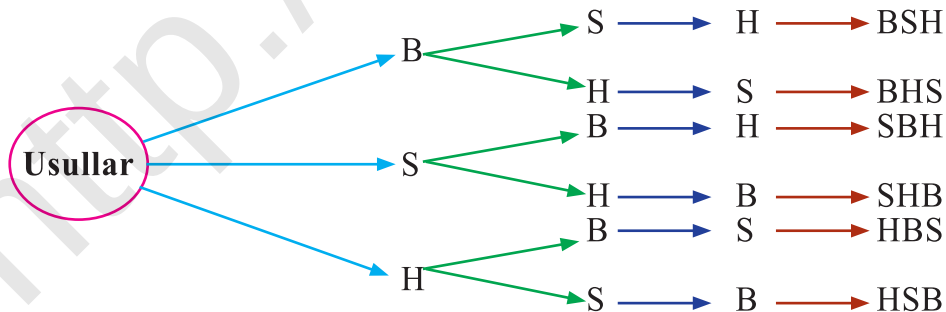


Jogaby: 6 sany.▲

3-nji mesele. Syýahatçylyk firmasy Buhara, Samarkant, Hywa şäherlerine syýahat guramakçy. Şeýle marşrutyñ jemi näçe dürli warianty (usullary) bar?

△ Belgilemeler girizýäris: Buhara – B, Samarkant – S, Hywa – H.

Wariantlar agajyny düzýäris:



Jogaby: Jemi 6 marşrut.▲

4-nji mesele. 1) 1, 2 we 3; 2) 0, 1, 2 we 3 sifrlerinden peýdalanyň, mümkin bolan ähli ikibelgili sanlary ýazyň. Olaryň sany N näçä deň eken?

△ Kombinatorik meseleleri çözmegiň serişdelerinden biri *wariantlar jedwelidir*. Şeýle serişdäniň kömeginde hasaplamakda elementleriň kombinasiýasynyň „ýitip“ gitmesi bolmaýar. Meseläni wariantlar jedweliniň kömeginde çözüp göreliň. Şeýle jedwelleri düzýäris:

1-nji sifr	2-nji sifr		
	1	2	3
1	11	12	13
2	21	22	23
3	31	32	33

$$N = 3 \cdot 3 = 9.$$

Jogaby: 1) $N = 9$.

1-nji sifr	2-nji sifr			
	0	1	2	3
1	10	11	12	13
2	20	21	22	23
3	30	31	32	33

$$N = 3 \cdot 4 = 12.$$

Jogaby: 2) $N = 12$. ▲

Gönükmeler

- 482.** Alyşir, Bahram, Selim futbol oýnuny görmek üçin 3 sany bilet satyn aldylar. Bilete görä olar 1-nji hataryň 1; 2; 3-nji orunlaryny eýelemeli. Olar bu 3 orny näçe usulda eýelemekleri mümkin? Meselä laýyk wariantlar agajyny çyzyň.
- 483.** 0, 4, 5 sifrlerinden, sifrleriň gaýtalanmagy mümkin bolsa, jemi näçe 3 belgili dürli san düzmek mümkin? Meselä laýyk wariantlar agajyny çyzyň.
- 484.** 4, 5, 8 sifrlerinden, sifrleriň gaýtalanmagy mümkin bolsa, näçe 3 belgili san düzmek mümkin?
- 485.** Dükanda alma, armyt, üzüm bar. Sona we Narjan daýzalar bu miwelerden birini saýlamakçy. Şeýle saýlamagyň jemi näçe warianty bar? Wariantlar agajyny çyzyň.
- 486.** 2, 4, 6, 8 sifrlerinden dürli dörtbelgili sanlary düzüň. Sifrler gaýtalanmaýar. Bu sanlaryň näçesi: 1) 4-e; 2) 8-e bölünýär?

487. Azamhan enesine we jigisine bermek üçin iki gül dessesini almakçy. Gül dükanynda ak bägül, gyzyl bägül, gwozdika güllerden ybarat gül desseleri bar eken. Azamhan iki gül dessesini näçe hili usulda saýlamagy mümkin? Wariantlar agajyny çyzyň.
488. Alijan towşanyňa käşir, kelem, şugundyr berýär. Ol şu gök önümlerden ikisini saýlamaly. Alijan muny näçe hili usulda amala aşyryp biler?
489. Seyfiň şifrinde 3 sany – A , B , C harplar bar. Şu harplaryň kömeginde jemi näçe şifr düzmek mümkin? Iki ýagdaýa garaň: 1) harplar gaýtalanmaýar; 2) harplar gaýtalanýar.
490. Tarelkada 2 sany alma, 2 sany armyt, 2 sany şetdaly bar. Nodira we Nozima bu miwelerden 3 sanysyny saýlamakçy. Saýlamagyň näçe usuly (warianty) bar?
491. Alty oglan 3 sany iki orunly gaýykda seýil etmekçi bolýarlar. Çagalary bu gaýyklara näçe hili usulda paýlamak mümkin? Wariantlar agajyny gurun.

31-§. KOMBINATORIKANYŇ ESASY DÜZGÜNI WE ONY MESELELER ÇÖZENDE ULANMAK

Eziz okuwçy! Siz 6-njy synpda kombinatorikanyň goşmak we köpeltmek düzgünlerine degişli ilkinji düşüňjeler bilen tanşypdyňyz.

1-nji mesele. Samarkantdan Daşkente 4 hili ýol bilen gelmek mümkin: samolýot, otly, awtobus we ýeňil maşyn (taksi). Daşkentden Hojakende 3 hili transport serişdesinde barmak mümkin: otly, awtobus, taksi. Samarkantdan Hojakende näçe hil usulda gelmek mümkin (41-nji surat)?



41-nji surat.

△ Samarkantdan Daşkende gelmegiñ jemi 4 ýoly bar. Bar bolan 4 ýoldan birini saýlap, Daşkende geldik, diýeliñ. Indi Hojakende barmagyñ 3 ýoly–mümkinçiligi bar. Şeýdip, Samarkantdan Daşkent arkaly Hojakende barmagyñ jemi $4 \cdot 3 = 12$ hili usuly bar.

Bu usullary ýazyp hem çykmak mümkin. Belgileme girizeliñ: samolýot (s), otly (o), awtobus (a), taksi (t). Meselem, so ýazuw Samarkantdan Daşkende samolýotda gelmegi we Daşkentden Hojakende otluda barmagy aňladýar. Şu belgilemeleriñ kömeginde Samarkantdan Daşkent arkaly Hojakende barmagyñ jemi usullary (wariantlary, ýollary, mümkinçilikleri) aşakdaky ýaly bolýar:

so	oo	ao	to
sa	oa	aa	ta
st	ot	at	tt

Jemi usullaryñ sany: $4 \cdot 3 = 12$ sany.

Jogaby: 12 hili. ▲



Umuman, A şäherden B şähre gelmegiñ m sany **usuly bolsa we her bir usul üçin** B -den C şähre gelmegiñ n sany usuly bolsa, onda A -dan C -ge gelmegiñ jemi $m \cdot n$ sany usuly bar, ýagny A -dan C -ge $m \cdot n$ hili usul bilen gelmek mümkin.

Bu düzgün *köpeltmek düzgünidir* we ol kombinatorikanyñ esasy düzgüni hasaplanýar.

2-nji mesele. „Makro“ supermarketiniñ „Hemmesi öý üçin“ bölüminde 5 hili käse, 6 hili tarelka, 4 hili çay çemçe bar. Jumagül daýza dürli atdaky iki sany önüm satyn almakçy. Ol muny näçe hili usulda amala aşyryp biler?

△ 1) Käsäni saýlamagyñ 5 sany usuly bar. Tarelkany saýlamagyñ 6 usuly bar. Käse saýlamagyñ her bir usulyna tarelka saýlamagyñ 6 usuly bar. Diýmek, köpeltmek düzgünine görä käse bilen tarelka jübütligini saýlamagyñ $5 \cdot 6 = 30$ sany usuly bar. Edil şeýle pikir ýöredip: 2) käsäni we çemçäni $5 \cdot 4 = 20$ usulda; 3) tarelka bilen çemçäni $6 \cdot 4 = 24$ hili usulda saýlap almak mümkindigini tapýarys. Diýmek, dürli atdaky iki önümi $30 + 20 + 24 = 74$ hili usulda saýlap almak mümkin eken.

Jogaby: 74 hili usulda. ▲

3-nji mesele. Näçe üçbelgili sanda diñe bir sany 7 sifri bar?

△ 7 sifri 1-nji, 2-nji, 3-nji orunda (ýüzler, onlar, birler öýjüginde) bolmagy mümkin.

Eger 7 sifri 1-nji orunda duran bolsa, 2-nji we 3-nji orunlary 9 sany sifr (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9) kömeginde $9 \cdot 9 = 81$ usulda doldurmak mümkin.

Eger 7 sifri 2-nji orunda bolsa, onda 1-nji orunda 0 we 7 sifrlerinden başga islendik sifr durmagy mümkin. 1-nji orny eýelemegiñ $10 - 2 = 8$ sany mümkinçiligi bar. Munda 3-nji orunda 7 sifriden başga islendik sifr durup biler; diýmek, mümkinçilikler sany $8 \cdot 9 = 72$ sany.

Eger 7 sifri 3-nji orunda dursa, onda 1-nji orny almak üçin 8, 2-nji orny almak üçin bolsa 9 mümkinçilik bar. Şeýdip, onluk ýazuwynda diñe bir sany 7 sifri bar üçbelgili sanlaryñ jemi $81 + 72 + 72 = 225$ sany eken.

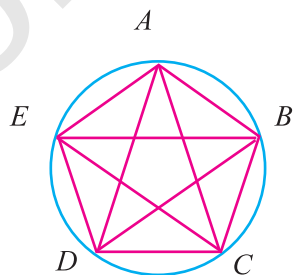
Jogaby: 225 sany. ▲

4-nji mesele. Töwerekde alnan 5 nokat A, B, C, D, E harplary bilen belgilenen. Her bir nokat galan her bir nokat bilen utgaşdyrylsa, näçe kesim emele geler (42-nji surat)?

△ **1-nji usul.** Nokatlaryñ sany kem bolany üçin, meselä laýyk şekili çyzyp, kesimleriñ sanyny gönüden-göni sanap çykmak mümkin, olar 10 sany. Emma töwerekde alnan nokatlar sany köp bolsa (meselem, 100 sany, ...), laýyk şekil çyzmak we ondaky kesimleri gönüden-göni sanamak kynlaşýar. Munda başgaça çemeleşmeli.

2-nji usul. Töwerekde alnan 5 nokadyñ her birinden 4 sanydan kesim geçirilýär. Şeýle kesimleriñ sany $5 \cdot 4 = 20$ sany, emma kesimleriñ sanyny hasaplada her bir kesim iki gezek sanalan. Diýmek, biz 20-ni 2-ä bölmelidiris: $20 : 2 = 10$.

3-nji usul. A nokady galan 4 nokat bilen utgaşdyrsak, 4 kesim alarys: AB, AC, AD, AE . B nokatdan hem 4 kesim geçirmek mümkin, emma B -den geçirilen bir kesimi ($BA = AB$) biz sanadyk. Diýmek, B nokatdan 3 sany täze (öñ hasaplanmadyk, sanalmadyk) kesim geçirilýär. şoña meñzeş, C -den 2 sany, D -den bolsa 1 sany täze kesim geçirmek mümkin. E nokatdan geçirilýän 4 kesimiñ hemmesi öñ hasaplanan ($EA = AE$; $EB = BE$; EC



42-nji surat.

= CE ; $ED = DE$). Diýmek, töwerekde belgilenen 5 nokady utgaşdyrýan jemi kesimler sany $4 + 3 + 2 + 1 + 0 = 10$ sany.▲

5-nji mesele. 3, 4, 5, 6, 8, 9 sifrleriniň kömeginde jemi: 1) sifrler gaýtalanmasa; 2) sifrler gaýtalanmagy mümkin bolsa, näçe üçbelgili san düzmek mümkin?

△ 1) Berlen sifrler 6 sany. Olaryň islendik biri üçbelgili sanyň birinji sifri bolmagy mümkin. Diýmek, üçbelgili sanyň birinji sifrini *saýlamak mümkinçiligi* 6 sany bolýar. Onda 2-nji sifr galan 5 sifriň islendik biri bolmagy mümkin, ýagny 2-nji sifri saýlamak mümkinçiliklerimiz 5 sany. şoňa meňzeş, 3-nji sifri saýlamak mümkinçiliklerimiz 4 sany.

Diýmek, sifrler gaýtalanmasa, jemi üçbelgili sanlar $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ sany bolar eken.

Jogaby: 120 sany. ▲

△ 2) Sifrler gaýtalanýan bolsa, üçbelgili sanyň 1-nji, 2-nji, 3-nji öýjüklerine ýazylyan sifri *saýlamak mümkinçilikleri* 6 sanydan bolýar, çünki berlen sifrler 6 sany. Munda jemi üçbelgili sanlar sany $6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3 = 216$ sany bolýar.

Jogaby: 216 sany. ▲

Gönükmeler

492. Enesi Marala „Korzinka. Uz“ supermarketinden 3 hili miwe satyn alyp gelmegi aýtdy. „Korzinka. Uz“-da 6 hili alma, 4 hili armyt, 5 hili üzüm bar. Maral miweleriň her bir hilinden 1 kg-dan alyp, näçe dürli toplum düzüp biler?

493. Näçe 4 belgili sanda diňe bir sany 5 sifri bar?

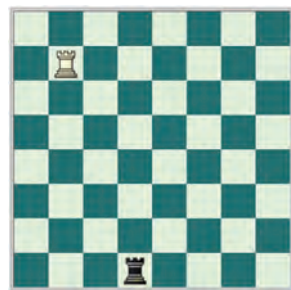
494. Töwerekde: a) 10 sany; b) 100 sany; d) n sany nokat belgilenen. Her bir nokat galan her bir nokat bilen utgaşdyrylsa, her bir ýagdaýda jemi näçe kesim emele geler?

495. 1) 3; 2) 4; 3) 5; 4) 6; 5) 8; 6) 15 dostlar özara el berip görüşýärler. Her bir ýagdaýda el bermeleriň sany näçe bolupdyr?

496. 10 ýoldaş özara küşt turnirini geçirmekçi. Munda her bir çaga galan her bir çaga bilen bir partiýa küşt oýnaýar. Bu turnirde jemi näçe partiýa oýnalýar?

Hany aýdyň, 494–496-njy meseleleriň meňzeşligi nämede?

- 497.** 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sifrleriniň kömeginde jemi: 1) sifrler gaýtalanmasa; 2) sifrleriň gaýtalanmagy mümkin bolsa, näçe üçbelgili san düzmek mümkin?
- 498.** 1, 2, 3, 4, 5 sifrleriniň kömeginde näçe: a) ikibelgili; b) üçbelgili; d) dörtbelgili sanlary ýazmak mümkin?
Sifrler: gaýtalanmaýan; gaýtalanýan ýagdaýlara aýratyn garaň.
- 499.** Futbol boýunça jahan çempionatynda altyn, kümüş, bronza medallary üçin bolýan oýunlarda 16 komanda gatnaşýar. Medallar komandalaryň arasynda näçe hili usul bilen paýlanmagy mümkin?
- 500.** Bir ýurtda 4 şäher bar eken: A , B , C we D . A şäherden B şähre 6 ýol, B şäherden C şähre 4 ýol eltyän eken. A -dan D -ge 2 ýol, D -den C -ge 3 ýol bilen barmak mümkin eken. A şäherden C şähre näçe hili ýol bilen barmak mümkin?
- 501.** Eger natural sanyň ýazuwynda diňe täk sanlar gatnaşsa, şeýle sany „ýakymly“ san diýýäris. Näçe: 1) üçbelgili; 2) dörtbelgili „ýakymly“ san bar?
- 502.** Ýazuwynda hiç bolmanda bir jübüt sifr gatnaşýan 6 belgili sanlar näçe?
- Görkezme:* Ýazuwynda diňe täk sanlar gatnaşýan 6 belgili sanlar $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^6 = 15\,625$ sany. Jemi 6 belgili sanlar bolsa 900 000 sany. Meseläniň şertini kanagatlandyryan 6 belgili sanlar $900\,000 - 15\,625 = 884\,375$ sany.
- 503.** 4 sany dürli haty 4 sany dürli konwerte näçe hili usulda ýerleşdirmek mümkin?
- 504.** 5 okuwçydan 2-sini „Bilimler bäsleşiginde“ gatnaşmak üçin saýlap almaly. Muny näçe hili usulda ýerine ýetirmek mümkin?
- 505.** Dskada 12 sany at, 8 sany işlik we 7 sany sypat ýazylan. Sözlem düzmek üçin her bir söz toparyndan bir sanydan almaly. Muny näçe hili usul bilen amala aşyrmak mümkin?
- 506.** Küşt tagtasynda ak we gara ruhy bir-birini alyp bilmeýän („urup bilmeýän“) edip näçe hili usulda ýerleşdirmek mümkin (43-nji surat)?



43-nji surat.

- 507.** Küşt tagtasyna ak we gara ferzinleri, olar bir-birini „urup bilmeyän“ edip näçe hili usulda ýerleşdirmek mümkin?
- 508.** Küşt tagtasyna ak we gara şalary, oýnuň düzgünlerini bozmazdan, näçe hili usulda goýmak mümkin?
Görkezme: 3 ýagdaýa garaň:
 1) ak şa burçda dur;
 2) ak şa tagtanyň çetinde (ýöne burçda däl) dur;
 3) ak şa tagtanyň çetinde däl.
- 509.** Mekdep naharhanasynda ak çörek, gara çörek we üç hili kolbasa bar. Olardan näçe hili buterbrod taýýarlamak mümkin? Ähli wariantlary ýazyp çykyň.
- 510.** Käbir ýurtlaryň baýdaklary dürli reňkdäki 3 sany gorizontal ýa-da 3 sany wertikal „ýol“ lardan ybarat. Ak, ýaşyl, gök reňkli matalaryň kömeginde şeýle baýdaklardan näçe hilini tikmek mümkin?
- 511.** Boş ýerlere 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 sifrlerinden birini ýazmak mümkin bolsa, $\bigcirc + \square + \triangle = 10$ „deňleme“ näçe çözüwe eýe bolar? Sifrleriň gaýtalanmagy mümkin. Iki ýagdaýa garaň (meselem: 1) 1, 1, 8; 1, 8, 1; 8, 1, 1 dürli çözüw; 2) bir çözüw diýlip garalýan ýagdaýlar).
- 512.** Myradyň çemodany kod bilen açylýar. Bu kod üç dürli sifrdan ybarat bolup, her bir sifr 3-den uly däl. Kodda 13 sany gatnaşmaýar (meselem, kodlaryň sanawynda 0, 13, 213... kodlar ýok). Myrat kody ýadyndan çykaran bolsa, kody tapmak üçin ol köpi bilen näçe gezek „synanyşmaly“ bolýar?
- 513.** Köp etažly öýde girelge gapysyndaky gulp kod bilen açylýar. Kod 0 we 1 sifrlerinden düzülen dörtbelgili san (0000 we 1111 sanlar kod däl diýip hasaplanan). Gulpuň koduny unudan bolsaňyz, gapynyň köpi bilen näçe synanyşykda açarsyňyz?
Görkezme: Ilki bir sany 1 gatnaşýan kodlary, soň iki sany 1 bolan kodlary we ahyrynda, üç sany 1 bolan kodlary synap görmeli.
- 514.** 20 kg tüwini 1 kg, 2 kg, 5 kg-lyk çeküw daşlarynyň kömeginde jamly terezide näçe hili usulda çekmek mümkin?
 $\triangle$ Bu işi aşakdaky ýaly ýerine ýetirmek mümkin:
 1) diňe 1 kg-lyk çeküw daşynyň kömeginde 1 usul;

- 2) diňe 2 kg-lyk çeküw daşynyň kömeginde 1 usul;
- 3) diňe 5 kg-lyk çeküw daşynyň kömeginde 1 usul;
- 4) 1 kg we 2 kg-lyk çeküw daşlarynyň kömeginde 9 usul bilen:

1 kg-lyk daş	18	16	14	12	10	8	6	4	2
2 kg-lyk daş	1	2	3	4	5	6	7	8	9

- 5) 1 kg we 5 kg-lyk çeküw daşlarynyň kömeginde 3 usul bilen:

1 kg-lyk daş	15	10	5
5 kg-lyk daş	1	2	3

- 6) 2 we 5 kg-lyk çeküw daşynyň kömeginde 1 usul: 5 sany 2 kg-lyk we 2 sany 5 kg-lyk;
- 7) 1 kg, 2 kg we 5 kg-lyk çeküw daşlarynyň kömeginde 13 usul bilen:

	Usullaryň sany												
Daşlar, kg	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1 kg	1	3	5	7	9	11	13	8	6	4	2	3	1
2 kg	7	6	5	4	3	2	1	1	2	3	4	1	2
5 kg	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3

Diýmek, jemi $1+1+1+9+3+1+13=29$ usul.

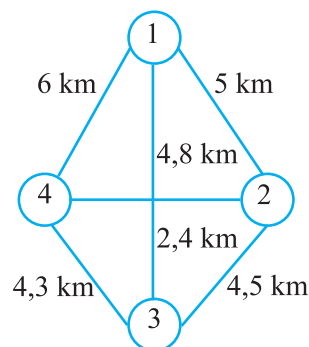
Jogaby: 29 usul.▲

515. Firma 4 sany dükan degişli. Inkassator (dükandaky pullary ýygyp banka tabşyryan işgär) 1-nji dükandan başlap hemme dükanylary aýlanyp çykýar we ýene 1-nji dükana gaýdyp gelýär. Mümkün bolan marşrutlardan iň gysgasyny tapyň (44-nji surat).

Görkezme: Her bir marşrut üçin 5 sifrli kod düzüň. Koduň birinji we ahyrky sifri 1 bolsun.

Meselem, 12431 marşrutuň uzynlygy:

$5+2,4+4,3+4,8=16,5$ (km).



44-nji surat.

IV baba degişli gönükmeler

516. Aşakdaky saýlanma berlen:

18, 19, 17, 18, 14, 13, 17, 19, 18, 18, 20, 22, 19, 15, 24,
14, 18, 15, 13, 17, 20, 22, 21, 19, 18, 16, 13, 13, 15, 14.

Saýlanmanyň: 1) ýygyllyklar jedwelini düzüň; 2) orta bahasyny; 3) modasyny; 4) medianasyny; 5) giňligini tapyň; 6) ýygyllyklar poligonyny gurun.

517. Saýlanmanyň: 1) wariasion hataryny düzüň; 2) orta bahasyny; 3) modasyny; 4) medianasyny; 5) giňligini tapyň:

-5, -4, -3, -2, 0, 3, 6, 6, 5, 5, 5, 7, 8, 8, 6, 7.

518. Jedweldäki maglumatlara görä saýlanmanyň: 1) orta bahasyny; 2) modasyny; 3) medianasyny; 4) giňligini tapyň; 5) ýygyllyklar poligonyny çyzyň; 6) otnositel ýygyllyklar jedwelini düzüň we oňa laýyk diagramma gurun:

Gözegçilik netijeleri	7	8	9	10	12	14	15
Ýygyllyk	6	7	8	9	10	6	4

519. 100 metrli aralyga ylgamakda 8-nji synpyň 20 sany okuwçysy şeýle netijeleri gazandylar (sekuntlarda):

14,3	16,1	14,7	16,9	24,1	22,4	19,8	14,2	17,4	14,5
20,8	19,9	15,4	18,4	20,2	18,3	20,1	18,4	18,3	16,2

Saýlanmanyň: 1) wariasion hataryny; 2) ýygyllyklar jedwelini düzüň; 3) orta bahasyny; 4) modasyny; 5) medianasyny; 6) giňligini hasaplaň; 7) ýygyllyklar poligonyny gurun.

520. 8-nji synpdaky bir okuwçynyň „Algebra“ predmetinden iki çäryegin dowamynda alan bahalary aşakdaky ýaly eken:

4, 3, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 4, 4, 3, 2, 3, 4.

Saýlanmanyň: 1) orta bahasyny; 2) modasyny; 3) medianasyny tapyň; 4) ýygyllyklar jedwelini düzüň; 6) ýygyllyklar poligonyny çyzyň.

ÖZÜÑIZI BARLAP GÖRÜÑ!

1. Futbol çempionatynda 18 komanda gatnaşýar. Eger her bir komanda başga komanda bilen öz meýdanynda we bäsdeşň meýdanynda oýnaýan bolsa, çempionatda jemi näçe oýun oýnalar?
2. 8-nji synpda 12 predmetden ders geçilýär. Duşenbe günü jedwel boýunça 5 sagat ders bolup, her bir sagatda dürli ders geçilýär. Duşenbe günki jedweli näçe hili usulda düzmek mümkin?
3. 5 sany stula 3 okuwçyny näçe hili usulda oturtmak mümkin?
4. Matematika degişli 5 dürli kitaby tekjedäki 5 sany orna näçe hili usulda goýmak bolar?
5. Saýlanmanyň: 1) orta bahasyny; 2) modasyny; 3) medianasyny; 4) giňligini tapyň; 5) ýyglylyklar jedwelini düzüň; 6) ýyglylyklar poligonyny çyzyň:
 $-3, -5, -3, -6, 1, 4, 7, 4, 9, 4$.
6. Saýlanmanyň ýyglylyklar jedweli berlen:

Gözegçilik netijeleri	2	1	5	4	0	-2	3	-1
Ýyglylyk	3	2	1	5	1	2	4	2

Saýlanmanyň: 1) orta bahasyny; 2) modasyny; 3) medianasyny tapyň; 4) ýyglylyklar poligonyny çyzyň; 5) otnositel ýyglylyklar jedwelini düzüň.

521. Eger: 1) sifrler gaýtalanmasa; 2) sifrler gaýtalanmagy mümkin bolsa, 0, 1, 2, 3, 4, 5 sifrlерinden jemi näçe dörtbelgili san düzmek bolar?
522. 0, 3, 4, 5, 6, 7 sifrlерinden jemi näçe dörtbelgili tāk san düzmek mümkin?

523. Adatda, üçburçlugyň depeleri latyn elipbiýiniň uly harplary bilen belgilenýär. Latyn elipbiýinde 26 sany harp bar. Üçburçlugyň depelerini näçe hili usulda belgilemek mümkin?

524. 8 sany stula 3 okuwçyny näçe hili usulda oturtmak bolar?

525. Müşderiniň öý telefony 7 belgili bolup, 218-den başlanýar. Müşderi agza bolan bu telefon stansiýasy näçe müşderä hyzmat edip biler?

526. Näçe hili usulda 5 sany gylyçbazdan 2-sini ýaryşda gatnaşmak üçin saýlap almak mümkin?

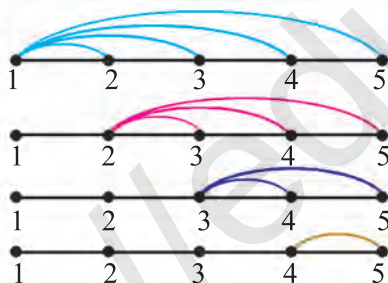
Alynyň çözüwi: 5 sany gylyçbazdan birini saýlamak mümkinçiligi 5 sany. 4 sany gylyçbaz galýar. Olardan birini 4 usulda saýlasa bolýar. Diýmek, $5 \cdot 4 = 20$.

Jogaby: $5 \cdot 4 = 20$ hili usul bar.

Narjanyň çözüwi: 5 nafar gylyçbazy „nomerläp“ çykýarys we olardan 2 adamlyk toparlary düzýäris: 12; 13; 14; 15; 23; 24; 25; 34; 35; 45.

Jogaby: 10 hili usulda saýlamak mümkin.

Mubinabanunyň çözüwi:



4 sany jübütlik: 12; 13; 14; 15;

3 sany jübütlik: 23; 24; 25;

2 sany jübütlik: 34; 35;

1 sany jübütlik: 45.

Jemi $4 + 3 + 2 + 1 = 10$.

Jogaby: 10 hili usulda.

Kimiň çözüwi dogry? Kimiň çözüwi size ýakdy? Nämesi bilen ýakdy?

527. Siziň ýaşytdaşlaryňyz bolan bir çaga: „Häzirlikçe men bir höwesjeň bolaryn, uly bolsam uly şahyr bolaryn“, diýip gowy niýet edip goşgy ýazyp gezer eken. Goşgularynyň birine „Çigildem“ diýip sözbaşy goýupdyr. Bu goşgynyň 1-nji hatary „Nowbaharda gyrda açyldy gül“ eken. Galan hatarlar 1-nji hatardaky sözleriň ornuny çalşyrmak netijesinde emele gelen. Bu „goşguda“ iň köpi bilen näçe hatar bar?

- 528.** Göni çyzykda: 1) 4; 2) 6 nokat belgilendi. Her bir ýagdaýda näçe kesim emele geler?
- 529.** „Reýhan“ kafesiniň tagamnamasynda 3 hili somsa, 4 hili 1-nji tagam, 5 hili 2-nji tagam bar eken. 3 hili görnüşdäki tagama buýurmany näçe usulda bermek mümkin?
- 530.** 2 sany alma, 2 sany armyt, 2 sany şetdaly bar. 3 ýoldaş miweleri her birine 2 dürli miweden ýeter ýaly edip bölüşmekçi. Muny jemi näçe usulda ýerine ýetirse bolar?



IV baba degişli synag gönükmeleri – testler

- 1.** Saýlanmanyň orta bahasyny tapyň: $-3, -2, -1, 0, 1, 4, 5, 7, 8, 6$.
- A) 2,5; B) 11; C) $2\frac{7}{9}$; D) anyklap bolmaýar.
- 2.** Saýlanmanyň medianasyny tapyň: $-1, 0, 2, 6, 6, 5, 10$.
- A) 6; B) 5; C) 5,5; D) 4,5.
- 3.** Saýlanmanyň medianasyny tapyň: $10, 7, 6, 5, 4, 9$.
- A) B) 7; C) 6,5; D) 6,25.
- 4.** Saýlanmanyň giňligini tapyň: $120, 100, 140, 170, 95$.
- A) 120; B) 312,5; C) 70; D) 75.
- 5.** Saýlanmanyň modasyny tapyň: $-1, 0, 2, 2, 4, 5, 5, 7$.
- A) 2 we 5; B) 2 C) 5; D) 3.
- 6.** Jedweldäki maglumatlara görä saýlanmanyň orta bahasyny tapyň:

Gözegçilik netijeleri	5	6	11	7	13	12
Ýygylyk	3	4	3	5	3	2

- A) 9,5; B) 8,5; C) 10; D) 7.

7. 5-e bölünýän 6 belgili sanlar näçe?
 A) $18 \cdot 10^4$; B) $9 \cdot 10^4$; C) $5 \cdot 6!$; D) $6 \cdot 5^4$.
8. Sifrleriň gaýtalanmagy mümkin bolsa, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 sifrlerinden näçe 5 belgili san düzmek mümkin?
 A) 8^5 ; B) 5^8 ; C) $8^2 \cdot 5^3$; D) $5^4 \cdot 8$.
9. Iki sany parallel göni çyzyk berlen bolup, olaryň birinde 4 sany, ikinjisinde 3 nokat belgilenen. Depeleri şu nokatlarda bolan näçe üçburçluk bar?
 A) 30; B) 33; C) 40; D) 32.
10. 3 sany okuwçyny 6 stula näçe hili usulda oturtmak mümkin?
 A) 120; B) 130; C) 100; D) 480.
11. Futbol komandasyndaky 11 adamyň arasyndan komandanyň serdaryny we onuň kömekçisini näçe hili usulda saýlap almak mümkin?
 A) 110; B) 55; C) 22; D) 121.
12. Bagystan obasyndan Daşkende 2 ýol bilen, Daşkentden Ürgenje 4 ýol bilen barmak mümkin. Bagystandan Ürgenje çenli barylýan ýollar näçe sany?
 A) 8; B) 10; C) 6; D) 12.
13. Bir okuwçyda gyzykly matematika degişli 7 sany kitap, ikinji okuwçyda bolsa 9 sany çeper kitap bar. Olar näçe hili usul bilen biriniň bir kitabyny ikinjisiniň bir kitabyna çalyşmagy mümkin?
 A) 63; B) 49; C) 81; D) 126.
14. Atabeginiň doglan gününe ony gutlamak üçin 9 dosty geldi. Atabek olaryň hemmesi bilen, dostlary hem özara el berip görüşdiler. Jemi el berip görüşmeler sany näçe?
 A) 45; B) 90; C) 10; D) 50.



Amaly we predmetara bagly meseleler

- 531.** Harby gulluga $\mathfrak{c}$ agyrylyan $\mathfrak{y}$ igitlerden 50 sanysynyň boýuny santimetrlerde ölçediler. Ölçeme netijeleri jedwelde getirilen:

159	156	160	154	155	154	158	163	158	180
156	157	155	158	159	158	159	154	167	158
158	156	175	156	164	162	168	157	159	162
164	169	158	167	172	166	175	177	183	182
172	170	172	166	171	174	162	167	169	173

1) maglumatlary synplara bölüş (toparlaň): 154–158, 159–163, 164–168, 169–173, 174–178, 179–183.

Her bir synpa maglumatlardan näçesi degişli bolýandygyny anyklaň;

2) sütünli diagramma gurun;

3) ýyglyklar poligonyny gurun.

- 532.** Tötänleýin ýagdaýda saýlanan 30 düýp gowaça ösümliginde açylan körekleriň sany jedwelde berlen:

7	4	7	6	4	4	4	4	3	5	7	4	3	3	4
3	6	5	4	7	6	4	4	3	4	3	4	4	3	5

Maglumatlara görä:

1) ýyglyklar jedwelini düzüň;

2) ýyglyklar poligonyny gurun.

- 533.** Özbek ýazyjysynyň özbek dilindäki käbir eserini saýlaň. (Meselem: H. Tohtabayewiň „Sary döwi münüp“; A. Kadyrynyň „Öten günler“ eserleri.) Eseriň tötänleýin ýagdaýda saýlanan, meselem, 2 sahypasyndaky harplary sanaň. Özbek elipbiýindäki her bir harp siz saýlan sahypalarda näçe gezekden duşýar? Harplaryň: 1) ýyglyklar boýunça; 2) otnositel ýyglyklar boýunça paýlanyşyny düzüň; 3) ýyglyklar poligonyny gurun.

- 534.** 8-nji synp okuwçylarynyň arasynda Alyşir Nowaýynyň gazallaryny ýatdan labyzly aýtmak boýunça ýaryş bolup geçdi. Onda 10 sany gyz we 9 sany oğlan gatnaşdy.

x – gyzlar ýatlan gazallaryň sany,

y – oğlanlaryň ýatlan gazallarynyň sany bolsun. x we y sanlarynyň ýygyllyklar boýunça paýlanyşy aşakdaky jedwellerde berlen:

x – gazallar sany	4	5	6	8	12
n – ýygyllyk	3	2	3	1	1

y – gazallar sany	4	5	6	8	9
n – ýygyllyk	2	4	1	1	1

Jedwele görä x we y ululyklaryň:

1) modalaryny; 2) medianalaryny tapyň; 3) jedwellere laýyk ýygyllyklar poligonyny gurun.

Δ x we y ululyklaryň jedwel görnüşinde berlen paýlanyşyny wariantlaryň aşakdaky hatary görnüşinde ýazmak hem mümkin:

$$x: 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 8, 12 \quad (1)$$

$$y: 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 8, 9 \quad (2)$$

(1) saýlanmada 2 sany moda bar: $M_{0_1} = 4$ we $M_{0_2} = 6$. (2) saýlanmada bolsa moda bir sany: $M_0 = 5$.

(1) hatarda 10 sany (jübüt sandaky) agza bar. Munda mediana merkezdeki iki agzanyň orta arifmetigine deň:

$$M_e = \frac{5+6}{2} = \frac{11}{2} = 5,5$$

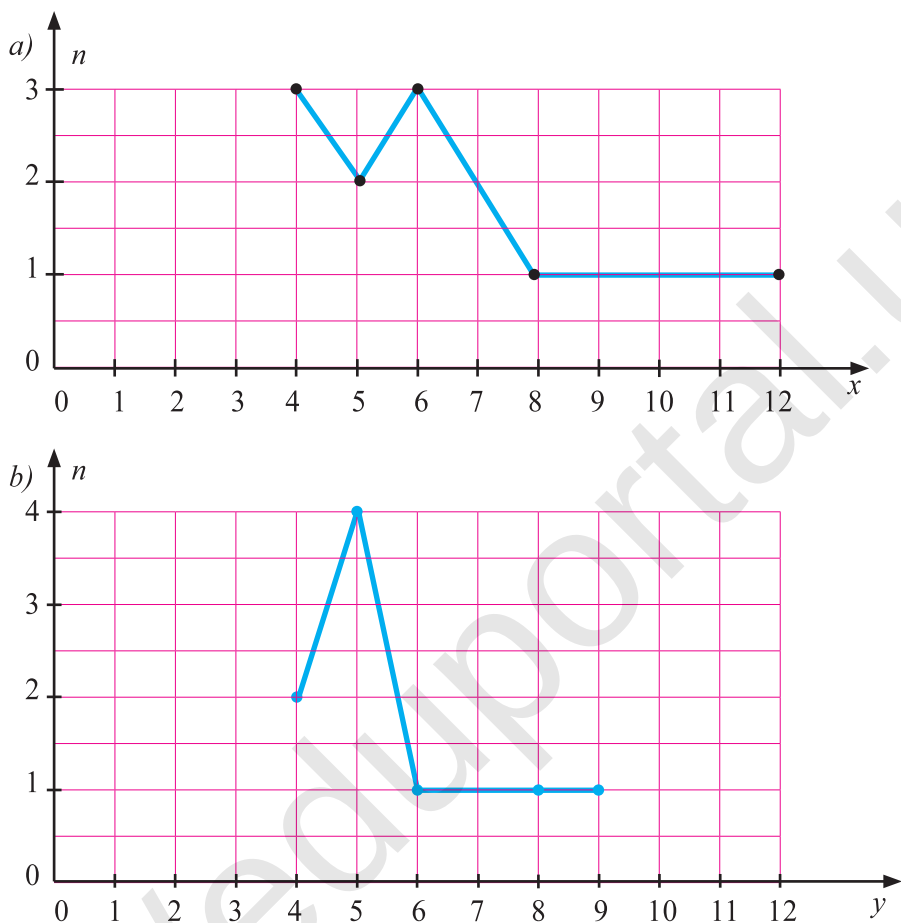
(2) hatarda 9 sany (täk sandaky) agza bar. Munda mediananyň bahasy merkezdäki agza deň: $M_e = 5$.

Mediana wariasion hatary deň ikä bölýär: medianadan çep tarapda hem, sag tarapda hem wariasion hataryň elementleriniň sany birmeňzeş, özara deň bolýar.

Jogaby: 1) (1) hatar üçin $M_{0_1} = 4$; $M_{0_2} = 6$; (2) hatar üçin $M_0 = 5$;

2) (1) hatar üçin $M_e = 5,5$; (2) hatar üçin $M_e = 5$;

3) x we y ululyklaryň ýygyllyklar poligony 45-nji a , b suratlarda berlen. ▲



45-нчи surat.

535. Her bir 8-nji synp üçin, meselem, I we II çäryekleriň netijelerine laýyk:

- 1) ýygýlyklar jedwelini düzün; 2) ýygýlyklar poligonyny guruň;
- 3) poligonlary deňeşdiriň we netije çykaryň. Maglumatlary synp žurnallaryndan mugallymyňyzyň kömeginde alyň.

Meseläni nähili çözüändigini beýan ediň.

536. Mekdebiňiziň: 1) 5-; 2) 8-; 3) 11-nji synplarynyň okuwçylarynyň her bir synplar üçin: a) boýlarynyň ortaça uzynlyklaryny; b) ortaça massalaryny tapyň. Maglumatlary mekdep şepagat uýasyndan alyň. Degişli ýygýlyklar poligonyny guruň.

- 537.** Gözegçilikleriňiziň netijeleri esasynda mekdebiňizde 1 günde ortaça näçe gram mel ulanylýandygyny anyklaň. 1 günde, 1 aýda Respublikamyzyň mekdeplerinde näçe tonna mel ulanylýandygyny çak ediň. Respublikamyzda ýokary okuw mekdeperiniň, liseýleriň we mekdepleriň sany bilelikde (hasaplamak aňsat bolar ýaly) 10000 sany diýip alyň.
- 538.** 3 gektar ýere gawun ekilen. Olar ýetişip bişdi. 1 gektar ýerden ortaça näçe tonna hasyl alnyşyny bahalaň. Bu işi nähili amala aşyrandygynyzy ädimme-ädim beýan ediň.
- 539.** Awtomaşynlary döwlet sanawyndan geçirmekde 3 sany sifr, 3 sany harpdan we şäher ýa-da welaýat üçin belgilenen koddan peýdalanylýar. Meselem, awtomaşynyň nomerindäki 01 kod – maşyn Daşkentde sanawdan geçendigini aňladýar. Näme diýip oýlaýarsyňyz, Daşkentde iň köpi bilen näçe awtomaşyn sanawdan geçmegi mümkin?
 ▲ Nomerlemekde 24 sany harp gatnaşdy, diýeliň. Nomer 6 „ýeri“ eýeleýär. 1-nji „ýerde“ 10 sany sifrdan islendik biri bolmagy mümkin. 2-nji „ýeri“ 10 sany sifrdan biri eýeleýär. 3-nji „ýerde“ 9 sany sifrdan islendik biri bolýar. (3 sany birmeňzeş sifrlı nomer berilmeýär, şeýle nomerler aukSIONda satylýar.) Nomerdäki 1-nji harp hem, 2-nji harp hem, 3-nji harp hem 24 sany harpyň islendik biri bolmagy mümkin. Diýmek, Daşkentde sanawdan geçmegi mümkin bolan jemi awtomaşynlar $10 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 24 = 24^3 \cdot 900 = 12\,441\,600$ sany. Bu hasaplamada harplaryň nomerdäki üçbelgili sandan „bir harp – üçbelgili san – 2 harp“ ýa-da „üçbelgili san – 3 harp“ görnüşinde bolýandygynyň tapawudy yok.
Jogaby: 12 441 600 sany. ▲
- 540.** 2, 4, 7, 9 sifrlerinden olary gaýtalamazdan näçe dörtbelgili san düzmek mümkin? Olaryň näçesi: 2-ä, 4-e, 11-e bölünýär?
- 541.** Doglan günüňize çagyrylan 4 dostuňyzy 4 sany stula näçe hili usulda oturdyp bilersiňiz?
- 542.** Tarelkada 8 sany hoz bardy. Apbas islendik 3 sanysyny almakçy boldy. Muny ol näçe hili usulda amala aşyrmagy mümkin?
- 543.** Zalda 2 sany boş ýer bar. 3 adamdan 2-sini şu ýere näçe hili usulda oturtmak mümkin?

V BAP

8-NJI SYNP ALGEBRA KURSUNY GAÝTALAMAK ÜÇIN GÖNÜKMELER

544. Hasaplaň:

$$1) \frac{27}{32} \cdot \frac{8}{162} \cdot \frac{72}{69};$$

$$2) \frac{38}{147} \cdot \frac{91}{152} \cdot \frac{65}{264};$$

$$3) \left(\frac{5}{8} + \frac{7}{12} \right) \cdot \left(3\frac{23}{58} - 2\frac{9}{58} \right);$$

$$4) \left(\frac{3}{4} + \frac{2}{9} \right) \cdot \left(2\frac{23}{56} - 3\frac{15}{56} \right);$$

$$5) 34,17:1,7 + (2\frac{3}{4} + 0,15): \frac{4}{5} - 23\frac{3}{8};$$

$$6) 5,86 - 3\frac{5}{6} \cdot \frac{15}{23} + \frac{15}{28} : 4\frac{2}{7};$$

$$7) \frac{12\frac{4}{5} \cdot 3\frac{3}{4} - 4\frac{4}{11} \cdot 4\frac{1}{8}}{11\frac{2}{3} \cdot 2\frac{4}{7}};$$

$$8) \frac{5\frac{1}{7} \cdot 5\frac{1}{4} + 5\frac{5}{8} \cdot 3\frac{1}{5}}{10\frac{5}{13} : 1\frac{1}{26}}.$$

545. Iki sandan biri a -ga deň, ikinjisi ondan 7 sany artyk. Şu sanlaryň köpeltmek hasylynyň ikeldilenini tapyň. Şu köpeltmek hasylynyň bahasyny $a = \frac{1}{2}$ 2 bolanda hasaplaň.

546. Iki sanyň jemi 30-a deň. Sanlardan biri a . Şu sanlaryň ikeldilen köpeltmek hasylyny ýazyň. Şu köpeltmek hasylynyň bahasyny $a = -2$ bolanda hasaplaň.

547. a sany ýüzlük, b sany onluk we c sany birlikden düzülen natural sanda näçe birlik bardygyny görkezýän formula düzüň. Edil şu sifrleriň kömeginde, ýöne ters tertipde ýazylan sanda näçe birlik bar?

548. a kilogram we c gram näçe gramy düzýär? Gramlaryň sanyny x harpy bilen belgiläp, jogaby formula bilen ýazyň.

Amallary ýerine ýetiriň (549–552):

549. 1) $\left(\frac{c-d}{c^2+dc}-\frac{c}{d^2+cd}\right):\left(\frac{d^2}{c^3-cd^2}+\frac{1}{c+d}\right);$

2) $\left(\frac{2n}{k+2n}-\frac{4n^2}{k^2+4nk+4n^2}\right):\left(\frac{2n}{k^2-4n^2}+\frac{1}{2n-k}\right);$

3) $\left(\frac{b^2}{b+x}-\frac{b^3}{b^2+x^2+2bx}\right):\left(\frac{b}{b+x}-\frac{b^2}{b^2-x^2}\right);$

4) $\left(\frac{2q}{2q+m}-\frac{4q^2}{4q^2+4mq+m^2}\right):\left(\frac{2q}{4q^2-m^2}+\frac{1}{m-2q}\right).$

550. 1) $1+a-\frac{a-1}{a}+\frac{a-1}{2a}-\frac{3a}{2};$

2) $\frac{m+1}{m^2+m+1}-\frac{2}{1-m}+\frac{3m^2+2m+4}{1-m^3};$

3) $\frac{m+n}{3}-m+2n;$

4) $m+n-\frac{2m-n}{5}-\frac{m+n}{2}.$

551. 1) $\frac{a^3+2a^2}{a^2-1}\cdot\frac{(a+1)^3(a-1)}{a^2(a+2)};$ 2) $\frac{(a^2+ab)^2}{a^2-b^2}:\frac{(a+b)^2}{(ab-b^2)^2}.$

552. 1) $1,5\cdot\left(2b-\frac{3b}{7}\right)-1\frac{5}{7}\cdot(3b-5)+\frac{9b^2-16}{4-3b};$

2) $\frac{x+3a}{x+a}-\frac{x}{x-a}+\frac{2a^2-ax+x^2}{a^2x^2}:\frac{x^2-a^2}{a^2x^2}.$

553. Eger $x>\frac{1}{2}$ we $y>4$ bolsa, onda

1) $4x+3y>14;$ 2) $2xy-3>1;$ 3) $x^2y>1;$ 4) $x^3+y^2>16$

bolýandygyny subut ediň.

554. (Ўятдан.) Деңsizлиги канатландырған ин uly битин саны тапын:
 1) $n \leq -7$; 2) $n < -3,6$; 3) $n \leq 4,8$; 4) $n \leq -5,6$.

555. (Ўятдан.) Деңsizлиги канатландырған ин кичи битин саны тапын:
 1) $n > -12$; 2) $n \geq -5,2$; 3) $n \geq 8,1$; 4) $n \geq -8,1$.

556. Деңsizлиги чөзүн:

- | | |
|--|---|
| 1) $x + 4 > 3 - 2x$; | 2) $5(y+2) \geq 8 - (2-3y)$; |
| 3) $2(0,4+x) - 2,8 \geq 2,3 + 3x$; | 4) $7(x + 5) + 10 > 17$; |
| 5) $\frac{3-x}{2} + \frac{x}{4} > 7$; | 6) $\frac{x}{6} - \frac{2-x}{3} \leq 5$. |

557. Eger

- | | | |
|--------------------------|------------------------------------|-----------------------------|
| 1) $0 \leq x \leq 7,2$; | 2) $-5\frac{1}{3} \leq x \leq 0$; | 3) $4 < \frac{1}{3}x < 5$; |
| 4) $11 < 3x < 13$; | 5) $-3,1 < x \leq 4$; | 6) $12 < 5x < 21$ |

болса, x нәһили битин баһалары кабул едип билерми?

558. Деңsizликлер системасын чөзүн:

- | | |
|---|---|
| 1) $\begin{cases} 5x - 2 \geq 6x - 1, \\ 4 - 3x > 2x - 6; \end{cases}$ | 2) $\begin{cases} 7(x+1) - 2x > 9 - 4x, \\ 3(5-2x) - 1 \geq 4 - 5x; \end{cases}$ |
| 3) $\begin{cases} 12x - 3(x+2) \geq 7x - 5, \\ 13x + 6 \leq (x-5) \cdot 2 + 3; \end{cases}$ | 4) $\begin{cases} \frac{4x-5}{7} < \frac{3x-8}{4}, \\ \frac{6-x}{5} - 1 < \frac{14x-3}{2}. \end{cases}$ |

559. Деңsizликлер системасын чөзүвлери болан битин санлары тапын:

- | | |
|--|---|
| 1) $\begin{cases} \frac{2x-5}{4} - 2 \leq \frac{3-x}{4}, \\ \frac{5x+1}{5} > \frac{4-x}{4}; \end{cases}$ | 2) $\begin{cases} \frac{10x-1}{3} - \frac{2-5x}{4} < \frac{5-3x}{6}, \\ \frac{2x+1}{2} \geq \frac{3+7x}{4} - \frac{5+4x}{5}. \end{cases}$ |
|--|---|

560. Деңлемәни чөзүн:

- | | | |
|--------------------|--------------------|-------------------|
| 1) $ x-2 = 3,4$; | 2) $ 3-x = 5,1$; | 3) $ 2x+1 = 5$; |
| 4) $ 1-2x = 7$; | 5) $ 3x+2 = 5$; | 6) $ 7x-3 = 3$. |

561. Deňsizligi çözüň:

- 1) $|x-2| \leq 5,4$; 2) $|x-2| \geq 5,4$; 3) $|2-x| < 5,4$;
4) $|3x+2| \geq 5$; 5) $|2x+3| < 5$; 6) $|3x-2,8| \geq 3$.

562. Kökden çykaryň:

- 1) $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}}$; 2) $\sqrt{5\frac{4}{9}}$; 3) $\sqrt[3]{\frac{8b^6}{343a^9}}$, $a \neq 0$; 4) $\sqrt[4]{\frac{16x^8}{81y^4}}$, $y > 0$.

563. Ýönekeýleşdiriň:

- 1) $(3\sqrt{20} + 7\sqrt{15} - \sqrt{5}) : \sqrt{5}$; 2) $(\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{14} + \sqrt[3]{56}) : \sqrt[3]{7}$;
3) $2\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{6} - 3\sqrt{\frac{2}{3}}$; 4) $7\sqrt{1\frac{3}{4}} - \sqrt{7} + 0,5\sqrt{343}$.

564. Aňlatmalaryň bahalaryny deňeşdiriň:

- 1) $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{-1/3}$ we $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{-1/2}$; 2) $(2\sqrt{0,5})^{0,3}$ we $(2\sqrt{0,5})^{0,37}$.

565. Aňlatmany ýönekeýleşdiriň:

- 1) $\frac{\sqrt[6]{a^3\sqrt[3]{a^{-1}}}}{a^{-\frac{2}{9}}}$; 2) $\frac{\sqrt[4]{x^3\sqrt[3]{x}}}{x^{\frac{1}{3}}}$; 3) $(16a^{-4})^{-\frac{3}{4}}$; 4) $(27b^{-6})^{\frac{2}{3}}$.

566. Köpeldijini kökden çykaryň:

- 1) $\sqrt{9a^2b}$, munda $a < 0$,
 $a > 0, b > 0$; 2) $\sqrt{25a^2b^3}$, munda
3) $\sqrt{8a^3b^5}$, munda $a < 0, b < 0$; 4) $\sqrt{12a^3b^3}$, bunda $a < 0, b < 0$.

567. Köpeldijini kök aşagyna alyň:

- 1) $x\sqrt{5}$, munda $x \geq 0$; 2) $x\sqrt{3}$, munda $x < 0$;
3) $-a\sqrt{3}$, munda $a \geq 0$; 4) $-a\sqrt{5}$, munda $a < 0$.

568. Hasaplaň:

$$1) \sqrt[3]{1000} \cdot (0,0001)^{0,25} + (0,027)^{\frac{1}{3}} \cdot 7,1^0 - \left(\frac{10}{13}\right)^{-1};$$

$$2) \left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}} : \frac{1}{\sqrt{11\frac{1}{9}}} + (6,25)^{\frac{1}{2}} : (-4)^{-1};$$

$$3) \left(1\frac{61}{64}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot (0,008)^{\frac{1}{3}} : (-2)^{-2}.$$

569. Aňlatmanyň bahasyny tapyň:

$$1) \left(\frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} - \frac{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}{a - b} \right) \cdot \frac{a - 2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b}{a}, \text{ munda } a = 3, b = 12.$$

$$2) \frac{m + 2\sqrt{mn} + n}{n} \cdot \frac{\sqrt{mn} + n}{m - n} - \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m} + \sqrt{n}}, \text{ munda } m = 5, n = 20.$$

570. Deňlemäni çözüň:

$$x^{\frac{1}{2}} = 2; \quad 2) x^{-\frac{1}{2}} = 3; \quad 3) x^{-3} = 8; \quad 4) x^{\frac{5}{2}} = 0; \quad 5) x^{-\frac{1}{3}} = 27.$$

571. $y = -\frac{25}{x}$ funksiýanyň grafigine:

$$1) A(\sqrt{5}; -5\sqrt{5}); \quad 2) B(-5\sqrt{2}; 5\sqrt{2}); \quad 3) C(0,1; 250)$$

nokat degişli bolşuny ýa-da bolmazlygyny anyklaň.

572. Funksiýanyň grafigini gurun:

$$1) y = \frac{4}{x}; \quad 2) y = -\frac{6}{x};$$

Funksiýanyň haýsy aralyklarda artýandygyny, kemelýändigini grafik boýunça anyklaň; funksiýanyň jübüt ýa-da täkligini anyklaň.

573. Añlatmany yönekeyleşdiriñ:

$$\begin{aligned} 1) & \frac{\sqrt{ab} \sqrt[4]{a}}{(a+2)\sqrt[4]{a^{-1}b^2}} - \frac{a^2+4}{a^2-4}; & 2) & \left(\frac{\sqrt{a}}{b+\sqrt{ab}} - \frac{\sqrt{a}}{b-\sqrt{ab}} \right) \cdot \frac{b-a}{2\sqrt{ab}}; \\ 3) & \left(\frac{a-b}{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}b^{\frac{1}{4}}}} - \frac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}+a^{\frac{1}{4}}} \right) \cdot \frac{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}}{(a^{-1}b)^{\frac{1}{2}}}; & 4) & \left(\frac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{a-b} - \frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}} \right) \cdot \frac{a-b}{\sqrt{ab}}. \end{aligned}$$

Añlatmany yönekeyleşdiriñ (**574–575**):

574. 1) $\sqrt{5+\sqrt{21}}$; 2) $\sqrt{4+\sqrt{7}}$; 3) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$; 4) $\sqrt{8-2\sqrt{15}}$.

575. 1) $\frac{1}{\sqrt{5}} \left[4(a+1) + (\sqrt[3]{a\sqrt{a}} - 1)^2 - \left(\frac{\sqrt[6]{ab^2} + \sqrt{a}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} + \sqrt[3]{a} \right)^3 \right]^{\frac{1}{2}}$, munda $0 < a \leq 1$;

$$2) \frac{a^{-1}b^{-2} - a^{-2}b^{-1}}{a^{-\frac{5}{3}}b^{-2} - b^{-\frac{5}{3}}a^{-2}} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}; \quad 3) \frac{a^{-2} \cdot b^{-3} - a^{-1} \cdot b^{-2}}{a^{-\frac{9}{2}} \cdot b^{-\frac{11}{2}} - a^{-\frac{11}{2}} \cdot b^{-\frac{9}{2}}}.$$

Deñlemäni çözün (**576–577**):

576. 1) $x^2=7$; 2) $x^2=11$; 3) $x^2+6x=0$;
4) $x^2+5x=0$; 5) $x^2=8x$; 6) $x^2=12x$.

577. 1) $1,5x-4x^2=6,3x-x^2$; 2) $11y-15=(y+5)(y-3)$;
3) $3x(x+2)=2x(x-2)$; 4) $\frac{1}{4}(3x^2+1) - \frac{40x+3}{6} = \frac{x-3}{12}$;
5) $\frac{y^2-5}{4} - \frac{15-y^2}{5} = \frac{y^2-4}{3}$; 6) $\frac{2x^2-1}{4} = \frac{1+1,5x^2}{5}$.

578. Eger

- 1) $(y-3)^2 > (3+y)(y-3)$ bolsa, onda $y < 3$ bolýandygyny;
2) $(3a+b)^2 < (3a-b)^2$ bolsa, onda $ab < 0$ bolýandygyny subut ediň.

579. Eger $x < \frac{a+b}{2}$, $y < \frac{a+c}{2}$, $z < \frac{b+c}{2}$ bolsa, onda $x+y+z < a+b+c$ bolýandygyny subut ediň.

580. Gönüburçly parallelepipedin beýikligi 15 cm-dan artyk, ini 2 cm dan, uzynlygy bolsa 0,3 m-den artyk. Onuň göwrümi $0,9 \text{ dm}^3$ -dan uly bolýandygyny subut ediň.

581. y -iň islendik bahasynda

1) $(y-3)(y-1)+5$; 2) $(y-4)(y-6)+3$

aňlatma položitel bolýandygyny subut ediň.

582. k -nyň $4y^2-3y+k=0$ deňleme hakyky köklere eýe bolmadyk bahalary toplumyny tapyň.

583. k -nyň nähili bahalarynda -2 sany $(k-2)x^2-7x-2k^2=0$ deňlemäniň köki bolýar?

584. Deňlemäni çözüň:

1) $3x^2+8x+5=0$;

2) $5x^2+4x-12=0$;

3) $\frac{6}{4x^2-1} - \frac{x}{2x-1} = \frac{5}{2x+1}$;

4) $\frac{5}{x-1} + \frac{3x-3}{2x+2} = \frac{2x^2+8}{x^2-1}$;

5) $\frac{30}{x^2-1} - \frac{13}{x^2+x+1} = \frac{7+18x}{x^3-1}$;

6) $\frac{2}{x^2-x+1} = \frac{1}{x+1} + \frac{2x-1}{x^3+1}$.

585. Deňsizligi çözüň:

1) $(x+2)^2 < (x-3)^2 - 8(x-5)$;

2) $\frac{2+x}{9} - x \leq \frac{2x-5}{3} - (4-x)$;

3) $\frac{(x-3)(x+2)}{4} - \frac{(x-7)}{3} > \frac{(x-6)^2}{4} + x$;

4) $6x + \frac{(3+x)^2}{2} > \frac{8-2x}{5} + \frac{(x+3)(x+7)}{2}$.

586. Ýakynlaşma ýalňyşlygyny tapyň:

1) 0,2781-iň 0,278 bilen;

2) $-2,154$ -üň $-2,15$ bilen;

3) $-\frac{7}{18}$ -niň $-\frac{1}{3}$ bilen;

4) $\frac{3}{11}$ -üň 0,272 bilen.

587. 3,5 sany 3,5478 sanynyň 0,05-e çenli takyklyk bilen alnan ýakynlaşan bahasy bolýandygyny subut ediň.

588. $\frac{7}{9}$ sanynyň 0,777 sany bilen ýakynlaşmanyň otnositel ýalňyşlygyny tapyň.

589. Tötänleýin ýagdaýda saýlanan 60 düýp gowaça ösümliginiň esasy baldagyndaky bogunlaryň sany aşakdaky jedwelde berlen:

10	11	10	10	10	9	9	11	9	9
11	11	11	7	9	10	10	10	10	10
10	10	11	11	11	10	10	11	10	10
9	10	9	9	9	9	10	9	10	10
10	10	10	10	11	9	11	9	9	12
9	10	8	11	10	10	9	10	10	11

Saýlanmanyň: 1) ýygyllyklar jedwelini düzüň; 2) orta bahasyny; 3) modasyny; 4) medianasyny; 5) giňligini hasaplaň; 6) ýygyllyklar poligonyny gurun.

590. Näçe dörtbelgili sanda diňe bir sany 0 sifri bar?

591. 0, 1, 2, 3, 5, 8 sifrlerinden olary gaýtalamazdan jemi näçe üçbelgili san düzmek bolar?

592. 6 sany myhmany 6 stula näçe hili usulda oturtmak mümkin?

593. Edebiyat kitabyňyzdaky käbir teksti saýlaň. Onuň iki sahypasyndaky hemme harplary sanaň. Çekimli harplaryň tekstde duşuş ýygyllygyny anyklaň. Ýygyllyklar jedwelini düzüň. Ýygyllyklar poligonyny gurun. Netije çykaryň we ony depderiňize bellik ediň.

GÖNÜKMELERE JOGAPLAR

I bap

1. 2) 0; 4) 5. 2. 2) -2 ; 4) 0. 3. $(7m)t$; 168 t. 4. 1) $(60m)$ min; 2) $\frac{p}{60}$ min;
 3) $\left(60m + l + \frac{p}{60}\right)$ min. 5. $3(x-y)$; 2) 4,5; 4) 2,5. 6. $(x+y)(x-y)$; 2) $-\frac{11}{64}$;
 4) 0,104. 7. 2) $-1\frac{2}{3}$. 8. 2) 4. 9. 1, 3, 15, 21. 10. 2) $(m-1)m$; 4) $(2p+1)\times$
 $\times(2p+3)(2p+5)$. 12. $(p-q)t$; 1) $5t$; 2) q san p -den uly bolmayar; q san p -
 -ge deñ bolmagy mümkin. 13. $400n + 500m$; 155000; 155000. 15. $187200m^3$,
 $(37440m)m^3$. 16. $s = 3\frac{1}{6}c + 1\frac{2}{3}a + 2\frac{1}{2}b$, 53 km. 23. $\frac{a^2-b^2}{(a-b)^2}$. 25. 2) 5; 4) 1,9; 6)
 -4 . 26. 2) $V = \frac{m}{p}$; 4) $a = \frac{p}{2} - b$. 27. $x = \frac{np}{1000a}$, $x = 3$. 28. $t = \frac{a}{cn}$, $t = 15$.
 30. 2) $\frac{4}{5}$; 4) -2 . 31. 2) $\frac{2}{3}$; 4) $\frac{b}{2c}$. 32. 2) $\frac{1}{b^4}$; 4) b^2 . 33. 2) $\frac{2}{7}$; 4)
 $\frac{b}{3a}$; 6) $\frac{a^2b}{5c}$. 34. 2) $\frac{7a}{5}$; 4) $\frac{1}{3(a-b)}$; 6) $-\frac{1}{3}$. 35. 2) $\frac{1}{(m+n)^3}$; 4) $3y - 2x$; 6)
 $\frac{2}{a(a-b)}$. 36. 2) $\frac{2a}{m-n}$; 4) $\frac{4a-1}{2a+3}$; 6) $\frac{1+b}{1-b}$. 37. 2) $\frac{q^2}{p-q}$; 4) $\frac{m}{n}$; 6) $-\frac{x}{y}$. 38.
 2) $\frac{3a+2b}{2a+3b}$; 4) $-\frac{1}{ab}$. 39. 2) $\frac{1}{a+b}$; 4) $5+x$; 6) $-\frac{c+2}{2a}$. 40. 2) $10 - 7b$; 4)
 $\frac{y}{5+y}$; 6) $\frac{5ab}{a^2-b^2}$. 41. 2) $\frac{1}{b+7}$; 4) $\frac{1}{1-2p}$. 42. 2) $\frac{4a+1}{4a-1}$; 4) $\frac{10(m+n)}{3(m-n)}$. 43. 2)
 $n - m$; 4) $\frac{1}{5-2x}$. 44. 2) $\frac{3y-4x}{3y+4x}$; 4) $\frac{6-c}{6+c}$; 6) $\frac{3c-2b}{a}$. 45. 2) $a+1$; 4) $\frac{1}{2}$. 46.
 2) $\frac{b}{ab}$ we $\frac{2a}{ab}$; 4) $\frac{2a}{2b}$ we $\frac{a}{2b}$; 6) $\frac{32}{60}$ we $\frac{25}{60}$. 47. 2) $\frac{9x^2}{12xy}$, $\frac{72}{12xy}$ we $\frac{16y^2}{12xy}$; 4)

$$\begin{aligned}
& \frac{2ax^2}{4x^3} \text{ we } \frac{b}{4x^3}. \quad \mathbf{48.} \quad 2) \frac{6b^2}{2b} \text{ we } \frac{a^2}{2b}; \quad 4) \frac{2b^2}{6ab}, \frac{9ac}{6ab}, \frac{6a^2b^2}{6ab}. \quad \mathbf{49.} \quad 2) \frac{3a^2}{18a^2b^2}, \frac{2(a^2+b^2)}{18a^2b^2} \\
& \text{we } \frac{a(3-a^2)}{18a^2b^2}; \quad 4) \frac{21y^3}{60x^4y^4}, \frac{310x^3y}{60x^4y^4} \text{ we } \frac{80x^2}{60x^4y^4}. \quad \mathbf{50.} \quad 2) \frac{6a}{(a-1)a} \text{ we } \frac{2(a-1)}{(a-1)a}; \quad 4) \\
& \frac{8a^2}{12(a+1)} \text{ we } \frac{15a^2}{12(a+1)}. \quad \mathbf{51.} \quad 2) \frac{7a(3x+y)}{9x^2-y^2} \text{ we } \frac{6b(3x-y)}{9x^2-y^2}; \quad 4) \frac{6x}{8x+8y} \text{ we } \frac{x}{8x+8y}. \quad \mathbf{52.} \\
& 2) \frac{7a}{x^2-9} \text{ we } \frac{a(x-3)}{x^2-9}; \quad 4) \frac{6x(x+y)}{x^2-y^2}, \frac{7xy(x-y)}{x^2-y^2} \text{ we } \frac{3}{x^2-y^2}. \quad \mathbf{53.} \quad 2) \frac{28c(b+c)}{70(b^2-c^2)}, \\
& \frac{6a^2}{70(b^2-c^2)} \text{ we } \frac{35b(b-c)}{70(b^2-c^2)}; \quad 4) \frac{15x(x+1)}{12x(x^2-1)}, \frac{-48x^2}{12x(x^2-1)} \text{ va } \frac{4(x-1)}{12x(x^2-1)}. \quad \mathbf{54.} \quad 2) \frac{5a}{b^3}; \quad 4) \\
& \frac{x-y}{n+a}. \quad \mathbf{55.} \quad 2) \frac{2a}{c^2}; \quad 4) \frac{7}{a^2}; \quad 6) \frac{8}{ab}. \quad \mathbf{56.} \quad 2) \frac{11}{28}; \quad 4) \frac{3}{5b}; \quad 6) \frac{3ad-b}{12d}. \quad \mathbf{57.} \quad \frac{15+ab}{5a}; \quad 4) \\
& \frac{2+7b}{b}. \quad \mathbf{58.} \quad 2) \frac{2c+4c^2-3}{c^2}; \quad 4) \frac{mn-kn^2+m^2}{n^2}. \quad \mathbf{59.} \quad 2) \frac{k-n}{mnk}; \quad 4) \frac{bd+ba}{acd}; \quad 6) \frac{2n^2-3m}{mn^3}. \\
& \mathbf{60.} \quad 2) \frac{4a^4-21cb^3}{18a^3b^4}; \quad 4) \frac{20y-21x+22}{28x^2y^2}; \quad 6) \frac{b(cd^2+d+c)}{(cd)^2}. \quad \mathbf{61.} \quad 2) \frac{3x}{2(1-x)}; \quad 4) \frac{8y-25x}{10(y-3)}. \\
& \mathbf{62.} \quad 2) \frac{11}{10(b+1)}; \quad 4) \frac{5x}{8(x+y)}. \quad \mathbf{63.} \quad 2) \frac{5b^2-2a^2}{ab(x+y)}; \quad 4) \frac{a+b-y}{ab}. \quad \mathbf{64.} \quad 2) \frac{2(2a+3)}{a(1-a)}; \quad 4) \\
& \frac{67b-3a}{40(a^2-b^2)}. \quad \mathbf{65.} \quad 2) \frac{x-1}{x^2-9}; \quad 4) \frac{2x^2+3x+2}{x^2-16}. \quad \mathbf{66.} \quad 2) \frac{6n-47}{n^2-49}; \quad 4) \frac{24y^2+y+1}{1-9y^2}. \quad \mathbf{67.} \quad 2) \\
& \frac{13a+4}{(3a+1)^2}. \quad \mathbf{68.} \quad 2) \frac{2-11x}{(3x+1)^2}; \quad 4) \frac{4-7n+7m}{(n-m)^2}; \quad 6) \frac{2x^2+18}{(x^2-9)^2}. \quad \mathbf{69.} \quad 2) \frac{b^2-3b}{b-2}; \quad 4) \frac{1}{a+1}. \quad \mathbf{70.} \\
& 2) -\frac{1}{x+y}; \quad 4) \frac{2(24-a)}{4a^2-9}. \quad \mathbf{71.} \quad 2) \frac{b-3b^2-14}{6(b^2-1)}; \quad 4) \frac{28n^2-4m^2+9mn}{m(4n^2-m^2)}; \quad 6) \frac{4a^2-4a-b}{a^2+2a}. \quad \mathbf{72.} \\
& 2) \frac{2a}{a^3+8}; \quad 4) -\frac{6m}{m^3-27}. \quad \mathbf{73.} \quad 2) -\frac{12}{19}. \quad \mathbf{74.} \quad 2) \frac{4}{13}; \quad 4) \frac{15}{2}. \quad \mathbf{75.} \quad 2) \frac{k^2}{mn}; \quad 4) \frac{3mk}{4nd}; \quad 6) \\
& \frac{2a^2b^2}{c^3}. \quad \mathbf{78.} \quad 2) 2; \quad 4) \frac{a}{bc}; \quad 6) \frac{ac}{b}. \quad \mathbf{79.} \quad 2) \frac{k^2}{mn}; \quad 4) \frac{3md}{2nk}; \quad 6) \frac{15a^2c^2}{d}. \quad \mathbf{80.} \quad 2) \frac{18a^2}{7}; \quad 4)
\end{aligned}$$

$\frac{1}{a}$; 6) $\frac{a^3b^3}{d^2}$. **81.** 2) $\frac{2y}{5c^3}$; 4) $\frac{2d^2a^2}{3c}$; 6) $\frac{22p^3n}{m^4}$. **82.** 2) $10a^2b$; 4) $\frac{1}{4a^2b}$. **83.** 2) $\frac{2b}{a}$; 4) $3b$; 6) $a - b$. **84.** 2) $\frac{b}{3(1+a)}$; 4) $\frac{1}{3m^2(m+n)}$; 6) $\frac{5}{3(a-b)}$. **85.** 2) $\frac{-3x^2(x+y)}{2(x^2+y^2)}$; 4) $\frac{-18(n-m)^2(n+m)}{n(n+p)^2}$; 6) $\frac{1}{a^2-b^2}$. **86.** 2) $b-3$; 4) $(a-1)(2a-1)$. **87.** 2) $\frac{2(a+1)}{3}$; 4) 1 ; 6) $\frac{b^2}{b^2+1}$. **88.** 2) $\frac{a^2(b^2-1)}{b^2}$; 4) $\frac{2(m+n)}{n}$. **89.** 2) $\frac{4ab}{a^2-b^2}$; 4) $\frac{1}{6(c+d)}$. **90.** 2) $\frac{9z}{z+2}$; 4) $\frac{m+5}{m-2}$. **91.** 2) $\frac{b}{a+b}$; 4) $\frac{1}{c}$. **92.** 2) $\frac{4}{a-b}$; 4) $\frac{1}{c(a+b)}$. **95.** $\frac{v-v_1}{v+v_1}$ s km. **96.** 6 sanydan. **97.** 2) $x = -4$ da $y = -\frac{1}{2}$; 4) $x < 0$ we $x \geq 2$ -de $y \leq 1$. **99.** 2) $(-2; 4)$ we $(2; -4)$; 4) $(-4; -2)$ we $(1; 3)$. **106.** 2) 2 ; 4) 15 . **107.** 2) 81 ; 4) $\frac{1}{81}$. **108.** 2) -1 ; 4) -4 ; 6) -8 . **109.** 2) $x = -\frac{1}{2}$; 4) $x_1 = -2$; $x_2 = 2$. **110.** 2) x – islendik san; 4) $\frac{2}{3} \leq x < 2$. **111.** 2) 5 ; 4) -11 ; 6) $\frac{1}{30}$. **112.** 2) 2 ; 4) $4\sqrt{6}$. **113.** 1) $x-2$; 2) $(3-x)^3$, $x \leq 3$ -de, $(x-3)^3$, $x > 3$ -de. **114.** 3974. **117.** 2) 3 ; 4) 27 ; 6) $\frac{1}{27}$. **118.** 2) 5 ; 4) $\frac{1}{2}$; 6) $\frac{1}{2}$. **119.** 2) 49 ; 4) 125 . **120.** 2) 121 ; 4) 150 . **121.** 2) 3 ; 4) $2,7$. **122.** 2) b ; 4) a ; 6) 1 . **123.** 2) a^2b . **124.** 2) 1 . **125.** 2) 3 . **126.** 2) $b^{\frac{1}{2}}$; 4) $a+b$; 6) $a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}$; 8) $\sqrt{c} - 1$. **127.** 2) $\frac{a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}+b^{\frac{1}{3}}}}$; 4) $2\sqrt{b}$. **128.** 2) $2y$; 4) $2\sqrt[3]{b}$. **129.** 2) $2\sqrt[3]{b}$; 4) $\frac{2\sqrt[3]{a}}{a+b}$. **130.** $3 \cdot \sqrt{\frac{b}{a}}$. **131.** 27 . **132.** $9a$. **133.** $2b(a-b)$. **135.** $\sqrt[3]{(a-b)^2}$. **136.** $-4\sqrt{x}$. **137.** $\sqrt{a} \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{x})$. **138.** $-\sqrt{ab}$. **139.** $\frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\sqrt{x}}$. **140.** 0 . **141.** 3 . **142.** 1 . **143.** a . **144.** a^2x . **145.** $-x^3$. **146.**

- $\sqrt[6]{a}$. 147. 2) $\frac{3(x^2-2x+4)}{x^3+8}$, $\frac{x+1}{x^3+8}$ we $\frac{(x+2)^2}{x^3+8}$. 148. 2) $\frac{55b-61}{24}$; 4) $\frac{5-27b}{36}$.
 149. 2) $\frac{7q-p}{3p-q}$; 4) $\frac{8a+8b-70}{2b-5}$. 150. 2) $\frac{a^2-b^2}{7}$. 151. 2) $\frac{x(x+2)(x-3)}{(x-2)(x+3)(x^2+2)}$; 4) 1.
 152. 2) $-2(a-1)^2$; 4) $\frac{a^2+4}{4a}$. 153. 2) 1,8; 4) $\frac{1}{16}$. 154. 2) 51; 4) 0,04; 6) $-0,1$. 155. 2) 1000. 156. 2) $\sqrt[4]{x}$; 4) $\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}$. 157. 2) $\frac{95}{16}$; 4) $-609\frac{8}{27}$.
 158. 2) x – islendik san; 4) $x \leq 2$, $x \geq 3$; 6) $0 \leq x \leq 2$, $x \geq 3$. 159. 2) $a+1$; 4) $a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{3}}$; 6) $a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}$.

II b a p

178. 2) $\frac{1}{3} > 0,3$; 4) $-\frac{5}{8} > -0,7$. 179. 2) $b > a$; 4) $a < b$. 183. Birinjisi. 185. 2) $a < 0$; 4) $a > 0$. 186. $-9 < -3$. 187. 2) $a + 3b < -2b$. 188. 2) $8 > 6$. 189. 2) $a - 3b < 3a$. 190. 2) $a - 5 < b - 5$. 191. 2) $19 > 12$; 4) $-12 > -14$.
 192. 2) $a < -0,25$; 4) $a < 2$. 193. 2) $0,9 > -2$; 4) $5 > 3$. 194. 2) $a < -2$; 4) $x < -\frac{4}{9}$. 196. 2) $-5 < 7$; 4) $7y > 1$. 197. 2) $25 < 58$; 4) $12 < 4x^2 - 1$. 204. 2) $n = 3$; 4) $n = -6$; 6) $n = -1$. 205. 2) $n = 6$; 4) $n = -3$; 6) $n = 4$. 206. 2) $x = -9$. 207. 2) $h \geq 5$; 4) $v \leq 70$. 208. 2) Dogry; 4) nädogry. 209. 2) Dogry; 4) nädogry. 211. 2) $\left(\frac{5}{12}\right)^{-\frac{1}{4}} < (0,41)^{-\frac{1}{4}}$; 4) $\left(\frac{11}{12}\right)^{-\sqrt{5}} > \left(\frac{12}{13}\right)^{-\sqrt{5}}$. 212. 2) $x = 3$; 4) $x = 2$; 6) $x = \frac{1}{2}$. 213. $\sqrt{\left(1\frac{1}{4} - 1\frac{1}{5}\right)^3} > \sqrt{\left(1\frac{1}{6} - 1\frac{1}{7}\right)^3}$. 214. 2) $x = \frac{5}{2}$; 4) $y = 5$. 215. 2) $x = 2,6$; 4) $x = 4$. 216. 2) $x = -\frac{1}{3}$; 4) $x = 1$. 217. 2) 6;

- 4) -3 . **218.** 2) $x = -1$; 4) $x = 1$. **219.** 2) $13 - x < 2$; 4) $2(x - 3) \leq 2$; 6) $2x(-4) \geq x - (-4)$. **220.** 2) Berlen sanlardan hiç biri hem çözüw bolmaýar; 4) $\frac{1}{2}$; 0; -1 . **221.** 2) $y > 0$; 4) hiç hili bahasynda; 6) $y \neq -2$. **222.** 2) $y < 2$; 4) $y \leq 0$. **223.** 2) $x \leq -3$; 4) $x > 0$; 6) $x < 0$. **225.** 2) $x < 14$; 4) $y > 9$; 6) $z \leq 4$. **226.** 2) $x \geq -8$; 4) $z > -15$; 6) $x \leq -2$. **227.** 2) $x < 6$; 4) $x > 5$; 6) $x \leq -2$. **228.** 2) $x \geq 3$; 4) $x > 0$; 6) $x \geq 2$. **229.** 2) $x < \frac{5}{8}$; 4) $x < -3$; 6) $x < 5\frac{1}{6}$. **230.** 2) $y > \frac{3}{8}$; 4) $y < \frac{5}{8}$; 6) $y > \frac{2}{3}$. **231.** 2) $y = 3$; 4) $x = 0$. **232.** 2) $x = -1$; 4) $x = -4$. **233.** 2) $b < -5\frac{2}{3}$; 4) $x > -1\frac{3}{7}$. **234.** 2) x – islendik san; 4) x – islendik san. **235.** 2) Çözüwleri ýok; 4) çözüwleri ýok. **236.** 2) $x > 2$; 4) $x > -20$; 6) $x > 0,5$. **237.** 2) $x < 1,6$; 4) $x < 0$. **238.** 2) $x \leq 7$; 4) $x \leq 5$. **239.** 2) $x < 0,5$; 4) $x > -0,5$. **240.** 45 sanyndan kem däl. **241.** 2) Berlen sanlardan hiç biri çözüw bolmaýar. **242.** 2) 1. **243.** 2) 0; 1; 2; 3; 4) -5 ; -4 ; -3 ; -2 ; -1 ; 0; 1; 2; 3; 4; 5. **244.** 2) $[-1; 3]$; 4) $(1; 2)$; 6) $(-4; -2]$. **245.** 2) $-3 \leq x \leq -1$; 4) $0 < x < 3$; 6) $-2 \leq x < 2$. **246.** 2) $-1 < x < 2$, $(1; 2)$; 4) $-4 < x \leq 0$, $(-4; 0]$. **247.** Hawa. **248.** Hawa. **249.** b) $-3 < x < 1$; hiç hili bahasynda; e) $-5 < x < 0$; hiç hili bahasynda. **251.** 1) $x \geq 0,6$; 2) $x \leq -\frac{1}{3}$; 3) $x \geq -3,5$; 4) $x \geq -4,5$. **252.** 2) $x > 0$; 4) $x \geq -2$. **253.** 2) $x < -1$; 4) $x \leq 0$. **254.** 2) $3 < x < 6$; 4) $0 \leq x < \frac{1}{2}$. **255.** 2) $-1,5 \leq x < 1,5$; 4) $-0,5 \leq x \leq 7,5$. **256.** 2) $x \geq 4$; 4) $x > -3$. **257.** 2) $x \leq -2$; 4) $x < 4$. **258.** 2) $x \leq -2,5$; 4) $2 \leq x \leq 5$. **259.** 2) $-5 < x \leq -1$; 4) $0 < x \leq \frac{4}{3}$. **260.** 2) 1; 2; 4) 4; 5. **261.** 2) Hiç hili x -de; 4) $0 < x < 2$. **262.** 2) $x \leq -2$; 4) $x \leq 6$. **263.** 2) 4 m-den uly, ýöne 13 m-den kiçi. **264.** 24. **265.** 36. **267.** 2) $x_{1,2} = \pm 1,5$; 4) $x = 0$, $x_2 = -6$. **268.** 2) $x = 2$; 4)

$x = \frac{3}{4}$. **269.** 2) $x_1 = -0,25$, $x_2 = -1,25$; 4) $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{3}$. **270.** 2) $x_{1,2} = \pm 2,1$; 4) $x_1 = -5$, $x_2 = 11$. **272.** 2) $-2 < x < 2$. **273.** 2) $|x| \leq 0,3$. **274.** 2) $-2,2 < x < -1,8$; 4) $\frac{1}{4} < x < 1\frac{3}{4}$. **275.** 2) $-3 < x < 0$; 4) $1 \leq x < 1,5$. **276.** 2) $x \leq 0,9$, $x \geq 3,1$; 4) $x < 2\frac{3}{4}$, $x > 3\frac{2}{3}$. **277.** 2) $x < -1$, $x > -\frac{1}{3}$; 4) $x \leq 0$, $x \geq 1,6$. **278.** 2) -1 ; 0; 4) 0; 1. **279.** 2) $-1 \leq x \leq 1\frac{2}{3}$; 4) $x \leq 0$, $x \geq 3$. **282.** 2) $\frac{1}{18}$; 4) $\frac{1}{225}$. **283.** 2) 0,004; 4) $\frac{1}{350}$. **284.** 2) 0,08; 4) 0,08. **285.** 3°. **286.** $\frac{1}{7}$. **287.** Dogry. **289.** 2) $141 \leq x \leq 143$; 4) $895 \leq v \leq 905$; 6) $m - n \leq y \leq m + n$. **290.** 2) 2,6 we 2,8; 4) $-6,1$ we $-5,7$. **291.** 2) Ýok; 4) hawa. **292.** 2) Hawa; 4) ýok. **293.** 2) 5,5; 4) 3,9; 6) 0,575. **298.** Ýok. **301.** 2) 0,7; 4) 3,7. **302.** 2) 0,07; 4) 1,67; 6) 5,07. **303.** 2) 0,385; 4) 7,643. **304.** 3 we 7. **305.** 2) 0,41; $\approx 3,7\%$; 4) 0,108; 10,8%. **306.** 2) $\approx 2\%$. **307.** 2) Ikinjisi. **308.** $\approx 1\%$; 0,1%; 0,01%. **309.** Birinjisi. **310.** 2) 0,000398. **311.** Ikinjisi. **312.** 2) $x_1 = 0$, $x_2 = 1\frac{1}{3}$; 4) $x_1 = -4$, $x_2 = 0,5$. **313.** 2) $x = 0,5$; 4) $x_1 = 3$, $x_2 = -2$. **314.** 2) $2 + b - a > 0$; 4) $a - 3 - b < 0$. **315.** 2) y —islendik san; 4) $x > 7$. **316.** 2) $x < 2$. **317.** 2) $x_1 = 3,4$, $x_1 = -1,4$; 4) $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{3}$. **318.** 2) $x \leq -2,4$, $x \geq 4,4$; 4) $x \leq -2$, $x \geq 1$. **321.** 2) Hiç bir bahasynda; 4) hiç bir bahasynda. **322.** 34. **323.** 47. **326.** $3,5416 \cdot 10^{-5} \Omega$. **327.** 67J. **329.** 18800; 20400; 13200; 4600.

III b a p

345. 2) $-x^2 + 9 = 0$; 4) $x^2 = 0$. **346.** 2) $x^2 - 4x - 9 = 0$; 4) $5x^2 + 1 = 0$. **347.** 2) 0; 1; 4) 1; 6) berlen sanlardan hiç biri kök bolup bilmeyär. **350.** 2) $x_{1,2} = \pm \frac{4}{7}$;

- 4) $x_{1,2} = \pm 1,5$; 6) $x_{1,2} = \pm \sqrt{13}$. **351.** 2) $x_{1,2} = \pm 11$; 4) $x=0$; 6) haqyky kökleri ýok. **352.** 2) $x_1=0$, $x_2=2$; 4) $x_1=0$, $x_2=0,6$; 6) $x=-3$. **353.** 2) $x=0$; 4) $x_{1,2} = \pm 3$; 6) $x_{1,2} = \pm 3\sqrt{3}$; 8) $x_{1,2} = \pm 20$. **354.** 2) $x_1=0$, $x_2=-5$; 4) $x_1=0$, $x_2=0,04$; 6) kökler ýok. **355.** 2) $x_{1,2} = \pm 1\frac{1}{4}$; 4) $x_{1,2} = \pm \sqrt{5}$; 6) $x_{1,2} = \pm 1\frac{1}{3}$. **356.** $x_{1,2} = \pm 2$; 4) $x_{1,2} = \pm 1\frac{1}{3}$. **357.** 2) $x_1=0$, $x_2=4$; 4) $x_1=0$, $x_2=-2,5$. **358.** 2) $x_1=0$, $x_2=2\frac{3}{19}$. **359.** 2) $m=9$; 4) $m=64$; 6) $m=6$. **360.** 2) $x_1=2$, $x_2=-6$; 4) $x_1=8$, $x_2=2$; 6) $x_{1,2} = -4 \pm \sqrt{23}$. **361.** $x_1 = \frac{3}{5}$; $x_2 = -\frac{1}{5}$. **362.** 1) $x_1=1$, $x_2=4$; 2) $x_1=5$, $x_2=-2$. **363.** 1) $x_1=1$, $x_2=-2,5$; 2) $x_1=2$, $x_1 = -\frac{3}{5}$. **364.** 2) 0,4; 4) 85. **365.** 2) $x_1=1$, $x_2=0,5$; 4) $x_1=3$, $x_2=0,5$; 6) $x_1=2$, $x_2 = \frac{3}{4}$. **366.** 2) $x_1=4$, $x_2=-0,5$; 4) $x_1=-1$, $x_2 = \frac{1}{3}$; 6) $\frac{-6 \pm \sqrt{6}}{3}$; 8) $x_1=1$, $x_2 = -\frac{4}{3}$. **367.** 2) $x = \frac{1}{4}$; 4) $x = -\frac{1}{6}$. **368.** 1), 2), 3), 4) haqyky kökler ýok. **369.** 2) Iki; 4) ýekeje-de ýok. **370.** Haqyky kökler ýok; 4) $x=2,5$; 6) $x_1=4$, $x_2=-1$. **371.** 2) $x_1=1$, $x_2=0,2$; 4) $x_1=7$, $x_2=-8$; 6) $x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{7}}{7}$. **372.** 2) $x_1=7$, $x_2=-11$; 4) $x_1=0,6$; $x_2=-3$. **373.** 2) $x_1=0,5$, $x_2=-1,5$; 4) $x_1=5$, $x_2 = \frac{1}{5}$. **376.** 2) $x_1=7$, $x_2=-1$; 4) $x_1=4$, $x_2=-10$; 6) $x_1=2$, $x_2=-1$. **381.** 2) $x^2-5x+6=0$; 4) $x^2-3x-18=0$. **382.** 2) $x_1=3$, $x_2=4$; 4) $x_1=-1$, $x_2=-7$; 6) $x_1=3$, $x_2=-5$. **383.** 2) $(x-1)(x+5)$; 4) $(x+7)(x-6)$; 6) $(2x+1)(4x+3)$; 8) $(x+2)(1-4x)$. **384.** 2) $x+6$; 4) $\frac{1}{x+7}$; 6)

$\frac{x+3}{3x+1}$. **385.** 2) $x_{1,2} = \sqrt{5} \pm 2$; 4) $x_{1,2} = 2(\sqrt{7} \pm \sqrt{6})$. **386.** 2) $x(x+7)(x-3)$; 4)

$x(x-11)(x+2)$. **387.** 2) $\frac{x-9}{x+8}$; 4) $\frac{9-x}{x-5}$. **388.** 2) $-\frac{x}{(x+3)^2}$; 4) $\frac{x-1}{x(x+10)}$. **389.**

2) $x_{1,2} = \pm 1$, $x_{3,4} = \pm 2$; 4) $x_{1,2} = \pm 1$, $x_3 = \pm 7$. **390.** 2) $x_{1,2} = \pm 1$; 4) $x_{1,2} = \pm \sqrt{5}$.

391. 2) $x_1 = 7$, $x_2 = 3\frac{1}{3}$; 4) $x_1 = 40$, $x_2 = -20$, 6) $x_1 = 6$, $x_2 = -\frac{2}{3}$. **392.** 2)

$x_{1,2} = \pm 10$; 4) kökleri yok; 6) $x = -3$. **393.** 2) Yok. **394.** 2) $x = 0$. **402.** 2) 14

we 15. **403.** 2) 19 we 21. **404.** 10 cm, 40 cm. **405.** 140 m, 175 m. **406.**

100 km/h, 80 km/h. **407.** 10 km/h. **408.** 20 gün, 30 gün. **409.** Kwadratyn

tarapy 15 cm. **410.** 9cm, 40 cm. **411.** 18 km/h, 15 km/h. **412.** 15 gün, 10

gün. **413.** 2) $x_{1,2} = \pm 5$; 4) $x_1 = 0$, $x_2 = 7,5$. **414.** 2) $x_1 = 13$, $x_2 = -4$; 4) $x_1 = 3,6$,

$x_2 = -7$. **415.** 2) $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{6}$; 4) $x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{7}}{3}$. **416.** 2) Iki; 4) bir. **417.** 2)

$(x-8)(x-2)$; 4) $(x-2)(2x+1)$. **418.** 2) $x(x+2)$; 4) $\frac{5x+1}{x-3}$. **419.** 2) $x_{1,2} = \pm 3$,

$x_{3,4} = \pm 2$; 4) $x_{1,2} = \pm \sqrt{3}$, $x_{3,4} = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$. **420.** 2) $x_2 = \pm \sqrt{5}$; 4) $y = 1$. **421.** 20

km/h. **422.** 15 km/h. **423.** 3 gün, 5 gün. **424.** 2) $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. **425.** 2) $x_2 = 0,5$;

4) $x_1 = 7$, $x_2 = -13$. **426.** 2) $x_1 = 0$, $x_2 = -5$; 4) $x_{1,2} = \pm 4$. **427.** 2) $x_1 = 9$, $x_2 = -12$;

4) $x_1 = 3$, $x_2 = -6$. **428.** 2) Yekeje-de yok; 4) iki. **429.** 2) $x_1 = 3$, $x_2 = 1,4$. **430.**

36 günde. **431.** 1 sagat 40 min we 1 sagat 20 min ya-da 2 sagat we 1 sagat

40 min. **432.** 12 sagat, 6 sagat. **437.** 3 sagat. **439.** 12 gün, 8 gün. **440.** 25

sagat, 20 sagat. **441.** 60 km/h. **442.** 8 gün, 12 gün. **444.** 120; -120. **445.**

6. **452.** 7 günde. **453.** 20 km/h. **454.** 3 km/h. **455.** 8 gün. **456.** 37. **457.**

82. **458.** 20 gün, 30 gün, 60 gün. **459.** 9 sagat. **460.** 10%. **461.** 5%. **462.**

10 km. **463.** 16 sany. **464.** 35 sany. **465.** 60 km/h, 50 km/h. **466.** 55 km/h.

IV b a p

482. 6 sany. **483.** 18 sany. **484.** 27 sany. **485.** 9 sany. **487.** 9 sany.

491. 15 sany **492.** 120. **494.** d) $n(n-1):2$. **496.** 45. **497.** 2) 900. **499.**

$16 \cdot 15 \cdot 14 = 3360$. **500.** 30. **501.** 1) 125; 2) 625. **503.** 24. **504.** 10. **505.** $12 \cdot 8 \cdot 7 = 672$. **506.** $64 \cdot 49 = 3136$. **508.** 1) $4 \cdot 60$; 2) $24 \cdot 58$; 3) $36 \cdot 55$; jemi 3612 usul. **509.** 6. **510.** 12. **512.** 20. **513.** 14. **521.** 1) $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$; 2) $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1080$. **522.** $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 3 = 540$. **523.** $26 \cdot 25 \cdot 24 = 15600$. **524.** $8 \cdot 7 \cdot 5 = 280$. **525.** 10000. **527.** 24 sany. **528.** 1) 6; 2) 15; 3) 45; 4) $n \cdot (n-1) : 2$. **529.** $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$. **530.** 4.

V b a p

540. 2) $\frac{22}{35}$; 4) $-\frac{5}{6}$; 6) 3,485. **545.** $7\frac{1}{2}$. **546.** $2a(30-a)$; -128. **547.** $a \cdot 100 + b \cdot 10 + c$, $c \cdot 100 + b \cdot 10 + a$; a sany. **548.** $x = 1000a + c$. **549.** 2) $\frac{2n(2n-k)}{2n+k}$; 4) $\frac{2q(m-2q)}{m+2q}$. **550.** 4) $\frac{m+7n}{10}$. **552.** 2) 1. **556.** 2) $y \geq -2$; 4) $x > -4$; 6) $x \leq 11\frac{1}{3}$. **557.** 2) -5; -4; -3; -2; -1; 0; 4) 4. **558.** 2) $\frac{2}{9} < x \leq 10$; 4) $x > 7,2$. **559.** 2) -15; -14; ...; -1; 0. **560.** 2) $x_1 = 8,1$, $x_2 = 2,1$; 4) $x_1 = 4$, $x_2 = -3$; 6) $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{6}{7}$. **561.** 2) $x \leq -3,4$; $x \geq 7,4$; 4) $x \leq -2\frac{1}{3}$; $x \geq 1$; 6) $x \leq -0,4$; $x \geq 16$. **562.** 2) $2\frac{1}{3}$; 4) $\frac{2x^2}{3y}$. **563.** 2) $3 - \sqrt[3]{2}$; 4) $6\sqrt{7}$. **564.** 2) $2(\sqrt{0,5})^{0,3} < (2\sqrt{0,5})^{0,37}$. **565.** 2) $\sqrt{x}$; 4) $9b^{-4}$. **566.** 2) $5ab\sqrt{b}$; 4) $2ab\sqrt{ab}$. **567.** 2) $-\sqrt{3x^2}$; 4) $\sqrt{5a^2}$. **568.** 2) $-8\frac{1}{8}$. **569.** 2) $-4\frac{5}{6}$. **570.** 2) $x = \frac{1}{9}$; 4) $x = 0$. **571.** 2) Ўок. **573.** 2) $-\frac{\sqrt{a}}{b}$; 4) $\sqrt{a} + \sqrt{b}$. **574.** 1) $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{7}}{\sqrt{2}}$; 2) $\frac{1 + \sqrt{7}}{\sqrt{2}}$. **575.** 1) $1 - \sqrt{a}$; 2) $a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}$. **576.** 2) $x_{1,2} = \pm\sqrt{11}$; 4) $x_1 = 0$, $x_2 = -5$; 6) $x_1 = 0$, $x_2 = 12$. **577.** 2) $y_1 = 0$, $y_2 = 9$; 4) $x_1 = 0$, $x_2 = 9$; 6) $x_{1,2} = \pm 1,5$. **582.** $k > \frac{9}{16}$. **583.** $k_1 = 3$, $k_2 = -1$. **584.** 2) $x_1 = 1,2$, $x_2 = -2$; 4) $x = 3$; 6) $x = 2$. **586.** 2) 0,004; 4) $\frac{1}{1375}$. **588.** $\approx 0,1\%$.

„Özüñizi barlap görün“ ýumuşlaryna jogaplar

I bap. 1. $b \neq 0$, $c \neq 1$, $d \neq -2$. **2.** 1) $\frac{1}{a}$; 2) $\frac{4ab}{a^2 - b^2}$; 3) 4; 4) $\frac{a-b}{b}$. **3.** $\frac{1}{x-3}$; -3. **4.** 1) $8\frac{3}{8}$; 2) 16. **5.** 1) 6; 2) $(y+x)xy$. **6.** $a^{\frac{3}{4}}$; 27.

II bap. 2. 1) $x < 2,4$; 2) $x \geq -15$; 3) $x < 5$. **3.** 1) $4\frac{1}{3} < x < 6\frac{1}{4}$; 2) $x \geq 3$; 3) $x < -5$.

III bap. 1. 1) $x = 0$; 2) $x_1 = -1$, $x_2 = 2$; 3) $x_{1,2} = \pm \frac{1}{2}$; 4) $x_1 = 0$, $x_2 = 1\frac{2}{3}$; 5) $x_{1,2} = \frac{1}{2}$; 6) $x_1 = 17$, $x_2 = -1$; 7) $x_1 = -2$, $x_2 = \frac{1}{3}$; 8) çözüwi ýok.

2. 1) $(x-2)(x+3)$; 2) $(x+1)(2x-3)$. **3.** 9 km/h; 12 km/h.

IV. bap. 1. $18 \cdot 17 = 306$. **2.** $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 87480$. **3.** $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. **4.** $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$. **5.** 1) 1,2; 2) 4; 3) 2,5; 4) 15.

Gyzykly meselelere jogaplar

1. 10 metr. **2.** Mümkün däl. **3.** Taraplary 3 we 6 birlik bolan gönüburçluk ýa-da tarapy 4 birlik bolan kwadrat. **4.** Değişlilikde 8; 12; 6; -1. **5.** $(x^2 + x + 1)(x^2 - x - 2006)$.

MAZMUNY

7-nji synp „Algebra“ kursuny gaʻytalamak	3
--	---

I BAP

ALGEBRAIK DROBLAR WE OLAR ÜSTÜNDE AMALLAR

1-§. Algebraik aʼlatmalar.....	7
2-§. Algebraik drob. Droblary gysgaltmak	12
3-§. Droblary umumy maʼdalawja getirmek	18
4-§. Algebraik droblary qoʻshmak we ayʼyrmak.....	22
5-§. Algebraik droblary koʻpeltmek we boʻlmek.....	27
6-§. Drob-rasional aʼlatmalary toʻzdestwolaʼyn oʻzgertmek.....	30
7-§. $y = \frac{k}{x}$ funksiya. Haʼsiyatleri, grafigi	34
8-§. Natural gorkezijili derejaniʼn arifmetik koʻki we onuʼn haʼsiyatleri	39
9-§. Rasional gorkezijili dereje we onuʼn haʼsiyatleri	42
10-§. Rasional gorkezijili dereje gatnaʼshan algebraik aʼlatmalary yoʻnekeʼyleshdirmek	49
<i>I baba degiʼshli gonuʼkmeler.....</i>	53
<i>I baba degiʼshli synag gonuʼkmeleri – testler</i>	58
<i>Taryhy maglumatlar</i>	61
<i>Amaly we predmetara bagly meseleler.....</i>	62

II BAP

DEŇSIZLIKLER

11-§. Sanly deʼnsizlikler.....	68
12-§. Sanly deʼnsizlikleriʼn esasy haʼsiyatleri	71
13-§. Deʼnsizlikleri qoʻshmak we koʻpeltmek.....	75
14-§. Sanly deʼnsizlikleri dereja goʻtermek.....	80
15-§. Bir nabellili deʼnsizlikler.....	85
16-§. Bir nabellili deʼnsizlikler sistemalary. Sanly aralyklar.....	94
17-§. Sanyʼn moduly. Modul gatnaʼshan deʼnlemeler we deʼnsizlikler.....	105
18-§. Yaʼkynlaʼshan hasaplamalar. Ululyklaryʼn yaʼkynlaʼshan bahalary. Yaʼkynlaʼsha yaʼlniʼshlygy	111
19-§. Yaʼlniʼshlygy bahalamak.....	114

20-§. Sanlary tegeleklemek	117
21-§. Otnositel ýalňyşlyk	119
<i>II baba degişli gönükmeler</i>	121
<i>II baba degişli synag gönükmeleri – testler</i>	124
<i>Taryhy meseleler</i>	127
<i>Taryhy maglumatlar</i>	128
<i>Amaly we predmetara bagly meseleler</i>	129

III BAP KWADRAT DEŇLEMELER

22-§. Kwadrat deňleme we onuň kökleri	135
23-§. Çala kwadrat deňlemeler we olary çözmek	139
24-§. Kwadrat deňlemäniň köklerini tapmagyň formulalary. Diskriminant.....	141
25-§. Wiýetiň teoremasy. Kwadrat üçagzany çyzykly köpeldijilere dagytmak	149
26-§. Bikwadrat deňleme. Kwadrat deňlemä getirilýän deňlemeler.....	156
27-§. Kwadrat deňlemeleriň kömeginde meseleler çözmek	163
<i>III baba degişli gönükmeler</i>	167
<i>III baba degişli synag gönükmeleri – testler</i>	170
<i>Taryhy meseleler</i>	172
<i>Taryhy maglumatlar</i>	175
<i>Amaly we predmetara bagly meseleler</i>	176

IV BAP MAGLUMATLAR DERŇEWI

28-§. Maglumatlaryň derňewi. Maglumatlary şekillendirmek.....	188
29-§. Orta baha. Moda. Mediana.....	193
30-§. Saýlamak usuly bilen kombinatorik meseleleri çözmek.....	200
31-§. Kombinatorikanyň esasy düzgüni we ony meseleler çözendä	
ulanmak	203
<i>IV baba degişli gönükmeler</i>	210
<i>IV baba degişli synag gönükmeleri – testler</i>	213
<i>Amaly we predmetara bagly meseleler</i>	215

V BAP

8-nji synp „Algebra“ kursuny gaýtalamak üçin gönükmeler	219
Gönükmelere jogaplar.....	227

Alimow Ş.A.
A48 Algebra: Umumy orta bilim berýän mekdeplerin 8-nji synpy üçin
derslik/Ş.A.Alimow, A.R.Halmuhamedow, M.A.Mirzahmedow. – 4-nji
neşir. – Daşkent: «O‘qituvchi» NÇDÖ, 2019. – 240 s.

ISBN 978-9943-5750-2-8

UO‘K: 512(075.3)=512.164
KBK 22.14ya72

**Shavkat Arifdjanovich Alimov,
Alimdjani Raximovich Xalmuxamedov,
Mirfazil Abdilxakovich Mirzaxmedov**

ALGEBRA

(Turkman tilida)

Umumiy o‘rta ta’lim maktablarining
8-sinfi uchun darslik

Qayta ishlangan 4-nashri

«O‘qituvchi» nashriyot-matbaa ijodiy uyi
Toshkent – 2019

Original-maket “Davriy nashriyoti”da tayyorlandi.

Terjime eden *K. Hallyýew*
Redaktor *J. Metýakubow*
Suratlaryň redaktory *R. Zaparow*
Kompýuterde sahaplaýjy *H. Safaraliýew*
Korrektor *J. Metýakubow*
Matn teruvchi *S. Niyazova*

Neşirýat lisenziýasy AI № 012.20.07.2018. Original-maketden çap etmäge 23.07.2019 rugsat edildi. Möçberi
70×90¹/₁₆, Times garniturası. Ofset çap ediliş usulı. Şertli çap listi 17,55. Hasap-neşirýat listi 16,6.
144 nusgada çap edildi. Buýurma №

Özbekistan Respublikasynyň Prezidenti Administrasiýasynyň ýanyndaky
Habar we köpçülikleýin kommunikasiýalar agentliginiň «O‘qituvchi» neşirýat-çapxana döredijilik öýi.
Daşkent – 206, Yunusabad tumani, Yangişehir köçesi, 1. Şertnama № 56-19.

Kärendesine berlen dersligiň ýagdaýyny görkezýän jedwel

T/n	Okuwçynyň ady, familiýasy	Okuw ýyly	Dersligiň alnandaky ýagdaýy	Synp ýolbaşçysynyň goly	Dersligiň tabşyrylandaky ýagdaýy	Synp ýolbaşçysynyň goly
1						
2						
3						
4						
5						

Derslik kärendesine berlip, okuw ýylynyň ahyrynda gaýtarylyp alnanda ýokardaky jedwel synp ýolbaşçysy tarapyndan aşakdaky baha bermek ölçeglerine esaslanlyp doldurylýar:

Täze	Dersligiň birinji gezek peýdalanmaga berlendäki ýagdaýy.
Ýagşy	Sahaby bütün, dersligiň esasy böleginden aýrylmandyr. Ähli sahypalary bar, ýyrtylmadyk, goparylmadyk, sahypalarynda ýazgylar we çyzyklar ýok.
Kanagatlanarly	Kitabyň daşy ýenjilen, ep-esli çyzylan, gyalary gädilen, dersligiň esasy böleginden aýrylan ýerleri bar, peýdalanyjy tarapyndan kanagatlanarly abatlanan. Goparylan sahypalary täzeden ýelmenen, käbir sahypalary çyzylan.
Kanagatlanarsyz	Kitabyň daşy çyzylan ýyrtylan, esasy böleginden aýrylan ýa-da bütünleý ýok, kanagatlanarsyz abatlanan. Sahypalary ýyrtylan, sahypalary ýetişmeýär, çyzylp taşlanan. Dersligi dikeldip bolmaýar.