

SH. A. ALÍMOV, O. R. XOLMUHAMEDOV,
M. A. MÍRZAAHMEDOV

ALGEBRA

ULUWMA BILIM BERIW MEKTEPLERINIŇ
8-KLASÍ USHÍN SABAQLÍQ

Qayta islengen 4-basilımi

*Ózbekstan Respublikası Xalıq bilimlendiriw ministrliği
târepinen usınıs etilgen*

«O‘QITUVCHI» BASPA-POLIGRAFIYALÍQ DÓRETIWSHILIK ÚYI
TASHKENT – 2019

UO‘K 512(075.3)=512.121

KBK 22.14ya72

A51

Pikir bildirishlar :

M. M. Shaniyozova – *Tashkent qalasi Sergeli rayonidagi 300-mekteptin matematika pāni oqitwshisi;*

I. B. Soibova – *Tashkent qalasi Yashnabod rayonidagi pānlerge qānigelestirilgen 307-mekteptin matematika pāni oqitwshisi;*

G. P. Muhamedova – *Nizamiy atidagi TMPI ulwma matematika kafedrası dotsenti, pedogogika ilimleri kandidati;*

N. Sh. Qarshiboyeva – *Nizamiy atidagi TMPI oqıw-metodikalıq basqarması metodisti.*

Sabaqlıқтаǵı shártli belgiler:



– māseleni sheshiw baslandı



– māseleni sheshiw tamamlandı



– matematikalıq tastıyıqlawdı tiykarlaw yaki formulanı keltirip shıǵarıw baslandı



– tiykarlaw yaki keltirip shıǵarıw tamamlandı



– qızıqlı māselerler

16, 18, ...

– quramalıraq māselerler



– biliw zárúrli hām este tutıw paydalı tekst



– bilimlerde tekseriw ushın óz betinshe jumıs



– sınaq shınıǵıwları – testler



– tariyxıy māselerler



– tariyxıy maǵlumatlar



– ámeliy-usınılǵan hām pānlerara baylanisli māselerler

Respublika maqsetli kitap qori qarjıları esabınan basıp shıǵarıldı.

© Sh.ÁAlimov, Ó. R.Xalmuhamedov,
M.Á.Mirzaahmedov. barlıq huquqlar qorǵalǵan, 2019.
© Original-maket «Davır nashriyoti» MShJ, 2019.
© «O‘qituvchi» BPDÚ, 2019.

ISBN 978–9943–5750-1-1

7-KLASS «ALGEBRA» KURSÍN TÁKIRARLAW

Áziz oqıwshı! Siz 7-klass «Algebra» kursınan alğan bilimlerinızdi eske túsiriw maqsetinde, Sizge birneshe máselelerdi usınıs etemiz.

1. Añlatpanıń san mánisin tabıń:

1) $S = 2(ab + ac + bc)$, bunda $a = 5$, $b = 4$, $c = 10$;

2) $V = \frac{h}{3}(a^2 + b^2 + ab)$, bunda $h = 12$, $a = 10$, $b = 8$;

3) $S = \frac{(a+b)n}{2}$, bunda $a = 10$, $b = 40$, $n = 16$;

4) $V = \frac{1}{3}abh$, bunda $a = 30$, $b = 20$, $h = 25$.

2. Qawsırmalardı ashıń hám ápiwayılastırıń;

1) $7a - (5a + 4b)$;

2) $9x - (7y - 4x)$;

3) $-(2a - 3b) - (-a + 3b)$;

4) $8x - (3y + 5x) - (-2y - x)$.

3. Eger:

1) $v = 60$;

2) $v = 75$;

3) $v = 90$;

4) $v = 100$;

5) $v = 20,4$;

6) $v = 28,5$

bolsa, $S = \frac{1}{5}v + \frac{1}{200}v^2$ ańlatpasınıń san mánisin tabıń.

4. Hár bir durıs juwap ushın: ana tili hám ádebiyatınan n ball, matematikadan k ball, ingliz tilinen m ball qoyıladı. Nadira ana tili hám ádebiyatınan c , matematikadan a , ingliz tilinen b sorawına durıs juwap berdi.

1) Nadira toplağan jámi balldı esaplaw ushın ańlatpa dúziń;

2) eger $a = 35$, $b = 34$, $c = 36$; $k = 3,1$; $m = 2,1$ hám $n = 1,1$ bolsa, ol barlıǵı bolıp qansha ball toplağan?

5. Teńleme sheshiń (5–6):

1) $2x + 15 = 3x - 11$;

2) $7 - 5x = x - 2$;

3) $2(x - 3) = 3(2 - x)$;

4) $-3(4 - x) = 2(x - 5)$.

6. 1) $3,2x + 1,8x = 6x - 3,5$;

2) $7,5x - 2,5x = 7x - 10$;

3) $0,5(0,4x - 8) = 5(0,2x - 1)$;

4) $2,4(5x - 3) = -0,8(10 - 5x)$.

7. Sayaxatshı 3 km hám qalğan joldıń $\frac{1}{3}$ bólimin ótkennen keyin esaplap kórse, jámi joldıń yarımına jetiw ushın jáne 1km aralıq qalıptı. Barlıǵı bolıp jol neshe kilometr eken?
8. Uzunlıǵı 9,9 m bolğan sımdı eki bólekke bóldi. Eger:
- 1) bóleklerdiń biri ekinshisinen 20% ke qısqa bolsa;
 - 2) bóleklerdiń biri ekinshisinen 20% ke uzun bolsa, hárbir bólektiń uzunlıǵın tabıń.
9. 1) Bir san ekinshi sannıń 45% in quraydı. Sanlardıń biri ekinshisinen 66 ǵa kóp bolsa, usı sanlardı tabıń.
2) Bir san ekinshi sannıń 30% in quraydı. Sanlardıń biri ekinshisinen 35 ke kem bolsa, usı sanlardı tabıń.
10. Bir awıldan ekinshi awılǵa piyada 4 km/saat tezlik penen jolǵa shıqtı. Aradan 2 saat ótkennen keyin, piyadanıń sońınan 10 km/saat tezlik penen velosipedshi jolǵa shıqtı. Ol ekinshi awılǵa piyadadan 1 saat burın jetip keldi. Awillar arasındaǵı aralıqtı tabıń.

11. Esaplań:

$$1) \frac{3 \cdot 4^{10} - 5 \cdot 2^{19}}{2^{15}}; \quad 2) \frac{2^3 \cdot (4 \cdot 3^{15} - 7 \cdot 3^{14})}{3^{16} + 5 \cdot 3^{15}}; \quad 3) \frac{2^{15} \cdot a^{16}}{4^7 \cdot a^{15}}.$$

12. Bir aǵzalını standart túrinde jazıń hám san mánisin esaplań:

$$1) ba \cdot 8ac, \text{ bunda } a = \frac{1}{2}, b = -3, c = 2;$$

$$2) \frac{4}{5}x \cdot 8y^2 \cdot \frac{5}{16}x^2y, \text{ bunda } x = 3, y = \frac{1}{9}.$$

13. Kóp aǵzalını standart túrine keltiriń:

$$1) 1,2ab + 0,8b^2 - 0,2ab + 2,2b^2 + 2ab;$$

$$2) 3a^2 2a^2 + 3b^2 4a^2 - 2a^2 5b^2 - 3a 2ab^2 - a^3 2a.$$

14. Ámellerdi orınlań (14–15):

$$1) (3a^2 - 2ab - b^2) - (2a^2 - 3ab - 2b^2);$$

$$2) (7a^2 - 13ab + 10b^2) + (-3a^2 + 10ab - 7b^2);$$

$$3) (a^2 + 3ab - b^2) \cdot ab; \quad 4) abc \cdot (2a^2b - 3abc).$$

15. 1) $(x + y)(a - b);$ 2) $(a - b + c)(a - c);$
3) $(a^2 - b^2)(a + b);$ 4) $(a - 3)(a - 2) - (a - 1)(a - 4).$

16. Añlatpanı ápiwayılastırın:

$$1) 4a^3 : a - (2a)^2 + a^4 : 3a^2;$$

$$2) (5a^4 + \frac{1}{3}a^3) : a^2 - (4a^3) : (2a) + (2a)^2;$$

$$3) (0,1b^4 - 2b^3 + 0,4b^2 + 0,02b) : (0,1b);$$

$$4) \left(\frac{3}{8}a^3b^2 + \frac{9}{10}a^2b^3 - \frac{15}{16}ab^4 \right) : \left(\frac{3}{4}ab^2 \right).$$

17. Kóbeytiwshilerge jiklen (17–18):

$$1) 5a^2 - 15a^4 + 10a^6; \quad 2) 9a^3 + 12a^2 - 6a;$$

$$3) a(x + y) - b(x + y); \quad 4) (x - 1) - a(1 - x);$$

$$5) 4(a - 3) + a(3 - a); \quad 6) a^2(1 - a) + 4(a - 1).$$

18. 1) $ay + zy - 2ap - 2zp;$ 2) $5ac - 6bd + 5ad - 6bc;$
3) $a(5a - 4b) - 10a + 8b;$ 4) $4ab - 6cd - 12ad + 2bc.$

19. Esaplañ:

$$1) 49^2 + 51 \cdot 98 + 51^2; \quad 2) 58^2 - 116 \cdot 33 + 33^2;$$

$$3) \frac{19^2 + 38 \cdot 11 + 11^2}{19^2 - 11^2}; \quad 4) \frac{53^2 - 53 \cdot 94 + 47^2}{53^2 - 47^2};$$

$$5) \frac{183^3 - 93^3}{183^2 + 183 \cdot 93 + 93^2}; \quad 6) \frac{43,73^2 - 43,73 \cdot 56,27 + 56,27^2}{43,73^3 + 56,27^3}.$$

20. Sawdager islep shıgargan óniminiñ 1 kilogramın 19 800 somnan satsa, 162 800 som payda kóredi. Eger, usı ónimniñ 1 kilogramın 16 500 somnan satsa, 81 400 som zıyan kóredi. Ónim neshe kilogramm eken?

21. Sınawda oqıwshıǵa 60 soraw berildi. Hár bir durıs juwap 5 ballǵa bahalandı. 4 nadurıs juwap ushın járiyma sıpatında bir durıs juwap biykar

etildi. Bul sinawda sorawlardı belgilegen 1 oqıwshı 225 ball toplağan bolsa, ol neshe sorawğa durıs juwap bergen?

22. Úsh tańbalı sannıń cıfrları birewden kemeyip baradı. Usı sannan cıfrları oğan kerı tártipte jazılğan sandı ayırıw nátiyjesinde payda bolğan san 2 ge, 9 ğa, 11 ge bólinedi. Dálilleń.
23. Avtomobil 60 km/saat tezlik penen 4 saat júrdı. Usı jolğa 1 saat kem waqıt sarplaw ushın ol tezligin neshe procentke arttırıwı kerek?
24. Eki awıl aralıǵındaǵı aralıqtı bir sayaxatshı 2 saatta, ekinshi sayaxatshı bolsa, 3 saatta júrip ótedi. Eger olar bul awıllardan bir-birine qarap bir waqıtta jolğa shıqsa, qansha waqıttan soń ushırasadı?
25. Ónimniń bahası a som edi. Bul baha q % ke arzanlastırıldı. Biraz waqıt ótkennen keyin onıń sońǵı bahası p % ke kóterildi. Házirgi waqıtta ónim qansha swmnan satılıp atır?
26. Tuwrı tórtmúyeshliktiń eni a ğa, boyı b ğa teń. Onıń eni p % ke uzaytırıldı, boyı bolsa q % ke kemeytirildi. Payda bolğan tuwrı tórtmúyeshliktiń betin esaplań.
27. Mashina v_1 km/s tezlik penen n saat, v_2 km/s tezlik penen m saat jol júrdı.
 - 1) Mashina jámi neshe kliometr jol júrgen?
 - 2) Onıń ortasha tezligi qanday bolğan?
28. 5 tonna hám 10 tonna júk kóteretuǵın 50 mashina menen 405 tonna júkti tasıdı. Júk tasıwda neshe 5 tonnalıq hám neshe 10 tonnalıq mashinalar qatnasqan?

I BAP ALGEBRALÍQ BÓLSHEKLER

1-§. ALGEBRALÍQ AÑLATPALAR

Tómendegi máseleni qaraymız.

1-másele. Bir san oylań, onı 3 ge kóbeytiń, payda bolǵan sanǵa 6 nı qosıń, tabılǵan qosındını 3 ke bóliń hám oylaǵan sandı ayırıń. Qanday san payda boladı?

△ Aytayıq, oylaǵan san 8 bolsın. Barlıq esaplawlardı másele shártinde kórsetilgen tártipte orınlaymız:

$$1) 8 \cdot 3 = 24; \quad 2) 24 + 6 = 30; \quad 3) 30 : 3 = 10; \quad 4) 10 - 8 = 2.$$

2 sanı payda boldı.

Bul sheshimdi mánisi 2 ge teń bolǵan $(8 \cdot 3 + 6) : 3 - 8$ sanlı ańlatpa túrinde jazıwımız múmkin.

Eger de 5 sanı oylaǵan bolsa, onda jáne mánisi 2 ge teń bolǵan $(5 \cdot 3 + 6) : 3 - 5$ sanlı ańlatpa payda etilgen bolar edi.

Biz qanday sandı oylasaqta, nátiyjede 2 sanı payda bola beredi eken, degen pikir tuwıladı. Bunı tekserip kóremiz. Oylaǵan sandı a háribi menen belgileymiz hám esaplawdı jáne másele shártinde kórsetilgen tártipte jazamız:

$$(a \cdot 3 + 6) : 3 - a.$$

Arifmetikalıq esaplawlardıń bizge belgili bolǵan qásiyetlerinen paydalanıp, bul ańlatpanı ápiwayılastıramız:

$$(a \cdot 3 + 6) : 3 - a = a + 2 - a = 2. \quad \blacktriangle$$

Máseleni sheshiwde qálegen sandı bildiriwshi a háribi, 3 hám 6 sanları, esap belgileri hám qawsırmalardan ibarat $(a \cdot 3 + 6) : 3 - a$ ańlatpa payda etildi. Bul algebralıq ańlatpaǵa mısál bolıp, ol másele shártin matematikalıq tilge ótkiziw úlgisi bolıp esaplanadı.

Jáne algebralıq ańlatpalardıǵa mısallar keltiremiz:

$$2(m+n), \quad 3a+2ab-7, \quad (a+b)(a-b), \quad \frac{x+y}{a}.$$



Algebraлиq aňlatpa sanlar hám háriplerden dúzilip, esaplaw belgileri menen birlestilgen aňlatpa bolip esaplanadı.

Eger, algebraлиq aňlatpağa kirgen háripler ornına bir san qoyılsa hám kórsetilgen esaplaw islense, nátiyjede payda bolğan san berilgen algebraлиq aňlatpanıń san mánisi delinedi.

Máselen, $a=2$, $b=3$ bolğanda

$$3a+2b-7$$

algebraлиq aňlatpanıń mánisi 5 ke teń, sebebi $3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 - 7 = 5$; usı algebraлиq aňlatpanıń mánisi $a = 1$; $b = 0$ bolğanda -4 ke teń, sebebi

$$3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 - 7 = -4.$$

a nıń qálegen mánisinde

$$(a \cdot 3 + 6) : 3 - a$$

algebraлиq aňlatpanıń mánisi 2 ge teń.

2-másele. $\frac{(3a+7)b}{a-b}$ aňlatpanıń mánisin $a = 10$, $b = 5$ bolğanda tabıń.

$$\triangle \frac{(3 \cdot 10 + 7) \cdot 5}{10 - 5} = \frac{37 \cdot 5}{5} = 37. \blacktriangle$$



Qostw, alıw hám kóbeytiw belgileri járdeminde birlestirilgen bir neshe kóp aǵzalıdan ibarat aňlatpa pútin aňlatpa delinedi.

Qálegen pútin aňlatpa standart kórinisindegi kóp aǵzalıǵa keltiliwi múmkin.

Mısalı: $P(a, b) = 30a^3b^2 - (6a^2b + a)(5ab - 2)$ pútin aňlatpanı standart kórinisindegi kóp aǵzalıǵa keltiriń.

$$\begin{aligned} \triangle P(a, b) &= 30a^3b^2 - 30a^2b \cdot ab - 5ab \cdot a + 12a^2b + 2a = \\ &= 30a^3b^2 - 30a^3b^2 - 5a^2b + 12a^2b + 2a = 7a^2b + 2a. \end{aligned}$$

Juwapı: $7a^2b + 2a. \blacktriangle$

Shinigiwlar

1. Algebraлиq aňlatpaniń mánisin tabıń:

1) $3a - 2b$, bunda $a = \frac{1}{3}, b = 1$;

3) $0,25a - 4c^2$, bunda $a = 4, c = 3$;

2) $2a + 3b$, bunda $a = 3, b = -2$;

4) $\left(2a^2 - \frac{1}{3}b\right)$, bunda $a = 2, b = 9$.

2. Algebraлиq aňlatpaniń mánisin tabıń:

1) $\frac{1}{4}x - \frac{3}{7}y$, bunda $x = 8, y = -14$;

2) $\frac{2}{3}x + \frac{4}{5}y$, bunda $x = 9, y = -10$;

3) $\frac{a-3b}{a+3b}$, bunda $a = 4, b = -2$;

4) $\frac{a+3c}{2a-c}$, bunda $a = 3, c = -1$.

3. Neft trubasınan 1 saatta 7 t neft aǵadı, m saatta trubadan neshe tonna neft aǵadı? Bir sekundta – she?

4. 1) m saatta; 2) p sekundta; 3) m saat l minut hám p sekundta neshe minut bar?

5. x hám y sanlar ayırmasınıń kórsetkishin jazıń. Usı aňlatpanıń:

1) $x = -0,37, y = -0,42$;

2) $x = -2,98, y = -4,48$;

3) $x = -\frac{5}{6}, y = -\frac{9}{4}$;

4) $x = \frac{2}{15}, y = -0,7$

bolǵanda san mánisin tabıń.

6. x hám y qosındısı menen olar ayırmasınıń kóbeymesin jazıń. Payda bolǵan algebraлиq aňlatpanıń:

1) $x = -\frac{1}{8}, y = \frac{1}{4}$;

2) $x = -\frac{5}{8}, y = \frac{3}{4}$;

3) $x = 0,15, y = -0,75$;

4) $x = 1,32, y = -1,28$

bolǵanda san mánisin tabıń.

Algebraлиq a'nlatalardın san mánisin tabıń (7–8):

7. 1) $\frac{2mn(n+k)}{n-k}$, bunda $m=k=\frac{1}{3}$, $n=\frac{1}{2}$;

2) $\frac{(3p+1) \cdot 2p}{p-l} + \frac{1}{3}$, bunda $p=\frac{1}{3}$, $l=1$.

8. 1) $\frac{3(x-y)}{2p+q}$, bunda $x=8,31$; $y=2,29$; $p=2,01$; $q=2$;

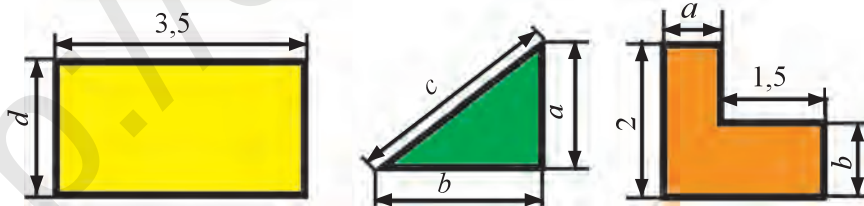
2) $\frac{5(bc+m)}{2q+4\frac{1}{4}}$, bunda $b=\frac{2}{3}$; $c=6$; $q=\frac{1}{2}$, $m=\frac{1}{5}$.

9. Taq san formulası $n=2k+1$ den paydalanıp, $k=0$, $k=1$, $k=7$, $k=10$ bolǵanda n nıń mánisin tabıń.

10. Algebraлиq a'nlapta túrinde jazıń:

1) kishisi n ǵa teń bolǵan eki izbe-iz natural sannıń qosındısı; 2) úlkeni m ǵa teń bolǵan eki natural sannıń kóbeymesi; 3) kishisi $2k$ ǵa teń bolǵan úsh izbe-iz jup natural sannıń qosındısı; 4) kishisi $2p+1$ ge teń bolǵan úsh izbe-iz taq natural sannıń kóbeymesi.

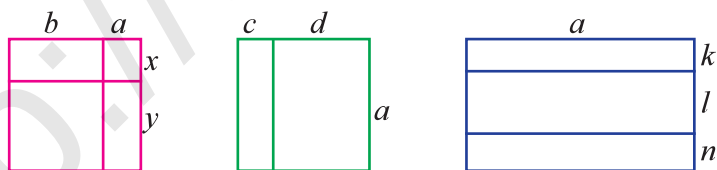
11. Figuralardıń perimetri hám betin algebraлиq a'nlapta kórinisinde jazıń (1-súwret):



1-súwret.

12. Úydi ısıtıw ushın p tonna kómir ǵamlandı; usıdan q tonna sarp landı. Neshe tonna kómir qaldı? 1) $p=20$, $q=15$ bolǵanda esaplań; 2) q sanı p sanınan úlken bolıwı múmkin be? p ǵa teń bolıwı-she?

13. Gúres jarısın kóriw ushın hár biri 400 somnan n bilet hám hár biri 500 somnan m bilet satıldı. Barlıq biletlerden qansha pul túsken? Sáykes anlatpa dúzín hám onı $n=200$, $m=150$; $n=100$, $m=230$ bolǵanda esaplań.
14. Bir albomnıń bahası 200 som, bir dápterdiń bahası 40 som, bir ruchkanıń bahası 60 som. c albom, a dápter hám b ruchkanıń ulıwma (swmlardaǵı) bahasın p háribi menen belgilep, onı formula túrinde jazıń. Eger, $c=9$, $a=21$, $b=4$ bolsa, bul formula boyınsha p nı esaplań.
15. Íssılıq uzatıw stanciyası ushın arnalǵan gaz trubası arqalı hár minutta 26 m^3 gaz ótedi. 5 sutkada, m sutkada trubadan neshe kub metr gaz ótedi?
16. Geologlar óz jónelisi boyınsha hárezet etip, attı saatına c kilometr tezlik penen 3 saat 10 minut júrdi; aǵımınıń tezligi saatına a kilometr bolǵan daryada aǵım boyınsha 1 saat 40 minut salda júzdi hám saatına b kilometr tezlik penen 2 saat 30 minut piyada júrdi. Jónelistiń (km degi) uzınlıǵın s háribi menen belgilep, geologlar basıp ótken jol formulasın jazıń. Eger $a=3,3 \text{ km/saat}$, $b=5,7 \text{ km/saat}$, $c=10,5 \text{ km/saat}$ bolsa, jónelistiń uzınlıǵın esaplań.
17. Aralas san $a + \frac{b}{c}$ kórinisinde jazılǵan. Aralas sandı nadırıs bólshekke aylandırıw qaǵıydasın hárıpler járdeminde jazıń.
18. 1) 2-súwrettegi figura (tuwrı tórtmúyeshlik) betin hám perimetrin esaplaw ushın formulalar dúzín:



2-súwret.

2) Figura járdeminde:

a) $(a+b)(x+y) = ax + bx + ay + by$;

b) $a(c+d) = ac + ad$;

$$c) a \cdot (k + l + n) = ak + al + an$$

teńliklerdi dálilleń. Bul formulalar mánisin ashıń.

19. Usı teńliklerge alıp keliwshi turmıslıq máseleler dúziń:

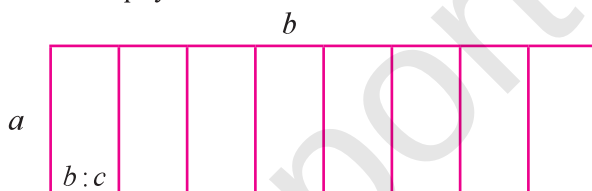
$$1) a - (b + c + d) = a - b - c - d;$$

$$2) a - (b - c) = a - b + c;$$

$$3) (ab)c = a(bc);$$

$$4) a - (b - c + d) = a - b + c - d.$$

20. $(ab):c = a \cdot (b:c)$ formulasın dálilleń. Geometriyalıq oy júritiwden hám 3-súwrettegi firuradan paydalanıń.



3-súwret.

2-§. ALGERBRALÍQ BÓLSHEK. BÓLSHEKLERDI QÍSQARTÍRÍW

1-másele. Katerdiń turǵan suwdaǵı tezligi saatına a kilometrge, dárya aǵımınıń tezligi saatına b kilometrge teń. Katerdiń dárya aǵımı boyınsha háreket tezligi, onıń dárya aǵımına qarsı háreket tezliginen neshe esege artıq?

△ Katerdiń dárya aǵımı boyınsha tezligi saatına $(a+b)$ kilometrge teń; aǵımǵa qarsı saatına $(a-b)$ kilometrge teń. Sonıń ushın dárya aǵımı boyınsha háreket tezligi aǵımına qarsı háreket tezliginen

$$\frac{a+b}{a-b}$$

ese artıq boladı. ▲

$\frac{a+b}{a-b}$ ańlatpa algerbralıq bólshek delinedi. Bul bólshektiń alımı $a+b$, bólimi bolsa $a-b$.

Ulıwma alımı hám bólimi bolǵan algebralıq ańlatpalar algebralıq bólshek delinedi.

Algebralıq bólsheklerge baylanıslı jáne bir neshe mısallar keltiremiz:

$$\frac{a}{b}; \frac{2}{x+y}; \frac{a-b}{c}; \frac{x(b+c)}{y(a-c)}.$$

Eger algebralıq bólshekke kırıwshi háripler ornına bir san qoyılsa, onda belgilengen esaplawlar ishengennen keyin, usı algebralıq bólshektiń san mánisi payda boladı.

Máselen, $a=10$, $b=8$ bolǵanda $\frac{a+b}{a-b}$ algebralıq bólshektiń san mánisi

$$\frac{10+8}{10-8} = \frac{18}{2} = 9 \text{ ge teń boladı.}$$

$\frac{a+b}{a-b}$ algebralıq bólshekke a hám b ornına óz ara teń bolmaǵan ($a \neq b$) qálegen sanlardı qoyıwǵa boladı, sebebi $a=b$ bolǵanda bólshektiń bólimi nolge aylanadı, nolge bóliwdiń bolsa ilajı joq..

Bunnan keyin algebralıq bólshekke kırıwshi háripler jol qoyılǵan mánislerdi ǵana, yaǵnıy usı bólshektiń bólimi nolge teń bolmaytuǵın mánilerdi ǵana qabıl etedi, dep shártlesemiz.

Máselen, $\frac{a}{a(a-1)}$ bólshek ushın múmkin bolǵan mániler a nıń $a=0$ hám $a=1$ den basqa barlıq mánileri boladı.



Bólshektiń tiykarǵı qásiyetin bilayınsha jazıwǵa boladı:

$$\frac{a}{b} = \frac{ma}{mb},$$

Bul jerde $b \neq 0$, $m \neq 0$.

Bul qásiyet bólshekniń alımı hám bólimi birdey algebralıq ańlatpaǵa kóbeytirilse yaki bólinse, oǵan teń bólshek payda bolıwın bildiredi, máselen:

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{15}{20}, \quad \frac{a+b}{b} = \frac{(a+b) \cdot c}{bc}.$$

Бóлшектің тйқарғы қásiyetinen paydalanıp, алгебралық бóлшекті onıń alımı hám бóліміне bir waqıtta kırıwshı ulıwma kóbeytiwshige qısqartırw múmkin, máselen:

$$\frac{a(b+c)}{a(b-c)} = \frac{b+c}{b-c}, \quad \frac{(a+b)c}{(a+b)d} = \frac{c}{d}.$$

Бóлшеклерді ápiwayılastırw ushın dáslep olardıń alımı hám бóлімініń kóbeytiwshisine jiklep alıw kerek. Soǵan tiyisli mısallar keltiremiz.

2- másele. Бóлшеклерді qısqartırın:

$$1) \frac{12a^2b}{4ab^2}; \quad 2) \frac{m^2 - n^2}{m^2 + mn}.$$

△ 1) $12a^2b$ hám $4ab^2$ biraǵzalılar $4ab$ ulıwma kóbeytiwshige iye. Бóлшектіń alımı hám бóлімін $4ab$ ǵa бóлеміз:

$$\frac{12a^2b}{4ab^2} = \frac{4ab \cdot 3a}{4ab \cdot b} = \frac{3a}{b}.$$

2) $m^2 - n^2$ hám $m^2 + mn$ kópaǵzalılar $m - n$ ulıwma kópeytiwshige iye, sebebi $m^2 - n^2 = (m+n)(m-n)$, $m^2 + mn = m(m+n)$. Бóлшектіń alımı hám бóлімін $m+n$ ǵa бóлеміз:

$$\frac{m^2 - n^2}{m^2 + mn} = \frac{(m+n)(m-n)}{m(m+n)} = \frac{m-n}{m}. \quad \blacktriangle$$



Бóлшеклерді qısqartırw ushın bul бóлшеклердіń alımı hám бóлімін ulıwma kópeytiriwshige бóліw kerek.

Eger $\frac{a}{b}$ бóлшектіń alımı yaki бóліміндеgi kórsetkish qarama-qarsısına ózǵertirilse, onda berilgen бóлшекке qarama-qarsı бóлшек payda bolıwın tastıyıqlap ótemіз.

$\frac{-a}{b}$ hám $\frac{a}{b}$; $\frac{a}{-b}$ hám $\frac{a}{b}$ – qarama-qarsı бóлшеклер. Sonıń menen birge

$$\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}; \quad \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}.$$

Máselen, $\frac{-3}{7} = -\frac{3}{7}$; $\frac{-a}{1-a} = -\frac{a}{1-a} = \frac{a}{a-1}$.

3- másele. $\frac{3a(y-x)}{a^2(x-y)}$ bólshekti qısqartıń:

$$\triangle \frac{3a(y-x)}{a^2(x-y)} = \frac{-3a(x-y)}{a^2(x-y)} = \frac{-3}{a} = -\frac{3}{a}. \triangle$$

Shınıǵıwıar

21. Alımı x hám y sanlarınıń kóbeymesine, bólimi olardıń qosındısına teń algebralıq bólshekti jazıń.
22. Alımı p hám q sanlarınıń ayırmasına, bólimi olardıń kóbeymesine teń algebralıq bólshekti jazıń.
23. Alımı a hám b kvadratlarınń ayırmasına, bólimi olardıń sanlar ayırmasınıń kvadratına teń algebralıq bólshekti jazıń.
24. Alımı c hám d sanlar kubınıń qosındısına, bólimi usı sanlar kóbeymesiniń ekilenwine teń bolǵan algebralıq bólshekti jazıń.
25. Algebralıq bólshektiń san mánisin tabıń:

1) $\frac{1}{a}$, bunda $a = 2\frac{3}{5}$; 4) $\frac{a-b}{a+2b}$, bunda $a = 16$, $b = -3$;

2) $\frac{b+1}{b-1}$, bunda $b = 1,5$; 5) $\frac{5a+b^2}{a^2-5b}$, bunda $a = 2$, $b = 8$;

3) $\frac{a^2+1}{2a}$, bunda $a = -3$; 6) $\frac{-7ab}{3b^2-a^3}$, bunda $a = 3$, $b = 4$.

26. 1) $S=vt$ formuladan v nı; 2) $p=\frac{m}{V}$ formuladan V nı;
- 3) $C=2\pi R$ formuladan R dı; 4) $P=2(a+b)$ formuladan a nı tabıń.

27. Hár bir júk mashinasına a tonnadan kartoshka júklewge bolsa, hár birinde p kilogrammnan kartoshka bolǵan n qap kartoshkanı tasıw ushın neshe júk mashinası (x) kerek boladı? x ti $n = 90$, $p = 50$, $a = 1,5$ bolǵanda tabıń.

28. Mashina saatina ortasha c metr linoluem linoleum islep shıgaradı. Eger mashina kúnine n saattan islese, ol a metr linoleumdı neshe kúnde islep shıgaradı? Tabıw kerek waqıttı t menen belgilep, t ni $c = 47$, $a = 11280$ hám $n = 16$ bolğanda tabıń.

29. Berilgen eki bólshektiń teńligin kórsetiń:

$$\begin{array}{lll} 1) \frac{6}{7} \text{ hám } \frac{18}{21}; & 3) \frac{2}{3} \text{ hám } \frac{2a}{3a}; & 5) \frac{m-n}{m+n} \text{ hám } \frac{m^2-n^2}{(m+n)^2}; \\ 2) \frac{-3}{5} \text{ hám } \frac{27}{-45}; & 4) \frac{2a}{7b} \text{ hám } \frac{2a^2b}{7ab^2}; & 6) \frac{a+3b}{c} \text{ hám } \frac{(a+3b)c}{c^2}. \end{array}$$

Bólshekti qısqartıń: **(30–45):**

30. 1) $\frac{-48}{-56}$; 2) $\frac{-64}{-80}$; 3) $\frac{-121}{55}$; 4) $\frac{28}{-14}$.

31. 1) $\frac{12a}{20}$; 2) $\frac{2c}{3c}$; 3) $\frac{7b}{21b}$;
4) $\frac{4ab}{8ac}$; 5) $\frac{a^2}{2a}$; 6) $\frac{5x}{x^3y}$.

32. 1) $\frac{a^2}{a^3}$; 2) $\frac{b^3}{b^7}$;
3) $\frac{a^5}{a^4}$; 4) $\frac{b^6}{b^4}$.

33. 1) $\frac{6ab}{4a}$; 2) $\frac{14c}{49c}$; 3) $\frac{a^4b}{ab^3}$;
4) $\frac{3a^2b}{9a^3}$; 5) $\frac{12a^4b^2}{18a^3b^3}$; 6) $\frac{25a^3bc^2}{125ac^3}$.

34. 1) $\frac{4(m+n)}{5(m+n)}$; 3) $\frac{2b(m-n)}{8b(m-n)(m-n)}$; 5) $\frac{2(a-b)}{b-a}$;
2) $\frac{7a(a-b)}{5(a-b)}$; 4) $\frac{3a(a+b)}{9a(a+b)(a-b)}$; 6) $\frac{5(x-y)}{15(y-x)}$.

- 35.** 1) $\frac{(a-b)^2}{a-b}$; 3) $\frac{m-n}{(n-m)^2}$; 5) $\frac{3m(1-x)^2}{9m^2(x-1)^2}$;
 2) $\frac{m+n}{(m+n)^4}$; 4) $\frac{(2x-3y)^2}{3y-2x}$; 6) $\frac{8a^2b(a-b)}{4a^3b(b-a)^2}$.
- 36.** 1) $\frac{3x+3y}{6c}$; 3) $\frac{2a+2b}{4a-4b}$; 5) $\frac{ac-bc}{ac+bc}$;
 2) $\frac{8a}{4m-4n}$; 4) $\frac{12a-3}{6a+9}$; 6) $\frac{a+ab}{a-ab}$.
- 37.** 1) $\frac{a^2}{a^2+ab}$; 3) $\frac{7a+14b}{3a+6b}$; 5) $\frac{3a-6b}{12b-6a}$;
 2) $\frac{pq^3}{p^2q-pq^2}$; 4) $\frac{2m^2-mn}{2mn-n^2}$; 6) $\frac{x^2-2xy}{2y^2-xy}$.
- 38.** 1) $\frac{12x^2-30xy}{30x^2-12xy}$; 2) $\frac{36a^2+24ab}{24a^2+36ab}$; 3) $\frac{m^3-3m^2n}{3m^2n-3m^3}$; 4) $\frac{a^3-2a^2b}{2a^3b^2-a^4b}$.
- 39.** 1) $\frac{a^2-b^2}{a+b}$; 3) $\frac{4c^2-9x^2}{2c-3x}$; 5) $\frac{3a(a-b)}{6a^2(b-a)}$;
 2) $\frac{a-b}{a^2-b^2}$; 4) $\frac{25-x^2}{5-x}$; 6) $\frac{5a(c^2-4)}{10a^2(2-c)}$.
- 40.** 1) $\frac{8-3c}{9c^2-64}$; 3) $\frac{2y-10}{25-y^2}$; 5) $\frac{b^2-c^2}{b^4n-c^4n}$;
 2) $\frac{100-49b^2}{7b+10}$; 4) $\frac{5y-y^2}{25-y^2}$; 6) $\frac{5a^3b+5ab^3}{a^4-b^4}$.
- 41.** 1) $\frac{d^2-6d+9}{d-3}$; 2) $\frac{b+7}{b^2+14b+49}$; 3) $\frac{9-6a+a^2}{3-a}$; 4) $\frac{1-2p}{1-4p+4p^2}$.
- 42.** 1) $\frac{4y^2-4y+1}{4y^2-1}$; 3) $\frac{3a^2-6ab+3b^2}{6a^2-6b^2}$;
 2) $\frac{16a^2-1}{16a^2-8a+1}$; 4) $\frac{50m^2+100mn+50n^2}{15m^2-15n^2}$.

43. 1) $\frac{1-a^2}{(a-1)^2}$; 2) $\frac{(m-n)^2}{n-m}$; 3) $\frac{4y^2-4y+1}{2-4y}$; 4) $\frac{5-2x}{4x^2-20x+25}$.

44. 1) $\frac{9c^2-16}{16-24c+9c^2}$; 4) $\frac{36c-c^3}{c^3+12c^2+36c}$;

2) $\frac{16x^2-24xy+9y^2}{9y^2-16x^2}$; 5) $\frac{25b-49b^3}{49b^3-70b^2+25b}$;

3) $\frac{4x^2-4xy+y^2}{y^2-4x^2}$; 6) $\frac{4b^2-12bc+9c^2}{-2ab+3ac}$.

45. 1) $\frac{2a^5-128a^2}{(2a^2+8a+32)(a^4-4a^3)}$; 3) $\frac{3a^3+ab^2-6a^2b-2b^3}{9a^5-ab^4-18a^4b+2b^5}$;

2) $\frac{2a^4+3a^3+2a+3}{(a^2-a+1)(2a+3)}$; 4) $\frac{3ac^2+3bc^2-3ab^2-3b^3}{6ac^2+6bc^2-6ab^2-6b^3}$.

3-§. BÓLIMLERDI ULÍWMA BÓLIWSHIGE KELITIRIW

Ápiwayı bólsheklerdi qosıwda ulıwma bóliniwshige keltirip alınadı. Máse-
len, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{25}$, $\frac{7}{10}$ bólshekler ushın ulıwma bóliniwshi 100 sanı boladı, bul bolsa
4, 25, 10 sanlarının eń kishi ulıwma túri bolıp esaplanadı.



Algebralıq bólsheklerdiń ulıwma bólimi usı bólshek bóliminiń eń
kishi túri bolıp esaplanadı. Bólsheklerdi ulıwma bólimge keltiriwde
bólshektiń tiykaǵı qásiyetinen paydalanıladı.

1- másele. $\frac{m}{3a^2b}$, $\frac{n}{6ab^2}$ hám $\frac{p}{4ac}$ algebralıq bólsheklerdi ulıwma
bóliniwshige keltirín.

△ Berilgen bólsheklerdiń bólimi hárbir bólshektiń bólimine bóliniwi
kerek. Demek, ol 3 ke, 6 ǵa, 4 ke, yaǵnıy 12 ge; a^2 ǵa, a ǵa, yaǵnıy a^2 qa;
 n ǵa hám b^2 qa, yaǵnıy b^2 qa; c ǵa bóliniwi kerek.

Solay etip, bólsheklerdiń ulıwma bólimi 12, a^2 , b^2 hám c kóbeytiwshilerin óz ishine alıwı kerek. Ulıwma bólimi sıpatında $12a^2b^2c$ kóbeytiwdi alıw kerek boladı. Bul ulıwma bólimdi birinshi bólshektiń bólimine bólip, onıń alımı hám bólimin kóbeytiw kerek bolğan bir aǵzalını tawamız. Bul berilgen bir aǵzal bólshektiń qosımsha kóbeytiwshisi delinedi. Birinshi bólshek ushın bunday bir aǵzal $4bc$ ǵa teń. Tap usınday jol menen ekinshi hám úshinshi bólshekler ushın qosımsha kóbeytiwshilerdi tabamız: $2ac$ hám $3ab^2$.

Birinshi, ekinshi hám úshinshi bólsheklerdiń alımı hám bólimi túrinde, $4bc$, $2ac$ hám $3ab^2$ ǵa kóbeytip, olardı $12a^2b^2c$ ulıwma bólimge keltiremiz:

$$\frac{m}{3a^2b} = \frac{4mbc}{12a^2b^2c}, \quad \frac{n}{6ab^2} = \frac{2nac}{12a^2b^2c}, \quad \frac{p}{4ac} = \frac{3pab^2}{12a^2b^2c}. \quad \blacktriangle$$

2- másele. Bólsheklerdi ulıwma bólimge keltiriń:

$$\frac{a}{x^2 - y^2}; \quad \frac{b}{2x^2 - 4xy + 2y^2}; \quad \frac{c}{3x^2 + 6xy + 3y^2}.$$

$\triangle$ Bólsheklerdiń bólimin kóbeytiwshige jikleymiz. Ulıwma bólim berilgen bólsheklerdiń hárbiriniń hárbiriniń bóliniwi kerek:

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y);$$

$$2x^2 - 4xy + 2y^2 = 2(x^2 - 2xy + y^2) = 2(x - y)^2;$$

$$3x^2 + 6xy + 3y^2 = 3(x^2 + 2xy + y^2) = 3(x + y)^2.$$

Ulıwma bólimi birinshi bólshektiń bóliniwi ushın onıń quramında $(x - y)(x + y)$ kóbeyiw bolıwı kerek.

Soń ulıwma bólim ekinshi bólshektiń bólimine bóliniwi kerek hám sonıń ushın onda $2(x - y)^2$ kóbeytiwshi bolıwı kerek. Demek, birinshi bólshek bólimine jáne $2(x - y)$ kóbeytiwshisin de jazıp qoyıw kerek, yaǵnıy ulıwma bólim quramına

$$2(x - y)^2(x + y)$$

kóbeytiw bolıwı kerek.

Ulıwma bólimi úshinshi bólshektiń $3(x+y)$ bólimine bóliniwi ushın payda etilgen kóbeymege $3(x+y)$ kóbeytiwshini jazıp qoyıw kerek. Demek, úsh bólshektiń de ulıwma bólimi

$$6(x-y)^2(x+y)^2$$

qa teń boladı.

Bólsheklerdi ulıwma bólimge keltiriw ushın olardıń alımı hám bólimin qosımsha kóbeytiwshilerge kóbeytiw kerek, olar ulıwma bólimdi hárbir bólimge bóliw jolı menen tabıladı; berilgen bólshekler ushın sáykes túrde tómendegilerge teń:

$$6(x-y)(x+y), 3(x+y)^2, 2(x-y)^2.$$

Demek, berilgen bólsheklerdi bunday jazıp alıw múmkin:

$$\frac{a}{x^2-y^2} = \frac{6a(x-y)(x+y)}{6(x-y)^2(x+y)^2}; \quad \frac{b}{2x^2-4xy+2y^2} = \frac{3b(x+y)^2}{6(x-y)^2(x+y)^2};$$

$$\frac{c}{3x^2+6xy+3y^2} = \frac{2c(x-y)^2}{6(x-y)^2(x+y)^2} \cdot \blacktriangle$$



Algebralıq bólsheklerdi ulıwma bólimge keltiriw ushın:

- 1) berilgen bólshektiń ulıwma bólimin tabıw;
- 2) hárbir bólshek ushın qosımsha kóbeytiwshini tabıw;
- 3) hárbir bólshektiń alımın, onıń qosımsha kóbeytiwshisine kóbeytiw;
- 4) hárbir bólshekti tabılğan alımı hám ulıwma bólimi menen jazıw kerek.

Shınıǵıwlar

Tómendegi shınıǵıwlarda bólsheklerdi ulıwma bólimge keltiriń (46–53):

46. 1) $\frac{1}{2}$ hám $\frac{2}{3}$; 3) $\frac{5}{7}$ hám $\frac{3}{14}$; 5) $\frac{x}{2y}$ hám $\frac{x}{3y}$;

2) $\frac{1}{a}$ hám $\frac{2}{b}$; 4) $\frac{a}{b}$ hám $\frac{a}{2b}$; 6) $\frac{8}{15}$ hám $\frac{5}{12}$.

47. 1) $\frac{3}{4a}, \frac{1}{5b}$ ҳам $\frac{7}{20ab}$; | 2) $\frac{3x}{4y}, \frac{6}{xy}$ ҳам $\frac{4y}{3x}$; | 3) $\frac{7}{a^2}$ ҳам $\frac{8}{a^3}$; | 4) $\frac{a}{2x}$ ҳам $\frac{b}{4x^3}$.

48. 1) a ҳам $\frac{b^2}{a}$; | 2) $3b$ ҳам $\frac{a^2}{2b}$; | 3) a^2 ҳам $\frac{c}{2ab}$; | 4) $\frac{b}{3a}, \frac{3c}{2b}$ ҳам ab .

49. 1) $\frac{1}{2p^2}, \frac{1}{6pk}$ ҳам $\frac{1}{3k^2}$; 3) $\frac{2a}{b^2}, \frac{4}{15a^2b}$ ҳам $\frac{3}{20a^3b^4}$;

2) $\frac{1}{6b^2}, \frac{a^2+b^2}{9a^2b^2}$ ҳам 4) $\frac{7}{20x^4y}, \frac{31}{6xy^3}$ ҳам

50. 1) $\frac{3}{x+y}$ ҳам $\frac{3-a^2}{18ab^2}$; 3) $\frac{7x}{2(x-1)}$ ҳам $\frac{5x}{x-1}$;

2) $\frac{6}{a-1}$ ҳам $\frac{2}{a}$; 4) $\frac{2a^2}{3(a+1)}$ ҳам $\frac{2a^2}{3(a+1)}$

51. 1) $\frac{1}{x-y}$ ҳам $\frac{1}{x+y}$; 3) $\frac{5x}{2x-2}$ ҳам $\frac{3}{4x-4}$.

2) $\frac{7a}{3x-y}$ ҳам $\frac{6b}{3x+y}$; 4) $\frac{3x}{4x+4y}$ ҳам $\frac{x}{8x+8y}$.

52. 1) $\frac{3b}{b-2}$ ҳам $\frac{4}{b^2-4}$; 3) $\frac{1}{1-a}, \frac{2a}{1+a}$ ҳам $\frac{a^2}{1-a^2}$;

2) $\frac{7a}{x^2-9}$ ҳам $\frac{a}{x+3}$; 4) $\frac{6x}{x-y}, \frac{7xy}{x+y}$ ҳам $\frac{3}{x^2-y^2}$.

53. 1) $\frac{m}{2m+2n}, \frac{n}{8m-8n}$ ҳам $\frac{mn}{6m^2-6n^2}$; | 2) $\frac{2c}{5b-5c}, \frac{3a^2}{35b^2-35c^2}$ ҳам $\frac{7b}{14b+14c}$;

3) $\frac{1}{a^2-4b^2}, \frac{1}{3a^2+6ab}$ ҳам $\frac{1}{2ab-a^2}$; | 4) $\frac{5}{4x-4}, \frac{4x}{1-x^2}$ ҳам $\frac{1}{3x^2+3x}$.



№1

Bir qurt jerden terektiñ terektiñ basına shıqpaqshı bolıptı. Terek boylap №1 keshte ol 2 m biyiklikke shıqqannan keyin, kúndizi bolsa 1 m páske túsedı eken. 9-keshede ol terektiñ basına shıgıp alıptı. Terektiñ biyikligi neshe metr eken?

4-§. ALGEBRALÍQ BÓLSHEKLERDI QOSÍW HÁM ALÍW

Birdey bólimli bólsheklerdi qosıw hám alıw qağıydaların bılayınsha jazıwǵa boladı:

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a+b}{m};$$

$$\frac{a}{m} - \frac{b}{m} = \frac{a-b}{m}.$$

1- másele. $\frac{a-b}{a+b}$, $\frac{2a-b}{a+b}$ hám $\frac{a-2b}{a+b}$ bólsheklerdi qosıń.

$$\triangle \frac{a-b}{a+b} + \frac{2a-b}{a+b} + \frac{a-2b}{a+b} = \frac{a-b+2a-b+a-2b}{a+b} = \frac{4a-4b}{a+b} = \frac{4(a-b)}{a+b}. \triangle$$

2- másele. $\frac{a^2}{a+b}$ hám $\frac{b^2}{a+b}$ bólsheklerdiń ayırmasın tabıń.

$$\triangle \frac{a^2}{a+b} - \frac{b^2}{a+b} = \frac{a^2-b^2}{a+b} = \frac{(a+b)(a-b)}{a+b} = a-b. \triangle$$



Hár túrli bólimge iye bólsheklerdi qosıw yaki alıwdı ushın bul bólsheklerdi ulıwma bólimge keltiriw hám birdey bólimli bólsheklerdi qosıw yaki alıw qağıydasınan paydalanıw kerek.

3- másele. $\frac{1}{a^3}$, $\frac{1}{2a^2b}$ hám $\frac{1}{3ab^2}$ bólsheklerdi qosıń

$\triangle$ Berilgen bólsheklerdiń ulıwma bólimi $6a^3b^2$ kóbeyme boladı. Demek,

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{2a^2b} + \frac{1}{3ab^2} = \frac{6b^2}{6a^3b^2} + \frac{3ab}{6a^3b^2} + \frac{2a^2}{6a^3b^2} = \frac{2a^2+3ab+6b^2}{6a^3b^2}. \triangle$$

4- másele $\frac{a}{3b^2c}$ hám $\frac{c}{15ab^2}$ bólsheklerdiń alımın tabıń.

$$\triangle \frac{a}{3b^2c} - \frac{c}{15ab^2} = \frac{5a^2}{15ab^2c} - \frac{c^2}{15ab^2c} = \frac{5a^2-c^2}{15ab^2c}. \triangle$$

5-мáсеle. $\frac{3}{x^2-1}$ hám $\frac{1}{x^2-x}$ bólsheklerdi qosín.

△ Бóлshekлерdи́н бóлимлеринде турған кóп ағзалын кóбейтiшлeрге жиклеймиз:

$$x^2 - x = x(x-1), \quad x^2 - 1 = (x-1)(x+1).$$

Бóлshekлерdи́н улiшма бóлими $x(x-1)(x+1)$ кóбейтiш болadı. Бóлshekлерdи улiшма бóлимге келтирiп, табамыз:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2-x} + \frac{3}{x^2-1} &= \frac{1}{x(x-1)} + \frac{3}{(x-1)(x+1)} = \frac{x+1}{x(x^2-1)} + \frac{3x}{x(x^2-1)} = \\ &= \frac{x+1+3x}{x(x^2-1)} = \frac{4x+1}{x(x^2-1)}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$



Түрli бóлимге ийе бóлshekлерdи qosıw yaki alıw usı tártipte орынлаwға болadı:

- 1) бóлshekлерdи́н улiшма бóлими табиладı;
- 2) бóлshekлер улiшма бóлимге келтириледı;
- 3) payda болған бóлshekлер qosıладı;
- 4) ilajı bolsa, nátiyje ápiwayılastırıladı.

6-мáсеle. $\frac{1}{a^2+4a+4} - \frac{4}{a^4+4a^3+4a^2} + \frac{4}{a^3+2a^2}$ аңлатпанı́н сан мánисин

$a = 0,5$ болғанда есapлаñ.

△ Берилген аңлатпанı́н тóмeндегисhe алмастırıwға болadı:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(a+2)^2} - \frac{4}{a^2(a^2+4a+4)} + \frac{4}{a^2(a+2)} &= \frac{1}{(a+2)^2} - \frac{4}{a^2(a+2)^2} + \frac{4}{a^2(a+2)} = \\ &= \frac{a^2-4+4(a+2)}{a^2(a+2)^2} = \frac{a^2+4a+4}{a^2(a+2)^2} = \frac{1}{a^2}. \end{aligned}$$

Demek, аңлатпанı́н izленip атırған сан мánиси:

$$\frac{1}{0,5^2} = \frac{1}{0,25} = \frac{100}{25} = 4. \quad \blacktriangle$$

Shinigiwlar

Ámellerdi orinlań (54–60):

54. 1) $\frac{p}{q^2} + \frac{3p}{q^2}$; 2) $\frac{8a}{b^3} - \frac{3a}{b^3}$; 3) $\frac{a}{a+b} + \frac{c}{a+b}$; 4) $\frac{x}{n+a} - \frac{y}{n+a}$.

55. 1) $\frac{c+d}{2a} + \frac{2c-d}{2a}$; 2) $\frac{a+2b}{3c^2} + \frac{5a-2b}{3c^2}$; 3) $\frac{a+b}{2c} - \frac{a-b}{2c}$;
4) $\frac{10a-b}{a^3} - \frac{3a-b}{a^3}$; 5) $\frac{(1+b)^2}{5d} + \frac{(1-b)^2}{5d}$; 6) $\frac{(2+a)^2}{a^2b} - \frac{(2-a)^2}{a^2b}$.

56. 1) $\frac{2}{5} + \frac{3}{7}$; 3) $\frac{2}{3a} + \frac{1}{a}$; 5) $\frac{c}{15a} + \frac{d}{3}$;
2) $\frac{4}{7} - \frac{5}{28}$; 4) $\frac{1}{b} - \frac{2}{5b}$; 6) $\frac{a}{4} - \frac{b}{12d}$.

57. 1) $\frac{m}{2} - \frac{1}{n}$; 2) $\frac{3}{a} + \frac{b}{5}$; 3) $5 - \frac{1}{a}$; 4) $\frac{2}{b} + 7$.

58. 1) $5 - \frac{2}{b} + \frac{3}{b^2}$; 2) $\frac{2}{c} + 4 - \frac{3}{c^2}$;
3) $d - \frac{c}{d} + \frac{c^2}{d^2}$; 4) $\frac{m}{n} - k + \frac{m^2}{n^2}$.

59. 1) $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc}$; 3) $\frac{a}{bc} - \frac{a}{bd}$; 5) $\frac{3}{m^2} + \frac{4}{mn}$;
2) $\frac{1}{mn} - \frac{1}{mk}$; 4) $\frac{b}{ac} + \frac{b}{cd}$; 6) $\frac{2}{mn} - \frac{3}{n^3}$.

60. 1) $\frac{3c}{4a^3b} + \frac{5d}{6ab^3}$; 3) $\frac{2}{3y^3} - \frac{1}{6x^2y} + \frac{5}{12xy^2}$; 5) $\frac{a}{b^2} + \frac{b}{c^2} + \frac{c}{a^2}$;
2) $\frac{2a}{9b^4} - \frac{7c}{6a^3b}$; 4) $\frac{5}{7x^2y} - \frac{3}{4xy^2} + \frac{11}{14x^2y^2}$; 6) $\frac{b}{c} + \frac{b}{c^2d} + \frac{b}{cd^2}$;

Algebraлиq bólsheklerdi qosín hám alín (61–72):

61. 1) $\frac{2x}{3(a-b)} + \frac{x}{a-b}$;

3) $\frac{2a^2}{3(a+1)} + \frac{5a^2}{4(a+1)}$;

2) $\frac{7x}{2(x-1)} - \frac{5x}{x-1}$;

4) $\frac{4y}{5(y-3)} - \frac{5x}{2(y-3)}$.

62. 1) $\frac{5}{2x-2} + \frac{3}{4x-4}$;

3) $\frac{a}{3a+3b} - \frac{2a}{6a+6b}$;

2) $\frac{7}{5b+5} - \frac{3}{10b+10}$;

4) $\frac{3x}{4x+4y} - \frac{x}{8x+8y}$.

63. 1) $\frac{3}{a^2+a} + \frac{5a}{ab+b}$;

3) $\frac{y+a}{b^2+ba} + \frac{y-b}{ab+a^2}$;

2) $\frac{5b}{ax+ay} - \frac{2a}{bx+by}$;

4) $\frac{y-b}{a^2-ab} - \frac{y-a}{ab-b^2}$.

64. 1) $\frac{3}{x+y} - \frac{5}{x}$;

3) $\frac{1}{x(x-3)} + \frac{1}{x(x+3)}$;

2) $\frac{6}{a} - \frac{10}{a-1}$;

4) $\frac{4}{5(a-b)} - \frac{7}{8(a+b)}$.

65. 1) $\frac{a}{1-b^2} + \frac{1}{1+b}$;

3) $\frac{5+p^2}{p^2-36} - \frac{p}{6+p}$;

2) $\frac{2}{x^2-9} + \frac{1}{x+3}$;

4) $\frac{2x}{x-4} - \frac{5x-2}{x^2-16}$.

66. 1) $\frac{2x}{x-4} - \frac{5x-2}{16-x^2}$;

3) $\frac{c^2-8}{2c+3} - \frac{16c-2c^3}{9-4c^2}$;

2) $\frac{12n-5}{n^2-49} + \frac{6}{7-n}$;

4) $\frac{21y^2+1}{1-9y^2} - \frac{y}{3y-1}$.

67. 1) $\frac{3}{a+2} + \frac{2a}{(a+2)^2}$;

2) $\frac{a}{(3a+1)^2} + \frac{4}{3a+1}$.

68. 1) $\frac{2y+8}{y^2-4y+4} - \frac{7}{y-2}$;

4) $\frac{4}{(m-n)^2} - \frac{7}{n-m}$;

2) $\frac{4-5x}{1+6x+9x^2} - \frac{2}{3x+1}$;

5) $\frac{2a}{25-10a+a^2} + \frac{10}{a^2-25}$;

3) $\frac{7}{(a-b)^2} - \frac{5}{b-a}$;

6) $\frac{1}{x^2-6x+9} + \frac{1}{(x+3)^2}$.

69. 1) $a + \frac{a}{a-1}$;

2) $b - \frac{b}{b-2}$;

3) $c+1 - \frac{c^2}{c-1}$;

4) $\frac{a^2}{a+1} - a + 1$.

70. 1) $\frac{7}{a+b} + \frac{8}{a-b} - \frac{16b}{a^2-a^2}$;

3) $\frac{3}{a+3} + \frac{2}{3-a} - \frac{6}{a^2-9}$;

2) $\frac{6x}{x^2-y^2} - \frac{3}{x-y} - \frac{4}{x+y}$;

4) $\frac{3}{4a^2-9} - \frac{8}{2a+3} - \frac{7}{3-2a}$.

71. 1) $\frac{a+b}{a} - \frac{a}{a-b} - \frac{b}{a^2-ab}$;

4) $\frac{7}{m} - \frac{4}{m-2n} - \frac{m-n}{4n^2-m^2}$;

2) $\frac{5b-1}{3b^2-3} + \frac{b+2}{2b+2} - \frac{b+1}{b-1}$;

5) $x - \frac{xy}{x+y} - \frac{x^3}{x^2-y^2}$;

3) $\frac{6a}{9a^2-1} + \frac{3a+1}{3-9a} + \frac{3a-1}{6a+2}$;

6) $a-2 + \frac{4a}{2+a} - \frac{a^3+b}{a^2+2a}$.

72. 1) $\frac{a+1}{a^3-1} - \frac{1}{a^2+a+1}$;

3) $\frac{a+b}{a^2-ab+b^2} - \frac{1}{a+b}$;

2) $\frac{a^2+4}{a^3+8} - \frac{1}{a+2}$;

4) $\frac{m^2-3m+9}{m^3-27} - \frac{1}{m-3}$.

73. Anlatpani ápiwayılastırıp, san mánisin tabıń:

$$1) \frac{8a^2}{a^3-1} + \frac{a+1}{a^2+a+1}, \text{ bunda } a=2;$$

$$2) \frac{3c^2-c+3}{c^3-1} - \frac{c-1}{c^2+c+1} + \frac{2}{1-c}, \text{ bunda } c=1\frac{1}{2}.$$

5-§. ALGEBRALÍQ BÓLSHEKLERDI KÓBEYTIW HÁM BÓLIW

Algebralıq bólsheklerdi kóbeytiw hám bóliw de ápiwayı bólsheklerdi kóbeytiw hám bóliw qağıydaları boyınsha orınlanadı:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd};$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

1-másele. Bólsheklerdi kóbeytiń:

$$\frac{1}{2xy}, \frac{4x^2y^3}{5z} \text{ hám } \frac{10z^2}{3x^3}.$$

$$\triangle \frac{1}{2xy} \cdot \frac{4x^2y^3}{5z} \cdot \frac{10z^2}{3x^3} = \frac{1 \cdot 4x^2y^3 \cdot 10z^2}{2xy \cdot 5z \cdot 3x^3} = \frac{4y^2z}{3x^2}. \triangle$$

2- $\frac{a-b}{a^2+ab}$ hám $\frac{b^2+ab}{(a-b)^2}$ bólsheklerdi kóbeytiń.

$\triangle$ Kóbeytiwshilerge jiklep, tabamız:

$$\frac{a-b}{a^2+ab} \cdot \frac{b^2+ab}{(a-b)^2} = \frac{(a-b)b(a+b)}{a(a+b)(a-b)^2} = \frac{b}{a(a-b)}. \triangle$$

3-másele. $\frac{m+n}{9m^2n^3}$ hám $\frac{m^2-n^2}{27mn^2}$ bólsheklerdi bóliń.

$$\triangle \frac{m+n}{9m^2n^3} : \frac{m^2-n^2}{27mn^2} = \frac{(m+n) \cdot 27mn^2}{9m^2n^3(m^2-n^2)} = \frac{(m+n)3}{mn(m-n)(m+n)} = \frac{3}{mn(m-n)}. \triangle$$

Algebralıq bólshekli dárejege kóteriwdе usı $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ formuladan paydalanıwdı esletip ótemiz.

Máselen,

$$\left(\frac{4a^2}{b}\right)^2 = \frac{16a^4}{b^2}; \quad \left(\frac{a+b}{3c}\right)^3 = \frac{(a+b)^3}{27c^3}.$$

Bólsheklerdi kóbeytín (74–75):

74. 1) $\frac{85}{24} \cdot \frac{72}{17}$; 2) $\frac{256}{169} \cdot \frac{13}{64}$; 3) $50 \cdot \frac{7}{625}$; 4) $\frac{5}{26} \cdot 39$.

75. 1) $\frac{a^3b}{c} \cdot \frac{c^2}{a^4}$; 3) $\frac{6a}{5b} \cdot \frac{15c}{2d}$; 5) $\frac{2a}{3b} \cdot 3c$;
2) $\frac{m^2n^2}{k} \cdot \frac{k^3}{m^3n^3}$; 4) $\frac{4m}{9n} \cdot \frac{27k}{16d}$; 6) $14a^2 \cdot \frac{b^2}{7c^3}$.

76. Bólsheklerdi bólin:

1) $\frac{3}{5} : \frac{3}{7}$; 3) $\frac{a}{8} : \frac{1}{3}$; 5) $\frac{2}{a} : \frac{6}{7}$;
2) $\frac{11}{12} : \frac{2}{5}$; 4) $\frac{6}{c} : \frac{m}{13}$; 6) $\frac{9}{35} : \frac{b}{5}$.

77. Bólsheklerdi bólin:

1) $\frac{8}{17} : \frac{8}{17}$; 3) $\frac{3a}{7b} : \frac{a}{b}$; 5) $\frac{2a}{3b} : \frac{a^2}{bc}$;
2) $\frac{a}{b} : \frac{a}{b}$; 4) $\frac{c}{2d} : \frac{4c^2}{5d}$; 6) $\frac{5m}{n^2} : \frac{10m^3}{n}$.

78. Bólsheklerdi bólin:

1) $\frac{17}{12} : \frac{34}{39}$; 3) $\frac{4}{13} : 5$; 5) $12 : \frac{8}{9}$;
2) $\frac{54}{25} : \frac{81}{75}$; 4) $\frac{a}{b} : c$; 6) $a : \frac{b}{c}$.

79. Bólsheklerdi bólin:

$$1) \frac{a^2b}{c} : \frac{a^4}{c^2};$$

$$3) \frac{4a}{5b} : \frac{12c}{25d};$$

$$5) \frac{6a}{5b} : (5c);$$

$$2) \frac{mn}{k} : \frac{m^2n^2}{k^3};$$

$$4) \frac{8m}{9n} : \frac{16k}{27d};$$

$$6) 12a^2 : \frac{4d}{5c^2}.$$

Berilgen ámellerdi orinlañ **(80–86)**:

80. 1) $\left(\frac{5a}{7b}\right)^2 \cdot \frac{14b^2}{25a^3};$

2) $\left(\frac{3a^2}{2b}\right)^3 \cdot \frac{16b^3}{21a^4};$

3) $\frac{2a^2}{5b^2} : \frac{12a^2}{15b^2};$

4) $\frac{3a^3}{7b} : \frac{9a^4}{21b};$

5) $\left(\frac{ab}{cd}\right)^2 \cdot acd;$

6) $abc^2 \cdot \left(\frac{ab}{cd}\right)^2.$

81. 1) $\frac{8a^2b}{9c} \cdot \frac{36c^3}{5a^3b};$

3) $\frac{16x^2y}{7z} : \frac{20xy^3}{21z^2};$

5) $\frac{18m^3n^5}{7k} : (9n^2);$

2) $\frac{7b^4}{9c^5y} : \frac{35b^4c^2}{18c^4y^2};$

4) $\frac{46d^3c}{15a} : \frac{23dc^2}{5a^3};$

6) $24k^2 : \frac{12m^4k^2}{11p^3n}.$

82. 1) $\frac{3x^2y}{4a^2b} \cdot 4a^2b;$

3) $15xy : \frac{30xy}{7a^2b};$

2) $\frac{5a^2b}{7xy^2} \cdot 14xy^2;$

4) $\frac{7x^2y}{2a^2b} : (14x^2y).$

83. 1) $\frac{7-x}{a+b} \cdot \frac{a-b}{7-x};$

3) $\frac{c+d}{c-d} : \frac{c}{c-d};$

5) $\frac{a^2-ab}{b} \cdot \frac{b}{a};$

2) $\frac{x-y}{2a} \cdot \frac{4b}{x-y};$

4) $\frac{a-b}{2b} : \frac{a-b}{6b^2};$

6) $\frac{a^2-ab}{b} \cdot \frac{b}{a}.$

84. 1) $\frac{a+1}{b} \cdot \frac{4b^2}{a^2-1};$

4) $\frac{5m}{m^2-n^2} : \frac{15m^3}{m-n};$

2) $\frac{1-a}{3b^2} \cdot \frac{b^3}{1-a^2};$

5) $\frac{3(x+y)}{4y^2(x^2+y^2)} \cdot \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2};$

3) $\frac{a^2-b^2}{9b^2} : \frac{a+b}{3b};$

6) $\frac{5(a-b)}{3(a^2+b^2)} : \frac{(a-b)^2}{a^2+b^2}.$

85. 1) $\frac{a^2 - b^2}{3a + 3b} \cdot \frac{3a^2}{5b - 5a};$

4) $\frac{3n^2 - 3m^2}{n^2 + np} \cdot \frac{6m - 6n}{n + p};$

2) $\frac{5x^2 - 5y^2}{x^2 + y^2} \cdot \frac{3x^2}{10y - 10x};$

5) $\frac{a^2 + b^2}{x^3 + x^2 y} \cdot \frac{x^2 - y^2}{a^4 - b^4};$

3) $\frac{a^2 - 25}{a^2 - 3a} : \frac{a + 5}{9 - a^2};$

6) $\frac{a^2 + b^2}{a^2 - ab} : \frac{a^4 b - b^5}{a^2 b - ab^2}.$

86. 1) $\frac{a - 5}{a^2 + 6a + 9} \cdot \frac{(a + 3)^2}{a^2 - 25};$

3) $\frac{a^2 - 49}{a^2 + 2ab + b^2} \cdot \frac{a + b}{a - 7};$

2) $\frac{b^2 - 8b + 16}{b + 3} : \frac{(b - 4)^2}{b^2 - 9};$

4) $\frac{a^2 - 2a + 1}{2a + 1} : \frac{a - 1}{4a^2 - 1}.$

6-§ BÓLSHEK-RACIONAL AÑLATPALARDÍ ONLÍQ BÓLSHEKLERGE ALMASTÍRÍW



Arifmetikalıq esaplawlar belgileri menen birlestirilgen bir neshe algebralıq bólsheklerden dúzilgen añlatpa racional bólshek añlatpası delinedi. Racional-bólshek añlatpanıń bólimindegi kóp aǵzalı nolge teń bolmawı kerek

Racional-bólshek añlatpanı algebralıq bólshekler boysınatuǵın qaǵıydalardan paydalanıp ápiwayılastırıw, olardı onlıq bólsheklerge almasırwǵa boladı.

1-másele. Racional-bólshek añlatpanı ápiwayılastırın:

$$R(x, y) = \frac{1 + \frac{1}{x}}{\frac{6}{x} + \frac{6}{xy} + \frac{12}{y}} - \frac{\frac{xy}{6}}{2x + y + 1}, \quad x \neq 0, \quad y \neq 0.$$

△ Algebralıq bólsheklerdi ulıwma bólimge keltiriw hám qosıw qaǵıydalarına muwapıq:

$$R(x, y) = \frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{6y+12x+6}{xy}} - \frac{\frac{xy}{6}}{2x+y+1} =$$

Algebralıq bólsheklerdi bóliw qağıydası boyınsha:

$$= \frac{(x+1)xy}{x(12x+6y+6)} - \frac{xy}{6(2x+y+1)} =$$

Nolden basqa ($x \neq 0$), soń qısqartamız hám qawsırmalardı ashamız:

$$= \frac{(x+1)y}{12x+6y+6} - \frac{xy}{12x+6y+6} =$$

Algebralıq bólsheklerdi alıw qağıydası boyınsha:

$$= \frac{xy+y-xy}{12x+6y+6} =$$

Uqsas aǵzalardı ıqshamlastıramız hám bólimindegi ulıwma kóbeytiwshini qawsırmadan sırtqa shıǵaramız:

$$= \frac{y}{12x+6y+6} = \frac{y}{6(2x+y+1)}.$$

Juwap: $R(x, y) = \frac{y}{6(2x+y+1)}.$ ▲

2-másele. Ańlatpanı ápiwayılastırın: $\left(\frac{a+1}{2a-2} - \frac{1}{2a^2-2} \right) \cdot \frac{2a+2}{a+2}.$

△ Qawsırma ishindegi ańlatpalardı ápiwayılastırayıq:

$$\begin{aligned} \frac{a+1}{2a-2} - \frac{1}{2a^2-2} &= \frac{a+1}{2(a-1)} - \frac{1}{2(a^2-1)} = \frac{(a+1)^2-1}{2(a^2-1)} = \\ &= \frac{(a+1-1)(a+1+1)}{2(a^2-1)} = \frac{a(a+2)}{2(a+1)(a-1)}. \end{aligned}$$

Kóbeytiwdi tabamız:

$$\frac{a(a+2)}{2(a+1)(a-1)} \cdot \frac{2a+2}{a+2} = \frac{a(a+2)2(a+1)}{2(a+1)(a-1)(a+2)} = \frac{a}{a-1}. \quad \blacktriangle$$

3- m á s e l e. Kórsetilgen ámellerdi orınlań:

$$\left(\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b} \right) : \left(\frac{a+b}{a-b} - 1 \right).$$

$\triangle$ Birinshi qawsırma ishindegi esaptı orınlaymız:

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b} &= \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{(a-b)(a+b)} = \frac{(a+b+a-b)(a+b-a+b)}{a^2 - b^2} = \\ &= \frac{2a \cdot 2b}{a^2 - b^2} = \frac{4ab}{a^2 - b^2}. \end{aligned}$$

Ekinshi qawsırma ishindegi esaptı orınlaymız:

$$\frac{a+b}{a-b} - 1 = \frac{a+b-a+b}{a-b} = \frac{2b}{a-b}.$$

Bólemiz:

$$\frac{4ab}{a^2 - b^2} : \frac{2b}{a-b} = \frac{4ab(a-b)}{(a^2 - b^2)2b} = \frac{2a}{a+b}. \quad \blacktriangle$$

4- m á s e l e. Háwiz birinshi truba arqalı a saatta, ekinshisi arqalı b saatta toladı. Eger, bir waqıtta eki truba ashıp qoyılsa, háwiz neshe saatta toladı?

$\triangle$ Háwizdiń kólemi V dep alayıq. Bir saatta birinshi trubá $\frac{V}{a}$ ға teń

kólemdi, ekinshisi $\frac{V}{b}$ ға teń kólemdi toltıradı, eki truba bolsa bir saatta $\frac{V}{a} + \frac{V}{b}$ ға teń kólemdi toltıradı. Tawıw kerek bolğan waqıt t bolsıń t saatta eki truba háwizdi tolıq toltırırıwı kerek, yaǵnıy

$$\left(\frac{V}{a} + \frac{V}{b} \right) t = V.$$

teńliktiń eki bólimin V ǵa bólip,

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)t = 1$$

di payda etemiz. Qawsırma ishinde turǵan bólsheklerdiń qosındısı $\frac{a+b}{ab}$ ǵa

teń. Sonıń ushın $\frac{a+b}{ab}t = 1$, bunnan $t = \frac{ab}{a+b}$. ▲

Shınıǵıwlar

Berilgen ámellerdi orınlań (87–92):

87. 1) $\left(\frac{a}{2} - \frac{a}{3}\right) \cdot \frac{1}{a^2}$; 3) $\frac{a-b}{a+b} \left(\frac{a}{5} + \frac{b}{5}\right)$; 5) $1 : \left(1 + \frac{1}{a}\right)$;

2) $\frac{a^2}{3} \cdot \left(\frac{2}{a} + \frac{2}{a^2}\right)$; 4) $\frac{ab}{a-b} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$; 6) $b : \left(b + \frac{1}{b}\right)$.

88. 1) $\left(1 + \frac{1}{a}\right) : \left(1 - \frac{1}{a}\right)$; 3) $\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} - 2\right) : \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$;

2) $\left(a + \frac{a}{b}\right) \left(a - \frac{a}{b}\right)$; 4) $\left(\frac{m}{n} + \frac{n}{m} + 2\right) \left(1 + \frac{m-n}{m+n}\right)$.

89. 1) $\left(1 - \frac{a-b}{a+b}\right) \left(2 + \frac{2b}{a-b}\right)$; 3) $\left(\frac{6}{a-b} - \frac{5}{a+b}\right) \cdot \frac{a-b}{a+11b}$;

2) $\left(1 + \frac{a+b}{a-b}\right) \left(2 - \frac{2a}{a+b}\right)$; 4) $\left(\frac{3}{c} + \frac{3}{c+d}\right) \cdot \frac{c}{18(c+d)}$.

90. 1) $\left(\frac{2m+1}{2m-1} - \frac{2m-1}{2m+1}\right) : \frac{4m}{10m-5}$; 3) $\frac{y-1}{y} : \left(\frac{y^2+1}{y^2+2y} - \frac{2}{y+2}\right)$;

2) $\left(\frac{z+6}{3z+9} - \frac{1}{z+3}\right) : \frac{z+2}{27z}$; 4) $\frac{m-2}{m-5} : \left(\frac{m^2+24}{m^2-25} - \frac{4}{m-5}\right)$.

$$91. \quad 1) \frac{a^2+ab}{a^2+b^2} \cdot \left(\frac{a}{a-b} - \frac{b}{a+b} \right); \quad 3) \left(\frac{c+d}{c} - \frac{2c}{c-d} \right) \cdot \frac{d-c}{c^2+d^2};$$

$$2) \frac{ab-b^2}{a^2+b^2} \cdot \left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b} \right); \quad 4) \left(\frac{2c}{c+d} + \frac{d-c}{c} \right) \cdot \frac{c+d}{c^2+d^2}.$$

$$92. \quad 1) \left(\frac{a+1}{2a-1} + \frac{6}{2a^2-2} - \frac{a+3}{2a+2} \right) \cdot \frac{4a^2-4}{3};$$

$$2) \left(\frac{b}{a^2+ab} + \frac{2}{a+b} + \frac{a}{b^2+ab} \right) : \frac{a^2-b^2}{4ab};$$

$$3) \frac{a^2-c^2}{a+b} \cdot \frac{a^2-b^2}{ac+c^2} \cdot \left(a + \frac{ac}{a-c} \right);$$

$$4) \frac{c^2-ac}{a^2-b^2} \cdot \frac{a-b}{c^2-a^2} : \left(c - \frac{ac}{a+c} \right).$$

93. Kólemi V bolğan muz bóleginiń massası p kilogrammğa teń. Kólemi V_1 bolğan bólektiń massası neshege teń?

94. Avtomobil saatına v kilometr tezlik penen háreketlenip, s kilometr jol basıp ótti. Eger, motocikldi tezligi saatına u kilometr bolsa, usı waqıt ishinde ol qansha jol basıp ótedi?

95. Motorlı qayıqtıń turğan suwdağı tezligi saatına v kilometr, dárya aǵımınıń tezligi bolsa v_1 kilometr. Qayıq aǵım boyınsha háreketlenip, s kilometr ótti. Motorlı qayıq aǵımına qarsı waqıt ishinde qansha aralıqtı basıp ótedi?

96. (*Abu Rayxan Beruniy máselesi.*) Eki buyımnan biriniń 10 ı bir dinar (pul birligi) hám ekinshisiniń 15 i bir dinar. Bir dinarğa eki buyımnan birdey muǵdarda neshewden satıp alıwǵa boladı??

7- §. $y = \frac{k}{x}$ FUNKCIYÁ QÁSIYETLERI, GRAFIGI

1- másele. $y = \frac{1}{x}$ funksiyanıń grafigin jasań.

△ 1) anıqlaw tarawı – nolden basqa barlıq haqıyqıy sanlar;

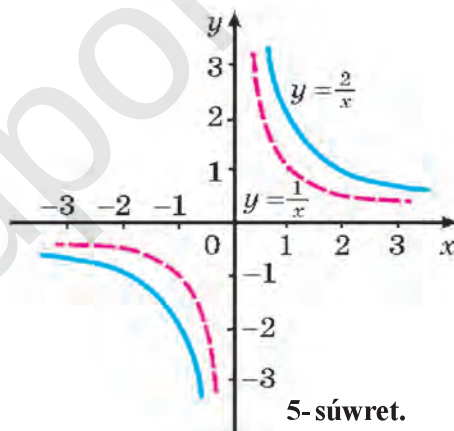
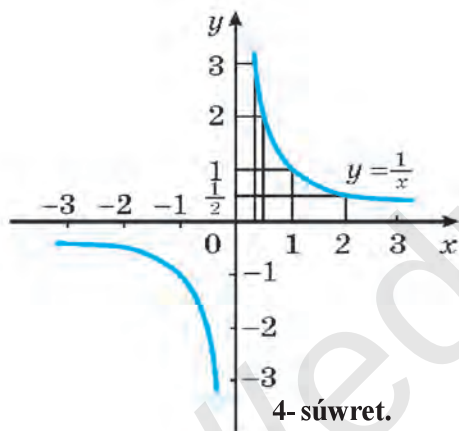
2) funksiya – taq, sebebi $x \neq 0$ bolǵanda $\frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$;

3) funkciya $x > 0$ aralıqta kerı kórsetkishli dáreje funkciyasınıń qásiyetine baylanıslı kemeyedi, sebebi $\frac{1}{x} = x^{-1}$;

4) $x > 0$ bolǵanda funkciya oń mánilerdi qabıl etedi

5) grafikke tiyisli bir neshe, máselen, $(\frac{1}{3}; 3)$, $(\frac{1}{2}; 2)$, $(1; 1)$, $(2; \frac{1}{2})$ noqatların tawıp, $x > 0$ dıń mánileri ushın grafiktiń bir bólimin jasaymız hám soń simmetriya járdeminde $x < 0$ ushın qalǵan bólegin jasaymız (4-súwret). ▲

$y = \frac{1}{x}$ funkciyanıń grafigi giperbola delinedi. Ol tarmaqlar dep atalıwshı eki bólimnen dúzilgen. Tarmaqlardan biri birinshi sherekte, ekinshisi úshinshi sherekte jaylasqan.



2 - másele. $k = 2$ hám $k = -2$ bolǵanda $y = \frac{k}{x}$ funkciyanıń grafigin soǵıń.

▲ Argumentiniń tap birdey mánilerinde $y = \frac{2}{x}$ funkciyanıń mánleri $y = \frac{1}{x}$ funkciya mánilerin 2 ge kóbeytiw menen payda etiliwin eskertemiz. Bul $y = \frac{2}{x}$ funkciyanıń grafigin $y = \frac{1}{x}$ funkciyanıń grafigin abscissalar kósherinen ordinatalar kósheri boylap eki ese sozıw menen payda etiledi (5-súwret).

$y = -\frac{2}{x}$ funkciyanın mánileri $y = \frac{2}{x}$ funkciya mánilerinen tek kórsetkishi menen ǵana ayırılıp turadı. Demek, $y = -\frac{2}{x}$ funkciyanın grafigi $y = \frac{2}{x}$ funkciya grafigine abscissalar kósherine qaraǵanda simmetriyalı (6-súwret). ▲

Qálegen $k \neq 0$ de $y = \frac{k}{x}$ funkciyanın grafigi de giperbola delinedi. Giperbola eki tarmaqqa iye. Olar eger $k > 0$ bolsa, birinshi hám úshinshi shereklerde, eger $k < 0$ bolsa úshinshi hám tórtinshi shereklerde jatadı.



$y = \frac{k}{x}$ (bunda $k > 0$) *funkciya* $y = \frac{1}{x}$ *funkciyanın barlıq qásiyetlerine iye, sebebi, bul funkciya:*

- 1) $x \neq 0$ *bolǵanda anıqlanǵan;*
- 2) *Nolden basqa barlıq haqıyqıy mánilerdi qabıl etedi;*
- 3) *taq;*
- 4) $x > 0$ *bolǵanda oń mánilerdi hám* $x < 0$ *bolǵanda teris mánilerdi qabıl etedi;*
- 5) $x < 0$ va $x > 0$ *oraliqlarda kemeyedi.*

Eger $k < 0$ bolsa, onda $y = \frac{k}{x}$ funkciya 1 -3 – qásiyetlerge iye boladı; 4-5-qásiyetler bilayınsha beriledi:

- 4') $x < 0$ *bolǵanda oń mánilerdi hám* $x > 0$ *bolǵanda teris mánilerdi qabıl etedi;*
- 5') $x < 0$ *hám* $x > 0$ *aralıqta ósedi.*

$y = \frac{k}{x}$ funkciya $k > 0$ bolǵanda x hám y arasındǵı keri proporcional baylanıstı bildiredi, delinedi. Muǵdarlar arasındǵı bunday baylanıslar kóbinshe fizika, texnika hám basqa tarawlarda ushıraydı.

Máselen, v ózgermeytuǵın tezlik penen sheńber boylap tegis háreketlenip atırǵan dene $a = \frac{v^2}{r}$ ge teń (bul jerde r – sheńber radiusı) orayǵa umıtılıwshı tezlik penen háreketlenedi, yaǵnıy bunda tezleniw sheńber radiusına keri proporcional.

3 - másele. Ay Jerden $3,84 \cdot 10^8$ m aralıqtá. Ay 27,3 sutka dawamında Jer átırıpın bir ret aylanıp shıǵadı. Aydıń orayǵa umıtılıwshı tezligin esaplań.

△ a tezlikti $a = \frac{v^2}{r}$ formula menen esaplaymız, bunda $v = \frac{C}{t}$, $C = 2\pi r$, $t = 27,3 \cdot 24 \cdot 3600$ s, $r = 3,84 \cdot 10^8$.

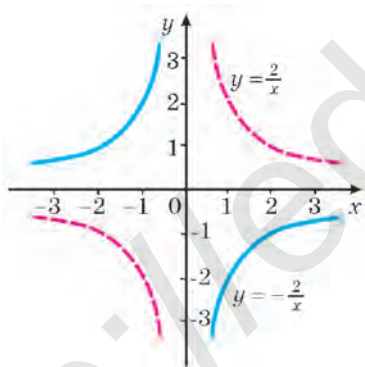
Onda:

$$a = \frac{4\pi^2 \cdot 3,84 \cdot 10^8}{(27,3 \cdot 24 \cdot 3600)^2} \approx 2,72 \cdot 10^{-3}.$$

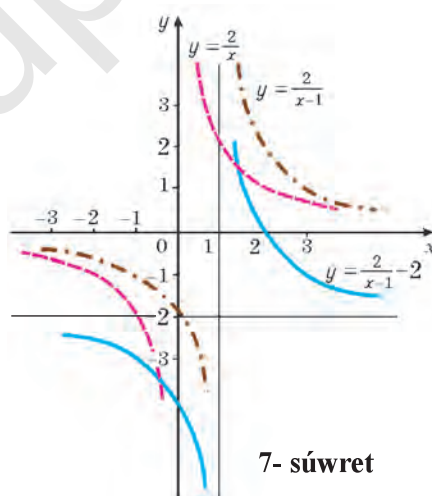
Juwapı: $2,72 \cdot 10^{-3}$ m/s². ▲

4 - másele. $y = \frac{2}{x-1} - 2$ funksiya grafigin jasań.

△ $y = \frac{2}{x}$ funksiya grafigin (6-súwret) Ox kósher boylap onǵa bir birlik hám Ay kósheri boylap eki birlik páske túsiriw menen $y = \frac{2}{x-1} - 2$ funksiyanıń grafigin payda etiwge boladı (7-súwret). ▲



6--súwret



7- súwret

Shınıǵıwlar

97. $y = \frac{2}{x}$ funksiya grafigin jasań. x tiń qanday mánilerinde:

- 1) $y(x) = 4$; 2) $y(x) = -\frac{1}{2}$; 3) $y(x) > 4$; 4) $y(x) \leq 1$
bolıwın anıqlań.

98. Bir koordinata tegisliginde $y = \frac{1}{x}$ hám $y = x$ funkciyalar grafiklerin jasań. x tiń qanday mánilerinde

- 1) bul funkciyalardıń grafikleri kesisiwin anıqlań;
- 2) birinshi funkciyanıń grafigi ekinshi funkciya grafiginen joqarıda (tómende) jatıwın anıqlań.

99. Funkciyalardıń grafiklerin jasamastan, olardıń kesisiw noqatların tabıń:

- 1) $y = \frac{12}{x}, y = 3x$; 2) $y = -\frac{8}{x}, y = -2x$;
- 3) $y = \frac{2}{x}, y = x - 1$; 4) $y = \frac{6}{x+1}, y = x + 2$.

100. Funkciyalardıń grafiklerin jasadı, olardıń kesisiw noqatların tabıń:

- 1) $y = \frac{3}{x}, y = x + 1$; 2) $y = -\frac{3}{x}, y = 1 - x$;
- 3) $y = \frac{2}{x}, y = x^2 + 2$; 4) $y = \frac{1}{x}, y = x^2 + 4x$.

101. Cilindrde porshen astında gaz turaqlı temperaturada tur. Gazdıń V (litrlerde) kólemi p (atmosfera) basımında $V = \frac{12}{p}$ formula boyınsha esaplanadı.

- 1) basım 4 atm; 5 atm; 10 atm bolğanda gazdıń iyelegen kólemin tabıń;
- 2) qanday basımda gaz 3 l; 5 l; 15 l kólemde iyelewin esaplań; 3) gazdıń kólemi onıń basımına baylanıslı grafigin jasań.

102. Reostattağı I tok kúshi (amperlerde) $I = \frac{U}{R}$ formula menen ólshenedi, bunda U – kúshleniw (votlarda), R – qarsılıq (omlarda).

- 1) $U = 6$ bolğanda $I(R)$ baylanıstıń grafigin jasań.
- 2) Grafik boyınsha juwıq mánisin tawıń: a) R qarsılıq 6, 12, 20 Ω bolğanda tok kúshin; b) tok kúshi 10, 5, 1,2 A bolğanda reostattıń qarsılıgıń

103. Avtomobil joldıń radiusı 150 m bolğan aylanba bólegi boyınsha 60 km/saat tezlik penen häreket etpekte. Avtomobildıń orayğa umtılıwshı tezligin tabıń. Eger, avtomobildıń tezligi aldındısında qalıp, joldıń

aylanba bólegi radiusı artsa, orayǵa umtılıwshı tezligi arta ma yaki kemeye me?

104. Funkciyanıń grafigin jasań:

$$1) y = \frac{3}{x} - 2; \quad 2) y = \frac{2}{x} + 1; \quad 3) y = \frac{2}{x+2} - 1; \quad 4) y = \frac{3}{1-x} + 1.$$

8-§. NATURAL KÓRSETKISHLI DÁREJENIŇ ARIFMETIKALÍQ KORENI HÁM ONIŇ QÁǴÍYDALARI

Orta Aziyalı belgili matematik hám astronom **Jamshid ibn Masud ibn Mahmud Ğiyosiddin al-Koshiy** (shama menen 1430-jılı álemnen ótken) sanlardan qálegen n -dárezeli koren shıǵarıw esabın oylap taptı. Onıń “Arifmetika gilti” atlı shıǵarmasınıń 5-babında bul haqqında pikir júritiledi.

Tómenдеgi máseleni qarayıq.

1 - másele. Teńlemenı sheshiń: $x^4 = 81$.

△ Teńlemenı $x^4 - 81 = 0$ yaki $(x^2 - 9)(x^2 + 9) = 0$ kórinisinde jazıp alamız. $x^2 + 9 \neq 0$ bolǵanı ushın $x^2 - 9 = 0$ boladı, bunnan

$$x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3) = 0, \quad x_1 = 3, \quad x_2 = -3. \quad \blacktriangle$$

Solay etip, $x^4 = 81$ teńleme eki haqıyqıy korengе iye: $x_1 = 3$, $x_2 = -3$. Olar 81 sanınıń 4-dárezeli korenleri, oń koren (3 sanı) 81 sanınıń 4-dárezeli korenleri delinedi hám bılayınsha jazıladı: $\sqrt[4]{81}$. Yaǵnıy, $\sqrt[4]{81} = 3$.

$x^n = a$ teńleme (bunda n – natural san, a – teris emes san) jalǵız teris emes korengе iye ekenligin dálillewge boladı. Bul koren a sanınıń n -dárezeli arifmetikalıq koreni dep ataladı.



Анıqlama: a teris emes sannıń $n \geq 2$ natural kórsetkishli arifmetikalıq koreni dep, n -dárezesi a ǵa teń bolǵan teris emes sanına aytıladı.

a sanınıń n -dárezeli arifmetikalıq koreni bılay jazıladı: $\sqrt[n]{a}$. a san koren astındaǵı kórsetpe delinedi. Eger $n = 2$ bolsa, onda $\sqrt[n]{a}$ ornına $\sqrt{a}$ jazıladı.

Екинши дарежели арифметикалық кoren *kvadrat koren* деп, 3-дарежели koren bolsa *kub koren* delinedi.

n -дарежели koren haqqında aytilganda, qisqasha “ n – дарежели koren” delinedi.



Anıqlamadan paydalanıp, $\sqrt[n]{a}$ nın b ga teń ekenin dálillew ushın:

1) $b \geq 0$; 2) $b^n = a$ ekenin kórsetiw kerek.

Máselen, $\sqrt[3]{64} = 4$, sebebi, $4 > 0$ hám $4^3 = 64$.



Arifmetikalıq korennin anıqlamasınan, eger $a \geq 0$ bolsa, onda

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a, \quad \sqrt[n]{a^n} = a$$

bolıwı kelip shıgadı.

Máselen, $\left(\sqrt[5]{7}\right)^5 = 7$, $\sqrt[6]{13^6} = 13$.

n – дарежели korendi tabıw n – дарежели koren shıgarıw ámeli delinedi. Ol n – дарежели kóteriw ámeline kerı ámel bolıp esaplanadı.

2-másele. $x^3 = -8$ teńlemenı sheshin.

△ Bul teńlemenı $-x^3 = 8$ yaki $(-x)^3 = 8$ etip jazıwga boladı. $-x = y$ dep belgileymiz, onda $y^3 = 8$ boladı.

Bul teńleme bir korenge iye $y = \sqrt[3]{8} = 2$. $y^3 = 8$ teńleme teris korenge iye emes, sebebi $y < 0$ bolganda $y^3 < 0$ boladı. $y = 0$ sanı da bul teńlemenin koreni bola almaydı.

Solay etip, $y^3 = 8$ teńleme tek bir $y = 2$ korenge iye, demek, $x^3 = -8$ teńleme de tek bir korenge iye: $x = -y = -2$.

J a v o b ı: $x = -2$. ▲

$x^3 = -8$ teńlemenin sheshimin qisqasha bılayınsha jazıwga boladı:

$$x = -\sqrt[3]{8} = -2.$$



Ulıwma, qálegen taq $2k+1$ natural san ushın $a < 0$ bolganda $x^{2k+1} = a$ teńleme tek bir teris korenge iye. Bul koren tap arifmetikalıq koren sıyaqlı bılay jazıladı: $\sqrt[2k+1]{a}$. Ol teris sannın taq дарежели koreni delinedi.

Máselen, $\sqrt[3]{-27} = -3$, $\sqrt[5]{-32} = -2$.

a teris sanınıń taq dárejeli koreni menen $-a = |a|$ sanınıń arifmetikalıq koreni arasında usı teńlik bar:

$$^{2k+1}\sqrt{a} = -^{2k+1}\sqrt{-a} = -^{2k+1}\sqrt{|a|}.$$

Máselen, $\sqrt[5]{-243} = -\sqrt[5]{243} = -3$.

Shınıǵıwlar

105. (Awızshá) 1) sannıń arifmetikalıq kvadrat koreni tabıń:

$$1; \quad 0; \quad 16; \quad 0,81; \quad 169; \quad \frac{16}{121}; \quad \frac{49}{144}.$$

2) Sannıń arifmetikalıq kub koreni tabıń:

$$1; \quad 0; \quad 5; \quad \frac{1}{27}; \quad 0,027; \quad 0,064; \quad 0,729; \quad \frac{1}{343}.$$

3) Sannıń tórtinshi dárejeli arifmetikalıq koreni tabıń:

$$0; \quad 1; \quad 16; \quad \frac{16}{81}; \quad \frac{256}{625}; \quad 0,0016; \quad \frac{625}{1296}.$$

Esaplań (**106–108**):

106. 1) $\sqrt[6]{36^3}$; 2) $\sqrt[12]{64^2}$; 3) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{25}\right)^2}$; 4) $\sqrt[8]{225^4}$; 5) $\sqrt[7]{2 \cdot 4^3}$.

107. 1) $\sqrt[3]{10^6}$; 2) $\sqrt[3]{3^{12}}$; 3) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^{12}}$; 4) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{3}\right)^{16}}$; 5) $\sqrt[5]{32^2}$.

108. 1) $\sqrt[3]{-8}$; 2) $\sqrt[15]{-1}$; 3) $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}$;
4) $\sqrt[5]{-1024}$; 5) $\sqrt[3]{-34^3}$; 6) $\sqrt[7]{-8^7}$.

109. Teńlemenı sheshiń::

1) $x^4 = 81$; 2) $x^5 = -\frac{1}{32}$; 3) $5x^5 = -160$; 4) $2x^6 = 128$.

110. x tiń qanday mánilerinde ańlatpa mánige iye boladı:

1) $\sqrt[6]{2x-3}$; 2) $\sqrt[3]{x+3}$; 3) $\sqrt[3]{2x^2-x-1}$; 4) $\sqrt[4]{\frac{2-3x}{2x-4}}$?

Esaplań (111–112):

111. 1) $\sqrt[3]{-125} + \frac{1}{8}\sqrt[6]{64}$;

2) $\sqrt[5]{32} - 0,5\sqrt[3]{-216}$;

3) $-\frac{1}{3}\sqrt[4]{81} + \sqrt[4]{625}$;

4) $\sqrt[3]{-1000} - \frac{1}{4}\sqrt[4]{256}$;

5) $\sqrt[4]{0,0001} - 2\sqrt{0,25} + \sqrt[5]{\frac{1}{32}}$;

6) $\sqrt[5]{\frac{1}{243}} + \sqrt[3]{-0,001} - \sqrt[4]{0,0016}$.

112. 1) $\sqrt{9+\sqrt{17}} \cdot \sqrt{9-\sqrt{17}}$;

2) $(\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}})^2$;

3) $(\sqrt{5+\sqrt{21}} + \sqrt{5-\sqrt{21}})^2$;

4) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

113. 1) a) $x \geq 2$; b) $x < 2$ bolganda $\sqrt[3]{(x-2)^3}$ ti ápiwayılastırın;

2) a) $x \leq 3$; b) $x > 3$ bolganda $\sqrt{(3-x)^6}$ ni ápiwayılastırın.

114. $1987 < \sqrt{n} < 1988$ bolatuğın neshe natural san n bar?

9-§. RACIONAL KÓRSETKISHLI DÁREJE HÁM ONÍN QÁĞÍYDALARÍ

1-másele. Esaplań: $\sqrt[4]{5^{12}}$.

△ $5^{12} = (5^3)^4$ bolganı ushın $\sqrt[4]{5^{12}} = \sqrt[4]{(5^3)^4} = 5^3 = 125$. ▲

Solay etip, $\sqrt[4]{5^{12}} = 5^{\frac{12}{4}}$.

Soğan uqsas, $\sqrt[5]{7^{-15}} = 7^{-\frac{15}{5}}$ ekenligin kórsetiwge boladı.



Eger n – natural san, $n \geq 2$, m – pütün san hám $\frac{m}{n}$ pütün san bolsa, onda $a > 0$ bolganda tómendegi teńlik durıs boladı:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.$$

(1)

○ Shárti boyınsha $\frac{m}{n}$ – pútın san, yaǵnıy n nı n ǵa bóliwde k pútın san payda boladı. Bunda $\frac{m}{n} = k$ teńlikten $m = kn$ kelip shıǵadı. Dárejeniń hám arifmetikalıq korenniń qaǵıydalarınan paydalanıp, tómendegige iye bolamız:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{kn}} = \sqrt[n]{(a^k)^n} = a^k = a^{\frac{m}{n}}. \quad \bullet$$



Eger de $\frac{m}{n}$ pútın san bolmasa, onda $a^{\frac{m}{n}}$ (bunda $a > 0$) dáreje (1) formula durıslıǵın saqlap qalatuǵın etip anıqlanadı, yaǵnıy bunda

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (2)$$

dep esaplanadı.

Solay etip, (2) formula qálegen pútın m hám qálegen natural $n \geq 2$ hám $a > 0$ san ushın durıs boladı. Máselen,

$$16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^3} = \sqrt[4]{2^{12}} = 2^3 = 8; \quad 7^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{7^5} = \sqrt[4]{7^4 \cdot 7} = 7\sqrt[4]{7};$$

$$27^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^{-2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{27^2}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{3^6}} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}.$$

r racional san – bul $\frac{m}{n}$ kórinisindegi san ekenligin, bunda m – pútın san, n – natural san, yaǵnıy $r = \frac{m}{n}$ bolıwın esletip ótemiz. Bunda (2) formula boyınsha $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ ni mısal etemiz. Solay etip, dáreje qálegen racional kórsetkish hám oń tiykar ushın anıqlanadı. Eger, $r = \frac{m}{n} > 0$ bolsa, onda $\sqrt[n]{a^m}$ ańlatpa tek ǵana $a > 0$ bolǵanda emes, bálkim $a = 0$ bolǵanda da mánige iye boladı. $a = 0$ bolsa, $\sqrt[n]{0^m} = 0$. Sonıń ushın $r > 0$ bolǵanda $0^r = 0$ teńlik orınlı dep esaplanadı.

(1) hám (2) formulalardan paydalanıp, racional kórsetkishli dárejeyi koren túrinde hám kerisinshe súwretlewge de boladı.



(2) formula hám korenniń qaǵıydarınan

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mk}{nk}}$$

teńlik kelip shıǵıwın tastıyıqlaymız, bunda $a > 0$, m – pútin san hám n, k – natural sanlar.

Máselen, $7^{\frac{3}{4}} = 7^{\frac{6}{8}} = 7^{\frac{9}{12}}$.



Natural kórsetkishli dárejeyiń barlıq qaǵıydaları qálegen racional kórsetkishli hám oń tiykarlı dárejeler ushın durıs bolıwın kórsetiwge boladı. Sebebi, qálegen racional p hám q sanlar hám qálegen $a > 0$ hám $b > 0$ ushın tómendegi teńlikler durıs boladı:

$$\begin{array}{ll} 1) a^p \cdot a^q = a^{p+q}; & 4) (ab)^p = a^p b^p; \\ 2) a^p : a^q = a^{p-q}; & 5) \left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}. \\ 3) (a^p)^q = a^{pq}; \end{array}$$

Bul qaǵıydalar korenniń qásiyetlerinen kelip shıǵadı. Máselen, $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ qaǵıydanı dálilleyik.

○ Aytayıq, $p = \frac{m}{n}$, $q = \frac{k}{l}$ (bunda n hám l – natural sanlar, m hám k – pútin sanlar) bolsın.

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{k}{l}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{k}{l}} \quad (3)$$

ekenligin dálillew kerek.

$\frac{m}{n}$ va $\frac{k}{l}$ bólsheklerdi ulıwma bólimge keltirip, (3) teńliktiń shep bólegin

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{k}{l}} = a^{\frac{ml}{nl}} \cdot a^{\frac{kn}{nl}}$$

kórinisinde jazamız.

Racional kórsetkishli dárejeniń anıqlamasınan, korenniń hám pútin kórsetkishli dárejeniń qaǵıydalarınan paydalanıp, tómendegini payda etemiz.:

$$\begin{aligned} a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{k}{l}} &= a^{\frac{ml}{nl}} \cdot a^{\frac{kn}{nl}} = \sqrt[nl]{a^{ml}} \cdot \sqrt[nl]{a^{kn}} = \\ &= \sqrt[nl]{a^{ml} \cdot a^{kn}} = \sqrt[nl]{a^{ml+kn}} = a^{\frac{ml+kn}{nl}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{k}{l}}. \end{aligned}$$

Racional kórsetkishli dárejeniń qalǵan qásiyetleri de usıǵan uqsas túrde dálillenedi.

Dárejeniń qásiyetlerin qollanıwǵa mısıl keltiremiz.

- 1) $7^{\frac{1}{4}} \cdot 7^{\frac{3}{4}} = 7^{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 7;$ $5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{2}{3}} = 5^{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}} = 5^1 = 5;$
- 2) $9^{\frac{2}{3}} : 9^{\frac{1}{6}} = 9^{\frac{2}{3} - \frac{1}{6}} = 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3;$ $8^{\frac{2}{3}} : 8 = 8^{\frac{2}{3} - 1} = 8^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2};$
- 3) $\left(16^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{9}{4}} = 16^{\frac{1}{3} \cdot \frac{9}{4}} = 16^{\frac{3}{4}} = (2^4)^{\frac{3}{4}} = 2^{4 \cdot \frac{3}{4}} = 2^3 = 8;$
- 4) $24^{\frac{2}{3}} = (2^3 \cdot 3)^{\frac{2}{3}} = 2^{3 \cdot \frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} = 4\sqrt[3]{3^2} = 4\sqrt[3]{9};$
- 5) $\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{8^{\frac{1}{3}}}{27^{\frac{1}{3}}} = \frac{(2^3)^{\frac{1}{3}}}{(3^3)^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3};$ $\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{2^4}{3^4}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{4 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}.$

2-másele. Esaplań: $25^{\frac{1}{5}} \cdot 125^{\frac{1}{5}}.$

$$\triangle 25^{\frac{1}{5}} \cdot 125^{\frac{1}{5}} = (25 \cdot 125)^{\frac{1}{5}} = (5^5)^{\frac{1}{5}} = 5. \blacktriangle$$

3-másele. Anlatpanı ápiwayılastırın: $\frac{a^{\frac{4}{3}}b + ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}.$

$$\triangle \frac{a^{\frac{4}{3}}b + ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} = \frac{ab\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right)}{\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{b^{\frac{1}{3}}}} = ab. \blacktriangle$$

4- m á s e l e. Аñлатпанı áпиwayılastırın: $\frac{a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{7}{3}}}{\frac{1}{a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{4}{3}}} - \frac{a^{-\frac{1}{3}} - a^{\frac{5}{3}}}{\frac{2}{a^{\frac{1}{3}} + a^{-\frac{1}{3}}}}.$

$$\begin{aligned} \triangle \frac{a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{7}{3}}}{\frac{1}{a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{4}{3}}} - \frac{a^{-\frac{1}{3}} - a^{\frac{5}{3}}}{\frac{2}{a^{\frac{1}{3}} + a^{-\frac{1}{3}}}} &= \frac{a^{\frac{1}{3}}(1 - a^2)}{\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}(1 - a)} - \frac{a^{-\frac{1}{3}}(1 - a^2)}{a^{-\frac{1}{3}}(1 + a)}} = \\ &= 1 + a - (1 - a) = 2a. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

$3^{\sqrt{2}}$ mısasında *irrational kórsetkishli dárejeni* qalay kirgiziw múmkinligin kórsetemiz. $\sqrt{2}$ niń juwıq mánilerin 0,1; 0,01; 0,001 ...ge shekem anıqlıq penen izbe-iz jazıp shıgamız. Onda tómendegi izbe-izlik payda boladı

$$1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; \dots$$

3 sanınıń dáreje kórsetkishleri izbe-izligin usı racional kórsetkishler menen jazıp shıgamız:

$$3^{1,4}; 3^{1,41}; 3^{1,414}; 3^{1,4142}; \dots$$

Bul dárejeler $3^{\sqrt{2}}$ sıyaqlı belgilengen haqıyqıy sannıń izbe-iz juwıq mánileri ekenin kórsetiw múmkin:

$$3^{1,4} = \underline{4}, 6555355,$$

$$3^{1,41} = \underline{4}, 7069644,$$

$$3^{1,414} = \underline{4}, 7276942,$$

$$3^{1,442} = \underline{4}, 7287329,$$

$$3^{\sqrt{2}} \approx \underline{4}, 7288033.$$

Oń a tiykarlı hám qálegen irrational kórsetkishli a^b dáreje usıǵan uqsas anıqlanadı. Solay etip, endi oń tiykarlı dáreje qálegen haqıyqıy kórsetkish ushın anıqlanadı. Haqıyqıy kórsetkishli dárejenıń qaqıydaları racional kórsetkishli dárejenıń qaqıydaları sıyaqlı anıqlanadı.

Shinigiwlar

115. (Awizeki). Racional kórsetkishli dáreje túrinde anıqlañ:

1) $\sqrt{x^3}$; 2) $\sqrt[3]{a^4}$; 3) $\sqrt[4]{b^3}$; 4) $\sqrt[5]{x^{-1}}$; 5) $\sqrt[6]{a}$; 6) $\sqrt[7]{b^{-3}}$.

116. (Awizeki). Pútin kórsetkishli dáreje koreni túrinde anıqlañ::

1) $x^{\frac{1}{4}}$; 2) $y^{\frac{2}{5}}$; 3) $a^{-\frac{5}{6}}$; 4) $b^{-\frac{1}{3}}$; 5) $(2x)^{\frac{1}{2}}$; 6) $(3b)^{-\frac{2}{3}}$.

Esaplañ (**117–120**):

117. 1) $64^{\frac{1}{2}}$; 2) $27^{\frac{1}{3}}$; 3) $8^{\frac{2}{3}}$;

4) $81^{\frac{3}{4}}$; 5) $16^{-0,75}$; 6) $9^{-1,5}$.

118. 1) $2^{\frac{4}{5}} \cdot 2^{\frac{11}{5}}$; 2) $5^{\frac{2}{7}} \cdot 5^{\frac{5}{7}}$; 3) $9^{\frac{2}{3}} : 9^{\frac{1}{6}}$; 4) $4^{\frac{1}{3}} : 4^{\frac{5}{6}}$;

5) $(7^{-3})^{-\frac{2}{3}}$; 6) $\left(8^{\frac{1}{12}}\right)^{-4}$; 7) $8^{\frac{4}{5}} : 8^{\frac{7}{15}}$; 8) $(5^{-4})^{-\frac{3}{4}}$.

119. 1) $9^{\frac{2}{5}} \cdot 27^{\frac{2}{5}}$; 2) $7^{\frac{2}{3}} \cdot 49^{\frac{2}{3}}$; 3) $144^{\frac{3}{4}} : 9^{\frac{3}{4}}$; 4) $150^{\frac{3}{2}} : 6^{\frac{3}{2}}$.

120. 1) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} + \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}$; 2) $(0,04)^{-1,5} - (0,125)^{-\frac{2}{3}}$;

3) $8^{\frac{9}{7}} : 8^{\frac{2}{7}} - 3^{\frac{6}{5}} \cdot 3^{\frac{4}{5}}$; 4) $\left(5^{-\frac{2}{5}}\right)^{-5} + \left((0,2)^{\frac{3}{4}}\right)^{-4}$.

121. Esaplañ:

1) $a=0,09$ bolganda $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[6]{a}$ nín mánisin;

2) $b=27$ bolganda $\sqrt{b} : \sqrt[6]{b}$ nín mánisin;

3) $b=1,3$ bolganda $\frac{\sqrt{b} \cdot \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[6]{b}}$ nín mánisin;

4) $a=2,7$ bolganda $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[12]{a^5}$ nín mánisin..

122. Racional kórssetkishli dáreje túrinde anıqlań:

$$\begin{array}{lll} 1) a^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{a}; & 2) b^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{b}; & 3) \sqrt[3]{b} : b^{\frac{1}{6}}; \\ 4) a^{\frac{4}{3}} : \sqrt[3]{a}; & 5) x^{1,7} \cdot x^{2,8} : \sqrt{x^5}; & 6) y^{-3,8} : y^{-2,3} \cdot \sqrt{y^3}. \end{array}$$

Anıqlamanı ápiwayılastırń (**123–124**):

123. 1) $(a^4)^{-\frac{3}{4}} \cdot (b^{-\frac{2}{3}})^{-6}$; 2) $\left(\left(\frac{a^6}{b^{-3}} \right)^4 \right)^{\frac{1}{12}}$; 3) $(a^{-7})^{-\frac{5}{7}} \cdot (b^{-\frac{3}{4}})^{-4}$.

124. 1) $\frac{a^{\frac{4}{3}}(a^{-\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}})}{a^{\frac{1}{4}}(a^{\frac{3}{4}} + a^{-\frac{1}{4}})}$; 2) $\frac{b^{\frac{1}{5}}(\sqrt[5]{b^4} - \sqrt[5]{b^{-1}})}{b^{\frac{2}{3}}(\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{b^{-2}})}$; 3) $\frac{a^{\frac{5}{3}}b^{-1} - ab^{-\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2}}$;
4) $\frac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b} + b^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}}$; 5) $\frac{a^{-\frac{1}{3}}(a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{4}{3}})}{a^{\frac{2}{5}}(a^{\frac{8}{5}} - a^{-\frac{2}{5}})}$; 6) $\frac{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}}{\sqrt[6]{a} - \sqrt[6]{b}}$.

125. Esaplań:

$$1) \left(2^{\frac{5}{3}} \cdot 3^{-\frac{1}{3}} - 3^{\frac{5}{3}} \cdot 2^{-\frac{1}{3}} \right) \cdot \sqrt[3]{6}; \quad 2) \left(5^{\frac{1}{4}} : 2^{\frac{3}{4}} - 2^{\frac{1}{4}} : 5^{\frac{3}{4}} \right) \cdot \sqrt[4]{1000}.$$

126. Anıqlamanı ápiwayılastırń:

$$\begin{array}{lll} 1) a^{\frac{1}{9}}\sqrt[6]{a^3\sqrt{a}}; & 2) b^{\frac{1}{12}}\sqrt[3]{b^4\sqrt{b}}; & 3) (\sqrt[3]{ab^{-2}} + (ab)^{-\frac{1}{6}})\sqrt[6]{ab^4}; \\ 4) (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} - \sqrt[3]{ab}); & 5) \frac{x-y}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}; & 6) \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\frac{1}{a^4}-\frac{1}{b^4}}; \\ 7) \frac{m^2+n^2}{m+2\sqrt{mn}+n}; & 8) \frac{c-2c^2+1}{\sqrt{c}-1}; & 9) (\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})(a^{\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{ab} + b^{\frac{2}{3}}). \end{array}$$

Anıqlamanı ápiwayılastırń (**127–129**):

127. 1) $\left(1 - 2\sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{b}{a} \right) : \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}} \right)^2$; 2) $\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}} \right) : \left(2 + \sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}} \right)$;

$$3) \frac{a^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{9}{4}}}{\frac{1}{a^4} - a^{\frac{5}{4}}} - \frac{b^{-\frac{1}{2}} - b^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{b^2} - b^{-\frac{1}{2}}};$$

$$4) \frac{\sqrt{a} - a^{-\frac{1}{2}}b}{1 - \sqrt{a^{-1}}b} - \frac{\sqrt[3]{a^2} - a^{-\frac{1}{3}}b}{\sqrt[6]{a} + a^{-\frac{1}{3}}\sqrt{b}}.$$

$$128. 1) \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{ab^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{b} - \sqrt{a}} - \frac{2a^2 - 4ab}{a - b};$$

$$2) \frac{3xy - y^2}{x - y} - \frac{y\sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} - \frac{y\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}};$$

$$3) \frac{1}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} - \frac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}{a^{\frac{2}{3}} - \sqrt[3]{ab} + b^{\frac{2}{3}}};$$

$$4) \frac{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}} - \frac{a - b}{a^{\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{ab} + b^{\frac{2}{3}}}.$$

$$129. 1) \frac{a - b}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}} - \frac{a + b}{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}};$$

$$2) \frac{\frac{a+b}{\frac{2}{a^3} - \frac{1}{a^3b^3} + b^{\frac{2}{3}}} - \frac{a-b}{\frac{2}{a^3} + \frac{1}{a^3b^3} + b^{\frac{2}{3}}}}{a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{a^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{a^3b^3} + b^{\frac{2}{3}}}.$$

$$3) \frac{a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}{a - b} - \frac{1}{a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}};$$

$$4) \frac{a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}}{a + b} + \frac{1}{a^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{a^3b^3} + b^{\frac{2}{3}}}.$$

10-§. RACIONAL KÓRSETKISHLI DÁREJE QATNASQAN ALGEBRALÍQ AÑLATPALARDÍ ÁPIWAYÍLASTIRÍN

Bul temağa tiyisli esapları orinlawda algebralıq bólshekler hám olar ústinde esaplar, qısqa kóbeytiw formulaları hám racional kórsetkishli dárejeniń qagıydalarınan paydalanıladı.

1-másele. Añlatpanı ápiwayılastırın:

$$\left[\frac{(x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}})^2 + (x^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{1}{4}})^2}{x + (xy)^{\frac{1}{2}}} \right]^5 \cdot x^3 \cdot \sqrt[3]{x\sqrt{x}}, \quad x > 0, \quad y > 0.$$

$$\triangle 1) \sqrt[3]{x\sqrt{x}} = \sqrt[3]{\sqrt{x^3}} = \sqrt[6]{x^3} = \sqrt{x};$$

2) kvadrat qawsırmalar ishindegi añlatpanıń alımın kvadratqa kóteremiz

hám $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ ekeninen paydalanamız:

$$\sqrt{x} + 2\sqrt[4]{xy} + \sqrt{y} + \sqrt{x} - 2\sqrt[4]{xy} + \sqrt{y} = 2(\sqrt{x} + \sqrt{y});$$

3) usi a'latpani'ni b'limine $\sqrt{x}$ qawsirmadan sirtqa shigaramiz:

$$x + \sqrt{xy} = \sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{y});$$

4) Onda $\frac{2(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{y})} = \frac{2}{\sqrt{x}};$

5) $\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^5 \cdot x^3 \sqrt{x} = \frac{32}{x^2 \sqrt{x}} \cdot x^3 \sqrt{x} = 32 \cdot x$

Juwabi: $32 \cdot x$. ▲

2-másele. A'latpani ápiwayilastirini hám oni'ni $x = 0,16$, $y = 25$ bolgandagi san mánisin tabiri:

$$\left(\frac{4\sqrt[3]{x^3y} - 4\sqrt[3]{xy^3}}{\sqrt{y} - \sqrt{x}} + \frac{1 + \sqrt{xy}}{4\sqrt[3]{xy}} \right)^{-2} \cdot \left(1 + 2\sqrt{\frac{y}{x} + \frac{y}{x}} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad x > 0, \quad y > 0.$$

△ 1) $\frac{4\sqrt[3]{x^3y} - 4\sqrt[3]{xy^3}}{\sqrt{y} - \sqrt{x}} = \frac{4\sqrt[3]{xy} \cdot (\sqrt{x} - \sqrt{y})}{\sqrt{y} - \sqrt{x}} = -4\sqrt[3]{xy};$

2) $-4\sqrt[3]{xy} + \frac{1 + \sqrt{xy}}{4\sqrt[3]{xy}} = \frac{-\sqrt[3]{xy} + 1 + \sqrt{xy}}{4\sqrt[3]{xy}} = \frac{1}{4\sqrt[3]{xy}};$

3) $\left(\frac{1}{4\sqrt[3]{xy}} \right)^{-2} = \sqrt{xy};$

4) $\left(1 + 2\sqrt{\frac{y}{x} + \frac{y}{x}} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\left(1 + \sqrt{\frac{y}{x}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \sqrt{\frac{y}{x}};$

5) $\sqrt{xy} \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{y}{x}} \right) = \sqrt{xy} + y.$

Eger $x = 0,16$ hám $y = 25$ bolsa, $\sqrt{0,16 \cdot 25} + 25 = \sqrt{4} + 25 = 27.$

Juwabi: $\sqrt{xy} + y$; 27. ▲

3-másele. Anlatpani ápiwayılastırın hám onıń $a = 25$, $b = 0,6561$ bolǵandaǵı san mánisin tabıń:

$$\frac{(\sqrt[8]{a} + \sqrt[8]{b})^2 + (\sqrt[8]{a} - \sqrt[8]{b})^2}{a - \sqrt{ab}} : \frac{(\sqrt[4]{a} + \sqrt[8]{ab} + \sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a} - \sqrt[8]{ab} + \sqrt[4]{b})}{\sqrt[4]{a^3b - b}}.$$

△ 1) 1-bólshektiń kvadratına kóteremiz, bóliminde $\sqrt{a}$ di qawsır madan sırtqa shıǵaramız. Ápiwayılastırılǵannan soń 1-bólshek $\frac{2}{\sqrt{a}(\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b})}$ ge teń boladı;

2) 2-bólshektiń alımı qısqa kóbeytiw formulalarınan paydalanıp qawsırmalardı ashqannan keyin $\sqrt{a} + \sqrt[4]{ab} + \sqrt{b}$ anlatpa payda boladı;

3) bólimine bolsa $\sqrt[4]{b}$ qawsırmadan sırtqa shıǵarıladı hám $(x^3 - y^3)$ nıń jayılasınan paydalanılardı. 2-bólshek sonda $\frac{1}{\sqrt[4]{b}(\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b})}$ ǵa teń boladı;

4) nátiyjede, 1-bólshekti 2-bólshekke bóliw $\frac{2\sqrt[4]{b}}{\sqrt{a}}$ anlatpaǵa teń boladı.

$a = 25$, $b = 0,6561$ bolsa, bul anlatpa $\frac{2\sqrt[4]{0,6561}}{\sqrt{25}} = \frac{2}{5} \cdot 0,9 = 0,36$ ǵa teń.

Juwapı: $\frac{2\sqrt[4]{b}}{\sqrt{a}}$; 0,36. ▲

Shınıǵıwlar

Anlatpanı ápiwayılastırın (130–146):

130. $\left[\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \left(\frac{1}{a^2} + 5\frac{1}{b^2} \right) - \left(\frac{1}{a^2} + 2\frac{1}{b^2} \right) \left(\frac{1}{a^2} - 2\frac{1}{b^2} \right) \right] : \left(2a + 3a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} \right).$

131. $\left[\frac{(\sqrt{a}+1)^2 - \frac{a-\sqrt{ax}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}}{(\sqrt{a}+1)^3 - a\sqrt{a}+2} \right]^{-3}.$

$$132. \left[\frac{4a-9a^{-1}}{\frac{1}{2a^2}-3a} + \frac{a-4+3a^{-1}}{\frac{1}{a^2}-a} \right]^2.$$

$$133. \left[(a-b)\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} + a-b \right] \left[(a-b) \left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} - 1 \right) \right].$$

$$134. \left(\sqrt{ab} - \frac{ab}{a+\sqrt{ab}} \right) : \frac{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{b}}{a-b}.$$

$$135. \left(a + b^{\frac{3}{2}} : \sqrt{a} \right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \right)^{-\frac{2}{3}}.$$

$$136. \left[\frac{1}{\frac{1}{x^2}-4x} + \frac{2\sqrt[3]{x}}{x\sqrt[3]{x}-4\sqrt[3]{x}} \right]^{-2} - \sqrt{x^2+8x+16}.$$

$$137. \left(\frac{\sqrt[4]{ax^3}-\sqrt[4]{a^3x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}} + \frac{1+\sqrt{ax}}{\sqrt[4]{ax}} \right)^{-2} \sqrt{1+2\sqrt{\frac{a}{x}+\frac{a}{x}}}.$$

$$138. \frac{(a-b^2)\sqrt{3}-b\sqrt{3}\sqrt[3]{-8b^3}}{\sqrt{2(a-b^2)^2+(2b\sqrt{2a})^2}} \cdot \frac{\sqrt{2a}-\sqrt{2c}}{\sqrt{\frac{3}{a}}-\sqrt{\frac{3}{c}}}.$$

$$139. \left[\left(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{a} \right)^{-1} + \left(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{a} \right)^{-1} \right]^{-2} : \frac{x-a}{4\sqrt{x}+4\sqrt{a}}.$$

$$140. \frac{\left(\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \right)^3 + 2a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{3a^2+3b\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab}-a}{a\sqrt{a}-b\sqrt{a}}.$$

$$141. \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3 + 2a^2:\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}} + \frac{3\sqrt{ab}-3b}{a-b}.$$

$$142. \left(\frac{1}{\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}} \right)^{-2} \left(\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}} \right)^{-1}} \right) (ab)^{-\frac{1}{2}}.$$

$$143. \left[\left(\frac{a^2 - b\sqrt{a}}{\sqrt{a} - \sqrt[3]{b}} + a\sqrt[3]{b} \right) : \left(a + \sqrt[6]{a^3 b^2} \right) - \sqrt[3]{b} \right]^2.$$

$$144. \left[\frac{a^2 \sqrt[4]{x} + x\sqrt{a}}{a\sqrt[4]{x} + \sqrt{ax}} - \sqrt{a^2 + x + 2a\sqrt{x}} \right]^4.$$

$$145. \left[\frac{x\sqrt{x} - x}{\left(\frac{\sqrt[4]{x^3} - 1}{\sqrt{x} - 1} \right) \left(\frac{\sqrt[4]{x^3} + 1}{\sqrt{x} + 1} \right)} \right]^3.$$

$$146. \frac{\frac{a+x}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{x^2}} + \frac{\sqrt[3]{ax^2} - \sqrt[3]{a^2x}}{\sqrt[3]{a^2} - 2\sqrt[3]{ax} + \sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[6]{a} - \sqrt[6]{x}} - \sqrt[6]{x}.$$

I bapqa tiyisli shiniqlar

Bólsheklerdi ulıwma bólimge keltirín:

$$147. 1) \frac{5a}{a^3 - 27}, \frac{a-3}{a^2 + 3a + 9} \text{ va } \frac{1}{a-3}; \quad 2) \frac{3}{x+2}, \frac{x+1}{x^3 + 8} \text{ va } \frac{x+2}{x^2 - 2x + 4}.$$

Ámellerdi orınlań (148–149):

$$148. 1) \frac{a+3}{5} + \frac{7+a}{10} + \frac{a-3}{2}; \quad 3) \frac{a-2}{45} - \frac{a+5}{15} - \frac{a-9}{9};$$

$$2) \frac{b-7}{4} + \frac{5b-2}{3} + \frac{3b-1}{8}; \quad 4) \frac{b}{12} - \frac{3b+1}{9} - \frac{2b-1}{4}.$$

149. 1) $\frac{y}{n-2} + \frac{z}{2-n};$

3) $\frac{2m}{3-5n} - 1 + \frac{7n-4}{5n-3};$

2) $\frac{p+2q}{3p-q} - \frac{5q-2p}{q-3p};$

4) $4 - \frac{3a}{5-2b} + \frac{5(a-10)}{2b-5}.$

Berilgen esapladi orinlañ (150–152):

150. 1) $\frac{a^2 - 2ab + b^2}{a^2 - ab + b^2} : \frac{8a - 8b}{a^3 + b^3};$

2) $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 + ab + b^2} \cdot \frac{a^3 - b^3}{7a + 7b}.$

151. 1) $\frac{64x^2 - 1}{x^2 - 4} \cdot \frac{(x+2)^2}{x^2 - 4} \cdot \frac{(x-2)^2}{8x+1};$

2) $\frac{x-6}{x^2 + 6x + 9} \cdot \frac{x^2 + 4x + 4}{(x^2 + 2)(x-2)} \cdot \frac{x^3 - 9x}{(x-6)(x+2)};$

3) $\frac{am^2 - an^2}{m^2 + 2mn + n^2} : \frac{am^2 + 2amn + an^2}{3m + 3n};$

4) $\frac{ab - 4b - 2a + 8}{2a + 8 - ab - 4b} : \frac{2a - 8 - ab + 4b}{ab + 4b - 2a - 8}.$

152. 1) $(x^2 - 1) \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{1+x} + 1 \right);$

3) $\left(\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y} \right) : \left(\frac{x-y}{x+y} + \frac{x+y}{x-y} \right);$

2) $\left(1 + a - \frac{a^2 + 3}{a+1} \right) (1 - a^2);$

4) $\left(\frac{2-a}{2+a} - \frac{a+2}{a-2} \right) : \left(\frac{2+a}{2-a} + \frac{a-2}{a+2} \right).$

Esaplañ (153–154):

153. 1) $(0,175)^0 + (0,36)^{-2} - 1^{\frac{4}{3}};$

2) $1^{-0,43} - (0,008)^{\frac{1}{3}} + (15,1)^0;$

3) $\left(\frac{4}{5} \right)^{-2} - \left(\frac{1}{27} \right)^{\frac{1}{3}} + 4 \cdot 379^0;$

4) $(0,125)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{3}{4} \right)^2 - (1,85)^0.$

154. 1) $9,3 \cdot 10^{-6} : (3,1 \cdot 10^{-5});$

2) $1,7 \cdot 10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^7;$

3) $8,1 \cdot 10^{16} \cdot 2 \cdot 10^{-14};$

4) $6,4 \cdot 10^5 : (1,6 \cdot 10^7);$

$$5) 2 \cdot 10^{-1} + \left(6^0 - \frac{1}{6}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{-1};$$

$$6) 3 \cdot 10^{-1} - \left(8^0 - \frac{1}{8}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{-1}.$$

155. А'латпани' м'анисин таби'и:

$$1) \left(\frac{x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{5}{6}}}{x^{\frac{1}{6}}}\right)^{-2}, \text{ bunda } x = \frac{7}{9}; \quad 2) \left(\frac{a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{9}}}{a^{-\frac{2}{9}}}\right)^{-3}, \text{ bunda } a = 0,1.$$

156. А'латпани 'апиwayыластыри'и:

$$1) (\sqrt[3]{125x} - \sqrt[3]{8x}) - (\sqrt[3]{27x} - \sqrt[3]{64x}); \quad 3) \left(\frac{3}{\sqrt{1+a}} + \sqrt{1-a}\right) : \frac{3+\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}};$$

$$2) (\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{16x}) + (\sqrt[4]{81x} - \sqrt[4]{625x}); \quad 4) \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}\right) : (\sqrt{x^2 - y^2} - x).$$

157. Esapла'и:

$$1) \left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} + 10000^{0,25} - \left(7\frac{19}{32}\right)^{\frac{1}{5}}; \quad 2) (0,001)^{-\frac{1}{3}} - 2^{-2} \cdot 64^{\frac{2}{3}} - 8^{-1\frac{1}{3}};$$

$$3) 27^{\frac{2}{3}} - (-2)^{-2} + \left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}; \quad 4) (-0,5)^{-4} - 625 - \left(2\frac{1}{4}\right)^{-1\frac{1}{2}}.$$

158. x ти' qanday м'анилеринде а'латпа м'аниге iye болады:

$$1) \sqrt[4]{x^2 - 4}; \quad 2) \sqrt[3]{x^2 - 5x + 6}; \quad 3) \sqrt[6]{\frac{x-2}{x+3}};$$

$$4) \sqrt[4]{x^2 - 5x + 6}; \quad 5) \sqrt[8]{x^3 - x}; \quad 6) \sqrt[6]{x^3 - 5x^2 + 6x}?$$

159. А'латпани 'апиwayыластыри'и:

$$1) \frac{a^{\frac{1}{4}} - a^{-\frac{7}{4}}}{a^{\frac{1}{4}} - a^{-\frac{3}{4}}}; \quad 2) \frac{a^{\frac{4}{3}} - a^{-\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}} - a^{-\frac{2}{3}}}; \quad 3) \frac{b^{\frac{5}{4}} + 2b^{\frac{1}{4}} + b^{-\frac{3}{4}}}{b^{\frac{3}{4}} - b^{-\frac{1}{4}}};$$

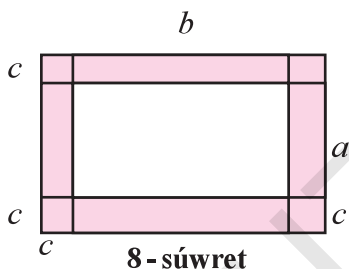
$$4) \frac{a^{-\frac{4}{3}}b^{-2} - a^{-2}b^{-\frac{4}{3}}}{a^{-\frac{5}{3}}b^{-2} - b^{-\frac{5}{3}}a^{-2}}; \quad 5) \frac{\sqrt{a^3b^{-1}} - \sqrt{a^{-1}b^3}}{\sqrt{ab^{-1}} - \sqrt{a^{-1}b}}; \quad 6) \frac{a^{\frac{3}{4}}b^{-\frac{1}{4}} - a^{-\frac{1}{4}}b^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{1}{4}}b^{-\frac{1}{4}} - a^{-\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}}.$$

160. 1) Berilgen ólshemler boyınsha boyalgan bólektiń maydanın esaplaw formulasın shıǵarın (8-súwret);

$$2) \quad 2bc + 2c(a - 2c) = 2ac + 2c(b - 2c)$$

teńliktiń durıslıǵın forma járdeminde kórsetin;

3) shtrixlangan betti eki tuwrı tórt múyeshlik betleriniń alıwı sıpatında sıpatlań. Bunnan paydalanıp, $ab - (b - 2c)(a - 2c) = 2ac + 2c \cdot (b - 2c)$ teńlikti dálilleń.



161. Teńliklerdiń durıslıǵın tekserin, olarǵa geometriyalıq sıpatlama berin. Sáykes figuralar sızın:

$$1) \quad (a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd;$$

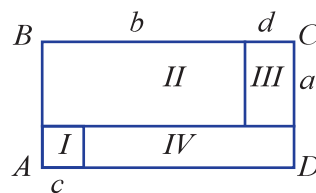
$$2) \quad (a + b)(c - d) = ac + bc - ad - bd;$$

$$3) \quad (a + b + c)(d + l) = ad + bd + cd + al + bl + cl.$$

162. 1) Teńliklerdiń durıslıǵın dálilleń:

$$c^2 + b(a - c) + (b + d - c)c + d(a - c) = a(b + d).$$

2) $ABCD$ tuwrı tórtmúyeshlik betin esaplaw ushın eki ańlatpa dúzin (9-súwret). $ABCD$ tuwrı tórtmúyeshliktiń beti I, II, III, IV tuwrı tórt múyeshlikler betleri qosındısına teńliginen paydalanın hám 1-teńlikke geometriyalıq sıpatlama berin..



9-súwret



№2

N sanınıń cifrlarınıń qosındısı 2006 ǵa teń.

N sandı eki óz ara teń sanlar kóbeymesi

kórinisinde súwretlewge bola ma?

ÓZINIZDI TEKSERIP KÓRIN

1. Háriplerdiń bólshek mánige iye bolatuǵın mánilerin tabıń:

$$\frac{a}{b}; \frac{3}{c-1}; \frac{k}{d+2}.$$

2. Ámellerdi orınlań:

$$1) 4a + \frac{1-4a^2}{a};$$

$$2) \frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b};$$

$$3) \frac{2a-4}{3b} \cdot \frac{6b}{a-2};$$

$$4) \frac{a^2-b^2}{b^2} : \frac{a+b}{b}.$$

3. Ańlatpanı ápiwayılastırın hám onıń $x = 2\frac{2}{3}$ bolǵandaǵı san mánisin tabıń:

$$\frac{1+2x}{x-3} - \frac{x^2+3x}{5} \cdot \frac{10}{x^2-9}.$$

4. Esaplań:

$$1) 3^{-5} : 3^{-7} - 2^{-2} \cdot 2^4 + \left(\left(\frac{2}{3} \right)^{-1} \right)^3;$$

$$2) \sqrt[5]{3^{10} \cdot 32} - \frac{\sqrt[3]{48}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3}};$$

$$3) 25^{\frac{3}{2}} \cdot 25^{-1} + (5^3)^{\frac{2}{3}} : 5^3 - 48^{\frac{2}{3}} : 6^{\frac{2}{3}};$$

$$4) 4^{-7} : 4^{-10} - 3^{-2} \cdot 3^5 + \left(\frac{1}{2} \right)^{-2}.$$

5. Ańlatpalardı ápiwayılastırın:

$$1) \frac{3x^{-9} \cdot 2x^5}{x^{-4}};$$

$$2) (x^{-1} + y^{-1}) \left(\frac{1}{xy} \right)^{-2};$$

$$3) \frac{2a^{-8} \cdot 4a^3}{16 \cdot a^{-5}}.$$

6. $\frac{a^{\frac{5}{3}}}{\sqrt[3]{a^5} \cdot a^{-\frac{3}{4}}}$ ańlatpanı ápiwayılastırın hám $a = 81$ bolǵanda onıń san mánisin tabıń.



I bahqa tiyisli sinaw esaplari – testler

1. Bólshekti qisqartıń: $\frac{27a^2 - 36ab + 12b^2}{9a^2 - 4b^2}$.

A) $\frac{3(3a-2b)}{3a+2b}$; B) $\frac{3a-2b}{3a+2b}$; C) $\frac{39-36ab}{5}$; D) $\frac{3a^2 - 36ab + 3b^2}{a^2 - b^2}$.

2. Bólshekti qisqartıń $\frac{7a^2(ab^2 - 9a)}{3a(21a - 7ab)}$.

A) $\frac{7a(ab^2 - 9a)}{3(21a - 7ab)}$; B) $\frac{-a(b+3)}{3}$; C) $\frac{7(ab^2 - 9a)}{3(21 - 7b)}$; D) $\frac{a(b-3)}{3}$.

3. Ámellerdi orınlań: $\frac{4}{a+b} + \frac{5}{a-b} - \frac{10b}{a^2 - b^2}$.

A) $\frac{9}{a-b}$; B) $\frac{9}{a+b}$; C) $\frac{-9}{a+b}$; D) $\frac{9(a+b)}{a-b}$.

4. Bólshekten bólshekti alıń: $\frac{a^2 + 9}{a^3 + 27} - \frac{1}{a+3}$.

A) $\frac{1}{a^2 + 9}$; B) $\frac{3}{a^2 + 9}$; C) $\frac{a}{a^3 + 9}$; D) $\frac{3a}{a^3 + 27}$.

5. Bólsheklerdi kóbeytın: $\frac{9a^2 - 16b^2}{6a + 8b} \cdot \frac{6a^2}{12b - 9a}$.

A) a^2 ; B) $-a^2$; C) $\frac{a^2}{3a-4b}$; D) $\frac{6}{3a+4b}$.

6. Bólsheklerdi bólıń: $\frac{4a^2 - 20ab + 25b^2}{5b+4} : \frac{(2a-5b)^2}{25b^2 - 16}$.

A) $\frac{5b+4}{2a-5b}$; B) $\frac{2a-5b}{5b-4}$; C) $5b-4$; D) $5b+4$.

7. Bólsheklerdi qisqartín: $\frac{8a^2 - 22ab + 15b^2}{16a^2 - 25b^2}$.

A) $\frac{2a-3b}{4a+5b}$; B) $\frac{2a+3b}{4a-5b}$; C) $\frac{4a-5b}{4a+5b}$; D) $\frac{4a+3b}{2a-5b}$.

8. Bólsheklerdi alín: $\frac{9x^2+16}{27x^3+64} - \frac{1}{3x+4}$.

A) $\frac{9x^2+16}{3x+4}$; B) $\frac{-12x}{27x^3+64}$; C) $\frac{12x}{27x^3+64}$; D) $\frac{9x^2+4}{27x^3-64}$.

9. Ámellerdi orinlañ: $\frac{4}{3a+2b} - \frac{2}{2b-3a} + \frac{8b}{4b^2-9a^2}$.

A) $\frac{6}{3a-2b}$; B) $\frac{6}{3a+2b}$; C) $\frac{12a}{9a^2-4b^2}$; D) $\frac{12b}{2b-3a}$.

10. Esaplañ: $(-8)^2 - (-5)^3 - (12)^{-1}$.

A) $188\frac{11}{12}$; B) $-61\frac{1}{12}$; C) $189\frac{1}{12}$; D) $61\frac{1}{12}$.

11. Esaplañ: $(-0,2)^{-3} + (0,2)^{-2} - (-2)^{-2}$.

A) $-150\frac{1}{4}$; B) $-100\frac{1}{4}$; C) $99\frac{1}{4}$; D) 11,25.

12. Esaplañ: $\frac{\sqrt[3]{-16} + \sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{128}}{\sqrt[3]{-250}}$.

A) $\sqrt[3]{2}$; B) 1; C) -1; D) $\frac{9}{5}$.

13. Esaplañ: $\sqrt[4]{\frac{(4,15)^3 - (1,61)^3}{2,54}} + 4,15 \cdot 1,61$.

A) 3,4; B) 5,76; C) 24; D) 2,4.

14. Esaplañ: $\sqrt[3]{\frac{(2,08)^3 + (2,016)^3}{4,096}} - 2,08 \cdot 2,016$.

A) 0,16; B) 4,096; C) 1,6; D) 0,8.

15. Esaplañ: $\sqrt{2\sqrt{2}+1} \cdot \sqrt[4]{9-4\sqrt{2}}$. Kórsetpe: $\sqrt{a} \cdot \sqrt[4]{b} = \sqrt[4]{a^2 \cdot b}$.

- A) $\sqrt{7}$; B) $2\sqrt{15}$; C) $3-2\sqrt{2}$; D) 7.

16. Esaplañ: $\sqrt[3]{2-\sqrt{3}} \cdot \sqrt[6]{7+4\sqrt{3}}$. Kórsetpe: $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[6]{b} = \sqrt[6]{a^2 \cdot b}$.

- A) -1; B) 1; C) $3+2\sqrt{3}$; D) $5+3\sqrt{3}$.

17. Esaplañ: $\frac{\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}} \cdot (3-\sqrt{2})}{11-6\sqrt{2}}$. Kórsetpe: $\sqrt[3]{a} \cdot b = \sqrt[3]{a \cdot b^3}$.

- A) $5-\sqrt{2}$; B) $5\sqrt{2}$; C) -1; D) 1.

18. Esaplañ: $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$.

- A) 2; B) $\sqrt{2}$; C) $2\sqrt{2}$; D) -2.

19. Esaplañ: $\frac{\sqrt[3]{98} \cdot \sqrt[3]{-112}}{\sqrt[3]{500}}$.

- A) $-\sqrt[3]{4}$; B) 2,84; C) -2,8; D) -1,4.

20. $a=125$ bolganda $\sqrt{a} : \sqrt[6]{a}$ ańlatpanıń san mánisin tabıń:

- A) -25; B) 15; C) -5; D) 5.

21. $a=0,04$ bolganda $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[6]{a}$ ańlatpanıń san mánisin tabıń:

- A) 0,2; B) $\sqrt[3]{0,4}$; C) 0,4; D) -0,2.

22. Ańlatpanı ápiwayılastırın: $(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}) \cdot \left(a^{\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{ab} + b^{\frac{2}{3}}\right)$.

- A) $a+b$; B) $a-b$; C) a^3+b^3 ; D) a^3-b^3 .



Tariyxiy maǵlıwmatlar

Qısqa kóbeytiw formulaları, algebralıq bólsheklerge tiyisli maǵlıwmat áyyemgi dereklerde ushıraydı. Máselen, **al-Karajinniń** “Al-farxi”, Mısır alımı **Abu Komil** (850-930) dıń “Kitap al-jabr val-muqobala” shıǵarmalarında da algebralıq bólshekler úyrenilgen. Abu Komil, al-Xorezmiyden keyin algebraǵa tiyisli kitap jazǵan birinshi alım. Abu Komil óz shıǵarmasında

$$\left(\frac{a}{b}\right) \cdot b = a, \quad \frac{a}{b} = \frac{a^2}{ab}, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1, \quad \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2 + b^2}{ab}$$

sıyaqlı ápiwayı qatnaslarǵa da itibar beredi.

Algebralıq bólsheklerge I.Nyutonnıń “Ulıwma arifmetika” kitabında da jetkilikli orın ajratılǵan “ $\frac{a}{b}$ bólshek a nı b ǵa bóliw nátiyjesinde payda bolǵan

muǵdar bolıp esaplanadı. Tap usınday etip, $\frac{aa - bb}{a + x}$ muǵdar $ab - bb$ nı $a + x$ ǵa bóliw nátiyjesinde payda boladı”, – deydi Nyuton.

Racional kórsetkishli dáreje **I.Nyuton** (1643-1727) tárepinen kirgizilgen. Qálegen a haqıyqıy san ushın a^a , $a > 0$, dáreje túsiniǵı **L.Eyler** (1707-1783) dıń “Analizge kiriw” shıǵarmasında berilgen.

Abu Rayxan Beruniy óziniń tanıqlı “Qanuni Masudiy” shıǵarmasında “sheńber uzınlıǵınıń onıń diámetrine qatnası irracional san” ekenin aytadı. Áyyemgi Greciyada “eger kvadrattıń tárepi ólshew birligi etip alınsa, onıń diagonalın racional san menen sıpatlawǵa bolmawın” dálillegen. Biziń eramızǵa shekemgi V-IV ásirlerden-aq, áyyemgi grek alımları kvadrat bolmaǵan qálegen n natural san ushın $\sqrt[n]{n}$ sannıń irracional ekenin dálillegen.

Ǵiyosiddin Jamshid al-Koshiydiń “Arifmetika gılti” shıǵarmasında natural sannan koren shıǵarıwdıń ulıwma usılı bayan etilgen. $\sqrt[n]{a^n + r}$ korendi al-Koshiy juwıqlap $\sqrt[n]{a^n + r} \approx a + \frac{r}{(a+1)^n - a^n}$ kórinisinde sıpatlaydı, bunda a – natural san hám $r < (a+1)^n - a^n$.

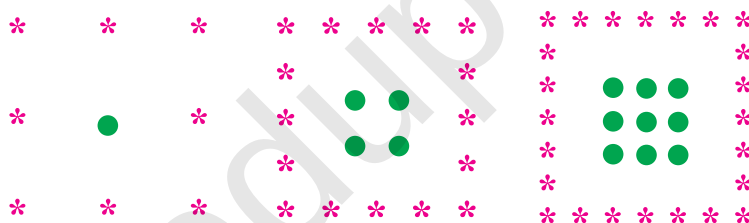
Al-Koshiy korendi anıǵıraq esaplaw ushın koren astındaǵı sandı 10 nıń sáykes dárejesine kóbeytiwdi usınıs etedi: $\sqrt[n]{N} = \frac{\sqrt[n]{10^{mn} \cdot N}}{10^m}$. Bólshekten koren shıǵarıwda bolsa, usı qaqıydadın paydalanıladı: $\sqrt[n]{\frac{M}{N}} = \frac{\sqrt[n]{M \cdot N^{n-1}}}{N}$.

Sonıń menen birge, al-Koshiy korenler kóbeymesin ulıwma kórsetkishke keltiriw qaqıydasın bayan etken:

$$\sqrt[k]{a} \cdot \sqrt[k]{b} = \sqrt[k]{a^k} \cdot \sqrt[k]{b^n} = \sqrt[k]{a^k \cdot b^n}.$$

Ámeliy-usınılǵan hám pánlerara baylanıslı máseleler

- 163.** Súwrettegi jasıl noqatlar menen biybaha sortlı miyweli terekler (máseleń, biybaha sortlı almurt) belgilengen. Almurtlar ólshemleri $n \times n$ (m^2) bolǵan kvadratlarǵa egilgen. Qızıl juldızshalar (*) arqalı bolsa, qorshalǵan terekler belgilengen.



Almurt baǵı átirapındaǵı qorshalǵan terekler kvadrat tárepleri boylap egilgen.

Sorawlarǵa juwap berin:

- 1) 20 m $\times$ 20 m; 2) 25 $\times$ 25 m ólshemli kvadratqa egilgen almurtlardı “orap” turıwshı qorshalǵan terekler sanı neshew?
- 3) Almurtlar sanı menen olardı “orap” turıwshı terekler sanı arasında qanday baylanıs bar?

- 164.** Joqarıdaǵı másele shártinde n nıń qanday mánilerinde n -kvadrat-taǵı almurtlar sanı olardı “orap” turıwshı terekler sanına:

- 1) teń; 2) úlken; 3) kishi boladı?

4) Kesteni toltirín hám analizleń. Juwmaq shıǵarín.

Kvadrat tárepiniń uzınlıǵı (m)	Almurtlar sanı	Qorshawshı terekler sanı
1	1	8
2	4	16
·	·	·
·	·	·
·	·	·
10	...	...

- 165.** Avtomobiller reytingin anıqlawda tómendegiler esapqa alınadı: qáwipsizligi (S), qolaylıǵı (C), hár túrli wazıypalardı orınlay alıwı (F), sapası (Q) hám dizayni (D). Bul kórsetkishlerdiń hár biri bahalanadı (máselen, ball beriledi). Avtomobil reytingi usı formula boyınsha esaplanadı:

$$R = \frac{3S + 2C + 2F + 2Q + D}{50}.$$

Kestede avtomobillerdiń 3 túrli markası (shártli túrde A , B , D markalar) ushın hár qıylı kórsetkishlerdiń bahası keltirilgen.

Avtomobil túri	Qáwipsizligi S	Qolaylıq C	Hár túrli wazıypalardı orınlay alıwı F	Sapası Q	Dizayn D
A	3	3	5	5	3
B	4	5	3	4	3
D	4	4	3	3	4

- 1) Qaysı markadaǵı avtomobil eń úlken reytingge iye?
- 2) Avtomobil markaların reytingin kemeyip barıwı tártibinde jaylastırın.
- 3) Siz ushın qaysı kórsetkish áhmiyetli? Nege?
- 4) Siz qanday reytingli avtomobildi tańlar ediniz? Nege?

- 166.** Dem alıw, awqat sińiriw, qan aylanısı ushın kerekli energiya – almasıw intensivligi (tezligi) bolıp esaplanadı.

Tiykargı almasıw intensivligin (AAI) dep belgileyik. AAI kaloriyalarda ólshenedi, bunda adam temperaturası 23°C bolğan xanada biymálel hám tınısh halatta jatqan bolıwı kerek. Hayallarda AAI tómendegi formula tiykarında esaplanadı:

$$AAI = 9,74M + 172,9P - 4,737B + 667,051, \quad (*)$$

bunda M – hayaldın massası, P – boyınıń uzınlığı (metrlerde), B – jası (jıllarda).

- 1) Eger $M = 60$ kg, $P = 1,7$ m, $B = 35$ jıl bolsa, AAI nı esaplań (eń jaqın pútin sanğa shekem dóńgeleklen).
- 2) (*) formuladan hayaldın massası, boyı hám jası AAI ğa qanday tásir etiwın bilip alıwğa boladı.

Sorawlarğa juwap berin:

- a) Jası mingen sayın AAI da kóterileme?
- b) Boyınıń uzın-kelteligi AAI ğa qalay tásir etedi?
- d) 667, 051 sanı hayaldın jasına, boyına, massasına baylanıslı ma?
- e) Eger hayaldın massası kemeyse (ol azsa), AAI bul hayalda ózgere me?
- 3) Bir shıpaker “Eger eki hayaldın massası, jası birdey bolıp, boylarınıń parqı 10 sm bolsa, olardıń AAI arasındaqı parıq 17,29 kilokaloriya boladı”, degen juwmaqqa keldi. Bul juwmaq durıs pa? Onı (*) formula járdeminde tekserip kórin.

- 167.** Bir dana buyımdı tayarlaw waqtı menen bir saatta tayarlanatugın buyımlar sanı arasındaqı baylanıs keri proporcional baylanıs boladı. Kesteni toltırın hám analizleń. Juwmaq shıǵarın.

Bir buyımdı tayarlawğa sarplanatugın waqt (minut)	2	3		5	6		10	12	
Bir saatta islep shıǵarılátugın buyımlar sanı (dana)	30		15			8	6		4

- 168.** Dáryanıń ayırım jerlerindeki kesesine kesiminiń beti menen usı jerlerge sáykes ortasha aǵım tezligi kerı proporcional muǵdarlar bolıp esaplanadı. Kesteni toltırıń. Qanday juwmaqqa keldińiz?

Kesesine kesimniń beti (kv.m)	40	45		54	60		
Aǵım tezligi (m/s)	0,9	0,8	0,75			0,5	0,4

- 169.** Eki metr uzınlıqtadı qadalardı jarǵıshı 4,5 saatta 0,5 m li ǵolalardı jarǵılap pitirdi. Eger, sol qadalardı 40 sm li ǵola etip jarǵılasa, olardı qansha waqıtta jarǵılap boladı? Bunda jumıs kólemi qanday qatnasta ózgergen bolar edi?

- 170.** 1) Eki shkiv qayıs penen birlestirilgen. Birinshi shkivtiń diametri 28 sm, ekinshisi 42 sm. Birinshi shkiv minutına 600 ret aylanatuǵın bolsa, ekinshi shkiv minutına neshe ret aylanadı?

2) Eki shkiv qayıs penen birlestirilgen. Birinshi shkiv minutına 560 ret, ekinshisi bolsa 240 ret aylanadı. Birinshi shkiv minutına aylanası 0,36 m bolsa, ekinshi shkivtiń aylanasınıń uzınlıǵın tabıń.

- 171.** *A* hám *B* qalalar ortasındaǵı aralıq 360 km. Bul aralıqtı jeńil mashina 4 saatta, júk mashinası bolsa 6 saatta basıp ótedi. *A* dan *B* ǵa qarap júk mashinası jolǵa shıqtı. Tap usı waqıtta *B* dan *A* ǵa qarap jeńil mashina jolǵa shıqtı. Olar *A* dan neshe kilometr uzaqlıqta ushrasadı?

△ Jeńil hám júk mashinalarınıń tezlikleri túrlishe bolǵanı ushın tuwrı proporcional baylanıs joq, 360 km aralıqtı 4 hám 6 sanlarına tuwrı proporcional bóliw menen máseleni sheshiwǵe bolmaydı.

Basqa usıldı qollanamız:

1 saatta jeńil mashina *AB* aralıqtıń $\frac{1}{4}$ bólimin ótedi, júk mashinası bolsa

$\frac{1}{6}$ bólimin ótedi. Demek, ushırasıw ornın anıqlaw ushın 360 km aralıqtı

$\frac{1}{4}$ hám $\frac{1}{6}$ sanlarına proporcional etip bóliw kerek.

Biraq $\frac{1}{4} : \frac{1}{6} = \frac{3}{12} : \frac{2}{12} = 3 : 2$.

Bunnan $3 + 2 = 5$. Mashinalar A dan x km arilawda ushirasadi desek,

$$x = \frac{360}{5} \cdot 2 = 144 \text{ (km)}.$$

Juwabi: A dan 144 km uzaqlıqta. Máselede 360, 4, 6 sanları berilgen.

Máseleni sheshiw barısında $\frac{1}{4}$ hám $\frac{1}{6}$ sanların (4 hám 6 ға keri sanlardı) kirgizdik. Demek, bul topardağı máseleni sheshiw ushın 360 tı 4 hám 6 sanına keri ($\frac{1}{4}$ hám $\frac{1}{6}$ sanlarına tuwrı) proporcional etip bóliw kerek eken. Bunnan sonday qağıydağa kelemiz:

Sandı berilgen sanlarğa keri proporcional etip bóliw ushın usı sandı berilgen sanlarğa keri bolğan sanlarğa tuwra proporcional etip bóliw kerek. ▲

172. 195 sanın 2, 3, 4 sanlarına keri proporcional etip úsh bólimge bóliń.

△ 1) 2, 3, 4 sanlarına teris sanlar, saykes túrde, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$. Yáǵnıy, 195 ti $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ sanlarına tuwra proporcional etip, úsh bólimge bóliw kerek.

Biraq, $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4} = \frac{6}{12} : \frac{4}{12} : \frac{3}{12} = 6 : 4 : 3$. Birinshi sandı a_1 , ekinshi sandı a_2 , úshinshi sandı a_3 desek, onda

$$a_1 = \frac{195 \cdot 6}{6+4+3} = \frac{195 \cdot 6}{13} = 15 \cdot 6 = 90; \quad a_2 = \frac{195 \cdot 4}{13} = 15 \cdot 4 = 60;$$

$$a_3 = \frac{195 \cdot 3}{13} = 15 \cdot 3 = 45.$$

Juwabi: 90, 60, 45.

Tekseriw: 1) $90 + 60 + 45 = 195$.

2) $90 : 60 : 45 = 6 : 4 : 3 = \frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$ (qatnastın aǵzaların dáslep 15 ke, soń 12 ge bóldik). ▲

- 173.** 1) 4480 sanın a) $\frac{1}{3}$ hám $\frac{3}{5}$; b) $\frac{3}{4}$ hám $\frac{2}{9}$ sanlarına keri proporcional etip eki bólekke bólin.
- 2) 987 sanın: a) 0,6 hám 0,3; b) 0,4 hám 0,(3) sanlarına keri proporcional etip eki bólekke bólin.
- 174.** 1) 2040 sanın $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ hám $\frac{5}{6}$ sanlarına keri proporcional etip 3 bólekke bólin.
- 2) 4530 sanın $\frac{2}{3}$, 0,7 hám $1\frac{1}{2}$ sanlarına keri proporcional bolğan 3 bólekke bólin.
- 175.** 1) *A* hám *B* qalalar arasındaqı aralıq 465 km. Bul aralıqtı jolawshı tasıwshı poezd 10,5 saatta, júk tasıwshı poezd 12 saatta ótedi. Poezdlar *A* hám *B* qalalardan bir waqıtta bir-birine qaray jolğa shıqsa, olardıń hárbiri ushırasqansha neshe kilometr jol basadı?
- 2) Birinshi sportshı 100 m aralıqtı 12 s ta, ekinshisi bolsa 13 s ta júgirip ótedi. Olar bir-birinen 200 m aralıqta turıp, bir waqıtta bir-birine qaray júgire basladı. Ushırasqansha olardıń hárbiri neshe metr aralıqtı basıp ótedi?
- 176.** 1) 36 tisli shesterna (qurılma) 18 tisli shesterna menen tislestirilgen. 18 tisli shesterna 60 ret aylansa, 36 tisli shesterna neshe ret aylanadı? 18 tisli shesterna 24 ret aylanatuğın bolsa – she?
- 2) Vilosipedtiń pedalları biriktirilgen aldınğı (jeteklewshi) shesternada 48 tis, arqa degershikke biriktirilgen shesternada 16 tis bar. Eger vilosipedtiń pedallı shesternası minutına 40 ret aylansa, arqadağı degershik neshe ret aylanadı? Pedallı shesterna 45 ret; 60 ret aylansa ne? Eger vilosiped degershiginiń diametri 70 cm bolsa, joqarıdağı hár qaysı jağday ushın vilosipedtiń tezligin tabıń.
- 177.** 1) *Abu Rayxan Beruniy máselesi*. Gerbishtiń ólshemleri 5, 4, 3 uzınlıq birligine teń. Bunday gerbishtiń 30 danasınıń bahası 60 dirham (pul birligi). Ólshemleri 8, 6, 2 uzınlıq birligine teń bolğan 20 dana gerbishtiń bahası neshe dirham boladı?
- 2) Gerbishtiń boyı, eni hám biyikligi 4:2:1 sıyaqlı qatnasta, deyik. Boyı menen 6 gerbish qoyıw múmkin bolğan orınga eni menen neshe hám biyikligi menen neshe gerbish qoyıwğa boladı?

II BAP

TEŇSIZLIKLER

11- §. SANLÍ TEŇSIZLIKLER

Sanlardı salıstırıw kúndelikli turmısta keń túrde qollanıladı. Mısalı, ekonomist jobada názerde tutılğan kórsetkishlerdi is júzindegi kórsetkishler menen salıstırıp qaraydı, shıpaker nawqas adamnıń temperaturasını deni saw adamnıń temperaturasını menen salıstıradı, slesar jonıp atırğan detalnıń ólshemlerin úlgi menen salıstırıp kóredi.

Usı aytıılğan úsh jaǵdaydın úshewinde de qandayda bir sanlar salıstırılıp kóریледі. Sanlardı salıstırıw nátiyjesinde sanlı teńsizlikler payda boladı..

Mısalı, $\frac{4}{5}$ hám $\frac{3}{4}$ sanların salıstırıp kóreyik. Bunıń ushın olardıń ayırmasın tabamız:

$$\frac{4}{5} - \frac{3}{4} = \frac{16-15}{20} = \frac{1}{20}.$$

Demek, $\frac{4}{5} = \frac{3}{4} + \frac{1}{20}$, yaǵnıy $\frac{4}{5}$ sanı $\frac{3}{4}$ sanına $\frac{1}{20}$ oń sanın qosıw nátiyjesinde payda boladı. Bul bolsa, $\frac{4}{5}$ sanı $\frac{3}{4}$ sanınan $\frac{1}{20}$ ge artıq ekenligin ańlatadı. Solay etip, $\frac{4}{5}$ sanı $\frac{3}{4}$ sanınan úlken, sebebi olardıń ayırması oń.



Аңқлама. *Eger $a - b$ ayırması oń bolsa, onda a sanı b sanınan úlken boladı. Egerde $a - b$ ayırması teris bolsa, onda a sanı b sanınan kishi boladı.*

Eger a sanı b sanınan úlken bolsa, onda $a > b$ túrinde, eger a sanı b sanınan kishi bolsa, onda $a < b$ túrinde jazıladı..



Солay etip, $a > b$ teńsizligi $a - b$ ayırmasınıń oń, yaǵnıy $a - b > 0$ ekenligin ańlatadı, $a < b$ teńsizligi $a - b < 0$ ekenligin ańlatadı.

1- másele. Eger $a > b$ bolsa, onda $b < a$ bolatuǵınlıǵın dálilleń.

△ $a > b$ teńsizligi $a - b$ nıń oń san ekenligin ańlatadı. Onda $b - a = -(a - b)$ – teris san, yaǵnıy $b < a$. ▲

Erkli túrde alınǵan eki a hám b sanı ushın tómendegi úsh jaǵdaydan tek ǵana birewi durıs boladı:

$$a > b, a = b, a < b.$$

Mısalı, -5 hám -3 sanları ushın $-5 < -3$ teńsizligi durıs boladı, al $-5 = -3$ hám $-5 > -3$ jaǵdayları durıs bolmaydı.



a hám b sanların salıstırıw, olardıń arasına $>$, $=$ yamasa $<$ belgileriniń qaysısını qoyǵanda durıs qatnastıń payda bolatuǵınlıǵın tabıw degen sóz. Bunı $a - b$ ayırmasınıń belgisin ańqlaw menen orınlaw múmkin.

2- másele. $0,79$ hám $\frac{4}{5}$ sanların salıstırın:

△ Olardıń ayırmasın tabamız:

$$0,79 - \frac{4}{5} = 0,79 - 0,8 = -0,01.$$

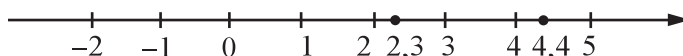
$0,79 - \frac{4}{5} < 0$ bolǵanı ushın $0,79 < \frac{4}{5}$. ▲

$a > b$ teńsizligi geometriyalıq kóz qarastan qaraǵanıımızda a noqatı san kósherinde b noqatınan oń tárepte jaylasqanın ańlatadı (10-súwret).



10- súwret.

Mısalı, $\frac{4}{5}$ noqatı $0,79$ noqatınan oń tárepte jaylasqan, sebebi $\frac{4}{5} > 0,79$; $2,3$ noqatı $4,4$ noqatınan shep tárepte jaylasqan, sebebi $2,3 < 4,4$ (11- súwret).



11- súwret.

3- másele. Eger $a \neq b$ bolsa, onda $a^2 + b^2 > 2ab$ bolatuǵınlıǵın dálilleń.

△ $a^2 + b^2 - 2ab$ ayırmasınıń oń ekenligin dálilleybiz. Haqıyqatında da, $a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 > 0$, sebebi $a \neq b$. ▲

4- másele. Eger $a > 0$ hám $a \neq 1$ bolsa, onda $a + \frac{1}{a} > 2$ bolatuǵınlıǵın dálilleń.

△ $a + \frac{1}{a} - 2$ ayırmasınıń oń ekenligin dálilleybiz. Haqıyqatında da,

$$a + \frac{1}{a} - 2 = \frac{a^2 + 1 - 2a}{a} = \frac{(a-1)^2}{a} > 0,$$

sebebi, $a > 0$ hám $a \neq 1$. ▲

5- másele. Eger $\frac{n}{m}$ durıs bólshek bolsa, onda $\frac{n}{m} < \frac{n+1}{m+1}$ bolatuǵınlıǵın dálilleń.

△ $\frac{n}{m}$ bólshegi $n < m$ bolǵanda (n hám m – natural sanlar) durıs bólshek dep atalatuǵınlıǵın eskertip óteyik.

Mına $\frac{n}{m} - \frac{n+1}{m+1} = \frac{n(m+1) - m(n+1)}{m(m+1)} = \frac{n-m}{m(m+1)}$ ayırması nolden kishi, sebebi

$n - m < 0$, $m > 0$, $m + 1 > 0$. Sonıń ushın da, $\frac{n}{m} < \frac{n+1}{m+1}$. ▲

Shınıǵıwlar

178. Sanlı teńsizliktiń anıqlamasınan paydalanıp, tómendegi sanlardı salıstırın:

1) $0,3$ hám $\frac{1}{5}$;

2) $\frac{1}{3}$ hám $0,3$;

3) $\frac{13}{40}$ hám $0,35$;

4) $-\frac{5}{8}$ hám $-0,7$;

5) $\frac{22}{7}$ hám $3,14$;

6) $\frac{4}{9}$ hám $0,44$.

179. Eger:

1) $b - a = -1,3$;

2) $b - a = 0,01$;

3) $a - b = (-5)^4$;

4) $a - b = -5^4$;

5) $a - b = 0,8$;

6) $b - a = (-2)^3$

bolsa, a hám b sanların salıstırın.

180. a nın qálegen mánisinde:

$$1) a^2 > (a+1)(a-1); \quad 2) (a+2)(a+4) > (a+1)(a+5)$$

teńsizliktiń durıslıǵın dálilleń.

181. a nın qálegen mánilerinde tómendegi teńsizlik durıs bolıwın dálilleń

$$1) a^3 < (a+1)(a^2 - a + 1); \quad 2) (a+7)(a+1) < (a+2)(a+6);$$

$$3) 1 + (3a+1)^2 > (1+2a)(1+4a); \quad 4) (3a-2)(a+2) < (1+2a)^2.$$

182. a hám b nın qálegen mánisinde tómendegi teńsizlik durıs bolıwın dálilleń:

$$1) a(a+b) > ab - 2; \quad 2) 2ab - 1 < b(2a+b);$$

$$3) 3ab - 2 < a(3b+a); \quad 4) b(a+2b) > ab - 3.$$

183. Eki bala birdey muǵdarda dápter satıp aldı. Birinshisi alǵan dápterleriniń barlıǵı 150 swmnan, ekinshisi alǵan dápterleriniń yarımı 130 swmnan, qalǵanları bolsa, 160 swmnan boldı. Qaysı bala kóbirek pul sarplaǵan?

12-§. SANLÍ TEՇSIZLIKLERDIN TIYKARGI QASIYETLERI

Bul paragrafta sanlı teńsizliklerdin ádette *tiykargı* dep atalatuǵın *qasıyetleri* qaraladı, sebebi olardan teńsizliklerdin basqa da qasıyetlerin dálillewde hám kóplegen máselelerdi sheshiwde paydalanıladı.

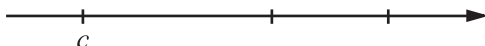


1-teorema. *Eger $a > b$ hám $b > c$ bolsa, onda $a > c$ boladı.*

○ Shárt boyınsha $a > b$ hám $b > c$. Bul jaǵday $a - b > 0$ hám $b - c > 0$ ekenligin ańlatadı. $a - b$ hám $b - c$ on sanların qosıp $(a - b) + (b - c) > 0$ di payda etemiz, yaǵnıy $a - c > 0$.

Demek, $a > c$. ●

Geometriyalıq kóz qarastan qaraǵanda 1-teorema eger san kósherinde a noqatı b noqatınan on tárepte jaylasqan bolsa hám b noqatı c noqatınan onda jaylassa, onda a noqatı c noqatınan on tárepte jaylasqanlıǵın bildiredi (12-súwret).



12-súwret.



2- teorema. *Eger teńsizliktiń eki jaǵına da birdey san qosılsa, onda teńsizlik belgisi ózgermeydi.*

○ $a > b$ bolsın. Bul jaǵdayda erkli bir san c sanı ushın

$$a + c > b + c$$

teńsizliginiń orınlanatıǵınlıǵın dálillew talap etiledi.

Mına

$$(a + c) - (b + c) = a + c - b - c = a - b$$

ayırmasın qaraymız. Bul ayırma oń, sebebi mäseleniń shártı boyınsha $a > b$. Demek, $a + c > b + c$. ●



Saldar. *Qálegen qosılıwshını teńsizliktiń bir jaǵınan ekinshi jaǵına qarama-qarsı belgi menen kóshirip jazıw múmkin.*

○ $a > b + c$ bolsın. Bul teńsizliktiń eki jaǵına da $-c$ sanın qosıp, $a - c > b + c - c$ nı payda etemiz, yaǵnıy $a - c > b$. ●



3- teorema. *Eger teńsizliktiń eki jaǵın da qanday da birdey oń sanǵa kóbeytsek, onda teńsizlik belgisi ózgermeydi. Eger teńsizliktiń eki jaǵın da qanday da birdey teris sanǵa kóbeytsek, onda teńsizlik belgisi qarama-qarsı belgige ózgeredi.*

○ 1) $a > b$ hám $c > 0$ bolsın. $ac > bc$ bolatıǵınlıǵın dálilleyik.

Shárt boyınsha $a - b > 0$ hám $c > 0$. Sonıń ushın $(a - b)c > 0$, yaǵnıy $ac - bc > 0$. Demek, $ac > bc$.

2) $a > b$ hám $c < 0$ bolsın. $ac < bc$ bolatıǵınlıǵın dálilleyik.

Shárt boyınsha $a - b > 0$ hám $c < 0$. Sonıń ushın $(a - b)c < 0$, yaǵnıy $ac - bc < 0$. Demek, $ac < bc$. ●

Mısalı, $\frac{1}{5} < 0,21$ teńsizliginiń eki jaǵın da 3 ke kóbeytip, $\frac{3}{5} < 0,63$ ti pay-

da etemiz, $\frac{1}{5} < 0,21$ teńsizliginiń eki jaǵın da -4 ke kóbeytip, $-\frac{4}{5} > -0,84$

ti payda etemiz.

Eger $c \neq 0$ bolsa, onda c hám $\frac{1}{c}$ sanları birdey belgige iye ekenligin atap ótemiz. c ga bóliwdi $\frac{1}{c}$ ge kóbeytiw menen almasırw múmkin bolganı ushın 3-teoremadan tómendegi tastıyıqlaw kelip shıgadı.



Saldar. *Eger teńsizliktiń eki jaǵın da birdey oń sanǵa bólsek, onda teńsizlik belgisi ózgermeydi. Eger teńsizliktiń eki jaǵın da birdey teris sanǵa bólsek, onda teńsizlik belgisi qarama-qarsı belgige ózgeredi.*

Mısalı, $0,99 < 1$ teńsizliktiń eki jaǵın da 3 ke bólip, $0,33 < \frac{1}{3}$ di payda etemiz. $0,99 < 1$ teńsizliginiń eki jaǵın da -9 ga bólsek, onda $-0,11 > -\frac{1}{9}$ di payda etemiz.

1- másele. Eger $a > b$ bolsa, onda $-a < -b$ bolatuǵınlıǵın dálilleń.

△ $a > b$ teńsizliginiń eki jaǵın da -1 teris sanına kóbeytip, $-a < -b$ nı payda etemiz. ▲

Mısali, $1,9 < 2,01$ teńsizliginen $-1,9 > -2,01$ teńsizligi kelip shıgadı, $0,63 < \frac{3}{5}$ teńsizliginen $-0,63 < -\frac{3}{5}$ teńsizligi kelip shıgadı..

2- másele. Eger a hám b – oń sanlar hám $a > b$ bolsa, onda $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ bollatuǵının dálilleń.

△ $b < a$ teńsizliginiń eki jaǵın da ab oń sanına bólip, $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ teńsizligin payda etemiz. ▲

Teńsizliklerdiń usı paragrafta qaralıp ótken barlıq qásiyetleri $>$ (úlken) belgige iye teńsizlik ushın dálillengenligin atap ótemiz.

Olar, $<$ (kishi) belgige iye teńsizlikler ushın da dál usılay dálillenedi.

Shinigiwlar

184. Mına tómendegi tastıyıqlawlardı dálilleń:

- 1) eger $a-2 < b$ hám $b < 0$ bolsa, onda $a-2$ – teris san;
- 2) eger $a^2-5 > a$ hám $a > 1$ bolsa, onda $a^2-5 > 1$.

185. Eger

- 1) $a > b$ hám $b > 1$;
- 2) $a < b$ hám $b < -2$;
- 3) $a-1 < b$ hám $b < -1$;
- 4) $a+1 > b$ hám $b > 1$

bolsa, onda a sanı óń san bola ma yaki teris san bola ma?

186. $-2 < 4$ teńsizliktiń eki jaǵına da: 1) 5; 2) -7 sanın qosıw nátiyjesinde payda bolatuǵın teńsizlikti jazıń.

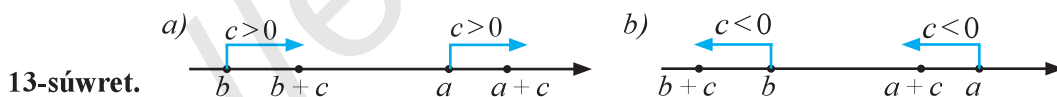
187. $2a+3b > a-2b$ teńsizliktiń eki jaǵına da: 1) $2b$; 2) $-a$ sanın qosıw nátiyjesinde payda bolatuǵın teńsizlikti jazıń.

188. $3 > 1$ teńsizliktiń eki jaǵınan: 1) 1; 2) -5 sanın alıw nátiyjesinde payda bolatuǵın teńsizlikti jazıń.

189. $a-2b < 3a+b$ teńsizliktiń eki jaǵınan: 1) a ; 2) b sanın alıw nátiyjesinde payda bolatuǵın teńsizlikti jazıń.

190. $a < b$ bolsın. Tómendegi sanlardı salıstırın:

- 1) $a+x$ hám $b+x$;
- 2) $a-5$ hám $b-5$.
- 3) 13 hám 14-súwretlerde sanlı teńsizliktiń qanday qásiyetleri berilgenin aytın.



14-súwret.

Berilgen teńsizliktiń eki jaǵın kórsetilgen sanǵa kóbeytiń (**191–192**):

- 191.** 1) $3,35 < 4,5$ ti 4 ke;
- 2) $3,8 > 2,4$ ti 5 ke;
- 3) $\frac{5}{6} > \frac{2}{3}$ ti – 12 ke;
- 4) $\frac{3}{4} < \frac{7}{8}$ ti – 16 ke.

192. 1) $2a > 1$ ni 0,5 ge; 2) $4a < -1$ ni 0,25 ge;
3) $-4a < -3$ ni 0,25 ge; 4) $-2a > -4$ ni $-0,5$ ge.

Berilgen teńsizliktiń eki jaǵın da kórsetilgen sanǵa bóliń (193–194):

193. 1) $-2 < 5$ ni 2 ge; 2) $4,5 > -10$ ni 5 ke;
3) $-25 > -30$ ni -5 ke; 4) $-20 < -12$ ni -4 ke.
194. 1) $1,2a < 4,8$ ni 1,2 ke; 2) $2,3a < -4,6$ ni 2,3 ke;
3) $-\frac{2}{3}x < -\frac{1}{4}$ di $\frac{2}{3}$ ke; 4) $-\frac{3}{4}x > \frac{1}{3}$ di $-\frac{3}{4}$ ke.

13-§. TEՆSIZLIKLERDI QOSIW HÁM KÓBEYTIW

Hár qıylı máselelerdi sheshiw barısında kóbinese teńsizliklerdi qosıwǵa yamasa kóbeytiwge, yaǵnıy teńsizliklerdiń shep jaǵın óz aldına hám oń jaǵın óz aldına qosıwǵa yamasa kóbeytiwge tuwra keledi. Bunday jaǵdaylarda geyde teńsizlikler aǵzama-aǵza qosılıp atır yamasa kóbeytilip atır, dep ayılıadı.

Mısalı, sayaxatshı birinshi kúni 20 km den kóbirek, al ekinshi kúni 25 km den kóbirek joldı júrip ótken bolsa, onda ol eki kún ishinde 45 km den kóbirek joldı basıp ótti dep ayıw múmkin.

Tap usınday, egerde tuwrımúyeshliktiń biyikligi 13 sm den kem, eni 5 sm den kem bolsa, onda usı tuwrımúyeshliktiń maydanı 65 sm^2 den kem boladı, dep ayıw múmkin.

Bul mısallardı qarap shıǵıwda *teńsizliklerdi qosıw hám kóbeytiw haqqındaǵı tómendegi teoremlar* qollanıladı:



1- teorema. *Birdey belgige iye teńsizliklerdi qosqanda tap usınday belgige iye teńsizlik payda boladı: eger $a > b$ hám $c > d$ bolsa, onda $a + c > b + d$ boladı.*

○ Shárt boyınsha $a - b > 0$ hám $c - d > 0$. Mına ayırmanı qaraymız:

$$(a + c) - (b + d) = a + c - b - d = (a - b) + (c - d).$$

Он санлардин qosindisi on san bolgani ushin $(a+c)-(b+d)>0$, yaғniy $a+c>b+d$. ●

Мисаллар:

$$\begin{array}{r} 1) \quad 3 > 2,5 \\ + \quad 5 > 4 \\ \hline 8 > 6,5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2) \quad 1,2 < 1,3 \\ + \quad -3 < -2 \\ \hline -1,8 < -0,7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3) \quad 4,8 > 2,3 \\ + \quad -1,2 > -1,3 \\ \hline 3,6 > 1 \end{array}$$



2- teorema. *Shep hám on jaqları on san bolgan birdey belgige iye bolgan teńsizliklerdi kóbeytiw nátiyjesinde tap usınday belgige iye teńsizlik payda boladı: eger $a>b$, $c>d$ hám a, b, c, d – on sanlar bolsa, onda $ac>bd$ boladı.*

○ Мина айırmanı қарайық:

$$ac - bd = ac - bc + bc - bd = c(a - b) + b(c - d).$$

Shárt boyınsha $a - b > 0$, $c - d > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Sonın ushında $c(a - b) + b(c - d) > 0$, yaғniy $ac - bd > 0$, bunnan $ac > bd$. ●

Мисаллар:

$$\begin{array}{r} 1) \quad \times 3,2 > 3,1 \\ \quad 3 > 2 \\ \hline 9,6 > 6,2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2) \quad \times 1,8 < 2,1 \\ \quad 4 < 5 \\ \hline 7,2 < 10,5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3) \quad \times 2,4 < 3,5 \\ \quad 3 < 4 \\ \hline 7,2 < 14 \end{array}$$

1- másele. Eger a, b – on sanlar hám $a > b$ bolsa, onda $a^2 > b^2$ boladı.

△ $a > b$ tensizligin óz-ózine kóbeytip, mınanı payda etemiz: $a^2 > b^2$. ▲

Usıǵan uqsas, a, b — on sanlar hám $a > b$ bolsa, onda qálegen natural n sanı ushin $a^n > b^n$ ekenligin dálillew múmkin.

Мисалı, $5 > 3$ teńsizliginen $5^5 > 3^5$, $5^7 > 3^7$ túrindegi teńsizlikler kelip shıǵadı.

2- másele. Úshmúyeshliktiń ishinde jatıwshı qálegen noqattan onıń tóberlerine shekemgi aralıqlardıń qosındısı usı úshmúyeshliktiń yarım perimetrinen úlken bolatuǵınlıǵın dálilleń.

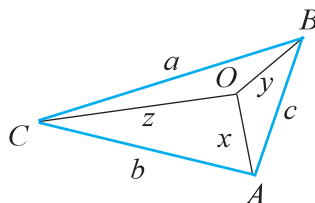
△ 15-súwretti qarayıq. x, y, z – ABC úshmúyeshliginiń ishki O noqatınan onıń tóberlerine shekemgi aralıqlar bolsın.

AOB , AOC , BOC úshmúyeshliklerinen úshmúyeshliktiń eki tárepiniń qosındısı haqqındaǵı teoremaǵa muwapıq:

$$x + y > c,$$

$$x + z > b,$$

$$y + z > a.$$



15-súwret.

Bul teńsizliklerdi aǵzama-aǵza qosıp, $2x+2y+2z>a+b+c$ nı payda etemiz, bunnan

$$x + y + z > \frac{a+b+c}{2}. \blacktriangle$$

Shınıǵıwlar

195. (Awızeki) Tómendegiler durıs pa?

- 1) eger $x > 7$ hám $y > 4$ bolsa, onda $x+y > 11$;
- 2) eger $x > 5$ hám $y > 8$ bolsa, onda $xy < 40$;
- 3) eger $x < -7$ hám $y < 7$ bolsa, onda $x+y < 0$;
- 4) eger $x < 2$ hám $y < 5$ bolsa, onda $xy < 10$?

196. Teńsizliklerdi qosıń:

- 1) $5 > -8$ hám $8 > 5$;
- 2) $-8 < 2$ hám $3 < 5$;
- 3) $3x+y < 2x+1$ hám $3y-2x < 14-2a$;
- 4) $3x^2+2y > 4a-2$ hám $5y-3x^2 > 3-4a$.

197. Teńsizliklerdi kóbeytiń:

- 1) $2\frac{2}{3} > 1\frac{1}{3}$ hám $12 > 6$;
- 2) $6\frac{1}{4} < 9\frac{2}{3}$ hám $4 < 6$;
- 3) $x-2 > 1$ hám $x+2 > 4$;
- 4) $4 < 2x+1$ hám $3 < 2x-1$.

198. Ager $a > 2$ hám $b > 5$ bolsa, onda

- 1) $3a+2b > 16$;
- 2) $ab-1 > 9$;
- 3) $a^2+b^2 > 29$;
- 4) $a^3+b^3 > 133$;
- 5) $(a+b)^2 > 35$;
- 6) $(a+b)^3 > 340$;
- 7) $2a+3b > 19$;
- 8) $6ab-5 > 55$;
- 9) $ab(a+b) > 70$

bolıwın dálilleń.

- 199.** Ushmúyeshliktiń tárepleri sáykes túrde 73 m, 1 m 15 sm hám 1 m 11 sm den kem. Onıń perimetri 3 m den kem bolatuǵının dálilleń.
- 200.** 4 dana ulıwma dápter hám 8 dana qoyın dápter satıp alındı. Uluwma dápterdiń bahası 200 swmnan kem, al qoyın dápterdiń bahası 150 swmnan kem. Barlıq jumsalǵan aqshanıń 2000 swmnan kem bolatuǵınlıǵın kórsetiń.
- 201.** Tuwrı tórtmúyeshliktiń bir tárepi 7 sm den uzın, ekinshi tárepi birinshi tárepten 3 ese uzın. Tuwrı tórtmúyeshliktiń perimetri 56 sm den uzın ekenligin dálilleń.
- 202.** Tuwrı tórtmúyeshlik formasındaǵı atızdıń uzınlıǵı eninen 5 ese uzın, al eni 4 m den uzın. Atızdıń maydanı 80 m² tan úlken ekenligin dálilleń.
- 203.** Tuwrı tórtmúyeshliktiń ishinde jatıwshı qálegen noqattan onıń tóbelerine shekemgi aralıqlardıń qosındısı usı tuwrı tórtmúyeshliktiń yarım perimetrinen úlken ekenligin dálilleń.

Qatań hám qatań emes teńsizlikler. $>$ (úlken) hám $<$ (kishi) belgileri

bar teńsizlikler qatań teńsizlikler dep ataladı. Mısalı, $\frac{5}{6} > \frac{1}{2}$, $\frac{3}{4} < 1$, $a > b$, $c < d$ – *qatań teńsizlikler*.

Qatań teńsizliklerdiń $>$ hám $<$ belgileri menen bir qatarda $\geq$ (úlken yamasa teń) hám $\leq$ (kishi yamasa teń) belgilerinen de paydalanıladı. Olar *qatań emes teńsizlikler* dep ataladı.

$a \leq b$ teńsizligi $a < b$ yamasa $a = b$ ekenligin, yaǵnıy a sanı b dan úlken emes ekenligin bildiredi.

Mısalı, eger samolyottaǵı orınlar sanı 134 bolsa, onda a jolawshılar sanı 134 ten kem yamasa oǵan teń bolıwı múmkin. Bul jaǵdayda $a \leq 134$ kórinisinde jazıw jazıladı.

Usıǵan uqsas, $a \geq b$ teńsizligi a sanı b dan úlken yamasa oǵan teń ekenligin, yaǵnıy a sanınıń b dan kishi emes ekenligin bildiredi.

$\geq$ yamasa $\leq$ belgileri qatnasqan teńsizlikler *qatań emes teńsizlikler* dep ataladı. Mısalı, $18 \geq 12$, $11 \leq 12$, $7 \geq 7$, $4 \leq 4$, $a \geq b$, $c \leq d$ – *qatań emes teńsizlikler*.

Qatań teńsizliklerdiń 12–13-§ larda bayan etilgen barlıq qásiyetleri qatań emes teńsizlikler ushın da orınlı boladı. Bunda, eger qatań teńsizlikler ushın $>$ hám $<$ belgileri qarama-qarsi belgiler dep esaplangan bolsa, qatań emes teńsizlikler ushın da $\geq$ hám $\leq$ belgileri qarama-qarsi belgiler dep esaplanadı.

Misali, 12-§ dağı 2-teoremanı qatán emes ténsizlikler ushın mınaday etip bayan etiw (añlatıw) múmkin: eger $a \geq b$ bolsa, onda qálegen c sanı ushın $a + c \geq b + c$ boladı. Haqıyqatında da $a > b$ bolğan jaǵday ushın bul teorema 12-§ de dálillengen, al $a = b$ jaǵdayı ushın bolsa bul tastıyıqlaw teńliktiń bizge belgili bolğan qásiyetin añlatadı.

Másele. Qálegen a hám b sanları ushın:

$$a^2 + b^2 \geq 2ab \quad (1)$$

teńsizliginiń durıs ekenligin dálilleń.

△ $a^2 + b^2 - 2ab$ ayırması qálegen a hám b lar ushın nolden kishi emesligin dálilleybiz. Haqıyqattan da, $a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 \geq 0$. Atap aytqanda (1) ténsizlik a hám b lardıń qálegen mánislerinde durıs boladı, sonıń menen birge teńlik belgisi tek $a = b$ bolğan jaǵdayda ǵana orınlı boladı. ▲

Shınıǵıwlar

204. n sanınıń ténsizlikti qanaatlandırıwshı eń úlken pútin mánisin tabıń:

- | | | | |
|-------------------|--------------------|-----------------|----------------|
| 1) $n \leq -2$; | 2) $n \leq 3$; | 3) $n < 4$; | 4) $n < -5$; |
| 5) $n \leq 0,2$; | 6) $n \leq -0,3$; | 7) $n < -\pi$; | 8) $n < \pi$. |

205. n sanınıń ténsizlikti qanaatlandırıwshı eń kishi pútin mánisin tabıń:

- | | | | |
|------------------|--------------------|-----------------------|------------------------|
| 1) $n \geq -3$; | 2) $n \geq 6$; | 3) $n \geq -6$; | 4) $n > -4$; |
| 5) $n > -4,21$; | 6) $n \geq 3,24$; | 7) $n \geq \pi - 1$; | 8) $n \geq -\pi + 1$. |

206. x sanınıń ténsizlikti qanaatlandırıwshı eń úlken pútin mánisin tabıń:

- | | | | |
|------------------------------|-------------------------|--------------------------------|------------------------------|
| 1) $1) \frac{x}{6} \leq 1$; | 2) $\frac{x}{4} < -2$; | 3) $\frac{x}{10} \leq -3,14$; | 4) $\frac{x}{7} \leq 0,15$. |
|------------------------------|-------------------------|--------------------------------|------------------------------|

207. Teńsizlik belgilerinen paydalanıp, jazıń:

- 1) Búgin Fergana alabında (t °C) temperatura 20 °C dan joqarı emes.
- 2) Suw 5 m den kem bolmağan (h m) biyiklikke kóterildi.
- 3) Normal basımdağı suwdıń suyıq haldağı (t °C) temperaturası 0 °C den kem emes; 100 °C den artıq emes.

4) Qalalıq jerde avtomobil transportınıń (v km/saat) qozǵalı tezligi 70 km/saattan artıq emes.

208. $a \leq b$ bolsın. Sonda tómendegi teńsizlikler durıs bolama:

- 1) $a - 3 \leq b - 3$; 2) $5a \leq 5b$; 3) $a + 2,5 < b + 2,5$;
4) $a - 4 > b - 4$; 5) $a - 4 \leq b + 1$; 6) $a - 3,1 \leq b + 0,1$?

209. $a \geq b$ bolsın deyik. Sonda tómendegi teńsizlikler durıs bola ma:

- 1) $-2a > -2b$; 2) $-3a \leq -3b$; 3) $\frac{a}{12} \geq \frac{b}{12}$;
4) $\frac{a}{15} < \frac{b}{15}$; 5) $0,5a \geq 0,4b$; 6) $-2a \leq -b$?

14- §. SANLÍ TEŇSIZLIKLERDI DÁREJEJE KÓTERIW

11-§ da shep hám óń jaqları óń bolǵan birdey belgili teńsizliklerdi aǵzalap kóbeytilgende, usı belgili teńsizlik payda bolıwı kórsetilgen edi.



Bunnan, eger $a > b > 0$ hám n natural san bolsa, onda $a^n > b^n$ bolıwı kelip shıǵadı.

○ Shártı boyınsha $a > 0$, $b > 0$. n ta birdey $a > b$ teńsizlikti aǵzama-aǵza kóbeytip, payda etemiz: $a^n > b^n$. ●

1-másele. $(0,43)^5$ hám $\left(\frac{3}{7}\right)^5$ sanların salıstırıń.

△ 0,001 ge shekem anıqlıq penen $\frac{3}{7} \approx 0,428$ bolǵanı ushın $0,43 > \frac{3}{7}$ boladı. Sonıń ushın $(0,43)^5 > \left(\frac{3}{7}\right)^5$. ▲



Shep hám óń jaqları óń bolǵan teńsizlikti qálegen racional dárejeje kóteriwe boladı.

eger $a > b > 0$, $r > 0$ bolsa, onda

$$a^r > b^r$$

(1)



boladı:

ager $a > b > 0$, $r < 0$ bolsa, onda

$$a^r < b^r$$

(2)

boladı.

1- qásiyetti dálilleyimiz.

○ Dáslep (1) qásiyetiniń $r = \frac{1}{n}$ bolǵanda durıslıǵın, keyin ulıwma jaǵday

ushın $r = \frac{m}{n}$ bolǵanda durıslıǵın dálilleyimiz.

a) Aytayıq, $r = \frac{1}{n}$ bolsın, bunda n – birden úlken natural san, $a > 0$, $b > 0$.

Shárti boyınsha $a > b$. $a^{\frac{1}{n}} > b^{\frac{1}{n}}$ ekenligin dálillew kerek. Oylap qarayıq, bul nadurıs, yaǵnıy $a^{\frac{1}{n}} \leq b^{\frac{1}{n}}$ bolsın. Onda bul teńsizlikti n natural dárejege kóterip $a \leq b$ ni payda etemiz, bul $a > b$ shártine qarsı. Demek, $a > b > 0$ den $a^{\frac{1}{n}} > b^{\frac{1}{n}}$ ekenligi kelip shıǵadı.

b) Aytayıq, $r = \frac{m}{n}$ bolsın, bunda m hám n – natural sanlar. Onda $a > b > 0$

shártinen, dálillegenimiz boyınsha $a^{\frac{1}{n}} > b^{\frac{1}{n}}$ ekenligi kelip shıǵadı. Bul teńsizlikti m natural dárejege kóterip, payda etemiz:

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m > \left(b^{\frac{1}{n}}\right)^m, \text{ yaǵnıy } a^{\frac{m}{n}} > b^{\frac{m}{n}}. \bullet$$

Máselen, $5^{\frac{2}{7}} > 3^{\frac{2}{7}}$, sebebi $5 > 3$; $2^{\frac{3}{4}} < 4^{\frac{3}{4}}$, sebebi $2 < 4$; $\sqrt[5]{7^2} > \sqrt[5]{6^2}$, sebebi $7 > 6$.

Endi (2) qásiyetti dálilleyimiz.

○ Eger $r < 0$ bolsa, onda $-r > 0$ boladı. (1) qásiyeti boyınsha $a > b > 0$ shártinen $a^{-r} > b^{-r}$ ekenligi kelip shıǵadı. Bul teńsizlikti eki bólimin óń $a^r b^r$ sangá kóbeytip, $b^r > a^r$ ni payda etemiz, yaǵnıy $a^r < b^r$. $\bullet$

Máselen, $(0,7)^{-8} < (0,6)^{-8}$, sebebi $0,7 > 0,6$; $13^{-0,6} > 15^{-0,6}$, sebebi $13 < 15$; $\sqrt[4]{8^{-3}} < \sqrt[4]{7^{-3}}$, sebebi $8 > 7$.

Joqarı matematika kursında (1) qásiyet qálegen ón r haqıyqıy san ushın, (2) qásiyet bolsa qálegen teris r haqıyqıy san ushın durıs ekenligi dálillengen. Máselen,

$$\left(\frac{8}{9}\right)^{\sqrt{2}} > \left(\frac{7}{8}\right)^{\sqrt{2}}, \text{ sebebi } \frac{8}{9} > \frac{7}{8}; \quad \left(\frac{7}{8}\right)^{-\sqrt{3}} < \left(\frac{6}{7}\right)^{-\sqrt{3}}, \text{ sebebi } \frac{7}{8} > \frac{6}{7}.$$

Qatań teńsizliklerdi ($>$ yaki $<$ belgi) dárejege kóteriwdi kórip shıǵılǵan qásiyetleri qatań emes teńsizlikler ($\geq$ yaki $\leq$ belgi) ushın da durıs bolıwın tastıyqlap ótemiz.



Solay etip, eger teńsizliktiń eki jaǵı da ón bolsa, onda onı ón dárejege kótergende teńsizlik belgisi saqlanadı, teris dárejege kótergende bolsa teńsizlik qarama-qarsısına ózgeredi.

Qatań teńsizlikler ushın $>$ hám $<$ belgileri, qatań emes teńsizlikler ushın bolsa $\geq$ hám $\leq$ belgileri qarama-qarsı belgiler bolatuǵının esletip ótemiz.

2-másele. Sanlardı salıstırıń.

$$1) \left(\frac{17}{18}\right)^{-\frac{1}{3}} \text{ hám } \left(\frac{18}{17}\right)^{-\frac{1}{3}}; \quad 2) \left(\frac{6}{7}\right)^{\sqrt{2}} \text{ hám } (0,86)^{\sqrt{2}}.$$

$$\triangle 1) \frac{17}{18} < 1 \text{ hám } \frac{18}{17} > 1 \text{ bolǵanı ushın } \frac{17}{18} < \frac{18}{17} \text{ boladı.}$$

$$\text{Bul teńsizlikti teris } \left(-\frac{1}{3}\right) \text{ dárejege kóterip, payda etemiz: } \left(\frac{17}{18}\right)^{-\frac{1}{3}} > \left(\frac{18}{17}\right)^{-\frac{1}{3}}.$$

2) Dárejelerdiń tiykarların salıstıramız. $\frac{6}{7} = 0,857\dots$ bolǵanı ushın $\frac{6}{7} < 0,86$ boladı. Bul teńsizlikti ón $\sqrt{2}$ dárejege kóterip, tómendegini payda etemiz:

$$\left(\frac{6}{7}\right)^{\sqrt{2}} < 0,86^{\sqrt{2}}. \quad \blacktriangle$$

3-másele. Teńlemenı sheshiń: $10^x = 1$.

$\triangle x = 0$ san bul teńlemenıń koreni boladı, sebebi $10^0 = 1$. Basqa korenler joq ekenligin kórsetemiz.

Berilgen teńlemeni $10^x = 1^x$ kórinisinde jazamız.

Eger, $x > 0$ bolsa, onda $10^x > 1^x$ demek teńleme oń korenlerge iye emes.

Eger, $x < 0$ bolsa, onda $10^x < 1^x$ demek teńleme teris korenlerge iye emes.

Solay etip, $x = 0$ berilgen $10^x = 1$ teńlemenin jalǵız koreni eken. ▲

Usıǵan uqsas, $a^x = 1$ ($a > 0$, $a \neq 1$) teńleme jalǵız $x = 0$ korengge iye bolıwı dálillenedi. Bunnan,

$$a^x = a^y \quad (3)$$

teńlik $x = y$ bolǵanda ǵana durıs bolıwı kelip shıǵadı, bul jerde $a > 0$, $a \neq 1$.

○ (3) teńlikti a^{-y} kóbeytip, $a^{x-y} = 1$ payda etemiz, bunnan $x = y$. ●

4-másele. $3^{2x-1} = 9$ teńlemeni sheshiń.

△ $3^{2x-1} = 3^2$, bunnan $2x - 1 = 2$, $x = 1,5$. ▲

$a^x = b$ teńlemeni qaraymız, bunda $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$.

Bul teńleme jalǵız x_0 korengge iye ekenligin dálillewge boladı. x_0 san a tiykar boyınsha b sannın logarifmi delinedi hám $\log_a b$ sıyaqlı belgilenedi.

Máselen, $3^x = 9$ teńlemenin koreni 2 sanı boladı, yaǵnıy $\log_3 9 = 2$. Tap usın-

day, $\log_2 16 = 4$, sebebi $2^4 = 16$; $\log_5 \frac{1}{5} = -1$, sebebi $5^{-1} = \frac{1}{5}$; $\log_{\frac{1}{3}} 27 = -3$,

sebebi $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 27$.

b sanının 10 tiykarı boyınsha logarifmi *onlıq logarifm* delinedi hám $\lg b$ etip belgilenedi. Máselen, $\lg 100 = 2$, sebebi $10^2 = 100$; $\lg 0,001 = -3$, sebebi $10^{-3} = 0,001$.

Shınıǵıwlar

210. Sanlardı salıstırın:

- 1) $2^{\frac{1}{3}}$ hám $3^{\frac{1}{3}}$; 2) $5^{-\frac{4}{5}}$ hám $3^{-\frac{4}{5}}$; 3) $5^{\sqrt{3}}$ hám $7^{\sqrt{3}}$; 4) $21^{-\sqrt{2}}$ hám $31^{-\sqrt{2}}$.

211. Sanlardi salıstırın:

$$\begin{array}{ll} 1) (0,88)^{\frac{1}{6}} \text{ hám } \left(\frac{6}{11}\right)^{\frac{1}{6}}; & 2) \left(\frac{5}{12}\right)^{-\frac{1}{4}} \text{ hám } (0,41)^{-\frac{1}{4}}; \\ 3) (4,09)^{\frac{3}{2}} \text{ hám } \left(4\frac{3}{25}\right)^{\frac{3}{2}}; & 4) \left(\frac{11}{12}\right)^{-\sqrt{5}} \text{ hám } \left(\frac{12}{13}\right)^{-\sqrt{5}}. \end{array}$$

212. Teńlemelerdi sheshiń:

$$\begin{array}{lll} 1) 6^{2x} = 6^{\frac{1}{5}}; & 2) 3^x = 27; & 3) 7^{1-3x} = 7^{10}; \\ 4) 2^{2x+1} = 32; & 5) 4^{2+x} = 1; & 6) \left(\frac{1}{5}\right)^{4x-3} = 5. \end{array}$$

213. Sanlardi salıstırın:

$$1) \sqrt[7]{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)^2} \text{ hám } \sqrt[7]{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)^2}; \quad 2) \sqrt[5]{\left(1\frac{1}{4} - 1\frac{1}{5}\right)^3} \text{ hám } \sqrt[5]{\left(1\frac{1}{6} - 1\frac{1}{7}\right)^3}.$$

Teńlemelerdi sheshiń (**214–216**):

214. 1) $3^{2-y} = 27$; 2) $3^{5-2x} = 1$;
3) $9^{\frac{1}{2}x-1} - 3 = 0$; 4) $27^{3-\frac{1}{3}y} - 81 = 0$.

215. 1) $\left(\frac{1}{9}\right)^{2x-5} = 3^{5x-8}$; 2) $2^{4x-9} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-4}$; 3) $8^x 4^{x+13} = \frac{1}{16}$;
4) $\frac{25^{x-2}}{\sqrt{5}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-7,5}$; 5) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-4} = 2^{x+2}$; 6) $3^x \cdot 9^{x-1} = \frac{1}{27}$.

216. 1) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2x+1} = (3\sqrt{3})^x$; 2) $(\sqrt[3]{2})^{x-1} = \left(\frac{2}{\sqrt[3]{2}}\right)^{2x}$;
3) $9^{3x+4} \sqrt{3} = \frac{27^{x-1}}{\sqrt{3}}$; 4) $\frac{8}{(\sqrt{2})^x} = 4^{3x-2} \sqrt{2}$.

217. Esaplań:

$$\begin{array}{lll} 1) \log_7 49; & 2) \log_2 64; & 3) \log_{\frac{1}{2}} 4; \\ 4) \log_3 \frac{1}{27}; & 5) \log_7 \frac{1}{7}. \end{array}$$

218. Teńlemini sheshiń:

$$\begin{array}{lll} 1) 7^{5x-1}=49; & 2) (0,2)^{1-x}=0,04; & 3) \left(\frac{1}{3}\right)^{3x+3}=3^{2x}; \\ 4) 3^{5x-7}=\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}; & 5) (0,3)^{2-3x}=0,027; & 6) \left(\frac{1}{6}\right)^{2x-3}=6^x. \end{array}$$

15-§. BIR BELGISIZLI TEՒSIZLIKLER

1-másele. Eki qaladan bir-birine qarama-qarsı bağıtta eki poezd birdey turaqlı tezlik penen jolğa shıqtı. Qozǵalı baslanǵannan 2 saat ótkennen keyin olardıń júrip ótken jollarınıń qosındısı 200 km den kem bolmawı ushın poezdlar qanday tezlik penen júriwi kerek?

△ Saatına x km – bul poezdlardıń qozǵalısnıń izlenip atırǵan tezligi bolsın. Eki saatta poezdlardıń hár qaysısı $2x$ km joldı júrip ótedi. Máseleniń shárti boyınsha poezdlardıń 2 saatta júrip ótken jollarınıń qosındısı 200 km den kem bolmawı kerek:

$$2x + 2x \geq 200.$$

Bunnan $4x \geq 200, x \geq 50$.

Juwbabı: Hárbir poezdtiń qozǵalı tezligi 50 km/saattan kem bolmawı kerek. ▲

$4x \geq 200$ teńsizliginde x háribi menen belgisiz san belgilengen. Bul *bir belgisizli sızıqlı teńsizliklerge misal boladı*.

Mına

$$ax > b, ax < b, ax \geq b, ax \leq b$$

teńsizlikleri bir belgisizli sızıqlı teńsizlikler dep ataladı, bunda a hám b - berilgen sanlar, al x belgisiz shama.

Kóbinese, misalı,

$$4(3-x) > 5 + 2x, \quad \frac{x-3}{2} \leq \frac{x-2}{3}, \quad 1 - \frac{x}{2} < 3(x+4)$$

túrindegi teńsizlikler bir belgisizli sızıqlı teńsizliklerge keltirilgen.

Teńsizlik belgisiniń shep hám oń jaqlarında turǵan ańlatpalar *teńsizliktiń shep hám oń jaqları* dep ataladı. Teńsizliktiń shep hám oń jaqlarındaǵı hárbir qosılıwshı *teńsizliktiń aǵzası* dep ataladı.

Misali, $2x - 5 \geq 4 + 3x$ teńsizliginde $2x - 5$ – shep jaǵı, al $4 + 3x$ – oń jaǵı, $2x$, -5 , 4 hám $3x$ ler teńsizliktiń aǵzaları dep ataladı.

Eger máselede payda bolǵan $2x + 2x \geq 200$ teńsizligine $x = 50$, $x = 51$, $x = 60$ tı qoysaq, onda durıs sanlı teńsizlikler payda boladı:

$$2 \cdot 50 + 2 \cdot 50 \geq 200; \quad 2 \cdot 51 + 2 \cdot 51 \geq 200;$$

$$2 \cdot 60 + 2 \cdot 60 \geq 200.$$

50, 51, 60 sanlarının hárbiri $2x + 2x \geq 200$ teńsizliginiń sheshimi delinedi.



Bir belgisizli teńsizliktiń sheshimi dep, belgisizdiń usı teńsizlikti durıs sanlı teńsizlikke aylandıratuǵın mánisine aytamız.

Teńsizlikti sheshiw – onıń barlıq sheshimlerin tabıw yamasa olardıń joq ekenligin anıqlaw degen sóz.

Teńsizliktegi belgisiz san qálegen hárip penen belgileniwi múmkin.

Misali, mına

$$3(y - 5) < 2(4 - y), \quad 2t - 1 \geq 4(t + 3), \quad 5 - \frac{z}{2} > \frac{z}{3} - 4$$

teńsizliklerde belgisizler, sáykes túrde y , t , z háripleri menen belgilengen.

Teńsizliklerdi sheshiwge misallar keltiremiz.

2- másele. Teńsizlikti sheshiń:

$$x + 1 > 7 - 2x.$$

△ x san berilgen teńsizliktiń sheshimi, yaǵnıy x san $x + 1 > 7 - 2x$ teńsizligin durıs teńsizlikke aylandıradı, dep oylayıq.

$-2x$ aǵzanı teńsizliktiń oń jaǵınan shep jaǵına, onıń belgisin qarama-qarsısına ózertken halda ótkizemiz. 1 sanın bolsa teńsizliktiń oń jaǵına „–“ belgisi menen ótkizemiz.

Nátiyjede usı

$$x + 2x > 7 - 1$$

durıs teńsizlikti payda etemiz.

Bul teńsizliktiń eki jaǵın da uqsas aǵzalarǵa ıqshamlastıramız:

$$3x > 6.$$

Endi teńsizliktiń eki jaǵın 3 ke bólip,

$$x > 2$$

ekenin tabamız.

Solay etip, x ti berilgen teńsizliktiń sheshimi, dep oylap, biz $x > 2$ ni payda ettik, x tiń 2 den úlken qálegen mánisi teńsizliktiń sheshimi bolıwına isenim payda etiw ushın barlıq pikirlerimizdi kerisinshe tártipte alıp barıw jetkilikli.

Aytaqıy, $x > 2$ bolsın. Durıs sanlı teńsizliklerdiń qásiyetlerin qollanıp, izbe-iz tómendegilerdi payda etemiz:

$$\begin{aligned} 3x &> 6, \\ x + 2x &> 7 - 1, \\ x + 1 &> 7 - 2x. \end{aligned}$$

Yaǵnıy, 2 den úlken qálegen x san berilgen teńsizliktiń sheshimi boladı.

Juwbabı: $x > 2$. ▲

Teńsizliklerdiń sheshiliwin jazıwda túsindirmelerdi tolıq keltiriw shárt emes. Máselen, 1 – máseleniń sheshimin bılayınsha jazıwǵa boladı:

$$\begin{aligned} x + 1 &> 7 - 2x, \\ 3x &> 6, \\ x &> 2. \end{aligned}$$

Solay etip, teńsizlikti sheshiwde onıń tómendegi *tiykarǵı qaǵıydalarınan* paydalanıladı:



1- qaǵıyda. *Teńsizliktiń qálegen aǵzasın onıń bir jaǵınan ekinshi jaǵına, usı aǵzanıń belgisin qarama-qarsı belgige ótkiziwge boladı, bunda teńsizlik belgisi ózgermeydi.*



2- qaǵıyda. *Teńsizliktiń eki jaǵın da nolge teń bolmaǵan bir sanǵa kóbeytiwge yaki bóliwge boladı: eger bul san oń bolsa, onda teńsizlik belgisi ózgermeydi, eger bul san teris bolsa, onda teńsizlik belgisi qarama-qarsısına belgige ózgeredi.*

Bul qag'iydalar berilgen te'nsizlikni basqa, tap usunday sheshimlarga iye bolgan te'nsizlik penen almashtirwga imkan beredi.

Sizizqli te'nsizlikke keltiriletu'gin bir belgisizli te'nsizliklerdi sheshiw ushin:

1) Belgisizge iye agzalarin shep jag'ina, belgisizi joq agzalarin bolsa on jag'ina koshiriw (1-qag'iyda);

2) Uqsas agzalardi iqshamlastirip, te'nsizlikni eki jag'ina belgisiz aldinda'gi koefficientke (eger ol nolge te'ni bolmasa) boluw (2-qag'iyda) kerek.

3- masele. Te'nsizlikni sheshin:

$$3(x-2)-4(x+1)<2(x-3)-2.$$

△ Te'nsizlikni shep ham on jaqlarin apiwayilastiramiz. Qawsirmalardi ashamiz:

$$3x-6-4x-4<2x-6-2.$$

Belgisizge iye agzalardi te'nsizlikni shep jag'ina, belgisizi joq (erkin) agzalarin bolsa on jag'ina alip otemiz (1-qag'iyda):

$$3x-4x-2x<6+4-6-2.$$

Uqsas agzalardi iqshamlastiramiz:

$$-3x<2$$

ham te'nsizlikni eki jag'in - 3 ke bolemiz (2-qag'iyda):

$$x>-\frac{2}{3}.$$

Juwabi: $x>-\frac{2}{3}$. ▲

Bul sheshiliwdi qisqasha bilayinsha jaziwga boladi:

$$3(x-2)-4(x+1)<2(x-3)-2,$$

$$3x-6-4x-4<2x-6-2,$$

$$-x-10<2x-8,$$

$$-3x<2,$$

$$x>-\frac{2}{3}.$$

$x > -\frac{2}{3}$ teńsizlikti qanaatlandırıwshı sanlar x sanlar kópligi san kósherinde nur menen súwretlep kórsetiledi(16-súwret). $x = -\frac{2}{3}$ noqatı bul nurğa tiyisli emes, 16-súwrette ol *kósher dóngelegi* menen, nur bolsa qıya sızıqlar menen súwretlengen.

x sanlardıń, máselen, $x \geq 2$ teńsizlikti qanaatlandırıwshı kópligi de *nur* delinedi. $x=2$ noqatı usı nurğa tiyisli. 17-súwrette bul noqat *qara dóngelek* penen belgilengen.



16- súwret.



17- súwret.

4-m ásele. Teńsizlikti sheshiń:

$$\frac{x-5}{6} + 1 \geq \frac{5x}{2} - \frac{x-3}{3}.$$

△ Teńsizliktiń eki jaǵın da 6 ǵa kóbeytemiz:

$$6 \cdot \frac{x-5}{6} + 6 \cdot 1 \geq 6 \cdot \frac{5x}{2} - 6 \cdot \frac{x-3}{3},$$

$$(x-5) + 6 \geq 15x - 2(x-3).$$

Qawsırmalardı ašamız hám uqsas aǵzalardı ıqshamlastıramız:

$$x - 5 + 6 \geq 15x - 2x + 6,$$

$$x + 1 \geq 13x + 6,$$

Bunnan

$$-12x \geq 5, \quad x \leq -\frac{5}{12}. \quad \blacktriangle$$

Bul teńsizliktiń sheshimler kópligi, yaǵnıy $x \leq -\frac{5}{12}$ sanlar kópligi 18-súwrette berilgen.



18- súwret.

Usı qaralgan mısallarda teńsizlikler ápiwayılastırılğannan keyin belgisizdiń aldında turǵan koefficienti nolge teń bolmaǵan sıızqlı teńsizlikke keltirilgen. Ayırım waqıtları bul koefficient nolge teń bolıwı da múmkin.

Endi usınday teńsizliklerge mısallar keltiremiz.

5- másele. Teńsizliklerdi sheshiń:

$$2(x+1)+5>3-(1-2x).$$

△ Teńsizliktiń eki jaǵın da ápiwayılastıramız:

$$2x+2+5>3-1+2x,$$

$$2x+7>2+2x,$$

bunnan

$$2x-2x>2-7,$$

$$0 \cdot x > -5.$$

Aqırǵı teńsizlik x tiń qálegen mánisinde durıs boladı. Sebebi, onıń shep jaǵı qálegen x ta nolge teń hám de $0 > -5$. Demek, x tiń qálegen mánisi berilgen teńsizliktiń sheshimi boladı.

Juwabı: x – qálegen sań. ▲

6- másele. Teńsizlikti sheshiń:

$$3(2-x)-2>5-3x.$$

△ Teńsizliktiń shep jaǵın ápiwayılastıramız:

$$6-3x-2>5-3x,$$

$$4-3x>5-3x,$$

bunnan

$$-3x+3x>5-4,$$

$$0 \cdot x > 1.$$

Aqırǵı teńsizlik sheshimge iye emes. Sebebi, teńsizliktiń shep jaǵı x tiń qálegen mánisinde nolge teń hám $0 > 1$ teńsizlik nadurıs. Demek, teńsizliktiń sheshimlerge iye emes.

Juwabı: sheshimleri joq. ▲

Shinigiwlar

219. Tastiyoqlawlardı teńsizlik kóriniside jazıń:

- 1) x hám 17 sanlarınıń qosındısı 18 den úlken;
- 2) 13 hám x sanlarınıń ayırması 2 den kishi;
- 3) 17 hám x sanlarınıń kóbeymesi 3 den kishi emes;
- 4) x hám -3 sanlarınıń qosındısının eki eselengeni 2 den úlken emes;
- 5) x hám 3 sanlarınıń qosındısının yarımı olardıń kóbeytindisinen kishi emes.
- 6) x hám -4 sanlarınıń kóbeymesinin eki eselengeni, olardıń ayırmasınan kishi emes.

220. 10, $\frac{1}{2}$, 0, -1 sanlarınan qaysıları tómendegi teńsizliktiń sheshimi boladı:

- 1) $3x + 4 > 2$; 2) $3x + 4 \leq x$; 3) $\frac{1}{2}x - 3 > \leq 1 - x$;
- 4) $3 - x \geq \frac{1}{2}x$; 5) $0,8x + 5 > 7$; 6) $0,2x - 4 \leq -2$?

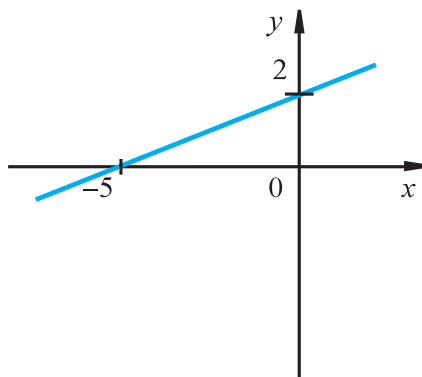
221. y tiń qanday mánislerinde teńsizlik durıs boladı:

- 1) $-2y > 0$; 2) $-3y < 0$; 3) $y^2 + 1 \geq 0$;
- 4) $2y^2 + 3 \leq 0$; 5) $(y - 1)^2 \leq 0$; 6) $(y + 2)^2 \geq 0$?

222. 19- súwrette $y = kx + b$ sıızqlı funkciyasınıń grafigi súwretlengen.

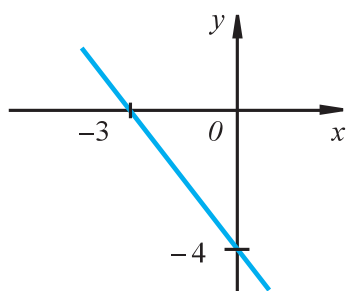
- 1) $x \geq 0$; 2) $x < 0$;
- 3) $x > -5$; 4) $x \leq -5$

bolğanda y qanday mánislerdi qabıl etetuğınlğıń teńsizlik túrinde jazıń.



19- súwret.

223. 20- súwrette $y = kx + b$ sıızqlı funkciyasınıń grafigi yasınıń grafigi kórsetilgen. x tiń qanday mánislerinde y funkciyasınıń mánisleri: 1) oń; 2) teris emes; 3) teris; 4) -4 ten kishi; 5) -4 ten kishi emes; 6) -4 ten úlken bolıwın teńsizlik járdeminde kórsetiń.



20- súwret.

224. Funkciyanıń grafigin jasań hám grafik boyınsha x tiń qanday mánislerinde funksiya: 1) oń; 2) teris; 3) nolge teń; 4) 1 den úlken; 5) 1 den kishi mánislerdi qabıl etiwın tabıń:

- 1) $y = 2x + 4$; 2) $y = 3x - 9$;
3) $y = -2x - 8$; 4) $y = -3x + 6$.

Teńsizliklerdi sheshiń (**225–226**):

- 225.** 1) $x + 2 \geq 15$; 2) $x - 6 < 8$; 3) $3 \leq y + 6$;
4) $-4 > 5 - y$; 5) $2z \geq z - 7$; 6) $3z \leq 2z + 4$.
226. 1) $12x > -36$; 2) $-7x \leq 56$; 3) $\frac{y}{4} \leq 7$;
4) $-5 < \frac{z}{3}$; 5) $7,2z > -27$; 6) $-4,5x \geq 9$.

Teńsizlikti sheshiń hám onıń sheshimleriniń kópigin san kósherinde kórsetiń (**227–228**):

- 227.** 1) $2x - 16 > 0$; 2) $18 - 3x > 0$; 3) $3x - 15 < 0$;
4) $25 - 5x < 0$; 5) $9 - 3x \geq 0$; 6) $2x + 4 \leq 0$;
7) $6 - 2x \leq 0$; 8) $1,8 + 3x \geq 0$; 9) $-4x + 2 \leq 0$.
228. 1) $3(x + 1) \leq x + 5$; 2) $4(x - 1) \geq 5 + x$;
3) $2(x - 3) + 4 < x - 2$; 4) $x + 2 < 3(x + 2) - 4$;
5) $\frac{x-1}{3} \geq \frac{3x-3}{5}$; 6) $\frac{3x-2}{4} \geq \frac{2x-1}{3}$.

229. x tiń qanday mánislerinde ańlatpa oń mánislerdi qabıl etetuǵınlıǵın ańıqlań:

- 1) $\frac{3}{8}x + 4$; 2) $\frac{5}{2} - 4x$; 3) $2(x + 3) + 3x$;
4) $3(x - 5) - 8x$; 5) $\frac{1}{3} - 2(x + 4)$; 6) $\frac{1}{2} - 3(x - 5)$.

230. y tiń qanday mánislerinde ańlatpa teris bolatuǵının ańqlań:

- 1) $5 - \frac{2}{3}y$; 2) $\frac{3}{4} - 2y$; 3) $\frac{y-2}{3} + \frac{1}{3}$;
 4) $\frac{8y-3}{5} - \frac{2}{5}$; 5) $\frac{3y-5}{2} - \frac{y}{2}$; 6) $\frac{4-5y}{6} - \frac{y}{6}$.

231. Teńsizliktiń sheshimi bolatuǵın eń kishi pútin sandı tabıń:

- 1) $4(y-1) < 2 + 7y$;
 2) $4y - 9 \geq 3(y-2)$;
 3) $3(x-2) - 2x < 4x + 1$;
 4) $6x + 1 \geq 2(x-1) - 3x$.

232. Teńsizliktiń sheshimi bolatuǵın eń úlken pútin sandı tabıń:

- 1) $5 - 2x > 0$; 2) $6x + 5 \leq 0$;
 3) $3(1-x) > 2(2-x)$; 4) $4(2-x) < 5(1-x)$.

233. 1) a nıń qanday mánislerinde $\frac{a}{3}$ bólshegi $\frac{a+1}{4}$ bólsheginıń sanlı mánis-inen úlken boladı?

2) b nıń qanday mánislerinde $\frac{b+3}{2}$ bólshegi $\frac{b-1}{5}$ bólsheginıń sanlı mánis-inen kishi boladı?

3) x nıń qanday mánislerinde $\frac{3x-5}{6}$ bólshek $\frac{6x-7}{15}$ hám $\frac{3-x}{9}$ bólshek-leriniń ayırmasınan úlken boladı?

4) x nıń qanday mánislerinde $\frac{2-5x}{4}$ hám $\frac{7x-3}{6}$ qosındısıniń sanlı mánisi

$\frac{2x+5}{18}$ bólshekten kishi boladı?

Teńsizliklerti sheshiń (**234–236**):

234. 1) $3(x-2) + x < 4x + 1$; 2) $5(x+2) - x > 3(x-1) + x$;

3) $\frac{3x+6}{4} - \frac{x}{4} > \frac{x+2}{2}$; 4) $\frac{2x-1}{5} - 4 < x - \frac{3x+1}{5}$.

- 235.** 1) $5(x+2) + 2(x-3) < 3(x-1) + 4x$;
 2) $3(2x-1) + 3(x-1) > 5(x+2) + 2(2x-3)$;
 3) $\frac{5x+3}{2} - 1 \geq 3x - \frac{x-7}{2}$; 5) $\frac{3x+2}{4} - 1 \leq 2x + \frac{x-5}{2}$;
 4) $2 - \frac{x-4}{3} \leq 2x - \frac{7x-4}{3}$; 6) $3 - \frac{x-1}{2} \geq 3x - \frac{5x-3}{3}$.
- 236.** 1) $\frac{2}{3x+6} < 0$; 2) $\frac{3}{2x-4} > 0$; 3) $\frac{-1,7}{0,5x-2} > 0$;
 4) $\frac{-2,3}{0,4x+8} < 0$; 5) $\frac{-1,7}{2,1+6,3x} < 0$; 6) $\frac{-3,8}{3,2-6,4x} > 0$.
- 237.** x tiñ qanday mánislerinde $y=2,5x-4$ funkciyanıń mánisi: 1) oń; 2) teris; 3) 1 den úlken; 4) -4 den kishi boladı?
- 238.** x tiñ qanday mánislerinde $y=3,5-0,5x$ funkciyanıń mánisi: 1) oń; 2) teris emes; 3) 3,5 ten úlken emes; 4) 1 den kishi boladı?
- 239.** $y=3-2x$ funkciyanıń grafigin jasań. Grafik járdeminde x tiñ grafik noqatları: 1) abscissalar kósherinen joqarıda; 2) $y=2$ tuwrı sızıǵınan joqarıda; 3) abscissalar kósherinen tómende; 4) $y=4$ tuwrı sızıǵınan tómende jaylasqan mánislerin tabıń.
 Nátiyjelerdi tiyisli teńsizliklerdi sheshiw jolı menen tekserip kóriń.
- 240.** Ustalar joba boyınsha 40 besik tayarlawı kerek edi. Olar jobanı 10% ten kóbirek etip orınlawı ushın neshe besik tayarlawı kerek?

16- §. BIR BELGISIZLI TEŇSIZLIKLER SISTEMALARÍ. SANLÍ ARALÍQLAR

1. Teńsizlikler sistemaları.

Másele. Sıyımlılıǵı 4000 / bolǵan bos háwiz suw menen toltırıla baslandı. Usı háwizdiń 4 saattan keyin yarımınan kóbireginiń tolıwı hám 5 saattan keyin háwizdiń tolıq tolıp tasıp ketpewi ushın, usı háwizge saatına neshe litrden suw quyıw kerek?

△ x litr – h wizge 1 saat ishinde quyilatug n suw muɡdarı bolsın. M sele-ni  sh rti boyınsha $4x > 2000$, $5x \leq 4000$.

Birinshi te nsizlikten $x > 500$, ekinshi te nsizlikten $x \leq 800$ kelip shıɡadı.

Juwabi: H wizge saatına 500 l den k p, biraq 800 l den k p bolmaɡan suw quyıw gerek. ▲

$4x > 2000$ h m $5x \leq 4000$ te nsizligindeki belgisiz sanlar birdey san, yaɡniy x sanı boladı. Sonı  ushin, bul te nsizlikler birgelikte qaraladı h m olar t men-degi *te nsizlikler sisteması* n quraydı, dep uy arıladı:

$$\begin{cases} 4x > 2000, \\ 5x \leq 4000. \end{cases} \quad (1)$$

Figuralı qawsırma, x tı  (1) sisteması nı  eki te nsizligini  de durıs sanlı te nsizlikke aylandırıwshı m nislerin tabıw kerekligin bildiredi.

(1) sistema *bir belgisizli sıızqlı te nsizlikler sistemasına* mısıl boladı.

Ta ı da sıızqlı te nsizlikler sistemasına keltiriletug n bir belgisizli te nsizlikler sistemalarına mısallar keltiremiz:

$$\begin{cases} 3(x+1) > 5, \\ 4(x-1) > x-2; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x-1 \geq 3x, \\ 5(x-1) \leq 8, \\ x-1 > 5. \end{cases}$$



Bir belgisizli te nsizlikler sisteması nı  sheshimi dep, belgisizdi  sistema te nsizliklerini  barlı n durıs sanlı te nsizliklerge aylandırıwshı m nislerine aytladı.

Te nsizlikler sisteması n sheshiw – onı  barlı  sheshimlerin tabıw yamasa olardı  jo  ekenligin anıqlawdan ibarat.

Mısalı, $x=1$ mına

$$\begin{cases} 2x \geq -4, \\ 3x \leq 9 \end{cases} \quad (2)$$

sisteması nı  sheshimi boladı, sebebi $x=1$ bol anda (2) sisteması nı  eki te nsizligi de durıs boladı:

$$\begin{cases} 2 \cdot 1 \geq -4, \\ 3 \cdot 1 \leq 9. \end{cases}$$

(2) sistema birinshi teńsizliktiń eki jaǵın 2 ge, ekinshi teńsizliktiń eki jaǵın 3 ke bólip,

$$\begin{cases} x \geq -2, \\ x \leq 3 \end{cases}$$

ti payda etemiz. Demek, (2) sistemanıń sheshimleri x tiń -2 den kishi bolmaǵan hám 3 den úlken bolmaǵan barlıq mánislerinen ibarat boladı.

$x \geq -2$ hám $x \leq 3$ teńsizliklerdi qos teńsizlik túrinde jazıwǵa boladı:

$$-2 \leq x \leq 3.$$

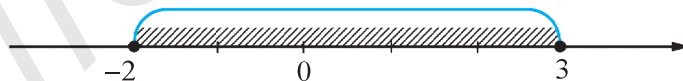
2. Sanlı aralıqlar.

Bir belgisizli teńsizlikler sistemalarınıń sheshimleri hár túrli sanlı kóplikler boladı. Bul kóplikler ózleriniń atamalarına iye.



Eger $a < b$ bolsa, onda $a \leq x \leq b$ teńsizligin qanaatlandırıwshı x sanlarınıń kópligi kesindi dep ataladı hám $[a; b]$ kórinisinde belgilenedi.

Máselen, san kósherinde x tiń $-2 \leq x \leq 3$ bolatuǵın san mánisleri kópligi, ushları -2 hám 3 noqatlarında bolǵan kesindi menen súwretlep kórsetiledi (21-súwret).



21- súwret.

Sonıń ushın $-2 \leq x \leq 3$ teńsizligin qanaatlandırıwshı x sanlar kópligi kesindi dep ataladı hám $[-2; 3]$ túrinde belgilenip jazıladı.

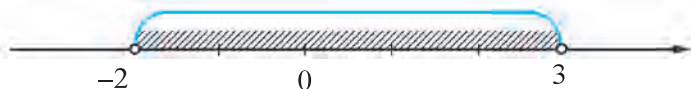
Mısalı, $[4; 7]$ kesindisi – mına $4 \leq x \leq 7$ teńsizligin qanaatlandırıwshı x sanlar kópligi boladı.

$2 < x < 7$, $-1 \leq x < 2$, $4 < x \leq 7$ túrindegi teńsizliklerdi qanaatlandırıwshı sanlardıń kópligi ushın da basqasha atamalar qollanıladı.



Eger $a < b$ bolsa, onda $a < x < b$ teńsizligin qanaatlandırıwshı x sanlar kópłigi interval dep ataladı hám $(a; b)$ túrinde belgilenip jazıladı.

Mısalı, $(-2; 3)$ intervalı – mına $-2 < x < 3$ teńsizligin qanaatlandırıwshı x sanlarınń kópłigi boladı. (22-súwret).



22- súwret.



$a \leq x < b$ yamasa $a < x \leq b$ teńsizliklerin qanaatlandırıwshı x sanlar kópłigi yarım intervallar dep ataladı hám sáykes túrde $[a; b)$ hám $(a; b]$ túrinde belgilenip jazıladı.

Mısalı, $[-1; 2)$ yarım intervalı – mına $-1 \leq x < 2$ teńsizligin qanaatlandırıwshı x sanlarınń kópłigi; $(4; 7]$ yarım intervalı – mına $4 < x \leq 7$ teńsizligin qanaatlandırıwshı x sanlarınń kópłigi boladı (23-súwret).



23- súwret.

Kesindiler, intervallar, yarım intervallar hám nurlar *sanlı aralıqlar* dep ataladı.

Solay etip, sanlı aralıqlardı teńsizlikler túrinde kórsetip beriw múmkin. Teńsizlikler sistemasın sheshiwge tiyisli mısallardı kórip shıǵamız.

1- másele. Teńsizlikler sistemasın sheshiń:

$$\begin{cases} 5x - 1 > 3(x + 1), \\ 2(x + 4) > x + 5. \end{cases} \quad (1)$$

△ Birinshi teńsizlikti sheshemiz:

$$5x - 1 > 3x + 3,$$

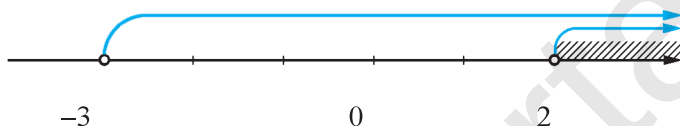
$$2x > 4, \quad x > 2.$$

Solay etip, birinshi teńsizlik $x > 2$ bolǵanda orınlanadı.
Ekinshi teńsizlikti sheshemiz:

$$2x + 8 > x + 5, \quad x > -3.$$

Solay etip, (1) sistemasınıń ekinshi teńsizligi $x > -3$ bolǵanda orınlanadı.
San kósherinde (1) sistemanıń birinshi hám ekinshi teńsizlikleriniń sheshimleri kópliklerin súwretlep kórsetemiz.

Birinshi teńsizliktiń sheshimleri $x > 2$ nurınıń barlıq noqatları, al ekinshi teńsizliktiń sheshimleri $x > -3$ nurdıń barlıq noqatları boladı (24-súwret).



24- súwret.

(1) sistemanıń sheshimleri x tiń eki nurgá bir waqıtta tiyisli bolǵan mánisleri boladı. Súwretten kórinip turǵanıday, bul nurlardıń barlıq ulıwma noqatları kópligi $x > 2$ nur boladı.

Juwabı: $x > 2$. ▲

2- másele. Teńsizlikler sistemasın sheshiń:

$$\begin{cases} 3(x-1) \leq 2x+4, \\ 4x-3 \geq 13. \end{cases} \quad (2)$$

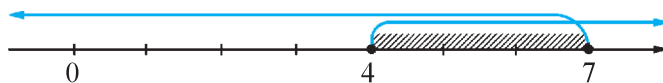
△ Birinshi teńsizlikti sheshemiz:

$$\begin{aligned} 3x - 3 &\leq 2x + 4, \\ x &\leq 7. \end{aligned}$$

(2) sistemanıń ekinshi teńsizligin sheshemiz:

$$\begin{aligned} 4x &\geq 16, \\ x &\geq 4. \end{aligned}$$

San kósherinde (2) sistemanıń birinshi hám ekinshi teńsizlikleriniń sheshimleri kópligin súwretlep kórseteyik. Birinshi teńsizliktiń sheshimleri $x \leq 7$ nuri ekinshi teńsizliktiń sheshimleri $x \geq 4$ nur boladı (25-súwret).



25-súwret.

Súwretten kórinip turǵanıday, bul nurlardıń ulıwma noqatları kópligi $[4; 7]$ kesindisi boladı.

Juwabı: $4 \leq x \leq 7$. ▲

3- másele. Teńsizlikler sistemasın sheshiń:

$$\begin{cases} \frac{5x}{12} + \frac{4}{3} \geq \frac{x+1}{3}, \\ 2 - \frac{5x}{14} < \frac{2-x}{2}. \end{cases} \quad (3)$$

△ (3) sistemaniń birinshi teńsizligin sheshemiz:

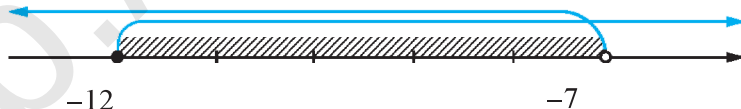
$$\begin{aligned} 5x + 16 &\geq 4x + 4, \\ x &\geq -12. \end{aligned}$$

Ekinshi teńsizlikni sheshemiz:

$$\begin{aligned} 28 - 5x &< 14 - 7x, \\ 2x &< -14, \\ x &< -7. \end{aligned}$$

San kósherinde $x \geq -12$ hám $x < -7$ nurların súwretleymiz. (26- súwret.). Súwretten kórinip turǵanıday, bul nurlardıń ulıwma noqatları kópligi $[-12; -7)$ yarım interval boladı.

Juwabı: $-12 \leq x < -7$. ▲



26- súwret.

4- másele. Mına

$$\begin{cases} 2(1-x) < 4-3x, \\ 10-3x < 1 \end{cases} \quad (4)$$

teńsizlikler sisteması sheshimge iye emesligin kórsetiń.

△ Birinshi ténsizlikni sheshemiz:

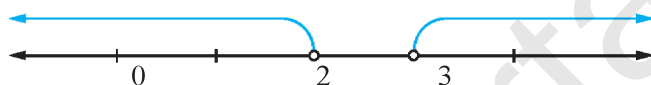
$$2 - 2x < 4 - 3x, \quad x < 2.$$

(4) sistemasınıń ekinshi ténsizligin sheshemiz:

$$\begin{aligned} -3x &< -9, \\ x &> 3. \end{aligned}$$

San kósherinde $x < 2$ hám $x > 3$ nurların súwretleybiz (27-súwret).

Súwrette kórinip turǵanıday, bul nurlar noqatlarga iye emes. Demek, (4) sistema sheshimge iye emes. ▲



27-súwret.

Shınıǵıwlar

241. -3 ; 0 ; 5 sanlarınıń qaysıları mına ténsizlikler sistemasınıń sheshimleri boladı:

$$\begin{aligned} 1) \begin{cases} 5 - x \leq 9, \\ 2 - 3x > -4; \end{cases} & 2) \begin{cases} \frac{1}{3}x - 2 > 1, \\ 5 - 2x > -25; \end{cases} & 3) \begin{cases} 0,5x + 3 > 4, \\ 7 - x > 1? \end{cases} \end{aligned}$$

242. -2 ; 0 ; 1 sanlarınıń qaysıları mına ténsizlikler sistemasınıń sheshimleri boladı

$$1) \begin{cases} 12x - 1 < 11, \\ -3 - x \leq 0; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 4x - 1 \geq 4 - x, \\ x + 6 > 2? \end{cases}$$

243. Tómenдеgi ténsizlikler sistemasınıń sheshimi bola alatuǵın barlıq pütün sanlardı tabıń:

$$\begin{aligned} 1) \begin{cases} x > 2, \\ x < 7; \end{cases} & 2) \begin{cases} x \leq 3, \\ x > -1; \end{cases} & 3) \begin{cases} x \leq 2, 7, \\ x \geq 0; \end{cases} & 4) \begin{cases} x \geq -5, 1, \\ x < 5, 1. \end{cases} \end{aligned}$$

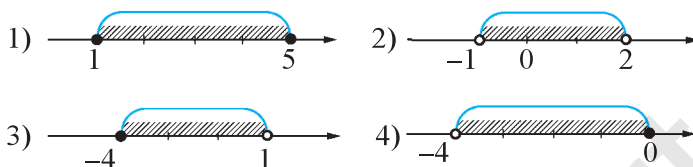
244. Berilgen qos ténsizlikni qanaatlardıwshı x sanlarınıń kópligin sanlı aralıqlardıń belgileniwlerinen paydalanıp jazıń:

$$\begin{aligned} 1) 1 \leq x \leq 5; & 2) -1 \leq x \leq 3; & 3) -1 < x < 4; \\ 4) 1 < x < 2; & 5) -3 \leq x < 1; & 6) -4 < x \leq -2. \end{aligned}$$

245. Berilgen sanlı aralıqqa tiyisli x sanlariniń kópligin qos teńsizlik kóriniside jazıń hám onı san kósherinde súwretleń:

- 1) $[-4; 0]$; 2) $[-3; -1]$; 3) $(-4; -2)$;
4) $(0; 3)$; 5) $(-1; 4]$; 6) $[-2; 2)$.

246. 28-súwrette berilgen x sanlariniń kópligin qos teńsizlik túrinde, son-day-aq, sanlı aralıqtıń belgileniwleri járdeminde jazıń:

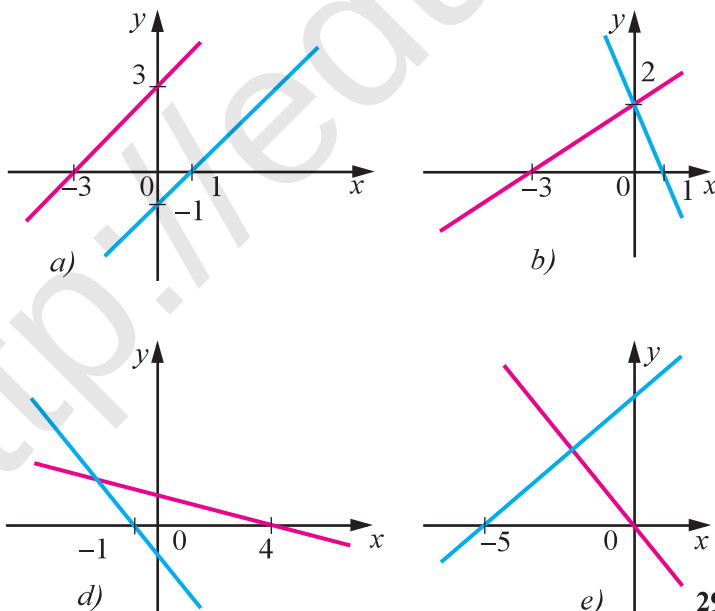


28-súwret.

247. $[2; 3]$ kesindisi $(1; 4)$ aralıǵına tiyisli me?

248. $[2; 4]$ hám $[3; 5]$ kesindileri uluwma noqatqa iye bola ma?

249. Bir koordinata tegisliginde eki sıızıqlı funkciyanıń grafikleri súwretlengen (29-súwret). x tiń qanday mánislerinde usı eki funkciyanıń mánisi bir waqıtta oń boladı? Al, qanday mánislerinde bir waqıtta teris boladı?



29-súwret.



№ 3

*Tuwrımıyeshliktiń tárepleri natural sanlar menen ańlatıladi.
Tuwrımıyeshlik perimetriniń shaması onıń maydanınıń shamasına
teń bolıwı ushın olar qanday uzınlıqlarǵa iye bolıwı kerek?*

250. Bir koordinata tegisliginde $y = -2x - 2$ hám $y = 2 - \frac{x}{2}$ funkciyasınıń grafiklerin jasań. Abscissalar kósherinde x tiń eki funkciyasınıń mánisleri: 1) oń; 2) teris bolatuǵın mánisleriniń kópligin belgileń.

251. Teńsizlikti sheshiń:

- 1) $(x - 3)(2x - 3) + 6x^2 \geq 2(2x - 3)^2$;
- 2) $(5 - 6x)(1 + 3x) + (1 + 3x)^2 \leq (1 + 3x)(1 - 3x)$;
- 3) $(2x + 1)(4x^2 - 2x + 1) - 8x^3 \geq -2(x + 3)$;
- 4) $(x - 2)(x^2 + 2x + 4) \leq x(x^2 + 2) + 1$.

Teńsizlikler sistemasınıń barlıq sheshimlerin tek bir teńsizlik penen jazıń hám sheshimlerdiń kópligin san kósherinde súwretleń (**252–253**):

252. 1) $\begin{cases} x > 2, \\ x > 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x > 0, \\ x > -1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x > 2, \\ x \geq -3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x \geq -2, \\ x \geq -4. \end{cases}$

253. 1) $\begin{cases} x \leq 1, \\ x < 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x < 0, \\ x < -1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x < -2, \\ x < -5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x \leq 1, \\ x \leq 0. \end{cases}$

Teńsizlikler sistemasınıń barlıq sheshimlerin qos teńsizlik túrinde jazıń hám bul kóplikti san kósherinde súwretleń (**254–255**):

254. 1) $\begin{cases} x > 2, \\ x < 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x > 3, \\ x < 6; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x < 0, \\ x \geq -2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x \geq 0, \\ x < \frac{1}{2}. \end{cases}$

255. 1) $\begin{cases} x \leq -2, \\ x \geq -7,5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x < 1,5, \\ x \geq -1,5; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x \geq 0,8, \\ x < 2,2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x \leq 7,5, \\ x \geq -0,5; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x \geq -2, \\ x \leq 2; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x < 3,5, \\ x > 0. \end{cases}$

Тенсізліклер системасын шешің (256–259):

256. 1) $\begin{cases} 3x - 18 > 0, \\ 4x > 12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7x - 14 \geq 0, \\ 2x \geq 8; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x + 5 > 0, \\ 3x + 6 \geq 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x + 7 \geq 0, \\ 5x + 15 > 0; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 5x + 10 > 0, \\ 3x \leq 9; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 4x - 7 < 0, \\ 2x + 1 \geq 0. \end{cases}$

257. 1) $\begin{cases} 3 - 2x \geq 0, \\ 4x + 8 < 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + 4 \leq 0, \\ 4 - 3x > 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x + 3 \leq 0, \\ 3x + 9 \leq 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x - 9 < 0, \\ 12 > 3x; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 24 < 6x, \\ 3x \geq 2; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 7x + 14 > 0, \\ 3x - 6 \leq 0. \end{cases}$

258. 1) $\begin{cases} 7 - 2x \geq 0, \\ 5x - 20 < 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + 5 \leq 0, \\ 9x + 18 \leq 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 6 - 2x > 0, \\ 3x + 6 > 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 10 - 2x \geq 0, \\ 4x - 8 \geq 0; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 5x - 12 \geq 0, \\ 15 - 3x \leq 0; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 6 - 4x \leq 0, \\ 3x + 9 > 0. \end{cases}$

259. 1) $\begin{cases} 3x + 3 \leq 2x + 1, \\ 3x - 2 \leq 4x + 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x + 2 \geq 5x + 3, \\ 2 - 3x < 7 - 2x; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5(x + 1) - x > 2x + 2, \\ 4(x + 1) - 2 < 2(2x + 1) - x; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2(x - 1) - 3 < 5(2x - 1) - 7x, \\ 3(x + 1) - 2 \leq 6(1 - x) + 7. \end{cases}$

260. Теңsizlikler sistemasınıń sheshimleri bolǵan barlıq pútin sanlardı tabıń:

$$1) \begin{cases} 0,2x > -1, \\ -\frac{x}{3} \geq 1; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 1-0,5x \geq 0, \\ -\frac{x+5}{5} < -1; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} \frac{x-1}{2} < \frac{x}{3}, \\ \frac{x+1}{2} \geq \frac{x}{5}; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} \frac{x-1}{4} \leq \frac{x}{5}, \\ \frac{x}{3} > \frac{x+4}{7}; \end{cases} \quad 5) \begin{cases} 0,4x > -2, \\ 0,3x < 1; \end{cases} \quad 6) \begin{cases} 1+0,2x \geq 0, \\ 0,5x-1 < 0. \end{cases}$$

261. x tiń qanday mánislerinde $y=0,5x+2$ hám $y=3-3x$ funkciyasınıń mánisleri bir waqıtta: 1) óń; 2) teris; 3) 3 ten úlken; 4) 3 ten kishi boladı?

262. x tiń qanday mánislerinde $y=x-2$ hám $y=0,5x+1$ funkciyasınıń mánisleri bir waqıtta: 1) teris emes; 2) óń emes; 3) 4 ten kishi emes; 4) 4 ten úlken emes boladı?

263. Úshmúyeshliktiń bir tárepi 5 m, al ekinshi tárepi bolsa 8 m. Eger, úshmúyeshliktiń perimetri: 1) 22 m den kem; 2) 17 m den artıq bolsa, onıń úshinshi tárepi qanday bolıwı múmkin?

264. Eger pútin sannıń $\frac{3}{2}$ úlesinen, onıń $\frac{1}{4}$ úlesin alsaq, onda 29 dan úlken san payda boladı, eger usı sannıń $\frac{3}{2}$ úlesinen onıń $\frac{1}{3}$ úlesin alsaq, onda 29 dan kishi san payda boladı. Usı pútin sandı tabıń.

265. Eger pútin sannıń eki eselengen kóbeymesine onıń yarımı qosılsa, onda 92 den kishi san payda boladı, eger usı pútin sannıń eki eselengen kóbeymesinen onıń yarımı alınsa, onda 53 ten úlken san payda boladı. Usı pútin sandı tabıń.

17-§. SANNIŇ MODULI. MODUL QATNASQAN TEŇLEME HÁM TEŇSIZLIKLER

1. SanniŇ moduli.

SanniŇ moduli túsiniġin eske túsirip óteyik:

1) *Oñ sanniŇ moduli, usı sanniŇ ózine teŇ.*

Máselen, $|3| = 3$, $|\frac{2}{7}| = \frac{2}{7}$, $|2,4| = 2,4$.

2) *Teris sanniŇ moduli oġan qarama-qarsı sanġa teŇ.*

Máselen, $|-2| = -(-2) = 2$, $|\frac{5}{6}| = -(-\frac{5}{6}) = \frac{5}{6}$, $|-1,5| = -(-1,5) = 1,5$.

3) *NoldiŇ moduli nolge teŇ:* $|0| = 0$.

Solay etip, san moduliniŇ anıqlaması tómendegishe boladı:

$$|a| = a, \text{ eger } a \geq 0 \text{ bolsa;}$$

$$|a| = -a, \text{ eger } a < 0 \text{ bolsa.}$$

Bul anıqlama formula menen qısqasha tómendegishe jazıladı:

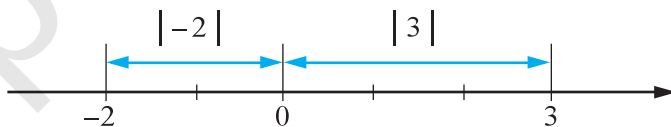
$$|a| = \begin{cases} a, & \text{eger } a \geq 0 \text{ bolsa;} \\ -a, & \text{eger } a < 0 \text{ bolsa.} \end{cases}$$

San moduliniŇ geometriyalıq maġanasın qarap óteyik.

San kósherinde, misalı, 3 hám -2 noqatların súwretlep kórseteyik (30-súwret).

Súwretten kórinip turġanıday $|3| = 3$ – bul 0 noqatınan 3 noqatına shekemgi

aralıq, al $|-2| = 2$ – bul 0 noqatınan - 2 noqatına shekemgi aralıq.



30- súwret.

Solay etip, $|a|$ – a sanniŇ moduli, geometriyalıq kóz-qarastan qaraġanımda, 0 noqatınan a sanın súwretlep kórsetiwshi noqatqa shekemgi aralıq boladı.

2. Belgisizi modul belgisi menen berilgen teńlemeler.

1-másele. Teńlemenı sheshiń:

$$|x| = 7.$$

△ 1) $|x| \geq 0$ bolsın. Onda moduldiń anıqlaması boyınsha $|x| = x$ hám teńleme tómendegishe kóriniske iye boladı:

$$x = 7,$$

yaǵnıy, $x = 7$ — berilgen teńlemenıń koreni boladı;

2) $|x| < 0$ bolsın. Onda moduldiń anıqlaması boyınsha $|x| = -x$ bolıp teńleme tómendegidey kóriniske iye boladı:

$$-x = 7,$$

bunda $x = -7$ — berilgen teńlemenıń koreni boladı;

Juwabı: $x_1 = 7, x_2 = -7$. ▲

2- másele. $|3x + 2| = 1$ teńlemenı sheshiń.

△ 1) $3x + 2 \geq 0$ bolsın. Bunda $3x + 2 = 1, 3x = -1, x = -\frac{1}{3}$;

2) $3x + 2 < 0$ bolsın. Bunda $3x + 2 = -1, 3x = -3, x = -1$.

Juwabı: $x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = -1$. ▲

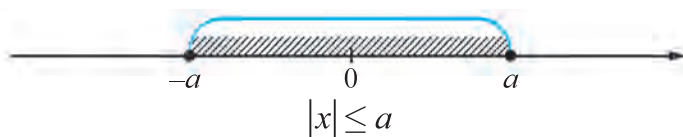
3. Belgisizi modul belgisi menen berilgen teńsizlikler.

Mına

$$|x| \leq a, \text{ bunda } a > 0$$

teńsizlikti qaraymız.

Bul teńsizlikti 0 noqatınan baslap a sanınan úlken bolmaǵan aralıqta jatıwshı barlıq x noqatları, yaǵnıy $[-a; a]$ kesindisiniń noqatları qanaatlandıradı (31-súwret).



31- súwret.

$[-a; a]$ kesindisi – muna $-a \leq x \leq a$ teńsizliklerdi qanaatlandırıwshı x sanlarınıń kópłigi boladı.



Demek, $|x| \leq a$ teńsizlik $-a \leq x \leq a$ qos teńsizliginiń tap ózin ańlatadı, bunda $a > 0$.

Máselen, $|x| \leq 2,5$ teńsizligi $-2,5 \leq x \leq 2,5$ ti bildiredi; $|x| < 3$ teńsizlik $-3 < x < 3$ ti bildiredi.

3- másele. $|5 - 3x| < 8$ teńsizlikti sheshiń.

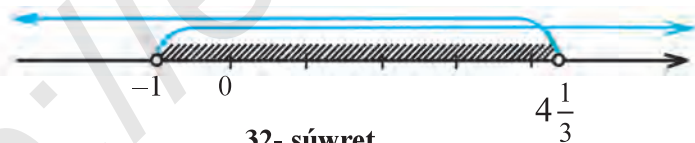
△ Berilgen teńsizlikti mınaday túrde jazıp alamız:

$$-8 < 5 - 3x < 8.$$

Bul qos teńsizlik tómendegi teńsizlikler sistemasınıń dál ózin ańlatadı:

$$\begin{cases} 5 - 3x < 8, \\ 5 - 3x > -8. \end{cases}$$

Bul sistemanı sheship, $-1 < x < 4\frac{1}{3}$ ekenin tabamız (32-súwret). ▲



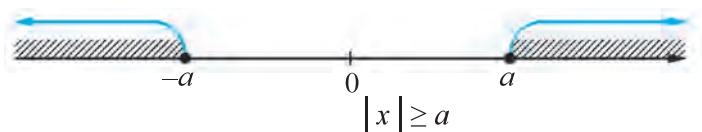
32- súwret

Mına

$$|x| \geq a, \text{ bunda } a > 0,$$

teńsizlikti qaraymız.

Bul teńsizlikti 0 noqatınan a dan kishi bolmağan aralıqta jatıwshı barlıq x no-qatlarınıń kópłigi, yaǵnıy $x \geq a$ hám $x \leq -a$ nurlarınıń noqatları qanaatlandıradı (33-súwret).



33-súwret.

4- másele. Teńsizlikti sheshiń: $|x - 1| \geq 2$.

△ 1) $x - 1 \geq 0$ bolsın. Bunda $x - 1 \geq 2$. Tóمندegi teńsizlikler sistemasın payda etemiz:

$$\begin{cases} x - 1 \geq 0, \\ x - 1 \geq 2. \end{cases}$$

Bul sistemani sheship, $x \geq 3$ ti tabamız.

2) $x - 1 < 0$ bolsın. Bunda $-(x - 1) \geq 2$ yaki $x - 1 \leq -2$.

Sonda mına tóمندegi teńsizlikler sistemasın payda etemiz:

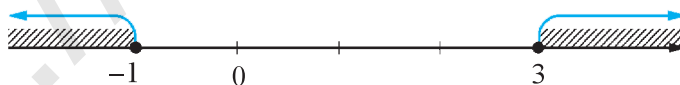
$$\begin{cases} x - 1 < 0, \\ x - 1 \leq -2. \end{cases}$$

Bul sistemani sheship, $x \leq -1$ di tabam.

Solay etip, $|x - 1| \geq 2$ teńsizliginiń sheshimleri birinshiden, $x \geq 3$ sanlar, al ekinshiden $x \leq -1$ sanlar boladı.

Juwabı: $x \leq -1, x \geq 3$. ▲

$|x - 1| \geq 2$ teńsizliktiń sheshimleri 34-súwrette berilgen.



34-súwret.

Eger

$$|x| \leq a$$

teńsizliginde a sanı nolge teń bolsa, onda teńsizlik $x = 0$ den ibarat bolğan tek bir ğana sheshimge iye boladı; aytayıq, eger $a < 0$ bolsa, onda teńsizlik sheshimlerge iye bolmaydı.

Eger

$$|x| \geq a$$

teńsizliginde a san nolden kishi yaki oǵan teń bolsa, onda qálegen san onıń sheshimi boladı.

Shınıǵıwlar

266. (Awızeki) Sannıń moduli nege teń:

- 1) 23; 2) 4,7; 3) $\frac{2}{7}$; 4) -47; 5) -2,1; 6) $-\frac{3}{8}$?

Tenlemenı sheshin (**267–270**):

267. 1) $|x| = 2,5$; 2) $|x| = 1,5$; 3) $|x - 1| = 2$;

4) $|x + 3| = 3$; 5) $|x + 4| = 4$; 6) $|x - 4| = 4$.

268. 1) $|x + 4| = 0$; 2) $|x - 2| = 0$; 3) $|2x - 3| = 0$;

4) $|3 - 4x| = 0$; 5) $|7 + 3x| = 0$; 6) $|2x + 5| = 0$.

269. 1) $|3x - 5| = 5$; 2) $|4x + 3| = 2$; 3) $\left|\frac{2}{3}x + \frac{1}{6}\right| = \frac{1}{3}$;

4) $\left|\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{4}$; 5) $|7x - 10| = 4$; 6) $|0,5 - 2x| = 2,5$.

270. 1) $|-x| = 3,4$; 2) $|-x| = 2,1$; 3) $|5 - x| = 5$;

4) $|3 - x| = 8$; 5) $|x - 7| = 1$; 6) $|5 - x| = 2$.

271. Teńsizliktiń sheshimleriniń kópligin san kósherinde súwretleń:

1) $|x| < 5$; 2) $|x| \leq 4$; 3) $|x| \leq 4$; 4) $|x| > 2$.

272. Moduli teńsizlikti qos teńsizlik túrinde:

1) $|x| \geq 3$; 2) $|x| < 2$; 3) $|x| < 3,5$; 4) $|x| \leq 2,4$.

273. Qos ténsizlikni bir modulli ténsizlik túrinde jazín:

1) $-3,1 < x < 3,1$; 2) $-0,3 \leq x \leq 0,3$; 3) $-4,8 < x < 4,8$.

Ténsizliklarni sheshín (**274–277**):

274. 1) $|1 + x| \leq 0,3$; 2) $|2 + x| < 0,2$; 3) $|3 - x| \leq \frac{2}{3}$;

4) $|1 - x| < \frac{3}{4}$; 5) $|x - 1| \leq 1$; 6) $|x - 4| \leq 2$.

275. 1) $|3x - 4| < 5$; 2) $|2x + 3| < 3$; 3) $|2 - 3x| \leq 2$;

4) $|5 - 4x| \leq 1$; 5) $|4x - 1| < 7$; 6) $|3 - 2x| \leq 3$.

276. 1) $|x + 1| > 1,3$; 2) $|x - 2| \geq 1,1$; 3) $|1 - x| \geq \frac{1}{2}$;

4) $|3 - x| > \frac{2}{3}$; 5) $|x - 1| > 3,8$; 6) $|5 - 4x| \leq 1$.

277. 1) $|4x - 3| \geq 3$; 2) $|3x + 2| > 1$; 3) $|3x - 2| > 4$;

4) $|4 - 5x| \geq 4$; 5) $|6x - 1| \leq 2$; 6) $|3 - 5x| \geq 2$.

278. x tiń tómendegi orınlanatugın barlıq pútın mánislerin tabín:

1) $|5x - 2| < 8$; 2) $|5x + 3| < 7$; 3) $|5 - 3x| \leq 1$;

4) $|3 - 4x| \leq 3$; 5) $|2x - 5| \leq 1$; 6) $|3 - 4x| \leq 6$.

279. Ténsizlikni sheshín:

1) $|2x - 3| > 5$; 2) $|3x - 1| \leq 4$; 3) $|1 - 3x| \leq 1$;

4) $|3 - 2x| \geq 3$; 5) $|1,5x - 2| \leq 1$; 6) $|4 - 3x| > 2$.

18- §. SHAMALARDÍN JUWÍQ MÁNISLARI. JUWÍQLASÍW QÁTELIGI

Kúndelikli turmısta gezlesetuğın hár qıylı máselelerdi sheshiwde kóbinese *hár qıylı shamalardıń juwıq mán-isleri* menen is júrgiziwge tuwra keledi. Juwıq mánisler ádette kóp muğdardadı nárselerdi, mısalı, toğaydağı tereklerdiń sanın esaplawda; ásbaplar járdeminde hár qıylı shamalardı, máselen uzınlıqtı, mas-sanı, temperaturanı ólsheiwde, sanlardı dóńgeleklewde payda boladı.

Bir neshe mısallardı qarap óteyik:

1) Gárezsiz Ózbekstannıń birinshi pochta markası ózbek shayırası Mohlarayım Nadırağa bağıshlangan bolıp, 2 million nusqada aylanısqa shıǵarıldı;

2) klasta 36 oqıwshı bar;

3) Ózbekstanda 10 000 nan artıq uluwma bilim beretuğın mektepler bar;

4) Nawayı - Nókis temir jolınıń uzınlıǵı 342 km;

5) jumısshı kassadan 70 600 swm aldı;

6) sońǵı jıllarda Ózbekstanda gálle egininiń maydanı 300 mın gektarğa kóbeydi;

7) Tashkentten Buxarağa shekemgi aralıq 500 km;

8) bir kilogramm biydayda 30 000 dana biyday dáni bar;

9) Jerden Quyashqa shekemgi qashıqlıq $1,5 \cdot 10^8$ km;

10) Ózbekstan Respublikası Mámleketlik bayraǵında 12 juldız bar.

Bunda 2-, 5-, 10-mısallardağı shamalardıń mánisleri anıq, al qalğan jaǵdaylardaǵıları bolsa juwıq shamalar.

1- másele. Oqıwshılardıń birewi mektepte neshe oqıwshı oqıp atır degen sorawğa «1000 oqıwshı» dep juwap berdi, al ekinshi oqıwshı bolsa, tap usı sorawdıń ózine «950 oqıwshı»

dep juwap berdi. Eger usı mektepte 986 oqıwshı bilim alıp atırǵan bolsa, onda qaysısınıń juwabı anıǵıraq?

△ Birinshi oqıwshı 14 ke gána, al ekinshi oqıwshı bolsa 36 ǵa aljastı. Demek, birinshi oqıwshınıń juwabı anıǵıraq. ▲

Sonı aytıp ótemiz, birinshi jaǵdayda oqıwshılar sanınıń dál hám juwıq mánisleri arasındadı parıq (ayırma) teris san:

$$986 - 1000 = -14,$$

al ekinshi jaǵdayda ol shama oń:

$$986 - 950 = 36.$$

Is júzinde juwıq mánistiń dál mánisten anaw yaki mınaw tárepke awısqanlıǵın, yaǵnıy dál mánisi menen juwıq mánisi arasındaǵı ayırmanıń modulın (absolyut mánisin) biliw áhmiyetke iye.



Shamaniń dál mánisi menen onıń juwıq mánisi arasındaǵı ayırmanıń moduli *juwıqlasıwdıń absolyut qáteligi* dep ataladı.

Solay etip, eger de a – dál mánisi x qa teń bolǵan shamaniń juwıq mánisi bolsa, onda absolyut qátelik

$$|x - a|$$

ǵa teń boladı.

Juwıqlasıwdıń absolyut qáteligi, kóbinese ápiwayı túrde qátelik dep te ataladı.

2-másele. Úshmúyeshliktiń ishki múyeshleriniń qosındısıń transportir járdeminde esaplap tabıwda 182° qa teń nátiyje payda boldı. Bul juwıqlasıwdıń absolyut qáteligi qanday?

△ Úshmúyeshliktiń ishki múyeshleriniń qosındısıń dál mánisi 180° qa teń, juwıq mánisi 182° qa teń. Sonıń ushın absolyut qátelik

$$|180^\circ - 182^\circ| = |-2^\circ| = 2^\circ$$

ǵa teń. ▲

3-másele. $\frac{3}{7}$ sanınıń 0,43 ke teń onlıq bólshekke juwıqlasıw qáteligin tabıń.

$$\triangle \left| \frac{3}{7} - 0,43 \right| = \left| \frac{3}{7} - \frac{43}{100} \right| = \left| \frac{300 - 301}{700} \right| = \left| -\frac{1}{700} \right| = \frac{1}{700}. \quad \blacktriangle$$

Shınıǵıwlar

280. Mısallarda keltirilgen sanlardan qaysıları shamalardıń dál mánislerin, qaysıları juwıq mánislerin ańlatadı.

- 1) bir shórek 500 swm turadı;
- 2) 12 betli dápter 60 swm turadı hám qalıńlıǵı 3 mm;
- 3) bir jıldı avtomobil zavodı 200 mın avtomobil islep shıǵaradı?

- 281.** Bir oqirwshı kitaptıń enin masshtablı sıızgısh penen ólshegende 16,2 cm den 16,4 cm ge shekem aralıқтаǵı nátiyjeni payda etti.
 1) Sonda kitap eniniń dál mánisin aytıw múmkin be?
 2) Kitaptıń eniniń bir neshe juwıq mánisin kórsetiń.
- 282.** $\frac{4}{9}$ sanınıń:
 1) $\frac{6}{13}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 0,3; 4) 0,44; 5) 0,43; 6) 0,45
 sanına juwıqlasıwınıń absolyut qáteligin tabıń.
- 283.** Tóمندegi sanlardıń juwıqlasıw qáteligin tabıń:
 1) 0,1975 sanınıń 0,198 sanı menen;
 2) -3,254 sanınıń -3,25 sanı menen;
 3) $-\frac{8}{17}$ sanınıń $-\frac{1}{2}$ sanı menen;
 4) $\frac{22}{7}$ sanınıń 3,14 sanı menen.
- 284.** a sanı x sanınıń juwıq mánisi bolsın. Eger de
 1) $x = 5,346$, $a = 5,3$; 2) $x = 4,82$, $a = 4,9$;
 3) $x = 15,9$, $a = 16$; 4) $x = 25,08$, $a = 25$
 bolsa, juwıqlasıw qáteligin tabıń.
- 285.** Tórtmúyeshliktiń ishki múyeshleriniń qosındısı 360^0 qa teń ekenligi belgili. Tórtmúyeshliktiń ishki múyeshleriniń qosındısın transportirdiń járdeminde ólshep kórilgende 363^0 lıq nátiyjege iye boldıq. Usı juwıqlasıwdıń qáteligi nege teń?
- 286.** $y = 7x + 9$ hám $y = 1$ tuwrı sıızqlar grafikleri járdeminde bul tuwrı sıızqlardıń abscissası -1 ge teń bolǵan noqatta kesilisetuǵınlıǵı anıqlandı. Usı juwıqlasıwdıń qáteligi neshege teń?
- 287.** 0,33 onlıq bólsheginin $\frac{1}{3}$ sanınıń absolyut qáteligi 0,01 den kishi juwıq mánisi bolıwı durıs pa?

19-§. QÁTELIKTI BAHALAW

Kóp ǵana jaǵdaylarda shamalardıń dál mánisleri belgisiz boladı, sonıń ushın juwıqlasıwdıń absolyut qáteligin tabıw múmkin bolmaydı. Solay bolsa da, kóbinese, eger artıǵı menen de kemi menen de juwıqlasıwlar belgili bolsa, *absolyut qátelikti bahalaw* múmkin boladı.

1-másele. Bólme termometrindagi suyıqlıq baǵanasınıń joqarı shetki shkalanıń 21 hám 22° C belgileri aralıǵında turıptı. Temperaturanıń juwıq mánisi sıpatında 21,5 sanı alındı. Juwıqlasıwdıń absolyut qáteligin bahalań.

△ t temperaturasınıń dál mánisi belgisiz, biraq

$$21 \leq t \leq 22$$

dep tastıqlaw múmkin.

Temperaturanıń dál mánisi menen juwıq mánisi arasındagı ayırmanı, yaǵnıy $t - 21,5$ ayırmasın bahalaw ushın bul qos teńsizliktiń hár bir úlesinen 21,5 sanın alamız.

$-0,5 \leq t - 21,5 \leq 0,5$ ti, yaǵnıy $|t - 21,5| \leq 0,5$ ti payda etemiz. Solay etip, absolyut qátelik 0,5 ten úlken emes. ▲

Bul jaǵdayda temperatura 0,5 ke shekemgi dállikte ólshengen dep ataladı hám bılay jazıladı:

$$t = 21,5 \pm 0,5.$$

Uluwma alganda, eger de a sanı x sanınıń juwıq mánisi hám $|x - a| \leq h$ bolsa, onda x sanı a sanına h qa shekemgi dállik penen teń dep ataladı hám bılay jazıladı:

$$x = a \pm h. \quad (1)$$

$|x - a| \leq h$ teńsizligi

$$a - h \leq x \leq a + h \quad (2)$$

qos teńsizliktiń tap ózin ańlatatuǵınlıǵın eskertip ótemiz.

Mısalı, $x = 2,43 \pm 0,01$ jazıwı, x sanın 2,43 ge 0,01 ge shekemgi dálliktegi teńligin, yaǵnıy $2,43 - 0,01 \leq x \leq 2,43 + 0,01$ yamasa $2,42 \leq x \leq 2,44$ ekenligin bildiredi.

2,42 hám 2,44 sanları x sanınıń kemi menen hám artıǵı menen alınǵan juwıq mánisleri boladı.

Ádette, 1-máselede qaralǵan ólshewlerde temperaturanıń juwıq mánisi sıpatında 21 yamasa 22 °C alınadı. Bul jaǵdayda hár bir juwıqlasıwdıń ab-

solyut qáteligi 1°C dan aspaydı. Sonıń ushın, ádette, bóliniw aralıǵı 1°C dan bolǵan termometr járdeminde temperaturanı ólshegende ólshew usılı 1°C ǵa shekemgi dállik penen alıp barıladı, dep esaplanadı.

Usıǵan uqsas basqa ólshew ásbapları ushın da ólshew anıqlıǵı, ádette ásbaptıń eń kishi bóliniwi boyınsha esaplanadı. Mısalı, uzınlıq mikrometr menen $0,01\text{ mm}$ ge shekemgi dállikte ólshenedi, temperatura medicinalıq termometr menen $0,1^{\circ}\text{C}$ qa shekemgi dállikte ólshenedi, sekundlıq tili bar qol saátı waqıttı 1 sekundqa shekemgi dállikte kórsetedi.

Solay etip, ólshew qáteligi shamanıń qanday ásbap penen ólshenip atırǵanlıǵına baylanıslı. Juwıqlasıw qáteligi qansha kishi bolsa, ólshew dálligi 4 sonshellı anıq boladı.

Juwıq mánislerden kóbinshe ápiwayı bólsheklerdi, onlıq bólsheklerge aylandırıwda paydalanıladı.

2- másele. $0,43$ sanı $\frac{13}{30}$ bólsheginin $0,01$ ge shekemgi dállikte alıńǵan juwıq mánisi ekenligin dálilleń.

△ Bunda

$$\left| \frac{13}{30} - 0,43 \right| \leq 0,01$$

ekinligin dálillew talap etiledi. Ayırmanı esaplaymız:

$$\frac{13}{30} - 0,43 = \frac{13}{30} - \frac{43}{100} = \frac{130 - 129}{300} = \frac{1}{300}.$$

Demek, $\left| \frac{13}{30} - 0,43 \right| = \frac{1}{300}; \frac{1}{300} \leq 0,01$ bolǵanı ushın $\left| \frac{13}{30} - 0,43 \right| \leq 0,01$

boladı. ▲

Shınıǵıwlar

288. Tómenдеgi jazıwlar neni ańlatadı?

- | | | |
|--------------------------|-------------------------|---|
| 1) $x = 3,9 \pm 0,2$; | 2) $x = 0,4 \pm 0,15$; | 3) $x = \frac{1}{3} \pm \frac{1}{10}$; |
| 4) $x = 0,73 \pm 0,01$; | 5) $x = -135 \pm 1$; | 6) $x = -2\frac{1}{5} \pm \frac{1}{10}$; |
| 7) $x = -1 \pm 0,1$; | 8) $x = 9,5 \pm 0,2$; | 9) $x = -3,2 \pm 0,01$? |

- 289.** Qos ténsizlik túrinde jazıń:
- 1) $x = 11 \pm 0,5$; 2) $m = 142 \pm 1$; 3) $l = 3,7 \pm 0,1$;
 4) $v = 900 \pm 5$; 5) $x = a \pm h$; 6) $y = m \pm n$.
- 290.** 1) $x = 4 \pm 0,1$; 2) $x = 2,7 \pm 0,1$;
 3) $x = -0,6 \pm 0,12$; 4) $x = -5,9 \pm 0,2$
 ekeni belgili. x sanınıń kemi menen hám artıǵı menen alınǵan juwıq mánislerin tabıń.
- 291.** $x = 5,8 \pm 0,2$ bolsın. Anıq mánisi tómendegige teń bolıwı múmkin be?
 1) 5,9; 2) 6,001; 3) 6; 4) 5,81; 5) 5,75; 6) 5,6?
- 292.** $x = 8,7 \pm 0,4$ bolsın. x san tómendegige teń bolıwı múmkin be?
 1) 8,222; 2) 8,4; 3) 9; 4) 9,5; 5) 9,3?
- 293.** x sanınıń kemi menen hám artıǵı menen juwıqlasıwlarınń arifmetikalıq ortasına teń bolǵan mánisin kórsetiń:
 1) $20 \leq x \leq 22$; 2) $5 \leq x \leq 6$; 3) $4,5 \leq x \leq 4,8$;
 4) $3,7 \leq x \leq 4,1$; 5) $2,81 \leq x \leq 2,83$; 6) $0,55 \leq x \leq 0,6$.
- 294.** Dálilleń:
 1) 2,7 sanı 2,7356 sanınıń 0,5 ge shekemgi dállikte alınǵan juwıq mánisi;
 2) 0,27 sanı $\frac{11}{40}$ bólsheginıń 0,01 ge shekemgi dállikte alınǵan juwıq mánisi.
- 295.** 4 sanı 4,3 bólsheginıń 0,5 ke shekemgi dállikte alınǵan juwıq mánisi bola ala ma? 0,1 ge shekemgi dálliktegi she?
- 296.** Optikalıq hám radiolokaciyalıq ólshewlerge qaraǵanda Merkuriydiń diametri (4880 ± 2) km ge, Veneranıń radiusı (6050 ± 5) km ge teń. Ólshew nátiyjelerin qos ténsizlik túrinde jazıń.
- 297.** Jumısshı, cilindrdiń diametrin ólshep kóriw ushın 10,00; 10,04; 10,08 mm hám taǵı basqa 10,56 mm diametrli shkalaǵa iye bolǵan kalibrometrden paydalanadı. Bunda ólshewdiń dálligi qanday bolǵan?
- 298.** Zavodtıń texnikalıq qadaǵalaw bóliminde cilindr diametri 0,1 mm ge shekemgi dállikte ólshenedi. Kórsetpe boyınsha cilindr diametri $167,8 \leq d \leq 168,2$ aralıqta bolsa, onda cilindr jaramlı bolıp esaplanadı. Eger ólshew nátiyjesinde cilindr diametri 168,1 mm ge teń bolsa, texnikalıq qadaǵalaw bólimi onı jaramsız dep shıǵara ala ma?

20-§. SANLARDÍ DÓNGELEKLEW

Sanlardı dóngeleklew fizika, matematika, texnikanın kóp ǵana ámeliy máselelerinde hár qıylı shama (muǵdar) larının juwıq mánisleri menen jumıs alıp barǵanda paydalanıladı.

Mısalı, teńiz beti qáddinde hám 45^0 lıq keńliklerde denelerdiń erkin túsiw túsiwiniń $9,80665 \text{ m/s}^2$ qa teń. Ádette, bul san onnan birge shekemgi dállikte dóngeleklenedi: yaǵnıy $9,8$ dep alınadı. Onıń jazılıwı: $g \approx 9,8$ (g shama menen $9,8$ ge teń dep oqıladı).



$x \approx a$ jazılıwı a sanı x sanınıń juwıq mánisi ekenligin ańlatadı.

1- másele. Tuwrımúyeshlik formasındaǵı jer uchastkasınıń maydanı 25 m^2 qa, uzınlıǵı 8 m ge teń. Usı uchastkanıń enin tabıń.

△ Jer uchastkasınıń eni l metr bolsın, sonda

$$l = 25 : 8 = 3,125.$$

Juwabı: $3,125 \text{ m}$. ▲

Is júzinde bunday nátiyje, ádette onnan birge shekem dóngeleklenip alınadı, yaǵnıy $l \approx 3,1$ dep esaplanadı.

Sanlardı dóngeleklew qaǵıydasın tómendegi mısalda qarap ótemiz. $3,647$ sanın júzden birge shekemgi dállikte dóngeleklew talap etilsin deyik, kemi menen dóngeleklew ushın aqırǵı 7 sanın túsirip qaldıramız, nátiyjede $3,64$ ti payda etemiz. Artıǵı menen dóngeleklew ushın aqırǵı 7 sanın túsirip qaldırıp, onnan aldınǵı sandı bir birlikke arttıramız. Nátiyjede $3,65$ kelip shıǵadı.

Birinshi jaǵdayda dóngeleklewdiń absolyut qáteligi

$$|3,647 - 3,64| = 0,007$$

ge, ekinshi jaǵdayda

$$|3,647 - 3,65| = 0,003$$

ge teń.

Ekinshi jaǵdayda dóngeleklewdegi qáteligi birinshi jaǵdaydaǵıdan kem. Demek, qaralıp atırǵan mısalda artıǵı menen dóngeleklew maqulıraq boladı eken.

Dóngeleklewdiń absolyut qáteligi eń kishi mániske iye bolıwı ushın oń sanlardı dóngeleklewde tómendegi qaǵıydadın paydalanıladı:



Eger birinshi túsirilip qaldırılatusın cıfr 5 ten kishi bolsa, onda kemi menen dóngeleklew gerek, eger bul cıfr 5 ten artıq bolsa yamasa oǵan teń bolsa, onda artıǵı menen dóngeleklew gerek.

Misali, onnan birge shekem dóngeleklewde

$$3,647 \approx 3,6, \quad 2,658 \approx 2,7$$

ni payda etemiz, júzden birge shekem dóngeleklewde

$$0,6532 \approx 0,65, \quad 9,0374 \approx 9,04$$

ti payda etemiz.

2- másele. $\frac{2}{7}$ sanın usı sanğa 0,01 ge shekemgi dállikte teń bolğan onlıq bólshek penen almasırn.

△ 2 ni 7 ge bóliwdiń nátiyjesin útirden keyin úsh cıfrlı onlıq bólshek túrinde jazamız:

$$\frac{2}{7} = 0,285....$$

Bul sandı júzden birge shekemgi dállikte dóngeleklep, $\frac{2}{7} \approx 0,29$ dı payda etemiz. ▲

Bul máseleni sheshiw ushın $\frac{2}{7}$ niń 0,01 ge shekemgi dálliktegi juwıq mánisin tabıwda onıń útirden keyingi úsh cıfrın tabıw kerek boladı. Eger $\frac{2}{7}$ sanınıń 0,001 ge shekemgi dálliktegi juwıq mánisin tabıw talap etilgen bolsa, onda útirden keyingi tórt onlıq cıfrın tabıw kerek bolar edi.

Shınıǵıwlar

299. Sanlardı retı menen 0,001, 0,01, 0,1 ge deyin, birliklerge, onlıqlarğa, júzliklerge, mınlıqlarğa shekem dóngelekleń: 3285,05384; 6377,00753; 1234,5336.

300. 15,75 hám 317,25 sanların birliklerge shekem kemi hám artıǵı menen dóngelekleń. Hárbir dóngeleklewdiń absolyut qáteligin tabıń.

301. Tómendegi sanlardı 0,1 ge shekemgi dállikte onlıq bólshek túrinde kórsetiń:

$$1) \frac{13}{8}; \quad 2) \frac{17}{25}; \quad 3) \frac{39}{129}; \quad 4) \frac{11}{3}; \quad 5) \frac{5}{7}; \quad 6) \frac{19}{11}.$$

302. Tóمندegi sanlardı 0,01 ge shekemgi dállikte onlıq bólshek túrinde kórsetiń:

$$1) \frac{3}{7}; \quad 2) \frac{7}{99}; \quad 3) \frac{5}{19}; \quad 4) 1\frac{2}{3}; \quad 5) 2\frac{3}{11}; \quad 6) 5\frac{1}{14}.$$

303. Tóمندegi sanlardı 0,001 ge shekemgi dállikte onlıq bólshek túrinde kórsetiń:

$$1) \frac{2}{7}; \quad 2) \frac{5}{13}; \quad 3) 2\frac{3}{11}; \quad 4) 7\frac{9}{14}; \quad 5) 3\frac{1}{7}; \quad 6) 1\frac{18}{19}.$$

304. 0° C da vodorod molekulasınıń ortasha qozǵalı tezligi 1693 m/s qa teń. Bir oqıwshı bul sandı 1690 m/s etip, al ekinshi oqıwshı 1700 m/s etip dóńgelekledi. Hárbir dóńgeleklediń absolyut qáteligin tabıń. Qaysı jaǵdayda dóńgelekledi qáteligi kishi boladı?

21-§. SALÍSTÍRMALÍ QÁTELİK

Belgili bir shamanıń túrli juwıqlasıwlarınń dáligin salıstırıwda absolyut qátelikten paydalanıladı. Eger de shamalardıń juwıqlasıwları salıstırılsa, onda absolyut qátelik jetkilikli bolmaydı.

Mısalı, Tashkentten Samarqandqa shekemgi bolǵan aralıq (300 ± 1) km ge teń. Qálemniń uzınlıǵı $(21,3 \pm 0,1)$ sm ge teń. Birinshi jaǵdayda absolyut qátelik 1 km den artıq emes, al ekinshi jaǵdayda 1 mm den artıq emes. Qálemniń uzınlıǵı Tashkentten Samarqandqa shekemgi aralıqqa salıstırǵanda dálirek ólshengen dep aytıw múmkin be?

Tashkentten Samarqandqa shekemgi aralıqtı ólshegende 300 km ge 1 km den artıq bolmaǵan qátelikke jol qoyılǵan. Demek, bul jaǵdayda ólshenetuǵın uzınlıqtıń $\frac{1}{300} \cdot 100\% \approx 0,33\%$ in quraydı.

Qálemniń uzınlıǵın ólshegen waqıtta 21,3 cm ge 0,1 cm den artıq bolmaǵan qátelikke jol qoyılǵan. Demek, bul jaǵdayda ólshenetuǵın uzınlıqtıń $\frac{0,1}{21,3} \cdot 100\% \approx 0,47\%$ ini tashkil etadi.

Solay etip, qalalar arasındaǵı qashılıq qálemniń uzınlıǵına qaraǵanda dálirek ólshengen.

Juwıqlasıw sapasın bahalaw ushın salıstırmalı qátelik túsiniǵı engiziledi.



Salıstırmalı qátelik dep, absolyut qáteliktiń shamanıń juwıq mánisi moduline qatnasın aytadı.

Solay etip, egerde a sanı x tiń juwıq mánisi bolsa, onda absolyut qátelik $|x - a|$ ğa teń, al salıstırmalı qátelik $\frac{|x-a|}{|a|}$ ge teń. Salıstırmalı qátelik ádette procentlerde anlatıladı.

Másele. Jer massasınıń juwıq mánisi $(5,98 \pm 0,01) \cdot 10^{24}$ kg ğa teń. Aw miltıǵı oǵınıń massası (9 ± 1) g ğa teń. Qaysı ólshew anıǵıraq?

△ Hárbir ólshewdiń salıstırmalı qáteligin bahalayıq:

$$1) \frac{0,01 \cdot 10^{24}}{5,98 \cdot 10^{24}} \cdot 100\% \approx 0,2\%; \quad 2) \frac{1}{9} \cdot 100\% \approx 11\%.$$

Jer massası anıǵıraq ólshengen. ▲

Shınıǵıwlar

305. Sandı birliklerge shekem dóńgeleklen jáne dóńgeleklewdiń absolyut hám salıstırmalı qáteliklerin tabıń:

$$1) 3,45; \quad 2) 10,59; \quad 3) 23,263; \quad 4) 0,892; \quad 5) 1,947.$$

306. 1) $\frac{1}{3}$ sanınıń 0,33 sanı menen; 2) $\frac{1}{7}$ sanınıń 0,14 sanı menen juwıqlasıwınıń salıstırmalı qáteligin tabıń.

307. Qaysı ólshew anıǵıraq:

$$1) a = (750 \pm 1) \text{ m ma yaki } b = (1,25 \pm 0,01) \text{ m ma};$$

$$2) p = (10,6 \pm 0,1) \text{ s ma yaki } q = (1,25 \pm 0,01) \text{ s ma?}$$

308. Túrli ásbaplardıń járdemi menen bir waqıtta puwdıń temperaturası ólshendi hám birinshi jaǵdayda $t = (104 \pm 1) ^\circ\text{C}$, ekinshi jaǵdayda $t = (103,8 \pm 0,1) ^\circ\text{C}$, úshinshi jaǵdayda $t = (103,86 \pm 0,01) ^\circ\text{C}$ nátiyjeleri alınadı. Hárbir ólshewdiń salıstırmalı qáteligin bahalań.

- 309.** Eki oqıwshı uzınlıq ólshewge tiyisli ámeliy islerdi orınlawda (203 ± 1) mm hám (120 ± 1) sm nátiyjelerge eristi. Oqıwshılardan qaysısı usı jumıstı sapalı orınlaǵan?
- 310.** 1) x sanınıń juwıq mánisi a ǵa teń. Usı sannıń salıstırma qáteligi 0,01 ge teń, yaǵnıy 1%. Eger $a = 2,71$ bolsa absolyut qátelikti tabıń.
2) x sanınıń juwıq mánisi b ǵa teń. Usı sannıń salıstırma qáteligi 0,001 ge teń, yaǵnıy 0,1%. Eger $b = 0,398$ bolsa, absolyut qátelikti tabıń.
- 311.** Quyashtıń massası $(2 \cdot 10^{33} \pm 0,1 \cdot 10^{33})$ g. Balalar tobınıń massası $(2,5 \pm 0,1) \cdot 10^2$ g. Qaysı ólshew dálirek?

II Babqa tiyisli shunıǵıwlar

Teńlemenı sheshiń (**312–313**):

- 312.** 1) $x(2x + 5) = 0$; 2) $x(3x - 4) = 0$;
3) $(x - 5)(3x + 1) = 0$; 4) $(x + 4)(2x - 1) = 0$.
- 313.** 1) $\frac{2x+3}{3x-1} = 0$; 2) $\frac{1-2x}{2x+5} = 0$; 3) $\frac{(2x+1)(x+2)}{x-3} = 0$; 4) $\frac{(x-3)(2x+4)}{x+1} = 0$.

- 314.** San kósherinde a noqatı b noqatınan shepte jatadı. Tómendegi san óń ba yaki teris pe:

- 1) $b - a$; 2) $2 + b - a$; 3) $a - b$; 4) $a - 3 - b$?

- 315.** Teńsizlikti sheshiń:

- 1) $x + 9 > 8 - 4x$; 2) $3(y + 4) \geq 4 - (1 - 3y)$;
3) $5(0,2 + y) - 1,8 \geq 4,3 + 5y$; 4) $3(x - 5) + 9 > 15$.

- 316.** Teńsizlikler sistemasın sheshiń:

- 1) $\begin{cases} 0,5(x + 3) - 0,8 < 0,4(x + 2) - 0,3, \\ 0,7(2 - x) + 1,3 < 0,6(1 - x) + 2,2; \end{cases}$
2) $\begin{cases} 1,5(x - 2) - 2,1 < 1,3(x - 1) + 2,5, \\ 1,3(x + 3) + 1,7 > 1,6(x + 2) + 1,8. \end{cases}$

317. Теңлемени шешің:

$$\begin{array}{lll} 1) |x-1| = 3, 4; & 2) |1-x| = 2, 4; & 3) |1-2x| = 5; \\ 4) |3x-2| = 1; & 5) |4x-1| = 3; & 6) |2x+7| = 9. \end{array}$$

318. Теңsizlikti шешің:

$$\begin{array}{lll} 1) |x-1| \leq 3, 4; & 2) |x-1| \geq 3, 4; & 3) |x-1| < 3, 4; \\ 4) |2x+1| \geq 3; & 5) |3+2x| \leq 1; & 6) |1-3x| \geq 4. \end{array}$$

ÓZINIZDI TEKSERIP KÓRIN!

1. x tiń qálegen mánisinde

$$\frac{1}{2}x(2x-4) \geq (x-2)x$$

teńsizliginiń durıslıgın dálilleń.

2. Теңsizlikti шешің:

$$1) 12 - 5x > 0; \quad 2) 3x - 7 \leq 4(x + 2); \quad 3) \frac{x}{2} + \frac{3-x}{4} < 2.$$

3. Теңsizlikler sistemasın шешің:

$$\begin{array}{ll} 1) \begin{cases} 3x - 13 > 0, \\ 25 - 4x > 0; \end{cases} & 2) \begin{cases} 4x - 13 \geq 3x - 10, \\ 11 - 4x \leq 12 - 3x; \end{cases} \\ 3) \begin{cases} 5x + 3 < 3x - 7, \\ 1 - 2x > x + 4; \end{cases} & 4) \begin{cases} 5x - 7 \leq 2 - 4x, \\ 7 - 3x \geq 1 - 5x. \end{cases} \end{array}$$

319. $a < 2b$ bolsın. Dálilleń:

$$\begin{array}{ll} 1) 4a - 2b < a + 4b; & 2) 3a - 2b < a + 2b; \\ 3) a + 2b > 3a - 2b; & 4) a + b > 4a - 5b. \end{array}$$

320. Úshmúyeshliktiń bir tárepi 4 cm den uzın, ekinshi tárepi birinshisinen 1,5 ese uzın, úshinshi tárepi ekinshisinen 1,5 ese uzın. Úshmúyeshliktiń perimetri 19 cm den uzın ekenin dálilleń.

- 321.** x tiñ qanday mánislerinde $y=-x+1$ hám $y=x+2$ funksiýalarınıń mánisleri bir waqıtta: 1) oń; 2) teris; 3) 1 den úlken; 4) 2 den úlken boladı?
- 322.** Jup sannıń onnan keyin keliwshi jup sanınıń úsh esesi menen qosındısı 134 ten úlken, al usı jup sannıń ózinen aldın keliwshi jup sanınıń eki esesi menen qosındısı 104 ten kishi. Usı sandı tabıń.
- 323.** Taq sannıń onnan keyin keliwshi taq sanınıń eki eselengeni menen qosındısı 151 ten kishi, al usı taq sannıń ózinen aldın keliwshi taq sannıń úsh esesi menen qosındısı 174 ten úlken. Usı sandı tabıń.
- 324.** Qos teńsizlik túrinde jazıń:
- 1) $x=12\pm 0,3$; 2) $y=23\pm 1$; 3) $x=a\pm 1$;
 4) $y=m\pm 0,1$; 5) $z=1,8\pm 0,01$; 6) $z=b\pm 0,2$.
- 325.** Tómenдеgi sandı 0,01 ge shekem dállikte onlıq bólshek kórinisinde jazıń:
- 1) $\frac{5}{11}$; 2) $\frac{3}{22}$; 3) $\frac{3}{13}$; 4) $\frac{2}{7}$; 5) $\frac{17}{24}$; 6) $\frac{5}{12}$.
- 326.** Uzınlıǵı $l = 0,25$ m, kesesesine kesindisiniń beti $S \approx 1,2 \cdot 10^2 \text{ mm}^2$, salıstırma qarsılıǵı $\rho \approx 0,017 \text{ } \Omega \cdot \text{mm}^2/\text{m}$ bolǵan mıs tayaqshanıń qarsılıǵın esaplań $\left(R = \frac{\rho l}{S} \right)$.
- 327.** Eger $m = 7,6 \text{ kg}$, $v = 4,2 \text{ m/s}$ bolsa, deneniń kinetikalıq energiyasın
- $$E_k = \frac{mv^2}{2}$$
- formula boyınsha esaplań.
- 328.** 20 cm li kesindini ólshewde 0,5 mm qátelikke jol qoyıldı, 1000 km aralıqtı ólshewde bolsa qátelik 200 m di quradı. Qaysı ólshew dállirek?
- 329.** Xalqı 57 100 adamnan ibarat bolǵan qalada hárbir qan gruppasına kiriwshi adamlar qanshadan ushırasatuǵının anıqlaw maqsetinde medicinalıq izertlew alıp barıldı. Qanı I gruppaga tuwra keletuǵın adamlar 32,9 % ti, II gruppadaǵıları 35,8 % ti, III gruppadaǵıları 23,2% ti hám IV gruppadaǵıları 8,1 % ti quraytuǵınlıǵı anıqlandı. Hárbir qan gruppadaǵı adamlardan qalada nesheден jasadı eken?



II bapqa tiyisli shınıǵıwlar – testler

1. Teńsizlikti sheshiń: $5(x-3)+2x<4x+3$.
 A) $x<6$; B) $x<-6$; C) $x>6$; D) $x>-6$.
2. Teńsizlikti sheshiń: $4(x-1)+5(x+1)<6(x+2)+7(x-1)$.
 A) $x<-1$; B) $x>-1$; C) $x<1$; D) $x>1$.
3. Teńsizlikti sheshiń: $\frac{2x-3}{4} > \frac{x+1}{6} - \frac{4x+3}{3}$.
 A) $x>1$; B) $x \leq 1$ C) $x>-0,05$; D) $x<2$.
4. $7x+5 \geq 3(x-1)-4x$ teńsizliktiń sheshimi bolatuǵın eń kishi pútin sanın tabıń:
 A) $x=2$; B) $x=-2$; C) $x=3$; D) $x=-1$.
5. $7(1-x)>5(3-x)$ teńsizliktiń sheshimi bolatuǵın eń úlken pútin sanın tabıń:
 A) $x=-5$; B) $x=-3$; C) $x=2$; D) $x=-2$.
6. x tiń qanday mánislerinde $\frac{3x-6}{5}$ bólshek $\frac{4x-5}{15}$ hám $\frac{4-x}{3}$ bólshekler qosındısınan kishi boladı?
 A) $x<3,3$; B) $x>2,3$; C) $x \leq -2,3$; D) $x>4,5$.
7. x tiń qanday mánislerinde $\frac{3-5x}{4}$ va $\frac{7x+3}{6}$ bólshekler ayırması $\frac{3x+5}{12}$ bólshekler qosındısınan úlken boladı?
 A) $x < \frac{1}{16}$; B) $x < -\frac{1}{16}$; C) $x > \frac{1}{16}$; D) $x > -\frac{1}{16}$.
8. Teńsizlikler sistemasın sheshiń:

$$\begin{cases} 3(1-x) > 5-4x, \\ 13-4x < 1. \end{cases}$$

 A) $x > \frac{1}{2}$; B) $\frac{1}{2} < x < 3$; C) $x > 3$; D) $x > -3$.

9. Тёнсизликлар sistemasin sheshin:

$$\begin{cases} \frac{x-3}{3} \leq \frac{x+2}{2}, \\ \frac{x-4}{5} \geq \frac{x-5}{4}. \end{cases}$$

A) $1 \leq x \leq 9$; | B) $-12 \leq x$; | C) $x \geq 9$; | D) $-12 \leq x \leq 9$.

10. Тёнсизликлар sistemasin sheshin:

$$\begin{cases} (x+3)(x+2) \leq (x+4)(x-1) + 5, \\ 2(5x-1) \geq 3(3x-2). \end{cases}$$

A) $-4 \leq x \leq -2,5$; B) $-4 \leq x \leq 2,5$; C) $4 \leq x \leq 2,5$; D) $0 \leq x \leq 2,5$.

11. Тёнсизликлар sistemasinin sheshimi bolatugin en kishi putin sandi tabin:

$$\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{x}{3} > 1, \\ 3x - 2 > x + 2. \end{cases}$$

A) $x=7$; B) $x=-7$; C) $x=6$; D) $x=3$.

12. Тёнсизликлар sistemasinin sheshimi bolatugin en ulken putin sandi tabin:

$$\begin{cases} \frac{x}{4} + \frac{x}{2} < 1, \\ \frac{x}{3} - \frac{x}{4} < \frac{1}{6}. \end{cases}$$

A) $x=-2$; B) $x=1$; C) $x=2$; D) $x=0$.

13. Тёнсизlikti sheshin: $|4x-5| \leq 3$.

A) $x \geq -2$; B) $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$; C) $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$; D) $-2 \leq x \leq -\frac{1}{2}$.

14. Тёнсизlikti sheshin: $|1-3x| \leq 2$.

A) $0 \leq x \leq \frac{1}{3}$; | B) $-1 \leq x \leq -\frac{1}{3}$; | C) $\frac{1}{3} \leq x \leq 1$; | D) $-\frac{1}{3} \leq x \leq 1$.

15. Teńsizlikti sheshiń: $|3 - 2x| \geq 1$.
 A) $x \leq 1, x \geq 2$; B) $x \leq -1, x \geq -2$; C) $x \leq 2, x \geq 3$; D) $1 \leq x \leq 2$.
16. Sanniń anıq mánisi 1,483, juwıq mánisi 1,48 bolsa, juwıqlasıw qáteligin tabıń:
 A) 0,003; B) 0,435; C) 1,335; D) 0,445.
17. Sanniń anıq mánisi $\frac{8}{17}$, juwıq mánisi $\frac{1}{2}$ bolsa, juwıqlasıw qáteligin tabıń:
 A) $\frac{1}{33}$; B) $\frac{1}{34}$; C) $\frac{1}{35}$; D) $\frac{7}{15}$.
18. Qos teńsizlik túrinde jazıń: $a = -1,8 \pm 0,2$.
 A) $-2 < a < -1,6$; C) $-2 \leq a \leq -1,6$;
 B) $-1,6 \leq a \leq -2$; D) $-2 \leq a \leq -1,82$.
19. Qos teńsizlik túrinde jazıń: $a = 2,71 \pm 0,01$.
 A) $2,7 < a < 2,72$; C) $2,7 \leq a < 2,711$;
 B) $-1,6 \leq a \leq -2$; D) $2,7 \leq a \leq 2,72$.
20. $\frac{8}{15}$ di 0,01 ge shekem dállikte onlıq bólshek túrinde jazıń:
 A) 0,53; B) 0,05; C) 0,61; D) 0,54.
21. $\frac{5}{14}$ di 0,01 ge shekem dállikte onlıq bólshek túrinde jazıń:
 A) 0,357; B) 0,353; C) 0,456; D) 0,361.
22. Bólmeniń uzınlıǵı $(5 \pm 0,02)$ m ge teń. Ólshewdiń salıstırmalı qáteligin anıqlań:
 A) 4%; B) 0,4%; C) 0,02%; D) 0,05%.

- 23.** Eki awıl arastındağı aralıq (100 ± 1) km ge teń. Ólshewdiń salıstırmalı qáteligin anıqlań:
- A) 2%; B) 0,5%; C) 1%; D) 1,5%.
- 24.** Sandı júzden birge shekem dóńgeleklen. Dóńgeleklewdiń salıstırmalı qáteligin tabıń: 5,7635.
- A) 5,76; 0,8%; C) 5,77; 0,08%;
B) 5,76; 0,9%; D) 5,76; 0,06%.
- 25.** Sandı onnan birge shekem dóńgeleklen. Dóńgeleklewdiń salıstırmalı qáteligin tabıń: 2,2941.
- A) 2,3; 0,26%; C) 2,3; 0,3%;
B) 2,2; 2,5%; D) 2,3; 0,4%.



Tariyxıy máseleler

1. *Evklid máselesi.* Eger a, b, c, d – oń sanlar, a – olardıń eń úlkeni hám $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ bolsa, onda $a+d > b+c$ bolıwın dálilleń.
2. *Aleksandriyalı Papp máselesi.* Eger a, b, c, d teris sanlar hám $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ bolsa, onda $ad > bc$ bolıwın dálilleń.
3. *Bernulli teńsizligi.* Eger $x_1, x_2, \dots, x_n > -1$ hám $x_1, x_2, \dots, x_n$ sanlardıń barlıǵı birdey belgige iye bolsa, $(1+x_1)(1+x_2) \dots (1+x_n) \geq 1+x_1+\dots+x_2+\dots+x_n$ boladı.
- Bernulli teńsizligin $n = 2, 3$ bolǵan jaǵday ushın dálilleń..
4. $(1+a)^2 \approx 1+2a$ juwıqlaw formulasınan paydalanıp, esaplań hám qátelikti bahalań:
- 1) $(1,01)^2$; 2) $(1,001)^2$; 3) $(0,99)^2$; 4) $(0,999)^2$.

5. Vakuumda jaqtılıq tezligin ólshew $299796 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ nátiyjeni berdi, bunda ólshew dálligi $4 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ boldı. Salıstırmalı qátelikti tabıń.

6. Adamnıń shash talası juwanlıgı $(0,15 \pm 0,005)$ mm ge teń. Jerden Ayğa shekem bolğan aralıq bolsa $(380\,000 \pm 500)$ km ge teń. Qaysı ólshew anıgıraq orınlangan?

7. *Akmim papirusında*: „Uzunlıgı $r=5$ hám $R=10$ radiuslı sheńberler uzunlıqlarınıń arifmetikalıq ortasına teń dóńgelek beti, usı radiuslı betleriniń arifmetikalıq ortasına teń“, deyilgen eken. Bundağı absolyut hám salıstırmalı qáteliklerdi tabıń.



Tariyxıy maǵluwmatlar

$>$ (úlken) hám $<$ (kishi) belgiler – qatań teńsizlik belgileri birinshi ret ingliz alımı T. Garriottnıń 1631-jılı basıp shıǵarılğan broshyurasında keltirilgen. $\geq$ (úlken yaki teń) hám $\leq$ (kishi yaki teń) belgileri – qatań emes teńsizlik belgilerin bolsa, 1734-jılı francuz matematigi P.Buge kiritken.

x sanınıń modulin $|x|$ sıyaqlı belgilewdi ataqlı nemis matematigi K.Veyershtas 1841-jılı usınıs etken.

Áyyemgi Mısır hám Babilonda tabılğan matematikalıq jazıwlar, adamlar júdá áyyemgi zamanlardan-aq juwıq esaplawlardıń bazı usılları menen tanıs ekenligin kórsetedi. 4000 jıl burın Bobilonlı alımlar sanlardı kóbeytiw, kvadratqa kóteriń, keri sanlar kestegin dúziń menen bir qatarda, sanlardan kvadrat koren shıǵarıń kestelerin de dúzgen. Olar natural sanlardıń kvadrat korenleriniń juwıq mánislerin taba alǵan.

2-, 3-dárejeli teńlemenin korenlerin juwıq esaplaw usılların Áyyemgi Qıtay, Orta Aziyalı alımlar tapqan.

Mırza Ulugbek ilimiy mektebinin alımları astronomiyalıq kesteler («Zij»lar) di dállirek dúziń ushın juwıq esaplawdın jańa usılların jaratqan. Mırza Ulugbek akademiyasınıń jetekshi alımlardan biri Ğiyosiddin Jamshid al-Koshiy bolsa «Sheńber haqqında traktat» tında π sanınıń útirden keyingi 17 tańbasın anıq esaplagan.



Ámeliy-usulǵan hám pánlerara baylanışlı máseleler

Teńsizliklerdi, teńsizlikler sistemasın sheshiwge alıp keletuǵın bir neshe máseleńi kórip shıǵayıq.

- 330.** 4 toraq hám 5 qorazqant birgelikte 225 swmnan arzan, 3 toraq hám 2 qorazqant birgelikte 120 swmnan qımbat.

Qaysısı arzan: 13 toraq pa yaki 10 qorazqant pa?

△ 1 toraqtıń bahasın x som, 1 qorazqanttıń bahasın y swm, dep alayıq. Onda másele shártine sáykes keletuǵın usı teńsizlikler sistemasına iye bolamız:

$$\begin{cases} 4x + 5y < 225, \\ 3x + 2y > 120. \end{cases} \quad (1)$$

Bunnan

$$\begin{cases} 32x + 40y < 1800, \\ 45x + 30y > 1800, \end{cases}$$

yaǵnıy $45x + 30y > 32x + 40y$, $13x - 10y > 0$.

Demek, $13x > 10y$.

Juwabı: 10 qorazqant 13 toraqtan arzan.

Máseleniń geometriyalıq sıpatlaması menen tanısayıq.

Tekislikte qanday taraw (1) teńsizlikler sisteması menen súwretlenedi?

(1) sistemanıń 1 – teńsizligi $4x + 5y = 225$, yaǵnıy $y = 45 - \frac{4}{5}x$ tuwrı

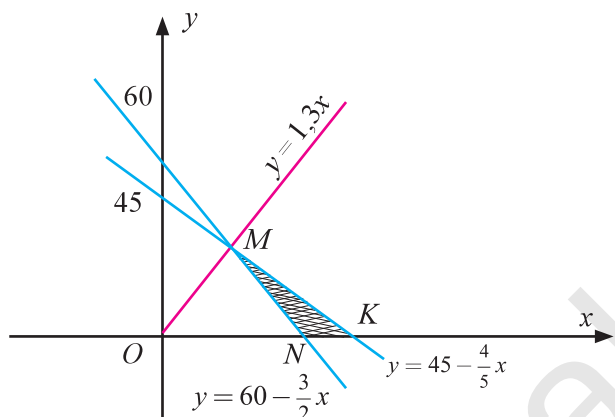
sızıqtan tómende jatıwshı barlıq noqatların bildiredi; 2 – teńsizlik bolsa

$3x + 2y = 120$, yaǵnıy $y = 60 - \frac{3}{2}x$ tuwrı sızıqtan joqarıda jatıwshı barlıq

noqatlardı bildiredi (35-súwretke qarań).

Bul eki yarım tegisliktiń kesispesi, $x > 0$, $y > 0$, ekeni esapqa alınsa, $\triangle MNK$ nı beredi. Toraq hám qorazqanttıń anıq bahasın bilmeymiz, bul bahanı bildiriwshı (x ; y) noqat MNK úshmúyeshlik ishindegi qálegen noqat bolıwı múmkin. Bul úshmúyeshlik bolsa $13x = 10y$, yaǵnıy $y = 1,3x$ tuwrı sızıqtan tómende jaylasqan.

Demek, $y < 1,3x$, yaǵnıy $13x > 10y$. ▲



35-súwret.

331. Imtixanda oqıwshılardıń $\frac{1}{6}$ bólegi „qanaatlandırarlı“, 56% i „jaqsı“ hám 14 i „ayırqsha“ bahalar aldı. „Ayırqsha“ alğanlar jámi oqıwshılardıń 4% inen kóp, biraq, 5% inen kem bolsa, jámi oqıwshılar sanın tabıń.

△ Jámi oqıwshılar sanın x dep alayıq. Onda $\frac{x}{6}$ – „qanaatlandırarlı“ baha, $\frac{56x}{100} = \frac{14}{25}x$ – „jaqsı“ baha alğan oqıwshılar sanı boladı.

Jámi oqıwshılar sanı 6 ға da, 25 ke de bólinedi. Demek, $x = 6 \cdot 25 \cdot n = 150 \cdot n$, n – natural san. Shárt boyınsha „ayırqsha“ baha alğan oqıwshılar sanı $0,04x < 14 < 0,05x$ teńsizlikti qanaatlandıradı.

Buğan $x = 150 \cdot n$ di qoyıp, $6n < 14 < 7,5 \cdot n$, yaǵnıy $n = 2$ ekenin tabamız.

Juwabı: 300 oqıwshı. ▲

332. Eki ıdıstaǵı birdey buyımlar sanı qosılıp 29 dan kóp. 1 – ıdıstan 2 buyım alında, onda qalǵan buyımlar 2 – ıdıstaǵıdan 3 esesinen de kóbirek boladı. 1 – ıdıstaǵı buyımlardıń 3 esesi menen 2 – ıdıstaǵı buyımlardıń 2 esesiniń parqı 60 dan kem. Hárbir ıdısta qanshadan buyım bar?

△ 1-ıdıstaǵı buyımlar sanın x penen, 2-ıdıstaǵı buyımlar sanın y penen belgileyik. Onda másele shártine sáykes usı teńsizlikler sistemasına iye bolamız:

$$\begin{cases} x + y > 29, \\ x - 2 > 3y, \\ 3x - 2y < 60. \end{cases}$$

Bul sistemani tómendegishe jazıp alamız:

$$\begin{cases} x > 29 - y, \\ x > 3y + 2, \\ 20 + \frac{2}{3}y > x. \end{cases} \quad (1)$$

Bunnan

$$20 + \frac{2}{3}y > 29 - y, \quad (2)$$

$$20 + \frac{2}{3}y > 3y + 2 \quad (3)$$

teńsizliklerdiń durıslıǵı kelip shıǵadı. (2) den $y > \frac{27}{5}$, (3) den bolsa $y < \frac{54}{7}$ teńsizlikti alamız.

Demek, $\frac{27}{5} < y < \frac{54}{7}$ yaki $5\frac{2}{5} < y < 7\frac{5}{7}$. y – natural san bolǵanı ushin ol 6 ǵa yaki 7 ge bola aladı. Eger $y = 6$ bolsa, onda (1) sistemani

$$\begin{cases} x > 23, \\ x > 20, \\ x < 24 \end{cases}$$

túrinde jazıp alıwǵa boladı. Biraq, bul sistemani qanaatlandırıwshı natural san x joq. Demek, $y = 7$ eken. Onda (1) den

$$\begin{cases} x > 22, \\ x > 23, \\ x < 24\frac{2}{3} \end{cases}$$

sistemağa kelemiz. Bul sistemani qanaatlantırıwshı jalğız natural san $x = 24$ ekeni anıq.

Juwapı: 1-ıdista 24, 2-ıdista 7 buyım bar. ▲

333. Eki ıdistağı buyımlar sanı birgelikte 27 den kóp. 2-ıdistan 12 buyım alıńanda, 1-ıdistağı buyımlar sanı 2-ıdistağıdan 2 ese kóplew boladı. 1-ıdistan 10 buyım alıńanda, 2-ıdistağı buyımlar sanı 9 eseden kóplew boladı. Hárbir ıdista qanshadan buyım bar?

334. 1-zavod 1 kúnde 950 den zıyat bolmağan muğdarda ónim islep shıǵaradı. 2-zavod dáslep 1-zavod islep shıǵarğan ónimniń 95% in shıǵaratuǵın edi. Qosımsha stanoklar ornatılǵannan keyin, 2-zavod islep shıǵarıwdı 1-zavodqa qaraǵanda 23% ke asırdı hám 1 kúnde 1000 nan kóp ónim bere basladı. 2-zavod qosımsha stanoklar alǵańa shekem hám hárbir zavod qansha ónim islep shıǵaratuǵın edi? (Ónimler sanı natural sanlarda belgilenedi.)

△ 1-zavod 1 kúnde islep shıǵarğan ónimler sanı x bolsın. Onda 2-zavod

dáslep $\frac{95x}{100}$, qosımsha stanoklar ornatılǵannan keyin $\left(\frac{95x}{100} + \frac{23x}{100}\right)$ ónim bergen. Másele mazmunına sáykes teńsizlikler sisteması tómendegishe boladı:

$$\begin{cases} x \leq 950, \\ \frac{95x}{100} + \frac{23x}{100} > 1000. \end{cases}$$

Bunnan

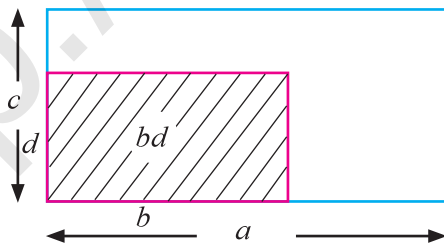
$$847 \frac{27}{59} < x \leq 950. \quad (1)$$

Biraq $\frac{95x}{100}$ hám $\frac{23x}{100}$ sanları natural san bolıwı kerek, yaǵnıy $x=100$ ge bóliniwi kerek. (1) aralıqta 100 ge bólinetuǵın san 900. Demek, 1-zavod 1 kúnde 900 ónim islep shıǵarğan. 2-zavod bolsa qosımsha

stanok ornataman degenshe $\frac{95}{100} \cdot 900 = 855$ dana ónim islep shıǵargan.

Juwaǵı: 900 dana, 855 dana. ▲

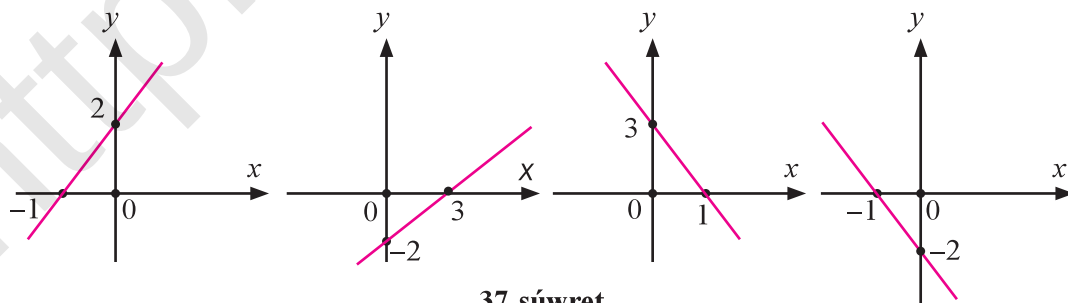
- 335.** 1-ıdista jasıl, 2-ıdista bolsa aq sharlar bar. Jasıl sharlar sanı aq sharlar sanınıń $\frac{15}{19}$ bólegin quraydı. Jasıl sharlardıń $\frac{3}{7}$ bólegi, aq sharlardıń $\frac{2}{5}$ bólegi ıdıslardan alıngannan keyin, 1-ıdista 1000 danadan az, 2-ıdista 1150 danadan kóp shar qaldı. Dáslep, hárbir ıdista qanshadan shar bolǵan?
- 336.** 80 t, 60 t, 50 t júk sıyatuǵın vagonlar bar. Eger, júk 80 t lı vagonlarǵa júklense, vagonlardan birewi tolıq júklenbey qaladı. Eger júk 60 t lı vagonlarǵa júklense, jáne 8 den kóp vagon kerek boladı hám 1 vagon tolıq júklenbey qaladı. Eger júk 50 t lı vagonlarǵa júklense, jáne 5 vagon kerek boladı hám bul jaǵdayda júkler vagonlardıń hámмесin toltıradı. Júk neshe tonna bolǵan?
- 337.** Oqıwshılar hár qatarda 8 den sap tartıp tursa, qatarlardan birewi tolıq bolmay qaladı. Eger, hár qatarda 7 den bólinse, qatarlar tolıq boladı, biraq qatarlar sanı 2 ge artadı. Eger hár qatarda 5 ten bólinse, qatarlar sanı jáne 7 ge artadı, biraq 1 qatar tolıq bolmaydı. Oqıwshılar sanın anıqlań.
- 338.** 1) a, b, c, d – óń sanlar hám $a > b, c > d$ bolsa, onda $ac > bd$ bolıwı sabaqlıǵında dálillengen. Bul teńsizlikke geometriyalıq sıpatlama berıń hám 36-súwretti túsindirıń:



36-súwret.

2) Dónes kópmúyeshlik ishinde jatıwshı qálegen noqattan onıń ushlarına shekem bolǵan aralıqlar qosındısı, usı kópmúyeshlik yarım perimertinen úlken ekenin dálilleń.

- 339.** Kólemi 8 l bolǵan eritpede 60 % kislota bar edi. Oǵan kislotası 20 % bolǵan eritpeden quya baslandı. Aralaspadaǵı kislota 40 % den kóp bolmawı, lekin 30% ten kem bolmawı ushın ekinshi eritpeden birinshisine qansha quyıwǵa boladı?
- 340.** 1) Jumısshılar komandası 5 kúnde 300 den kem, 10 kúnde 500 den artıq ónim tayarladı. Eger komandada 8 adam islep, olardıń miynet ónimdarlıǵı birdey bolsa, hárбір jumısshı bir kúnde neshe ónim tayarlaǵan?
2) Avtobus 8 ret qatnawda 185 ten kóp jolawshını, 15 ret qatnawda bolsa 370 ten kem jolawshını tasıdı. Eger avtobus hár saparı onda neshe orın bolsa, tap sonsha jolawshını tasıǵan bolsa, avtobusta neshe orın bar?
- 341.** Funkciyanıń grafigin jasań hám grafik boyınsha x tiń qanday mánislerinde funkciya: óń; nolge teń; 2 den úlken; -1 den kishi mánislerdi qabıl etiwın tabıń:
- 1) $y = 5x + 2$; 2) $y = 2x - 6$;
3) $y = -4x + 5$; 4) $y = -3x - 1$.
- 342.** 37-súwrette $y = kx + b$ sızıqlı funkciyanıń grafigi berilgen.
1) k hám b nı tabıń; 2) $x \geq 0$; 3) $x < 0$; 4) $x \geq 3$ 5); $7 \leq -2x$ bolǵanda y funkciyanıń qanday mánislerin qabıl etiwın teńsizlik belgisi járdeminde jazıń hám payda etilgen teńsizlikti sheshiń. Sheshimin san kósherinde súwretleń.



37-súwret.

III BAP

KVADRAT TEŃLEMELER

22-§. KVADRAT TEŃLEME HÁM ONÍŃ KORENLERI

1-másele. Tuwrímúyeshliktiń ultanı onıń biyikliginen 10 cm ge artıq, al onıń maydanı 24 cm² qa teń. Tuwrímúyeshliktiń biyikligin tabıń.

△ Meyli tuwrímúyeshliktiń biyikligi x santimetr bolsın deyik, onda onıń ultanı $(x + 10)$ santimetrge teń boladı. Usı tuwrímúyeshliktiń maydanı $x(x + 10)$ cm² qa teń. Máseleniń shárti boyınsha $x(x + 10) = 24$.

Qawsırmalardı ashıp hám 24 sanın qarama-qarsı belgi menen teńlemenıń shep jaǵına ótkizip, tómendegini payda etemiz:

$$x^2 + 10x - 24 = 0.$$

Teńlemenıń shep jaǵın gruppalam usılı menen kóbeytiwshilerge jikley-miz:

$$\begin{aligned} x^2 + 10x - 24 &= x^2 + 12x - 2x - 24 = \\ &= x(x + 12) - 2(x + 12) = (x + 12)(x - 2). \end{aligned}$$

Demek, teńlemenı tómendegishe jazıw múmkin:

$$(x + 12)(x - 2) = 0.$$

Bul teńleme $x_1 = -12$ hám $x_2 = 2$ korenlerine iye boladı.

Kesindiniń uzınlıǵı teris san bola almaytuǵınlıǵı sebepli izlenip atırǵan biyiklik 2 sm ge teń boladı. ▲

Bul máseleni sheshiwde kvadrat teńleme dep atalıwshı

$$x^2 + 10x - 24 = 0$$

teńleme payda boladı.



Kvadrat teńleme dep,

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (1)$$

túrindegi teńlemege aytıladı, bunda a, b, c . berilgen sanlar, $a \neq 0, x$ – bolsa belgisiz.

Kvadrat teńlemenin a , b , c koefficientleri ádette bilay aytiladı: a – birinshi yamasa bas koefficient, b – ekinshi koefficient, c – saltań aǵza.

Mısalı, $3x^2 - x + 2 = 0$ teńlemesinde bas koefficient – 3, ekinshi koefficient – 1, saltań aǵza – 2.

Matematika, fizika hám texnikanın kóp ǵana máselelerin sheshiw kvadrat teńlemenini sheshiwge alıp keledi.

Kvadrat teńlemelerge jáne de mısallar keltiremiz:

$$2x^2 + x - 1 = 0, \quad 5t^2 - 10t + 3 = 0,$$

$$x^2 - 25 = 0, \quad 2x^2 = 0.$$

Kóp ǵana máselelerdi sheshiwde algebralıq teńlemeler járdeminde kvadrat teńlemege keltiriletuǵın teńlemeler payda boladı.

Mısalı,

$$2x^2 + 3x = x^2 + 2x + 2$$

teńlemesi onıń barlıq aǵzaların shep jaqqa alıp ótkennen hám uqsas aǵzaların jıynaǵannan keyin, mına

$$x^2 + x - 2 = 0$$

kvadrat teńlemesi túrine keltiriledi.

2 - m á s e l e . Mına teńlemenini sheshiń:

$$x^2 = 64.$$

△ 64 ti shep jaqqa alıp ótemiz, kvadrat teńlemenini payda etemiz:

$$x^2 - 64 = 0.$$

Shep jaǵın kóbeytiwshilerge jikleymiz:

$$(x - 8)(x + 8) = 0.$$

Demek, teńleme eki korengi iye: $x_1 = 8$, $x_2 = -8$.

$x^2 = 64$ teńlemesiniń birinshi koreni 64 sanınıń arifmetikalıq koreni, al ekinshisi bolsa oǵan qarama-qarsı san ekenligin eskertemiz:

$$x_1 = \sqrt{64}, x_2 = -\sqrt{64}.$$

Ádette, bul eki formula biriktirilip jazıladı:

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{64}.$$

2-máseleniń juwabın $x_{1,2} = \pm 8$ túrinde jazıw múmkin.

$x^2 = 64$ teńleme $x^2 = d$ teńlemesiniń dara túri. Hár qanday kvadrat teńleme bolsa, $x^2 = d$ teńlemege keltiriliwi múmkin.



T e o r e m a . $x^2 = d$ teńlemesi, bunda $d > 0$, eki korengi iye:

$$x_1 = \sqrt{d}, x_2 = -\sqrt{d}.$$

○ d nı teńlemenin shep jaǵına alıp ótemiz:

$$x^2 - d = 0.$$

$d > 0$ bolǵanı ushın arifmetikalıq kvadrat korennin anıqlamasına muwapıq $d = (\sqrt{d})^2$. Sonın ushın teńlemenin tómendegishe jazıwǵa boladı:

$$x^2 - (\sqrt{d})^2 = 0.$$

Bul teńlemenin shep jaǵın kóbeytiwshilerge jiklep, tómendegini payda etemiz:

$$(x - \sqrt{d})(x + \sqrt{d}) = 0,$$

bunnan, $x_1 = \sqrt{d}, x_2 = -\sqrt{d}$. ●

Máselen, $x^2 = \frac{4}{9}$ teńlemesi $x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{4}{9}} = \pm \frac{2}{3}$ korenlerine iye; $x^2 = 3$

teńlemesi $x_{1,2} = \pm \sqrt{3}$ korenlerine iye; $x^2 = 8$ teńlemesi $x_{1,2} = \pm \sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$

korenlerine iye.

Eger de $x^2 = d$ teńlemesiniń óń jaǵı nolge teń bolsa, onda $x^2 = 0$ teńleme bir korengi iye: $x = 0$. $x^2 = 0$ teńlemesin $x \cdot x = 0$ túrinde jazıw múmkin bolǵanı ushın geyde $x^2 = 0$ teńlemesi eki teń korengiboladı iye delinedi: $x_{1,2} = 0$.

Eger de $d < 0$ bolsa, onda $x^2 = d$ teńlemesi haqıyqıy korenlerge iye bolmaydı, sebebi haqıyqıy sannın kvadratı teris san bolıwı múmkin emes. Mısalı, $x^2 = -25$ teńlemesi haqıyqıy korenlerge iye emes.

Sh i n i ğ i w l a r

343. (Awızekei.) Tómente berilgen teńlemelerden qaysıları kvadrat teńleme boladı:

- | | |
|----------------------------|-------------------------------|
| 1) $5x^2 - 14x + 17 = 0$; | 2) $\frac{2}{3}x^2 + 4 = 0$; |
| 3) $-7x^2 - 13x + 8 = 0$; | 4) $17x + 24 = 0$; |
| 5) $-13x^4 + 26 = 0$; | 6) $x^2 - x = 0$? |

344. (Awızekei.) Kvadrat teńlemenıń koefficiyentlerin hám saltań aǵzasın aytıń:

- | | |
|-----------------------------------|----------------------------|
| 1) $5x^2 - 14x + 17 = 0$; | 2) $-7x^2 - 13x + 8 = 0$; |
| 3) $\frac{2}{3}x^2 + 4 = 0$; | 4) $x^2 + 25x = 0$; |
| 5) $-x^2 + x + \frac{1}{3} = 0$; | 6) $-x^2 - x = 0$. |

345. Eger $ax^2 + bx + c = 0$ kvadrat teńlemenıń koefficiyentleri belgili bolsa, usı kvadrat teńlemenı jazıń:

- | | |
|-----------------------------|-----------------------------|
| 1) $a = 2, b = 3, c = 4$; | 2) $a = -1, b = 0, c = 9$; |
| 3) $a = 1, b = -5, c = 0$; | 4) $a = 1, b = 0, c = 0$. |

346. Berilgen teńlemenı kvadrat teńlemege keltiriń:

- | | |
|-----------------------------------|-------------------------------------|
| 1) $x(x - 3) = 4$; | 2) $(x - 3)(x - 1) = 12$; |
| 3) $3x(x - 5) = x(x + 1) - x^2$; | 4) $7(x^2 - 1) = 2(x + 2)(x - 2)$. |

347. $-3, -2, 0, 1$ sanlarınan qaysıları teńlemenıń koreni boladı:

- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| 1) $x^2 - 9 = 0$; | 2) $x^2 - x = 0$; |
| 3) $x^2 + x - 6 = 0$; | 4) $x^2 - 5x + 4 = 0$; |
| 5) $(x - 1)(x + 2) = 0$; | 6) $(x + 1)(x - 3) = x$? |

348. (Awızekei.) $x^2 = 36$ teńlemesi neshe korenge iye? Olardı tabıń. Olardan qaysısı 36 nıń arifmetikalıq koreni boladı?

349. (Awızeke.) Teñlemeni sheshiñ:

- 1) $x^2 = 1$; 2) $x^2 = 9$; 3) $x^2 = 16$; 4) $x^2 = 25$;
5) $x^2 = 100$; 6) $x^2 = 0$; 7) $x^2 = 49$; 8) $x^2 = 64$.

350. Teñlemenıń korenlerin tabıñ:

- 1) $x^2 = \frac{9}{16}$; 2) $x^2 = \frac{16}{49}$; 3) $x^2 = 1\frac{7}{9}$; 4) $x^2 = 2\frac{1}{4}$;
5) $x^2 = 5$; 6) $x^2 = 13$; 7) $x^2 = \frac{25}{49}$; 8) $x^2 = 10$.

351. Teñlemeni sheshiñ:

- 1) $x^2 - 49 = 0$; 2) $x^2 - 121 = 0$; 3) $\frac{1}{3}x^2 = 0$;
4) $\frac{x^2}{5} = 0$; 5) $x^2 + 9 = 0$; 6) $x^2 + 12 = 0$.

352. Kvadrat teñlemeni, onıń shep jaǵın kóbeytiwshilerge jiklep jolı menen sheshiñ:

- 1) $x^2 - x = 0$; 2) $x^2 + 2x = 0$; 3) $3x^2 + 5x = 0$;
4) $5x^2 - 3x = 0$; 5) $x^2 - 4x + 4 = 0$; 6) $x^2 + 6x + 9 = 0$.

23-§. TOLÍQ EMES KVADRAT TEÑLEMELER

Egerde $ax^2 + bx + c = 0$ kvadrat teñlemesinde b yamasa c koefficientlerinen hesh bolmaǵanda birewi nolge teñ bolsa, onda bul teñleme *tolıq emes kvadrat teñleme* dep ataladı.

Demek, tolıq emes kvadrat teñleme tómendegi teñlemelerdiń biriniń kórinisinde boladı.

$$ax^2 = 0, \quad (1)$$

$$ax^2 + c = 0, c \neq 0, \quad (2)$$

$$ax^2 + bx = 0, b \neq 0. \quad (3)$$

(1), (2), (3) teñlemelerde *a koefficiyenti nolge teñ emesligin* eskertip ótemiz.

Toliq emes kvadrat teńlemelerdiń qalay sheshiletuǵının kórseteyik.

1-másele. Teńlemenı sheshiń:

$$5x^2=0.$$

△ Bul teńlemenıń eki jaǵın da 5 ke bólip,

$$x^2=0$$

teńlemesin payda etemiz, bunnan $x=0$. ▲

2-másele. Teńlemenı sheshiń:

$$3x^2-27=0.$$

△ Teńlemenıń eki jaǵın da 3 ke bólemiz:

$$x^2-9=0.$$

Bul teńlemenı tómendegishe jazıwǵa boladı:

$$x^2=9,$$

bunnan $x_{1,2} = \pm 3$. ▲

3-másele. Teńlemenı sheshiń:

$$2x^2+7=0.$$

△ Bul teńlemenı tómendegishe jazıwǵa boladı:

$$x^2 = -\frac{7}{2}.$$

Bul teńleme haqıyqiy korenlerge iye emes, sebebi, x tıń qálegen haqıyqiy mánislerinde $x^2 \geq 0$ boladı. ▲

4-másele. Teńlemenı sheshiń:

$$-3x^2+5x=0.$$

△ Teńlemenıń shep jaǵın kóbeytiwshilerge jiklep,

$$x(-3x+5)=0$$

ekenin payda etemiz, bunnan: $x_1 = 0, x_2 = \frac{5}{3}$.

Ju w a b ı: $x_1 = 0, x_2 = \frac{5}{3}$. ▲

Shuniqtlar

Teñlemenı sheshiñ (353–357):

- 353.** 1) $x^2 = 0$; 2) $3x^2 = 0$; 3) $5x^2 = 125$;
 4) $9x^2 = 81$; 5) $4x^2 - 64 = 0$; 6) $x^2 - 27 = 0$;
 7) $4x^2 = 81$; 8) $0,01x^2 = 4$; 9) $0,04x^2 = 16$.
- 354.** 1) $x^2 - 7x = 0$; 2) $x^2 + 5x = 0$; 3) $5x^2 = 3x$;
 4) $4x^2 = 0,16x$; 5) $9x^2 - x = 0$; 6) $9x^2 + 1 = 0$;
 7) $x^2 - 3x = 0$; 8) $0,1x^2 - x = 0$; 9) $16x^2 + 3 = 0$.
- 355.** 1) $4x^2 - 169 = 0$; 2) $25 - 16x^2 = 0$; 3) $2x^2 - 16 = 0$;
 4) $3x^2 = 15$; 5) $2x^2 = \frac{1}{8}$; 6) $3x^2 = 5\frac{1}{3}$;
 7) $3x^2 = 27$; 8) $4x^2 = 64$; 9) $1\frac{9}{16}x^2 = 4$.
- 356.** 1) $\frac{x^2-1}{3} = 5$; 2) $\frac{9-x^2}{5} = 1$; 3) $4 = \frac{x^2-5}{5}$;
 4) $3 = \frac{9x^2-4}{4}$; 5) $\frac{16-x^2}{4} = 3$; 6) $5 = \frac{x^2-6}{2}$.
- 357.** 1) $3x^2 + 6x = 8x^2 - 15x$; 2) $17x^2 - 5x = 14x^2 + 7x$;
 3) $10x + 7x^2 = 2x^2 + 8x$; 4) $15x + 9x^2 = 7x^2 + 10x$.
- 358.** x tiñ qanday mánislerinde berilgen bólshekler bir-birine teñ boladı:
- 1) $\frac{4x^2-3x}{3}$ hám $\frac{x^2+5x}{2}$; 2) $\frac{3x^2+7x}{4}$ hám $\frac{7x^2-5x}{3}$?

24-§. KVADRAT TEÑLEMELERDİŇ KORENLERIN TABÍW FORMULALARÍ. DISKRIMINANT

Kvadrat teñlemelerdi sheshiw ushın *tolıq kvadrattı ajratıw usılı* qollanıladı. Bul usıldı mısallarda kórip shıǵayıq.

1- m á s e l e. Kvadrat teñlemenı sheshiñ:

$$x^2 + 2x - 3 = 0.$$

△ Bul teńlemenı tóمندegishe túrlendiremiz:

$$\begin{aligned}x^2 + 2x &= 3, \\x^2 + 2x + 1 &= 3 + 1, \\(x + 1)^2 &= 4.\end{aligned}$$

Demek, $x + 1 = 2$ yaki $x + 1 = -2$, bunnan $x_1 = 1$, $x_2 = -3$. ▲

Biz, $x^2 + 2x - 3 = 0$ teńlemenı shesher ekenbiz, onıń túrin sonday etip al-mastırdıq, teńlemenıń *shep jaǵında eki aǵzalınıń kvadratı* $(x + 1)^2$ *payda boldı hám oń jaǵında belgisiz qatnaspadı.*

2- m á s e l e. Teńlemenı sheshiń:

$$x^2 + 6x - 7 = 0.$$

△ Bul teńlemenı sonday túrlendiremiz, onıń shep jaǵı eki aǵzalınıń kvadratına aylansın:

$$\begin{aligned}x^2 + 6x &= 7, \\x^2 + 2 \cdot 3x &= 7, \\x^2 + 2 \cdot 3x + 3^2 &= 7 + 3^2, \\(x + 3)^2 &= 16.\end{aligned}$$

Bul túrlendiriwdi túsindireyik. $x^2 + 6x$ ańlatpasında birinshi qosılıwshı x sanınıń kvadratı, al ekinshisi x hám 3 tiń eki eselengen kóbeymesi. Sonıń ushın teńlemenıń shep jaǵında ekinshi aǵzanıń kvadratın payda etiw ushın teńlemenıń eki jaǵına da 3^2 tı qosıw kerek.

$(x + 3)^2 = 16$ teńlemesin sheship, $x + 3 = 4$ yaki $x + 3 = -4$ ti payda etemiz, bunnan $x_1 = 1$, $x_2 = -7$. ▲

3- m á s e l e. $4x^2 - 8x + 3 = 0$ teńlemenı sheshiń.

$$\begin{aligned}\triangle \quad 4x^2 - 8x &= -3, \\(2x)^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2x &= -3, (2x)^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2x + 4 &= -3 + 4, \\(2x - 2)^2 &= 1, 2x - 2 = 1 \text{ yoki } 2x - 2 = -1, \\x_1 &= \frac{3}{2}, x_2 = \frac{1}{2}. \quad \blacktriangle\end{aligned}$$

4- m á s e l e. $x^2 + 5x - 14 = 0$ teńlemeni sheshiń.

$$\triangle x^2 + 5x = 14, \quad x^2 + 2 \cdot \frac{5}{2}x + \frac{25}{4} = 14 + \frac{25}{4},$$

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{81}{4}, \quad x + \frac{5}{2} = \pm \frac{9}{2},$$

$$x_1 = \frac{9}{2} - \frac{5}{2} = 2, \quad x_2 = -\frac{9}{2} - \frac{5}{2} = -7. \quad \blacktriangle$$

Joqarıda kvadrat teńlemelerdi tolıq kvadratqa jiklew usılı menen sheshiw kórip shıǵıldı. Usı usıldı ulıwma túrdegi kvadrat teńlemeni sheshiw for-mulasın keltirip shıǵarıw ushın qollanamız.

Ulıwma túrde berilgen kvadrat teńlemeni qarayıq:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad \text{bunda } a \neq 0.$$

Teńlemenin eki jaǵın a ǵa bólip,

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

kvadrat teńlemeni payda etemiz.

Bul teńlemenin túrin mınaday etip túrlendireyik, onın shep jaǵında eki aǵzalınıń *tolıq kvadratı* payda bolsın:

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{b}{a}x &= -\frac{c}{a}, & x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 &= -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2, \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Eger, $b^2 - 4ac \geq 0$ bolsa, onda

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2.$$

Bunnan

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

yamasa

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (2)$$

(2) formula *ulıwma túrdegi kvadrat teńleme korenleriniń formulası* delinedi.

$D = b^2 - 4ac$ ańlatpa $ax^2 + bx + c = 0$ kvadrat teńlemeninıń diskriminantı delinedi.

(2) formuladan kórinip turǵanday, kvadrat teńleme:

1) $D > 0$ bolsa, x_1 hám x_2 - eki túrli korengge iye, $x_1 \neq x_2$;

2) $D = 0$ bolsa, $x_1 = x_2$ - bir korengge iye;

3) $D < 0$ bolsa, haqıyqıy korenlerge iye emes.

1-másele. Teńlemenı sheshiń:

$$6x^2 + x - 2 = 0.$$

△ Bul jerde $a = 6$, $b = 1$, $c = -2$ hám $D > 0$, yaǵnıy teńleme eki korengge iye. (2) formula boyınsha tómendegilerdi tabamız:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-2)}}{2 \cdot 6} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{12} = \frac{-1 \pm 7}{12},$$

bunnan

$$x_1 = \frac{-1+7}{12} = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{-1-7}{12} = -\frac{2}{3}.$$

Juwapı: $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{2}{3}$. ▲

2-másele. $4x^2 - 4x + 1 = 0$ teńlemenı sheshiń.

△ Bul jerde $a = 4$, $b = -4$, $c = 1$ hám $D = 0$ yaǵnıy teńleme bir korengge iye. (2) formula boyınsha tómendegilerdi tabamız:

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4} = \frac{4 \pm 0}{8} = \frac{1}{2}.$$

Juwapı: $x = \frac{1}{2}$. ▲

Eger (1) teńliktiń oń jaǵında teris san tursa, yaǵnıy $D = b^2 - 4ac < 0$ bolsa, onda (1) teńlik x tiń hesh qanday haqıyqıy mánisinde durıs bolmaydı, sebebi onıń shep jaǵı teris emes. Sonıń ushın, eger $D = b^2 - 4ac < 0$ bolsa,

$$ax^2 + bx + c = 0$$

teńlemesi haqıyqıy korenlerge iye bolmaydı.

3- másele. $x^2 - 4x + 5 = 0$ teńleme haqıyqıy korenlerge iye emesligin dálilleń.

△ Bul jerde $a=1$, $b=-4$, $c=5$,

$$D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -4 < 0.$$

Demek, berilgen teńleme haqıyqıy korenlerge iye emes. ▲

4- másele. $2x^2 + 3x + 4 = 0$ teńlemenı sheshiń:

△ (2) formula boyınsha tómendegilerge iye bolamız:

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2 \cdot 4}}{4}.$$

Koren belgisi astında turǵan san teris:

$$9 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = 9 - 32 < 0.$$

Juwabı: Teńleme haqıyqıy korenlerge iye emes. ▲

Bul mısalda $D = b^2 - 4ac = -23 < 0$: haqıyqıy korenler joq ekenligine diskriminanttı esaplap isenim payda etiwge de bolatuǵın edi.

Toliq emes kvadrat teńlemelerdi de (2) formula boyınsha sheshiw múmkin. Biraq, olardı sheshiwde 23-§ ta berilgen usıllardan paydalanıw qolaylıraq.

Shınıǵıwlar

359. Sonday oń m sandı tabıń, nátiyjede berilgen anlatpa qosındınıń yaqı ayırmanıń kvadratı bolsın:

- | | | |
|----------------------|---------------------|----------------------|
| 1) $x^2 + 4x + m$; | 2) $x^2 - 6x + m$; | 3) $x^2 - 14x + m$; |
| 4) $x^2 + 16x + m$; | 5) $x^2 + mx + 4$; | 6) $x^2 - mx + 9$. |

360. Teńlemenı tolıq kadrattı jiklew usılı menen sheshiń:

- | | |
|--------------------------|---------------------------|
| 1) $x^2 + 4x - 5 = 0$; | 2) $x^2 + 4x - 12 = 0$; |
| 3) $x^2 + 2x - 15 = 0$; | 4) $x^2 - 10x + 16 = 0$; |
| 5) $x^2 - 6x + 3 = 0$; | 6) $x^2 + 8x - 7 = 0$. |

Теңлемени sheshiń (361–363):

361. 1) $9x^2 + 6x - 8 = 0$; 2) $25x^2 - 10x - 3 = 0$.

362. 1) $x^2 - 5x + 4 = 0$; 2) $x^2 - 3x - 10 = 0$.

363. 1) $2x^2 + 3x - 5 = 0$; 2) $5x^2 - 7x - 6 = 0$.

364. $D = b^2 - 4ac$ аңлатпаыń мánисин esapлаń, bunda:

1) $a = 3, b = 1, c = -4$; 2) $a = 3, b = -0,2, c = -0,01$;

3) $a = 7, b = -6, c = -45$; 4) $a = -1, b = 5, c = 1800$.

365. Kvadrat теңлемени sheshiń:

1) $2x^2 + 3x + 1 = 0$; 2) $2x^2 - 3x + 1 = 0$;

3) $2x^2 + 5x + 2 = 0$; 4) $2x^2 - 7x + 3 = 0$;

5) $3x^2 + 11x + 6 = 0$; 6) $4x^2 - 11x + 6 = 0$.

366. x тиң qандай мánислеринде аңлатпаыń мánиси nolge aйланады:

1) $2x^2 + 5x - 3$; 2) $2x^2 - 7x - 4$; 3) $3x^2 + x - 4$;

4) $3x^2 + 2x - 1$; 5) $x^2 + 4x - 3$; 6) $3x^2 + 12x + 10$;

7) $-2x^2 + x + 1$; 8) $-3x^2 - x + 4$; 9) $6x^2 - 5x + 1$?

Kvadrat теңлемени sheshiń (367–368):

367. 1) $9x^2 - 6x + 1 = 0$; 2) $16x^2 - 8x + 1 = 0$;

3) $49x^2 + 28x + 4 = 0$; 4) $36x^2 + 12x + 1 = 0$.

368. 1) $2x^2 + x + 1 = 0$; 2) $3x^2 - x + 2 = 0$;

3) $5x^2 + 2x + 3 = 0$; 4) $x^2 - 2x + 10 = 0$.

369. Тóмeндеги теңлемелерди sheshpeстен, olардыń neshe koreнге iye болыўын аныqlаń:

1) $2x^2 + 5x - 7 = 0$; 2) $3x^2 - 7x - 8 = 0$;

3) $4x^2 + 4x + 1 = 0$; 4) $9x^2 - 6x + 2 = 0$.

Teñlemenı sheshiń (370–372):

- 370.** 1) $7x^2 - 6x + 2 = 0$; 2) $3x^2 - 5x + 4 = 0$;
 3) $9x^2 + 12x + 4 = 0$; 4) $4x^2 - 20x + 25 = 0$;
 5) $4x^2 + 12x + 9 = 0$; 6) $x^2 - 3x - 4 = 0$.
- 371.** 1) $6x^2 = 5x + 1$; 2) $5x^2 + 1 = 6x$;
 3) $x(x - 1) = 72$; 4) $x(x + 1) = 56$;
 5) $2x(x + 2) = 8x + 3$; 6) $3x(x - 2) - 1 = x - 0,5(8 + x^2)$.
- 372.** 1) $\frac{x^2 + 3x}{2} = \frac{x + 7}{4}$; 2) $\frac{x^2 - 3x}{7} + x = 11$;
 3) $\frac{2x^2 + x}{3} - \frac{2 - 3x}{4} = \frac{x^2 - 6}{6}$; 4) $\frac{x^2 + x}{4} - \frac{3 - 7x}{20} = 0,3$.
- 373.** Teñlemenı sheshiń:
 1) $5x^2 - 8x - 4 = 0$; 2) $4x^2 + 4x - 3 = 0$;
 3) $8x^2 - 6x + 1 = 0$; 4) $5x^2 - 26x + 5 = 0$.
- 374.** Teñlemenı tolıq kvadrattı jiklew usılı menen sheshiń:
 1) $x^2 - 16x + 48 = 0$; 2) $x^2 - 7x - 18 = 0$;
 3) $x^2 - 15x + 56 = 0$; 4) $x^2 + 12x + 27 = 0$;
 5) $x^2 - 11x + 28 = 0$; 6) $x^2 - 11x + 18 = 0$;
 7) $x^2 + 10x + 21 = 0$; 8) $2x^2 - 5x + 2 = 0$;
 9) $x^2 - 21x + 20 = 0$; 10) $x^2 - 6x - 55 = 0$;
 11) $3x^2 - x - 70 = 0$; 12) $x^2 - 100x + 99 = 0$.

$ax^2 + bx + c = 0$ teñlemenıń eki jaǵın da $4a$ ǵa kóbeytip hám
 $ax^2 + bx + c = 0$ úsh aǵzalıdan tolıq kvadrat jiklewge boladı:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0,$$

$$(2ax)^2 + 2 \cdot 2ax \cdot b + b^2 + 4ac - b^2 = 0,$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac, \text{ bunnan, } 2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}.$$

$$\text{Onda } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Másele. Toliq kvadrattı joqarıdağı usıl menen jiklep, $10x^2 + 13x - 3 = 0$ teńlemenı sheshiń:

$$\triangle 10x^2 + 13x - 3 = 0, 40 \cdot 10x^2 + 40 \cdot 13x - 3 \cdot 40 = 0,$$

$$(20x)^2 + 2 \cdot 20x \cdot 13 + 13^2 - 13^2 - 3 \cdot 40 = 0,$$

$$(20x + 13)^2 = 169 + 120, (20x + 13)^2 = (17)^2; 20x + 13 = \pm 17;$$

$$x_1 = \frac{17-13}{20} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}; \quad x_2 = \frac{-17-13}{20} = \frac{-30}{20} = -\frac{3}{2}.$$

Juwabı: $x = \frac{1}{5}, x = -\frac{3}{2}$. ▲

375. Teńlemenı kórsetilgen usıl menen sheship kóriń:

1) $12x^2 - 7x + 1 = 0;$

2) $6x^2 + 5x + 1 = 0;$

3) $8x^2 + 7x - 1 = 0;$

4) $\frac{x^2}{12} - \frac{1}{12}x - 1 = 0.$

№ 4



Qırınıń uzınlıǵı 3 sm bolǵan kub qızıl reńge boyalǵan. Ol 1 sm bolǵan kublarǵa bólinedi. Neshe kub úsh qızıl jaqqa iye? Eki qızıl jaqqa iye? Bir qızıl jaqqa iye? Bir qızıl jaqqa iye emes?

25- §. VIET TEOREMASÍ.KVADRAT ÚSH AĞZALÍNÍ SÍZÍQLÍ KÓBEYTIWSHILERGE JIKLEW



Mina

$$x^2 + px + q = 0 \quad (1)$$

túrindegi kvadrat teńleme keltirilgen kvadrat teńleme dep ataladı.

Bul teńlemede bas koefficient birge teń. Mısalı,

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

teńlemesi keltirilgen kvadrat teńleme boladı.



Hár qanday

$$ax^2 + bx + c = 0$$

kvadrat teńlemesin onıń eki jaǵın $a \neq 0$ ge bólip, (1) teńleme túrine keltiriwge boladı.

Máselen, $4x^2 + 4x - 3 = 0$ teńlemesiniń barlıq aǵzaların 4 ke bólip, tómendegi túrge keltiremiz.

$$x^2 + x - \frac{3}{4} = 0.$$

(1) keltirilgen kvadrat teńlemenin korenlerin tabamız. Bunıń ushın ulıwma túrdegi $ax^2 + bx + c = 0$ kvadrat teńlemesiniń korenleriniń formulasınan, yaǵnıy

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (2)$$

formulasınan paydalanamız. Ulıwma túrdegi teńlemede $a=1$, $b=p$, $c=q$ bolsa, keltirilgen kvadrat teńleme

$$x^2 + px + q = 0$$

payda boladı. Sol sebepli keltirilgen kvadrat teńleme ushın (2) formula

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

yaki

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad (3)$$

túrine iye boladı.

(3) formulağa *keltirilgen kvadrat teńleme korenleriniń formulası* delinedi.

(3) formuladan, ásiyese, p - jup san bolganda paydalanıw qolaylı.

Mısalı, $x^2 - 14x - 15 = 0$ teńlemenı shesheyik:

△ (3) formula boyınsha tómendegini tabamız:

$$x_{1,2} = 7 \pm \sqrt{49 + 15} = 7 \pm 8.$$

Juwabı: $x_1 = 15$, $x_2 = -1$. ▲

Keltirilgen kvadrat teńleme ushın tómendegi teorema orınlı:



V i e t t e o r e m a s ı . *Eger x_1 hám x_2 ler*

$$x^2 + px + q = 0$$

teńlemesiniń korenleri bolsa, onda

$$x_1 + x_2 = -p,$$

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

formulaları orınlı, yaǵnıy keltirilgen kvadrat teńleme korenleriniń qosındısı qarama-qarsı belgisi menen alınǵan ekinshi koefficientke, al korenleriniń kóbeymesi saltan aǵzaǵa teń.

○ (3) formula boyınsha:

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q},$$

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Bul teńliklerdi aǵzama-aǵza qossaǵ, $x_1+x_2=-p$ boladı. Bul teńliklerdi kóbeytip, kvadratlardıń ayırmasınıń formulası boyınsha tómendegini payda etemiz:

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = q. \quad \bullet$$

Mısalı, $x^2-13x+30=0$ teńlemesi $x_1=10$, $x_2=3$ korenlerine iye; onıń korenleriniń qosındısı $x_1+x_2=13$, al olardıń kóbeymesi $x_1 \cdot x_2=30$.

Viet teoreması, kvadrat teńleme teń eki $x_1=x_2=-\frac{p}{2}$ korenlerge iye bolǵan jaǵdayda da durıs bolatuǵınlıǵın atap ótemiz.

Mısalı, $x^2-6x+9=0$ teńlemesi teń eki $x_1=x_2=3$ korenlerge iye; olardıń qosındısı $x_1+x_2=6$, kóbeymesi $x_1 \cdot x_2=9$.

1- m á s e l e . Mına $x^2+px-12=0$ teńlemesiniń korenlerinen biri $x_1=4$. Usı teńlemenıń p koefficientin hám ekinshi koreni x_2 ni tabıń.

△ Viet teoreması boyınsha:

$$x_1 \cdot x_2 = -12, x_1 + x_2 = -p.$$

$$x_1=4 \text{ bolǵanı ushın } 4x_2 = -12, \text{ bunnan } x_2 = -3,$$

$$p = -(x_1 + x_2) = -(4 - 3) = -1.$$

Ju w a b ı: $x_2 = -3$, $p = -1$. ▲

2- m á s e l e . Korenleri $x_1=3$, $x_2=4$ bolǵan keltirilgen kvadrat teńlemenı dúziń.

△ $x_1=3$; $x_2=4$ sanları $x^2+px+q=0$ teńlemesiniń korenleri bolǵanı ushın Viet teoremasına muwapıq $p=-(x_1+x_2)=-7$, $q=x_1x_2=12$.

Ju w a b ı: $x^2-7x+12=0$. ▲

3- m á s e l e . $3x^2+8x-4=0$ teńlemesiniń korenleriniń biri oń. Teńlemenı sheshpey turıp, ekinshi korenniń belgisin anıqlań.

△ Teńlemenıń eki jaǵın 3 ke bólip, tómendegini payda etemiz:

$$x^2 + \frac{8}{3}x - \frac{4}{3} = 0.$$

Viet teoremasına muvafiq $x_1 x_2 = -\frac{4}{3} < 0$. Shárt boyınsha $x_1 > 0$, demek, $x_2 < 0$. ▲

Bazı máselelerdi sheshide *Viet teoremasına kerı bolğan* tómendegi teorema qollanıladı.



Eger p, q, x_1, x_2 sanlar ushın

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 \cdot x_2 = q \quad (4)$$

qatnasları orınlansa, onda x_1 hám x_2 sanlar

$$x^2 + px + q = 0$$

teńlemenin koreni boladı.

○ Shep jaqtağı

$$x^2 + px + q$$

ańlatpada p nın ornına $-(x_1 + x_2)$ nı, q nın ornına $x_1 \cdot x_2$ kóbeymesin qoyamız. Nátiyjede tómendegi ańlatpa payda boladı:

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = \\ &= x^2 - x_1 x - x_2 x + x_1 x_2 = x(x - x_1) - x_2(x - x_1) = \\ &= (x - x_1)(x - x_2). \end{aligned}$$

Solay etip, eger p, q, x_1 hám x_2 sanlar (4) qatnasları menen baylanısta bolsa, onda x *tiń hár qanday mánisinde*

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$$

teńligi orınlanadı, bunnan x_1 hám x_2 lar $x^2 + px + q = 0$ teńlemenin korenlari ekeni kelip shıǵadı. ●

Viet teoremasına kerı teoramadan paydalanıp, kvadrat teńlemenin korenlarin bazı da *tańlaw usılı* menen de tabıwǵa boladı.

4-m ásele. Tańlaw usılı menen

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

teńlemenin korenlarin tabıń.

△ Bunda $p=-5$, $q=6$. Eki x_1 hám x_2 sanın

$$x_1 + x_2 = 5, \quad x_1 x_2 = 6$$

bolatugin etip tanlaymız.

$6=2 \cdot 3$ hám $2+3=5$ ekenligin esapqa alıp, Viet teoramasına kerı teorema boyınsha $x_1=2$, $x_2=3$ ke, yaǵnıy $x^2-5x+6=0$ teńlemenıń korenlerine iye bolamız. ▲

5-másele. $\frac{x^2-x-12}{x+3}$ bólshekti qısqartıń.

△ Bólshektiń alımın kóbeytiwshilerge jikleymız:

$$\begin{aligned} x^2 - x - 12 &= x^2 - 4x + 3x - 12 = \\ &= x(x-4) + 3(x-4) = (x-4)(x+3). \end{aligned}$$

Demek,

$$\frac{x^2-x-12}{x+3} = \frac{(x-4)(x+3)}{x+3} = x-4. \quad \blacktriangle$$

ax^2+bx+c kóp aǵzalısı kvadrat úsh aǵzalısı delinedi, bunda $a \neq 0$.

5- másele sheshiwde x^2-x-12 kvadrat úsh aǵzalını gruppalam usılı menen kóbeytiwshilerge jiklenedi. Onı tómendegi teoremadan paydalanıp ta kóbeytiwshilerge jiklewe boladı.



Teorema. Eger x_1 hám x_2 ler $ax^2+bx+c=0$ kvadrat teńlemenıń korenleri bolsa, onda barlıq x ushın tómendegi teńlik orınlı boladı:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2). \quad (5)$$

○ (5) teńliktiń óń jaǵında turǵan ańlatpanı kóp aǵzalılardıń túrlendiremiz:

$$\begin{aligned} a(x - x_1)(x - x_2) &= ax^2 - ax \cdot x_1 - ax \cdot x_2 + ax_1 x_2 = \\ &= ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1 x_2. \end{aligned} \quad (6)$$

x_1 hám x_2 lar $ax^2+bx+c=0$ teńlemesiniń, yaǵnıy $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ teńlemenıń korenleri bolǵanı ushın Viet teoreması boyınsha,

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a},$$

bunnan $a(x_1 + x_2) = -b$, $ax_1 x_2 = c$.

Bul a'latpalardı (6) te'nikke qoyıp, (5) formulani payda etemiz. ●

(5) formula $ax^2 + bx + c$ kvadrat úsh a'g'zalı sızıqlı kóbeytiwshilerge jikleniwin a'latadı.

6- m á s e l e . $\frac{2x^2+5x-3}{x^2-x-12}$ a'latpanı ápiwayılastırın.

△ Bólshektiń alımı hám bólimin kóbeytiwshilerge jikleymiz.

1) $2x^2+5x-3=0$ teńlemesi eki korengi iye:

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = -3.$$

Dálillengen teorema boyınsha

$$2x^2 + 5x - 3 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 3) = (2x - 1)(x + 3).$$

2) $x^2 - x - 12 = 0$ teńleme $x_1 = -3$, $x_2 = 4$ korenlerge iye. Dálillengen teorema boyınsha $x^2 - x - 12 = (x + 3)(x - 4)$.

Solay etip,

$$\frac{2x^2+5x-3}{x^2-x-12} = \frac{(2x-1)(x+3)}{(x+3)(x-4)} = \frac{2x-1}{x-4}. \quad \blacktriangle$$

Shınıǵıwlar

376. Keltirilgen kvadrat teńlemenı sheshiń:

1) $x^2 + 4x - 5 = 0$;

2) $x^2 - 6x - 7 = 0$;

3) $x^2 - 8x - 9 = 0$;

4) $x^2 + 6x - 40 = 0$;

5) $x^2 + x - 6 = 0$;

6) $x^2 - x - 2 = 0$.

377. (Awızeke.) Keltirilgen kvadrat teńleme korenleriniń qosındısı hám kóbeymesin aytıń:

1) $x^2 - x - 2 = 0$;

2) $x^2 - 5x - 6 = 0$;

3) $x^2 + 3x + 2 = 0$;

4) $x^2 + 3x - 4 = 0$;

5) $x^2 - 7x + 5 = 0$;

6) $x^2 + 9x - 6 = 0$.

378. (Awızeke.) $x^2 - 19x + 18 = 0$ teńlemesiniń korenlerinen biri 1 ge teń. Onıń ekinshi korenin tabıń.

379. (Awızeke.) $28x^2 + 23x - 5 = 0$ teńlemesiniń korenlerinen birewi 1 ge teń. Onıń ekinshi korenin tabıń.

380. (Awızeke.) Teńlemenı sheshpesten, onıń korenleriniń belgilerin anıqlań:

1) $x^2 + 4x - 5 = 0$;

2) $x^2 + 5x + 3 = 0$;

3) $x^2 - 5x + 3 = 0$;

4) $x^2 - 8x - 7 = 0$.

381. Korenleri x_1 hám x_2 bolǵan keltirilgen kvadrat teńlemenı jazıń:

1) $x_1 = 3, x_2 = -1$;

2) $x_1 = 2, x_2 = 3$;

3) $x_1 = -4, x_2 = -5$;

4) $x_1 = -3, x_2 = 6$.

382. Tańlaw jolı menen teńlemenıń korenlerin tabıń:

1) $x^2 + 5x + 6 = 0$;

2) $x^2 - 7x + 12 = 0$;

3) $x^2 - 6x + 5 = 0$;

4) $x^2 + 8x + 7 = 0$;

5) $x^2 - 8x + 15 = 0$;

6) $x^2 + 2x - 15 = 0$.

383. Kvadrat úsh aǵzalını kóbeytiwshilerge jikleń:

1) $x^2 - 5x + 6$;

2) $x^2 + 4x - 5$;

3) $x^2 + 5x - 24$;

4) $x^2 + x - 42$;

5) $2x^2 - x - 1$;

6) $8x^2 + 10x + 3$;

7) $-6x^2 + 7x - 2$;

8) $-4x^2 - 7x + 2$.

384. Bólsheklerdi qısqartıń:

$$\begin{array}{lll} 1) \frac{x^2+x-2}{x-1}; & 2) \frac{x^2+4x-12}{x-2}; & 3) \frac{x+3}{x^2-6x-27}; \\ 4) \frac{x-8}{x^2-x-56}; & 5) \frac{2x^2-3x-2}{4x^2-1}; & 6) \frac{3x^2+8x-3}{9x^2-1}. \end{array}$$

385. Keltirilgen kvadrat teńlemeni sheshiń:

$$\begin{array}{ll} 1) x^2 - 2\sqrt{3}x - 1 = 0; & 2) x^2 - 2\sqrt{5}x + 1 = 0; \\ 3) x^2 + \sqrt{2}x - 4 = 0; & 4) x^2 - 4\sqrt{7}x + 4 = 0. \end{array}$$

386. Kóbeytiwshilerge jikleń:

$$\begin{array}{lll} 1) x^3 - 3x^2 + 2x; & 2) x^3 + 4x^2 - 21x; & 3) x^3 + 5x^2 - 24x; \\ 4) x^3 - 9x^2 - 22x; & 5) x^3 - 8x^2 + 7x; & 6) x^3 - 5x^2 + 6x. \end{array}$$

387. Bólshekkti qısqartıń:

$$1) \frac{x^2+6x-7}{x^2-7x+6}; \quad 2) \frac{x^2-8x-9}{x^2+9x+8}; \quad 3) \frac{x^2-8x+15}{-x^2+5x-6}; \quad 4) \frac{36+5x-x^2}{x^2-x-20}.$$

388. Anlatpanı ápiwayılastırın:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{1}{x^2-7x+12} + \frac{1}{x-3}; & 2) \frac{3}{x^2+6x+9} - \frac{1}{x+3}; \\ 3) \frac{7}{5x^2+3x-2} - \frac{5}{5x-2}; & 4) \frac{5x+1}{x^2+9x-10} : \frac{5x^2+x}{x^2-2x+1}. \end{array}$$

26- §. KVADRAT TEŇLEMEGE KELTIRILETUĞÍN TEŇLEMELER

1- másele. Teńlemeni sheshiń:

$$x^4 - 7x^2 + 12 = 0.$$

△ $x^2 = t$ dep belgileyviz. Bunda teńleme tómendegi kóriniske iye boladı:

$$t^2 - 7t + 12 = 0.$$

Bul kvadrat teńlemenı sheshemiz:

$$t_1 = 4, t_2 = 3.$$

$x^2 = t$ bolǵanı ushın berilgen teńlemenı sheshiw tómendegi eki teńlemenı sheshiwge keltiriledi.

$$x^2 = 4, x^2 = 3,$$

bunnan

$$x_{1,2} = \pm 2, x_{3,4} = \pm \sqrt{3}.$$

J u w a b ı: $x_{1,2} = \pm 2, x_{3,4} = \pm \sqrt{3}$. ▲



Mına

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

túrindegi teńleme bikvadrat teńleme dep ataladı, bunda $a \neq 0$.

$x^2 = t$ dep belgilep, bul teńleme kvadrat teńlemege keltiriledi.

2- m á s e l e. Bikvadrat teńlemenı sheshiń:

$$9x^4 + 5x^2 - 4 = 0.$$

▲ $x^2 = t$ dep belgileymiz. Onda

$$9t^2 + 5t - 4 = 0.$$

Bul kvadrat teńlemenı sheship, tawamız:

$$t_1 = \frac{4}{9}, t_2 = -1.$$

$x^2 = \frac{4}{9}$ teńlemesi $x_{1,2} = \pm \frac{2}{3}$ korenlerge iye, $x^2 = -1$ teńlemesi bolsa haqiqiy korenlerge iye emes.

J u w a b ı: $x_{1,2} = \pm \frac{2}{3}$. ▲

3- m á s e l e. Teńlemenı sheshiń:

$$\frac{3}{x+2} - \frac{4}{x-3} = 3.$$

△ Теңлемедегі бөлшеклердің ұлыма бөлімі $(x+2)(x-3)$ ке тең. Егер, $x+2 \neq 0$ һәм $x-3 \neq 0$ болса, онда теңlemenің екі жағын да $(x+2)(x-3)$ ке көбейтип, төмендегіге ие боламыз:

$$3(x-3) - 4(x+2) = 3(x+2)(x-3).$$

Бул теңlemenі түрлендіреміз:

$$3x - 9 - 4x - 8 = 3(x^2 - x - 6),$$

$$-x - 17 = 3x^2 - 3x - 18,$$

$$3x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Payda болған квадрат теңlemenі sheship, оның korenlerin tawamыз:

$$x_1 = 1; x_2 = -\frac{1}{3}.$$

$x = 1$ һәм $x = -\frac{1}{3}$ болғанда берілген бөлшеклердің бөлімлері nolge aylanbaғаны ushын 1 һәм $-\frac{1}{3}$ sanları usı теңlemenің korenleri boladı.

J u w a b ы : $x_1 = 1; x_2 = -\frac{1}{3}$. ▲

4- m á s e l e . Теңlemenі sheshiң:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} + \frac{3}{x-1} = \frac{3-x}{x-2}, \quad x \neq 1, x \neq 2. \quad (1)$$

△ Shárti boyınsha $(x-1)(x-2) \neq 0$. Теңlemenің екі жағын да $(x-1)(x-2)$ көбейтип, төмендегін payda etemiz:

$$1 + 3(x-2) = (3-x)(x-1).$$

Бул теңlemenі түрлендіреміз:

$$1 + 3x - 6 = -x^2 + 4x - 3, \quad (2)$$

$$x^2 - x - 2 = 0.$$

Payda болған квадрат теңlemenі sheship, оның korenlerin tabamız:

$$x_1 = -1, x_2 = 2.$$

$x = -1$ boʻlganda berilgen teʼnlemenin bʻolimlari nolga aylanbaydi. Demek, -1 sanı – berilgen teʼnlemenin koreni. $x = 2$ boʻlganda berilgen teʼnlemedegi eki bʻolshek tin bʻolimi nolge teʼn. Sonın ushın 2 sanı berilgen teʼnlemenin koreni bolmaydı.

J u w a b i: $x = -1$. ▲

4- máselede berilgen (1) teʼnleme eki korenge iye bolgan (2) kvadrat teʼnlemege keltirildi. Olardan biri, yaʼniy $x_1 = -1$ (1) teʼnlemenin koreni boladı. Ekinshisi $x_2 = 2$ koren (1) teʼnlemenin koreni bolmaydı. Bunda ol *shet koren* dep ataladı.

Solay etip, teʼnlemenı belgisizi bar aʼlatpağa kóbeytkende shet korenler payda bolıwı múmkin. Sonın ushın *bʻolshek bʻoliminde belgisizi bar teʼnlemlerdi sheshiwde tekseriw ótkiziw kerek*.

5- másele. Teʼnlemenı sheshin:

$$\frac{x+7}{x+4} - \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x^2+7x+12} = 0.$$

Bunday teʼnlemeler *bʻolshek-racional teʼnlemelerge* misal bola aladı.

△ $x^2 + 7x + 12$ kvadrat úsh aʼgzalıwı kóbeytiwshilerge jikleymiz. $x^2 + 7x + 12 = 0$ teʼnlemesin sheship, onın $x_1 = -3$, $x_2 = -4$ korenlerin tabamız. Sonın ushın

$$x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4).$$

Teʼnlemenin eki jaʼgın bʻolsheklerdin ulıwma bʻolimine, yaʼniy $(x+3)(x+4)$ ke kóbeytemiz. Nátiyjede tómendegige iye bolamız.

$$(x + 7)(x + 3) - (x + 4) + 1 = 0.$$

Teʼnlemenı túrlendiremiz:

$$x^2 + 10x + 21 - x - 4 + 1 = 0,$$

$$x^2 + 9x + 18 = 0.$$

Bul teʼnlemenı sheship, onın korenlerin tabamız:

$$x_1 = -3, x_2 = -6.$$

Endi korendi tekseremiz. $x = -3$ boʻlganda berilgen teʼnleme ekinshi hám úshinshi bʻolsheklerini bʻolimlari nolge aylanadı. Sonın ushın $x_1 = -3$ – shet

koren. $x = -6$ bolganda berilgen teńleme bólshekleriniń bólimleri nolge teń emes. $x = -6$ nı berilgen teńlemege qoyıp, bul san teńlemenıń koreni bolıwına isenim payda etiw múmkin.

J u w a b ı : $x = -6$. ▲

Shınıǵıwlar

Teńlemenı sheshiń (**389–392**):

389. 1) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$; 2) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$;
3) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$; 4) $x^4 - 50x^2 + 49 = 0$.

390. 1) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$; 2) $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$;
3) $x^4 + x^2 - 20 = 0$; 4) $x^4 - 4x^2 - 5 = 0$.

391. 1) $\frac{10}{x-3} - \frac{8}{x} = 1$; 2) $\frac{2}{x-5} + \frac{14}{x} = 3$;
3) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} = \frac{3}{20}$; 4) $\frac{40}{x-20} - \frac{40}{x} = 1$;
5) $\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x+3} = \frac{5}{8}$; 6) $\frac{4}{x-2} + \frac{4}{x+2} = 1,5$.

392. 1) $\frac{3x+4}{x-6} = \frac{x-2}{4x+3}$; 2) $\frac{x+2}{x-2} + \frac{x-2}{x+2} = \frac{13}{6}$;
3) $\frac{x+5}{x+2} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1}$; 4) $\frac{x^2-2x-5}{(x-3)(x-1)} + \frac{1}{x-3} = 1$;
5) $\frac{x^2}{x+3} - \frac{x}{-3-x} = \frac{6}{x+3}$; 6) $\frac{x^2}{x-1} - \frac{2x}{1-x} = \frac{3}{x-1}$.

393. Teńleme haqıyqıy korenlerge iye me:

1) $x^4 - 5x^2 + 7 = 0$; 2) $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$?

394. x tiń qanday mánislerinde ańlatpalardıń mánisleri bir-birine teń:

1) $\frac{6}{x^2-1} + \frac{2}{1-x}$ va $2 - \frac{x+4}{x+1}$; 2) $\frac{6}{x+2} - \frac{3}{x-2}$ va $\frac{14}{4-x^2} + 1$?

Sáykes belgilew kirgizip, tehlemení sheshiń (395–399):

395. 1) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$; 2) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$;
 3) $9x^4 + 23x^2 - 12 = 0$; 4) $16x^4 - 409x^2 + 225 = 0$;
 5) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$; 6) $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$;
 7) $4x^4 - 9x^2 + 2 = 0$; 8) $6x^4 - 5x^2 + 1 = 0$.

396. 1) $(x+3)^4 - 13(x+3)^2 + 36 = 0$; Belgilew: $(x+3)^2 = t$
 2) $(2x-1)^4 - 13(2x-1)^2 - 12 = 0$; $(2x-1)^2 = t$
 3) $(x-1)^4 - x^2 + 2x - 73 = 0$; $(x-1)^2 = t$
 4) $(x+2)^4 - 2x^2 - 8x - 16 = 0$; $(x+2)^2 = t$
 5) $(x^2 + 6x)^2 + 8(x^2 + 6x) - 9 = 0$; $(x^2 + 6x) = t$
 6) $(x^2 - 16x)^2 - 2(x^2 - 16x) - 63 = 0$; $(x^2 - 16x) = t$

397. 1) $(x+1)^2 \cdot (x^2 + 2x) = 12$;
 2) $(x-2)^2 \cdot (x^2 - 4x) + 3 = 0$;
 3) $(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 3x + 3) + 1 = 0$;
 4) $(x^2 - 5x + 2)(x^2 - 5x - 1) = 28$;
 5) $x(x+1)(x+2)(x+3) = 0,5625$;
 6) $(x-2)(x-3)(x+2)(x-7) + 36 = 0$.

398. 1) $\frac{x+4}{x-4} + \frac{x-4}{x+4} = 3\frac{1}{3}$; 2) $\frac{x^2 - 2x}{4x - 3} + 5 = \frac{16x - 12}{2x - x^2}$;
 3) $\frac{x^2 + 4x}{7x - 2} - \frac{12 - 42x}{x^2 + 4x} = 7$; 4) $\left(\frac{4x-5}{3x+2}\right)^2 + \left(\frac{3x+2}{5-4x}\right)^2 = 4,25$;
 5) $\left(\frac{5x+1}{2x-3}\right)^2 + \left(\frac{3-2x}{5x+1}\right)^2 = \frac{82}{9}$; 6) $\left(\frac{5x-2}{2x+1}\right)^2 + \left(\frac{2x+3}{2-5x}\right)^2 = 3\frac{31}{225}$;
 7) $\frac{x^2 + 1}{x} + \frac{x}{x^2 + 1} = -2,5$.

399. 1) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 3 = 0$; Belgilew: $\left(x + \frac{1}{x}\right) = t$.

2) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 4 = 0$;

3) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 6 = 0$;

4) $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) + 5 = 0$;

5) $(x^2 + 3x + 2)(x^2 + 3x - 4) = -5$;

6) $(x^2 - 5x + 4)(x^2 - 5x + 6) = 120$.

400. Tóمندegi teńlemenin hárbiri ushın: 1) barlıq korenler qosındısın; 2) barlıq korenler kóbeymesin; 3) teris korenler qosındısın; 4) oń korenler kóbeymesin; 5) eń úlken hám eń kishi korenler ayırmasın; 6) eń úlken oń korennin eń kishi oń korenine qatnasın tabıń:

1) $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$; 2) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$;

3) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$; 4) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$;

5) $x^4 - 19x^2 + 90 = 0$; 6) $x^4 - 11x^2 + 28 = 0$.

401. Teńlemenin sheshin:

1) $(x^2 - 8)^2 + 4(x^2 - 8) = 5$;

2) $x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24 = 0$;

3) $(x + 5)^4 - 13(x + 5)^2 \cdot x^2 + 36x^4 = 0$;

4) $5x^4 + 20x^3 - 40x + 17 = 0$;

5) $x^2 + \left(\frac{x}{x-1}\right)x^2 = 8$.

27-§. KVADRAT TENLEMELER JARDEMINDE MASELELER SHESHIW

Kvadrat tenlemeler jardeminde birneshe maseler sheshemiz.

1- masale. Shaxtaga tas taslandi ham onin shaxta tubine urilgandagi sesti 9 sekundtan keyin esitildi. Sesti tezligin 320 m/s, awirlıq kushinin tezleniwin $g = 10 \text{ m/s}^2$ dep esaplap, shaxtani tereńligin anıqlań.

△ Shaxtani tereńligin tabıw ushin tastiń shaxta tubine tısiw waqti t ni anıqlaw jetkilikli, sebebi shaxtani tereńligi erkin tısiw nızamı boyınsha $\frac{gt^2}{2}$ metrge teń.

Shart boyınsha $g=10 \text{ m/s}^2$. Sonlıqtan, shaxtani tereńligi $5t^2$ metrge teń.

Ekinshi jaqtan, shaxtani tereńligin ses tezligi 320 m/s tastiń shaxta tubine barıp tiygendegi sesti esitilgenge shekemgi ótken waqıtqa, yaǵnıy $(9-t)$ sekunda kóbeytip tabıwǵa boladı. Demek, shaxtani tereńligi 320 $(9-t)$ metrge teń.

Shaxtani tereńligin anıqlaw ushin tabılǵan eki anlatpanı teńlestirip, $5t^2=320(9-t)$ tenlemesin dúzemiz. Bul tenlemenı tómendegishe sheshemiz:

$$t^2 - 64(9-t) = 0,$$

$$t^2 + 64t - 64 \cdot 9 = 0.$$

Payda bolǵan kvadrat tenlemenin korenlerin tabamız:

$$\begin{aligned} t_{1,2} &= -32 \pm \sqrt{32^2 + 64 \cdot 9} = -32 \pm \sqrt{32(32+18)} = \\ &= -32 \pm \sqrt{32 \cdot 50} = -32 \pm \sqrt{16 \cdot 100} = -32 \pm 40, \\ t_1 &= 8, \quad t_2 = -72. \end{aligned}$$

Tastiń tısiw waqti óń bolǵanı ushin $t=8 \text{ s}$ boladı.

Demek, shaxtani tereńligi tómendegige teń:

$$5t^2 = 5 \cdot 8^2 = 320(\text{m}).$$

Ju w a b ı: 320 m. ▲

2- m á s e l e. Tez júrer avtobus avtovokzaldan 40 km uzaqlıqtaǵı aeroportqa qaray ketti. Aradan 10 minut ótkennen keyin avtobustıń keyninen taksi menen jolawshı ketti. Taksidıń tezligi avtobustıń tezliginen 20 km/saatqa saatqa artıq. Eger olar aeroportqa birdey waqıtta jetip kelgen bolsa, taksi menen avtobustıń tezligin tabıń.

△ Avtobustıń tezligi x km/saat bolsın, onda taksidıń tezligi $(x+20)$ km/saat boladı. Avtobustıń háreket etiw waqtı $\frac{40}{x}$ saat, taksidıń háreket etiw waqtı bolsa $\frac{40}{x+20}$ saat boladı. Máseleniń shárti boyınsha avtobus penen taksidıń qozǵalıǵı waqtı arasındaqı parıq 10 minutqa, yaǵnıy $\frac{1}{6}$ saatqa teń. Demek,

$$\frac{40}{x} - \frac{40}{x+20} = \frac{1}{6}. \quad (1)$$

Payda bolǵan teńlemenı sheshemiz. Teńlemenıń eki jaǵın da $6x(x+20)$ ǵa kóbeytip, tómendegige iye bolamız:

$$40 \cdot 6 \cdot (x+20) - 40 \cdot 6x = x(x+20),$$

$$240x + 4800 - 240x = x^2 + 20x,$$

$$x^2 + 20x - 4800 = 0.$$

Bul teńlemenıń korenleri:

$$x_1 = 60, \quad x_2 = -80.$$

x tıń bul mánislerinde (1) teńlemege kiriwshi bólsheklerdiń bólimleri nolge teń emes. Sonıń ushın, $x_1 = 60$ hám $x_2 = -80$ (1) teńlemenıń korenleri boladı.

Avtobustıń tezligi oń bolǵanı ushın, máseleniń shártin tek bir sheshim qanaatlandıradı: $x = 60$. Sonıń ushın taksidıń tezligi 80 km/saatqa teń.

J u w a b ı: Avtobustıń tezligi 60 km/saat, taksidıń tezligi 80 km/saat. ▲

3- m á s e l e. Qol jazbanı kóshiriw ushın birinshi operator ekinshisine qaraǵanda 3 saat kem waqıt sarpladı. Olar birgelikte islep barlıq qol jazbanı 6 saat 40 minutta kóshirip boldı. Barlıq qol jazbanı kóshiriw ushın olardıń hárbirine qanshadan waqıt talap etiledi?

△ Barlıq qol jazbanı kóshiriw jumısın bir birlik, dep qabıl etemiz. Meyli birinshi operator qol jazbanı kóshiriw ushın x saat sarplaǵan bolsın. Onda ekinshi operatorǵa bul jumıs ushın $(x+3)$ saat talap etiledi. Birinshi opera-

tor bir saatta jumistn $\frac{1}{x}$ bólimin, ekinshisi bolsa $\frac{1}{x+3}$ bólimin isleydi. Olar birlikte bir saatta barlıq jumistn $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3}$ bólimin isleydi, 6 saat 40 minutta, yaǵnıy $6\frac{2}{3}$ saatta olar barlıq jumistı islep pitkeredi. Sonın ushın,

$$6\frac{2}{3}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3}\right) = 1.$$

Bul teńlemenı tómendegishe jazıwǵa boladı:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} = \frac{3}{20}. \quad (2)$$

Teńlemenin eki jaǵın da $20x(x+3)$ ke kóbeytip, tómendegige iye bolamız:

$$20(x+3) + 20x = 3x(x+3),$$

$$40x + 60 = 3x^2 + 9x,$$

$$3x^2 - 31x - 60 = 0.$$

Bul teńlemenin korenleri:

$$x_1 = 12, \quad x_2 = -\frac{5}{3}.$$

x tiń bul mánislerinde (2) teńlemege kiriwshi bólsheklerdin bólimleri nolge teń emes. Sonın ushın $x_1 = 12$ hám $x_2 = -\frac{5}{3}$ (2) teńlemenin korenleri.

Máselenin mazmunı boyınsha $x > 0$ bolǵanı ushın $x = 12$. Demek, birinshi operator 12 saat, al ekinshisi 12 saat + 3 saat = 15 saat jumıs islegen.

Ju w a b ı: 12 saat hám 15 saat. ▲

Shınıǵıwlar

402. Kóbeymesi: 1) 156; 2) 210; 3) 342; 4) 600 ǵa teń bolǵan eki izbe-iz kelgen natural sandı tabın.

- 403.** Kóbeymesi: 1) 255; 2) 399 ға тең болған еки ізбе-із келген тақ санды табиң.
- 404.** Туwrı тóртмúyeshликтің периметри 1 м, beti bolsa 4 dm². Onıń tárepleriniń uzınlıgıń tabıń.
- 405.** Maydanı 2,45 gektar bolğan bağ 630 m uzınlıqtağı diywal menen qorshalğan. Eger, bağ tuwrı tórtmúyeshlik túrinde bolsa, onıń boyı hám enin tabıń.
- 406.** 400 km aralıqtı tez júrer poezd júk poezdına qarağanda 1 saat tezirek basıp ótedi. Eger, júk poezdınıń tezligi, tez júrer poezdinikinen 20 km/saat kem bolsa, hárbir poezddiń tezligi qanday?
- 407.** Keme dárya ağısı boyınsha *A* pristanınan *B* pristanına bardı. Keme yarım saat toqtağannan soń, keyin qaray qayttı hám *A* dan shıqqaninan 8 saat ótkennen keyin jáne *A* pristanğa qaytıp keldi. *A* hám *B* pristanları arasındağı aralıq 36 km ge teń, al dárya ağısınıń tezligi 2 km/saat bolsa, kemeniń turğan suwdağı tezligin tabıń?
- 408.** Eki topar qánigeler birgelikte islep awılда tazadan qurılğan emlewخانanı zamanagóy medicina ásbap-úskeneleri menen támiyinlew hám olardı ornatiw jumısların 12 kúnde tamamladı. Eger toparlardıń birewi bul jumıstı ekinshisine qarağanda 10 kún kem waqıtta orınlay alsa, hárbir topar óz aldına islep, onı neshe kúnde orınlaydı?
- 409.** Kvadrat túrindegi qańıltırdan eni 6 sm lik qańıltır qırqıp alındı. Qalğan bóleginiń beti 135 sm² qa teń. Kvadrattıń dáslepki ólshemlerin tabıń.
- 410.** Tuwrımúyeshli úshmúyeshликтің maydanı 180 sm². Eger katetleriniń biri ekinshisinen 31 sm úlken bolsa, usı úshmúyeshликтің katetlerin tabıń.
- 411.** 30 km aralıqtı велосипедshilerdiń biri ekinshisine qarağanda 20 min tezirek basıp ótti. Birinshi велосипедshiniń tezligi ekinshisinen 3 km/saat artıq edi. Hárbir велосипедshiniń tezligi qanday?
- 412.** Eki qurılıs brigadası birgelikte islep, qoylar ushın 6 kúnde qora qurdı. Eger bul jumıstı orınlaw ushın birinshi brigadağa, ekinshisine qarağanda 5 kún artıq talap etilse, hárbir brigada óz aldına islep, neshe kúnde qurıp pitkeredi?



№ 5

$x^4 + 2006x^2 + 2005x + 2006$
Kópaǵzalını kóbeytiwshilerge jiklen.

III bapqa tiyisli shınıǵıwlar

Tenlemenı sheshin (413–415):

413. 1) $x^2 - 12 = 0$; 2) $x^2 - 50 = 0$; 3) $\frac{1}{3}x^2 + 2x = 0$;
4) $3x - \frac{2}{5}x^2 = 0$; 5) $x^2 - 48 = 0$; 6) $2x - \frac{1}{2}x^2 = 0$.

414. 1) $x^2 + 4x - 45 = 0$; 2) $x^2 - 9x - 52 = 0$;
3) $3x^2 - 7x - 40 = 0$; 4) $5x^2 + 17x - 126 = 0$.

415. 1) $4x^2 - 2x - 3 = 0$; 2) $9x^2 - 3x - 4 = 0$;
3) $4x^2 - 8x - 1 = 0$; 4) $3x^2 + 4x - 1 = 0$.

416. Tenlemenı sheshpesten, ol neshe haqiqiy korengı iye ekenin anıqlań:

1) $x^2 - 5x + 6 = 0$; 2) $5x^2 + 7x - 8 = 0$;
3) $25x^2 - 10x + 1 = 0$; 4) $9x^2 + 30x + 25 = 0$.

417. Kvadrat úsh aǵzalını kóbeytiwshilerge jiklen:

1) $x^2 + 12x + 30$; 2) $x^2 - 10x + 16$; 3) $2x^2 + x - 1$;
4) $2x^2 - 3x - 2$; 5) $x^2 + 8x + 7$; 6) $2x^2 - 3x + 1$.

418. Bólsheklerdi qısqartıń:

1) $\frac{x^2 - 9}{x + 3}$; 2) $\frac{x^3 + 4x^2 + 4x}{x + 2}$; 3) $\frac{16x^2 - 24x + 9}{4x^2 + 5x - 6}$;
4) $\frac{25x^2 + 10x + 1}{5x^2 - 14x - 3}$; 5) $\frac{x^2 - 25}{x - 5}$; 6) $\frac{x^2 + 5x + 6}{x + 3}$.

Teńlemenı sheshiń (419–420):

419. 1) $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$; 2) $x^4 - 11x^2 + 18 = 0$;
3) $2x^4 - 5x^2 + 2 = 0$; 4) $5x^4 - 16x^2 + 3 = 0$.

420. 1) $\frac{x}{x-2} + \frac{3}{x} = \frac{3}{x-2}$; 2) $\frac{x^2}{x^2+3x} + \frac{2+x}{x+3} = \frac{5-x}{x}$;
3) $\frac{y+3}{y^2-y} + \frac{6-y}{1-y^2} = \frac{y+5}{y+y}$; 4) $\frac{y+4}{y-4} + \frac{y}{4-y} = -\frac{4}{y+2}$.

421. Mi-6 verolyotınıń hawaǵa salıstırǵanda tezligi 300 km/saat. Ol 224 km aralıqtı eki ret ushıp ótti: birinshi ret samal jónelisi boyınsha, ekinshi ret samal jónelisine qarsı. Eger vertolyot samalǵa qarsı ushqanda samal jónelisi boyınsha ushqandaǵıǵa qaraǵanda 6 min kóp waqıt jumsaǵan bolsa, samaldıń tezligin anıqlań.

422. Velosipedshi jolınıń birinshi yarımındaǵı tezligi, onıń ekinshi yarımındaǵı tezliginen 3 km/saat artıq boldı. Eger, velosipedshi 90 km li barlıq joldı 5,5 saatta basıp ótken bolsa, ol joldıń ekinshi yarımın qanday tezlik penen basıp ótken?

423. Terek otırǵızıwdı eki gruppа isledi. Birinshi gruppа hár kúni ekinshisine qaraǵanda 400 túp kóp terek otırǵızıp, hámmesi 2700 túp terek otırǵızdı. Ekinshi gruppа 2 kún kóp isledi hám 2500 túp terek otırǵızdı. Hárbir gruppа terek otırǵızıwda neshe kún islegen?

ÓZİŇIZDI TEKSERIP KÓRIŇ!

1. Teńlemenı sheshiń:

1) $3x^2 = 0$; 2) $(x+1)(x-2) = 0$;
3) $4x^2 - 1 = 0$; 4) $3x^2 = 5x$;
5) $4x^2 - 4x + 1 = 0$; 6) $x^2 - 16x - 17 = 0$;
7) $3x^2 + 5x = 2$; 8) $x^2 - 4x + 5 = 0$.

2. Kóbeytiwshilerge jikleń:

1) x^2+x-6 ; 2) $2x^2-x-3$; 3) x^2-6x+9 .

3. Máseleni sheshiń:

Awıllar arasındaǵı 36 km aralıqtı bir velosipedshi ekinshisinen 1 saat tezirek basıp ótti. Eger, velosipedshilerden biriniń tezligi ekinshisinen 3 km/saat artıq ekeni belgili bolsa, hárbir velosipedshi tezligin tabıń.

Teńlemenı sheshiń (424–426):

424. 1) $3x(x-2)=x-4$; 2) $\frac{x^2-2}{6}-\frac{1-x}{2}=\frac{x-5}{6}$.

425. 1) $2x(x-2)=(x+1)^2-9$; 2) $5x(x-4)=(x-8)^2-65$;

3) $\frac{(x+2)^2}{3}-\frac{(x+1)^2}{2}=1$; 4) $\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{(x-2)^2}{5}=4$.

426. 1) $(x-5)(x-6)=30$; 2) $(x+2)(x+3)=6$;

3) $(x-1)(x-4)=3x$; 4) $(x-2)(x+8)=6x$.

427. x tiń qanday mánislerinde $x^2+3x-88$ ańlatpasınıń mánisi: 1) 0 ge; 2) 20 ǵa; 3) -18 ge; 4) -70 ke teń boladı?

428. Eger:

1) $a=3, b=1, c=-4$; 2) $a=5, b=2, c=3$;

3) $a=25, b=-10, c=1$; 4) $a=1, b=0, c=-25$

bolsa, $ax^2+bx+c=0$ kvadrat teńleme neshe haqıyqıy korenge iye boladı?

429. Teńlemenı sheshiń:

1) $\frac{12x+4}{x^2+2x-3}=\frac{3x-2}{x-1}-\frac{2x+3}{x+3}$;

2) $\frac{5}{x^2-4}-\frac{8}{x^2-1}=\frac{2}{x^2-3x+2}-\frac{20}{x^2+3x+2}$;

3) $\frac{x+34}{x^2-8x+7}=\frac{2x-3}{x-7}-\frac{x+5}{x-1}$.

- 430.** Firma belgili bir müddette 5 400 jup ayaq kiyim tayarlawı kerek. Negizinde ol künine mólsherlengennen 30 jup kóp ónim tayarladı hám buyıtpanı müddetinen 9 kún aldın orınladı. Buyıtpa neshe künde orınlangan?
- 431.** Eki sayaxatshı velosipedlerinde A awıldan B awılğa qaray hár túrli joldan shıqtı. Birinshisi 30 km, ekinshisi bolsa 20 km júriwi kerek edi. Birinshi sayaxatshınıń tezligi ekinshisinikinen 3 km/saat artıq. Biraq, ekinshi sayaxatshı B ğa birinshisine qarağanda 20 min aldın jetip keldi. Hárbir sayaxatshı jolğa qansha waqıt sarplagan?
- 432.** Jumısshılardıń eki toparı joldı ónlawdı 4 saatta tamamladı. Eger dáslep birinshi topar joldıń yarımın, soń qalğan bólegin ónlağanda, barlıq ónlaw isleri 9 saatta tamalangan bolar edi. Joldı hárbir topar bólek-bólek qansha waqıtta ónladı?



III bapqa tiyisli shınıǵıwlar – testler

- 1.** Teńlemenı sheshiń: $x^2=64$.
 A) $x_{1,2} = \pm 8$; C) $x=-8$;
 B) $x=8$; D) $x=32$.
- 2.** Teńlemenı sheshiń: $x^2-11=0$.
 A) $x = \sqrt{11}$; C) $x = -\sqrt{11}$;
 B) $x_{1,2} = \pm\sqrt{11}$; D) $x = \frac{11}{2}$.
- 3.** Teńlemenı sheshiń: $3x^2=48$.
 A) $x=4$; C) $x_{1,2} = \pm 4$;
 B) $x=-4$; D) $x=8$.
- 4.** Teńlemenı sheshiń: $x^2=5x$.
 A) $\emptyset$; C) $x=0$;
 B) $x=2,5$; D) $x_1=0, x_2=5$.
- 5.** Teńlemenı sheshiń: $x^2+9x=0$.
 A) $x_1=0, x_2=-9$; C) $x_{1,2}=9$;
 B) $x_{1,2} = \pm 3$; D) $x_1=9, x_2=0$.

6. Kvadrat teńlemenі sheshiń: $x^2 + x - 6 = 0$.

- A) $x_1 = -3, x_2 = 2$; C) $x_{1,2} = \pm 6$;
B) $x_1 = 3, x_2 = -2$; D) $x_1 = -2, x_2 = -3$.

7. Kvadrat teńlemenі sheshiń: $x^2 + 7x + 6 = 0$.

- A) $x_1 = 1, x_2 = -1$; C) $x_1 = -7, x_2 = -6$;
B) $x_1 = -6, x_2 = -1$; D) $x_1 = -1, x_2 = -5$.

8. Kvadrat teńlemenі sheshiń: $x^2 + x + 1 = 0$.

- A) $x_1 = 0, x_2 = 1$; C) $\emptyset$;
B) $x_{1,2} = \frac{\sqrt{-3}}{2}$; D) $x_{1,2} = \pm\sqrt{-3}$.

9. Kvadrat teńlemenі sheshiń: $x^2 - 7x + 10 = 0$.

- A) $x_1 = -2, x_2 = 2$; C) $x_1 = 5, x_2 = 1$;
B) $x_1 = -5, x_2 = 2$; D) $x_1 = 2, x_2 = 5$.

10. Kvadrat teńlemenі sheshiń: $6x^2 - 5x + 1 = 0$.

- A) $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{1}{2}$; C) $x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = -\frac{1}{3}$;
B) $x = \frac{1}{6}$; D) $x = -\frac{1}{3}$.

11. Kvadrat teńlemenі sheshiń: $12x^2 + 7x + 1 = 0$.

- A) $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{1}{4}$; C) $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = -\frac{1}{4}$;
B) $x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = -\frac{1}{4}$; D) $x = \frac{1}{7}$.

12. Teńlemenі sheshiń: $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

- A) $x_{1,2} = \pm 4, x_{3,4} = 1$; C) $x_1 = 1, x_2 = 4$;
B) $x_{1,2} = \pm 1, x_{3,4} = \pm 2$; D) $x_{1,2} = \pm 1$.

13. Tenglameni sheshin: $x^4 - 4x^2 - 5 = 0$.

A) $x_{1,2} = -\sqrt{5}, x_{3,4} = 1$; B) $x_{1,2} = 5$; C) $x_{1,2} = \pm\sqrt{5}$; D) $\emptyset$.

14. 60 km aralıqtı bir vilosipedshi ekinshisine qarağanda 1 saat tezirek basıp ötti. Eger, birinshi velosipedshiniñ tezligi ekinshisiniñ tezliginen 5 km/saat kem bolsa, hárbir velosipedshiniñ tezligin tabıń.

A) 20 km/saat, 25 km/saat; B) 10 km/saat, 15 km/saat;
C) 15 km/saat, 20 km/saat; D) 12 km/saat, 17 km/saat.



Tariyxıy máseleler

Al-Xorezmiydiń „Al-jabr val-muqobala“ shıǵarmasınan alınǵan tenglemelerdi sheshin (1—31):

1. $x^2 + 10x = 39$.

2. $x^2 + 5x = 24$.

3. $x^2 + 10x = 56$.

4. $x^2 + (10 - x)^2 = 58$.

5. $\left(\frac{x}{3} + 1\right)\left(\frac{x}{4} + 1\right) = 20$.

6. $4x(10 - x) = x^2$.

7. $\frac{25}{9}x^2 = 100$.

8. $x^2 + 21 = 10x$.

9. $3x + 4 = x^2$.

10. $\frac{x}{3} \cdot \frac{x}{4} = x + 24$.

11. $\frac{10 - x}{x} + \frac{x}{10 - x} = 2\frac{1}{6}$.

12. $100 + x^2 - 20x = 81x$.

13. $30x = 100 + x^2$.

14. $4x \cdot 5x = 2x^2 + 36$.

15. $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{6}$.

16. $\sqrt{x^2 - x} + x = 2$.

17. $13^2 - x^2 = 15^2 - (14 - x)^2$.

18. $(10 - x)^2 - x^2 = 40$.

19. $(10 - x)^2 + x^2 + (10 - x) - x = 54$.

20. $\frac{1}{2} \cdot \frac{5x}{10 - x} + 5x = 50$.

21. $x^2 + 20 = 12x$.

22. $\left(\frac{x}{3} + 1\right)\left(\frac{x}{4} + 2\right) = x + 13$.

23. $x^2 + x = \frac{3}{4}$.

$$24. \left(x - \frac{x}{3} - \frac{x}{4} - 4\right)^2 = x + 12.$$

$$25. \left(x - \left(\frac{x}{3} + 3\right)\right)^2 = x.$$

$$26. \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} x^2 = \frac{1}{7} x.$$

$$27. \frac{x^2 - 4x}{3} = 4x.$$

$$28. (x^2 - 3x)^2 = x^2.$$

$$29. \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{5} x^2 = \frac{4}{5} x.$$

$$30. 10x = (10 - x)^2.$$

$$31. \begin{cases} x + y = 10, \\ xy = 21. \end{cases}$$

Abu Komil máselesi. Teńlemenı sheshiń:

$$\frac{x}{10-x} + \frac{10-x}{x} = \sqrt{5}.$$

Evklid máselesi. $(1-x):x=x:1$ teńlemenı sheshiń.

Bobil bitiklerindegi másele:

Eki kvadrattıń betiniń qosındısı $25\frac{5}{12}$ ge teń. Ekinshi kvadrat tárepi birinshi kvadrat tárepiniń $\frac{2}{3}$ bóleginen 5 birlikke artıq. Kvadrat táreplerin tabıń.

Omar Xayyam (1048–1131) máselesi.

$$\frac{1}{x^2} + 2 \cdot \frac{1}{x} = 1\frac{1}{4} \text{ teńlemenı sheshiń.}$$

Kvadrat teńlemenı sheshiwdiń al-Xorezmiy usılı.

Al-Xorezmiydiń “Al-jabr val-muqobala” shıǵarmasınan alınǵan usı máseleni kórip shıǵayıq: “Eger bir kvadratqa onıń on korenine teń zattı qossań, otız toǵız payda boladı”. Bul máseleni sheshiw (házirgi belgilewlerde) $x^2 + 10x = 39$ teńlemenı sheshiw bolıp esaplanadı. Al-Xorezmiy usı teńlemenı sheshiw qaǵıydaların tómendegishe túsindiredi: 1) korenler sanın ekige ból, bul máselede bes payda boladı ($10:2=5$); 2) onı ózine teń sangá kóbeyt, jigirma bes boladı ($5 \cdot 5=25$); 3) onı otız toǵızǵa qos, alpıs tórt boladı ($25+39=64$); 4) onnan kvadrat koren shıǵar, segiz boladı ($\sqrt{64}=8$); 5) onnan korenler

sanınıń yarımın, yaǵnıy bestı al, úsh qaladı ($8 - 5 = 3$). Mine usı san sen izlegen kvadrat koren boladı”.

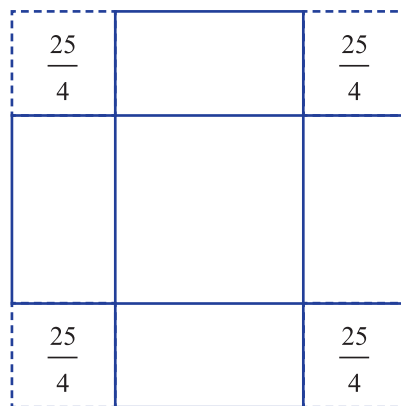
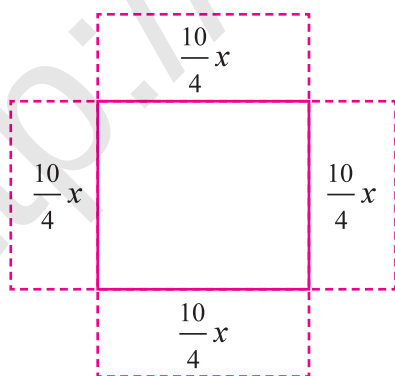
Házirgi jazıwda al-Xorezmiydiń bul sheshimi qısqasha bunday kóriniske iye boladı:

$$x = \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 + 39} - \frac{10}{2} = \sqrt{25 + 39} - 5 = \sqrt{64} - 5 = 8 - 5 = 3.$$

Ju w a b ı: $x = 3$.

(Al-Xorezmiy ekinshi koren $x = -13$ ti qaramaydı.)

„Al-jabr wal-muqobala“ shıǵarmasında tap usı teńlemenıń geometriyalıq usıldaǵı sheshimi de beriledi (38-súwret). Bul usıl tómendegishe: tárepi x (beti x^2) ge teń kvadrat qaraladı. Onıń táreplerinde eni $\frac{10}{4}$ teń 4 tuwrı tórtmúyeshlik jasaladı. Payda bolǵan figura $x^2 + 10x$ ańlatpaǵa sáykes keledi. Bul figura tárepi $(x + 5)$ ke teń bolǵan kvadratqa shekem “toltırıladı”, yaǵnıy figuranıń “ushları”na tárepi $\frac{10}{4}$ ge teń bolǵan 4 kvadrat “qosıladı”. Payda bolǵan figura $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$ ańlatpaǵa sáykes. Biraq, shárt boyınsha, $x^2 + 10x = 39$ bolǵanı ushın úlken kvadrattıń beti $39 + 4 \cdot \left(\frac{10}{4}\right)^2 = 64$. Solay etip, $(x + 5)^2 = 64$, bunnan $x + 5 = 8$ va $x = 3$. Demek, al-Xorezmiy kvadrat teńlemenı sheshiwde tolıq kvadrattı jiklewdiń geometriyalıq usılın beredi. $x^2 + px = q$ teńleme ushın al-Xorezmiydiń bul usılı tómendegishe jazıladı:



38-súwret.

$$x^2 + 4 \cdot \left(\frac{p}{4}\right)x + 4 \cdot \left(\frac{p}{4}\right)^2 = q + 4 \cdot \left(\frac{p}{4}\right)^2; \quad \left(x + 2 \cdot \frac{p}{4}\right)^2 = q + 4 \cdot \left(\frac{p}{4}\right)^2,$$

$$x_{1,2} + 2 \cdot \frac{p}{4} = \pm \sqrt{q + 4 \cdot \left(\frac{p}{4}\right)^2},$$

$$\text{bundan } x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{4}\right)^2 + q}.$$



Tariyxiy maǵlıwmatlar

Abu Abdullah Muxammed ibn Musa al-Xorezmiy (783–850) elimizdiń ullı alımlarınıń biri. Ol óziniń “Al-kitob al-muxtasar fı hisob al-jabr val-muqobala” (qısqasha “Al-jabr val-muqobala”) miyneti menen algebra pánine tiykar saldı. Miynetiniń 1342-jılı kóshirilgen arabsha nusqası Oksford universitetiniń Bodleyan kitapxanasında saqlanadı. Al-Xorezmiy kitaptı jazıwdan maqsetin bılay bayan etedi: “... Men arifmetikaniń ápiwayı hám quramalı máselelerin óz ishine alıwshı “Al-jabr val-muqobala esabı haqqında qısqasha kitap”tı jarattım, sebebi, miyrastı bólistiriwde, wásiyatnama dúziwde, mal bólistiriwde, ádillik jumıslarında, sawda da hám hár qanday shártnamalarda, sonday-aq, jer ólshewde, salmalar qazıwda, injenerlikte hám basqa usıǵan uqsas túrlishe jumıslarda adamlar ushın zárúr boladı”. Algebrada “úsh túrli san(muǵdar) menen jumıs alıp barıladı”, – deydi al-Xorezmiy. Olar: koren (teńlemeдеgi belgisiz san x), kvadrat (x^2) hám ápiwayı sanlar (teńlemeдеgi saltań aǵzalar).

Al-Xorezmiy usı úsh muǵdarlar arasındadı qatnaslardı úyrenedi. Ol teńlemelerdi tómendegi klasslarga bóledi:

- 1) $ax^2 = bx$ – kvadratlar korenlerge teń;
- 2) $ax^2 = c$ – kvadratlar sanǵa teń;
- 3) $bx = c$ – kvadratlar sanǵa teń;
- 4) $ax^2 + bx = c$ – kvadratlar hám korenler sanǵa teń;
- 5) $ax^2 + c = bx$ – kvadratlar hám san korenlerge teń;
- 6) $bx + c = ax^2$ – korenler hám san kvadratlarǵa teń;

Al-Xorezmiy “Al-jabr val-muqobala” shıǵarmasında 4-, 5-, 6- teńlemelerdi sheshiwdiń geometriyalıq usılların beredi. Alım al-jabr hám al-muqobala ámelleri (túrlendiriwleri) járdeminde hár qanday kvadrat teńleme joqarıdaǵı 6 kórinisten birine keltiriliwin dálilleydi.



Ámeliy-usınılğan hám pánlerara baylanışlı máseleler

433. 1) Qudıqqa tas taslandı. Tas qudıq túbine urılǵanda shıqqan dawıs baqlawshıǵa tas taslağan soń 4 sekunddan keyin esitiledi. Dawıstıń tezligi sekundına 330 metr, erkin túsip atırǵan deneniń t sekundda ótken jolın $s = \frac{gt^2}{2}$. $g \approx 10 \text{ m/s}^2$ dep alıp, qudıqtıń tereńligin tabıń.

2) Sekundına 300 metr tezlik penen atılǵan oq neshe sekunddan keyin jerden 2500 metr biyiklikte boladı? (Hawanıń qarsılıǵı esapqa alınbasın).

△ 1) Tas t minutta qudıq túbine túsken hám $s = \frac{gt^2}{2}$ aralıqtı ótken. Dawıs qudıq túbine túsken hám $(4-t)$ sekundda $330(4-t)$ m aralıqtı

ótken. $\frac{gt^2}{2} = 330(4-t)$. Bul teńlemeden $t \approx 3,78 \text{ s}$; $4-t \approx 0,22 \text{ s}$; $s \approx 330 \cdot 0,22 = 72,6 \text{ (m)}$. **J u w a b ı :** $\approx 72,6 \text{ m}$.

2) t sekunddan keyin dene jerden $300 t$ m biyiklikte bolǵan. $300t - \frac{10t^2}{2} = 2500$ yaki $t^2 - 60t + 500 = 0$, bunda $t = 10$ yoki $t = 50$.

J u w a b ı : 10 s hám 50 s. ▲

434. Hárbiriniń sıyımlıǵı 30 litrden eki ıdısqa birgelikte 30 litr spirt bar edi. 1– ıdısqa tolıǵansha suw quyılıp, bul aralaspadan 2 – ıdısqa tolıǵansha quyıldı. Keyin 2–ıdıstan 1 – ıdısqa 12 litr aralaspada alıp quyıldı. Sonnan soń 2 – ıdıstaǵı spirt 1 – ıdıstaǵıǵa qaraǵanda 2 litr ge kem boladı. Dáslep, hár qaysı ıdısta qanshadan spirt bolǵan?

△ Dáslep, 1–ıdısta x l, 2–ıdısta $(30 - x)$ l spirt bolǵan deyik. 1– ıdıstaǵı suw quyılǵannan soń, 1 litr aralaspada $\frac{x}{30}$ l spirt boldı. Bul aralaspadan 2 – ıdısqa x l qosılsa (sebebi 2–ıdısta x l “bos orın” bar),

2– ıdıstaǵı aralaspada quramında $\frac{x}{30} \cdot x = \frac{x^2}{30}$ litr spirt boladı hám 2–ıdıstaǵı

$(30 - x)$ l menen birge $\left(30 - x + \frac{x^2}{30}\right)$ litr spirt boladı. 2–ıdıstaǵı aralaspada

quramında $\left(30 - x + \frac{x^2}{30}\right) : 30 = 1 - \frac{x}{30} + \left(\frac{x}{30}\right)^2$ litr spirt boladı. 2-ıdistan 1-sine 12 l alıp quyılса, bul aralaspada $12 \cdot \left(1 - \frac{x}{30} + \left(\frac{x}{30}\right)^2\right)$ litr spirt bolıp, 1-ıdistağı $\left(x - \frac{x^2}{30}\right)$ litr spirt penen birge $\left(x - \frac{x^2}{30}\right) + 12 \cdot \left(1 - \frac{x}{30} + \left(\frac{x}{30}\right)^2\right)$ litr boladı. 2-ıdistan 12 l aralaspanı 1-sine quyılğannan soñ, onda 18 l aralaspа qaldı, bul aralaspа quramında $18 \cdot \left(1 - \frac{x}{30} + \left(\frac{x}{30}\right)^2\right)$ litr spirt bar.

Másele shártı boyınsha, bul muğdar 1-ıdistağı spirtten 2 litrge kem. Demek, usınday teñlemege keltiremiz:

$$18 \cdot \left(1 - \frac{x}{30} + \left(\frac{x}{30}\right)^2\right) + 2 = \left(x - \frac{x^2}{30}\right) + 12 \cdot \left(1 - \frac{x}{30} + \left(\frac{x}{30}\right)^2\right), \text{ bunnan}$$

$$6 \cdot \left(1 - \frac{x}{30} + \left(\frac{x}{30}\right)^2\right) + 2 = x - \frac{x^2}{30}, \text{ nátiyjede, } x^2 - 30x + 200 = 0.$$

J u w a b ı : 20 l hám 10 l. ▲

- 435.** Sonday tórt tañbalı san tabıń, onıń mińlar tañbasındağı hám onlar tañbasındağı sanları óz ara teń bolsın, jüzler tañbasındağı san birler tañbasındağı sannan birewge artıq bolsın hám izlenip atırğan san pütün sannıń kvadratı bolsın.

(Kórsetpe: $x^2 = 1010a + 101b + 100$ teñlemege keltiriń, bunda x^2 – izlenip atırğan san, a – mińlar, b – birler tañbasındağı san).

- 436.** Kislota menen tolı ıdıs bar. Bul ıdistan 2 l kislota alındı hám ıdısqа 2 l suw quyıldı. Aralaspadan 2 l alındı hám jáne 2 l suw qosıldı. Bul aralaspadan 2 l alındı hám jáne 2 l suw quyıldı. Nátiyjede ıdısta neshe l kislota hám neshe l suw bar?

△ Ёdıstıń kólemi v litr dep alayıq. Ёdistan 2 l kislota alıp, ıdısqа 2 l suw quyılğannan soñ, kislota ıdıstıń $\frac{v-2}{v}$ kólemin iyeleydi. Aralaspadan

2 l alingannan keyin, ıdista $(v-2) \cdot \frac{v-2}{v}$ litr kislota qaldı, oğan 2 l suw quyılğannan soñ kislota ıdıstın $\frac{(v-2)^2}{v^2}$ bólegin iyeleydi. 3-ret (jáne 2 l aralaspalıńp, ıdısqalı 2 l suw quyılğannan keyin) kislota ıdıstın $\left(\frac{v-2}{v}\right)^3$ bólegin iyeleydi. Solay etip, ıdıstağı kislota muğdarı $v \cdot \left(\frac{v-2}{v}\right)^3$ ğalı, suw muğdarı bolsa $v \cdot \left(\frac{v-2}{v}\right)^3 + 3$ ke teñ.

Onda sonday teñlemege iye bolamız:

$$v \cdot \left(\frac{v-2}{v}\right)^3 + v \cdot \left(\frac{v-2}{v}\right)^3 + 3 = v, \text{ bunnan}$$

$$v^3 - 9v^2 + 24v - 16 = 0, (v-1)(v-4)^2 = 0.$$

Shártı boyınsha, $v > 2$ bolğanı ushın, $v = 4$.

$$\text{Onda } v \cdot \left(\frac{v-2}{v}\right)^3 = 4 \cdot \left(\frac{4-2}{4}\right)^3 = \frac{1}{2} (l),$$

J u w a b ı : 0,5 l kislota hám 3,5 l suw. ▲

437. A awıldan B awılǵalı qaray júk mashinası jolǵalı shıqtı. 1 saattan soñ A dan sol jóneliske jeñil mashina jolǵalı shıqtı hám B ǵalı júk mashinası menen bir waqıtta jetip keldi. Eger bul mashinalar A hám B awıllarınan bir waqıtta bir-birine qaray jolǵalı shıqqanında, olar jolǵalı shıqqan waqıttan 1 saat 12 minut ótkennen soñ ushrasatuǵın edi. Júk mashinası A dan B ǵalı keliw ushın qansha waqıt ketti?

438. Vagonnan júkti jumısshılardıń eki toparı túsiretuǵın boldı. Júkti 1-topardıń jalǵız ózi túsiretuǵın waqıt penen sol júkti 2-topardıń jalǵız ózi túsiretuǵın waqıt qosındısı 12 saatqa teñ. Bul waqıtlar ayırması eki topar birge islep júkti túsiretuǵın waqıttıń 45% ine teñ. 1-topar jalǵız ózi hám 2-topar jalǵız ózi islep júkti qansha waqıtta túsiredi?

△ 1-topar júkti jalǵız ózi x saatta, 2-topar bolsa y saatta túsiredi, deyik. Másele shártı boyınsha, $x + y = 12$ (saat). 1-topar 1 saatta jámi

jumistıń $\frac{1}{x}$ bólegin, 2–topar bolsa $\frac{1}{y}$ bólegin orınladı. Olar birgelikte islep 1 saatta jámi jumistıń $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$ bólegin orınladı. Birgelikte islep olar jámi jumistı orınlaw ushın $\frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$ saat sarplaydı. Anıqlıq ushın, máselen, 1–topar ásterek isleydi, yaǵnıy $x > y$ dep alayıq. Onda shárt boyınsha $(x - y)$ saat $\frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$ saatıń 45 % in quraydı:

$$x - y = \frac{45}{100} \cdot \frac{xy}{x + y}.$$

Bul teńlemedegi y ornına $y = 12 - x$ ti qoyıp, x ge salıstırmalı kvadrat teńleme payda etemiz:

$$x - 12 + x = \frac{9}{20} \cdot \frac{x(12 - x)}{12},$$

$$\text{bunnan, } 3x^2 + 124x - 960 = 0.$$

Bul teńlemenıń korenleri $x_1 = -48$, $x_2 = \frac{20}{3}$. Másele mazmunı boyınsha $x > 0$. Demek,

$$x = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3} \text{ (saat),}$$

$$y = 12 - x = 12 - 6\frac{2}{3} = 5\frac{1}{3} \text{ (soat).}$$

Ju w a b ı: $6\frac{2}{3}$ saat, $5\frac{1}{3}$ saat. ▲

- 439.** Eki paxta teriw mashinası birgelikte maydandaǵı paxtanı, birinshi mashinanıń bir ózinen 8 kún tezirek terip bolıwı, al ekinshi mashinanıń bir ózinen 2 kún tez terip bolıwı múmkin. Hárbir mashina maydandaǵı paxtanı neshe kúnde terip bolıwı múmkin?

- 440.** Eki usta bir buyımdı soǵıw ushın buyıtpa aldı. Dáslep, birinshi usta 1 saat aldın jumıs basladı, keyin eki usta birgelikte 4 saat isledi hám buyıtpanıń 40 % i orındadı. Eger buyıtpanı birinshi ustanıń bir ózi islewı ushın ekinshisine qaraǵanda 5 saat waqıt kerek bolsa, hár bir usta neshe saat islewı múmkin?
- 441.** Poezd A hám B qalalar arasındaǵı jol ortasında 20 minut toqtap qaldı. Mashinist B ǵa kestege muwapıq jetip keliwi ushın poezddıń dáslepki tezligin 12 km/saat qa asırdı. A hám B qalalar arasındaǵı aralıq 240 km bolsa, poezddıń dáslepki tezligin tabıń.
- 442.** Hár qıylı quwwatqa iye bolǵan eki traktor 3 kún birge islep, dalanıń $\frac{5}{8}$ bólegin súrip shıqtı. Eger birinshi traktor menen dalanı ekinshisine qaraǵanda 4 kún tezirek súriw múmkin bolsa, tolıq dalanı hár bir traktor jeke-jeke neshe kúnde súrip boladı?
- 443.** Poezd 840 km jol basıwı kerek edi. Joldıń yarımında 30 minut toqtap qaldı. Ol keshikpewı ushın tezligin saatına 2 km ge asırdı. Poezd joldıń hámmesine qansha waqıt sarplaǵan?

$\triangle$ *1-usıl.* Poezd tolıq joldı x saatta basıwı kerek edi; jol yarımın saatına $\frac{840}{x}$ km tezlikte júrgen; keyin saatına $\left(\frac{840}{x} + 2\right)$ km tezlik penen joldıń

yarımın $\frac{420}{\frac{840}{x} + 2} = \frac{210x}{420 + x}$ saatta basıp ótedi. Joldıń birinshi yarımın $\frac{x}{2}$

saatta júrgen edi. Soǵan qaray: $\frac{210x}{420 + x} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$. Teńlemenı sheshsek, $x = 21$ saat ekenin tabamız.

2-usıl. Poezddıń aldınǵı tezligi x km, keyingi tezligi saatına $(x + 2)$

km, 420 km di $\frac{420}{x}$ saatta, qalǵan 420 km di $\frac{420}{x+2}$ saatta júredi. Soǵan

qaray: $\frac{420}{x} - \frac{420}{x+2} = \frac{1}{2}$. Teńlemenı sheshsek, $x = 40$ km/saat; poezd barlıq

joldı basıp ótiwi ushın $\frac{840}{40} = 21$ saat sarplaǵan.

3-usul. Poezd joldin birinshi yarimin x saatta, ekinshi yarimin $\left(x - \frac{1}{2}\right)$ saatta jürgen. Poezddin joldin birinshi yarimindagi tezligi saattina $\frac{420}{x}$ km, ekinshi tezligi saattina $\frac{420}{x - \frac{1}{2}} = \frac{840}{2x - 1}$ km, $\frac{840}{2x - 1} - \frac{420}{x} = 2$. Teñlemeni

sheship, $x = 10,5$ saat, $2x = 21$ saat ekeni aniqlanadi.

J u w a b i : 21 saat. ▲

444. Bir san $\mathfrak{u}$ sh izbe-iz pütün sanlar kóbeymesinen ibarat. Bul sandı berilgen $\mathfrak{u}$ sh izbe-iz sanının hárbirine bóliwden payda bolğan tiyındılar qosındısı 74 ke teñ. Usı sandı tabıń.
445. Dónes kópmúyeshliktiń tárepleri sanı menen diagonalları sanının qosındısı 15 ke teñ. Kópmúyeshlik tárepleriniń sanın tabıń.
446. Tuwrı múyeshli $\mathfrak{u}$ shmúyeshlik tárepleriniń uzınlıǵı: a) izbe-iz natural sanlar menen; b) izbe-iz jup natural sanlar menen; d) izbe-iz taq natural sanlar menen de beriliwi múmkin be?

△ a) Tárepleri izbe-iz pütün sanlar: $x, x + 1, x + 2$ bolsın. Onda x hám $x + 1$ katetler, $(x + 2)$ bolsa gipotenuza boladı, $x^2 + (x + 1)^2 = (x + 2)^2$; bunnan $x = 3$ yaki $x = -1$ ($x = -1 < 0$ máselege juwap bola almaydı).

$x = 3$; $x + 1 = 4$; $x + 2 = 5$. Tárepleri izbe-iz pütün sanlar 3, 4, 5 penen berilgen tuwrı múyeshli $\mathfrak{u}$ shmúyeshlik boladı; b) tárepleri izbe-iz jup sanlar: $2x, 2x + 2, 2x + 4$ bolsın. Onda: $(2x)^2 + (2x + 2)^2 = (2x + 4)^2$; $x = 3$; $2x = 6$; $2x + 2 = 8$; $2x + 4 = 10$. Tárepleri izbe-iz jup sanlar 6, 8, 10 menen berilgen tuwrı múyeshli $\mathfrak{u}$ shmúyeshlik boladı;

d) tárepleri izbe-iz taq sanlar: $2x + 1, 2x + 3, 2x + 5$ menen berilsin. $(2x + 1)^2 + (2x + 3)^2 = (2x + 5)^2$; $x = \frac{5}{2}$ yaki $x = -\frac{3}{2}$. Biraq, x natural san bolıp shıqpadı. Demek, tárepleri izbe-iz taq sanlar menen berilgen tuwrı múyeshli $\mathfrak{u}$ shmúyeshlik joq. ▲

- 447.** Eki túrli eritpeniń birinde 800 g, ekinshisinde 600 g duz bar. Eki eritpeden 10 kg lı jańa eritpe payda etildi. Birinshi eritpedegi duzdıń procent muǵdarı ekinshi eritpedegi duzdıń procent muǵdarınan 10 ǵa kóp bolsa, aralaspada hárbir eritpeden neshe kilogramm bar?

△ Birinshi eritpe x kg bolsa, ekinshisi $(10 - x)$ kg boladı. Birinshi

eritpede duz $\frac{0,8 \cdot 100}{x} = \frac{80}{x}$ procent, ekinshi eritpede bolsa $\frac{0,6 \cdot 100}{10 - x} = \frac{60}{10 - x}$

procent boladı. Máseleniń shártı boyınsha:

$$\frac{80}{x} - \frac{60}{10 - x} = 10.$$

onı bılay sheshemiz: $x = 20$ yaki $x = 4$. Másele shártinde $x < 10$ bolǵanı ushın $x = 20$ koren bolmaydı. $10 - x = 10 - 4 = 6$.

J u w a b ı : birinshi eritpeniń massası 4 kg, ekinshi eritpeniń massası bolsa 6 kg eken.

Juwaptı tekseriw: 800 g duz 4 kg lı eritpeniń $\frac{0,8 \cdot 100\%}{4} = 20\%$ in, 600

g duz 6 kg lı eritpeniń $\frac{0,6 \cdot 100\%}{6} = 10\%$ in quraydı: $20\% - 10\% = 10\%$. ▲

- 448.** Eki metall bóleginen biriniń massası 880 g, ekinshisiniń massası 858 g. 1-bólektiń kólemi 2-siniń kóleminen 10 cm^3 kem. 1-metall bóleginiń salıstırmalı awırılıǵı 2-sinikinen 1 g/cm^3 kóp bolsa, hárbir metall bóleginiń salıstırmalı awırılıǵın tabıń.

△ Ekinshi metall bóleginiń salıstırmalı awırılıǵı $d \text{ g/cm}^3$, birinshi metall bóleginiń salıstırmalı awırılıǵı $(d + 1) \text{ g/cm}^3$. Birinshi metall bóleginiń

kólemi $\frac{880}{d+1} \text{ cm}^3$, ekinshi metall bóleginiń kólemi $\frac{858}{d} \text{ cm}^3$. Másele shártinde:

$$\frac{880}{d+1} + 10 = \frac{858}{d} \text{ yaki } 5d^2 + 16d - 429 = 0,$$

$d = 7,8$ yaki $d = -11$ ($d = -11 < 0$ bolgani ushin máselege juwap bola almaydı).

Juwa b i: ekinshi bólektiń salıstırmalı awırlıǵı $7,8 \text{ g/cm}^3$, birinshiniki bolsa $7,8 + 1 = 8,8 \text{ (g/cm}^3\text{)}$.

Juwaptı tekseriw: Birinshi metalldıń kólemi $\frac{880}{8,8} = 110 \text{ (cm}^3\text{)}$, ekinshisiniki

$$\frac{858}{7,8} = 110 \text{ (cm}^3\text{)}; 110 \text{ cm}^3 - 100 \text{ cm}^3 = 10 \text{ cm}^3. \blacktriangle$$

449. Eki ıdısta bir-birinen basqasha 1 kg suw bar. ıdıslardaǵı suwǵa 88 kaloriya ıssılıq berildi. Massası kóp bolǵan suw massası kem bolǵan suwǵa qaraǵanda $\frac{4}{5}$ gradus azlaw ısıǵanı málim bolsa, hár bir ıdıstaǵı suw massasın anıqlań.

△1) Suw massası x kg hám $(x+1)$ kg dep alayıq. Massası az bolǵan suw $\frac{88}{x}$ gradusqa, massası kóp bolǵan suw $\frac{88}{x+1}$ gradusqa ısıǵan. Massaları

hár qıylı bolǵan eki ıdıstaǵı suw temperaturaları arasındaǵı ayırma $\frac{4}{5}$ gradusqa teń bolǵanı ushin tómendegi teńlemenı dúze alamız:

$$\frac{88}{x} - \frac{88}{x+1} = \frac{4}{5}.$$

Payda bolǵan teńlemenı sheshsek: $x = 10$ yaki $x = -11$. $x = -11 < 0$ máselege juwap bola almaydı.

Juwa b i: 10 kg hám 11 kg.

Juwaptı tekseriw: 10 kg suw 88 kaloriya ıssılıqtan $\frac{88}{10} = 8,8$ gradusqa ısıǵan, 11 kg suw bolsa 88 kaloriya ıssılıqtan $\frac{88}{11} = 8$ gradusqa ısıǵan.

$$8,8 - 8 = 0,8 = \frac{4}{5} \text{ (gradus)}. \blacktriangle$$

- 450.** A hám B qalalar arasındagı aralıq temir jol menen 66 km, suw joli menen 80,5 km. Poezd kemege qaraǵanda 4 saat keyin jolǵa shıǵıp, B ǵa kemedan 15 minut aldın jetip keldi. Eger poezddiń tezligi kemeniń tezliginen saatına 30 km ge kóp bolsa, olardıń tezliklerin tabıń.

△Poezddiń tezligi saattına x km, kemeniń tezligi saattına $(x - 30)$ km.

Poezd $\frac{66}{x}$ saat, keme bolsa $\frac{80,5}{x-30}$ saat jol júrgen. 4 saat+15 minut =
 $= 4\frac{1}{4}$ saat= $\frac{17}{4}$ saat. Másele shártı boyınsha teńleme dúzemiz:

$$\frac{80,5}{x-30} - \frac{66}{x} = \frac{17}{4}.$$

Bul teńlemeni sheshsek, mına juwap kelip shıǵadı: poezddiń tezligi saatına 44 km, kemeniń tezligi 14 km.

Juwaplı tekseriw: Keme 80,5 km di $\frac{80,5}{14} = 5\frac{3}{4}$ saatta, poezd bolsa 66

km di $\frac{66}{44} = 1\frac{1}{2}$ saatta ótedi. $5\frac{3}{4} - 1\frac{1}{2} = 4\frac{1}{4}$ saat boladı. ▲

- 451.** Egin maydanınıń $\frac{2}{3}$ bólegin túrli quwwatlıqtaǵı eki traktor birgelikte 4 kúnde súrip shıǵadı. Eger jerdi 1–traktordıń ózi 2–traktordıń tek ózinen 5 kún tez súrip bolıwı múmkin bolsa, egin maydanın traktordıń hárbiri neshe kúnde súrip boladı?

△ *I-usıl.* Jumıstı bir birlik dep qabıl etemiz. Jerdiń barlıǵın ekinshi traktordıń ózi x kúnde súrip shıqadı, dep alayıq. Onda birinshisiniń ózi

$x - 5$ kúnde súrip boladı. Birinshi traktor bir kúnde tolıq jerdiń $\frac{1}{x-5}$ bólegin, ekinshisi bolsa $\frac{1}{x}$ bólegin, eki traktor birge $\frac{2}{3} : 4 = \frac{1}{6}$ bólegin súredi.

Eki traktor bir kúnde egin maydanınıń $\frac{1}{x-5} + \frac{1}{x}$ yaki $\frac{1}{6}$ bólegin súredi.

Demek:

$$\frac{1}{x-5} + \frac{1}{x} = \frac{1}{6}.$$

Bul teńlemenin korenleri $x = 15$ yaki $x = 2$. Másele mazmunında $x > 5$ bolıwı kerek. Sonın ushın $x_2 = 2$ máselege juwap bola almaydı.

2-usıl. Eki traktor birge tolıq jerdi $4:\frac{2}{3}=6$ kúnde súredi. Ekinshi

traktordın ózi tolıq jerdi x kúnde súrse, 1 kúnde $\frac{1}{x}$ bólegin, 6 kúnde

$\frac{6}{x}$ bólegin súredi. Birinshi traktordın ózi tolıq jerdi $x-5$ kúnde súrse,

1 kúnde $\frac{1}{x-5}$ bólegin, 6 kúnde $\frac{6}{x-5}$ bólegin súredi. Eki traktor 6

kúnde egin maydanın súrip boladı, yaǵnıy:

$$\frac{6}{x} + \frac{6}{x-5} = 1.$$

Juwapı: birinshi traktordın bir ózi menen 10 kúnde, ekinshisiniń bir ózi menen 15 kúnde súrip boladı.

Juwaptı tekseriw: 1) Egin maydanın birinshi traktordın bir ózi ekinshi traktordın bir ózinen $15 \text{ kún} - 10 \text{ kún} = 5 \text{ kún}$ tez súrip boladı.

2) Birinshi traktor 1 kúnde jerdiń $\frac{1}{10}$ bólegin, 4 kúnde $\frac{4}{10}$ bólegin,

ekinshisi 1 kúnde $\frac{1}{15}$ bólegin, 4 kúnde $\frac{4}{15}$ bólegin súredi. Eki traktor

birge 4 kúnde jerdiń $\frac{4}{10} + \frac{4}{15} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$ bólegin súredi. ▲

- 452.** Jobadaǵı jumıstı orınlaw ushın 1-topar 3,5 kún isledi. Qalǵan jumıstı 2-topar 6 kúnde tamamladı. Jobadaǵı jumıstı 2-topar bir ózi 1-topardıń bir ózine qaraǵanda 5 kún keyin juwmaqlaydı. Hár bir topardıń jeke ózi jobadaǵı jumıstı neshe kúnde tamamlaydı?

- 453.** Keme dárya aǵımı menen 69 km aralıqqa barıp, 34 km artına qayıw ushın 5 saat waqıt sarplaydı. Aǵım tezligi saattına 3 km bolsa, kemeniń turǵan suwdaǵı tezligin tabıń.
- 454.** A awıldan dárya aǵımı boyınsha sal aǵızıldı. Sal aǵızılǵannan 4 saat ótkennen soń, usı awıldan dárya aǵımı boyınsha motorlı qayıq jolǵa shıǵıp, 15 km súzgennen keyin salǵa jetip aldı. Motorlı qayıq saldan saattına 12 km artıq súzse, saldın (dárya aǵımınıń) tezligin tabıń.
- 455.** Fermer xojalıǵı 200 gektar jerge belgili muǵdarda kartoshka egip bolıwı kerek edi. Biraq, xojalıq hár kúni rejedegiden 5 gektar zıyat jerge kartoshka egip, jumıstı 2 kún burın orınladı. Kartoshka egiw neshe kún dawam etken?
- 456.** Onlıq sanlar birliklerden 4 ke kem bolǵan eki tańbalı san menen usı sannıń cıfrlarınıń orınların almasırw nátiyjesinde payda bolǵan sannan 2 birlik kishi bolǵan sannıń kóbeymesi 2 627 ge teń. Usı eki tańbalı sandı tabıń.
- 457.** Eki tańbalı sannıń onlıq sanı birliklerden 4 ese kóp. Usı sannan 2 ni alıp, sanları izlenip atırǵan sanlarınıń kerisinshe jazılıwınan payda bolǵan sanǵa 2 ni qossaq hám nátiyjelerdi kóbeytsek, 2400 shıǵadı. Usı eki tańbalı sandı tabıń.
- 458.** Úsh gruppá jumısshılar imarattı birgelikte belgili bir múddette remontladı. Remontlawdı tek 1–gruppá islese, bul múddetten 10 kúnge kóp waqıt boladı. Eger, jumıstı tek 2–gruppá islese, 20 kún artıq, tek 3–gruppá islese múddetten 6 ese kóp waqıt kerek boladı. Hár bir gruppá jeke ózi islese, imarattı neshe kúnde remontlap boladı?
- 459.** Hávizge úsh truba ótkizilgen. Bos hávizdi ekinshi trubanıń ózi birinshi trubaǵa qaraǵanda 3 saat kesh toltıradı. Úshinshi truba bolsa tolıq hávizdi bosatıw ushın, 1–truba hávizdi toltırıwǵa ketken waqıttan 3 saat az waqıt sarplaydı. Eger, trubalardıń ekewinen suw aǵıp, 3–sinen shıǵıp tursa, bos háviz 36 saatta toladı. 1–trubanıń bir ózi hám 2–trubanıń bir ózi bos hávizdi neshe saatta toltıradı? 3–trubanıń jeke ózi tolıq hávizdi qansha waqıtta bosatadı?
- 460.** Buyımınıń bahası 12 000 swm edi. Bul baha izbe–iz eki ret birdey procentke arzanlastırılǵannan keyin, buyımınıń bahası 9 720 swm bolǵan. Buyımınıń bahası hár saparı neshe procentke arzanlastırılǵan.

461. Eki jil ishinde qala xalqı 2 millionnan 2 million 205 mın adamğa jetti. Bul qala xalqınıń jıllıq ortasha kóbeyiw procentin tabıń.
462. Eki jolawshı A hám B awıldan bir-birine qaray kiyatır. Olar ushrasqanda biri ekinshisinen 2 km kóp júrgeni belgili boldı. Ushrasqannan keyin júriwdi dawam ettirip, 40 minuttan soń 1-jolawshı B ğa keldi. 1,5 saattan keyin bolsa 2-jolawshı A ğa keldi. AB aralıqtı tabıń.
463. Shaxmat jarısında qatnasıwshılardıń hár biri qalğanları menen bir retten oynadı. Barlıǵı bolıp, 120 oyın oynalğan bolsa, jarısqa neshe adam qatnasqan?
464. 11-klasstı pitkeriwshi oqıwshılar bir-biri menen súwret almastırdı. Eger 1 190 súwret almastırılğan bolsa, usı klasta neshe oqıwshı bolğan?
465. Aralıǵı 900 km bolğan eki qaladan bir-birine qaray eki poezd jolğa shıqtı. Poezdlar joldıń ortasında ushırastı. Eger 1-poezd 2-sinen 1,5 saat keyin jolğa shıqqan bolsa hám oğan qaraǵanda tezligi saattına 10 km kóp bolsa, hár bir poezddıń tezligin tabıń.
466. Poezd 220 km joldı belgili waqıtta basıp ótiwi kerek edi. Ol 2 saat júrgennen keyin 10 minut toqtap qaldı; keyin tezligin saattına 5 km ge asırdı hám mánzilge mólsherlengen waqıtta jetip keldi. Poezddıń dáslepki tezligin tabıń.

IV BAP MAĞLIWMARLAR ANALIZI

28-§. MAĞLIWMATLAR ANALIZI. MAGLIWMATLARDI BERIW

Hár túrli firmalar, kompaniyalar islep shıǵarıp atırǵan sapa hám muǵdarlıq belgileri, kórsetkishleri (quramı, massası, ólshepleri, reńi, dámi, ...) qabıl etilgen standartlarǵa sáykes keliwin (yaki kelmewi) qalay bilemiz? Qalay baqlaymız, sınaymız?

Tayarlanǵan ónimniń (máselen, sút, dán, gósh ónimleri; túrli ishimlikler; kiyim-kenshekler; dári-darmaqlar; elektr ósbap-úskeneleri hám t.b.) múǵdarı júdá kóp bolsa, olardıń hámme sin birimlep sınaqtan, baqlawdan ótkiziw ekonomikalıq jaqtan da durıs bolmaydı. Bunday jaǵdayda jámi ónimler toplamınan bir neshesin dusmalıy, táwekel tańlap alınadı da solardıń ózin birme-bir sınaqtan ótkiziledi.



Barlıq tekseriliwi kerek bolǵan obyektler kópligi *bas kóplik* delinedi. Bas kóplikten tańlap alınǵan obyektler *tańlanǵan kóplik* (qısqasha *tańlanba*) dep ataladı. Obyekt degende nelerdi tekseriw kerek bolsa, solar túsiniledi.

1 - másele. Firma lampochkalar islep shıǵaradı, dep alayıq. Olardıń neshe procenti jaramsız (janbaydı)? Bunı qalay tekseresiz?

△ Firma shıǵarıp atırǵan júz mınlaǵan lampochkalardıń janıw-janbawın birimlep sınaqtan ótkeriwdiń ilaji joq. Sonıń ushın bunday jaǵdayda lampochkalardıń bir neshewi táwekel tańlap alınadı. Tańlap alınǵan lampochkalar sınaqtan ótkeriledi. Sınaq nátiyjesi boyınsha firma shıǵarıp atırǵan ónim haqqında belgili bir juwmaqqa kelinesi.

Máselen, 1000 dana lampochka sinawdan ótkizilgen bolıp, olardan 10ı jaramsız bolsa (janbasa), onda jámi lampochkalardıń $\frac{10}{1000} = 0,01$ bólegi (yaǵnıy

1% i) jaramsız degen juwmaqqa kelinesi. ▲

Bul mısalda firma islep shıǵarǵan barlıq lampochkalar *bas kópik* boladı. Sınaw ushın *táwekel tańlap alınǵan* 1000 lampochka *tańlanba kópik*ti quraydı.

2-másele. Paxta atızda ashılǵan góreklerdiń ortasha massasın anıqlań.

△ Ashılǵan góreklerdiń barlıǵın jıynap alıp, olardıń massasın birme-bir anıqlaw múmkin emes. Górektiń ortasha massasın biliw ushın olardıń bir neshesin túrli jerlerden táwekel tańlap alınǵan ǵoza túbinen úzip alınadı. Payda bolǵan tańlanbadaǵı góreklerdiń massaları ólshenedi hám olardıń ortasha arifmetigi esaplanadı. Bul ortasha arifmetikalıq máni paxta atızda ashılǵan góreklerdiń ortasha massası sıpatında qabıl etiledi. ▲

Bul mısalda bas kópik – paxta atızdaǵı barlıq górekler; tańlanba kópik bolsa massasın ólshew ushın atızdıń túrli jerlerinen úzip alınǵan górekler bolıp esaplanadı.



Táwekel saylap alınǵan n dana obyektin sınaw (ólshew, baqlaw) nátiyjeleri $x_1, x_2, \dots, x_n$ dep alayıq. n san *tańlanbanıń kólemi* delinedi. Tańlanbanıń aǵzaları, ádette, variantlar delinedi. Varinatları artıp barıw tártibinde jazıp shıǵayıq:

$$x_1^* \leq x_2^* \leq x_3^* \leq \dots \leq x_n^* \quad (1)$$

(1) qatnas variacion qatar delinedi.

3-másele. Pille uzınlıǵın ólshewde sonday mánisler (santimetrlerde) alınadı:

3,40; 3,34; 3,24; 3,40; 3,62; 3,45; 3,43; 3,35; 3,50; 3,56.

Usı mánislerge sáykes variacion qatar dúziń.

△ Bul mánislerdiń eń kishisi 3, 24; eń úlkeni 3, 62. Sanlardı ósiw tártibinde jaylastırıp, usı variacion qatardı payda etemiz:

3,24; 3,34; 3,35; 3,40; 3,40; 3,43; 3,45; 3,50; 3,56; 3,62. ▲

4-másele. Táwekel 10 túp ǵoza tańlandı. Olardaǵı ǵumshalar sanı sanaladı hám sonday nátiyjeler alınadı: 15, 11, 10, 15, 17, 15, 16, 16, 17, 19. Usı mánislerge sáykes variacion qatar dúziń.

△ Berilgen sanlardın eń kishisi 10, eń úlkeni 18. Sanlardı ósiw tártibinde jaylastırıp, usı variacion qatardı payda etemiz:

10; 11; 15; 15; 15; 16; 16; 17; 17; 18. ▲

$x_1, x_2, \dots, x_k$ tańlanbada x_1 variantta n_1 ret..., x_k variantta n_k ret qaytalangan (baqlangan), dep alayıq. $n_1, n_2, \dots, n_k$ sanlar jiyiligi delinedi.

Anıǵıraǵı, $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$.

$W_1 = \frac{n_1}{n}, W_2 = \frac{n_2}{n}, \dots, W_k = \frac{n_k}{n}$ salıstırıwlar salıstırma jiyiligi delinedi.

Anıǵıraǵı, $W_1 + W_2 + \dots + W_k = 1$. Sonday kesteler dúzeyik (1- hám 2-kesteler):

1-keste

Sınaw nátiyjeleri	x_1	x_2	...	x_k
Jiyiligi	n_1	n_2	...	n_k

2-keste

Sınaw nátiyjeleri	x_1	x_2	...	x_k
Salıstırmalı jiyiligi	W_1	W_2	...	W_k

1- hám 2-kestelerdi $x_1, x_2, \dots, x_k$ tańlanbanıń, sáykes túrde, jiyiligi boyınsha hám salıstırmalı jiyiligi boyınsha bólistiriliwi deymiz.

4-másele. ushın jiyilik kestesi hám salıstırmalı jiyilikler kestesi tómende berilgen (sáykes túrde, 3- hám 4- kesteler).

3-keste

Sınaw nátiyjeleri	10	11	15	16	17	18
Jiyiligi	1	1	3	2	2	1

4-keste

Синаw натийjeleri	10	11	15	16	17	18
Салыстурмалы jiyiligi	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$

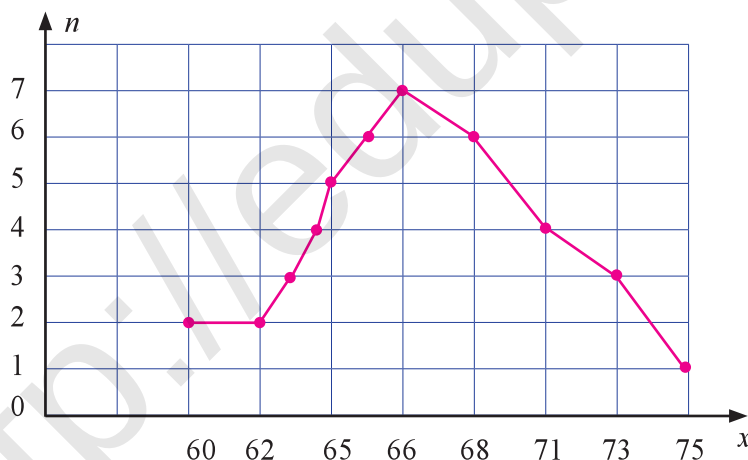
5-másele. „Háreket qáwipsizligi“ aylıgında MAY xızmetkeri 30 avtomobildıń tezligin ólshedi. Maǵlıwmatlar jiyilikler kestesinde berilgen:

Ólshew nátiyjeleri (km/s)	60	62	65	66	68	71	73	75
Jiyiligi	2	2	5	7	6	4	3	1

Usı maǵlıwmattı tegislikte súwretleń.

△ Koordinata tegisliginde koordinataları (60; 2), (62; 2), (65; 5), ..., (75; 1) bolǵan noqatların súwretleybiz hám olardı kesindiler menen izbe-iz tutastıramız (39-súwret).

Payda bolǵan sınıq sızıq jiyilikler *poligonı* delinedi. ▲



39-súwret.

Eger tańlanbanıń kólemi úlken bolsa, onıń jiyilikler boyınsha bólistiriliwin tabıw ushın tańlanba klasslarga bólinedi. Klasslardıń ólshemi (úlkenligi, uzınlıǵı,...) birdey bolıwı kerek.

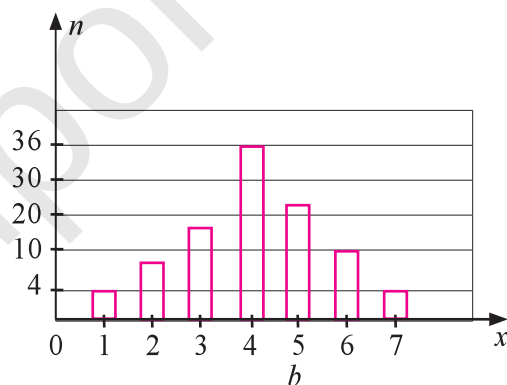
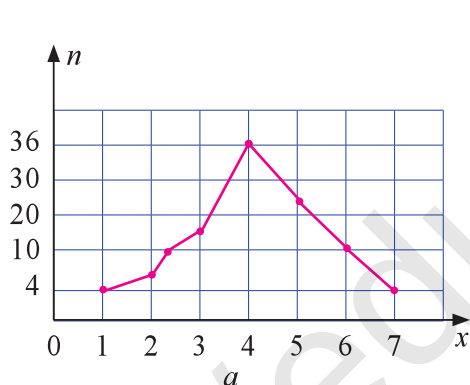
Mısalı. MAY xızmetkeri „Háreket qáwipsizligi“ aylıgında 100 avtomobildi texnikalıq tekseriwden ótkeriw barısında olardıń ótken 6 ay dawamında neshe

kilometr jol júrgenin de anıqladı. Bul maǵlıwmatlar jiyilikleri boyınsha bólistiriliwi tómendegi kestede berilgen. Tańlanbalar 7 klasqa bólingen. Klasslardıń ólshemi (uzınıǵı) birdey.

Klaslar	8001–9000	9001–10000	10001–11000	11001–12000	12001–13000	13001–14000	14001–15000
Klass tártip nomeri	1	2	3	4	5	6	7
Jiyilikleri	4	6	18	36	22	10	4

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 + n_7 = 100 \text{ ekeni anıq.}$$

Kestedegi maǵlıwmatlardı jiyilikler poligonı yaqı baǵanalı diagramma kórinisinde súwretlewge boladı ($40-a$, b súwretler).



40- súwret.

Shınıǵıwlar

467. Táwekel tańlangan 30 túp ǵoza ósimligindegi ǵumshalar sanı tómendegi kestede keltirilgen:

15	17	15	10	18	11	15	17	16	16
17	10	14	15	16	15	14	13	15	13
16	17	16	14	12	14	15	14	17	13

(Maǵlıwmatlar M.Sultanovanıń „Variacion statistika“ qollanbasınan alınǵan. „Oqıtıwshı“ baspası, T., 1977.)

- 1) Tañlanbanıń jiyilikler kestesin dúziń.
- 2) Tañlanbanıń jiyilikler poligonın jasań.

468. Klass basshısı klastağı 30 oqıwshıdan dem alıs kúni hárbir oqıwshı neshe saat televizor kórgeni haqqında maǵlıwmat aldı. Olar keste de berilgen:

3	2	5	4	5	3	6	0	2	1	3	3	4	3	3
3	1	3	4	4	2	4	3	2	5	2	4	2	0	4

Maǵlıwmatlar tiykarında: 1) jiyilikler kestesin dúziń; 2) jiyilikler poligonın jasań.

469. Áskeriy xızmetke shaqırılǵan jigitlerden 100 niń ayaq kiyimleri ólshemi tómendegi keste de berilgen:

Ólshemi	38	39	40	41	42	43	44	45
Jiyiligi	4	4	19	27	23	14	6	3

Maǵlıwmatlar boyınsha: 1) salıstırmalı jiyilikler kestesin dúziń; 2) jiyilikler poligonın jasań; 3) salıstırmalı jiyilikler poligonın jasań.

470. 8-klastıń 50 oqıwshı qızlarınıń ayaq kiyimleriniń ólshemleri keste de berilgen:

Ólshemi	34	35	36	37	38	39	40
Jiyiligi	5	7	10	15	7	4	2

Maǵlıwmatlar tiykarında: 1) salıstırmalı jiyilikler kestesin dúziń; 2) jiyilikler poligonın jasań; 3) salıstırmalı jiyilikler poligonın jasań.

471. 8-klass oqıwshılarınıń 20 sınıń kiyimleriniń(pidjak-shalbar) ólshemleri keste de berilgen:

38	42	40	44	40	48	46	42	44	46
48	46	44	50	46	44	48	44	48	44

Maǵlıwmatlar tiykarında: 1) jiyilikler kestesin dúziń; 2) salıstırmalı jiyilikler kestesin dúziń; 3) jiyilikler poligonın jasań; 3) salıstırmalı jiyilikler poligonın jasań.

472. Testte 10 tapsırma bar edi. Klastağı 30 oqıwshınıń test nátiyjeleri (durıs juwaplar sanı) kestede berilgen:

5	8	2	6	5	9	7	6	10	9	8	7	9	3	7
7	3	7	8	9	10	5	7	7	5	5	7	5	4	5

Maǵlıwmatlarǵa tiykarında: 1) jiyilikler kestesiń dúziń; 2) jiyilikler poligonıń jasań.

473. Sport dógeresine qatnasıp atırǵan 150 balanıń 1 minut 30 sekund dawamında neshe ret „otırıp-turıw“ baqlandı. „Otırıp-turıw“ lar sanı 40 tan 74 ke shekem boldı: 40; 74. Bul kesindi hárbiriniń uzınlıǵı 5 ke teń bolǵan aralıqqa bólindi. Hárbir aralıqqa túsken baqlawlar sanı esaplandı hám usı jiyilikler kestesi dúzildi:

„Otırıp-turıw“lar sanı	Jiyiligi
40 dan 44 ke shekem	11
45 ten 49 ǵa shekem	20
50 den 54 ke shekem	28
55 ten 59 ǵa shekem	36
60 dan 64 ke shekem	24
65 den 69 ǵa shekem	19
70 den 74 ke shekem	12
Jámi	150

Maǵlıwmatlarǵa sáykes: 1) jiyilikler poligonıń jasań; 2) ústinli diagrammanı jasań.

29-§. ORTASHA MÁNI. MODA. MEDIANA

Ortasha máni túsiniǵı menen tanıssız. Eger variantlar $x_1, x_2, \dots, x_n$ bolsa, tańlanbanıń *ortasha mánisi* dep

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

sańǵa aytıladı.

Eger, tañlanbada x_1 variantta n_1 ret, x_2 variantta n_2 ret,..., x_k variantta n_k ret qaytalanğan (baqlanğan) bolsa,

$$\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + \dots + n_k x_k}{n_1 + \dots + n_k}$$

san tañlanbanıń *ólshemli ortasha mánisi* delinedi. $n_1, n_2, \dots, n_k$ sanlar sáykes variantlardıń jiyilikleri ekenin eskertip ótemiz.

1-másele. Xojalıq 100 gektar jerge shigit egip, belgili bir sortlı paxtadan gektar basına 33 cr den ónim aldı. 50 gektar basqa jerge egilgen sol sorttağı paxtadan bolsa 30 cr den ónim aldı. Xojalıq 1 gektar jerden ortasha qansha ónim alğan?

△ Bul jerde $x_1 = 33$, $n_1 = 100$; $x_2 = 30$, $n_2 = 50$.

$$\bar{x} = \frac{100 \cdot 33 + 50 \cdot 30}{100 + 50} = \frac{3300 + 1500}{150} = \frac{4800}{150} = 32 \text{ (cr)}.$$

Juwabı: 32(cr).▲

2-másele. Sportsmen biyiklikke 7 ret sekirdi hám sonday nátiyjelerdi kórsetti (metr esabında):

2,1; 1,97; 2,44; 1,85; 1,97; 1,96; 2,06.

Sportsmen ortasha neshe metr biyiklikke sekirgen?

△ Bul jerde 1,97 variantta eki ret, qalğan variantlar bir ret berilgen. Bunnan

$$\bar{x} = (2,1 + 2 \cdot 1,97 + 2,44 + 1,85 + 1,96 + 2,06) : 7 = 14,35 : 7 = 2,05 \text{ (m)}.$$

Juwabı: 2,05 metr.▲

Ortasha máni maǵlıwmatlar qatarınıń orayın kórsetetuǵın san desek te boladı.

Moda. Moda túsinigine alıp keliwshı mäseleni kórip shıǵayıq.

3-másele. Mektep miyirbiykesi 8-klass oqıwshılarının 10 oqıwshınıń boyın ólshep, tómendegi nátiyjelerdi aldı (santimetr esabında):

166; 168; 170; 165; 164; 168; 169; 163; 168; 162.

Tañlanbada qaysı variant eń kóp qaytalanğan?

△ Variacion qatar dúzeyik:

162; 163; 164; 165; 166; 168; 168; 168; 169; 170.

Bul variacion qatarda úyrenilip atırǵan belgi – oqıwshı boyınıń uzınılıǵı – 168 cm eń kóp – 3 ret dizimge alınǵan, basqa variantlar bolsa 1 yaki 2 ret. Bul variacion qatar ushın 168 sanı moda boladı. ▲



Berilgen variacion qatarda úyrenilip atırǵan belginiń eń kóp ushıraytuǵın mánisi *moda* delinedi hám M_0 etip belgilenedi.

Moda hám ortasha mání óz-ara teń bolıwı hám teń bolmawı da múmkin. Bul máselede oqıwshılardıń ortasha uzınılıǵı $\bar{x} = (2 \cdot 163 + 164 + 165 + 166 + 3 \cdot 168 + 169 + 170) : 10 = 1664 : 10 = 166,4$ (cm) boladı.

Bul máselede moda hám ortasha mánisi óz ara teń bola almaydı: $168 \neq 166,4$.

4-másele. Alidıń „Algebra“ páninen jurnaldaǵı bahaları: 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5.

Bul tańlanbanıń modası hám ortasha mánisin tańıń.

▲ $M_0 = 4$ ekeni anıq, sebebi 4 variantta eń kóp ushırasǵan:

$$\bar{x} = \frac{2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 5}{2 + 3 + 2} = \frac{28}{7} = 4.$$

Bul máselede $M_0 = \bar{x} = 4$.

Tańlanbanıń modası bolmawı da múmkin. Máselen, atızdan úzilgen 5 qawınıń massası ólshengende (kg larda) 3,8; 4; 4,5; 5,2; 4,9 nátiyjeler alındı. Bul tańlanbanıń modası joq. ▲

Mediana.



Variacion qatar aǵzalarınıń sanı taq bolsa, bul qatar ortasında jaylasqan aǵza *mediana* delinedi hám M_c etip belgilenedi.

Máselen, 20,23,24,27,29,31,34 qatar ushın mediana 27 boladı, sebebi 27 sanı bul variacion qatardıń ortasında jaylasqan. Onnan shep tárepte de, oń tárepte de qatardıń 3 ewden aǵzası bar. Variantlar sanı jup bolǵan jaǵdaydı qarayıq.



12, 14, 17, 21, 23, 29, 32, 37 qatarda 8 aʻza bar, bunday jaʻgdayda variacion qatardın medianası ortada turʻan eki sannın ortasha arifmetigi sıyaqlı kórsetiledi.

$$M_e = \frac{21+23}{2} = \frac{44}{2} = 22.$$

Keńlik.



Variacion qatardın eń úlken aʻzası x_n^* menen eń kishi aʻzası x_1^* arasındagı ayırmashılıq(alıw), yaǵnıy $x_n^* - x_1^*$ san $x_1, x_2, \dots, x_n$ tańlanbanın keńligi delinedi.

Ol, ádette, r háribi menen belgilenedi..

Tańlanbanın keńligi $x_1, x_2, \dots, x_n$ sanlar qanshelli jayılmalı ekenin bildiriwshi ólshewlerden biri bolıp esaplanadı. Máselen,

$$5, 6, 8, 16, 18, 19 \quad (1)$$

qatar ushın keńlik $r = 19 - 5 = 14$ ke teń.

$$10, 10, 12, 13, 13, 14 \quad (2)$$

qatar ushın keńlik $r = 14 - 10 = 4$ ke teń. Yaǵnıy, eki qatardagı aʻzalar sanı 6 dan, ortasha mánisleri bolsa óz ara teń ($\bar{x} = 12$).

$14 > 4$ teńsizlik (1) qatardagı aʻzalar (2) qatardagı aʻzalargá qaraǵanda ortasha mánisi salıstırmalı jayılmalı jaylasqanın, (1) qatarda *ózgeriwsheńlik* úlken ekenin bildiredi.

Shınıǵıwlar

474. 10 oyında mektep futbol komandasının qarsılas komanda dárwazasına kirgizgen toplarının jiyilikler kestesi tómendegishe boldı:

x – toplar sanı	0	1	2	3
n – jiyiligi	4	2	3	1

Bul maǵlıwmatlar boyınsha: 1) variacion qatar dúziń; 2) tańlanbanıń ortasha mánisin; modasın; medianasın; keńligin tabıń; 3) jiyilikler poligonın jasań; 4) salıstırmalı jiyilikler kesteseń dúziń; 5) salıstırmalı chastota kesteseń saýkes diagramma jasań.

Tańlanbalardıń: 1) ortasha mánisi; 2) modası; 3) medianası; 4) keńligin tabıń (**475–477**):

- 475.** 1) 12, 14, 9, 13, 15; 3) 15, 13, 13, 14, 16, 14;
2) 16, 14, 13, 17; 4) 5, 8, 13, 12, 12.
- 476.** 1) 6, 8, 10, 11, 10; 3) 8, 10, 12, 11, 14;
2) 3, 6, 8, 4, 9; 4) 6, 3, 2, 7, 5, 7.
- 477.** 1) -3, 4, 5, -4, 1, 2, 4, -3, -2, 3, -3, 2;
2) -3, -3, 4, 4, 4, 6, 6, -3, -2, 4, 5, -4.
- 478.** Toǵız adamnan ibarat jyuriyler aǵzası 10 ballıq shkalada eki oyınshınıń oyın baǵaladı. Baqlaw nátiyjeleri kestede keltirilgen:

Oyınshınıń tártip nomeri	Jyuriylerdiń tártip nomeri hám nátiyjeleri								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	8,8	9,6	8,9	9,2	8,7	8,9	8,9	8,8	8,7
2	9,1	8,2	9,0	8,9	9,0	9,1	9,0	9,1	9,0

Hár bir oyınshı ushın qoyılǵan bahalardıń : 1) ortasha mánisin; 2) modasın; 3) medianasın; 4) keńligin tabıń.

- 479.** Mekteptegi 40 oqıtıwshınıń jumıs stajı haqqında maǵlıwmatlar tómendegi jiyilikler kestesinde berilgen:

Jumıs stajı	1	2	4	5	7	9	10	12	15	18	20	22	23	25
Oqıtıwshılar sanı	3	1	4	3	4	2	3	1	2	6	3	3	3	2

Usı tańlanbanıń: 1) ortasha mánisin; 2) modasın; 3) medianasın; 4) keńligin tabıń; 5) jiyilikler poligonın jasań.

- 480.** Baqlaw kameraları tekserip atırıp, táwekel túrde 50 avtomobil tańladıhám hır biriniń tezligi (km/s larda) anıqlandı. Nátiyjeler kestege berilgen:

62	54	56	73	78	63	68	70	66	54
58	65	55	57	69	67	61	64	53	56
58	76	57	48	57	68	82	78	72	75
65	67	64	54	58	62	67	80	87	69
74	78	70	76	46	60	63	68	74	67

Usı tańlanbanıń;

- 1) keńligin anıqlań;
- 2) aralıq uzınlıgın 5 dep alıp, tańlanbanı klaslarga (toparlarga) bóliń (45-49; 50-54; 55-59; ...) hám jiyilikler kestesin dúziń;
- 3) Tańlanbanıń ortasha mánisin; modasın; medianasın esaplań;
- 4) Jiyilikler poligonın jasań;
- 5) Salıstırmalı jiyilikler kestesin dúziń;
- 6) Salıstırmalı jiyilikler kestesine saykes diagramma jasań;
- 7) Neshe procent avtomobildıń tezligi 70 km/s tan artıq eken?

- 481.** Nayza atıw boyınsha jarısta qatnasqan 40 adamnıń kórsetken nátiyjeleri (1 metr anıqlıgında) tómendegi kestege berilgen:

28	31	31	38	43	38	34	52	36	38
35	48	34	45	41	35	42	42	42	41
27	32	29	33	49	37	48	40	47	39
26	25	37	40	28	37	37	44	44	43

- 1) maǵlıwmatlardı klaslarga (toparlarga) bólin (25-29; 30-34; ...) hám jiyilikler kestesin dúzin;
- 2) jiyilikler poligonın dúzin;
- 3) tańlanbanın: ortasha mánisin, modasın; medianasın tabın.

30-§. TAŃLAW USÍLÍ MENEN KOMBINATORIYALÍQ MÁSELELERDI SHESHIW

Ómirde kóplegen máselelerdin sheshimi bir neshe bolıwı múmkin. Sheshimler ishinen ózimizge maqulın saylawımız tábiyiy. Bul sheshimlerde esaplawda barlıq variantlar (usıllar, imkaniyatlar)dan birewi de “qalıp ketpewi”, “joǵalmawı” ushın tańlaw (sanap shıǵıw) usılınan paydalanıladı. Usı usıllardın maǵanası mısallar sheshiw barısında ashıladı.

1- másele. 2, 3, 5 cifrleri járdeminde neshe eki tańbalı san dúziwge boladı?

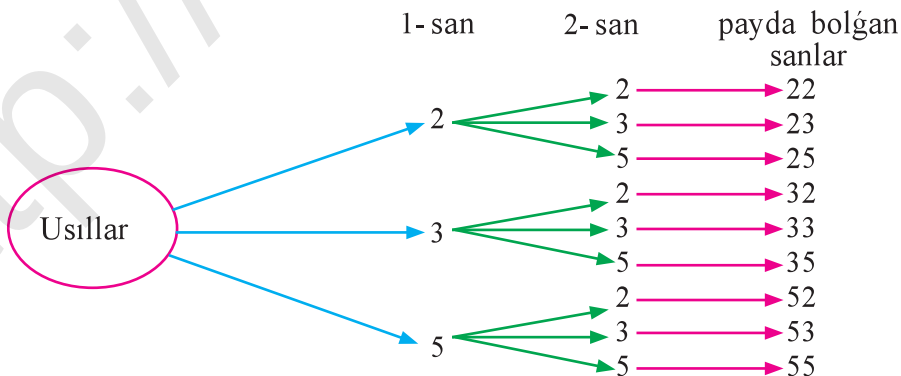
△ Juwaplardan birewin de túsirip qaldırmaı, olardı tákirarlamaw ushın sanlardı, ósiw tártibinde jazıp shıǵamız: dáslep 2 sanı menen, soń 3 sanı menen, keyin 5 sanı menen baslanatuǵın sanlardan máselege sáykesin *tańlap* jazamız:

22, 23, 25; 32, 33; 35, 52, 53, 55.

Juwabı: 9 eki tańbalı san dúziwge boladı. ▲

1-máseleni sheshiwdin jáne bir usılın kórip shıǵayıq.

△ Mina sızılmanı sızamız:

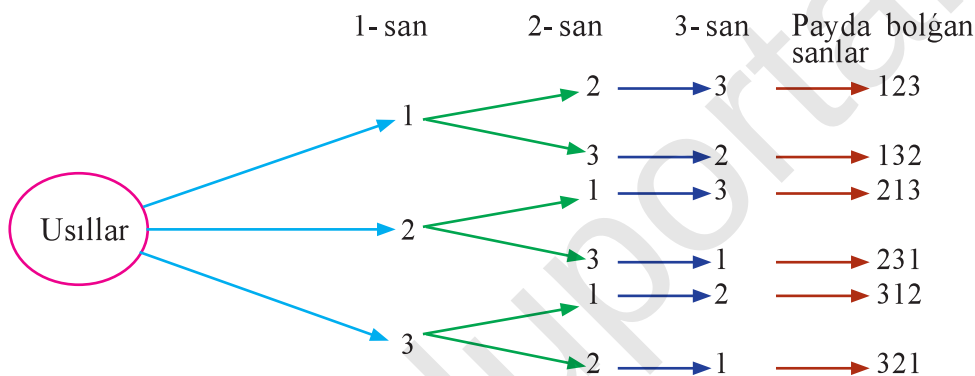


Juwabı: Jámi 9. ▲

Bul sızılma terekke uqsaydı. Sonıń ushın da bunday sızılmalar múmkin bolǵan variantlar (usıllar, tańlawlar) teregi delinedi. Berilgen 2, 3, 5 sanlarınan eki tańbalı san dúziw ushın dáslep 1-san tańlanadı. Bunıń 3 usılı bar, sonıń ushın terektegi “tamır” – usıllardan 3 shaqa shıqqan. Keyin 2-san tańlanadı, bunıń da 3 usılı bar. Sonıń ushın da 1-san bolıwǵa talaban 3 sannıń hárbirinen 3 ewden shaqa shıqqan. Nátiyjede 9 túrli eki tańbalı san payda etiledi.

2-másele. 1, 2, 3 sanlarınan, olardı tákirarlamay, jámi neshe túrli 3 tańbalı san dúziwge boladı?

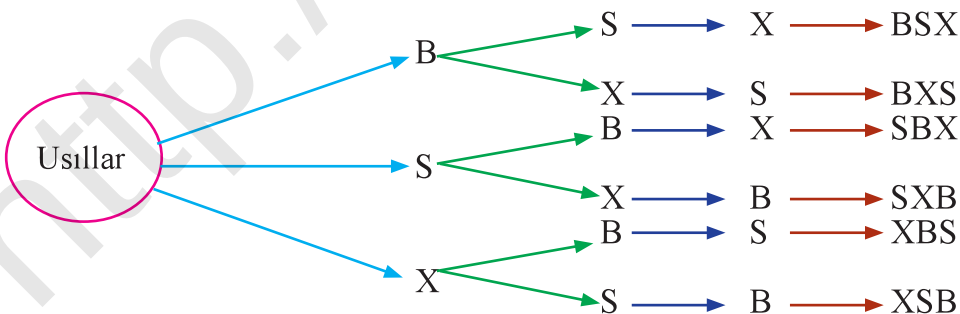
△ Variantlar teregin dúzemiz:



Juwapı: 6 ta. ▲

3- másele. Turistlik firması Buxara, Samarqand, Xiywa qalalarına sayaxat shólmeklestirmekshi. Bunday marshrutnıń jámi neshe túrli variantı (usılları) bar?

△ Belgilewlerdi kirgizemiz: Buxara – B, Samarqand – S, Xiywa – X. Variantlar teregin dúzemiz:



Juwapı: Jámi 6 marshrut. ▲

4- másele. 1) 1, 2 hám 3; 2) 0, 1, 2 hám 3 sanlarınan paydalanıp, ilajı bolğanınsha barlıq eki tańbalı sanlardı jazıń. Olardıń sanı N neshege teń eken?

△ Kombinatoriyalıq máselelerdi sheshiw usıllarınan biri variantlar kestesi bolıp esaplanadı. Bunday usıl járdeminde esaplaǵanda elementler kombinaciyasınıń “joǵalıp” qalıwı bolmaydı. Máseleni variantlar kestesi járdeminde sheship kóreyik. Mınaday kesteler dúzemiz:

1-san	2-san		
	1	2	3
1	11	12	13
2	21	22	23
3	31	32	33

$$N = 3 \cdot 3 = 9.$$

Juwabı: 1) $N = 9$.

1-san	2-san			
	0	1	2	3
1	10	11	12	13
2	20	21	22	23
3	30	31	32	33

$$N = 3 \cdot 4 = 12.$$

Juwabı: 2) $N = 12$. ▲

Shınıǵıwlar

- 482.** Alisher, Baxram, Selim futbol oyınınıń kóriw ushın 3 bilet satıp aldı. Bilette olar 1-qatardıń 1; 2; 3-orınların iyelewı kerek. Olar bul 3 orındı neshe usılda iyelewı múmkin? Máselege sáykes variantlar teregin sızıń.
- 483.** 0, 4, 5 sanlarınan, usı sanlar tákirarlanıwı múmkin bolsa, jámi neshe 3 tańbalı san dúziwge boladı? Máselege sáykes variantlar teregin sızıń.
- 484.** 4, 5, 8 sanlarınan, usı sanlar tákirarlanıwı múmkin bolsa, neshe 3 tańbalı san dúziwge boladı?
- 485.** Dúkanda alma, almurt, júzim bar. Iroda hám Nasiba apalar bul miywelerden birewin tańlayjaq. Bunday tańlawdıń jámi neshe variantı bar? Variantlar teregin sızıń.
- 486.** 2, 4, 6, 8 sanlarınan tórt tańbalı sanlar dúziń. Bul sanlar tákirarlanbasın. Usı sanlardıń neshewı: 1) 4 ke; 2) 8 ge bólinedi?

- 487.** Azamat anası hám sinlisine beriw ushın eki gúldáste alajaq. Gúl dúkanda aq roza gúl, qızıl roza gúl, lala gúllerden ibarat gúldásteler bar eken. Azamat eki gúldásteni neshe túrli usılda tańlawı múmkin? Variantlar teregin sızın.
- 488.** Alisher qoyanına geshir, kapusta, láblebi beredi. Ol usı úsh palız óniminen ekewin tańlawı kerek. Alisher bunı neshe usılda ámelge asıra aladı.
- 489.** Seyftin shifrında 3 – A, B, C háripler bar. Usı háripler járdeminde jámi neshe shifr dúziwge boladı? Eki jaǵdaydı qarań: 1) háripler tákirarlanbaydı; 2) háripler tákirarlanadı.
- 490.** Tarelkada 2 alma, 2 almurt, 2 shabdal bar. Nadira hám Nazima bul miywelerden 3 ewin tańlamaqshı. Tańlawdın neshe usılı(variantı) bar?
- 491.** Altı bala eki orınlı qayıqta seyilge barajaq. Balalardı bul qayıqlarǵa neshe túrli usılda bólistiriwge boladı? Variantlar teregin sızın.

31-§. KOMBINARIKANÍN TIYKARGÍ QAǴÍYDASÍ HÁM ONÍ MÁSELELER SHESHIWDE QOLLANÍW

Áziz oqıwshı! Sizler 6-klasta kombinatorikanın qosıw hám kóbeytiw qaǵıydalarına tiyisli dáslepki túsinikler menen tanıstırız..

1- másele. Samarqanddan Toshkentke 4 túrli jol menen keliwge boladı: samolyot, poezd, avtobus hám jeńil mashina (taksi). Tashkentten Xojakentke 3 túrli transport alıp baradı: poezd, avtobus, taksi. Samarqanddan Xojakentke neshe usılda keliwge boladı (41-súwret)?



41-súwret.

△ Samarqanddan Toshkentke keliwdiń jámi 4 túrli jolı bar. Bul 4 joldan birewin tańlap, Tashkentke keldik deyiik. Endi Xojakentke barıwdıń 3 túrli jolı-imkanıyatı bar. Solay etip, Samarqanddan Tashkent arqalı Xojakentke barıwdıń jámi $4 \cdot 3 = 12$ túrli usılı bar.

Bul usıllardı jazıp shıǵıwǵa boladı. Belgilew kirgizeyik: samolyot (s), poezd (p), avtobus (a), taksi (t). Máselen, sp jazıw Samarqanddan Tashkentke samolyotta keliw hám Tashkentten Xojakentke poezdda barıwdı bildiredi. Bul belgilewler járdeminde Samarqanddan Tashkent arqalı Xojakentke barıwdıń jámi usılları (variantları, jolları, imkanıyatları) tómendegishe boladı:

sp	pp	ap	tp
sa	pa	aa	ta
st	pt	at	tt

Jámi usıllar sanı: $4 \cdot 3 = 12$.

Juwabı: 12 túrli. ▲



Ulıwma, A qaladan B qalaǵa keliwdiń m usılı bolsa hám hárbir usıl ushın B dan C qalaǵa keliwdiń n usılı bolsa, onda A dan C ǵa keliwdiń jámi $m \cdot n$ usılı bar, yaǵnıy A dan C ǵa $m \cdot n$ trli usıl menen barıwǵa boladı.

Bul qaǵıyda *kóbeytiw qaǵıydası* bolıp, ol kombinatorikanıń tiykarǵı qaǵıydası bolıp esaplanadı.

2-másele. „Makro“ supermarketiniń „Hámmesi úy ushın“ bóliminde 5 túrli kese, 6 túrli tarelka, 4 túrli shay qasıq bar. Nargiza apa hár túrli attaǵı eki buyım satıp alajaq. Ol bunı neshe túrli usılda ámelge asırıwı múmkin?

△ 1) Keseni tańlawdıń 5 usılı bar. Tarelkanı saylawdıń 6 usılı bar. Kese tańlawdıń hárbir usılında tarelka tańlawdıń 6 usılı bar. Demek, kóbeytiw qaǵıydası boyınsha kese hám tarelka juplıǵın tańlawdıń $5 \cdot 6 = 30$ usılı bar. Tap usınday pikir júritip: 2) kese hám qasıqtı $5 \cdot 4 = 20$ usılda; 3) tarelka hám qasıqtı $6 \cdot 4 = 24$ usılda tańlaw múmkinligin tabamız. Demek, hár túrli eki buyımdı $30 + 20 + 24 = 74$ túrli usılda tańlaw múmkin eken.

Juwabı: 74 túrli usılda. ▲

3-másele. Neshe úsh tañbalı sanda tek ġana bir 7 sanı bar?

△ 7 sanı 1-, 2-, 3-orında (júzler, onlıqlar, birlikler tañbalısında) bolıwı múmkin.

Eger, 7 sanı 1 – orında turǵan bolsa, 2- hám 3-orınlardı 9 san (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) járdeminde $9 \cdot 9 = 81$ usılda toltırıw múmkin.

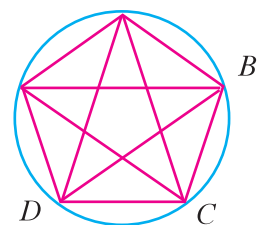
Eger 7 sanı 2-orında bolsa, onda 1-orında 0 hám 7 sanlarınan basqa qálegen san turıwı múmkin. 1-orındı iyelewdiń $10 - 2 = 8$ imkaniyat bar. Bunda 3-orında 7 sanınan basqa qálegen san tura aladı; demek, imkaniyatlar sanı $8 \cdot 9 = 72$.

Eger 7 sanı 3-orında tursa, onda 1-orındı alıw ushın 8, 2-orındı alıw ushın bolsa 9 imkaniyat bar. Solay etip, onlıq jazıwda tek ġana bir 7 sanı bar úsh tañbalı sanlar jámi $81 + 72 + 72 = 225$ eken.

Juwabı: 225 ▲

4- másele. Sheńberden alınǵan 5 noqat A, B, C, D, E háripleri menen belgilengen. Hárbir noqat qalǵan noqatlar menen tutastırılса, neshe kesindi payda boladı (42-súwret)?

△ **1 – usıl.** Noqatlar sanı az bolǵanı ushın, máselege sáykes figuranı sızıp, kesindiler sanın sanap shıǵıwǵa boladı, olar 10 dana. Biraq, sheńberde alınǵan noqatlar sanı kóp bolsa (másel-en, 100, ...), sáykes figuranı sızıw hám ondaǵı kesindilerdi sanaw qıyınlasadı. Bul jaǵdayda basqasha jol tutıw kerek.



42-súwret.

2 – usıl. Sheńberden alınǵan 5 noqattıń hár hár-birinen 4 kesindi ótkiziledi. Bunday kesindiler sanı $5 \cdot 4 = 20$, biraq kes-indiler sanın esaplawda hárbir kesindi eki ret sanalǵan. Demek, biz 20 nı 2 ge bóliwimiz kerek: $20 : 2 = 10$.

3-usıl. A noqattı qalǵan 4 noqat penen tutastırсаq, 4 kesindi payda etemiz: AB, AC, AD, AE . B noqatınan da 4 kesindi ótkiziwge boladı, biraq B dan ótkizilgen bir kesindi ($BA = AB$) nı biz sanadıq. Demek, B noqattan 3 jańa (aldın sanalmaǵan) kesindi ótkiziledi. Usıǵan uqsas, C dan 2, D dan bolsa 1 jańa kesindi ótkiziwge boladı. E noqatınan ótkizilgen 4 kesindiniń barlıǵı aldın esaplanǵan ($EA = AE; EB = BE; EC = CE; ED = DE$). Demek, sheńberde belgilengen 5 noqattı tutastırıwshı jámi kesindiler sanı $4 + 3 + +2 + 1 + 0 = 10$ ta. ▲

5- másele. 3, 4, 5, 6, 8, 9 sanları járdeminde barlıǵı bolıp: 1) sanlar tákírarlanbasa; 2) sanlar tákírarlanıwı múmkin bolsa, neshe úsh tańbalı san dúziwge boladı?

△ 1) Berilgen sanlar 6 aw. Olardıń qálegen birewin 3 tańbalı sannıń birinshi sanı bolıwı múmkin. Demek, 3 tańbalı sannıń birinshi sanı *tańlaw imkanıyatı* 6 boladı. Onda 2 – san qalǵan 5 sannıń qálegen birewi bolıwı múmkin, yaǵnıy 2-sandı tańlaw imkanıyatlarımız 5. Usıǵan uqsas, 3-sandı tańlaw imkanıyatlarımız 4 ew.

Demek, sanlar tákírarlanbasa, jámi úsh tańbalı sanlar sanı $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ boladı eken.

Juwabı: 120 ta. ▲

△ 2) Sanlar tákírarlanatuǵın bolsa, úsh tańbalı sannıń 1-, 2-, 3-tań-balarındaǵı jazılatuǵın sandı tańlaw imkanıyatları 6 dan boladı. Sebebi, berilgen sanlar 6 aw. Bunda jámi 3 tańbalı san $6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3 = 216$ boladı.

Juwabı: 216 ta. ▲

Shınıǵıwlar

492. Anası Nargizaǵa „Korzinka. Uz“ supermarketinen 3 túrli miywe satıp alıp keliwge jiberdi. „Korzinka. Uz“ da 6 sortlı alma, 4 sortlı almurt, 5 sortlı júzim bar. Nargiza miywalerdiń hár túrinen 1 kg nan alıp, neshe túrli kóplik dúze aladı?

493. Neshe 4 tańbalı sanda tek ǵana bir 5 sanı bar?

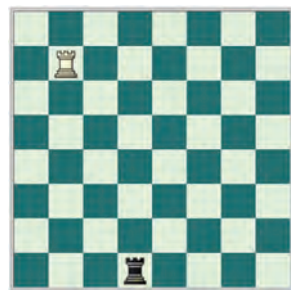
494. Sheńberde: a) 10; b) 100; d) n noqat belgilengen. Hárbir noqat qalǵan hárbir noqat penen tutastırılса, hárbir jaǵdayda jámi neshe kesindi pay-da boladı?

495. 1) 3; 2) 4; 3) 5; 4) 6; 5) 8; 6) 15 doslar óz ara qol berip sálemlesti. Hárbir jaǵdayda qol beriwler sanı neshew bolǵan?

496. 10 dos óz ara shaxmat turnirin ótkermekshi. Bunda bir bala qalǵan hárbir bala menen bir partiya shaxmat oynaydı. Bul turnirde jámi neshe partiya oynaladı?

494–496-máselelerdiń uqsaslıǵı nede ekenin aytiń?

- 497.** 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sanlari járdeminde barlıǵı bolıp: 1) sanlar tákirarlanbasa; 2) sanlar tákirarlanıwı múmkin bolsa, neshe úsh tańbalı san dúziwge boladı?
- 498.** 1, 2, 3, 4, 5 sanlari járdeminde neshe: a) eki tańbalı; b) úsh tańbalı; d) tórt tańbalı sanlar jazıwǵa boladı?
Sanlar: tákirarlanbaytuǵın; tákirarlanatuǵın hallardı bólek-bólek jazıp kórin.
- 499.** Futbol boyınsha jáhán shempionatında altın, gúmis, bronza medalları ushın bolatuǵın oýınlarda 16 komanda qatnasıp atır. Medallar komandalar arasında neshe túrli usıl menen bólistiriliwi múmkin?
- 500.** Bir mámlekette 4 qala bar eken: A , B , C hám D . A qaladan B ǵa 6 jol, B qaladan C ǵa 4 jol alıp baradı eken. A dan D ǵa 2 jol, D dan C ǵa 3 jol menen barıwǵa boladı eken. A qaladan C qalaǵa neshe túrli jol menen barıwǵa boladı?
- 501.** Eger natural sannıń jazılıwında tek ǵana taq sanlar qatnassa, bunday sandı “súykimli” san deymiz. Neshe: 1) 3 tańbalı; 2) 4 tańbalı “súykimli” san bar?
- 502.** Jazıwda hesh bolmaǵanda bir jup san qatnasqan 6 tańbalı sanlar neshew?
- Kórsetpe:* Jazıwda tek ǵana taq sanlar qatnasqan 6 tańbalı sanlar sanı $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^6 = 15\,625$. Jámi 6 tańbalı sanlar bolsa $900\,000$. Másele shártin qanaatlandıratuǵın 6 tańbalı sanlar sanı $900\,000 - 15\,625 = 884\,375$.
- 503.** 4 túrli xattı 4 túrli konvertke neshe túrli usılda salıwǵa boladı?
- 504.** 5 oqıwshıdan 2 ewin “Bilimler bellesiwi”nde qatnasıw ushın tańlap alıw kerek. Bunı neshe túrli usılda orınlawǵa boladı?
- 505.** Doskada 12 atlıq sóz, 8 feyil sóz hám 7 kelbetlik sóz jazılǵan. Gáp dúziw ushın hár bir sóz shaqabınan birewden alıw kerek. Bunı neshe túrli usıl menen ámelge asırıwǵa boladı?
- 506.** Shaxmat taxtasında aq hám qara turanı bir-birin alalmaytuǵın (“jey almaytuǵın”) etip neshe túrli usılda jaylastırıwǵa boladı(43-súwret)?



43-súwret.

- 507.** Shaxmat taxtasına aq hám qara ferzilerdi, olar bir-birin “jey almaytuǵın” etip neshe túrli usılda jaylastırıwǵa boladı?
- 508.** Shaxmat taxtasına aq hám qara shaxlardı, oyın qaǵıydaların buzbaǵan halda, neshe túrli usılda qoyıwǵa boladı?
Úlgi: 3 halattı qarań:
 1) aq shax múyeshte turıptı;
 2) aq shax taxtanıń shetinde (lekin múyeshte emes) turıptı;
 3) aq shax taxtanıń shetinde emes.
- 509.** Mektep asxanasında aq nan, qara nan hám úsh túrli kolbasa bar. Olardan neshe túrli buterbrod tayarlawǵa boladı? Barlıq variantlardı jazıp shıǵıń.
- 510.** Bazı mámleketlerdiń bayraqları túrli reńdegi 3 gorizontal yaki 3 vertikal “jol” lardan ibarat. Aq, jasıl, kók reńli tawarlar járdeminde sonday bayraqlardan neshe túrin tigiwge boladı?
- 511.** Bos orınlargá 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 sanlarınan birin jazıw múmkin bolsa, $\bigcirc + \square + \triangle = 10$ “teńleme” neshe sheshimge iye boladı? Sanlar tákírarlanıwı múmkin. Eki jaǵdaydı qarań (máselen: 1) 1, 1, 8; 1, 8, 1; 8, 1, 1 túrli sheshim; 2) bir sheshim dep qaralatuǵın halatlar.
- 512.** Nadirdiń chemodanı kod penen ashıladı. Bul kod úsh túrli cifrdan ibarat bolıp, hárбір cifr 3 ten úlken emes. Kodta 13 sanı qatnaspaydı (máselen, kodlar dizimi 0, 13, 213 ... kodlar joq). Nadir kodtı umıtıp qalsa, kodtı tabıw ushın ol kóbi menen neshe ret “urınıp” kóriwi kerek boladı?
- 513.** Kóp qabatlı úyde dáliz esigindegi qulıp kod penen ashıladı. Kod 0 hám 1 cifrlarınan dúzilgen 4 tańbalı san (0000 hám 1111 sanlar kod emes dep esaplangan). Qulıp kodın umıtqan bolsańız, esikti eń kóbi menen neshe urınıwda asha alasız?
- Kórsetpe:* Dáslep 1 qatnasqan kodlardı, keyin eki 1 bolǵan kodlardı hám keyinde úsh 1 bolǵan kodlardı sınav kerek.
- 514.** 20 kg gúrishti 1 kg, 2 kg, 5 kg lı taslar járdeminde pálleli tárezide neshe túrli usılda ólshewge boladı?
 $\triangle$ Bul jumıstı tómendegishe islewge boladı:
 1) tek ǵana 1 kg lı tas járdeminde 1 usıl;

- 2) tek gana 2 kg lı tas jırdeminde 1 usıl;
 3) tek gana 5 kg lı tas jırdeminde 1 usıl;
 4) 1 kg hám 2 kg lı tas jırdeminde 9 usıl menen;

1 kg lı tas	18	16	14	12	10	8	6	4	2
2 kg lı tash	1	2	3	4	5	6	7	8	9

- 5) 1 kg hám 5 kg lı tas jırdeminde 3 usıl menen;

1 kg lı tas	15	10	5
5 kg lı tas	1	2	3

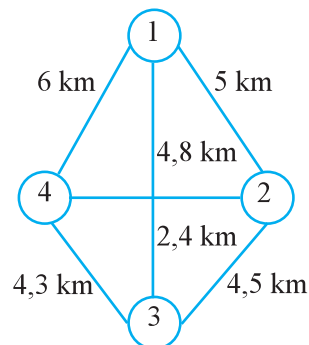
- 6) 2 kg hám 5 kg lı tas jırdeminde 1 usıl menen: 5 2 kg hám 2 5 kg;
 7) 1 kg, 2 kg hám 5 kg lı taslar jırdeminde 13 usıl menen:

	Usıllar sanı												
Taslar, kg	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1 kg	1	3	5	7	9	11	13	8	6	4	2	3	1
2 kg	7	6	5	4	3	2	1	1	2	3	4	1	2
5 kg	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3

Demek, jámı $1 + 1 + 1 + 9 + 3 + 1 + 13 = 29$ usıl.

Juwabı: 29 usıl. ▲

- 515.** Firmağa 4 dúkan tiyisli. Inkassator (dúkandağı pullardı jıynap bankke tapsırıwshı xızmetker) 1- dúkannan baslap barlıq dúkanlardı aylanıp shıǵadı hám jáne 1-dúkanğa qayıp keledi. Múmkin bolǵan marshrutlardan eń qısqaśın tabıń (44-súwret). Kórsetpe: Hár bir marshrut ushın 5 cıfrlı kod dúziń. Kodtıń birinshi hám aqırǵı cıfrı 1 bolsın. Máselen, 12431 marshruttıń uzınlıǵı: $5 + 2,4 + 4,3 + 4,8 = 16,5$ (km).



44-súwret.

IV баpqa tiyisli shunigrlar

- 516.** Tómente tańlanba berilgen:
18, 19, 17, 18, 14, 13, 17, 19, 18, 18, 20, 22, 19, 15, 24,
14, 18, 15, 13, 17, 20, 22, 21, 19, 18, 16, 13, 13, 15, 14.
Tańlanbanıń: 1) jiyilikler kestesiń dúziń; 2) ortasha mánisin tabıń; 3)
modasıń; 4) medianasıń; 5) keńligin tabıń; 6) jiyilikler poligonıń jasań.
- 517.** Tańlanbanıń: 1) variacion qatarın dúziń; 2) ortasha mánisin; 3) modasıń;
4) medianasıń; 5) keńligin tabıń:
-5, -4, -3, -2, 0, 3, 6, 6, 5, 5, 5, 7, 8, 8, 6, 7.
- 518.** Kestedege maǵlıwmatlarǵa qarap tańlanbanıń: 1) ortasha mánisin; 2)
modasıń; 3) medianasıń; 4) keńligin tabıń; 5) jiyilikler poligonın sızıń; 6)
salıstırmalı jiyilikler kestesiń dúziń hám oǵan sáykes diagramma jasań:

Baqlaw Nátiyjeleri	7	8	9	10	12	14	15
Jiyilik	6	7	8	9	10	6	4

- 519.** 100 metrli aralıqqa júgiriwde 8-klastıń 20 oqıwshısı mınaday nátiyjelerdi
kórsetti (sekundlarda):

14,3	16,1	14,7	16,9	24,1	22,4	19,8	14,2	17,4	14,5
20,8	19,9	15,4	18,4	20,2	18,3	20,1	18,4	18,3	16,2

Tańlanbanıń: 1) variacion qatarın; 2) jiyilikler kestesiń dúziń; 3) ortasha
mánisin; 4) modasıń; 5) medianasıń; 6) keńligin esaplań; 7) jiyilikler
poligonın jasań.

- 520.** 8-klastaǵı bir oqıwshınıń “Algebra” páninen eki sherek dawamında
alǵan bahaları tómendegishe eken:
4, 3, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 4, 4, 3, 2, 3, 4.
Tańlanbanıń: 1) ortasha mánisin; 2) modasıń; 3) medianasıń tabıń;
4) jiyilikler kestesiń dúziń; 6) jiyilikler poligonın sızıń.

ÓZIÑIZDI TEKSERIP KÓRIÑ!

1. Futbol chempionatında 18 komanda qatnasıp atır. Eger hár bir komanda basqa komanda menen óz maydanında hám qarsılas komanda maydanında oynap atırğan bolsa, chempionatta jámi qansha oyın oynaladı?
2. 8-klasta 12 pánnen sabaq ótıledi. Dúyshembi kúni keste boyınsha 5 sabaq bolıp, hár bir sabaqta hár túrli sabaq ótıledi. Dúyshembi kúngi kesteni neshe usılda dúziwge boladı?
3. 5 stolğa 3 oqıwshını neshe usılda otırğızıwğa boladı?
4. Matematikaga tiyisli 5 túrli kitaptı shkaftıń 5 tekshesine neshe túrli usılda qoyıwğa boladı?
5. Tańlanbanıń: 1) ortasha mınisin; 2) modasın; 3) medianasın; keńligin tabıń; 5) jiyilikler kestesin dúziń; 6) jiyilikler poligonın sızıń:
-3, -5, -3, -6, 1, 4, 7, 4, 9, 4.

6. Tańlanbanıń jiyilikler kestesini berilgen:

Baqlaw nátiyjeleri	2	1	5	4	0	-2	3	-1
Jiyilik	3	2	1	5	1	2	4	2

- Tańlanbanıń: 1) ortasha mánisin; 2) modasın; 3) medianasın tabıń; 4) jiyilikler poligonın sızıń; 5) salıstırmalı kesteni dúziń.

521. Eger: 1) cifrlar tákiraralanbasa; 2) cifrlar tákirarlanıw múmkin bolsa, 0, 1, 2, 3, 4, 5 sanlarınan jámi neshe 4 tańbalı san dúziwge boladı?

522. 0, 3, 4, 5, 6, 7 sanlarınan jámi neshe 4 tańbalı taq san dúziwge boladı?

523. Ádette, úshmúyeshliktiń ushları latin álipbesiniń úlken háripleri menen belgilenedi. Latin álipbesinde 26 hárip bar. Úshmúyeshliktiń ushların neshe túrli usılda belgilewge boladı?

524. 8 stulǵa 3 oqırwshını neshe usılda otırǵızıwǵa boladı?

525. Klienttiń úy telefonı 7 cıfrlı bolıp, 218 den baslanadı. Klient aǵza bolǵan bul telefon stansiyası neshe klientke xızmet kórsete aladı?

526. Neshe usılda 5 qılıshpazdan 2 ewin jarısta qatnastırıp ushın tańlap alıp kerek?

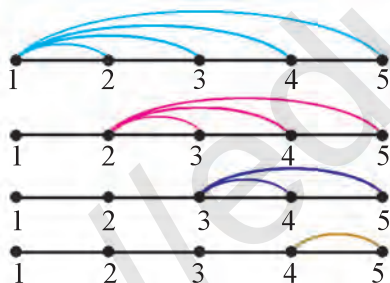
Aliniń sheshimi: 5 qılıshpazdan birewin tańlaw imkaniyatı 5 ew. 4 qılıshpaz qaladı. Olardan birewin 4 usılda tańlawǵa boladı. Demek, $5 \cdot 4 = 20$.

Juwabı: $5 \cdot 4 = 20$ túrli usıl bar.

Nazimanıń sheshimi: 5 qılıshpazdı “nomerlep” shıǵamız hám olardan eki adamlıq topar dúzemiz: 12; 13; 14; 15; 23; 24; 25; 34; 45.

Juwabı: 10 túrli usılda tańlawǵa boladı.

Madinanıń sheshimi:



4 juplıq: 12; 13; 14; 15;

3 juplıq: 23; 24; 25;

2 juplıq: 34; 35;

1 juplıq: 45.

Jámi $4 + 3 + 2 + 1 = 10$.

Juwabı: 10 túrli usılda.

Kimniń sheshimi durıs? Kimniń sheshimi sizge unadı? Nesi menen unadı?

527. Siziń qatarıńız bolǵan bir bala: “Házirshe men bir háwesker balaman, úlkeysem úlken shayır bolaman”, dep jaqsı niyet etip qosıq jazıp júredi eken. Qosıqlarınıń birine “Lala” dep at qoyıptı. Bul qosıqtıń 1-qatarı “Náwbáhárde dalada ashıldı lala” eken. Qalǵan qatarlar 1-qatardaǵı sózlerdiń ornın almasıw nátiyjesinde payda bolǵan. Bul “qosıq”ta eń kóbi menen neshe qatar bar?

- 528.** Tuwrı sızıqta: 1) 4 ew; 2) 6 noqat belgilenedi. Hárbir jaǵdayda neshe kesindi payda boladı?
- 529.** “Rayxan” kafesiniń taǵamnamasında 3 túrli somsa, 4 túrli 1-taǵam, 5 túrli 2-taǵam bar eken. 3 túrdegi taǵamǵa buyırtpanı neshe usılda beriwge boladı?
- 530.** 2 alma, 2 almurt, 2 shabdal bar. 3 dos miywelerdi hár biri 2 túrli miywe alatúǵın etip bólip almaqshı. Bunı jámi neshe usılda orınlasa boladı?



IV bapqa tiyisli sınaq shınıǵıwları – testler

- 1.** Tańlanbanıń ortasha mánisin tabıń: $-3, -2, -1, 0, 1, 4, 5, 7, 8, 6$.
- A) 2,5; B) 11; C) $2\frac{7}{9}$; D) anıqlawǵa bolmaydı.
- 2.** Tańlanbanıń medianasın tabıń: $-1, 0, 2, 6, 6, 5, 10$.
- A) 6; B) 5; C) 5,5; D) 4,5.
- 3.** Tańlanbanıń medianasın tabıń: $10, 7, 6, 5, 4, 9$.
- A) B) 7; C) 6,5; D) 6,25.
- 4.** Tańlanbanıń keńligin tabıń: $120, 100, 140, 170, 95$.
- A) 120; B) 312,5; C) 70; D) 75.
- 5.** Tańlanbanıń modasın tabıń: $-1, 0, 2, 2, 4, 5, 5, 7$.
- A) 2 hám 5; B) 2 C) 5; D) 3.
- 6.** Kestedegi maǵlıwmatlarǵa qarap tańlanbanıń ortasha mánisin tabıń:

Baqlaw nátıyjeleri	5	6	11	7	13	12
Jiyilik	3	4	3	5	3	2

- A) 9,5; B) 8,5; C) 10; D) 7.

7. 5 ke bólinetuǵın 6 tańbalı sanlar neshew?
 A) $18 \cdot 10^4$; B) $9 \cdot 10^4$; C) $5 \cdot 6$; D) $6 \cdot 5^4$.
8. Cifrlar tákirarlanıwı múmkin bolsa, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 sanlarınan neshe 5 tańbalı san dúziwge boladı?
 A) 8^5 ; B) 5^8 ; C) $8^2 \cdot 5^3$; D) $5^4 \cdot 8$.
9. Eki parallel tuwrı sızıq berilgen bolıp, olardıń birinde 4, ekinshisinde 3 noqat belgilengen. Ushları usı noqatlarda bolǵan neshe úshmúyeshlik bar?
 A) 30; B) 33; C) 40; D) 32.
10. 3 oqıwshını 6 stulǵa neshe túrli usılda otırǵızıwǵa boladı?
 A) 120; B) 130; C) 100; D) 480.
11. Futbol komandasında 11 adam arasınan komanda sárdarı hám onıń járdemshisin neshe túrli usılda tańlap alıwǵa boladı?
 A) 110; B) 55; C) 22; D) 121.
12. Boǵıston awılınan Toshkentke 2 jol menen, Toshkentten Úrgenishke 2 jol menen barıwǵa boladı. Boǵıstonnan Úrgenishke barıw jollarınıń sanı neshew?
 A) 8; B) 10; C) 6; D) 12.
13. Bir oqıwshıda qızıqlı matematikaǵa tiyisli 7 kitap, ekinshi oqıwshıda 9 ádebiy kitap bar. Olar neshe túrli usıl menen birewiniń bir kitabın ekinshisiniń bir kitabına almasırwı múmkin?
 A) 63; B) 49; C) 81; D) 126.
14. Atabektiń tuwılǵan kúnine onı qutlıqlaw ushın 9 dostı keldi. Atabek olardıń barlıǵı menen, dosları da óz ara qol berisip sálemlesti. Jámi qol berip sálemlesiwler sanı neshew?
 A) 45; B) 90; C) 10; D) 50.



Ámeliy-usnılǵan hám pánlerara baylanıslı máseleler

- 531.** Áskeriy xızmetke shaqırılıp atırǵan jigitlerden 50 iniń boyın santimetrlerde ólshedi. Ólshew nátiyjeleri kestede berilgen:

159	156	160	154	155	154	158	163	158	180
156	157	155	158	159	158	159	154	167	158
158	156	175	156	164	162	168	157	159	162
164	169	158	167	172	166	175	177	183	182
172	170	172	166	171	174	162	167	169	173

1) Maǵlıwmatlardı klaslarǵa bólin(gruppalań): 154–158, 159–163, 164–168, 169–173, 174–178, 179–183.

Hár bir klasqa maǵlıwmatlardan neshevi tiyisli ekenin anıqlań;

2) Baǵanalı diagramma jasań;

3) Jiyilikler poligonın jasań.

- 532.** Táwekel túrde tańlangan 30 tıp ǵoza ósimliginde ashılǵan ǵumshalar sanı kestede berilgen:

7	4	7	6	4	4	4	4	3	5	7	4	3	3	4
3	6	5	4	7	6	4	4	3	4	3	4	4	3	5

Usı maǵlıwmatlar boyınsha:

1) jiyilikler jadvalini tuzing;

2) jiyilikler poligonın jasań.

- 533.** Ózbek jazıwshısının ózbek tilindegi bir shıǵarmasın tańlań. (Máselen: X.Toxtabayevtıń “Sarı dáwdi minip”, A.Qadiriydıń “Ótken kúnler” shıǵarmaları.) táwekel dusmalıy túrde tańlangan, máselen, 2 betindegi háriplerdi sanań. Ózbek álipbesindegi hár bir hárip siz tańlagan betlerinde neshe retten ushıraydı? Háriplerdiń: 1) jiyilikleri boyınsha; 2) salıstırmalı jiyilikleri boyınsha bólistiriliwin dúziń; 3) jiyilikler poligonın jasań.

- 534.** 8-klass oqirwshıları arasında Alisher Nawayı ğázellerin yaddan kórkemlep aytıw boyınsha jarıs bolıp ótti. Onda 10 qız bala hám 9 ul bala qatnastı. x – qız balalar yadlağan ğázeller sanı, y – ul balalar yadlağan ğázeller sanı bolsın. x hám y sanlarınń jiyilikler boyınsha bólistiriliwi tómendegi kestelerde berilgen:

x – ğázeller sanı	4	5	6	8	12
n – jiyiligi	3	2	3	1	1

y – ğázeller sanı	4	5	6	8	9
n – jiyiligi	2	4	1	1	1

Kestedegi x hám y shamalarınń:

1) modaların; 2) medianaların tabırın; 3) kestege sáykes jiyilikler poligonın jasań.

Δ x hám y shamalarınń keste kórinisinde berilgen bólistiliwin variantlardıń tómendegi qatarı kórinisinde jazıwǵa da boladı:

$$x: 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 8, 12 \quad (1)$$

$$y: 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 8, 9 \quad (2)$$

(1) tańlanbada 2 moda bar: $M_{0_1} = 4$ hám $M_{0_2} = 6$. (2) tańlanbada moda birew: $M_0 = 5$.

(1) qatarda 10 (jup sandaǵı) aǵza bar. Bul jaǵdayda mediana orayındaǵı eki aǵzanıń ortasha arifmetigine teń:

$$M_e = \frac{5+6}{2} = \frac{11}{2} = 5,5$$

(2) qatarda 9 (taq sandaǵı) aǵza bar. Bul jaǵdayda mediananıń mánisi oraydaǵı aǵzaǵa teń: $M_e = 5$.

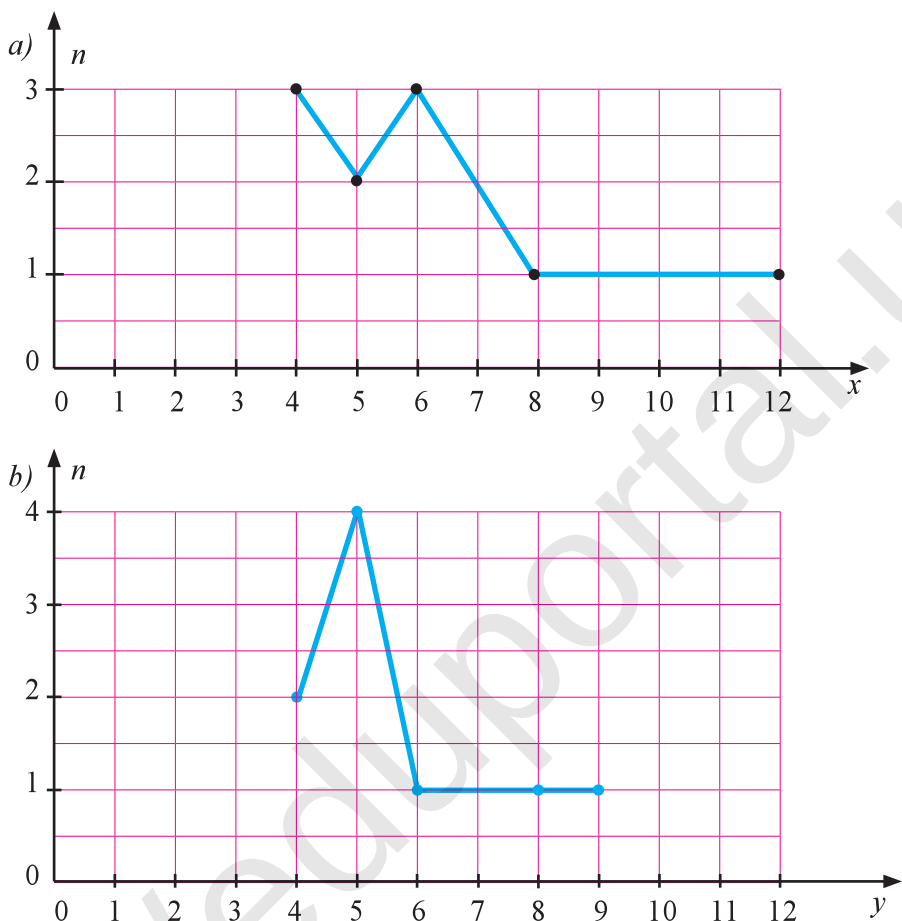
Mediana variacion qatardı teńdey ekige bóledi: medianadan shep tárepte de, oń tárepte de variacion qatardıń elementleri sanı birdey, óz ara teń boladı..

Juwbabı: 1) (1) qatar ushın $M_{0_1} = 4$; $M_{0_2} = 6$; (2) qatar ushın $M_0 = 5$;

2) (1) qatar ushın $M_e = 5,5$; (2) qatar ushın $M_e = 5$;

3) x hám y shamalarınń jiyilikler poligoni

45- a , b súwretlerde berilgen. ▲



45-súwret.

- 535.** Hár bir 8-klass ushın, máselen, I hám II sherekler nátiyjelerge sáykes: 1) jiyilikler kesdesin dúziń; 2) jiyilikler poligonın jasań; 3) poligonların salıstırıń hám juwmaq shıǵarıń. Maǵlıwmatlardı klass jurnallarınan oqıtıwshılarınıız járdeminde alıń. Máseleni qanday sheshiwinińizdi bayan etiń.
- 536.** Mektebińiz: 1) 5-; 2) 8-; 3) 11-klasslar oqıwshılarınıń hár bir klasları ushın: a) balalardıń ortasha uzınlıqların; b) ortasha massaların tabıń. Maǵlıwmatlardı mektep miyirbiykesinen alasız. Sáykes jiyilikler poligonın jasań.

- 537.** Baqlawınız nátiyjeleri tiykarında mektebınızde 1 kúnde ortasha neshe gramm por ketetuğının anıqlań. 1 kúnda, 1 ayda mámleketlik mekteplerde neshe tonna por jumsalıwın shamalań. Respublikamızda joqarı oqıw orınları, liceyler hám mektepler sanı birgelikte (esaplawınız ańsat bolıwı ushın) 10000 dep alıń.
- 538.** 3 gektar jerge qawın egilgen. Olar jetilisip qaldı. 1 gektar jerden ortasha neshe tonna ónim alıwın bahalań. Bul jumıstı qalay ámelge asıratuğınızdı qádem be qádem bayan etiń.
- 539.** Avtomashinalardı mámleketlik dizimnen ótkiziwde 3 cıfr, 3 háripten hám qala yaki rayon ushın belgilengen kodtan paydalanıladı. Máselen, avtomashına nomerindegi 01 kod – mashına Tashkentten dizimge ótkenin bildiredi. Ne dep oylaysız, Tashkentte eń kóbi menen neshe avtomashına dizimnen ótiwi múmkin?
- △ Nomerlewde 24 hárip qatnasadı, dep alayıq. Nomer 6 “orın” di iyeleydi. 1-“orın”dı 10 cıfrdan qálegen birewi bolıwı múmkin. 2-“orın”dı 10 cıfrdan birewi iyeleydi. 3-“orın”dı 9 cıfrdan qálegen birewi boladı. (3 birdey cıfrlı nomer berilmeydi, bunday nomerler aukcionda satıladı.) Nomerdegi 1-hárip te, 2-hárip te, 3-hárip te 24 háriptiń qálegen birewi bolıwı múmkin. Demek, Tashkentte dizimnen ótiwi múmkin bolğan jámi avtomashinalar sanı $10 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 24 = 24^3 \cdot 900 = 12\,441\,600$. Bul esaplawda háriplerdiń nomerdegi 3 tańbalı sannan “bir hárip – 3 tańbalı san – 2 hárip” yaki “3 tańbalı san – 3 hárip” kórinisinde bóliwdiń ayırmashılıǵı joq.
- J u w a b ı :** 12 441 600. ▲
- 540.** 2, 4, 7, 9 cıfrlarınan olardı tákirlamastan neshe 4 tańbalı san dúziw múmkin? Olardıń neshewi: 2 ge, 4 ke, 11 ge bólinedi?
- 541.** Tuwılğan kúnińizge mirát etilgen 4 dostıńızdı 4 stulǵa neshe túrli usılda otırǵıza alasız?
- 542.** Tarelkada 8 ǵoza bar edi. Anvar qálegen 3 ewin almaqshı boldı. Buni ol neshe túrli usılda ámelge asırıwı múmkin?
- 543.** Zalda 2 bos orın bar. 3 adamnan 2 ekewin usı orınǵa neshe túrli usılda otırǵızılǵa boladı?

V BAP

8-KLASS ALGEBRA KURSÍN TÁKIRARLAW USHÍN SHÍNÍGÍWLAR

544. Salıstırın:

$$1) \frac{27}{32} \cdot \frac{8}{162} \cdot \frac{72}{69};$$

$$2) \frac{38}{147} \cdot \frac{91}{152} \cdot \frac{65}{264};$$

$$3) \left(\frac{5}{8} + \frac{7}{12} \right) \cdot \left(3\frac{23}{58} - 2\frac{9}{58} \right);$$

$$4) \left(\frac{3}{4} + \frac{2}{9} \right) \cdot \left(2\frac{23}{56} - 3\frac{15}{56} \right);$$

$$5) 34,17:1,7 + (2\frac{3}{4} + 0,15): \frac{4}{5} - 23\frac{3}{8};$$

$$6) 5,86 - 3\frac{5}{6} \cdot \frac{15}{23} + \frac{15}{28} : 4\frac{2}{7};$$

$$7) \frac{12\frac{4}{5} \cdot 3\frac{3}{4} - 4\frac{4}{11} \cdot 4\frac{1}{8}}{11\frac{2}{3} \cdot 2\frac{4}{7}};$$

$$8) \frac{5\frac{1}{7} \cdot 5\frac{1}{4} + 5\frac{5}{8} \cdot 3\frac{1}{5}}{10\frac{5}{13} : 1\frac{1}{26}}.$$

545. Eki sannan biri a ga teń, ekinshisi onnan 7 ge kóp. Usı sanlar kóbeymesiniń eki eselengenin tabıń. Bul kóbeymeniń mánisin $a = \frac{1}{2}$; 2 bolǵanda esaplań.

546. Eki sannıń qosındısı 30 ga teń. Sanlardan biri a . Usı sanlardıń eki eselengen kóbeymesin jazıń. Bul kóbeymeniń mánisin $a = -2$ bolǵanda esaplań.

547. a jüzlik, b onlıq hám c birliklerden dúzilgen natural sanda neshe birlik barlıǵın kórsetiwshi formula dúziń. Tap usı sanlar járdeminde, lekin kerisinshe tártipte jazılǵan sanda neshe birlik bar?

548. a kilogramm hám c gramm neshe grammdı quraydı? Grammlar sanın x háribi menen belgilep, juwaptı formula menen jazıń.

Amellerdi orinlañ (549–552):

549. 1) $\left(\frac{c-d}{c^2+dc}-\frac{c}{d^2+cd}\right):\left(\frac{d^2}{c^3-cd^2}+\frac{1}{c+d}\right);$

2) $\left(\frac{2n}{k+2n}-\frac{4n^2}{k^2+4nk+4n^2}\right):\left(\frac{2n}{k^2-4n^2}+\frac{1}{2n-k}\right);$

3) $\left(\frac{b^2}{b+x}-\frac{b^3}{b^2+x^2+2bx}\right):\left(\frac{b}{b+x}-\frac{b^2}{b^2-x^2}\right);$

4) $\left(\frac{2q}{2q+m}-\frac{4q^2}{4q^2+4mq+m^2}\right):\left(\frac{2q}{4q^2-m^2}+\frac{1}{m-2q}\right).$

550. 1) $1+a-\frac{a-1}{a}+\frac{a-1}{2a}-\frac{3a}{2};$

2) $\frac{m+1}{m^2+m+1}-\frac{2}{1-m}+\frac{3m^2+2m+4}{1-m^3};$

3) $\frac{m+n}{3}-m+2n;$

4) $m+n-\frac{2m-n}{5}-\frac{m+n}{2}.$

551. 1) $\frac{a^3+2a^2}{a^2-1}\cdot\frac{(a+1)^3(a-1)}{a^2(a+2)};$ 2) $\frac{(a^2+ab)^2}{a^2-b^2}:\frac{(a+b)^2}{(ab-b^2)^2}.$

552. 1) $1,5\cdot\left(2b-\frac{3b}{7}\right)-1\frac{5}{7}\cdot(3b-5)+\frac{9b^2-16}{4-3b};$

2) $\frac{x+3a}{x+a}-\frac{x}{x-a}+\frac{2a^2-ax+x^2}{a^2x^2}:\frac{x^2-a^2}{a^2x^2}.$

553. Eger $x > \frac{1}{2}$ hám $y > 4$ bolsa, onda

1) $4x+3y>14;$ 2) $2xy-3>1;$ 3) $x^2y>1;$ 4) $x^3+y^2>16$

ekenin esaplañ

- 554.** (Awizeki.) Teńsizlikti qanaatlandırıwshı eń úlken pútin sandı tabıń:
- 1) $n \leq -7$; 2) $n < -3,6$; 3) $n \leq 4,8$; 4) $n \leq -5,6$.

- 555.** (Awizeki.) Teńsizlikti qanaatlandırıwshı eń kishi pútin sandı tabıń:
- 1) $n > -12$; 2) $n \geq -5,2$; 3) $n \geq 8,1$; 4) $n \geq -8,1$.

- 556.** Teńsizlikti sheshiń:

1) $x + 4 > 3 - 2x$; 2) $5(y+2) \geq 8 - (2-3y)$;
 3) $2(0,4+x) - 2,8 \geq 2,3 + 3x$; 4) $7(x + 5) + 10 > 17$;
 5) $\frac{3-x}{2} + \frac{x}{4} > 7$; 6) $\frac{x}{6} - \frac{2-x}{3} \leq 5$.

- 557.** Eger

1) $0 \leq x \leq 7,2$; 2) $-5\frac{1}{3} \leq x \leq 0$; 3) $4 < \frac{1}{3}x < 5$;
 4) $11 < 3x < 13$; 5) $-3,1 < x \leq 4$; 6) $12 < 5x < 21$

bolsa, x qanday pútin mánislerdi qabıl ete aladı?

- 558.** Teńsizlikler sistemasın sheshiń:

1) $\begin{cases} 5x - 2 \geq 6x - 1, \\ 4 - 3x > 2x - 6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7(x+1) - 2x > 9 - 4x, \\ 3(5 - 2x) - 1 \geq 4 - 5x; \end{cases}$
 3) $\begin{cases} 12x - 3(x+2) \geq 7x - 5, \\ 13x + 6 \leq (x-5) \cdot 2 + 3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{4x-5}{7} < \frac{3x-8}{4}, \\ \frac{6-x}{5} - 1 < \frac{14x-3}{2}. \end{cases}$

- 559.** Teńsizlikler sistemasınıń sheshimleri bolǵan pútin sanlardı tabıń:

1) $\begin{cases} \frac{2x-5}{4} - 2 \leq \frac{3-x}{4}, \\ \frac{5x+1}{5} > \frac{4-x}{4}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{10x-1}{3} - \frac{2-5x}{4} < \frac{5-3x}{6}, \\ \frac{2x+1}{2} \geq \frac{3+7x}{4} - \frac{5+4x}{5}. \end{cases}$

- 560.** Teńlemeńi sheshiń:

1) $|x-2| = 3,4$; 2) $|3-x| = 5,1$; 3) $|2x+1| = 5$;
 4) $|1-2x| = 7$; 5) $|3x+2| = 5$; 6) $|7x-3| = 3$.

561. Теңлемени sheshiń:

- 1) $|x-2| \leq 5,4$; 2) $|x-2| \geq 5,4$; 3) $|2-x| < 5,4$;
 4) $|3x+2| \geq 5$; 5) $|2x+3| < 5$; 6) $|3x-2,8| \geq 3$.

562. Korennen shıǵarıń:

- 1) $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}}$; 2) $\sqrt{5\frac{4}{9}}$; 3) $\sqrt[3]{\frac{8b^6}{343a^9}}, a \neq 0$; 4) $\sqrt[4]{\frac{16x^8}{81y^4}}, y > 0$.

563. Ápiwayılastırıń:

- 1) $(3\sqrt{20} + 7\sqrt{15} - \sqrt{5}) : \sqrt{5}$; 2) $(\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{14} + \sqrt[3]{56}) : \sqrt[3]{7}$;
 3) $2\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{6} - 3\sqrt{\frac{2}{3}}$; 4) $7\sqrt{1\frac{3}{4}} - \sqrt{7} + 0,5\sqrt{343}$.

564. Ańlatpalardıń mánislerin salıstırıń:

- 1) $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{-1/3}$ va $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{-1/2}$; 2) $(2\sqrt{0,5})^{0,3}$ va $(2\sqrt{0,5})^{0,37}$.

565. Ańlatpanı ápiwayılastırıń:

- 1) $\frac{\sqrt[6]{a^3\sqrt{a^{-1}}}}{a^{-\frac{2}{9}}}$; 2) $\frac{\sqrt[4]{x^3\sqrt[3]{x}}}{x^{\frac{1}{3}}}$; 3) $(16a^{-4})^{-\frac{3}{4}}$; 4) $(27b^{-6})^{\frac{2}{3}}$.

566. Kóbeytiwshini korennen shıǵarıń:

- 1) $\sqrt{9a^2b}$, bunda $a < 0$; 2) $\sqrt{25a^2b^3}$, bunda $a > 0, b > 0$;
 3) $\sqrt{8a^3b^5}$, bunda $a < 0, b < 0$; 4) $\sqrt{12a^3b^3}$, bunda $a < 0, b < 0$.

567. Kóbeytiwshini korenge alıń:

- 1) $x\sqrt{5}$, bunda $x \geq 0$; 2) $x\sqrt{3}$, bunda $x < 0$;
 3) $-a\sqrt{3}$, bunda $a \geq 0$; 4) $-a\sqrt{5}$, bunda $a < 0$.

568. Esaplań:

$$1) \sqrt[3]{1000} \cdot (0,0001)^{0,25} + (0,027)^{\frac{1}{3}} \cdot 7,1^0 - \left(\frac{10}{13}\right)^{-1};$$

$$2) \left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}} : \frac{1}{\sqrt{11\frac{1}{9}}} + (6,25)^{\frac{1}{2}} : (-4)^{-1};$$

$$3) \left(1\frac{61}{64}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot (0,008)^{\frac{1}{3}} : (-2)^{-2}.$$

569. Anlatpanıń mánisin tabıń:

$$1) \left(\frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} - \frac{a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}}{a - b} \right) \cdot \frac{a - 2a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} + b}{a}, \text{ bunda } a=3, b=12;$$

$$2) \frac{m + 2\sqrt{mn} + n}{n} \cdot \frac{\sqrt{mn} + n}{m - n} - \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m} + \sqrt{n}}, \text{ bunda } m=5, n=20.$$

570. Teńlemenı sheshiń:

$$x^{\frac{1}{2}} = 2; \quad 2) x^{-\frac{1}{2}} = 3; \quad 3) x^{-3} = 8; \quad 4) x^{\frac{5}{2}} = 0; \quad 5) x^{-\frac{1}{3}} = 27.$$

571. $y = -\frac{25}{x}$ funksiyanıń grafigine:

$$1) A(\sqrt{5}; -5\sqrt{5}); \quad 2) B(-5\sqrt{2}; 5\sqrt{2}); \quad 3) C(0,1; 250)$$

noqatı tiyisli bolıw yaqı bolmawın anıqlań.

572. Funkciyanıń grafigin jasań:

$$1) y = \frac{4}{x}; \quad 2) y = -\frac{6}{x}.$$

Funkciyanıń qaysı aralıqlarında ósiwi, kemeyiwın grafik boyınsha anıqlań; funksiyanıń jup yaqı taqlıgın anıqlań.

573. Аñлатпанı ápiwayılastırın:

$$1) \frac{\sqrt{ab} \sqrt[4]{a}}{(a+2)\sqrt[4]{a^{-1}b^2}} - \frac{a^2+4}{a^2-4};$$

$$2) \left(\frac{\sqrt{a}}{b+\sqrt{ab}} - \frac{\sqrt{a}}{b-\sqrt{ab}} \right) \cdot \frac{b-a}{2\sqrt{ab}};$$

$$3) \left(\frac{a-b}{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}} - \frac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}+a^{\frac{1}{4}}} \right) \cdot \frac{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}}{(a^{-1}b)^{\frac{1}{2}}};$$

$$4) \left(\frac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{a-b} - \frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}} \right) \cdot \frac{a-b}{\sqrt{ab}}.$$

Аñлатпанı ápiwayılastırın (**574–575**):

574. 1) $\sqrt{5+\sqrt{21}}$; 2) $\sqrt{4+\sqrt{7}}$; 3) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$; 4) $\sqrt{8-2\sqrt{15}}$.

575. 1) $\frac{1}{\sqrt{5}} \left[4(a+1) + (\sqrt[3]{a\sqrt{a}} - 1)^2 - \left(\frac{\sqrt[6]{ab^2} + \sqrt{a}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} + \sqrt[3]{a} \right)^3 \right]^{\frac{1}{2}}$, bunda $0 < a \leq 1$;

$$2) \frac{a^{-1}b^{-2} - a^{-2}b^{-1}}{a^{-\frac{5}{3}}b^{-2} - b^{-\frac{5}{3}}a^{-2}} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}};$$

$$3) \frac{a^{-2} \cdot b^{-3} - a^{-1} \cdot b^{-2}}{a^{-\frac{9}{2}} \cdot b^{-\frac{11}{2}} - a^{-\frac{11}{2}} \cdot b^{-\frac{9}{2}}}.$$

Теñлемени sheshiñ (**576–577**):

576. 1) $x^2=7$; 2) $x^2=11$; 3) $x^2+6x=0$;
4) $x^2+5x=0$; 5) $x^2=8x$; 6) $x^2=12x$.

577. 1) $1,5x-4x^2=6,3x-x^2$; 2) $11y-15=(y+5)(y-3)$;
3) $3x(x+2)=2x(x-2)$; 4) $\frac{1}{4}(3x^2+1) - \frac{40x+3}{6} = \frac{x-3}{12}$;
5) $\frac{y^2-5}{4} - \frac{15-y^2}{5} = \frac{y^2-4}{3}$; 6) $\frac{2x^2-1}{4} = \frac{1+1,5x^2}{5}$.

578. Eger

- 1) $(y-3)^2 > (3+y)(y-3)$ bolsa, onda $y < 3$ bolıwın;
2) $(3a+b)^2 < (3a-b)^2$ bolsa, onda $ab < 0$ bolıwın dálilleñ.

579. Eger $x < \frac{a+b}{2}$, $y < \frac{a+c}{2}$, $z < \frac{b+c}{2}$ bolsa, onda $x+y+z < a+b+c$ bolıwın dálilleñ.

580. Tuwrı múyeshli parallepipedtiń biyikligi 15 cm den artıq, eni 2 cm den, boyı bolsa 0,3 dan artıq. Onıń kólemi 0,9 dm³ dan úlken ekenin dálilleń.

581. y tın qálegen mánisinde

1) $(y-3)(y-1)+5$; 2) $(y-4)(y-6)+3$
ańlatpa oń bolıwın dálilleń.

582. k nıń $4y^2-3y+k=0$ teńleme haqıyqıy korenlerge iye bolmağan mánislerin tabıń.

583. k nıń qanday mánislerinde -2 sanı $(k-2)x^2-7x-2k^2=0$ teńlemenıń koreni boladı?

584. Teńlemenı sheshiń:

1) $3x^2+8x+5=0$;

2) $5x^2+4x-12=0$;

3) $\frac{6}{4x^2-1} - \frac{x}{2x-1} = \frac{5}{2x+1}$;

4) $\frac{5}{x-1} + \frac{3x-3}{2x+2} = \frac{2x^2+8}{x^2-1}$;

5) $\frac{30}{x^2-1} - \frac{13}{x^2+x+1} = \frac{7+18x}{x^3-1}$;

6) $\frac{2}{x^2-x+1} = \frac{1}{x+1} + \frac{2x-1}{x^3+1}$.

585. Teńlemenı sheshiń:

1) $(x+2)^2 < (x-3)^2 - 8(x-5)$;

2) $\frac{2+x}{9} - x \leq \frac{2x-5}{3} - (4-x)$;

3) $\frac{(x-3)(x+2)}{4} - \frac{(x-7)}{3} > \frac{(x-6)^2}{4} + x$;

4) $6x + \frac{(3+x)^2}{2} > \frac{8-2x}{5} + \frac{(x+3)(x+7)}{2}$.

586. Juwıqlasıw qáteligin tabıń:

1) 0,2781 nıń 0,278 menen;

2) $-2,154$ nıń $-2,15$ menen;

3) $-\frac{7}{18}$ nıń $-\frac{1}{3}$ menen;

4) $\frac{3}{11}$ nıń 0,272 menen.

587. 3,5 sanı 3,5478 sanınıń 0,05 ge shekem anıqlıq penen alıńań juwıq mánisi ekenin dálilleń.

588. $\frac{7}{9}$ sanının 0,777 sanı menen juwıqlasıwınıń salıstırmalı qáteligin tabıń.

589. Dusmalıy tańlangan 60 tıp ğoza ósimliginiń tiykarǵı payasındaǵı buwınlar sanı tómendegi kesteде berilgen:

10	11	10	10	10	9	9	11	9	9
11	11	11	7	9	10	10	10	10	10
10	10	11	11	11	10	10	11	10	10
9	10	9	9	9	9	10	9	10	10
10	10	10	10	11	9	11	9	9	12
9	10	8	11	10	10	9	10	10	11

Tańlanbanıń: 1) jiyilikler kestesin dúziń; 2) ortasha mánisin; 3) modasın; 4) medianasın; 5) keńligin esaplań; 6) jiyilikler poligonın jasań.

590. Neshe 4 tańbalı sanda da tek bir 0 sanı bar?

591. 0, 1, 2, 3, 5, 8 cifrlarınan, olardı tákirarlamastan jámi neshe 3 tańbalı san dúziwge boladı?

592. 6 qonaqtı 6 stulǵa neshe túrli usılda otırǵızıwǵa boladı?

593. Ádebiyat kitabınızdadıǵı bir tekstti tańlań. Onıń eki betindegi barlıq háriplerdi sanań. Únli háriplerdiń tekste ushıraw jiyiligin anıqlań. Jiyilikler kestesin dúziń. Jiyilikler poligonın jasań. Juwmaq shıǵarınıń hám onı dápterinińge jazıp qoyıń.

SHÍNÍGÍWLARĠA JUWAPLAR

I bap

1. 2) 0; 4) 5. 2. 2) -2 ; 4) 0. 3. $(7m)t$; 168 t. 4. 1) $(60m)$ min; 2) $\frac{p}{60}$ min;
 3) $\left(60m + l + \frac{p}{60}\right)$ min. 5. $3(x - y)$; 2) 4,5; 4) 2,5. 6. $(x + y)(x - y)$; 2) $-\frac{11}{64}$;
 4) 0,104. 7. 2) $-1\frac{2}{3}$. 8. 2) 4. 9. 1, 3, 15, 21. 10. 2) $(m - 1)m$; 4) $(2p + 1) \times$
 $\times (2p + 3)(2p + 5)$. 12. $(p - q)t$; 1) 5t; 2) q san p dan úlken emes; q san p
 ġa teń bolıwı múmkin. 13. $400n + 500m$; 155000; 155000. 15. $187200m^3$,
 $(37440m)m^3$. 16. $s = 3\frac{1}{6}c + 1\frac{2}{3}a + 2\frac{1}{2}b$, 53 km. 23. $\frac{a^2 - b^2}{(a - b)^2}$. 25. 2) 5; 4) 1,9; 6)
 -4 . 26. 2) $V = \frac{m}{p}$; 4) $a = \frac{p}{2} - b$. 27. $x = \frac{np}{1000a}$, $x = 3$. 28. $t = \frac{a}{cn}$, $t = 15$.
 30. 2) $\frac{4}{5}$; 4) -2 . 31. 2) $\frac{2}{3}$; 4) $\frac{b}{2c}$. 32. 2) $\frac{1}{b^4}$; 4) b^2 . 33. 2) $\frac{2}{7}$; 4) $\frac{b}{3a}$; 6)
 $\frac{a^2b}{5c}$. 34. 2) $\frac{7a}{5}$; 4) $\frac{1}{3(a - b)}$; 6) $-\frac{1}{3}$. 35. 2) $\frac{1}{(m + n)^3}$; 4) $3y - 2x$; 6) $\frac{2}{a(a - b)}$.
 36. 2) $\frac{2a}{m - n}$; 4) $\frac{4a - 1}{2a + 3}$; 6) $\frac{1 + b}{1 - b}$. 37. 2) $\frac{q^2}{p - q}$; 4) $\frac{m}{n}$; 6) $-\frac{x}{y}$. 38. 2) $\frac{3a + 2b}{2a + 3b}$;
 4) $-\frac{1}{ab}$. 39. 2) $\frac{1}{a + b}$; 4) $5 + x$; 6) $-\frac{c + 2}{2a}$. 40. 2) $10 - 7b$; 4) $\frac{y}{5 + y}$; 6) $\frac{5ab}{a^2 - b^2}$.
 41. 2) $\frac{1}{b + 7}$; 4) $\frac{1}{1 - 2p}$. 42. 2) $\frac{4a + 1}{4a - 1}$; 4) $\frac{10(m + n)}{3(m - n)}$. 43. 2) $n - m$; 4) $\frac{1}{5 - 2x}$.
 44. 2) $\frac{3y - 4x}{3y + 4x}$; 4) $\frac{6 - c}{6 + c}$; 6) $\frac{3c - 2b}{a}$. 45. 2) $a + 1$; 4) $\frac{1}{2}$. 46. 2) $\frac{b}{ab}$ hám $\frac{2a}{ab}$; 4)
 $\frac{2a}{2b}$ hám $\frac{a}{2b}$; 6) $\frac{32}{60}$ hám $\frac{25}{60}$. 47. 2) $\frac{9x^2}{12xy}$, $\frac{72}{12xy}$ hám $\frac{16y^2}{12xy}$; 4) $\frac{2ax^2}{4x^3}$ hám $\frac{b}{4x^3}$.

48. 2) $\frac{6b^2}{2b}$ ҳам $\frac{a^2}{2b}$; 4) $\frac{2b^2}{6ab}$, $\frac{9ac}{6ab}$, $\frac{6a^2b^2}{6ab}$. 49. 2) $\frac{3a^2}{18a^2b^2}$, $\frac{2(a^2+b^2)}{18a^2b^2}$ ҳам $\frac{a(3-a^2)}{18a^2b^2}$;

4) $\frac{21y^3}{60x^4y^4}$, $\frac{310x^3y}{60x^4y^4}$ ҳам $\frac{80x^2}{60x^4y^4}$. 50. 2) $\frac{6a}{(a-1)a}$ ҳам $\frac{2(a-1)}{(a-1)a}$; 4) $\frac{8a^2}{12(a+1)}$ ҳам $\frac{15a^2}{12(a+1)}$. 51. 2) $\frac{7a(3x+y)}{9x^2-y^2}$ ҳам $\frac{6b(3x-y)}{9x^2-y^2}$; 4) $\frac{6x}{8x+8y}$ ҳам $\frac{x}{8x+8y}$. 52. 2) $\frac{7a}{x^2-9}$ ҳам $\frac{a(x-3)}{x^2-9}$; 4) $\frac{6x(x+y)}{x^2-y^2}$, $\frac{7xy(x-y)}{x^2-y^2}$ ва $\frac{3}{x^2-y^2}$. 53. 2) $\frac{28c(b+c)}{70(b^2-c^2)}$, $\frac{6a^2}{70(b^2-c^2)}$ ҳам $\frac{35b(b-c)}{70(b^2-c^2)}$; 4) $\frac{15x(x+1)}{12x(x^2-1)}$, $\frac{-48x^2}{12x(x^2-1)}$ ҳам $\frac{-48x^2}{12x(x^2-1)}$ ва $\frac{4(x-1)}{12x(x^2-1)}$. 54. 2) $\frac{5a}{b^3}$; 4) $\frac{x-y}{n+a}$. 55. 2) $\frac{2a}{c^2}$; 4) $\frac{7}{a^2}$; 6) $\frac{8}{ab}$. 56. 2) $\frac{11}{28}$; 4) $\frac{3}{5b}$; 6) $\frac{3ad-b}{12d}$. 57. $\frac{15+ab}{5a}$;

4) $\frac{2+7b}{b}$. 58. 2) $\frac{2c+4c^2-3}{c^2}$; 4) $\frac{mn-kn^2+m^2}{n^2}$. 59. 2) $\frac{k-n}{mnk}$; 4) $\frac{bd+ba}{acd}$; 6) $\frac{2n^2-3m}{mn^3}$.

60. 2) $\frac{4a^4-21cb^3}{18a^3b^4}$; 4) $\frac{20y-21x+22}{28x^2y^2}$; 6) $\frac{b(cd^2+d+c)}{(cd)^2}$. 61. 2) $\frac{3x}{2(1-x)}$; 4) $\frac{8y-25x}{10(y-3)}$.

62. 2) $\frac{11}{10(b+1)}$; 4) $\frac{5x}{8(x+y)}$. 63. 2) $\frac{5b^2-2a^2}{ab(x+y)}$; 4) $\frac{a+b-y}{ab}$. 64. 2) $\frac{2(2a+3)}{a(1-a)}$; 4) $\frac{67b-3a}{40(a^2-b^2)}$. 65. 2) $\frac{x-1}{x^2-9}$; 4) $\frac{2x^2+3x+2}{x^2-16}$. 66. 2) $\frac{6n-47}{n^2-49}$; 4) $\frac{24y^2+y+1}{1-9y^2}$. 67. 2) $\frac{13a+4}{(3a+1)^2}$. 68. 2) $\frac{2-11x}{(3x+1)^2}$; 4) $\frac{4-7n+7m}{(n-m)^2}$; 6) $\frac{2x^2+18}{(x^2-9)^2}$. 69. 2) $\frac{b^2-3b}{b-2}$; 4) $\frac{1}{a+1}$. 70. 2) $-\frac{1}{x+y}$; 4) $\frac{2(24-a)}{4a^2-9}$. 71. 2) $\frac{b-3b^2-14}{6(b^2-1)}$; 4) $\frac{28n^2-4m^2+9mn}{m(4n^2-m^2)}$; 6) $\frac{4a^2-4a-b}{a^2+2a}$. 72. 2) $\frac{2a}{a^3+8}$; 4) $-\frac{6m}{m^3-27}$. 73. 2) $-\frac{12}{19}$. 74. 2) $\frac{4}{13}$; 4) $\frac{15}{2}$. 75. 2) $\frac{k^2}{mn}$; 4) $\frac{3mk}{4nd}$; 6)

$$\frac{2a^2b^2}{c^3}. \text{ 78. 2) } 2; \text{ 4) } \frac{a}{bc}; \text{ 6) } \frac{ac}{b}. \text{ 79. 2) } \frac{k^2}{mn}; \text{ 4) } \frac{3md}{2nk}; \text{ 6) } \frac{15a^2c^2}{d}. \text{ 80. 2) } \frac{18a^2}{7}; \text{ 4) }$$

$$\frac{1}{a}; \text{ 6) } \frac{a^3b^3}{d^2}. \text{ 81. 2) } \frac{2y}{5c^3}; \text{ 4) } \frac{2d^2a^2}{3c}; \text{ 6) } \frac{22p^3n}{m^4}. \text{ 82. 2) } 10a^2b; \text{ 4) } \frac{1}{4a^2b}. \text{ 83. 2) } \frac{2b}{a};$$

$$\text{4) } 3b; \text{ 6) } a - b. \text{ 84. 2) } \frac{b}{3(1+a)}; \text{ 4) } \frac{1}{3m^2(m+n)}; \text{ 6) } \frac{5}{3(a-b)}. \text{ 85. 2) } \frac{-3x^2(x+y)}{2(x^2+y^2)}; \text{ 4) }$$

$$\frac{-18(n-m)^2(n+m)}{n(n+p)^2}; \text{ 6) } \frac{1}{a^2-b^2}. \text{ 86. 2) } b-3; \text{ 4) } (a-1)(2a-1). \text{ 87. 2) } \frac{2(a+1)}{3}; \text{ 4) } 1;$$

$$\text{6) } \frac{b^2}{b^2+1}. \text{ 88. 2) } \frac{a^2(b^2-1)}{b^2}; \text{ 4) } \frac{2(m+n)}{n}. \text{ 89. 2) } \frac{4ab}{a^2-b^2}; \text{ 4) } \frac{1}{6(c+d)}. \text{ 90. 2) }$$

$$\frac{9z}{z+2}; \text{ 4) } \frac{m+5}{m-2}. \text{ 91. 2) } \frac{b}{a+b}; \text{ 4) } \frac{1}{c}. \text{ 92. 2) } \frac{4}{a-b}; \text{ 4) } \frac{1}{c(a+b)}. \text{ 95. } \frac{v-v_1}{v+v_1} \text{ s km.}$$

$$\text{96. 6 danadan. 97. 2) } x = -4 \text{ da } y = -\frac{1}{2}; \text{ 4) } x < 0 \text{ hám } x \geq 2 \text{ da } y \leq 1.$$

$$\text{99. 2) } (-2; 4) \text{ hám } (2; -4); \text{ 4) } (-4; -2) \text{ hám } (1; 3). \text{ 106. 2) } 2; \text{ 4) } 15. \text{ 107.}$$

$$\text{2) } 81; \text{ 4) } \frac{1}{81}. \text{ 108. 2) } -1; \text{ 4) } -4; \text{ 6) } -8. \text{ 109. 2) } x = -\frac{1}{2}; \text{ 4) } x_1 = -2; x_2 = 2.$$

$$\text{110. 2) } x - \text{qálegen san}; \text{ 4) } \frac{2}{3} \leq x < 2. \text{ 111. 2) } 5; \text{ 4) } -11; \text{ 6) } \frac{1}{30}. \text{ 112. 2) } 2;$$

$$\text{4) } 4\sqrt{6}. \text{ 113. 1) } x - 2; \text{ 2) } (3-x)^3, x \leq 3 \text{ da, } (x-3)^3, x > 3 \text{ da. 114. 3974. 117.}$$

$$\text{2) } 3; \text{ 4) } 27; \text{ 6) } \frac{1}{27}. \text{ 118. 2) } 5; \text{ 4) } \frac{1}{2}; \text{ 6) } \frac{1}{2}. \text{ 119. 2) } 49; \text{ 4) } 125. \text{ 120. 2) } 121;$$

$$\text{4) } 150. \text{ 121. 2) } 3; \text{ 4) } 2,7. \text{ 122. 2) } b; \text{ 4) } a; \text{ 6) } 1. \text{ 123. 2) } a^2b. \text{ 124. 2) } 1.$$

$$\text{125. 2) } 3. \text{ 126. 2) } b^{\frac{1}{2}}; \text{ 4) } a+b; \text{ 6) } a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}; \text{ 8) } \sqrt{c} - 1. \text{ 127. 2) } \frac{a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}+b^{\frac{1}{3}}}}; \text{ 4) }$$

$$2\sqrt{b}. \text{ 128. 2) } 2y; \text{ 4) } 2\sqrt[3]{b}. \text{ 129. 2) } 2\sqrt[3]{b}; \text{ 4) } \frac{2\sqrt[3]{a}}{a+b}. \text{ 130. 3) } \sqrt{\frac{b}{a}}. \text{ 131. 27}$$

$$\text{132. } 9a. \text{ 133. } 2b(a-b). \text{ 135. } \sqrt[3]{(a-b)^2}. \text{ 136. } -4\sqrt{x}. \text{ 137. } \sqrt{a} \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{x}).$$

138. $-\sqrt{ab}$. 139. $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x}}$. 140. 0. 141. 3. 142. 1. 143. a . 144. a^2x . 145. $-x^3$. 146. $\sqrt[6]{a}$. 147. 2) $\frac{3(x^2-2x+4)}{x^3+8}$, $\frac{x+1}{x^3+8}$ va $\frac{(x+2)^2}{x^3+8}$. 148. 2) $\frac{55b-61}{24}$; 4) $\frac{5-27b}{36}$. 149. 2) $\frac{7q-p}{3p-q}$; 4) $\frac{8a+8b-70}{2b-5}$. 150. 2) $\frac{a^2-b^2}{7}$. 151. 2) $\frac{x(x+2)(x-3)}{(x-2)(x+3)(x^2+2)}$; 4) 1. 152. 2) $-2(a-1)^2$; 4) $\frac{a^2+4}{4a}$. 153. 2) 1,8; 4) $\frac{1}{16}$. 154. 2) 51; 4) 0,04; 6) -0,1. 155. 2) 1000. 156. 2) $\sqrt[4]{x}$; 4) $\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}$. 157. 2) $\frac{95}{16}$; 4) $-609\frac{8}{27}$. 158. 2) $x - q$ älegen san; 4) $x \leq 2, x \geq 3$; 6) $0 \leq x \leq 2, x \geq 3$. 159. 2) $a+1$; 4) $a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{3}}$; 6) $a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}$.

II баp

178. 2) $\frac{1}{3} > 0,3$; 4) $-\frac{5}{8} > -0,7$. 179. 2) $b > a$; 4) $a < b$. 183. Birinshisi. 185. 2) $a < 0$; 4) $a > 0$. 186. $-9 < -3$. 187. 2) $a + 3b < -2b$. 188. 2) $8 > 6$. 189. 2) $a - 3b < 3a$. 190. 2) $a - 5 < b - 5$. 191. 2) $19 > 12$; 4) $-12 > -14$. 192. 2) $a < -0,25$; 4) $a < 2$. 193. 2) $0,9 > -2$; 4) $5 > 3$. 194. 2) $a < -2$; 4) $x < -\frac{4}{9}$. 196. 2) $-5 < 7$; 4) $7y > 1$. 197. 2) $25 < 58$; 4) $12 < 4x^2 - 1$. 204. 2) $n = 3$; 4) $n = -6$; 6) $n = -1$. 205. 2) $n = 6$; 4) $n = -3$; 6) $n = 4$. 206. 2) $x = -9$. 207. 2) $h \geq 5$; 4) $v \leq 70$. 208. 2) Duris; 4) naduris. 209. 2) duris; 4) naduris. 211. 2) $\left(\frac{5}{12}\right)^{-\frac{1}{4}} < (0,41)^{-\frac{1}{4}}$; 4) $\left(\frac{11}{12}\right)^{-\sqrt{5}} > \left(\frac{12}{13}\right)^{-\sqrt{5}}$. 212. 2)

- $x = 3$; 4) $x = 2$; 6) $x = \frac{1}{2}$. **213.** $\sqrt{\left(1\frac{1}{4} - 1\frac{1}{5}\right)^3} > \sqrt{\left(1\frac{1}{6} - 1\frac{1}{7}\right)^3}$. **214.** 2) $x = \frac{5}{2}$;
- 4) $y = 5$. **215.** 2) $x = 2,6$; 4) $x = 4$. **216.** 2) $x = -\frac{1}{3}$; 4) $x = 1$. **217.** 2) 6;
- 4) -3 . **218.** 2) $x = -1$; 4) $x = 1$. **219.** 2) $13 - x < 2$; 4) $2(x - 3) \leq 2$; 6) $2x(-4) \geq x - (-4)$. **220.** 2) Berilgen sanlardan birewi de sheshim bola almaydi; 4) $\frac{1}{2}$; 0; -1 . **221.** 2) $y > 0$; 4) 4) hesh qanday mániste; 6) $y \neq -2$.
- 222.** 2) $y < 2$; 4) $y \leq 0$. **223.** 2) $x \leq -3$; 4) $x > 0$; 6) $x < 0$. **225.** 2) $x < 14$;
- 4) $y > 9$; 6) $z \leq 4$. **226.** 2) $x \geq -8$; 4) $z > -15$; 6) $x \leq -2$. **227.** 2) $x < 6$; 4)
- $x > 5$; 6) $x \leq -2$. **228.** 2) $x \geq 3$; 4) $x > 0$; 6) $x \geq 2$. **229.** 2) $x < \frac{5}{8}$; 4) $x < -3$;
- 6) $x < 5\frac{1}{6}$. **230.** 2) $y > \frac{3}{8}$; 4) $y < \frac{5}{8}$; 6) $y > \frac{2}{3}$. **231.** 2) $y = 3$; 4) $x = 0$. **232.**
- 2) $x = -1$; 4) $x = -4$. **233.** 2) $b < -5\frac{2}{3}$; 4) $x > -1\frac{3}{7}$. **234.** 2) x — qálegen
- san; 4) x — qálegen san. **235.** 2) 2) sheshimleri joq; 4) sheshimleri joq. **236.**
- 2) $x > 2$; 4) $x > -20$; 6) $x > 0,5$. **237.** 2) $x < 1,6$; 4) $x < 0$. **238.** 2) $x \leq 7$; 4)
- $x \leq 5$. **239.** 2) $x < 0,5$; 4) $x > -0,5$. **240.** 45 ten kem emes. **241.** 2) Berilgen
- sanlardan hesh biri sheshim bola almaydi. **242.** 2) 1. **243.** 2) 0; 1; 2; 3; 4)
- -5 ; -4 ; -3 ; -2 ; -1 ; 0; 1; 2; 3; 4; 5. **244.** 2) $[-1; 3]$; 4) $(1; 2)$; 6) $(-4; -2]$.
- 245.** 2) $-3 \leq x \leq -1$; 4) $0 < x < 3$; 6) $-2 \leq x < 2$. **246.** 2) $-1 < x < 2$, $(1; 2)$;
- 4) $-4 < x \leq 0$, $(-4; 0]$. **247.** Awa. **248.** Awa. **249.** b) $-3 < x < 1$; hesh qan-
- day mániste; e) $-5 < x < 0$; hesh qanday mániste; **251.** 1) $x \geq 0,6$; 2) $x \leq -\frac{1}{3}$;
- 3) $x \geq -3,5$; 4) $x \geq -4,5$. **252.** 2) $x > 0$; 4) $x \geq -2$. **253.** 2) $x < -1$; 4) $x \leq 0$.
- 254.** 2) $3 < x < 6$; 4) $0 \leq x < \frac{1}{2}$. **255.** 2) $-1,5 \leq x < 1,5$; 4) $-0,5 \leq x \leq 7,5$. **256.**
- 2) $x \geq 4$; 4) $x > -3$. **257.** 2) $x \leq -2$; 4) $x < 4$. **258.** 2) $x \leq -2,5$; 4) $2 \leq x \leq 5$. **259.**

- 2) $-5 < x \leq -1$; 4) $0 < x \leq \frac{4}{3}$. **260.** 2) 1; 2; 4) 4; 5. **261.** 2) hesh qanday x da; 4) $0 < x < 2$. **262.** 2) $x \leq -2$; 4) $x \leq 6$. **263.** 2) 4 m den úlken, lekin 13 m den kishi. **264.** 24. **265.** 36. **267.** 2) $x_{1,2} = \pm 1,5$; 4) $x = 0$, $x_2 = -6$. **268.** 2) $x = 2$;
- 4) $x = \frac{3}{4}$. **269.** 2) $x_1 = -0,25$, $x_2 = -1,25$; 4) $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{3}$. **270.** 2) $x_{1,2} = \pm 2,1$;
- 4) $x_1 = -5$, $x_2 = 11$. **272.** 2) $-2 < x < 2$. **273.** 2) $|x| \leq 0,3$. **274.** 2) $-2,2 < x < -1,8$;
- 4) $\frac{1}{4} < x < 1\frac{3}{4}$. **275.** 2) $-3 < x < 0$; 4) $1 \leq x < 1,5$. **276.** 2) $x \leq 0,9$, $x \geq 3,1$; 4) $x < 2\frac{3}{4}$, $x > 3\frac{2}{3}$. **277.** 2) $x < -1$, $x > -\frac{1}{3}$; 4) $x \leq 0$, $x \geq 1,6$. **278.** 2) -1 ; 0;
- 4) 0; 1. **279.** 2) $-1 \leq x \leq 1\frac{2}{3}$; 4) $x \leq 0$, $x \geq 3$. **282.** 2) $\frac{1}{18}$; 4) $\frac{1}{225}$. **283.**
- 2) 0,004; 4) $\frac{1}{350}$. **284.** 2) 0,08; 4) 0,08. **285.** 3° . **286.** $\frac{1}{7}$. **287.** Duris. **289.**
- 2) $141 \leq x \leq 143$; 4) $895 \leq v \leq 905$; 6) $m - n \leq y \leq m + n$. **290.** 2) 2,6 hám 2,8;
- 4) $-6,1$ hám $-5,7$. **291.** 2) Yaq; 4) awa. **292.** 2) Awa; 4) yaq. **293.** 2) 5,5;
- 4) 3,9; 6) 0,575. **298.** Yaq. **301.** 2) 0,7; 4) 3,7. **302.** 2) 0,07; 4) 1,67; 6) 5,07. **303.** 2) 0,385; 4) 7,643. **304.** 3 hám 7. **305.** 2) 0,41; $\approx 3,7\%$; 4) 0,108; 10,8%. **306.** 2) $\approx 2\%$. **307.** 2) Ekinshisi. **308.** $\approx 1\%$; 0,1%; 0,01%.
- 309.** Birinshisi. **310.** 2) 0,000398. **311.** Ekinshisi. **312.** 2) $x_1 = 0$, $x_2 = 1\frac{1}{3}$;
- 4) $x_1 = -4$, $x_2 = 0,5$. **313.** 2) $x = 0,5$; 4) $x_1 = 3$, $x_2 = -2$. **314.** 2) $2 + b - a > 0$; 4) $a - 3 - b < 0$. **315.** 2) y -qálegen san; 4) $x > 7$. **316.** 2) $x < 2$. **317.** 2) $x_1 = 3,4$,
- $x_1 = -1,4$; 4) $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{3}$. **318.** 2) $x \leq -2,4$, $x \geq 4,4$; 4) $x \leq -2$, $x \geq 1$. **321.** 2)
- Hesh bir mániste; 4) Hesh bir mániste; **322.** 34. **323.** 47. **326.** $3,5416 \cdot 10^{-5} \Omega$. **327.** 67J. **329.** 18800; 20400; 13200; 4600.

III баp

- 345.** 2) $-x^2+9=0$; 4) $x^2=0$. **346.** 2) $x^2-4x-9=0$; 4) $5x^2+1=0$. **347.** 2) 0; 1; 4) 1; 6) berilgen sanlardan birewi de koren bolmaydi. **350.** 2) $x_{1,2} = \pm \frac{4}{7}$; 4) $x_{1,2} = \pm 1,5$; 6) $x_{1,2} = \pm \sqrt{13}$. **351.** 2) $x_{1,2} = \pm 11$; 4) $x=0$; 6) haqiqiy korenleri joq. **352.** 2) $x_1=0$, $x_2=2$; 4) $x_1=0$, $x_2=0,6$; 6) $x=-3$. **353.** 2) $x=0$; 4) $x_{1,2} = \pm 3$; 6) $x_{1,2} = \pm 3\sqrt{3}$; 8) $x_{1,2} = \pm 20$. **354.** 2) $x_1=0$, $x_2=-5$; 4) $x_1=0$, $x_2=0,04$; 6) korenleri joq. **355.** 2) $x_{1,2} = \pm 1\frac{1}{4}$; 4) $x_{1,2} = \pm \sqrt{5}$; 6) $x_{1,2} = \pm 1\frac{1}{3}$. **356.** $x_{1,2} = \pm 2$; 4) $x_{1,2} = \pm 1\frac{1}{3}$. **357.** 2) $x_1=0$, $x_2=4$; 4) $x_1=0$, $x_2=-2,5$. **358.** 2) $x_1=0$, $x_2=2\frac{3}{19}$. **359.** 2) $m=9$; 4) $m=64$; 6) $m=6$. **360.** 2) $x_1=2$, $x_2=-6$; 4) $x_1=8$, $x_2=2$; 6) $x_{1,2} = -4 \pm \sqrt{23}$. **361.** $x_1 = \frac{3}{5}$; $x_2 = -\frac{1}{5}$. **362.** 1) $x_1=1$, $x_2=4$; 2) $x_1=5$, $x_2=-2$. **363.** 1) $x_1=1$, $x_2=-2,5$; 2) $x_1=2$, $x_1=-\frac{3}{5}$. **364.** 2) 0,4; 4) 85. **365.** 2) $x_1=1$, $x_2=0,5$; 4) $x_1=3$, $x_2=0,5$; 6) $x_1=2$, $x_2=\frac{3}{4}$. **366.** 2) $x_1=4$, $x_2=-0,5$; 4) $x_1=-1$, $x_2=\frac{1}{3}$; 6) $\frac{-6 \pm \sqrt{6}}{3}$; 8) $x_1=1$, $x_2=-\frac{4}{3}$. **367.** 2) $x=\frac{1}{4}$; 4) $x=-\frac{1}{6}$. **368.** 1), 2), 3), 4) haqiqiy korenler joq. **369.** 2) eki; 4) birewi de joq. **370.** Haqiqiy korenleri joq; 4) $x=2,5$; 6) $x_1=4$, $x_2=-1$. **371.** 2) $x_1=1$, $x_2=0,2$; 4) $x_1=7$, $x_2=-8$; 6) $x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{7}}{7}$. **372.** 2) $x_1=7$, $x_2=-11$; 4) $x_1=0,6$, $x_2=-3$. **373.** 2) $x_1=0,5$, $x_2=-1,5$; 4) $x_1=5$,

- $x_2 = \frac{1}{5}$. **376.** 2) $x_1=7$, $x_2=-1$; 4) $x_1=4$, $x_2=-10$; 6) $x_1=2$, $x_2=-1$. **381.** 2) $x^2-5x+6=0$; 4) $x^2-3x-18=0$. **382.** 2) $x_1=3$, $x_2=4$; 4) $x_1=-1$, $x_2=-7$; 6) $x_1=3$, $x_2=-5$. **383.** 2) $(x-1)(x+5)$; 4) $(x+7)(x-6)$; 6) $(2x+1)(4x+3)$; 8) $(x+2)(1-4x)$. **384.** 2) $x+6$; 4) $\frac{1}{x+7}$; 6) $\frac{x+3}{3x+1}$. **385.** 2) $x_{1,2} = \sqrt{5} \pm 2$; 4) $x_{1,2} = 2(\sqrt{7} \pm \sqrt{6})$. **386.** 2) $x(x+7)(x-3)$; 4) $x(x-11)(x+2)$. **387.** 2) $\frac{x-9}{x+8}$; 4) $\frac{9-x}{x-5}$. **388.** 2) $-\frac{x}{(x+3)^2}$; 4) $\frac{x-1}{x(x+10)}$. **389.** 2) $x_{1,2} = \pm 1$, $x_{3,4} = \pm 2$; 4) $x_{1,2} = \pm 1$, $x_3 = \pm 7$. **390.** 2) $x_{1,2} = \pm 1$; 4) $x_{1,2} = \pm \sqrt{5}$. **391.** 2) $x_1=7$, $x_2=3\frac{1}{3}$; 4) $x_1=40$, $x_2=-20$, 6) $x_1=6$, $x_2=-\frac{2}{3}$. **392.** 2) $x_{1,2} = \pm 10$; 4) korenleri joq; 6) $x=-3$. **393.** 2) Joq. **402.** 2) 14 hám 15. **403.** 2) 19 hám 21. **404.** 10 cm, 40 cm. **405.** 140 m, 175 m. **406.** 100 km/s, 80 km/s. **407.** 10 km/s. **408.** 20 kún, 30 kún. **409.** Kvadrattín tárepí 15 cm. **410.** 9cm, 40 cm. **411.** 18 km/s, 15 km/s. **412.** 15 kún, 10 kún. **413.** 2) $x_{1,2} = \pm 5$; 4) $x_1=0$, $x_2=7,5$. **414.** 2) $x_1=13$, $x_2=-4$; 4) $x_1=3,6$, $x_2=-7$. **415.** 2) $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{6}$; 4) $x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{7}}{3}$. **416.** 2) eki; 4) bir. **417.** 2) $(x-8)(x-2)$; 4) $(x-2)(2x+1)$. **418.** 2) $x(x+2)$; 4) $\frac{5x+1}{x-3}$. **419.** 2) $x_{1,2} = \pm 3$, $x_{3,4} = \pm 2$; 4) $x_{1,2} = \pm \sqrt{3}$, $x_{3,4} = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$. **420.** 2) $x_2 = \pm \sqrt{5}$; 4) $y=1$. **421.** 20 km/s. **422.** 15 km/s. **423.** 3 kún, 5 kún. **424.** 2) $x_1=0$, $x_2=2$. **425.** 2) $x_2=0,5$; 4) $x_1=7$, $x_2=-13$. **426.** 2) $x_1=0$, $x_2=-5$; 4) $x_{1,2} = \pm 4$. **427.** 2) $x_1=9$, $x_2=-12$; 4) $x_1=3$, $x_2=-6$. **428.** 2) Birewi de joq; 4) eki. **429.** 2) $x_1=3$, $x_2=1,4$. **430.** 36 kúnde. **431.** 1 saat 40 min hám 1 saat 20 minut yaki 2 saat hám 1 saat 40 min. **432.** 12 saat, 6 saat. **437.** 3 saat. **439.** 12 kún, 8 kún. **440.** 25 saat, 20 saat. **441.** 60 km/s. **442.** 8 kún, 12 kún. **444.** 120; -120. **445.** 6.

452. 7 kúnde. **453.** 20 km/s. **454.** 3 km/s. **455.** 8 kún. **456.** 37. **457.** 82. **458.** 20 kún, 30 kún, 60 kún. **459.** 9 saat. **460.** 10%. **461.** 5%. **462.** 10 km. **463.** 16 nafar. **464.** 35 nafar. **465.** 60 km/s, 50 km/s. **466.** 55 km/s.

IV b a p

482. 6 ta. **483.** 18. **484.** 27. **485.** 9. **487.** 9. **491.** 15. **492.** 120. **494.** d) $n(n-1):2$. **496.** 45. **497.** 2) 900. **499.** $16 \cdot 15 \cdot 14 = 3360$. **500.** 30. **501.** 1) 125; 2) 625. **503.** 24. **504.** 10. **505.** $12 \cdot 8 \cdot 7 = 672$. **506.** $64 \cdot 49 = 3136$. **508.** 1) $4 \cdot 60$; 2) $24 \cdot 58$; 3) $36 \cdot 55$; jámi 3612 usil. **509.** 6. **510.** 12. **512.** 20. **513.** 14. **521.** 1) $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$; 2) $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1080$. **522.** $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 3 = 540$. **523.** $26 \cdot 25 \cdot 24 = 15600$. **524.** $8 \cdot 7 \cdot 5 = 280$. **525.** 10000. **527.** 24. **528.** 1) 6; 2) 15; 3) 45; 4) $n \cdot (n-1):2$. **529.** $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$. **530.** 4.

V b a p

544. 2) $\frac{22}{35}$; 4) $-\frac{5}{6}$; 6) 3,485. **545.** $7\frac{1}{2}$; 36. **546.** $2a(30-a)$; -128. **547.** $a \cdot 100 + b \cdot 10 + c$, $c \cdot 100 + b \cdot 10 + a$ ta. **548.** $x = 1000a + c$. **549.** 2) $\frac{2n(2n-k)}{2n+k}$; 4) $\frac{2q(m-2q)}{m+2q}$. **550.** 4) $\frac{m+7n}{10}$. **552.** 2) 1. **556.** 2) $y \geq -2$; 4) $x > -4$; 6) $x \leq 11\frac{1}{3}$. **557.** 2) -5; -4; -3; -2; -1; 0; 4) 4. **558.** 2) $\frac{2}{9} < x \leq 32$; 4) $x > 7,2$. **559.** 2) -15; -14; ...; -1; 0. **560.** 2) $x_1 = 8,1$, $x_2 = -2,1$; 4) $x_1 = 4$, $x_2 = -3$; 6) $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{6}{7}$. **561.** 2) $x \leq -3,4$; $x \geq 7,4$; 4) $x \leq -2\frac{1}{3}$; $x \geq 1$. **562.** 2) $2\frac{1}{3}$; 4) $\frac{2x^2}{3y}$. **563.** 2) $3 - \sqrt[3]{2}$; 4) $6\sqrt{7}$. **564.** 2) $2(\sqrt{0,5})^{0,3} < (2\sqrt{0,5})^{0,37}$. **565.** 2) $\sqrt{x}$; 4) $9b^{-4}$. **566.** 2) $5ab\sqrt{b}$. **567.** 2) $-\sqrt{3x^2}$; 4) $\sqrt{5a^2}$. **568.** 2) $-8\frac{1}{8}$. **569.** 2) $-4\frac{5}{6}$. **570.** 2) $x = \frac{1}{9}$; 4) $x = 0$. **571.** 2) Joq. **573.** 2) $-\frac{\sqrt{a}}{b}$; 4) $\sqrt{a} + \sqrt{b}$. **574.** 1) $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{7}}{\sqrt{2}}$; 2) $\frac{1 + \sqrt{7}}{\sqrt{2}}$. **575.** 2) $a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}$.

576. 2) $x_{1,2} = \pm\sqrt{11}$; 4) $x_1 = 0, x_2 = -5$; 6) $x_1 = 0, x_2 = 12$. **577.** 2) $y_1 = 0, y_2 = 9$; 4) $x_1 = 0, x_2 = 9$; 6) $x_{1,2} = \pm 1,5$. **582.** $k > \frac{9}{16}$. **583.** $k_1 = 3, k_2 = -1$. **584.** 2) $x_1 = 1,2, x_2 = -2$; 4) $x = 3$; 6) $x = 2$. **586.** 2) 0,004; 4) $\frac{1}{1375}$. **588.** $\approx 0,1\%$.

“Ózińizdi tekserip kóriń” tapsırmalarına juwaplar

I bap. 1. $b \neq 0, c \neq 1, d \neq -2$. 2. 1) $\frac{1}{a}$; 2) $\frac{4ab}{a^2 - b^2}$; 3) 4; 4) $\frac{a-b}{b}$. 3. $\frac{1}{x-3}$; -3. 4. 1) $8\frac{3}{8}$; 2) 16. 5. 1) 6; 2) $(y+x)xy$. 6. $a^{\frac{3}{4}}$; 27.

II bap. 2. 1) $x < 2,4$; 2) $x \geq -15$; 3) $x < 5$. 3. 1) $4\frac{1}{3} < x < 6\frac{1}{4}$; 2) $x \geq 3$; 3) $x < -5$.

III bap. 1. 1) $x = 0$; 2) $x_1 = -1, x_2 = 2$; 3) $x_{1,2} = \pm\frac{1}{2}$; 4) $x_1 = 0, x_2 = 1\frac{2}{3}$; 5) $x_{1,2} = \frac{1}{2}$; 6) $x_1 = 17, x_2 = -1$; 7) $x_1 = -2, x_2 = \frac{1}{3}$; 8) Sheshimi joq. 2. 1) $(x-2)(x+3)$; 2) $(x+1)(2x-3)$. 3. 9 km/s; 12 km/s.

IV. bap. 1. $18 \cdot 17 = 306$. 2. $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 87480$. 3. $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. 4. $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$. 5. 1) 1,2; 2) 4; 3) 2,5; 4) 15.

Qızıqlı máselelerge juwaplar

1. 10 metr. 2. Múmkin emes. 3. Tárepleri 3 hám 6 birlik bolğan tuwrı tórtmúyeshlik yaki tárepi 4 birlik bolğan kvadrat. 4. Sáykes túrde 8; 12; 6; -1. 5. $(x^2 + x + 1)(x^2 - x - 2006)$.

MAZMUNÍ

7-klass «Algebra» kursín tákirarlaw	3
---	---

I BAP

ALGEBRALÍQ BÓLSHEKLER

1-§. Algebralíq anlatpalar.....	7
2-§. Algebralíq bólshek. Bólsheklerdi qisqartiriv	12
3-§. Bólimlerdi uliwma bóliwshige keltiriv.....	18
4-§. Algebralíq bólsheklerdi qosiw hám aliw.....	22
5-§. Algebralíq bólsheklerdi kóbeytiw hám bóliw.....	27
6-§ Bólshek-racional anlatpalardi onliq bólsheklerge30 almastiriv	
7-§. $y = \frac{k}{x}$ Funkciya qásiyetleri, grafigi.....	34
8-§. Natural kórsetkishli dárejeniń arifmetikalıq koreni hám onıń qáğıydaları....	39
9-§. Racional kórsetkishli dáreje hám onıń qáğıydaları.....	42
10-§. Racional kórsetkishli dáreje qatnasqan algebralıq anlatpalardi	
ápiwayılastırın.....	49
<i>I bapqa tiyisli shınıǵıwlar.....</i>	53
<i>I bapqa tiyisli sınav esapları – testler.....</i>	58
<i>Tariyxıy maǵlıwmatlar.....</i>	61
<i>Ámeliy-usınılǵan hám pánlerara baylanıslı máseleler.....</i>	62

II BAP

TEŇSIZLIKLER

11-§. Sanlı teńsizlikler.....	68
12-§. Sanlı teńsizliklerdiń tiykarǵı qásiyetleri.....	71
13-§. Teńsizliklerdi qosiw hám kóbeytiw.....	75
14-§. Sanlı teńsizliklerdi dárejege kóteriwi.....	80
15-§. Bir belgisizli teńsizlikler.....	85
16-§. Bir belgisizli teńsizlikler sistemaları. Sanlı aralıqlar.....	94
17-§. Sannıń moduli. Modul qatnasqan teńleme hám teńsizlikler.....	105
18-§. Shamalardıń juwıq mánisleri. Juwıqlasıw qáteligi.....	111
19-§. Qátelikti bahalaw.....	114

20-§. Sanlardı dóńgeleklew.....	117
21-§. Salıstırmalı qátelik.....	119
<i>II bapqa tiyisli shınıǵıwlar</i>	121
<i>II bapqa tiyisli shınıǵıwlar – testler</i>	124
<i>Tariyxıy máseleler</i>	127
<i>Tariyxıy maǵlıwmatlar</i>	128
<i>Ámeliy-usınılǵan hám pánlerara baylanıslı máseleler</i>	129

III BAP

kvadrat teńlemeler

22-§. Kvadrat teńleme hám onıń korenleri.....	135
23-§. Toliq emes kvadrat teńlemeler.....	139
24-§. Kvadrat teńlemelerdiń korenlerin tabıw formulaları. Diskriminant.....	141
25-§. Viet teoreması. Kvadrat úsh aǵzalını sızıqlı kóbeytiwshilerge jiklew.....	149
26-§. Kvadrat teńlemege keltiriletuǵın teńlemeler.....	156
27-§. Kvadrat teńlemeler járdeminde máseleler sheshiw.....	163
<i>III bapqa tiyisli shınıǵıwlar</i>	167
<i>III bapqa tiyisli shınıǵıwlar – testler</i>	170
<i>Tariyxıy máseleler</i>	172
<i>Tariyxıy maǵlıwmatlar</i>	175
<i>Ámeliy-usınılǵan hám pánlerara baylanıslı máseleler</i>	176

IV BAP

MAǒLÍWMARLAR ANALIZI

28-§. Maǵlıwmatlar analizi. Maǵlıwmatlardı beriw.....	188
29-§. Ortasha máni. Moda. Mediana.....	193
30-§. Tańlaw usılı menen kombinatoriyalıq máselelerdi sheshiw.....	200
31-§. Kombinarikanıń tiykarǵı qaǵıydası hám onı máseleler sheshiwde qollanıw... ..	203
<i>IV bapqa tiyisli shınıǵıwlar</i>	210
<i>IV bapqa tiyisli sımaq shınıǵıwları – testler</i>	213
<i>Ámeliy-usınılǵan hám pánlerara baylanıslı máseleler</i>	215

V BAP

8-klass «Algebra» kursın tákirarlaw ushın shınıǵıwlar.....	219
Shınıǵıwlarǵa juwaplar.....	227

Alimov Sh. A.

Algebra: Uliwma orta bilim beriw mektepleriniń 8-klassı ushın sabaqlıq/
Sh.A.Alimov, A.R.Xalmuxamedov, M.A. Mirzaxmedov.
A51 – 4-basılımlı. – Tashkent: „O‘qituvchi“ BPDÚ, 2019. – 240 b.

ISBN 978-9943-5750-1-1

UO‘K: 512(075.3)=512.121
KBK 22.14ya72

**Shavkat Arifdjanovich Alimov,
Alimdján Raximovich Xalmuxamedov,
Mirfazil Abdilxakovich Mirzaxmedov**

ALGEBRA

(Qoraqalpoq tilida)

Umumiy o‘rta ta‘lim maktablarining

8-sinfi uchun darslik

Qayta ishlangan 4-nashri

*„O‘QITUVCHI“ nashriyot-mabaa ijodiy uyi
Toshkent – 2019*

Original-maket «DAVR NASHRIYOTI» MCHJ da tayyorlandi.

Awdarmashi G. Nizanova

Redaktori G. Nizanova

Kórkem dizayneri R. Zaparov

Korrektori G. Nizanova

Kompyuterde betlewshi H. Safaraliyev

Tekstin teriwshi S. Niyazova

Baspa licenziyası AI 012. 20.07.2018. Original-maketten basıwǵa ruxsat etildi
26.07.2019. Ólshemi 70×90^{1/16}. Tayms garniturası. Ofset usılında basıldı. Ofset qaǵazı.
Shártli baspa t. 17,55. Esap-poligraf t. 16,6. Nusqası 1 315 nusqa. Buyıtpa №

Ózbekstan Respublikası Prezidenti Administraciyası janındaǵı Málimleme hám ǵalaba
kommunikaciýalar agentliginiń „O‘qituvchi“ baspa-poligrafıyalıq dóretiwshilik úyi.

Tashkent – 206, Yunusobod rayoni, Yangishahar kóshesi, 1-úy.

Shártnama № 58-19.

Ijarağa berilgen sabaqlıqtıń jaǵdayın kórsetiwshi keste

T/n	Oqıwshınıń atı familiyası	Oqıw jılı	Sabaqlıqtıń alıńandaǵı jaǵdayı	Klass basshısınıń qol tańbasi	Sabaqlıqtıń qaytıp tapsırılǵandaǵı jaǵdayı	Klass basshısınıń qol tańbasi
1.						
2.						
3.						
4.						
5.						

**Sabaqlıq ijaraǵa berilgende hám, oqıw jılınıń juwmaǵında qaytarıp
alıńanda joqarıdaǵı keste klass basshısı tárepinen tómendegishe
bahalawǵa muwapıq toltırıladı**

Jańa	Sabaqlıqtıń paydalanıwǵa birinshi berilgendegi jaǵdayı.
Jaqsı	Muqabası pútın, sabaqlıqtıń tiykarǵı bóliminen ajıralmaǵan. Barlıq betleri bar, jırılmaǵan, koshpegen, betlerinde jazıw hám sıızılar joq.
Qanaatlanarlıq	Muqaba jazılgen, bir qansha sıızılıp, shetleri jelingen, sabaqlıqtıń tiykarǵı bóliminen ajırlıw jaǵdayı bar, paydalanıwshı tárepinen qanaatlanarlıq ońlangan. Kóshken betleri qayta ońlangan, ayırım betleri sıızılǵan.
Qanaatlandırmaıdı	Muqaba sıızılǵan, ol jırılǵan, tiykarǵı bólimnen ajıralǵan yamasa pútkilley joq, qanaatlandırarsızlıq ońlangan. Betleri jırılǵan, betleri jetispeydi, sıızıp, boyap taslangan, sabaqlıqtı tiklewge bolmaıdı.